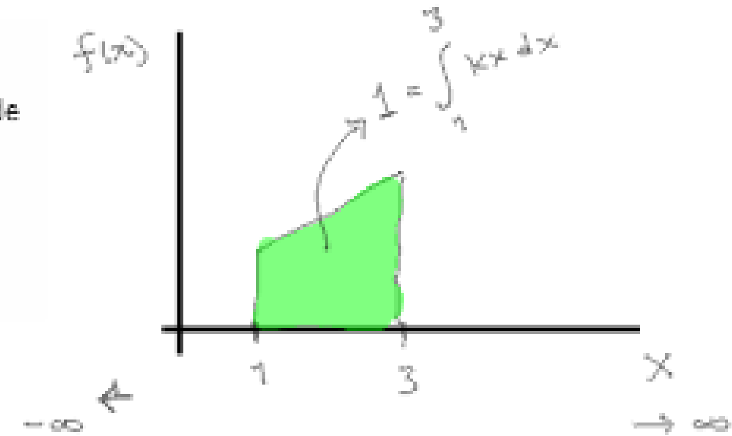
Ejemplo

Suponga que el tiempo, en horas, que necesita un técnico para reparar cierta avería de un artefacto eléctrico es una variable aleatoria que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{1} 0\,dx} + \int_{1}^{3} kx\,dx + \cancel{\int_{3}^{\infty} 0\,dx}$$

función a definir

variable

función

$\int_1^3 x\,dx$ R ⇒

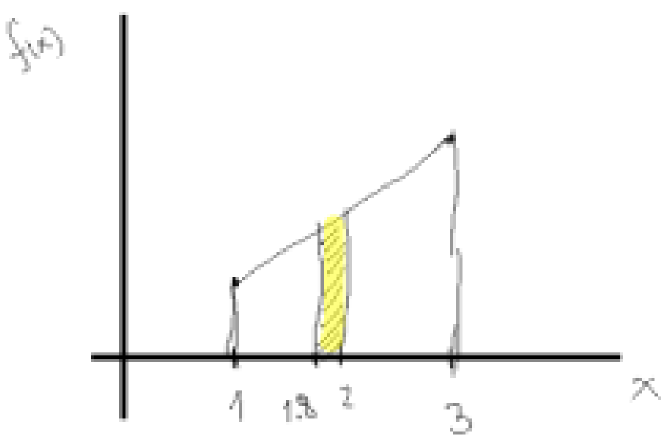
```
> fx0 = function(x){x}
> integrate(fx0, 1, 3)$value
[1] 4
```

$\int_1^3 f(x)\,dx$

c. Calcule la probabilidad de que un técnico demore por lo menos 1.8 horas pero menos de 2 horas en reparar un artefacto eléctrico.

$$P(1.8 \leq X < 2) = \int_{1.8}^{2} \frac{x}{4} dx = \frac{x^2}{8} |_{1.8}^{2} = \frac{1}{8}(2^2 - 1.8^2) = 0.095$$

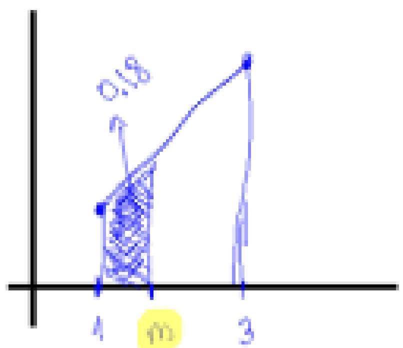
$P(1.8 < x < 2) \nearrow$



d. ¿Cuál es el tiempo máximo que necesita un técnico para estar dentro del 18% más rápido en reparar un artefacto eléctrico?

Se tiene $P(X \leq m) = 0.18$

$$P(X \leq m) = \int_1^m \frac{x}{4} dx = \frac{x^2}{8}\Big|_1^m = \frac{1}{8}(m^2 - 1^2) = 0.18$$



$$\frac{m^2 - 1}{8} = 0.18$$

$$m^2 - 1 = 8 \times 0.18$$

$$m^2 = 1 + 8 \times 0.18$$

$$m = \sqrt{1 + 8 \times 0.18}$$

$m = 1.56$ horas

Ejercicio Una empresa fabrica un tipo de artículo cuya producción está sujeta a pequeñas variaciones de peso. Según estudios de control de calidad, el peso (en kg) de los artículos sigue la siguiente distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

a. Verifique que f(x) es una función de densidad

$$\int_1^2 \frac{2}{3} x \, dx = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(2^2 - 1^2\right) = 1$$

```
> fx = function(x){2/3*x}
> integrate(fx, 1, 2)$value
[1] 1
```

