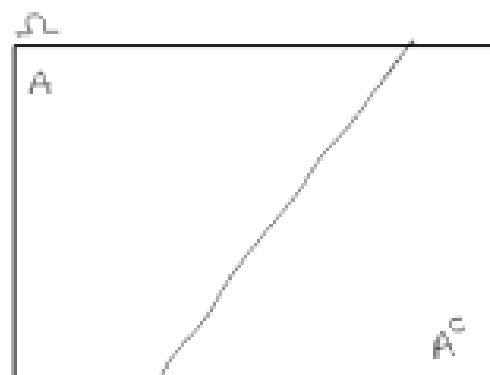


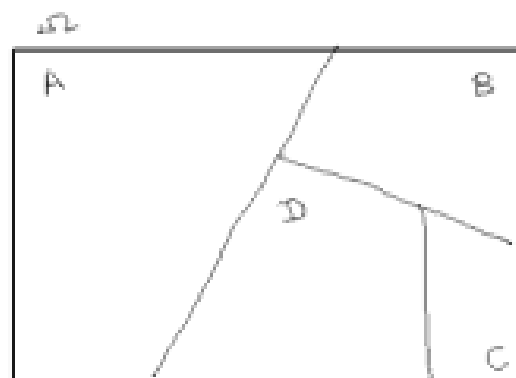
Eventos



$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$A \cup A^c = \Omega$$

A y A^c son complementarios



$$A \cap B = \emptyset \quad A \cap C = \emptyset \quad \dots \quad C \cap D = \emptyset$$

$$A \cup B \cup C \cup D = \Omega$$

A, B, C, D son particiones

Ejercicio

Sea el experimento aleatorio: Observar el estado de entrega (T = Entregado a tiempo, R = Retrasado) de tres pedidos realizados por una tienda virtual en un mismo día. El espacio muestral asociado será:

$$\Omega = \{TTT, TTR, TTR, RTT, TRR, RTR, RRT, RRR\} \quad n(\Omega) = 8$$

Se definen los siguientes eventos:

$$A_1 = \{\text{Al menos dos pedidos fueron entregados a tiempo}\} = \{TTT, TTR, TTR, RTT\}$$

$$A_2 = \{\text{Exactamente un pedido fue entregado con retraso}\} = \{TTR, TTR, RTT\}$$

$$A_3 = \{\text{Como máximo un pedido fue entregado a tiempo}\} = \{TRR, RTR, RRT, RRR\}$$

$$A_4 = \{\text{Los tres pedidos tuvieron el mismo estado}\} = \{TTT, RRR\}$$

A partir de esta lista de eventos:

- Identifique eventos mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes.
- Identifique eventos colectivamente exhaustivos y no colectivamente exhaustivos.
- Identifique eventos complementarios.

$$a. \text{ M. E. } \Rightarrow A_1 \text{ y } A_3, A_2 \text{ y } A_4, A_2 \text{ y } A_3 \quad \text{No M. E. } \Rightarrow A_1 \text{ y } A_4, A_1 \text{ y } A_2$$

$$b. \text{ C. E. } \Rightarrow A_1 \text{ y } A_3 \quad \text{No C. E. } \Rightarrow A_1 \text{ y } A_2$$

$$c. \text{ Complementarios } \Rightarrow A_1 \text{ y } A_3$$

Ejercicio

En una encuesta a 500 estudiantes sobre confianza en instituciones electorales, cada participante debía escoger exactamente una opción: {Nada, Poco, Suficiente, Bastante, No sabe/No responde}.

Se definen los siguientes eventos al seleccionar un estudiante al azar:

$A = \{\text{El estudiante declara alta confianza en el ONPE (suficiente o bastante)}\} \rightarrow \{s, b\}$

$B = \{\text{El estudiante declara baja confianza en el ONPE (poco o nada)}\} \rightarrow \{n, p\}$

$C = \{\text{El estudiante responde No sabe/No responde}\} \rightarrow \{ns\}$

$D = \{\text{El estudiante declara algún grado de confianza en la ONPE (poco, suficiente o bastante)}\} \rightarrow \{p, s, b\}$

