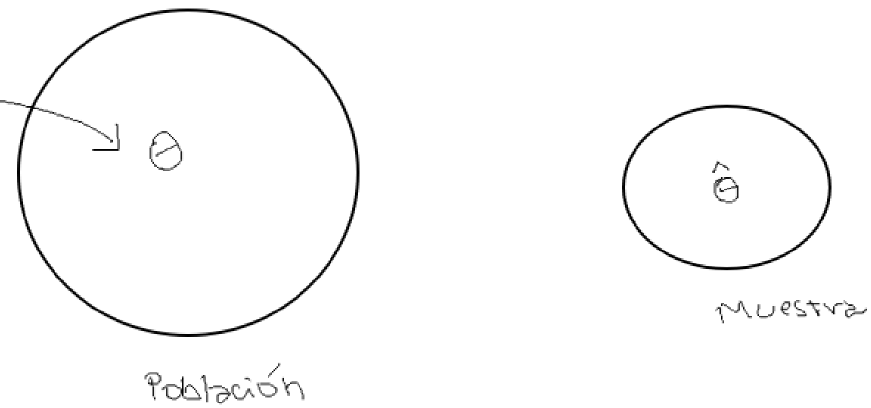
Pruebas de hipótesis

Hipótesis $\rightarrow$ Parámetros

H_0: $=$, $\geq$, $\leq$

H_1: $\neq$, $<$, $>$

↳ Hipótesis de investigación $\rightarrow$ CAMBIO



S $\begin{cases} 2.41 \\ 2.37 \\ 2.46 \\ 2.39 \end{cases}$

1) $H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu \neq 5$

2) $H_0: s^2 \geq 8$

$H_1: s^2 < 8$

$H_0: \sigma^2 \geq 8$

$H_1: \sigma^2 < 8$

3) $H_0: \pi = 0.10$ $\rightarrow$ Status quo

$H_1: \pi < 0.10$

↳ cambio

4) $H_0: \bar{x} < 6$ $\rightarrow$ $\hat{\theta}$

$H_1: \bar{x} \geq 7$

$H_0: \mu \geq 7$

$H_1: \mu < 7$

5) $H_0: \sigma = 2.4$

$H_1: \sigma = 1.7$

$H_0: \sigma^2 = 2.4^2$

$H_1: \sigma^2 \neq 2.4^2$

Real
pero desconocido

Decisión	H_0 "verdadera"	H_0 "falsa"
"Aceptar" H_0	Decisión correcta con probabilidad $1-\alpha$	Error tipo II con probabilidad β
Rechazar H_0	Error tipo I con probabilidad α	Decisión correcta con probabilidad $1-\beta$

f(evidencia)
↑
datos

* Error tipo 1 : Rechazar H_0 verdadera

P(Error tipo 1) = α.

* Error tipo 2 : NO Rechazar H_0 falsa

P(Error tipo 2) = β

* potencia de prueba = $1-\beta$

* Nivel de confianza = $1-\alpha$

único
$\alpha \longrightarrow 0$
$\beta \longrightarrow 0$
varios

=

$H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu \neq 5$

Supongamos que $\underbrace{\mu=8}_{H_1 \checkmark}$ y se rechazó H_0. ✓ No hubo error

$H_0: \pi \geq 0.3$

$H_1: \pi < 0.3$

Supongamos que $\underbrace{\pi = 0.15}_{H_0 \times}$ y no se rechazó H_0. Hubo error tipo II
2

Procedimiento de la prueba de hipótesis
1. Plantear H_0 y H_1
2. Establecer nivel de significancia (alfa)
3. Manejo de la evidencia → Cálculos, fórmula, R, Python
3.1. Evidencias: Estadístico de prueba o pvalor
3.2. Contraste: Valor crítico o nivel de significancia
3.1 vs 3.2 → 4
4. Decisión → Rechazar H_0 o No rechazar H_0
5. Conclusión → en términos del problema

Prueba de hipótesis para una media

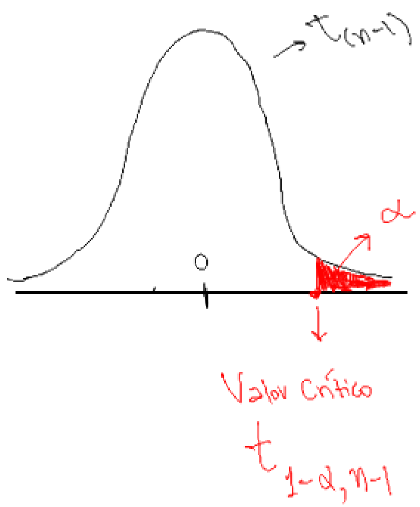
$$t_{calc} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

μ_0: media hipotética (cte.)

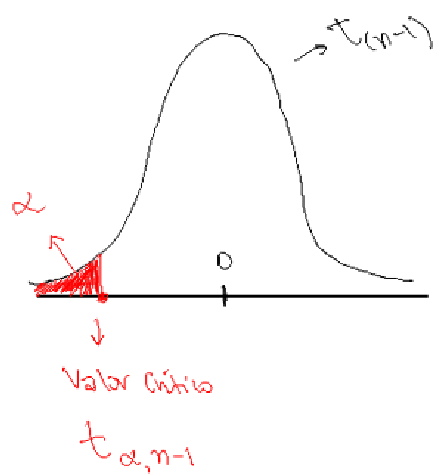
Si $n \to \infty \Rightarrow t_{(n-1)} \sim N(0,1)$

Estadístico de prueba Vs Valor crítico (depende del tipo de P. Hipótesis)

