Métodos Estadísticos y Simulación

Unidad 5: Inferencia Estadística: Estimación

Mg. J. Eduardo Gamboa U.

2025-11-16

Estimación puntual

Sea X_1,...,X_n una muestra de tamaño n de una población con parámetro θ. Se denomina estimador puntual de θ a cualquier estadístico $\hat{\Theta} = h(X_1, ..., X_n)$ cuyo valor $\hat{\theta} = h(x_1, ..., x_n)$ dará una estimación puntual de θ. En este caso, Θ es una variable aleatoria y $\hat{\theta}$ es un número (aunque en el caso particular de la moda podría no serlo).

Estimador puntual de la media:

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Estimador puntual de la varianza:

$$\widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Estimador puntual de la proporción:

$$\hat{\pi} = p = \frac{\text{Número de éxitos}}{n}$$

Estimación intervalar

Sea X_1,...,X_n una muestra aleatoria de tamaño n de una población con parámetro desconocido θ. Sean x_1,...,x_n valores observados de dicha muestra.

Sean además $a = h_1(x_1, ..., x_n)$ y $b = h_2(x_1, ..., x_n)$ dos valores numéricos calculados a partir de los datos, con $a \leq b$. Entonces, el intervalo $[a, b]$ es un intervalo de confianza para θ con un nivel de confianza $1 - \alpha$ si se cumple que:

$$P(h_1(x_1, ..., x_n) \leq \theta \cap h_2(x_1, ..., x_n) \geq \theta) = P(h_1(x_1, ..., x_n) \leq \theta \leq h_2(x_1, ..., x_n)) = 1-\alpha$$

En otras palabras, el intervalo $[a, b]$ tiene un nivel de confianza del $(1 - \alpha) \times 100\%$ de contener el parámetro θ, o que $\theta \in [a, b]$ con un nivel de confianza del $(1 - \alpha) \times 100\%$.

Interpretación: Con un nivel de confianza del $(1 - \alpha) \times 100\%$, se estima que el parámetro desconocido θ está contenido en el intervalo $[a, b]$.

Si se repitiera este experimento muchas veces, cada vez obteniendo una nueva muestra aleatoria del mismo tamaño y construyendo un nuevo intervalo mediante la misma regla, entonces aproximadamente el $(1 - \alpha)\%$ de esos intervalos incluirían el verdadero valor del parámetro θ.

Estimación de la media por intervalo de confianza

Caso teórico: varianza poblacional conocida

Si $X_1,...,X_n$ es una muestra aleatoria de una población Normal con media μ y σ^2 conocida, el intervalo con un nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\%$ para la media μ se obtiene mediante:

$$\left(\underbrace{\bar{X} - Z_{(1-\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{a} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + Z_{(1-\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{b}\right)$$

donde a y b son valores numéricos que representan el Límite inferior y Límite superior del intervalo de confianza. En caso $n > 30$, el requisito de normalidad de la variable se flexibiliza.

Interpretación: Con un nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\%$, se estima que la media poblacional μ esté contenida en el intervalo $[a, b]$, es decir el procedimiento utilizado para construir este intervalo genera, en el largo plazo, intervalos que contienen la verdadera media poblacional μ en aproximadamente el $(1-\alpha)\times 100\%$ de los casos.

Caso realista: varianza poblacional desconocida

Si $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de una población Normal con media μ y σ^2 desconocida, el intervalo con un nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\%$ para la media μ se obtiene mediante:

$$\left(\underbrace{\bar{X} - t_{(1-\alpha/2;n-1)}\frac{s}{\sqrt{n}}}_{a} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + t_{(1-\alpha/2;n-1)}\frac{s}{\sqrt{n}}}_{b}\right)$$

donde a y b son valores numéricos que representan el Límite inferior y Límite superior del intervalo de confianza. En caso $n > 30$, el requisito de normalidad de la variable se flexibiliza.

Interpretación: Con un nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\%$, se estima que la media poblacional μ esté contenida en el intervalo $[a, b]$, es decir el procedimiento utilizado para construir este intervalo genera, en el largo plazo, intervalos que contienen la verdadera media poblacional μ en aproximadamente el $(1-\alpha)\times 100\%$ de los casos.