$E = \{\text{El estudiante declara una posición determinada (no marca 'No sabe/No responde')}\} \rightarrow \{n, p, s, b\}$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- ▶ A y B son eventos mutuamente excluyentes $\rightarrow V$, porque $A \cap B = \emptyset$
- ▶ D y B son eventos mutuamente excluyentes $\rightarrow F$, porque $D \cap B \neq \emptyset$
- ▶ A, B y C son eventos colectivamente exhaustivos $\rightarrow V$, porque $A \cup B \cup C = \Omega$
- ▶ E y C son eventos complementarios $\rightarrow V$, porque $E \cap C = \emptyset$ y $E \cup C = \Omega$
- ▶ B y E son eventos complementarios $\rightarrow F$, porque $B \cap E \neq \emptyset$ y $B \cup E \neq \Omega$

Ejercicio

Una empresa revisa un lote de 14 dispositivos electrónicos, de los cuales 8 están en buen estado y 6 presentan defectos menores. Se seleccionan 5 dispositivos al azar y sin reposición para una inspección de control de calidad más rigurosa.

- Defina el espacio muestral.
- ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos dispositivos estén en buen estado? 0.28
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro dispositivos presenten defectos? 0.063

a. E = Buen estado, D = Con defectos menores

$$\Omega = \{BBBBB, BBBBD, BBBDB, \dots, DDDDD\}$$

b. M = {dos dispositivos están en buen estado}

$$n(M) = \binom{8}{2} \times \binom{6}{3} = 560$$

$$n(\Omega) = \binom{14}{5} = 2002$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{560}{2002} = 0.28$$

c. N = {Al menos 4 dispositivos presentan defectos}

$$N = \{DDDD B, DD DDD, \dots, DDD DD\}$$

$$n(N) = \binom{6}{4} \binom{8}{1} + \underbrace{\binom{6}{5} \binom{8}{0}}_1 = 126$$

$$P(N) = \frac{n(N)}{n(\Omega)} = \frac{126}{2002} = 0.063$$

Ejercicio

Si una empresa constructora se presenta a una licitación de tres proyectos de carreteras. Considerando que es igualmente probable que gane (G) o pierda (P) la empresa cada proyecto.

- Defina el espacio muestral.
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos dos proyectos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane los tres proyectos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no gane ningún proyecto?

$$a. \Omega = \{ GGG, GGP, GPG, PGG, GPP, PGP, PPG, PPP \}$$

$$b. A = \{ \text{ganar } \underbrace{\text{por lo menos 2 proyectos}}_{2 \text{ o más}} \} = \{ GGG, GGP, GPG, GGP \} \Rightarrow n(A) = 4, P(A) = 4/8$$

$$c. B = \{ \text{ganar los 3 proyectos} \} = \{ GGG \} \Rightarrow n(B) = 1, P(B) = 1/8$$

$$P(X \cup Y) \neq P(X) + P(Y)$$

$$d. C = \{ \text{no gana ningún proyecto} \} = \{ PPP \} \Rightarrow n(C) = 1, P(C) = 1/8$$

* B y C son mutuamente excluyentes porque $B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(B \cap C) = 0$, pero no son colectivamente exhaustivos porque $B \cup C \neq \Omega$. por lo tanto, B y C no son complementarios

Ejercicio

En un curso universitario hay 24 estudiantes: 10 con alto desempeño (A), 9 con desempeño medio (M) y 5 con bajo desempeño (B). El profesor selecciona al azar a 7 estudiantes sin reposición para presentar un trabajo grupal.

A: 10
M: 9
B: 5

- Defina el espacio muestral
- ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo esté conformado por 3 A, 2 M y 2 B?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 5 de los 7 estudiantes tengan desempeño medio o bajo?