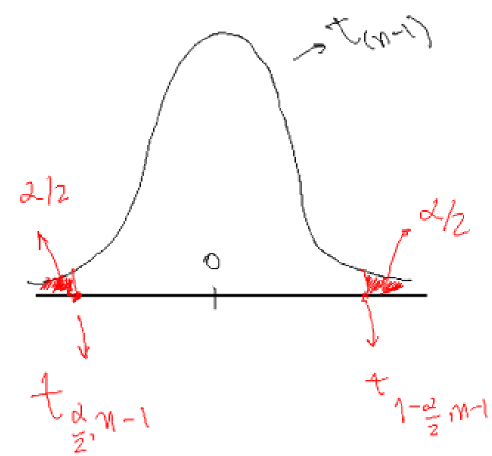
i) Unilateral derecha



ii) Unilateral izquierda

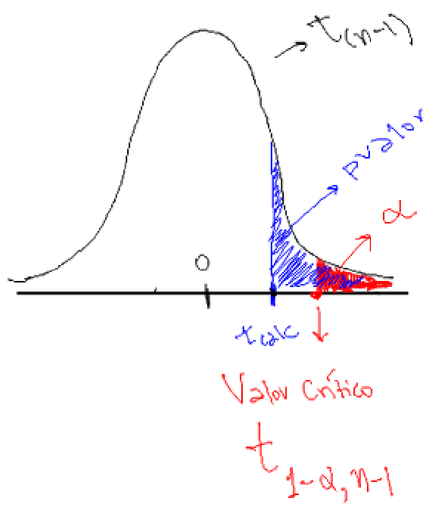


iii) Bilateral

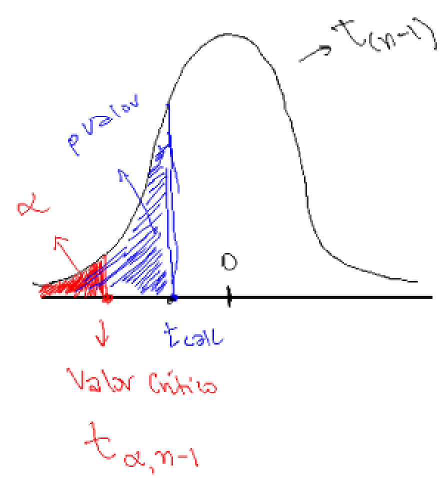


pvalor vs α

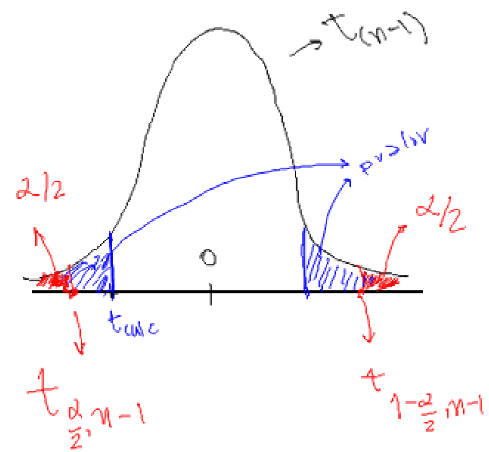
i) Unilateral derecha



ii) Unilateral izquierda



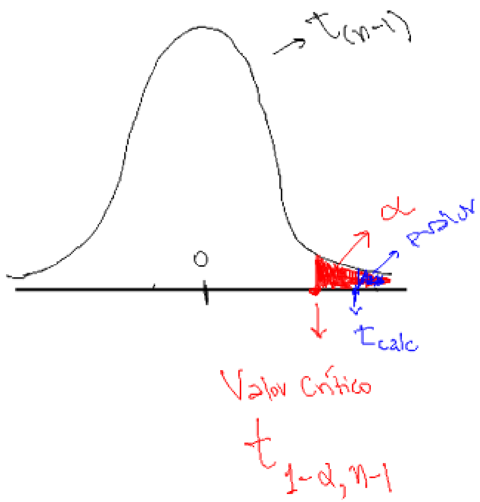
iii) Bilateral



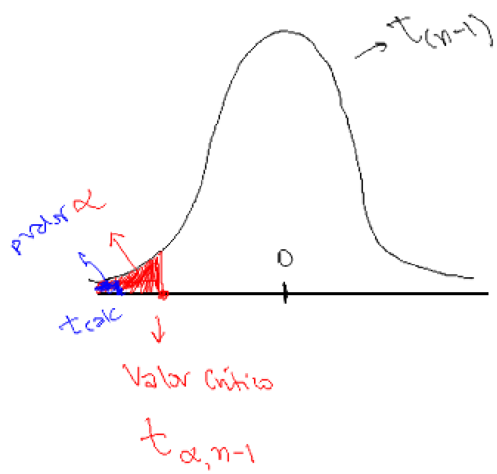
pvalor $> \alpha$: No se rechaza H_0

pvalor vs α

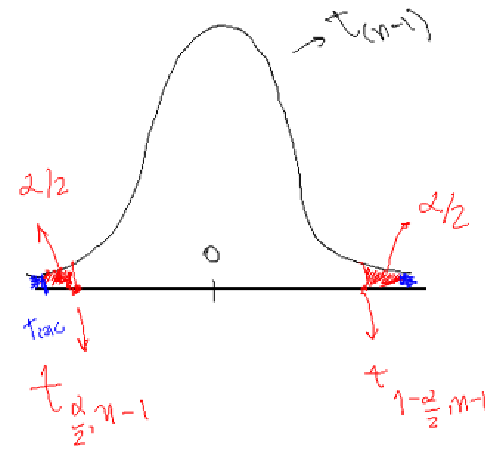
i) Unilateral derecha



ii) Unilateral izquierda

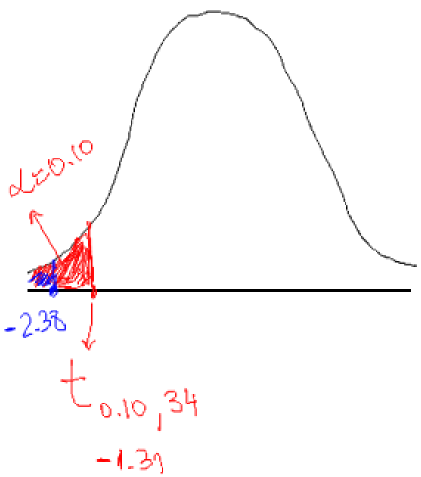


iii) Bilateral



pvalor $< \alpha \Rightarrow$ Se rechaza H_0

$$H_0 : \mu \geq 4 \qquad H_1 : \mu < 4 \qquad \alpha = 0.10$$



* -2.38 cae en la región de rechazo de Ho
* pvalor < α ⇒ Se rechaza Ho

Con una significancia del 10%, se puede afirmar que el tiempo diario promedio de estudio es menor a 4 horas.

```
t.test(x = tiempo, mu = 4, alternative = "less")
```

