Métodos Estadísticos y Simulación

Unidad 6: Inferencia Estadística: Pruebas de hipótesis paramétricas

Mg. J. Eduardo Gamboa U.

2025-06-16

Conceptos básicos

Hipótesis estadística

Una hipótesis estadística es una afirmación sobre la distribución de probabilidad de una población o sobre el valor o valores de uno o más parámetros, como la media (μ), la variancia (σ^2) o la proporción (π).

Esta afirmación debe estar basada en la comprensión del fenómeno y sus variables. Una buena hipótesis permite hacer predicciones específicas y, si es rechazada, ayuda a revelar la complejidad del fenómeno.

Tipos de hipótesis estadísticas

Hipótesis nula (H_0 o H_p): Es la hipótesis que es aceptada provisionalmente como verdadera y cuya validez será sometida a verificación experimental. Los resultados experimentales nos permitirán seguir aceptándola como verdadera o si debemos rechazarla como tal.

Hipótesis alterna (H_1 o H_a): Es la hipótesis que se acepta en caso de que la hipótesis nula sea rechazada. La H_1 es la suposición contraria a H_0.

Prueba de hipótesis

Una prueba de hipótesis es un proceso estructurado para tomar decisiones basadas en datos. Se fundamenta en el método hipotético-deductivo, donde las hipótesis se contrastan con la evidencia en lugar de verificarse directamente.

Una prueba de hipótesis estadística es el proceso mediante el cual se toma la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis nula.

El proceso de prueba de hipótesis determina si se rechaza o no H_0, pero **no se prueba su veracidad absoluta**.

Plantear hipótesis **antes del análisis de datos** (hipótesis a priori) mejora la solidez del estudio, enfocando la prueba en relaciones específicas y reduciendo sesgos.

Tipos de pruebas de hipótesis

En principio, se pueden formular hasta tres tipos de prueba, la cual dependerá de la forma de la hipótesis alterna que se planteé en el estudio:

Hipótesis unilateral con cola a la derecha	Hipótesis bilateral o de dos colas	Hipótesis unilateral con cola a la izquierda
$H_0 : \theta \leq \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$	$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_0 : \theta \geq \theta_0$ $H_1 : \theta < \theta_0$

donde θ es el parámetro de interés a probarse, pudiendo ser μ, σ^2, π (o algún otro que, por cuestiones de tiempo y/o complejidad no es abordado en el curso), y θ_0 es el valor o los valores supuestos que puede tomar el parámetro.

Ejemplo

Enunciado	Formulación de la hipótesis	Tipo de prueba de hipótesis
El tiempo promedio de respuesta de una IA educativa no debe superar los 2.5 segundos.	$H_0 : \mu \leq 2.5$ $H_1 : \mu > 2.5$	Unilateral derecha
El porcentaje de estudiantes que aprueban un curso con clases híbridas no es 70%.	$H_0 : \pi = 0.70$ $H_1 : \pi \neq 0.70$	Bilateral
La varianza de los niveles de CO en aulas ventiladas debe ser menor que 400 ppm^2.	$H_0 : \sigma^2 \geq 400$ $H_1 : \sigma^2 < 400$	Unilateral izquierda
El peso promedio de una variedad mejorada de palta Hass es mayor a 280 gramos.	$H_0 : \mu \leq 280$ $H_1 : \mu > 280$	Unilateral derecha
La desviación en el consumo de energía entre dos modalidades de iluminación LED no difiere significativamente.	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	Bilateral

Tipo de Errores

Al tomarse una decisión respecto a una hipótesis nula (H_0), se puede presentar cuatro posibles casos que determinan si la decisión tomada es correcta o incorrecta, esto se presenta en la siguiente tabla:

Decisión	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0	Decisión correcta con probabilidad $1-\alpha$	Error tipo II con probabilidad β
Rechazar H_0	Error tipo I con probabilidad α	Decisión correcta con probabilidad $1-\beta$

La probabilidad de cometer error tipo I se denota por α, conocido como nivel de significación. Determina el tamaño de la zona de rechazo de H_0

La probabilidad de cometer error tipo II se denota por β. Su complemento $(1-\beta)$ es conocido como potencia de prueba.