a. $\Omega = \{ AAAAAA, AAAMMMB, BBBBBA, \dots \}$, $n(\Omega) = \binom{24}{7} = 346104$

b. $H = \{ \text{el grupo está conformado por 3 A, 2 M y 2 B} \}$, $n(H) = \binom{10}{3} \times \binom{9}{2} \times \binom{5}{2} = 43200$

$$P(H) = \frac{43200}{346104} = 0.125$$

c. $V = \{ \underbrace{\text{al menos 5}}_{5, 6, 7} \text{ tienen desempeño } \underbrace{\text{medio o bajo}} \}$, $n(V) = \underbrace{\binom{14}{5} \times \binom{10}{2}} + \underbrace{\binom{14}{6} \times \binom{10}{1}} + \underbrace{\binom{14}{7} \times \binom{10}{0}}$

$$n(V) = 90090 + 30030 + 3432 = 123552 \Rightarrow P(V) = 0.36$$

Ejercicios

De 20 pacientes que fueron operados el mismo día y fueron llevados a una sala de hospitalización, 15 se recuperaron completamente en 3 días. Al cabo de este tiempo, se escogen al azar a 5 personas de la sala para un chequeo:

- Defina el espacio muestral
- ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 sean dados de alta?
- ¿Cuál es la probabilidad de que 4 sean dados de alta?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 sean dados de alta?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea dado de alta?

R = se recuperaron (15)

R^c = no se recuperaron (5)

a. $\Omega = \{ R R^c R^c R^c R^c, R R R R R, \dots \}, \quad n(\Omega) = \binom{20}{5} = 15504$

b. $F = \{ \underbrace{R R R R R}_{5 \text{ son dados de alta}} \}, \quad n(F) = \binom{15}{5} \times \binom{5}{0} = 3003$
 $P(F) = \frac{3003}{15504} = 0.194$

$R_1 R_2 R_3 \dots R_{15} R_{16}^c R_{17}^c R_{18}^c R_{19}^c R_{20}^c$
 $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5$
 $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5$
 $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 \dots$

c. $W = \{ 4 \text{ son dados de alta} \}, \quad n(W) = \binom{15}{4} \times \binom{5}{1} = 6825 \Rightarrow P(W) = \frac{6825}{15504} = 0.44$

d. $R = \{ \text{al menos 4 son dados de alta} \}, \quad n(R) = n(F) + n(W) = 9828 \Rightarrow P(R) = \frac{9828}{15504} = 0.634$

e. $A = \{ \text{ninguno es dado de alta} \}, \quad n(A) = \binom{15}{0} \binom{5}{5} = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{15504} = 0.00006$

Ejercicio

En un curso se han matriculado estudiantes de diversas carreras:

Carrera	Número de estudiantes
Gestión Empresarial	10 ✓
Economía	8 ✓
Biología	7 ✓
Pesquería	5
Agronomía	4
Estadística Informática	2 ✓
36	

D es la situación más probable entre las propuestas.

Se deben formar grupos de 5 estudiantes, ¿cuál de las siguientes situaciones es la más probable?

- ▶ Que los 5 estudiantes pertenezcan a la carrera de Pesquería → A
- ▶ Que los 5 estudiantes pertenezcan a la carrera de Biología → B
- ▶ Que haya un estudiante de cada carrera de la facultad de Economía y Planificación → C
- ▶ Que el grupo incluya a un estudiante de Economía y otro de Biología → D

$$a. \quad n(\Omega) = \binom{36}{5} = 376992$$

$$n(A) = \binom{5}{5} \binom{31}{0} = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{376992} = 0.00000265 \approx 0$$

$$b. \quad n(B) = \binom{7}{5} \binom{29}{0} = 21 \Rightarrow P(B) = \frac{21}{376992} = 0.0000557 \approx 0$$

$$c. \quad n(C) = \binom{8}{1} \binom{10}{1} \binom{2}{1} \binom{16}{2} = 19200$$

$$P(C) = \frac{19200}{376992} = 0.051$$

$$d. \quad n(D) = \binom{8}{1} \binom{7}{1} \binom{21}{3} = 74480$$

$$P(D) = \frac{74480}{376992} = 0.20$$

Propiedades de probabilidad

1. Para cualquier evento A ,

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$A \cup A^c = \Omega$$

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega)$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