<

> : "greater"

≠ : "two.sided"

```
	One Sample t-test

data:  tiempo
t = -2.3833, df = 34, p-value = 0.01144
alternative hypothesis: true mean is less than 4
95 percent confidence interval:
    -Inf 3.88878
sample estimates:
mean of x
 3.617143
```

gl

t_{calc}

p valor

<

```
> pt(-2.3833, df = 34)
[1] 0.01144406
```

Prueba de hipótesis para una varianza

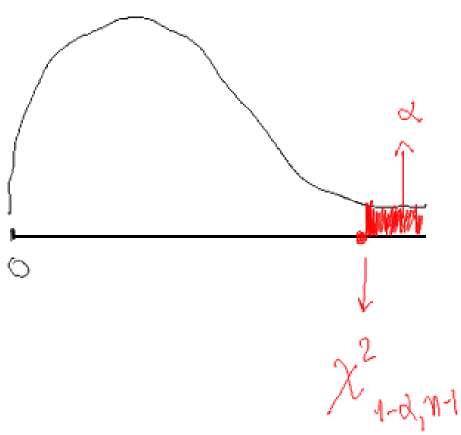
$$\chi^2_{calc} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad \text{g.l.}$$

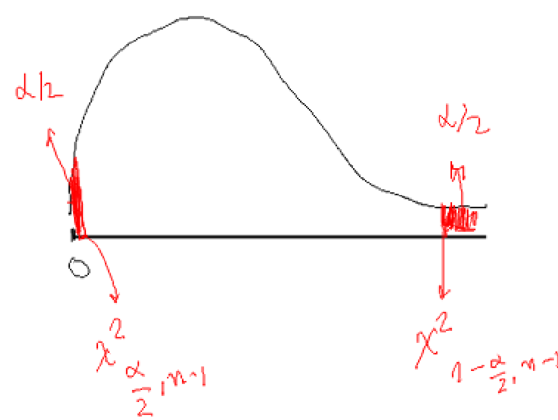
varianza hipotética

i) Unilateral derecha

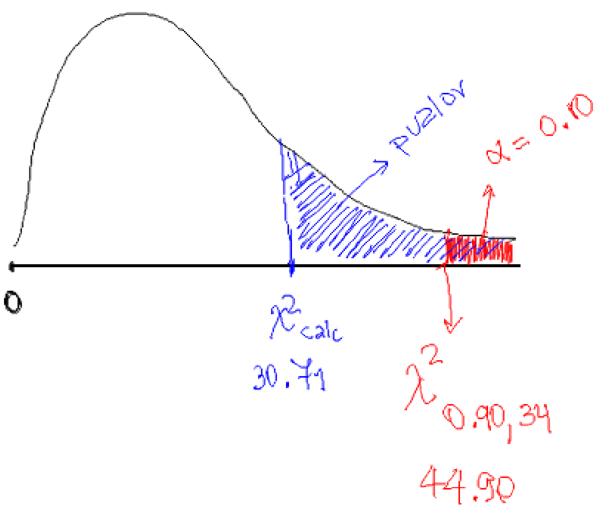
ii) Unilateral izquierdo

iii) Bilateral





$$H_0 : \sigma^2 \leq 1 \qquad H_1 : \sigma^2 > 1 \qquad \alpha = 0.10$$



* χ^2_{calc} cae en la zona de No rechazo de Ho

* p valor $>$ α $\Rightarrow$ No se rechaza Ho

En conclusión, con un nivel de significancia del 10%, no existe evidencia para afirmar que la varianza de las horas de estudio sea mayor a 1.

```
> varTest(x = tiempo, sigma.squared = 1, alternative = "greater")
$statistic
Chi-Squared
```
`   30.70971` → χ^2_{CALC}

```
$parameters
df
```
`34` → gl

```
$p.value
```
`[1] 0.6296898` → p valor

```
$estimate
 variance
```
`0.9032269` → S^2

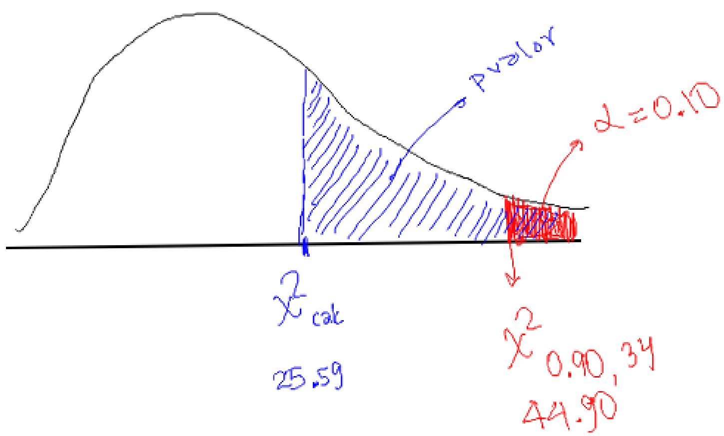
```
$null.value
variance
```
`       1` → σ_0^2

```
$alternative
```
`[1] "greater"` → $>$

```
$method
[1] "Chi-Squared Test on Variance"

$data.name
[1] "tiempo"

$conf.int
      LCL       UCL
0.6318563       Inf
attr(,"conf.level")
[1] 0.95

attr(,"class")
[1] "htestEnvStats"
```

$H_0: \sigma^2 \leq 1.2$ $\qquad H_1: \sigma^2 > 1.2$ $\qquad \alpha = 0.10$

```
> tiempo <- c(2.8, 3.9, 4.2, 2.1, 3.7, 4.5, 3.8, 4.1, 4.6, 3.6, 4.3, 4.0,
+             2.9, 1.4, 3.9, 4.5, 4.2, 4.0, 3.8, 1.0, 4.7, 3.5, 2.1, 2.2,
+             3.6, 4.3, 4.8, 4.2, 3.9, 3.7, 4.4, 3.0, 3.8, 4.6, 2.5)
> (chicalc = (length(tiempo)-1)*var(tiempo)/1.2)
[1] 25.59143
> (chicrit = qchisq(p = 0.90, df = length(tiempo)-1))
[1] 44.90316
```



