Métodos Estadísticos y Simulación

Unidad 2: Probabilidades

Mg. J. Eduardo Gamboa U.

2025-04-14

Conceptos básicos de probabilidad

Experimento aleatorio

Consiste en reproducir de manera controlada un fenómeno en el que, manteniendo las mismas condiciones, el resultado no se puede predecir con exactitud. Aunque se repita el procedimiento, cada ejecución puede generar un resultado distinto; sin embargo, es posible describir el conjunto de resultados probables.

Espacio muestral

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados (llamados puntos muestrales) de un experimento aleatorio. Se considera a W el conjunto universal. Pueden ser Discreto (Finito o Infinito numerables) o Continuo (Infinito No numerables). El número de elementos del espacio muestral se define como la cardinalidad de Ω (número de elementos del conjunto), y se denota como $(n(\Omega)$.

Ejercicio

Experimento aleatorio, espacio muestral y cardinalidad:

1. E_1 : Registrar la calificación obtenida por un estudiante en un examen que contiene 6 preguntas., $\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(\Omega_1) = 7$, Finito.
2. E_2 : Identificar el tipo de sangre de una persona, $\Omega_2 = \{A, B, AB, O\}$, $n(\Omega_2) = 4$, Finito.
3. E_3 : Contar la cantidad de encuestas incompletas entre 30 encuestas realizadas a transeúntes., $\Omega_3 = \{0, 1, 2, ..., 29, 30\}$, $n(\Omega_3) = 31$, Finito.
4. E_4 : Anotar el número diario de publicaciones de una marca en redes sociales, $\Omega_4 = \{0, 1, ...\}$, $n(\Omega_4) = \infty$, Infinito numerable.
5. E_5 : Medir el tiempo exacto (en horas) que permanece conectado un usuario a una plataforma educativa en un día. (horas), $\Omega_5 = \{t \mid 0 \leq t < \infty\}$, $n(\Omega_5) = \infty$, Infinito no numerable

Evento

Un evento es cualquier subconjunto de un espacio muestral Ω. Se dice que un evento es simple si está formado exactamente por un resultado posible y compuesto si consta de más de un resultado. Se suele denotar con las primeras letras del alfabeto, aunque esto no es una regla. La cardinalidad de un evento A, o sea el conjunto de elementos que contiene se denota como n(A).

Ejercicio

Sea el experimento aleatorio: Registrar los resultados de tres entrevistas laborales virtuales consecutivas, donde cada candidato es calificado como Aprobado (A) o No aprobado (N). El espacio muestral asociado será:

$$\Omega = \{AAA, AAN, ANA, NAA, ANN, NAN, NNA, NNN\} \qquad n(\Omega) = 8$$

Eventos simples:

A = {Los dos primeros postulantes aprobaron} = {AAN}, n(A)=1

B = {Ningún candidato fue aprobado} = {NNN}, n(B)=1

Eventos compuestos:

C = {Solo un postulante aprobó} = {ANN, NAN, NNA}, n(C)=3

D = {Todos los candidatos recibieron la misma calificación} = {AAA,NNN}, n(D)=2

Eventos mutuamente excluyentes

Los eventos A y B son mutuamente excluyentes (o disjuntos) si no tienen resultados en común. Es decir $A \cap B = \emptyset$
Generalizando: Los eventos $A_1, ..., A_k$ son mutuamente excluyentes si:
$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j = 1, 2, ..., k$

Eventos colectivamente exhaustivos

Los eventos $A_1, ..., A_k$ son colectivamente exhaustivos si
$\cup_{j=1}^{k} A_j = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = \Omega$

Eventos complementarios

Para un evento A definido sobre un espacio muestral Ω el evento complemento de A, denotado por A^c está compuesto por todos los elementos que no pertenecen al evento de A. Es decir, todo lo que le falta al evento A para ser el espacio muestral Ω. Se cumple que $A^c \cup A = \Omega$ y $A^c \cap A = \emptyset$, por lo tanto se cumple que A^c y A son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