En resumen, para estimar la media μ por intervalo de confianza:

1. Si la variable aleatoria sigue distribución Normal:
   1.1 Varianza conocida: Usar $N(0,1)$, ya que la distribución de $\overline{X}$ es exacta.
   1.2 Varianza desconocida y n grande: Usar t_{n-1} aunque se aproxima a $N(0,1)$.
   1.3 Varianza desconocida y n pequeño: Usar t_{n-1}.
2. Si la variable aleatoria no sigue una distribución Normal:
   2.1 Varianza conocida y n grande: Usar $N(0,1)$ ya que por TLC, $\overline{X} \sim N$.
   2.2 Varianza conocida y n pequeño: Usar métodos computacionales.
   2.3 Varianza desconocida y n grande: Usar $N(0,1)$.
   2.4 Varianza desconocida y n pequeño: Usar métodos computacionales.

Ejemplo 1

Una investigadora estudia la longitud de las hojas de una planta nativa y desea estimar la media poblacional. Para ello, mide una muestra aleatoria de 8 hojas, obteniendo los siguientes valores (en centímetros):

`7.8, 8.2, 7.5, 8.0, 8.3, 7.9, 7.6, 8.1`

Se desea construir un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional de la longitud de las hojas, asumiendo que la variable sigue una distribución normal y que la varianza poblacional es desconocida.

```r
hojas <- c(7.8, 8.7, 7.2, 8.0, 8.3, 7.9, 7.6, 8.1)
library(magrittr)
hojas |> t.test() |> use_series(conf.int)
```

```
[1] 7.573459 8.326541
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Con un nivel de confianza del 95%, podemos afirmar que el verdadero valor de la longitud promedio de las hojas está entre 7.57 cm y 8.33 cm.

```r
hojas |> t.test(conf.level = 0.90) |> use_series(conf.int) # para otro nive
```

```
[1] 7.648309 8.251691
attr(,"conf.level")
[1] 0.9
```

```r
n     <- hojas |> length()
x_bar <- hojas |> mean()
s     <- hojas |> sd()
gl    <- n - 1
alpha <- 0.05
tcrit <- qt(1 - alpha/2, df = gl)
se    <- s / sqrt(n) # error estándar
li    <- x_bar - tcrit * se
ls    <- x_bar + tcrit * se
c(li,ls)
```

```
[1] 7.573459 8.326541
```

Notar que aquí no es válida la aproximación a la distribución Normal, ya que $n = 8$

```r
n      <- hojas |> length()
x_bar <- hojas |> mean()
s      <- hojas |> sd()
alpha <- 0.05
zcrit <- qnorm(1 - alpha/2)
se     <- s / sqrt(n) # error estándar
li     <- x_bar - zcrit * se
ls     <- x_bar + zcrit * se
c(li,ls)
```

```
[1] 7.637897 8.262103
```

Ejemplo 2

Una municipalidad metropolitana desea estimar el tiempo promedio que tardan los ciudadanos en llegar a sus centros de trabajo usando transporte público. Con este objetivo, se encuestó a una muestra aleatoria de 60 personas que se movilizan diariamente en bus o metro.

Los tiempos registrados (en minutos) fueron los siguientes:

`78, 82, 85, 80, 77, 83, 79, 81, 86, 80, 82, 84, 78, 87, 81, 79, 83, 82, 80, 84, 81, 79, 85, 80, 82, 78, 86, 81, 80, 83, 77, 79, 84, 82, 80, 78, 86, 83, 79, 80, 82, 81, 77, 85, 80, 79, 83, 82, 78, 84, 81, 79, 80, 77, 86, 82, 80, 81, 83, 78`

Se desea construir un intervalo de confianza del 95% para el tiempo promedio de traslado al trabajo, asumiendo que la varianza poblacional es desconocida.

```r
tiempos = c(78, 82, 85, 80, 77, 83, 79, 81, 86, 80, 82, 84, 78, 87,
81, 79, 83, 82, 80, 84, 81, 79, 85, 80, 82, 78, 86, 81, 80, 83, 77,
79, 84, 82, 80, 78, 86, 83, 79, 80, 82, 81, 77, 85, 80, 79, 83, 82,
78, 84, 81, 79, 80, 77, 86, 82, 80, 81, 83, 78)
tiempos |> t.test() |> use_series(conf.int)
```

```
[1] 80.52268 81.87732
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Con un nivel de confianza del 95%, podemos afirmar que el verdadero tiempo promedio de traslado al trabajo está contenido entre 80.52 y 81.88 minutos.

```r
n     <- tiempos |> length()
x_bar <- tiempos |> mean()
s     <- tiempos |> sd()
gl    <- n - 1
alpha <- 0.05
tcrit <- qt(1 - alpha/2, df = gl)
se    <- s / sqrt(n) # error estándar
li    <- x_bar - tcrit * se
ls    <- x_bar + tcrit * se
c(li,ls)
```

```
[1] 80.52268 81.87732
```