$pvalor = P(\chi^2_{34} > 25.59) = 0.85$

```
> 1 - pchisq(q = 25.59, df = 34)
[1] 0.8498772
```

* χ^2_{cal} cae en la zona de NO rechazo de H_0
* pvalor > α ⇒ NO se rechaza H_0

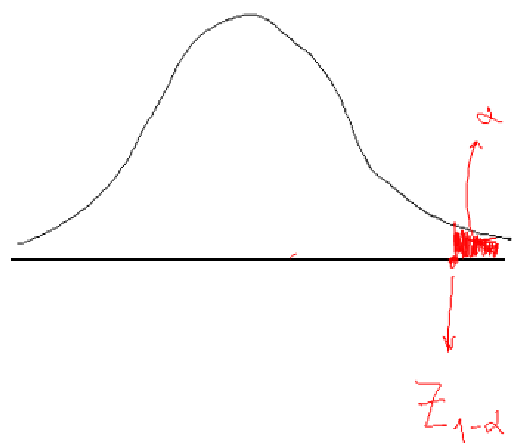
Prueba de hipótesis para una proporción

proporción muestral

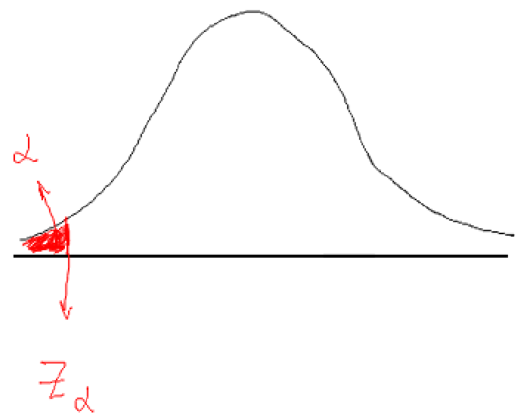
proporción poblacional o hipotética

$$Z_{calc} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

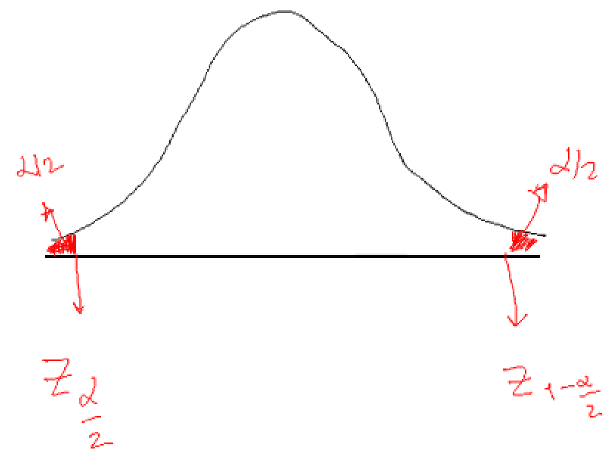
i) Unilateral derecha



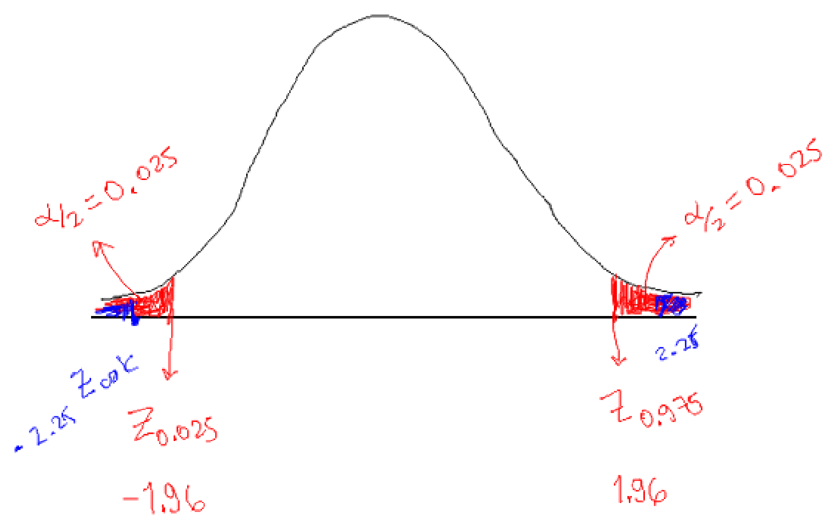
ii) Unilateral izquierda



iii) Bilateral



$$H_0 : \pi = 0.80 \qquad H_1 : \pi \neq 0.80 \qquad \alpha = 0.05$$



$$p\text{valor} = 2P(Z < -2.25)$$
$$= 2 \times 0.0122$$
$$= 0.0244 < \alpha \Rightarrow \text{se rechaza } H_0$$

Z_{calc} cae en la zona de Rechazo de Ho

En conclusión, con un nivel de significancia del 5%, existe evidencia estadística para afirmar que la proporción real de estudiantes satisfechos con el servicio de biblioteca difiere de 0.80

```
prop.test(x=71, n=100, p=0.80, alternative = "two.sided", correct = F)
```

```
	1-sample proportions test without continuity correction

data:  71 out of 100, null probability 0.8
X-squared = 5.0625, df = 1, p-value = 0.02445
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.8
95 percent confidence interval:
 0.6146111 0.7898516
sample estimates:
   p
0.71
```

$\rightarrow \pi_0$

$\rightarrow$ pvalor

$\neq$

$\rightarrow p$ (proporción muestral)