2. La probabilidad del evento imposible es cero:

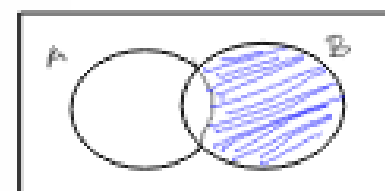
$$P(\emptyset) = 0$$

Ω y \emptyset son complementarias

$$\underbrace{P(\Omega)}_1 = 1 - P(\emptyset)$$

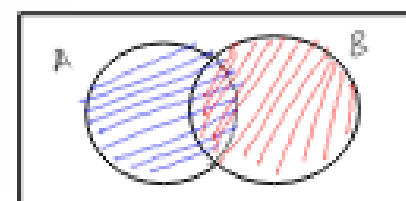
3. Para dos eventos A y B cualesquiera:

$$* \quad \overset{\text{Solo } B}{\boxed{P(A^c \cap B)}} = P(B) - P(A \cap B)$$



4. Para dos eventos A y B cualesquiera:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underline{P(A \cap B)}$$



$$* \quad P(A \cap B^c)$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) \longrightarrow P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) \longrightarrow P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$$

Ejercicio

Una universidad realizó una encuesta a 1000 estudiantes para determinar el uso de plataformas digitales en sus estudios. Se les preguntó si usan plataformas como Google Classroom, Moodle o Teams. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Facultad	No usa plataforma		Total
	Usa plataforma (U)	(U^c)	
Ciencias (C) ✓	180	120	300 →
Ingeniería (I)	150	150	300
Letras (L) ✓	100	100	200
Educación (E) ✓	120	80	200 →
Total	550	450	1000

Exp. Aleatorio

Si se selecciona al azar a un estudiante, halle la probabilidad de que:

- Pertenezca a la facultad de Ciencias \cup Educación.
- Pertenezca a la facultad de Letras \cap use plataforma.
- No pertenezca a la facultad de Ingeniería y no use plataforma.

INTERSECCIÓN

$$\Omega = \{ CU, CU^c, IU, IU^c, LU, LU^c, EU, EU^c \}$$

Hay puntos muestrales más probables que otros.

$$a. A = \{ \text{Pertenece a } C \cup E \}$$

$$A = \{ CU, CU^c, EU, EU^c \}$$

$$P(A) = \frac{500}{1000} = 0.5$$

$$P(C \cup E) = P(Cien) + P(Educ) \\ = \frac{300}{1000} + \frac{200}{1000}$$

$$b. P(L \cap U) = \frac{100}{1000} = 0.10$$

$$c. P(I^c \cap U^c) = \frac{300}{1000} = 0.3$$

Ejercicio

Una universidad encuestó a 500 estudiantes sobre su experiencia con herramientas de inteligencia artificial. Los resultados fueron los siguientes:

- ▶ 480 estudiantes han usado ChatGPT $\rightarrow A$
- ▶ 310 estudiantes han usado Gemini $\rightarrow B$
- ▶ 300 estudiantes han usado ambas herramientas
- ▶ El resto no ha usado ninguna de las dos.

Si se selecciona un estudiante al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado ambas herramientas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado solo ChatGPT?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado al menos una de las dos herramientas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no haya usado ninguna de las dos herramientas?

Ω



$$n(\Omega) = 500$$

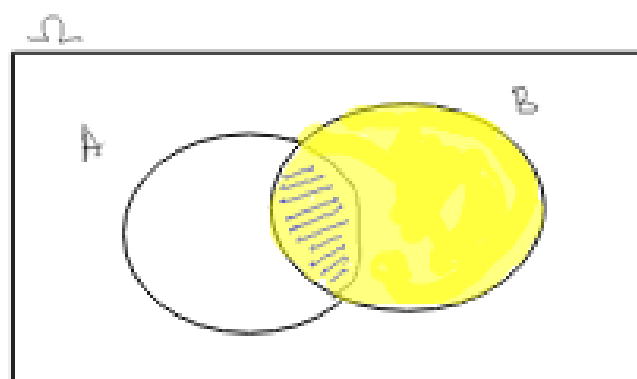
$$a. P(A \cap B) = \frac{300}{500} = 0.6$$

$$b. P(A \cap B^c) = \frac{180}{500} = P(A) - P(A \cap B) = \frac{480}{500} - \frac{300}{500} = 0.6$$

$$c. P(A \cup B) = \frac{490}{500} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{480}{500} + \frac{310}{500} - \frac{300}{500} = \frac{490}{500} = 0.98$$

$$d. P(A^c \cap B^c) = \frac{10}{500} = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.98 = 0.02$$

