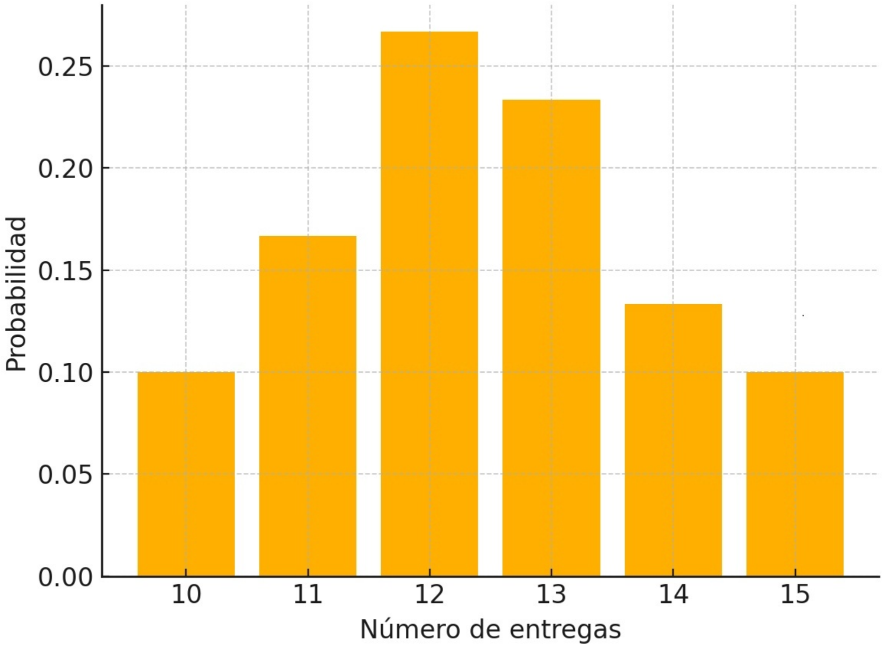
Unidad 3: Variable aleatoria

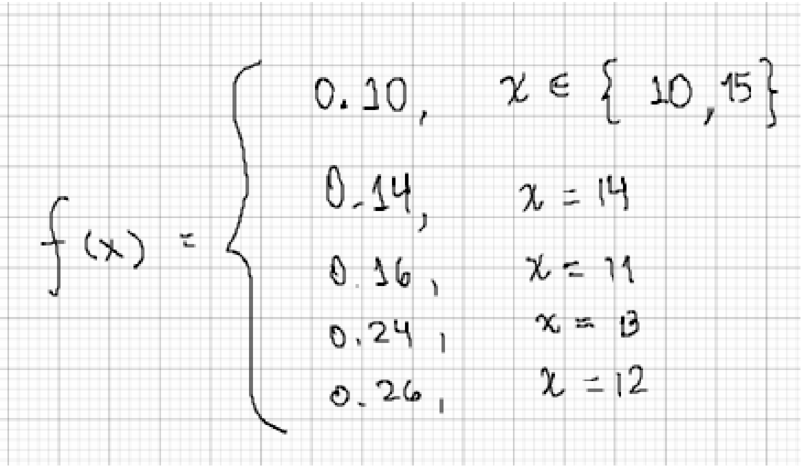
Mg. J. Eduardo Gamboa U.

Table of contents

Ejercicio 1

Una empresa de reparto quiere analizar el desempeño de sus repartidores durante una jornada de trabajo para identificar oportunidades de mejora. Sea X la variable aleatoria que representa el número de entregas completadas por un repartidor en un día.





$$f(x) = \begin{cases} 0.10, & x \in \{10, 15\} \\ 0.14, & x = 14 \\ 0.16, & x = 11 \\ 0.24, & x = 13 \\ 0.26, & x = 12 \end{cases}$$

Ejercicio 1.1

¿Cuál es la probabilidad de que se realicen no menos de 12 entregas en un día?

$$P(X \geq 12) = f(12) + f(13) + f(14) + f(15) = 0.26 + 0.24 + 0.14 + 0.10 = 0.74$$

Ejercicio 1.2

Si se sabe que ya se realizaron al menos 11 entregas, ¿cuál es la probabilidad de que se realicen 15 entregas?

$$P(X = 15|X \geq 11) = \frac{P(X = 15)}{P(X \geq 11)} = \frac{f(15)}{1 - f(10)} = \frac{0.10}{0.90} = \frac{1}{9}$$

Ejercicio 1.3

¿Cuál es la media, mediana y moda de la cantidad de entregas completadas por repartidor?