Si $Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$

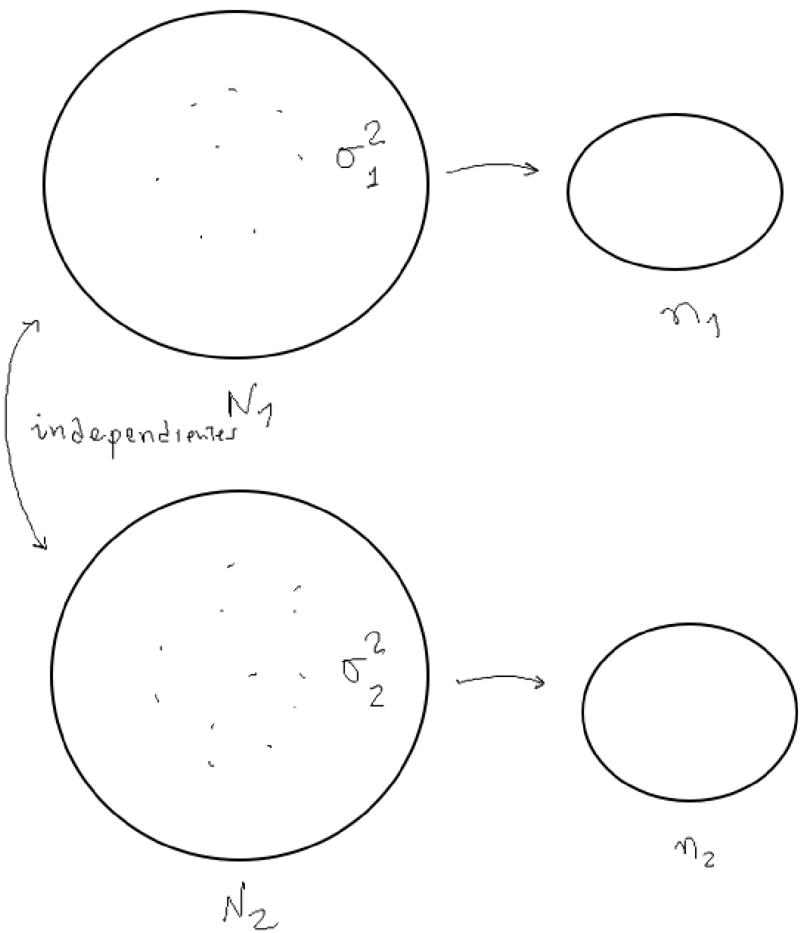
En este caso: $Z_{calc} = -2.25 \sim N(0,1)$

$Z^2_{calc} = 5.0625 \sim \chi^2_{(1)}$

pvalor $= P(\chi^2_{(1)} > 5.0625) =$

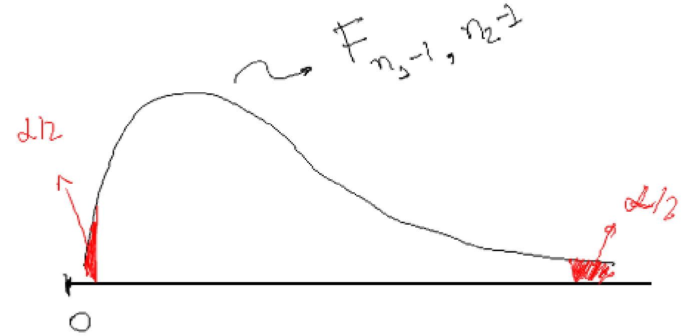
```
> 1 - pchisq(5.0625, 1)
[1] 0.02444895
```

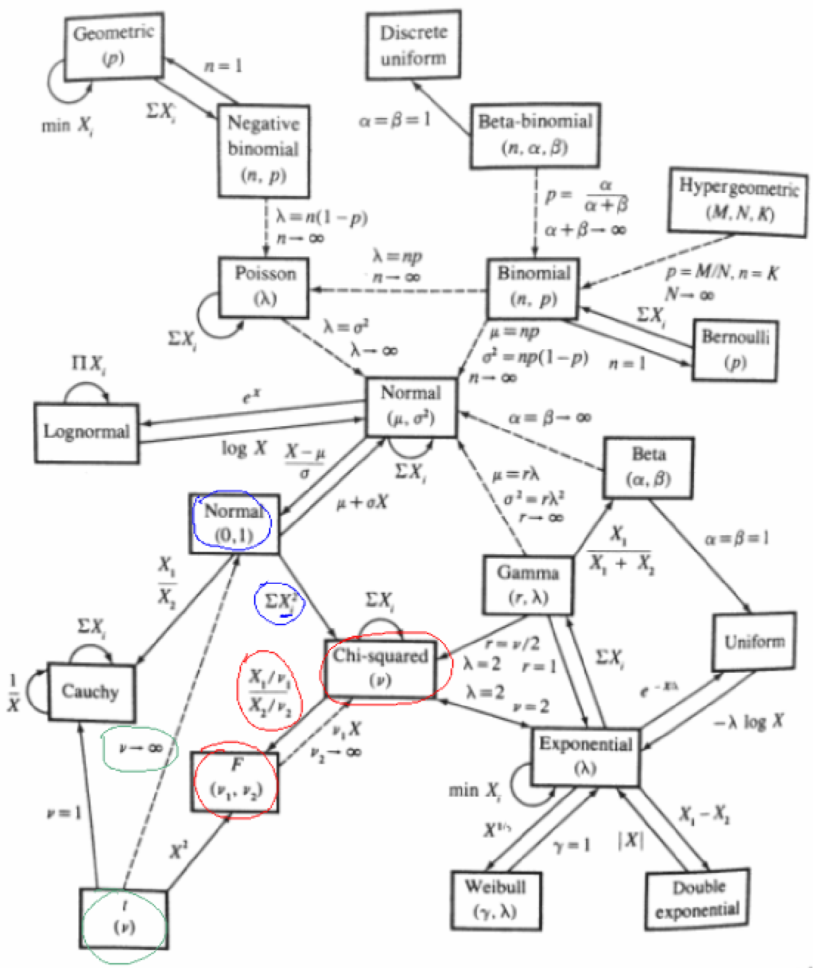
Prueba de hipótesis para dos varianzas



$$¿\underbrace{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}_{\text{Varianzas homogéneas}} \text{ o } \underbrace{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}_{\text{Varianzas heterogéneas}}?$$

