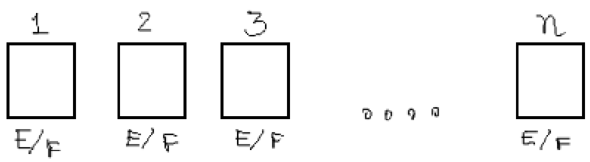
Distribución Binomial



$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}, & x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$X \sim Bin(n = 9, \pi = 0.4) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \binom{9}{x} 0.4^{x}\, 0.6^{9-x}, & x \in \{0, \dots, 9\} \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$P(X = 3) = f(3) = \binom{9}{3} 0.4^3\, 0.6^6 = \dots$$

Ejemplos

→ éxito

- X = Número de correos promocionales abiertos $\to X \sim Bin(n = 1000, \pi = 0.20)$
- Y = Número de piezas defectuosas producidas $\to Y \sim Bin(n = 30, \pi = 0.05)$
- L = Número de respuestas correctas en un examen de opción múltiple (cuando se elige al azar) $\to L \sim Bin(n = 10, \pi = 0.25)$
- S = Número de semillas que germinan $\to S \sim Bin(n = 200, \pi = 0.88)$

M = Número de vuelos que salen a tiempo → M ~ Bin(n = 30, pi = 0.75)

$$f(x_i) = \pi^{x_i}(1-\pi)^{n-x_i}$$

$$f(x) = \binom{n}{x}\pi^{x}(1-\pi)^{n-x}$$

$$L(\pi) = \binom{n}{x}\pi^{x}(1-\pi)^{n-x} \leftarrow \text{Verosimilitud}$$

$$\log L(\pi) = \log\binom{n}{x} + x\log\pi + (n-x)\log(1-\pi) \leftarrow \text{logVerosimilitud} \leftarrow \text{MAXIMIZAR}$$

$$\frac{d\log L(\pi)}{d\pi} = x\cdot\frac{1}{\pi} + (n-x)\cdot\frac{(-1)}{1-\pi} = 0$$

$$\frac{x}{\pi} = \frac{n-x}{1-\pi}$$

$$x - \cancel{x\pi} = n\pi - \cancel{x\pi}$$

$$x = n\pi$$

$$\boxed{\frac{x}{n} = \hat{\pi}}$$

$X \sim Bin(n = 20, \pi = 0.75)$

$P(X = 19)$

```
dbinom(x = 19, size = 20, prob = 0.75)
```

$P(X \leq 14)$

```
pbinom(q = 14, size = 20, prob = 0.75)
```

$P(X < 16) = P(X \leq 16) - P(X = 16) = P(X \leq 15)$

```
> pbinom(q = 16, size = 20, prob = 0.75) - dbinom(x = 16, size = 20, prob = 0.75)
[1] 0.5851585
```

```
> pbinom(q = 15, size = 20, prob = 0.75)
[1] 0.5851585
```

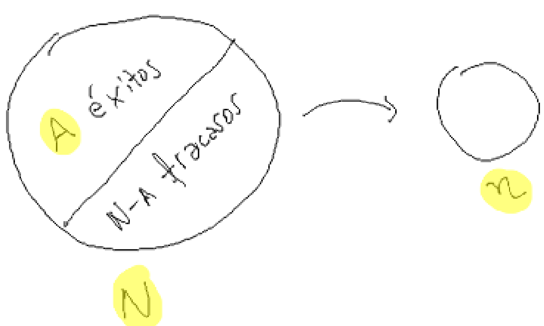
$$\overset{10,\ 11}{P(9 < X \le 11)} = \overset{0,1,2,\dots,9,10,11}{P(X \le 11)} - \overset{0,1,2,\dots,9}{P(X \le 9)} = P(X=10) + P(X=11)$$

```
> pbinom(q = 11, size = 20, prob = 0.75) - pbinom(q = 9, size = 20, prob = 0.75)
[1] 0.03698303
> dbinom(x = 10, size = 20, prob = 0.75) + dbinom(x = 11, size = 20, prob = 0.75)
[1] 0.03698303
```

Distribución Hipergeométrica

Binomial:
- Muestreo con reemplazo (sin importar tamaño poblacional)
- Muestreo sin reemplazo pero de una población grande (no interesa conocer N)

Hipergeométrica
- Muestreo sin reemplazo pero de una **población pequeña** (decenas de unidades).



$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \textbf{máx}(0, n + A - N) \leq x \leq \textbf{mín}(n, A) \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$N = 12, \quad n = 4, \quad A = 9$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{9}{x}\binom{3}{4-x}}{\binom{12}{4}}, & x \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

$\text{máx}(0, \underbrace{4+9-12}_{1}) = 1 \qquad \text{mín}(4, 9) = 4$

Distribución Poisson

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x \in \{0, 1, 2, ...\}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{e^{-3}\, 3^{x}}{x!}, \quad x \in \{0,1,2,\dots\} \rightarrow \infty$$

$$f(x_i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$n \qquad L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!} \qquad \text{Verosimilitud}$$

$$\log L(\lambda) = -n\lambda + \sum x_i \log\lambda - \log \prod x_i! \qquad \text{Log Verosimilitud}$$

$$\frac{d \log L(\lambda)}{d\lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \qquad \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X} \text{ es el estimador máximo verosímil}$$

X=Número de individuos en 2 km^2, $X \sim Pois(1.2)$

$\lambda = 1,2$ — $2 Km^2$

La cantidad media de individuos en un área de $3km^2$ es:

$\lambda = ¿?$ — $3 Km^2$

$$\mu_X = E(X) = 1.8$$

$$\lambda = \frac{1.2 \times 3}{2} = 1.8$$

```
> ppois(q = 3, lambda = 1.8)
[1] 0.8912916
```