Ejercicio

Sea el experimento aleatorio: Observar el estado de entrega (T = Entregado a tiempo, R = Retrasado) de tres pedidos realizados por una tienda virtual en un mismo día. El espacio muestral asociado será:

$$\Omega = \{TTT, TTR, TRT, RTT, TRR, RTR, RRT, RRR\} \qquad n(\Omega) = 8$$

Se definen los siguientes eventos:
A1 = {Al menos dos pedidos fueron entregados a tiempo}
A2 = {Exactamente un pedido fue entregado con retraso}
A3 = {Como máximo un pedido fue entregado a tiempo}
A4 = {Los tres pedidos tuvieron el mismo estado}
A partir de esta lista de eventos:

a. Identifique eventos mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes.
b. Identifique eventos colectivamente exhaustivos y no colectivamente exhaustivos.
c. Identifique eventos complementarios.

Probabilidad clásica

Si el experimento aleatorio con espacio muestral Ω tiene $n(\Omega)$ resultados posibles y si $n(A)$ de tales resultados corresponden a un evento A, entonces, siempre que los eventos simples de Ω sean mutuamente excluyentes e igualmente posibles, la probabilidad de que ocurra A es:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Se dice que es a priori por que antes de realizarse el experimento se puede determinar cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A.

Ejercicio

Experimento aleatorio: Observar el estado de entrega de tres paquetes pedidos por una familia en un mismo día, donde cada paquete puede llegar a tiempo (T) o con retraso (R).

$$\Omega = \{TTT, TTR, TRT, RTT, TRR, RTR, RRT, RRR\}, \quad n(\Omega) = 8$$

a. Hallar la probabilidad de que al menos dos paquetes lleguen a tiempo

$$A_1 = \{TTR, TRT, RTT, TTT\}, \quad n(A_1) = 4, \quad P(A_1) = \frac{4}{8} = 0.5$$

b. Hallar la probabilidad de que solo un paquete llegue con retraso

$$A_2 = \{TTR, TRT, RTT\}, \quad n(A_2) = 3, \quad P(A_2) = \frac{3}{8} = 0.375$$

Ejercicio

En una granja se tiene 4 cuyes de tipo I, 6 de tipo II y 7 de tipo III.

a. Si se selecciona cinco cuyes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 2 de los cuyes seleccionados sean de tipo I y los otros 3 de otro tipo?

   La cardinalidad del espacio muestral asociado a este experimento será
   $n(\Omega) = \binom{17}{5} = 6188$
   Sea el evento A $=$ {obtener 2 de tipo I y 3 de otro tipo}
   $n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{13}{3} = 1716$, entonces $P(A) = \frac{1716}{6188} = 0.2773$

b. Calcule la probabilidad de seleccionar 2 cuyes de tipo I, 3 de tipo II y 4 de tipo III.

   La cardinalidad del espacio muestral asociado a este experimento será
   $n(\Omega) = \binom{17}{9} = 24310$
   Sea el evento B $=$ {obtener 2 de tipo I, 3 de tipo II y 4 de tipo III}
   $n(B) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{3} \times \binom{7}{4} = 4200$, entonces $P(B) = \frac{4200}{24310} = 0.1728$

Ejercicio

Una empresa revisa un lote de 14 dispositivos electrónicos, de los cuales 8 están en buen estado y 6 presentan defectos menores. Se seleccionan 5 dispositivos al azar y sin reposición para una inspección de control de calidad más rigurosa.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos dispositivos estén en buen estado?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro dispositivos presenten defectos?

Ejercicio

Si una empresa constructora se presenta a una licitación de tres proyectos de carreteras. Considerando que es igualmente probable que gane (G) o pierda (P) la empresa cada proyecto.

a. Defina el espacio muestral.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos dos proyectos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que gane los tres proyectos?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que no gane ningún proyecto?