Notar que aquí sí es válida la aproximación a la distribución Normal, ya que $n = 60 > 30$

```r
n     <- tiempos |> length()
x_bar <- tiempos |> mean()
s     <- tiempos |> sd()
alpha <- 0.05
zcrit <- qnorm(1 - alpha/2)
se    <- s / sqrt(n) # error estándar
li    <- x_bar - zcrit * se
ls    <- x_bar + zcrit * se
c(li,ls)
```

```
[1] 80.53657 81.86343
```

Estimación de la varianza por intervalo de confianza

Si $X_1,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de una población Normal con y σ^2 desconocida, el intervalo con un nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\%$ para la variancia σ^2 se obtiene mediante

$$\underbrace{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2;n-1)}}}_{a} \leq \sigma^2 \leq \underbrace{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(\alpha/2;n-1)}}}_{b}$$

donde a y b son valores numéricos que representan el Límite inferior y Límite superior del intervalo de confianza. Para cualquier valor de n se debe verificar Normalidad.

Interpretación: Con un nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\%$, se estima que la variancia poblacional σ^2 esté contenida en el intervalo $[a,b]$.

Si se desea obtener los límites de confianza para la desviación estándar se obtiene la raíz cuadrada en la expresión anterior obteniéndose:

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2;n-1)}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(\alpha/2;n-1)}}}$$

Ejemplo 3

Un laboratorio analiza el contenido de sodio (en mg/L) en muestras de agua de una planta de tratamiento. Se toma una muestra aleatoria de $n = 12$ unidades, obteniendo los siguientes datos:

`43, 39, 45, 48, 46, 50, 44, 49, 47, 46, 42, 41`

Se desea construir un intervalo de confianza del 95% para la varianza poblacional σ^2, asumiendo que el contenido de sodio sigue una distribución Normal.

```r
sodio = c(43, 39, 45, 48, 46, 50, 44, 49, 47, 46, 42, 41)
library(EnvStats)
sodio |>
  varTest(conf.level = 0.95)|>
  use_series(conf.int)
```

```
      LCL       UCL 
 5.565681 31.972759 
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Con un nivel de confianza del 95%, podemos afirmar que la verdadera varianza del contenido de sodio está contenida entre 5.57 y 31.97 $(mg/L)^2$

```r
n        <- sodio |> length()
s2       <- sodio |> var()
alpha    <- 0.05
gl       <- n - 1
chi2_inf <- qchisq(1 - alpha/2, df = gl)
chi2_sup <- qchisq(alpha/2, df = gl)
li_var   <- (gl * s2) / chi2_inf
ls_var   <- (gl * s2) / chi2_sup
c(li_var, ls_var)
```

```
[1]  5.565681 31.972759
```

```r
c(li_var, ls_var) |> sqrt() # IC para desviación estándar
```

```
[1] 2.359170 5.654446
```

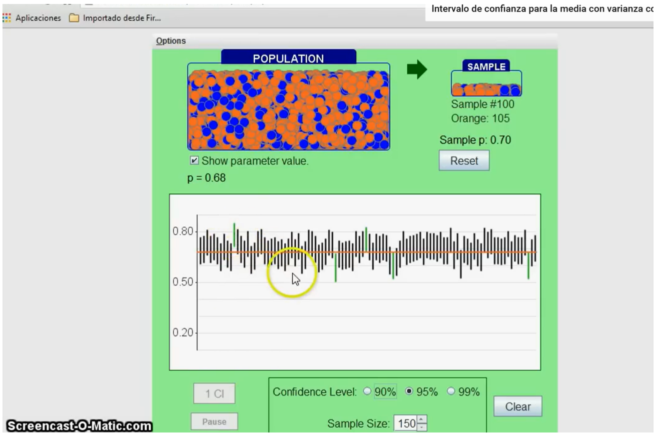
Estimación de la proporción por intervalo de confianza

Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria donde cada X_i indica la presencia (1) o ausencia (0) de una característica, p es la proporción muestral de elementos con dicha característica, $n > 30$, $np > 0.05$ y $n(1-p) > 0.05$, entonces el intervalo con un nivel de confianza del $(1-\alpha) \times 100\%$ para la proporción π se obtiene mediante

$$\underbrace{p - Z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{a} \leq \pi \leq \underbrace{p + Z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{b}$$

donde a y b son valores numéricos que representan el Límite inferior y Límite superior del intervalo de confianza.

Ver el siguiente video sobre intervalos de confianza (click aquí)



Ejemplo 4

Un equipo de investigadores está evaluando la presencia de plagas en árboles de una plantación forestal. Para ello, se selecciona aleatoriamente una muestra de 150 árboles, y se observa que 36 de ellos presentan signos visibles de infestación.

Se desea construir un intervalo de confianza del 95% para estimar la proporción poblacional de árboles infestados en toda la plantación.