Media

$$E(X) = 10 \times 0.10 + 11 \times 0.16 + 12 \times 0.26 + 13 \times 0.24 + 14 \times 0.14 + 15 \times 0.10 = 12.46$$

```r
x = 10:15
fx = c(0.10, 0.16, 0.26, 0.24, 0.14, 0.10)
sum(x*fx)
```

```
[1] 12.46
```

El número promedio (o esperado) de entregas completadas por día se encuentra entre 12 y 13.

Mediana

La mediana es de 12 entregas completadas por día, es decir al menos el 50% de los días se realizan 12 o menos entregas.

$$P(X \leq 12) = f(10) + f(11) + f(12) = 0.10 + 0.16 + 0.26 = 0.52$$

Moda

La moda es de 12 entregas completadas por día, ya que es el valor con mayor probabilidad de ocurrencia.

Ejercicio 1.4

Si se sabe que ya se realizaron al menos 12 entregas, ¿cuál es la cantidad esperada de entregas completadas?

La probabilidad de que se hayan realizado al menos 12 entregas en un día es:

$$P(X \geq 12) = f(12) + f(13) + f(14) + f(15) = 0.26 + 0.24 + 0.14 + 0.10 = 0.74$$

$$P(X = 12|X \geq 12) = \frac{P(X = 12)}{P(X \geq 12)} = \frac{0.26}{0.74} = 0.351$$

$$P(X = 13|X \geq 12) = \frac{P(X = 13)}{P(X \geq 12)} = \frac{0.24}{0.74} = 0.324$$

$$P(X = 14|X \geq 12) = \frac{P(X = 14)}{P(X \geq 12)} = \frac{0.14}{0.74} = 0.189$$

$$P(X = 15|X \geq 12) = \frac{P(X = 15)}{P(X \geq 12)} = \frac{0.10}{0.74} = 0.135$$

$$E(X|X \geq 12) = 12 \times 0.351 + 13 \times 0.324 + 14 \times 0.189 + 15 \times 0.135 = 13.095$$

```r
x = 12:15
fx = c(0.351, 0.324, 0.189, 0.135)
sum(x*fx)
```

```
[1] 13.095
```

Si se sabe que en un día ya se realizaron al menos 12 entregas, se espera obtener aproximadamente 13 (promedio o valor esperado condicional).

Ejercicio 1.5

Cuando se realizan entre 10 y 11 entregas, la probabilidad de demora es de 0.2, mientras que si se realizan 12, 13 o 14 entregas, esta probabilidad es 0.25. Finalmente, cuando se realizan 15 entregas, la probabilidad de demora es 0.30. ¿Cuál es la probabilidad total de demora?