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo pese entre 1.5 kg y 2 kg?

$$\int_{1.5}^2 \frac{2}{3} x \, dx = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} \Big|_{1.5}^2 = \frac{1}{3}\left(2^2 - 1.5^2\right) = 0.583$$

```
> integrate(fx, 1.5, 2)$value
[1] 0.5833333
```

c. ¿Qué porcentaje de artículos pesa menos de 1.8 kg?

$$P(X<1.8)=\int_1^{1.8}\frac{2}{3}x\,dx=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_1^{1.8}=\frac{1}{3}(1.8^2-1^2)=0.747$$

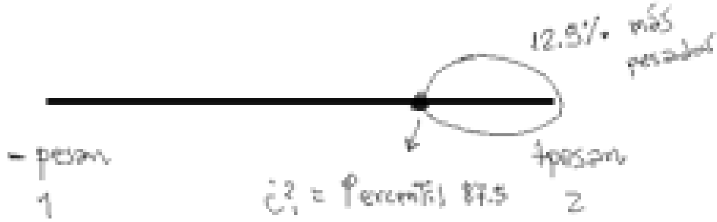
```
> integrate(fx, 1, 1.8)$value
[1] 0.7466667
```

d. Dado que $\underbrace{\text{un artículo pesa al menos 1.2 kg,}}_{\text{condición}}$ ¿cuál es la probabilidad de que pese menos de 1.6 kg?

$$P(X<1.6\mid X\geq 1.2)=\frac{P(1.2\leq X<1.6)}{P(X\geq 1.2)}=\frac{\int_{1.2}^{1.6}\frac{2}{3}x\,dx}{\int_{1.2}^{2}\frac{2}{3}x\,dx}=\frac{0.3733}{0.8533}=0.4375$$

```
> integrate(fx, 1.2, 2)$value
[1] 0.8533333
> integrate(fx, 1.2, 1.6)$value
[1] 0.3733333
> integrate(fx, 1.2, 1.6)$value / integrate(fx, 1.2, 2)$value
[1] 0.4375
```

e. ¿Cuál debe ser el peso mínimo para que un artículo esté considerado dentro del 12.5% de los que más pesan?



$$\boxed{\int_1^{k} \frac{2}{3} x \, dx = 0.875}$$

$$\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} \Big|_1^{k} = 0.875$$

$$\frac{1}{3}\left(k^2 - 1^2\right) = 0.875$$

$$k^2 - 1 = 3 \times 0.875$$

$$k = \sqrt{1 + 3 \times 0.875}$$

$$k = 1.904 \text{ Kg}$$

```
> fxk = function(k){integrate(fx,1,k)$value - 0.875}
> uniroot(fxk, lower = 1, upper = 2)$root
[1] 1.903944
```

f. ¿Cuál debe ser el peso máximo para que un artículo esté considerado dentro del 14.5% de los que menos pesan?

$$\int_1^h \frac{2}{3} x\,dx = 0.145$$

$$\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_1^h = 0.145$$

$$\frac{1}{3}(h^2-1) = 0.145$$

$$h = \sqrt{3\times 0.145 + 1}$$

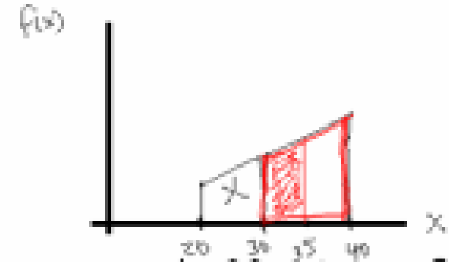
$$h = 1.198\,\text{kg}$$

```
> fxh = function(h){integrate(fx,1,h)$value - 0.145}
> uniroot(fxh, lower = 1, upper = 2)$root
[1] 1.197926
```

Ejercicio

En un centro de inspección vehicular, se ha determinado que el tiempo (en minutos) que demora un automóvil en pasar la revisión técnica sigue una distribución continua, cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{600}, & 20 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$



a. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil termine su revisión en menos de 32 minutos?

$$P(X<32) = \int_{20}^{32} \frac{x}{600}\,dx = \frac{1}{600} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{20}^{32} = \frac{1}{1200}\left(32^2 - 20^2\right) = 0{,}52$$

```
> fx = function(x){x/600}
> integrate(fx, 20, 32)$value
[1] 0.52
```

b. Si un automóvil ya lleva 30 minutos en revisión, ¿cuál es la probabilidad de que termine en menos de 5 minutos adicionales?