```r
library(binom)
binom.confint(x = 36, n = 150, methods = "asymptotic")
```

```
      method  x   n mean     lower     upper
1 asymptotic 36 150 0.24 0.1716537 0.3083463
```

```r
n     <- 150
x     <- 36
p     <- x/n
alpha <- 0.05
zcrit <- qnorm(1-alpha/2)
li    <- p - zcrit*sqrt(p*(1-p)/n)
ls    <- p + zcrit*sqrt(p*(1-p)/n)
c(li,ls)
```

```
[1] 0.1716537 0.3083463
```

Con un nivel de confianza del 95%, podemos afirmar que la verdadera proporción de árboles infestados está contenida entre 0.1717 y 0.3083.

Cuando la proporción es cercana a 0 o 1, y/o la muestra es pequeña, se sugiere utilizar la aproximación de Wilson, que brinda un intervalo asimétrico e incluido siempre en el intervalo $[0, 1]$.

$$\text{Límite inferior} = \frac{p + \frac{z^2}{2n} - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n} + \frac{z^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z^2}{n}}$$

$$\text{Límite superior} = \frac{p + \frac{z^2}{2n} + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n} + \frac{z^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z^2}{n}}$$

Ejemplo 5

Un equipo de biólogos está monitoreando la presencia de un insecto invasor en zonas protegidas. Se colocan trampas en 44 ubicaciones diferentes, y solo 2 trampas detectan presencia del insecto. Se desea estimar, con un intervalo de confianza del 95%, la proporción de zonas afectadas por el insecto.

```r
prop.test(x = 2, n = 44, correct = FALSE)$conf.int
```

```
[1] 0.01255511 0.15134998
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

```r
binom.confint(x = 2, n = 44, methods = "wilson")
```

```
  method x  n       mean      lower   upper
1 wilson 2 44 0.04545455 0.01255511 0.15135
```

Con un nivel de confianza del 95%, podemos afirmar que la verdadera proporción de zonas afectadas por el insecto está en el intervalo [0.0126, 0.1514].

```r
n       <- 44
x       <- 2
p       <- x/n
alpha   <- 0.05
zcrit   <- qnorm(1-alpha/2)
num_li <- (p+zcrit**2/(2*n)-zcrit*sqrt(p*(1-p)/n+zcrit**2/(4*n**2)))
num_ls <- (p+zcrit**2/(2*n)+zcrit*sqrt(p*(1-p)/n+zcrit**2/(4*n**2)))
li_wilson <- num_li/(1+zcrit**2/n)
ls_wilson <- num_ls/(1+zcrit**2/n)
c(li_wilson,ls_wilson)
```

```
[1] 0.01255511 0.15134998
```

Cuando la proporción es cercana (o igual) a 0 o 1, y/o el tamaño muestral es muy pequeño, se recomienda utilizar el método exacto. Este método proporciona un intervalo de confianza asimétrico, siempre contenido en el rango $[0, 1]$ y que garantiza el nivel de confianza especificado. En el ejemplo que venimos desarrollando:

```r
binom.confint(x, n, methods = "exact")
```

```
  method x  n       mean       lower     upper
1  exact 2 44 0.04545455 0.005552952 0.1547316
```

```r
binom.test(x = x, n = n) |> use_series(conf.int)
```

```
[1] 0.005552952 0.154731578
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

```r
li_exacto <- qbeta(alpha/2, x, n - x + 1)
ls_exacto <- qbeta(1 - alpha/2, x + 1, n - x)
c(li_exacto, ls_exacto)
```

```
[1] 0.005552952 0.154731578
```

Con un nivel de confianza del 95%, podemos afirmar que la verdadera proporción de zonas afectadas por el insecto está en el intervalo [0.0056, 0.1547].

Ejemplo 6

Durante una campaña de vacunación contra la fiebre amarilla en una zona rural, se hace un seguimiento a 18 personas vacunadas. De ellas, solo 1 reporta un efecto adverso leve (como fiebre o dolor muscular) en las 48 horas posteriores.

Se desea construir un intervalo de confianza del 95% para la proporción poblacional de personas que podrían presentar un efecto adverso leve tras recibir la vacuna.