Definición axiomática de probabilidad

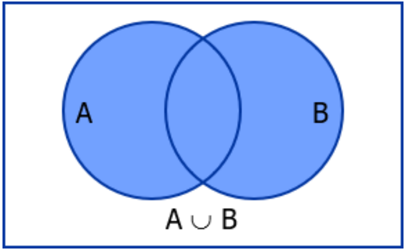
Sea Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. La probabilidad de cualquier evento A de Ω es el número real P(A) que satisface los siguientes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si los eventps $A_1, ..., A_k$ de un Ω son mutuamente excluyentes o sea si $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j = 1, ..., k$, entonces $P(\cup_{i=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j) = P(A_1) + ... + P(A_k)$

Propiedades de probabilidad

1. Para cualquier evento A,
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
2. La probabilidad del evento imposible es cero:
$$P(\emptyset) = 0$$
3. Para dos eventos A y B cualesquiera:
$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
4. Para dos eventos A y B cualesquiera:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Usando el diagrama de Venn se tiene:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$$

Ejercicio

Los reportes de seguridad de una planta indican lo siguiente sobre los obreros que sufren una lesión durante su jornada laboral:
El 12% de los obreros lesionados ingresa a un hospital para recibir tratamiento.
El 16% de los obreros lesionados regresa al trabajo al día siguiente.
El 2% de los obreros lesionados ingresa a un hospital y también regresa al trabajo al día siguiente.
Sea un trabajador elegido al azar entre los lesionados. Definimos los siguientes eventos:
H: “El obrero ingresa a un hospital para recibir tratamiento”
T: “El obrero regresa al trabajo al día siguiente”
Se conoce que:

$$P(H) = 0.12 \qquad P(T) = 0.16 \qquad P(H \cap T) = 0.02$$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el obrero ingrese a un hospital o regrese al trabajo al día siguiente?

$$P(H \cup T) = 0.12 + 0.16 - 0.02 = 0.26$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el obrero ingrese al hospital pero no regrese al trabajo al día siguiente?

$$P(H \cap T^c) = P(H) - P(H \cap T) = 0.12–0.02 = 0.1$$

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el obrero no ingrese a un hospital ni regrese al trabajo al día siguiente?

$$P(H^c \cap T^c) = P((H \cup T)^c) = 1 - P(H \cup T) = 1 - 0.26 = 0.74$$

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el obrero ingrese a un hospital o no regrese al trabajo al día siguiente?

$$P(H \cup T^c) = P(H) + P(T^c) - P(H \cap T^c)$$

$$P(H \cup T^c) = P(H) + (1 - P(T)) - (P(H) - P(H \cap T))$$

$$P(H \cup T^c) = 1 - P(T) + P(H \cap T) = 1 - 0.16 + 0.02 = 0.86$$

e. ¿Cuál es la probabilidad de que un obrero lesionado ingrese a un hospital y no ingrese a un hospital al mismo tiempo?

$$P(H \cap H^c) = P(\emptyset) = 0$$

Ejercicio

Una universidad realizó una encuesta a 1000 estudiantes para determinar el uso de plataformas digitales en sus estudios. Se les preguntó si usan plataformas como Google Classroom, Moodle o Teams. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Facultad	Usa plataforma (U)	No usa plataforma (U^c)	Total
Ciencias (C)	180	120	300
Ingeniería (I)	150	150	300
Letras (L)	100	100	200
Educación (E)	120	80	200
Total	550	450	1000

Si se selecciona al azar a un estudiante, halle la probabilidad de que:

a. Pertenezca a la facultad de Ciencias o Educación.
b. Pertenezca a la facultad de Letras y use plataforma.
c. No pertenezca a la facultad de ingeniería y no use plataforma.

Ejercicio

Una universidad encuestó a 500 estudiantes sobre su experiencia con herramientas de inteligencia artificial. Los resultados fueron los siguientes:

- 180 estudiantes han usado ChatGPT
- 150 estudiantes han usado Gemini
- 100 estudiantes han usado ambas herramientas
- El resto no ha usado ninguna de las dos.

Si se selecciona un estudiante al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado ambas herramientas?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado solo ChatGPT?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado al menos una de las dos herramientas?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya usado ninguna de las dos herramientas?

Probabilidad condicional

La probabilidad condicional $P(A|B)$ mide la probabilidad de que ocurra el evento A dado que B ha ocurrido. Se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Es clave en estadística para actualizar probabilidades con nueva información y modelar la dependencia entre eventos.