$$P(X<35 \mid X \geq 30) = \frac{P(30 \leq X < 35)}{P(X \geq 30)} = \frac{\int_{30}^{35} x/600\,dx}{\int_{30}^{40} x/600\,dx} = \frac{0{,}27083}{0{,}58333} = 0{,}4643$$

```
> integrate(fx, 30, 35)$value
[1] 0.2708333
> integrate(fx, 30, 40)$value
[1] 0.5833333
> integrate(fx, 30, 35)$value/integrate(fx, 30, 40)$value
[1] 0.4642857
```

c. ¿Qué porcentaje de vehículos termina la revisión en un tiempo entre 25 y 35 minutos?

$$P(25 < \underset{\text{tiempo}}{x} < 35) = \int_{25}^{35} \frac{x}{600}\,dx = \left.\frac{x^2}{1200}\right|_{25}^{35} = \frac{(35^2-25^2)}{1200} = 0.5$$

```
> integrate(fx, 25, 35)$value
[1] 0.5
```

d. Halle la media y el coeficiente de variación del tiempo de revisión técnica.

$$E(x) = \int_{20}^{40} x\cdot\frac{x}{600}\,dx = \int_{20}^{40}\frac{x^2}{600}\,dx = \frac{1}{600}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{20}^{40} = \frac{1}{1800}(40^3-20^3) = 31.11$$

```
> integrate(Ex, 20, 40)$value
[1] 31.11111 minutos
```

El tiempo promedio o el tiempo que se espera que tarde en pasar la revisión técnica es de 31.11 minutos

$$E(x^2) = \int_{20}^{40} x^2\cdot\frac{x}{600}\,dx = \int_{20}^{40}\frac{x^3}{600}\,dx = \frac{1}{600}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_{20}^{40} = \frac{1}{2400}(40^4-20^4) = 1000$$

```
> Ex2 = function(x){x^3/600}
> integrate(Ex2, 20, 40)$value
[1] 1000 minutos²
```

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 1000 - 31.11^2 = 32.168 \text{ minutos}^2 = \sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{32.168} = 5.67 \text{ minutos}$$

$$\left.\begin{array}{l} 31.11 - 5.67 = 25.44\,\text{min} \\ 31.11 + 5.67 = 36.78\,\text{min} \end{array}\right\} \text{concentración de tiempos}$$

$$CV(x) = \frac{5.67}{31.11}\times 100\% = 18.22\%$$

medida relativa de variabilidad

comparación

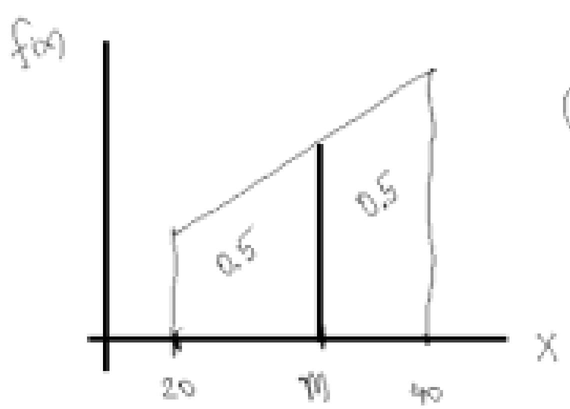
e. Con la implementación de dos casetas adicionales, se estima que el tiempo promedio disminuirá en un 12.5%. ¿Cuál será el nuevo tiempo promedio de revisión?

Media original = 31.11 minutos

Nueva media = 0.875 x 31.11 = 27.22 minutos

f. Determine la mediana del tiempo de revisión.

```
> uniroot(area, lower = 20, upper = 40)$root
[1] 31.62277
```



$$* \int_{20}^{m} \frac{x}{600}\,dx = 0.5 \rightarrow \left.\frac{x^2}{1200}\right|_{20}^{m} = \frac{m^2-400}{1200} = 0.5 \Rightarrow m^2 = 1000$$