Pruebas de hipótesis para un parámetro (una población)

Prueba de hipótesis para una media

- Supuestos: Población normal o $n \geq 30$, e independencia de observaciones
- Hipótesis:
  - Unilateral a la derecha: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$
  - Unilateral a la izquierda: $H_0 : \mu \geq \mu_0$ versus $H_1 : \mu < \mu_0$
  - Bilateral: $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- Estadístico de prueba:

$$t_{calc} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

- Decisión: Comparar con valores críticos o usar p-valor

Ejemplo

Una universidad afirma que sus estudiantes dedican en promedio 4 horas diarias al estudio. Se sospecha que el promedio es realmente menor, por lo que se toma una muestra aleatoria de 35 estudiantes, quienes reportan las siguientes horas de estudio:

`2.8, 3.9, 4.2, 2.1, 3.7, 4.5, 3.8, 4.1, 4.6, 3.6, 4.3, 4.0, 2.9, 1.4, 3.9, 4.5, 4.2, 4.0, 3.8, 1.0, 4.7, 3.5, 2.1, 2.2, 3.6, 4.3, 4.8, 4.2, 3.9, 3.7, 4.4, 3.0, 3.8, 4.6, 2.5`

Verificar la afirmación con un nivel de significancia del 10%.

$$H_0 : \mu \geq 4 \qquad H_1 : \mu < 4 \qquad \alpha = 0.10$$

```r
tiempo <- c(2.8, 3.9, 4.2, 2.1, 3.7, 4.5, 3.8, 4.1, 4.6, 3.6, 4.3, 4.0,
            2.9, 1.4, 3.9, 4.5, 4.2, 4.0, 3.8, 1.0, 4.7, 3.5, 2.1, 2.2,
            3.6, 4.3, 4.8, 4.2, 3.9, 3.7, 4.4, 3.0, 3.8, 4.6, 2.5)
(tcalc <- (mean(tiempo) - 4)/(sd(tiempo)/sqrt(length(tiempo))))
```

```
[1] -2.383265
```

```r
(tcrit <- qt(p = 0.10, df = length(tiempo)-1))
```

```
[1] -1.306952
```

$t_{calc} < t_{crit}$ y la hipótesis es unilateral a la izquierda, entonces se rechaza la hipótesis nula. En conclusión…

```r
t.test(x = tiempo, mu = 4, alternative = "less")
```

```
    One Sample t-test

data:  tiempo
t = -2.3833, df = 34, p-value = 0.01144
alternative hypothesis: true mean is less than 4
95 percent confidence interval:
    -Inf 3.88878
sample estimates:
mean of x
 3.617143
```

$pvalor < \alpha$, entonces se rechaza la hipótesis nula. En conclusión…

Si solo tuviésemos datos resumidos:

```r
library(BSDA)
tsum.test(
  mean.x = 3.617,
  s.x = 0.95,
  n.x = 35,
  mu = 4,
  alternative = "less")
```

```
    One-sample t-Test

data:  Summarized x
t = -2.3851, df = 34, p-value = 0.0114
alternative hypothesis: true mean is less than 4
95 percent confidence interval:
       NA 3.888527
sample estimates:
mean of x
```

Prueba de hipótesis para una varianza

- Supuestos: Población normal e independencia de las observaciones
- Hipótesis:
  - Unilateral a la derecha: $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ versus $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$
  - Unilateral a la izquierda: $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ versus $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
  - Bilateral: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- Estadístico de prueba:

$$\chi^2_{calc} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

- Decisión: Comparar con valores críticos o usar p-valor

Ejemplo

Para los mismos datos de tiempo de estudio, se sospecha que la varianza es mayor a 1 hora. ¿Se puede verificar dicha afirmación con un nivel de significancia del 10%?

$$H_0 : \sigma^2 \leq 1 \qquad H_1 : \sigma^2 > 1 \qquad \alpha = 0.10$$

```r
(chicalc = (length(tiempo)-1)*var(tiempo)/1)
```

```
[1] 30.70971
```

```r
(chicrit = qchisq(p = 0.90, df = length(tiempo)-1))
```

```
[1] 44.90316
```

```r
library(EnvStats)
```

```r
varTest(x = tiempo, sigma.squared = 1, alternative = "greater")
```

```
$statistic
Chi-Squared
   30.70971

$parameters
df
34

$p.value
[1] 0.6296898

$estimate
 variance
0.9032269

$null.value
variance
       1

$alternative
[1] "greater"

$method
[1] "Chi-Squared Test on Variance"
```