Propiedades de la probabilidad condicional

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$, para todo evento A y B
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Si los eventos $A_1, ..., A_k$ son mutuamente excluyentes, entonces $P(\cup_{i=1}^{k} A_j|B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j|B) = P(A_1|B) + ... + P(A_k|B)$
4. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
5. $P(\emptyset|B) = 0$
6. $P((A^c \cap B)|C) = P(B|C) - P((A \cap B)|C)$
7. $P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C) - P((A \cup B)|C)$

Ejercicio

En una universidad el 70% de los estudiantes son de Ciencias y el 30% de Letras; de los estudiantes de Ciencias, el 60% son hombres y de los estudiantes de Letras son hombres el 40%. Si se elige aleatoriamente un estudiante.

a. Hallar la probabilidad de que sea un estudiante hombre:
   Sean los eventos:
   A = {El estudiante elegido es de Ciencias}
   B = {El estudiante elegido es varón}
   $P(B) = 0.70 \times 0.60 + 0.30 \times 0.40 = 0.42 + 0.12 = 0.54$
b. Hallar la probabilidad de que sea un estudiante hombre, si se sabe que es de Ciencias:
   $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.42}{0.70} = 0.60$$
c. Si se sabe que es hombre, hallar la probabilidad de que sea un estudiante de Ciencias:
   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.42}{0.54} = 0.778$$

Ejercicio

La probabilidad de que la construcción de un edificio termine a tiempo es 17/20, la probabilidad de que no haya huelga es 3/4 y la probabilidad de que la construcción se termine a tiempo dado que no hubo huelga es 14/15; la probabilidad de que haya huelga y no se termine la construcción a tiempo es 1/10. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) la construcción se termine a tiempo y no haya huelga?

Definimos los eventos:

A = {La construcción se termina a tiempo}

B = {No haya huelga}

Tenemos $P(A) = \frac{17}{20}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A|B) = \frac{14}{15}$,$P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{10}$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{14}{15} \times \frac{3}{4} = 0.70$$

b) no haya huelga dado que la construcción se terminó a tiempo?

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{17}{20}} = 0.8235$$

c) la construcción no se termine a tiempo si hubo huelga?

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{3}{4}} = 0.4$$

d) la construcción no se termine a tiempo si no hubo huelga?

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{14}{15} = 0.0667$$

La regla de la multiplicación

- La **probabilidad conjunta** de dos eventos A y B se obtiene como:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- Generalizando, sean los eventos $A_1,...,A_k$, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1)...P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})$$

Ejercicio

Una empresa de manufactura tiene un lote de 250 microchips, de los cuales 20 presentan fallas internas que no fueron detectadas visualmente. Un técnico realiza una inspección aleatoria de 2 microchips, y se desea calcular la probabilidad de que ambos seleccionados estén defectuosos.

a) Si la selección se realiza sin reposición:
Sean los eventos:
$D_i = \{\text{el microchip seleccionado en el lugar i está defectuoso}\}$
$D_i^c = \{\text{el microchip seleccionado en el lugar i no está defectuoso}\}$

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1) = \frac{20}{250} \times \frac{19}{249} = 0.0061$$

b) Si la selección se realiza con reposición:
En este caso, después de seleccionar el primer microchip, se vuelve a colocar en el cargamento, por lo que las condiciones iniciales no cambian.

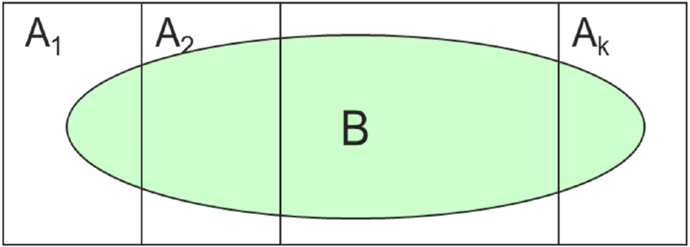
$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1) = \frac{20}{250} \times \frac{20}{250} = 0.0064$$

Probabilidad total

Permite calcular la probabilidad de un evento A cuando el espacio muestral se divide en eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

Sean los eventos A_1, A_2, ..., A_k del espacio muestral Ω. Se define como una partición de Ω si son mutuamente excluyentes, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j = 1, 2, ..., k$, y colectivamente exhaustivos, esto es $\cup_{j=1}^{k} A_j = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = \Omega$, entonces $P\left(\cup_{j=1}^{k} A_j\right) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)$.