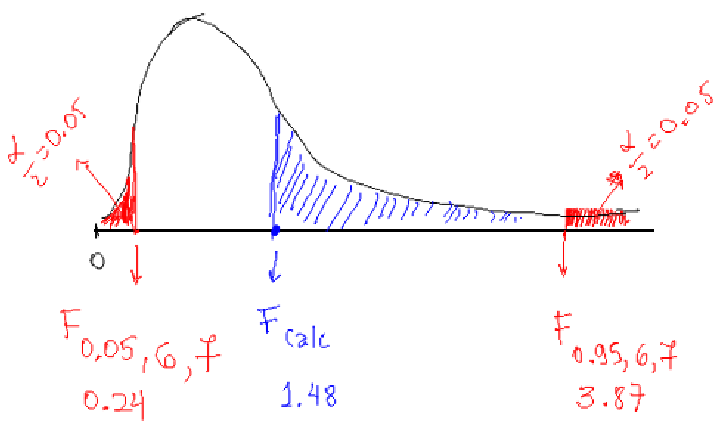
$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \qquad H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$





Relationships among common distributions. Solid lines represent transformations and special cases, dashed lines represent limits. Adapted from Leemis (1986).

$$H_0 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1 \qquad H_1 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1 \qquad \alpha = 0.10$$




```
var.test(A, B, alternative = "two.sided", ratio = 1)
```

Fcalc

```
        F test to compare two variances

data:  A and B
F = 1.4848, num df = 6, denom df = 7, p-value = 0.6136
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.290089 8.456911
sample estimates:
ratio of variances
          1.484848
```

→ gl1 → gl2 → PV

→ cociente de varianzas muestrales

F_{calc} cae en la zona de No Rechazo de H_0

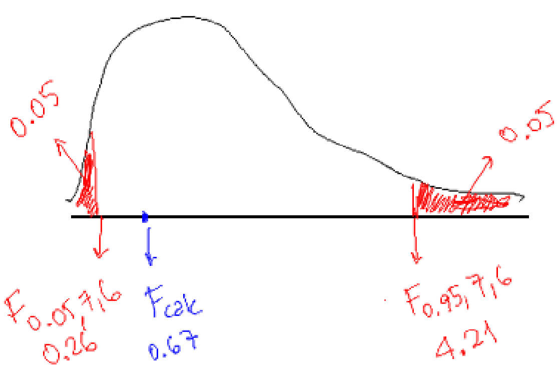
$pV = 2P(F_{6,7} > 1.48) = 0.6164 > \alpha$

```
> 2*(1-pf(1.48, 6, 7))
[1] 0.6164099
```

⇓

No se rechaza H_0

$H_0: \dfrac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} = 1$ $\qquad H_1: \dfrac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \neq 1$ $\qquad \alpha = 0.10$



$F_{calc} = \dfrac{S_B^2}{S_A^2} = 0.67$ Cae en la zona de NO Rechazo de H_0

F_{calc}

```
> var.test(B, A, alternative = "two.sided", ratio = 1)

        F test to compare two variances

data:  B and A
F = 0.67347, num df = 7, denom df = 6, p-value = 0.6136 > α
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.1182465 3.4472181
sample estimates:
ratio of variances
         0.6734694
```

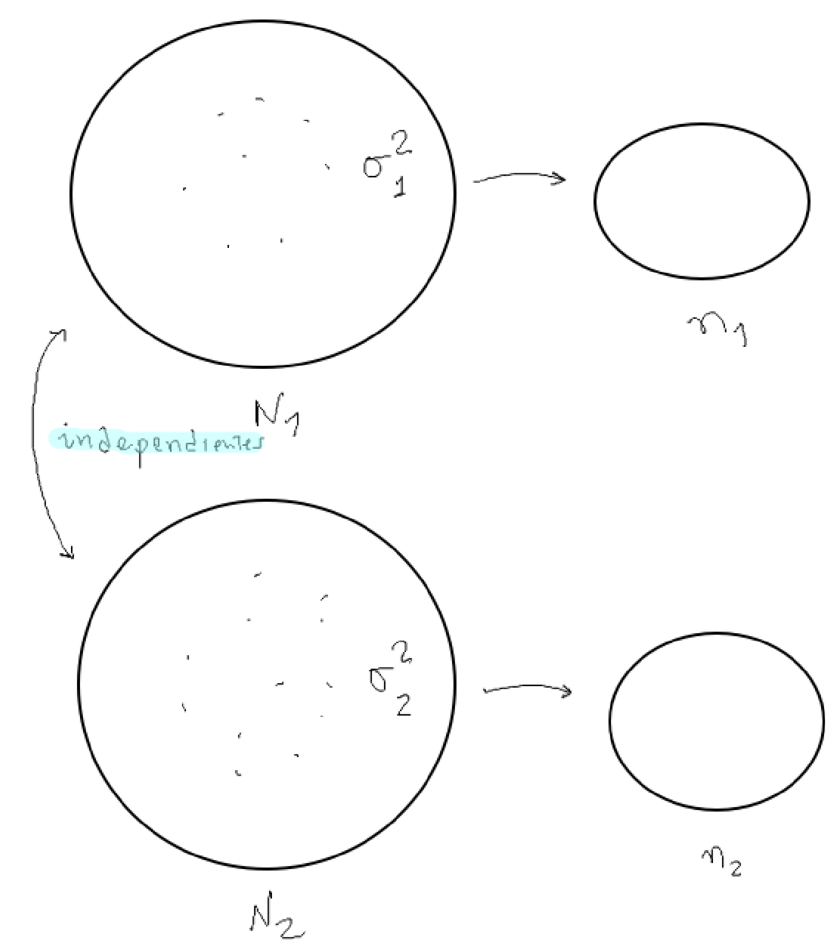
Caso especial: ANOVA

F.V.	g.l.	s.c.	**c.m.**	Fcalc $= CMTrat / CME \sim F_{GLTrat,\, GLError}$
Trat			•	
Error			•	

$$H_0: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \leq 2 \qquad H_1: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} > 2$$

```
> var.test(A, B, alternative = "greater", ratio = 2)

        F test to compare two variances

data:  A and B
F = 0.74242, num df = 6, denom df = 7, p-value = 0.6337
alternative hypothesis: true ratio of variances is greater than 2
95 percent confidence interval:
 0.3840819       Inf
sample estimates:
ratio of variances
          1.484848
```