Probabilidad condicional



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propiedades de la probabilidad condicional

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$, para todo evento A y B
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Si los eventos A_1, \dots, A_k son mutuamente excluyentes, entonces
$$P(\cup_{j=1}^k A_j|B) = \sum_{j=1}^k P(A_j|B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_k|B)$$
4. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
5. $P(\emptyset|B) = 0$
6. $P((A^c \cap B)|C) = P(B|C) - P((A \cap B)|C)$
7. $P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C) - P((A \cap B)|C)$

Ejercicio

En una universidad el 70% de los estudiantes son de Ciencias y el 30% de Letras; de los estudiantes de Ciencias, el 60% son hombres y de los estudiantes de Letras son hombres el 40%. Si se elige aleatoriamente un estudiante.

- a. Hallar la probabilidad de que sea un estudiante hombre:

Sean los eventos:

$A = \{\text{El estudiante elegido es de Ciencias}\}$

$A^c = \{\text{Letras}\}$

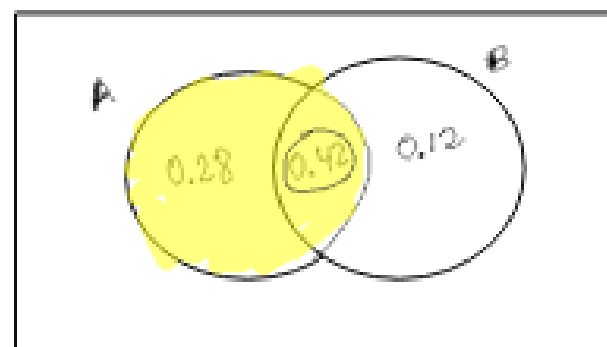
$B = \{\text{El estudiante elegido es varón}\}$

$$P(B) = 0.70 \times 0.60 + 0.30 \times 0.40 = 0.42 + 0.12 = 0.54$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Ciencias}}}{P(A)} \times P(B|A) + P(A^c) P(B|A^c)$$

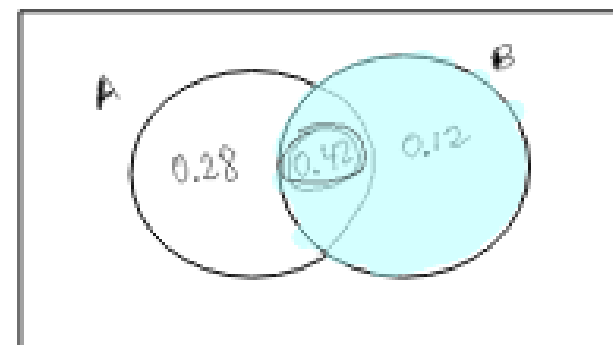
- b. Hallar la probabilidad de que sea un estudiante hombre, si se sabe que es de Ciencias:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.42}{0.70} = 0.60$$



- c. Si se sabe que es hombre, hallar la probabilidad de que sea un estudiante de Ciencias:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.42}{0.54} = 0.778$$



Ejercicio

En una universidad se seleccionó una muestra de 200 alumnos y se encontró que 9 tienen sanciones académicas, 10 tienen sanciones administrativas, y 2 tienen ambos tipos de sanciones.

- a) Si se selecciona un estudiante con sanción administrativa, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga sanción académica? 0.80
- b) Si se selecciona un estudiante con sanción académica, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga sanción administrativa? 0.222
- c) Si se selecciona un estudiante con al menos una sanción, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea académica? $9/17 = 0.529$

$A = \{ \text{El estudiante tiene sanción académica} \}$

$$P(A) = 9/200$$

$$P(A \cap B) = 2/200 = P(B \cap A)$$

$B = \{ \text{El estudiante tiene sanción administrativa} \}$

$$P(B) = 10/200$$

$$a) P(A^c | B) = 1 - P(A | B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{\frac{2}{200}}{\frac{10}{200}} = 0.8$$

$$= \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{\frac{9}{200}}{\frac{17}{200}}$$

$$b) P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{200}}{\frac{9}{200}} = \frac{2}{9} = 0.222$$

$$c) P(A | A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap A) + P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$