A = {Se realizan 10 u 11 entregas}

B = {Se realizan 12, 13 o 14 entregas}

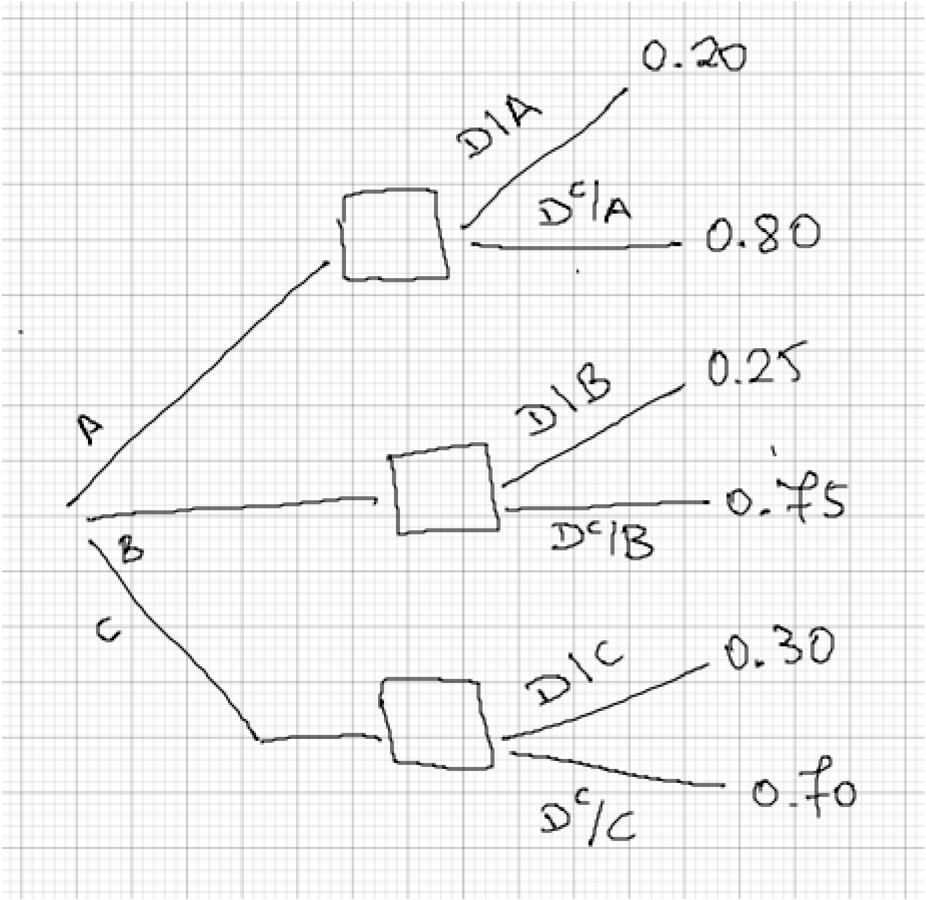
C = {Se realizan 15 entregas}

D = {Existe demora}

$P(D|A) = 0.20$

$P(D|B) = 0.25$

$P(D|C) = 0.30$



$P(A) = P(X = 10) + P(X = 11) = 0.10 + 0.16 = 0.26$

$P(B) = P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) = 0.26 + 0.24 + 0.14 = 0.64$

$P(C) = P(X = 15) = 0.10$

$P(D) = 0.26 \times 0.20 + 0.64 \times 0.25 + 0.10 \times 0.30 = 0.242$

La probabilidad total (sin desagregar por cada situación) de demora es 0.242

Ejercicio 1.6

El proceso de reparto tendrá que se reevaluado si el coeficiente de variación supera el 10%. ¿Qué decisión deberá tomarse?

$$E(X) = 10 \times 0.10 + 11 \times 0.16 + 12 \times 0.26 + 13 \times 0.24 + 14 \times 0.14 + 15 \times 0.10 = 12.46 \text{ entregas}$$

```r
x = 10:15
fx = c(0.10, 0.16, 0.26, 0.24, 0.14, 0.10)
sum(x*fx)
```

```
[1] 12.46
```

$$E(X^2) = 10^2 \times 0.10 + 11^2 \times 0.16 + 12^2 \times 0.26 + 13^2 \times 0.24 + 14^2 \times 0.14 + 15^2 \times 0.10 = 157.3$$

```r
x = 10:15
fx = c(0.10, 0.16, 0.26, 0.24, 0.14, 0.10)
sum(x^2*fx)
```

```
[1] 157.3
```

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 157.3 - 12.46^2 = 2.0484 \text{ entregas}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{2.0484} = 1.4312 \text{ minutos}$$

```r
sqrt(157.3 - 12.46^2)
```

```
[1] 1.431223
```

$$CV_x = \frac{1.4312}{12.46} \times 100\% = 11.486\%$$

```r
1.4312/12.46*100
```

```
[1] 11.48636
```

Por lo tanto, el proceso sí deberá ser reevaluado, puesto que el CV supera el umbral del 10%.

Ejercicio 2

La empresa de reparto quiere programar visitas aleatorias de supervisores para observar el desempeño de los repartidores sin que estos lo anticipen.