Luego, para cualquier otro evento B definido sobre la partición de Ω:



La probabilidad del evento B sobre la partición, se calcula por:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + ... + P(A_k \cap B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j \cap B)$$

Por la regla de la multiplicación:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + ... + P(A_k)P(B|A_k) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)$$

Teorema de Bayes

Formulado por Thomas Bayes (1702-1761) y publicado en 1763, describe la probabilidad condicional de un evento A dado B:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Permite actualizar probabilidades con nueva evidencia y es clave en la inferencia bayesiana.

Sean A_1, A_2, ..., A_k un conjunto de eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivo con $P(A_j) > 0$ para $j = 1, 2, \ldots, k$. Si B es un evento cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$, de modo que $P(B) > 0$, entonces la probabilidad $P(A_h|B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_h|B) = \frac{P(B|A_h)P(A_h)}{P(B)} = \frac{P(B|A_h)P(A_h)}{\sum_{j=1}^{k} P(B|A_j)P(A_j)}$$

donde:

- $P(A_i)$ son las probabilidades a priori
- $P(B|A_i)$ es la probabilidad de B en la partición A_i
- $P(B)$ es la probabilidad total de B
- $P(A_i|B)$ son las probabilidades a posteriori

Ejercicio

Una empresa tecnológica tiene dos centros de datos:

El Centro de Datos A (C) tiene 4 servidores de alto rendimiento y 2 servidores estándar.

El Centro de Datos B (C) tiene 4 servidores de alto rendimiento y 6 servidores estándar.

La probabilidad de que se use el Centro A para alojar una aplicación es el doble que la de usar el Centro B, debido a su cercanía y eficiencia energética.

Se selecciona al azar un centro de datos para desplegar una aplicación y luego se asigna un servidor al azar dentro de ese centro

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor asignado sea estándar, si se sabe que proviene del centro B?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido el centro B y se haya asignado un servidor estándar?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor asignado sea estándar?

d. Si se sabe que el servidor asignado fue estándar, ¿cuál es la probabilidad de que haya provenido del Centro B?

Ejercicio

Un agricultor compra semillas de dos viveros (V1 y V2). Compra el 45% de las semillas del vivero V1 y el 55% del V2. Se sabe que cierta plaga ataca al 1.5% de las semillas del vivero V1 y 2.5% de V2. Sean los eventos:

V1 = {Semilla comprada del vivero V1}, P(V1) = 0.45
V2 = {Semilla comprada del vivero V2}, P(V2) = 0.55
P = {Semilla atacada con plaga}, $P(P|V1) = 0.015$, $P(P|V2) = 0.025$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que compre una semilla con plaga?

$$P(P) = P(V1)P(P|V1) + P(V2)P(P|V2) = 0.45 \times 0.015 + 0.55 \times 0.025 = 0.0205$$

b. Si se elige al azar una semilla y se encuentra afectada por la plaga ¿Cuál es la probabilidad de que sea del vivero V2?

$$P(V2|P) = \frac{P(V2)P(P|V2)}{P(P)} = \frac{0.55 \times 0.025}{0.0205} = 0.6707$$

c. Si se elige al azar una semilla y no se encuentra afectada por la plaga ¿Cuál es la probabilidad de que sea del vivero V1?

$$P(V1|P^c) = \frac{P(V1)P(P^c|V1)}{P(P^c)} = \frac{0.45 \times (1 - 0.015)}{1 - 0.0205} = 0.4525$$

Ejercicio

Una empresa manufacturera tiene dos máquinas (M1 y M2) para producir un producto. El área de control de calidad a determinado que la máquina M1 produce el 60% de la producción total y la máquina M2 el restante. El 2% de las unidades producidas por la máquina M1 son defectuosos, mientras que la máquina M2 tiene una tasa de defectuosos del 4%. Si se selecciona un producto al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina M1, si se sabe que es defectuoso?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

Ejercicio

Una compañía constructora de departamentos multifamiliares debe estimar los costos del 30% de los proyectos tipo 1, 20% del tipo 2 y 50% del tipo 3 para presentarse a una licitación. Sabiendo que las probabilidades de cometer un error en las estimaciones del costo para los tipos 1, 2 y 3 son 0.01, 0.03 y 0.02, respectivamente.

a. Halle la probabilidad de que se cometa un error al estimar el costo en un proyecto.
b. Sabiendo que se cometió un error en estimar el costo en un proyecto, halle la probabilidad de que sea del tipo 2
c. Halle la probabilidad de que sea del tipo 1, sabiendo que no se cometió un error en estimar el costo en un proyecto.