Prueba de hipótesis para dos medias independientes



pareadas o emparejados

i	X	Y
$\boxed{1}$	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
4	x_4	y_4
5	x_5	y_5

x_i es la nota del alumno i en el curso "X"

y_i es la nota del alumno i en el curso "Y"

X	Y
x_1	y_4
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_1
x_5	y_5

muestras independientes

"X" e "Y" son 2 cursos de ciclos distintos

P. H. para 2 medias independientes

$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

- Varianzas iguales:

t

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \mu_0}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{\overbrace{(n_1+n_2-2)}^{(n_1-1)+(n_2-1)}} \quad \text{donde} \quad s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Varianza ponderada

$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

- Varianzas distintas:

t de Welch

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \mu_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_{\nu-Welch}$$

Probando la diferencia de medias:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 20 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 20 \qquad \alpha = 0.10$$

```
A <- c(820, 830, 815, 860, 825, 835, 822)
B <- c(800, 805, 798, 810, 802, 799, 803, 777, 789, 815)
t.test(A, B, alternative = "greater", mu = 20, var.equal = T, paired = F)
```

```
	Two Sample t-test

data:  A and B
t = 1.5824, df = 15, p-value = 0.06721
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 20
95 percent confidence interval:
 18.94591      Inf
sample estimates:
mean of x mean of y 
 829.5714  799.8000 
```

$$\mu_1 - \mu_2 > 20$$

$$-20 > \mu_2 - \mu_1$$

$$\mu_2 - \mu_1 < -20$$

```
> t.test(B, A, alternative = "less", mu = -20, var.equal = T, paired = F)

	Two Sample t-test

data:  B and A
t = -1.5824, df = 15, p-value = 0.06721
alternative hypothesis: true difference in means is less than -20
95 percent confidence interval:
      -Inf -18.94591
sample estimates:
mean of x mean of y 
 799.8000  829.5714 
```

Prueba de hipótesis para dos medias pareadas

i	X	Y	dif
1	x_1 ↔	y_1	$d_1 = x_1 - y_1$
2	x_2	y_2	$d_2 = x_2 - y_2$
3	x_3	y_3	$d_3 = x_3 - y_3$
4	x_4	y_4	$d_4 = x_4 - y_4$
⋮			

$\underbrace{\qquad\qquad}_{N}$

diferencia promedio muestral

dif. hipotética

G.L.

$$t_{calc} = \frac{\overline{d} - \mu_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

tamaño de muestra

desv. estándar de las diferencias muestrales

```
> t.test(despues, antes, mu = 3, alternative = "greater", paired = T)

        Paired t-test

data:  despues and antes
t = 4.7497, df = 11, p-value = 3e-04
alternative hypothesis: true mean difference is greater than 3
95 percent confidence interval:
 4.140136      Inf
sample estimates:
mean difference
       4.833333
```

```
> t.test(antes, despues, mu = -3, alternative = "less", paired = T)

        Paired t-test

data:  antes and despues
t = -4.7497, df = 11, p-value = 3e-04
alternative hypothesis: true mean difference is less than -3
95 percent confidence interval:
      -Inf -4.140136
sample estimates:
mean difference
      -4.833333
```

Prueba de hipótesis para dos proporciones

$$Z_{calc} = \frac{\underset{\text{proporción muestral 1}}{p_1} - \underset{\text{proporción muestral 2}}{p_2} - \underset{\text{dif. hipotética de proporciones}}{\pi_0}}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

n_1, n_2: tamaños de muestra

Caso especial: cuando $\pi_0 = 0$, se puede usar proporción combinada:

$$Z_{\text{calc}} = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

$\hat{p}$: proporción muestral si no hubieran grupos

por ejm: grupo 1: $x_1 = 10$ $n_1 = 60$ $\rightarrow$ $p_1 = 1/6$

$x_2 = 8$ $n_1 = 40$ $\rightarrow$ $p_2 = 1/5$

$$\hat{p} = \frac{18}{100} = 0.18$$

$$H_0 : \pi_{urbana} - \pi_{rural} = 0 \qquad H_1 : \pi_{urbana} - \pi_{rural} \neq 0 \qquad \alpha = 0.05$$

```r
x1 <- 90; n1 <- 120; (p1 <- x1/n1)
```

```
[1] 0.75
```

```r
x2 <- 80; n2 <- 110; (p2 <- x2/n2)
```

```
[1] 0.7272727
```

```r
(p <- (x1+x2)/(n1+n2))
```

```
[1] 0.7391304
```

```r
(zcalc <- (p1-p2)/sqrt(p*(1-p)*(1/n1+1/n2)))
```

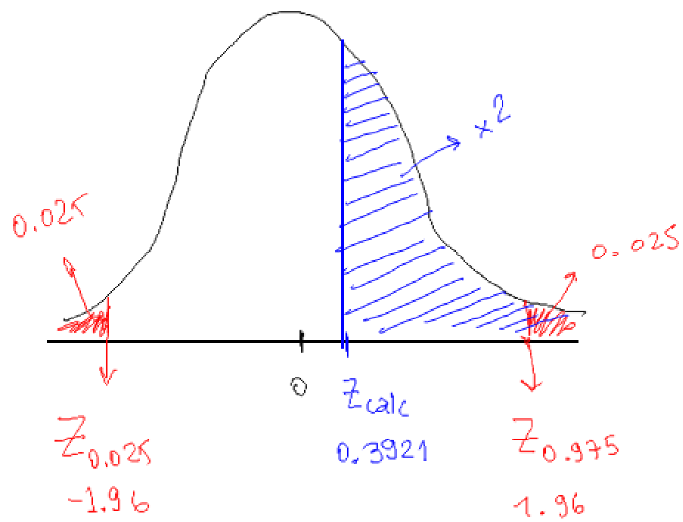
```
[1] 0.3921012
```

```r
(zcrit1 <- qnorm(0.025))
```

```
[1] -1.959964
```

```r
(zcrit2 <- qnorm(0.975))
```

```
[1] 1.959964
```