```r
x = 1
n = 18

binom.confint(x, n, methods = "asymptotic") # Aproximación Normal
```

```
      method x  n       mean       lower     upper
1 asymptotic 1 18 0.05555556 -0.05026348 0.1613746
```

```r
binom.confint(x, n, methods = "wilson") # Aproximación de Wilson
```

```
  method x  n       mean       lower    upper
1 wilson 1 18 0.05555556 0.009875191 0.257573
```

```r
binom.confint(x, n, methods = "exact") # Método exacto
```

```
  method x  n       mean       lower     upper
1  exact 1 18 0.05555556 0.001405556 0.2729436
```

Interpretar el intervalo adecuado para el caso.

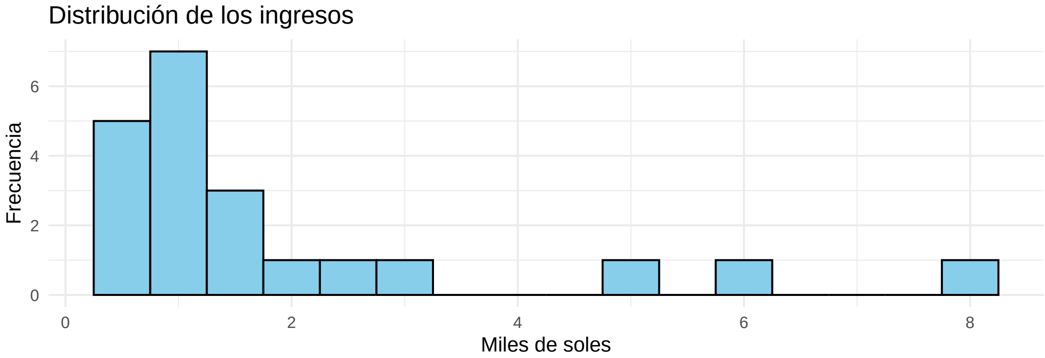
Estimación de la mediana por intervalo de confianza

Si X_1,...,X_n es una muestra aleatoria i.i.d. de una población con mediana θ. Su distribución muestral no es directa como en el caso de la media. Se optará por utilizar bootstrap:

1. Se calcula la mediana muestral, $\widehat{\theta}$
2. Se generan B muestras Bootstrap, de modo que para cada $b = 1, ..., B$:
   2.1 Tomar una muestra con reemplazo de tamaño n de los datos originales: $X_1^{*(b)}, ..., X_n^{*(b)}$
   2.2 Calcular la mediana bootstrap: $\widehat{\theta}^{*(b)}$
3. Obtener la distribución empírica de la mediana: $\widehat{\theta}^{*(1)}, ..., \widehat{\theta}^{*(1)}$
4. El IC bootstrap tipo percentil al nivel $1 - \alpha$ es $[q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$, donde q_p es el percentil p de los valores $\widehat{\theta}^{*(b)}$

Ejemplo 7

Se tiene el monto de ingreso mensual de 12 personas, en miles de soles: 5.0, 0.7, 1.2, 8.0, 0.5, 0.6, 3.0, 1.4, 0.8, 0.6, 1.5, 1.0.



```r
library(boot)
library(simpleboot)
x <- c(5.0, 0.7, 1.2, 8.0, 0.5, 0.6, 3.0, 1.4, 0.8, 0.6, 1.5, 1.0,
       0.8, 0.7, 1.8, 2.5, 1.2, 6.1, 1.5, 0.9, 0.8)
x |>
  one.boot(FUN = median, R = 2000) |>
  boot.ci(type = "perc")
```

```
BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
Based on 2000 bootstrap replicates

CALL :
boot.ci(boot.out = one.boot(x, FUN = median, R = 2000), type = "perc")

Intervals :
Level     Percentile
95%   ( 0.8,  1.5 )
Calculations and Intervals on Original Scale
```

```r
x <- c(5.0, 0.7, 1.2, 8.0, 0.5, 0.6, 3.0, 1.4, 0.8, 0.6, 1.5, 1.0,
       0.8, 0.7, 1.8, 2.5, 1.2, 6.1, 1.5, 0.9, 0.8)
n            <- length(x)
B            <- 2000
boot_medianas <- numeric(B)

for (b in 1:B) {
  muestra          <- sample(x, size = n, replace = TRUE)
  boot_medianas[b] <- median(muestra)
}

quantile(boot_medianas, probs = c(0.025, 0.975))
```

```
 2.5% 97.5%
  0.8   1.5
```