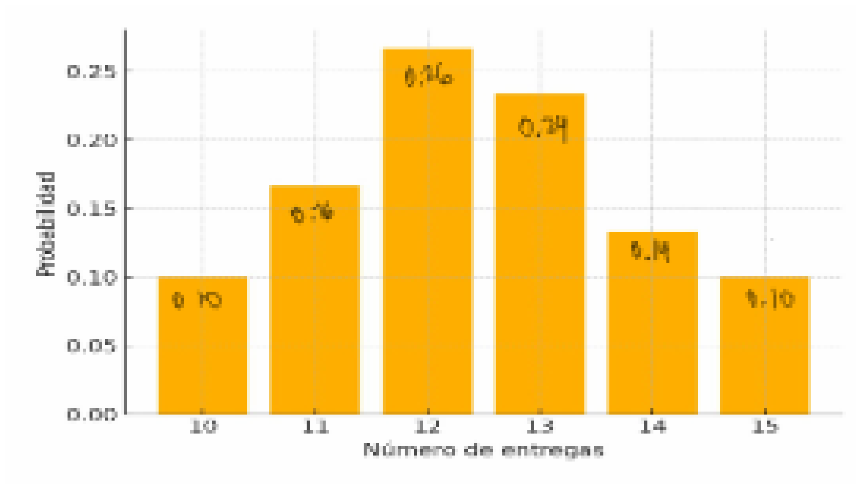
$m = \sqrt{1000}$

$m = 31.6228$

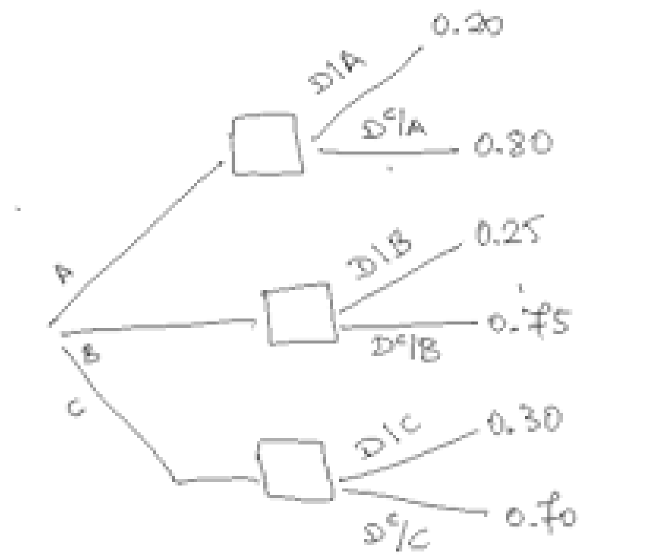
$$* \int_{m}^{40} \frac{x}{600}\,dx = 0.5 \rightarrow \left.\frac{x^2}{1200}\right|_{m}^{40} = \frac{1600-m^2}{1200} = 0.5 \Rightarrow m^2 = 1000$$

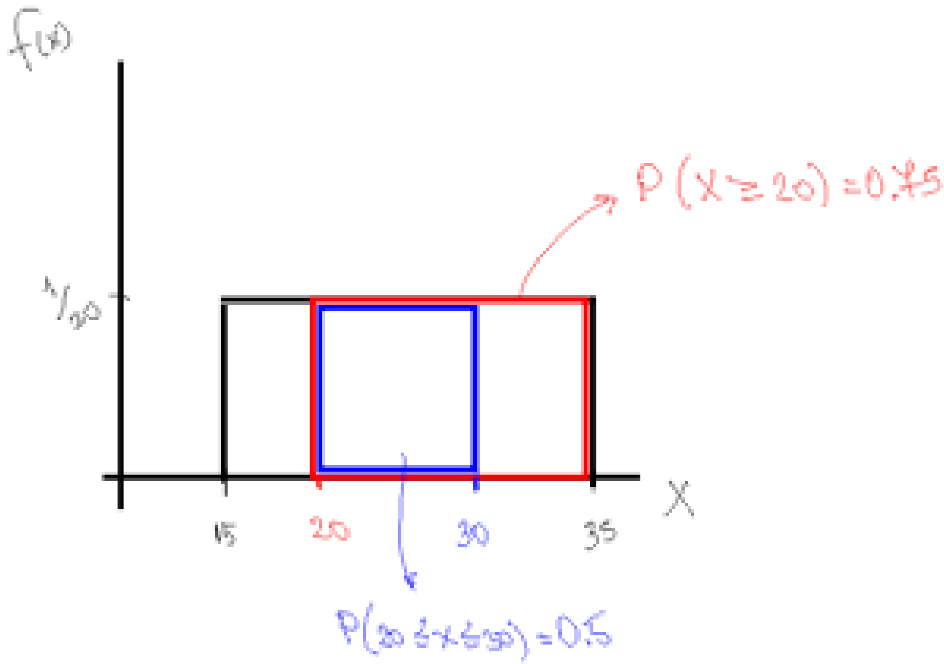
$m = \sqrt{1000}$

El 50% de los tiempos de revisión toman un valor máximo de **31.6228** minutos



$$f(x) = \begin{cases} 0.10, & x \in \{10, 15\} \\ 0.14, & x = 14 \\ 0.16, & x = 11 \\ 0.24, & x = 13 \\ 0.26, & x = 12 \end{cases}$$





f(x)
1/20
X
15
20
30
35
P (X ≥ 20) = 0.75
P(20 ≤ X ≤ 30) = 0.5