Independencia de eventos

Los eventos A y B son independientes si cuando ocurre uno de ellos esto no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro. Entonces los eventos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, por lo tanto $P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$.

Se cumple que:

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$$

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

Si los eventps A_1 y A_2 son condicionalmente independientes:

$$P(A_1 \cap A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|B)$$

Ejercicio

Los reclamos que presentan los clientes de una aseguradora son de dos clases. Se sabe que el 12.5% de los clientes presentan el reclamo tipo uno y el 10.5% el tipo dos. Suponiendo que los tipos de reclamos son eventos independientes.

a. Hallar la probabilidad de que se presente los dos tipos de reclamos

   Sean los eventos:

   R_1={Reclamo tipo 1}, $P(R_1) = 0.125$, $P(R_1^c) = 0.875$

   R_2={Reclamo tipo 2}, $P(R_2) = 0.105$, $P(R_2^c) = 0.895$

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2) = 0.125 \times 0.105 = 0.0131$$

b. Hallar la probabilidad de que se presente el tipo de reclamo uno o el tipo dos

$$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1)P(R_2) = 0.125 + 0.105 - 0.125 \times 0.105 = 0.2169$$

c. Hallar la probabilidad de que se presente el tipo de reclamo uno y no el dos

$$P(R_1 \cap R_2^c) = P(R_1)P(R_2^c) = 0.125 \times 0.895 = 0.1119$$

d. Hallar la probabilidad de que se presente sólo un tipo de reclamo

$$P(R_1 \cap R_2^c) + P(R_1^2 \cap R_2) = 0.125 \times 0.895 + 0.875 \times 0.105 = 0.2038$$

Independencia de k eventos

Utilizando la regla de la multiplicación generalizada y considerando independencia se obtiene la siguiente definición: los eventos A_1, A_2, ... , A_k son independientes si:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k)$$

Nota: Los eventos A_1,A_2,...,A_k son condicionalmente independientes si:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k|B) = P(A_1|B)P(A_2|B)...P(A_k|B)$$

Ejercicio

Si se sabe que el 45% de las PYMES del sector textil consideran un problema para la inversión la tasa de interés alta, el 60% la demanda y el 75% el pago de impuestos. Suponiendo que estos problemas son independientes. Si se selecciona al azar a una PYME:

a. Halle la probabilidad de que se considere los tres problemas.
   Sean los eventos:
   T = {Problema de la tasa de interés}, $P(T) = 0.45$, $P(T^c) = 0.55$
   D = {Problema de la demanda}, $P(D) = 0.60$, $P(D^c) = 0.40$
   I = {Problema el pago de impuestos}, $P(I) = 0.75$, $P(I^c) = 0.25$

$$P(\text{Los tres problemas}) = P(T \cap D \cap I) = 0.45 \times 0.60 \times 0.75 = 0.2025$$

b. Halle la probabilidad de que se considere al menos un problema.

$$P(\text{Al menos un problema}) = 1 - P(\text{Ningún problema}) = 1 - P(T^c \cap D^c \cap I^c)$$

$$P(\text{Al menos un problema}) = 1 - 0.55 \times 0.40 \times 0.25 = 1 - 0.055 = 0.945$$

Ejercicio

En una encuesta realizada a los productores ganaderos con la finalidad de obtener una línea base para desarrollar un programa de asistencia técnica, se encontró que el 35% prefiren un programa de manejo de pastos, 25% un programa de manejo de enfermedades y el resto un programa de manejo de engorde. Suponiendo que las preferencias por los programas son independientes. Si se selecciona al azar a un productor ganadero:

a. Halle la probabilidad de que se prefiera los tres programas.
b. Halle la probabilidad de que se prefiera al menos un programa.
c. Halle la probabilidad de que se considere ningún problema.