* Z_{calc} cae en la zona de No Rechazo de Ho

$pv = 2P(Z > 0.3921) \rightarrow$

```
> 2*(1-pnorm(0.3921))
[1] 0.6949843
```

* $pV > \alpha$

No se Rechaza Ho

$\pi_1 - \pi_2 \neq 0$
$\pi_1 - \pi_2 > 0$
Solo cuando $\pi_0 = 0$
$\pi_1 - \pi_2 < 0$

```
prop.test(x = c(x1, x2), n = c(n1, n2), alternative = "two.sided", correct = F)

    2-sample test for equality of proportions without continuity correction

data:  c(x1, x2) out of c(n1, n2)
X-squared = 0.15374, df = 1, p-value = 0.695
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 -0.09097861  0.13643315
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.7500000 0.7272727
```

$Z_{calc} = 0.3921$

$\chi^2_{calc} = Z^2_{calc} = 0.15374 \sim \chi^2_{(1)}$

$pv = P(\chi^2_{(1)} > 0.15374)$

```
> 1-pchisq(0.15374,df = 1)
[1] 0.6949866
```

Ejemplo

Un equipo de especialistas en gestión ambiental desea evaluar si una campaña de sensibilización ambiental logra aumentar sustancialmente la proporción de hogares que clasifican adecuadamente sus residuos sólidos.

- En el barrio sin campaña, 45 de 100 hogares clasifican correctamente.
- En el barrio con campaña, 70 de 100 hogares lo hacen.

El equipo busca determinar si la proporción de hogares que clasifican adecuadamente sus residuos sólidos en el barrio con campaña supera en más de un 20% a la del barrio sin campaña, lo cual justificaría su implementación a mayor escala. Para ello, se emplea un nivel de significancia del 5%

$\neq 0 \Rightarrow$ no se puede utilizar prop.test

$$H_0 : \pi_{con} - \pi_{sin} \leq 0.20 \qquad H_1 : \pi_{con} - \pi_{sin} > 0.20 \qquad \alpha = 0.05$$

```
x1 <- 70; n1 <- 100; (p1 <- x1/n1)
```

```
[1] 0.7
```

```
x2 <- 45; n2 <- 100; (p2 <- x2/n2)
```

```
[1] 0.45
```

```
(zcalc <- (p1-p2)/sqrt(p1*(1-p1)/n1+p2*(1-p2)/n2))
```

```
[1] 3.696106
```

```
(zcrit2 <- qnorm(0.95))
```

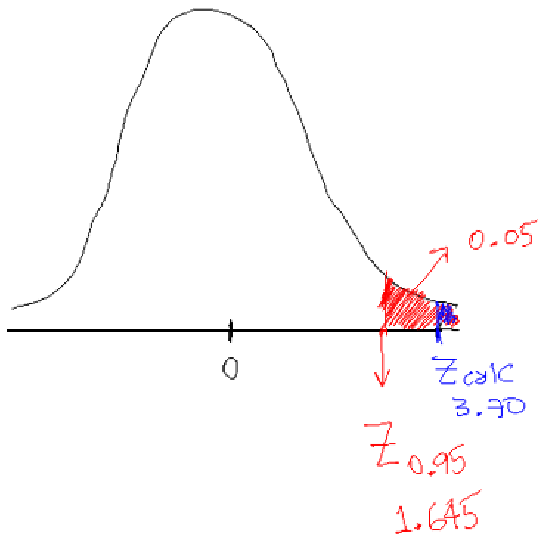
```
[1] 1.644854
```

```
(pv <- 1-pnorm(zcalc))
```

3.7

```
[1] 0.0001094656
```

Con un nivel de significancia del 5%, existe evidencia estadística para afirmar que la proporción de hogares que clasifica correctamente sus residuos sólidos en el barrio con campaña supera en más de 0.20 a la del barrio sin campaña.



* Z_{calc} cae en zona de Rechazo de H_0

* $pv < \alpha \Rightarrow$ se rechaza H_0

$pv = 0.00011$, $\alpha = 0.05$

Ejercicios

1. Un fabricante de focos LED afirma que la vida útil promedio de sus productos es de 15 000 horas. Un cliente sospecha que la vida útil real es menor y toma una muestra de 80 focos, obteniendo una media de 14 800 horas con una desviación estándar de 200 horas. ¿Hay evidencia suficiente, con un nivel de significancia de 5%, para concluir que la vida útil es menor a la declarada?
2. Desde el 2016, las encuestas vienen señalando que el 65% de los peruanos tienen acceso a internet. Un investigador cree que en una determinada región rural la proporción es menor y encuesta a 150 personas, de las cuales 60 no tienen acceso. ¿Se puede afirmar con un 5% de significancia que la proporción en la región es menor?

3. Una empresa quiere comparar el tiempo de producción promedio, en minutos, de dos máquinas diferentes, para ello toma muestras de cada una de ellas:

- Máquina A: 12.75, 11.58, 11.95, 11.58, 14.52, 12.28, 11.03, 13.29
- Máquina B: 9.9, 11.77, 8.95, 9.77, 11.76, 12.46, 11.72, 11.34, 11.1, 13.57

¿Se puede concluir que la máquina A tarda más con $\alpha = 0.10$? Considerar que el tiempo de producción de cada máquina sigue una distribución Normal.

4. Una organización ambiental desea evaluar si hay diferencia en el uso de bolsas reutilizables entre zonas urbanas y rurales. Se realizó una encuesta a hogares para conocer si utilizan bolsas reutilizables al hacer sus compras:

- Hogares urbanos: 300 encuestados, de los cuales 160 afirmaron usar bolsas reutilizables.
- Hogares rurales: 180 encuestados, de los cuales 80 afirmaron usarlas.

¿Existe evidencia estadística, con un nivel de significancia del 1%, para concluir que las proporciones de uso de bolsas reutilizables son diferentes entre las zonas urbanas y rurales?

1. $H_0: \mu = 15000$ t.test

$H_1: \mu < 15000$

2. $H_0: \pi = 0.65$ prop.Test

$H_1: \pi < 0.65$

3. $H_0: \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$ Luego: $H_0: \mu_A - \mu_B \leq 0$

$H_1: \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1$ $H_1: \mu_A - \mu_B > 0$

var.test t.test

4. $H_0: \pi_U - \pi_R = 0$

$H_1: \pi_U - \pi_R \neq 0$

prop.Test