Experimento aleatorio: Lanzar dos monedas

$\Omega = \{(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)\}$, X = Número de sellos

$X(c,c) = 0$

X

$R_x : \{0, 1, 2\}$ → Rango de la variable aleatoria

finito numerable

Experimento aleatorio: Registrar el status de un trámite en una institución pública

$\Omega = \{L, PL, PPL, PPPL, PPPPL, \dots\}$ X = Número de días en espera

X

$R_x = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ infinito numerable

Ejemplo 1

Una planta empacadora revisa lotes de 8 productos. Se define la variable aleatoria X como el número de productos defectuosos registrados.

Rango de la variable: $R_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\rightarrow D$ $\rightarrow D^c$

Experimento aleatorio: Muestrear lotes de 8 productos para ver si cada uno de ellos es defectuoso o no

$$\Omega = \{(D,D,D,D,D,D,D,D), (D^c,D,D,D,D,D,D,D), \ldots, (D^c,D^c,D^c,D^c,D^c,D^c,D^c,D^c)\}$$

X X X

$$R_X = \{ 8, 7, \ldots, 0 \} = \{0, 1, \ldots, 8\}$$

Ejemplo 2

Un área de atención al cliente registra cuántos reclamos se reciben por día. Aunque puede variar, se observan típicamente entre 0 y 5 reclamos. Se define la v.a. X: número de reclamos que recibe por día

Rango de la variable: $R_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

- Experimento aleatorio: Registrar **cuántos** reclamos se reciben diariamente

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\downarrow X$$
$$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Experimento aleatorio: Registrar los reclamos que se reciben diariamente

$$\Omega = \{\phi, R, RR, RRR, RRRR, RRRRR\}$$
$$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Función de probabilidad : $f(x) = P(X=x)$

¿Cuán probable es cada valor del rango?

Para una variable aleatoria discreta X, se denota como $f(x)$ su función de probabilidad, tal que satisface las siguientes condiciones:

- $f(x) = P(X = x) = 0, \quad x \notin R_x$
- $f(x) = P(X = x) > 0, \quad x \in R_x$
- $\sum_{x_i \in R_x} f(x_i) = \sum_{x_i \in R_x} P(X = x_i) = 1$

Si x no está en R_x, la probabilidad de que suceda es 0.

Si x está en R_x, x puede suceder con determinada probabilidad

$P(X = x)$

Variable Valor

Ejm: X = Número de estudiantes que asiste a clase

$x = 12$

$P(X=12)$: ¿cuál es la probabilidad de que asistan 12 estudiantes a clase?

R_x	$P(X=x)$
0	$\to$ 1/4
1	$\to$ 1/4
2	$\to$ 5/12
3	$\to$ 1/12

* $P(X=1) = f(1) = 1/4$
* $P(X>1) = f(2) + f(3) = 5/12 + 1/12 = 1/2$
* $P(X \neq 2) = f(0) + f(1) + f(3) = 1 - f(2) = 7/12$
* $P(\underbrace{X<3}_{A} \mid \underbrace{X>1}_{B}) = \dfrac{P(X=2)}{P(X>1)} = \dfrac{5/12}{1/2} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1)

x	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	0.125	0.375	0.375	0.125

2)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.125, & \text{si } x \in \{0, 3\} \\ 0.375, & \text{si } x \in \{1, 2\} \end{cases}$$

3)

$$f(x) = 0.125\, I_{(x \in \{0,3\})} + 0.375\, I_{(x \in \{1,2\})}$$

I : función indicadora

$$= 0.125\, I_{(\{0,3\})}(x) + 0.375\, I_{(\{1,2\})}(x)$$

$$f(3) = 0.125 \times 1 + 0.375 \times 0 = 0.125$$

$$f(5) = 0.125 \times 0 + 0.375 \times 0 = 0$$

Ejercicio

Un supervisor de atención al cliente evalúa aleatoriamente 2 llamadas realizadas por los operadores de un call center, para medir la calidad del servicio.