Prueba de hipótesis para una proporción

- Supuestos: $n\pi_0 \geq 5$, $n(1-\pi_0) \geq 5$ e independencia de las observaciones
- Hipótesis:
  - Unilateral a la derecha: $H_0 : \pi \leq \pi_0$ versus $H_1 : \pi > \pi_0$
  - Unilateral a la izquierda: $H_0 : \pi \geq \pi_0$ versus $H_1 : \pi < \pi_0$
  - Bilateral: $H_0 : \pi = \pi_0$ versus $H_1 : \pi \neq \pi_0$
- Estadístico de prueba:

$$Z_{calc} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

- Decisión: Comparar con valores críticos o usar p-valor

Ejemplo

Una universidad sostiene que el 80% de los estudiantes están satisfechos con el servicio de la biblioteca. Se encuesta a 100 estudiantes al azar y 71 dicen estar satisfechos. Verificar si la proporción real difiere de 0.80, con un nivel de significancia del 5%.

$$H_0 : \pi = 0.80 \qquad H_1 : \pi \neq 0.80 \qquad \alpha = 0.05$$

#

```
p <- 71/100
(Z_calc <- (p - 0.8) / sqrt(0.8 * (1 - 0.8) / 100))
```

```
[1] -2.25
```

```
(Z_crit1 <- qnorm(0.025))
```

```
[1] -1.959964
```

```
(Z_crit2 <- qnorm(0.975))
```

```
[1] 1.959964
```

```r
prop.test(x=71, n=100, p=0.80, alternative = "two.sided", correct = F)
```

```
    1-sample proportions test without continuity correction

data:  71 out of 100, null probability 0.8
X-squared = 5.0625, df = 1, p-value = 0.02445
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.8
95 percent confidence interval:
 0.6146111 0.7898516
sample estimates:
   p
0.71
```

Pruebas de hipótesis para dos parámetros (dos poblaciones)

Prueba de hipótesis de homogeneidad de dos varianzas

- Supuestos: Ambas poblaciones normales e independientes entre ellas, así como independencia de las observaciones dentro de cada muestra
- Hipótesis: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ versus $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$
- Estadístico de prueba:

$$F_{calc} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$$

- Decisión: Comparar con valores críticos o usar p-valor

Prueba de hipótesis para dos medias independientes

- Supuestos: Ambas poblaciones normales (o con tamaño de muestra grande $n > 30$ cada una) e independientes entre ellas, así como independencia de las observaciones dentro de cada muestra
- Hipótesis:
  - Unilateral a la derecha: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$
  - Unilateral a la izquierda: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$
  - Bilateral: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ versus $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$
- Estadístico de prueba:
  - Varianzas iguales:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \mu_0}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)} \quad \text{donde} \quad s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

  - Varianzas distintas:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \mu_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_{\nu-Welch}$$

- Decisión: Comparar con valores críticos o usar p-valor

Prueba de hipótesis para dos medias pareadas

- Supuestos: Las poblaciones no son independientes. Las diferencias son normales (o con tamaño de muestra grande $n > 30$ cada una) e independientes entre ellas.
- Hipótesis:
  - Unilateral a la derecha: $H_0 : \mu_D \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu_D > \mu_0$
  - Unilateral a la izquierda: $H_0 : \mu_D \geq \mu_0$ versus $H_1 : \mu_D < \mu_0$
  - Bilateral: $H_0 : \mu_D = \mu_0$ versus $H_1 : \mu_D \neq \mu_0$
- Estadístico de prueba:

$$t_{calc} = \frac{\overline{d} - \mu_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

- Decisión: Comparar con valores críticos o usar p-valor

Prueba de hipótesis para dos proporciones

- Supuestos: $n\pi \geq 5$ en ambos grupos, e independencia de las observaciones entre grupos y dentro de cada grupo.
- Hipótesis:
  - Unilateral a la derecha: $H_0 : \pi_1 - \pi_2 \leq \pi_0$ versus $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > \mu_0$
  - Unilateral a la izquierda: $H_0 : \pi_1 - \pi_2 \geq \pi_0$ versus $H_1 : \pi_1 - \pi_2 < \pi_0$
  - Bilateral: $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = \pi_0$ versus $H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq \pi_0$
- Estadístico de prueba:

$$Z_{calc} = \frac{p_1 - p_2 - \pi_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

  Caso especial: cuando $\pi_0 = 0$, se puede usar proporción combinada:

$$Z_{calc} = \frac{p_1 - p_2 - \pi_0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

- Decisión: Comparar con valores críticos o usar p-valor