$P(X \leq 3) \leftarrow$ cola inferior (lower.tail = TRUE)

$P(X > 3) \leftarrow$ cola SUPERIOR (lower.tail = FALSE)

```
> ppois(q = 3, lambda = 1.8, lower.tail = FALSE)
[1] 0.1087084
```

Distribución Geométrica

F F E $(x=3)$

X = N° intentos HASTA el 1° éxito

$$f(x) = \pi(1-\pi)^{x-1} \qquad x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$\pi = 0.7$

¿Cuál es la probabilidad de obtener un éxito en el primer intento?

$$f(1) = 0.7 \times 0.3^{1-1} = 0.7$$

¿Cuál es la probabilidad de obtener un éxito en el segundo intento?

$$f(2) = 0.7 \times 0.3^{2-1} = 0.21$$

¿Cuál es la probabilidad de obtener un éxito en el tercer intento?

$$f(x) = 0.7 \times 0.3^{3-1} = 0.7 \times 0.3^2 = 0.7 \times 0.09 = 0.063$$

F F E $(x=2)$

X = N° $\underbrace{\text{intentos}}_{\text{fracasos}}$ ANTES del 1° éxito

$$f(x) = \pi(1-\pi)^{x} \qquad x \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$\pi = 0.7$ ✓

¿Cuál es la probabilidad de obtener un éxito sin fracasos previos?

$$f(0) = 0.7 \times 0.3^0 = 0.7$$

$\times 0.3$

¿Cuál es la probabilidad de obtener un éxito luego de un fracaso?

$$f(1) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$$

$\times 0.3$

¿Cuál es la probabilidad de obtener un éxito luego de <u>2</u> fracasos?

$$f(2) = 0.7 \times 0.3^2 = 0.063$$

$\boxed{F}\quad \boxed{F}\quad \boxed{E}\quad (x=3)$

X = Nº intentos HASTA el 1º éxito

$$f(x) = \pi(1-\pi)^{x-1} \qquad x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0.7} = 1{,}43$$

Número medio de intentos hasta lograr el éxito

$$\sigma^2_X = V(X) = \frac{1}{\pi^2}$$

$\boxed{F}\quad \boxed{F}\quad \boxed{E}\quad (x=2)$

R

X = Nº $\underbrace{\text{intentos}}_{\text{fracasos}}$ ANTES del 1º éxito

$$f(x) = \pi(1-\pi)^{x} \qquad x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\mu_X = E(X) = \frac{1-\pi}{\pi} = \frac{1-0.7}{0.7} = \frac{0.3}{0.7} = 3/7 = 0.43$$

Número medio de fracasos

$$\sigma^2_X = V(X) = \frac{1-\pi}{\pi^2}$$

Probabilidad de que se requieran más de 5 intentos para lograr obtener una respuesta:

$$P(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{\infty} P(X = i) = P(X = 5) + P(X = 6) + ... = 0.4437$$

N° intentos = 6, 7, 8, ...

N° de fracasos = 5, 6, 7, ... (de 5 en adelante) $\xrightarrow[\text{su complemento}]{}$ (de 0 hasta 4)

$P(x \geq 5) = 1 - P(x \leq 4)$

```
1-pgeom(q = 4, prob = 0.15)
```

```
[1] 0.4437053
```

Si hasta el momento ya $\underbrace{\text{se intentó 3 veces sin recibir una respuesta,}}_{\text{3 fracasos}}$ ¿cuán probable es necesitar $\underbrace{\text{5 intentos en total}}$?

4 fracasos 1 éxito

$$P(X=4 \mid X>3)$$

$$\hookrightarrow \frac{P(X=4)}{P(\underbrace{X}_{4,5,6,\ldots}>3)} = \frac{P(X=4)}{1-P(X\leq 3)} =$$

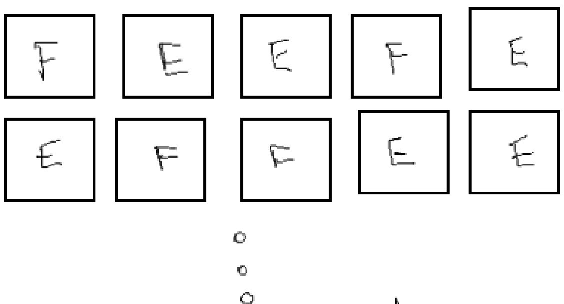
```
> dgeom(x = 4, prob = 0.15)
[1] 0.07830094
```

over

```
> 1-pgeom(q = 3, prob = 0.15)
[1] 0.5220063
```

$= 0.15$

Distribución Binomial Negativa



2f y 3e

2f y 3e

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{x}(1-\pi)^x \pi^r, & x \in \{0, 1, 2, 3, ...\} \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$\xrightarrow{}$ VARIANZA > MEDIA

* Sobredispersión: Si $X \sim Pois(\lambda)$, $\mu_X = \sigma^2_X = \lambda$, pero si la variabilidad es alta, usar BN:

$$\mu_X = E(X) = r \times \frac{1-\pi}{\pi}$$

$$\sigma^2_X = V(X) = r \times \frac{1-\pi}{\pi^2}$$

$V(X) > E(X)$

$\cancel{r}\left(\frac{\cancel{1-\pi}}{\pi^{\cancel{2}}}\right) > \cancel{r}\left(\frac{\cancel{1-\pi}}{\cancel{\pi}}\right)$

$\frac{1}{\pi} > 1$

$1 > \pi$ ✓ π es probabilidad

mientras $\pi \to 0 \Rightarrow V(X) \uparrow$