Cada llamada se califica con una puntuación de 1 (mala), 2 (regular) o 3 (buena), según una rúbrica de desempeño.

La selección de llamadas es con reposición porque se toman de una base grande y se permite que una misma calificación se repita.

Sea X la variable aleatoria, definida como la suma de las dos calificaciones. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X. **asumiendo que es igualmente probable que sea mala, regular o buena**

Experimento aleatorio: Evaluar aleatoriamente 2 llamadas realizadas con reposición

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

X

$$R_X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

R_X	$f(x)$
2	1/9
3	2/9
4	3/9
5	2/9
6	1/9

f.d. probab.

En un distrito de Lima el número de hijos por familia es una variable aleatoria con la siguiente función de probabilidad:

X = Número de hijos por familia

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.5k, & \text{si } x \in \{0, 1\} \\ k, & \text{si } x \in \{2, 3\} \\ 2.0k, & \text{si } x = 4 \\ 0, & \text{otra manera.} \end{cases}$$

a. Halle el valor de k para que $f(x)$ sea una función de probabilidad.

b. Si se escoge al azar una familia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga por lo menos dos hijos?

c. Si se escoge al azar una familia con $\boxed{\text{al menos un hijo}}$, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 3 como máximo?

a. $0.5k + 0.5k + k + k + 2k = 1$

$5k = 1$

$k = 1/5$

$k = 0.2$

$$f(x) = \begin{cases} 0.1, & x \in \{0, 1\} \\ 0.2, & x \in \{2, 3\} \\ 0.4, & x = 4 \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

b. $P(X \geq 2) = f(2) + f(3) + f(4) = 0.2 + 0.2 + 0.4 = 0.8$

c. $P(\underbrace{X \leq 3}_{A} \mid \underbrace{X \geq 1}_{B}) = \dfrac{f(1) + f(2) + f(3)}{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)} = \dfrac{0.1 + 0.2 + 0.2}{1 - 0.1} = \dfrac{0.5}{0.9} = 5/9$

$\to 1 - f(0)$

Ejercicio

Un dispositivo electrónico está compuesto por tres elementos independientes: A, B y C. Cada uno puede funcionar correctamente o fallar durante una prueba. La probabilidad de que cada elemento falle es 0.1

a. Halle la función de probabilidad de la variable aleatoria X: número de elementos que fallan en una prueba

complemento de ninguno

b. ¿Cuál es la probabilidad de que falle al menos un elemento en una prueba?

Experimento aleatorio: Realizar una prueba

$$\Omega \xrightarrow{X} R_X$$

los 3 fallan

$(A^c, B^c, C^c) \longrightarrow 3$

$(A^c, B^c, C) \longrightarrow 2$

$(A^c, B, C^c) \longrightarrow 2$

$(A, B^c, C^c) \longrightarrow 2$

$(A^c, B, C) \longrightarrow 1$

$(A, B^c, C) \longrightarrow 1$

$(A, B, C^c) \longrightarrow 1$

$(A, B, C) \longrightarrow 0$

los 3 funcionan

$\Rightarrow$

a.

R_x	$f(x)$
0 →	0.729
1 →	0.243
2 →	0.027
3 →	0.001

$$P(A^c, B^c, C^c) = P(\underbrace{A^c \cap B^c \cap C^c}_{\text{los 3 fallan}}) = P(A^c) \cdot P(B^c) P(C^c) = 0.1^3 = 0.001$$

$$P(A, B, C) = P(\underbrace{A \cap B \cap C}_{\text{los 3 funcionan}}) = P(A)P(B)P(C) = 0.9^3 = 0.729$$

$$P(2 \text{ fallan}) = (0.1 \times 0.1 \times 0.9) \times 3 = 0.027$$

$$P(1 \text{ fallo}) = (0.1 \times 0.9 \times 0.9) \times 3 = 0.243$$

$$= 1 - 0.729 - 0.027 - 0.001$$

b. $P(X \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) = 1 - f(0)$

$= 1 - 0.729$

$= 0.271$