Para hacerlo, deciden que el tiempo que transcurre entre el inicio de una entrega y la visita sorpresa se genere aleatoriamente y de forma uniforme continua entre 15 y 35 minutos, de modo que:

$$f(x) = \frac{1}{20} I_{[15,35]}(x)$$

Ejercicio 2.1

¿Cuál es la probabilidad de que el supervisor llegue antes de los 25 minutos?

$$P(X < 25) = \int_{15}^{25} \frac{1}{20} dx = 0.50$$

```
fx = function(x){x^0/20}
integrate(fx, 15, 25)$value
```

```
[1] 0.5
```

Ejercicio 2.2

¿Cuál es la probabilidad de que llegue entre los 20 y 30 minutos?

$$P(20 < X < 30) = \int_{20}^{30} \frac{1}{20} dx = 0.50$$

```
fx = function(x){x^0/20}
integrate(fx, 20, 30)$value
```

```
[1] 0.5
```

Ejercicio 2.3

Si ya ha transcurrido 20 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo sea como máximo de media hora?

$$P(X \leq 30|X \geq 20) = \frac{P(20 \leq X \leq 30)}{P(X \geq 20)} = \frac{\int_{20}^{30} \frac{1}{20} dx}{\int_{20}^{35} \frac{1}{20} dx} = \frac{0.5}{0.75} = 0.667$$

```r
fx = function(x){x^0/20}
(num = integrate(fx, 20, 30)$value)
```

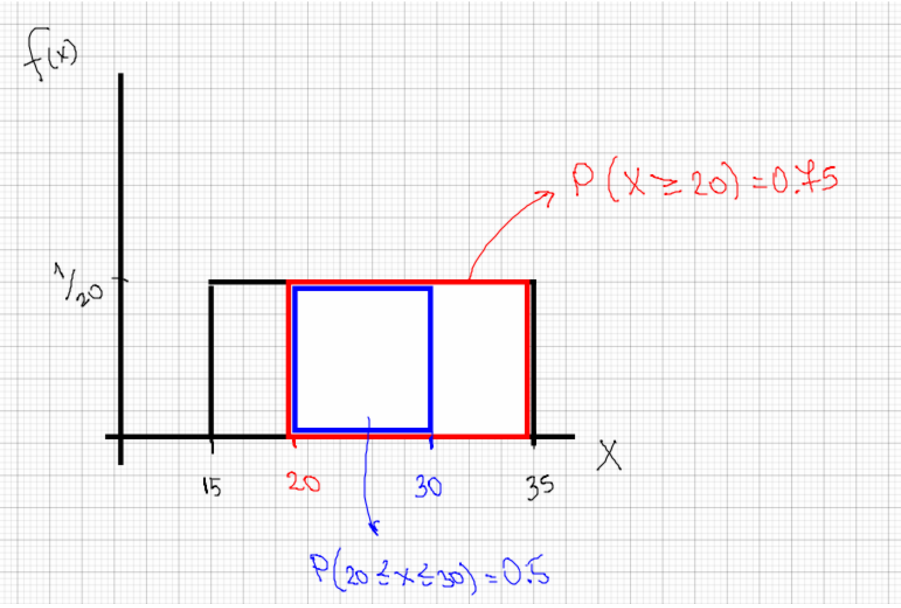
```
[1] 0.5
```

```r
(den = integrate(fx, 20, 35)$value)
```

```
[1] 0.75
```

```r
num/den
```

```
[1] 0.6666667
```



Ejercicio 2.4

¿Cuál es el tiempo esperado hasta la visita sorpresa?

$$E(X) = \int_{R_x} x \times f(x)dx = 25$$

```
Ex = function(x){x*1/20}
(media <- integrate(Ex, 15, 35)$value)
```

```
[1] 25
```

Se espera que el tiempo que transcurre entre el inicio de la entrega y la visita sorpresa sea de 25 minutos.

El tiempo promedio que transcurre entre el inicio de la entrega y la visita sorpresa sea de 25 minutos.

Ejercicio 2.5

¿Cuál es la mediana del tiempo hasta la visita sorpresa?

La mediana es 25 porque $P(X \leq 25) = 0.5$ (revisar ejercicio 2.1)

Ejercicio 2.6

Hallar el coeficiente de variación del tiempo que transcurre entre el inicio de una entrega y la visita sorpresa.

```
Ex2 = function(x){x^2*1/20} # Función para hallar el E(X^2)
(espx2 <- integrate(Ex2, 15, 35)$value) # Hallando la integral de E(X^2)
```

```
[1] 658.3333
```

```
(Vx = espx2 - media^2) # varianza = E(X^2) - E(X)^2
```

```
[1] 33.33333
```

```r
(CV = sqrt(Vx)/media*100) # coeficiente de variación = desv/media*100
```

```
[1] 23.09401
```

El coeficiente de variación es de 23.09%