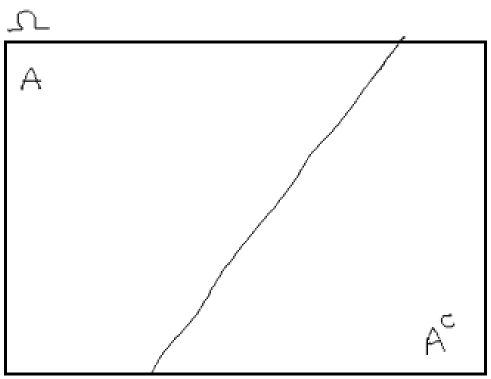
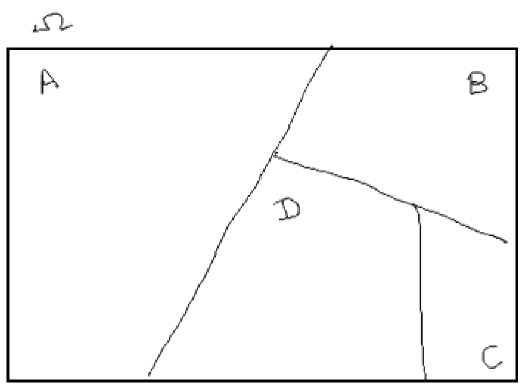
Eventos



$A \cap A^c = \phi$

$A \cup A^c = \Omega$

A y A^c son complementarios



$A \cap B = \phi \qquad A \cap C = \phi \quad \ldots \quad C \cap D = \phi$

$A \cup B \cup C \cup D = \Omega$

A, B, C y D son particiones

Ejercicio

Sea el experimento aleatorio: Observar el estado de entrega (T = Entregado a tiempo, R = Retrasado) de tres pedidos realizados por una tienda virtual en un mismo día. El espacio muestral asociado será:

$$\Omega = \{TTT, TTR, TRT, RTT, TRR, RTR, RRT, RRR\} \qquad n(\Omega) = 8$$

Se definen los siguientes eventos:

A1 = {Al menos dos pedidos fueron entregados a tiempo} = {TTT, TTR, TRT, RTT}

A2 = {Exactamente un pedido fue entregado con retraso} = {TTR, TRT, RTT}

A3 = {Como máximo un pedido fue entregado a tiempo} = {TRR, RTR, RRT, RRR}

A4 = {Los tres pedidos tuvieron el mismo estado} = {TTT, RRR}

A partir de esta lista de eventos:

a. Identifique eventos mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes.
b. Identifique eventos colectivamente exhaustivos y no colectivamente exhaustivos.
c. Identifique eventos complementarios.

a. M. E. ⇒ A_1 y A_3, A_2 y A_4, A_2 y A_3 No M. E. ⇒ A_1 y A_4, A_1 y A_2

b. C. E. ⇒ A_1 y A_3 No C. E ⇒ A_1 y A_2

c. Complementarios ⇒ A_1 y A_3

Ejercicio

En una encuesta a 500 estudiantes sobre confianza en instituciones electorales, cada participante debía escoger exactamente una opción: {Nada, Poco, Suficiente, Bastante, No sabe/No responde}.

Se definen los siguientes eventos al seleccionar un estudiante al azar:

A = {El estudiante declara alta confianza en el ONPE (suficiente o bastante)} $\rightarrow \{S, B\}$

B = {El estudiante declara baja confianza en el ONPE (poco o nada)} $\rightarrow \{N, P\}$

C = {El estudiante responde No sabe/No responde} $\rightarrow \{NS\}$

D = {El estudiante declara algún grado de confianza en la ONPE (poco, suficiente o bastante)} $\rightarrow \{P, S, B\}$

E = {El estudiante declara una posición determinada (no marca 'No sabe/No responde')} $\rightarrow \{N, P, S, B\}$

Indicar si las siguientes afirmaciones son veerdaderas o falsas:

- A y B son eventos mutuamente excluyentes $\rightarrow$ V, porque $A \cap B = \phi$
- D y B son eventos mutuamente excluyentes $\rightarrow$ F, porque $D \cap B \neq \phi$
- A, B y C son eventos colectivamente exhaustivos $\rightarrow$ V, porque $A \cup B \cup C = \Omega$
- E y C son eventos complementarios $\rightarrow$ V, porque $E \cap C = \phi$ y $E \cup C = \Omega$
- B y E son eventos complementarios $\rightarrow$ F, porque $B \cap E \neq \phi$ y $B \cup E \neq \Omega$

Ejercicio

Una empresa revisa un lote de 14 dispositivos electrónicos, de los cuales 8 están en buen estado y 6 presentan defectos menores. Se seleccionan 5 dispositivos al azar y sin reposición para una inspección de control de calidad más rigurosa.

a. Defina el espacio muestral.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos dispositivos estén en buen estado? 0,28

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro dispositivos presenten defectos? 0.063

a. E = Buen estado, D = Con defectos menores

$\Omega = \{BBBBB, BBBBD, BBBDB, \ldots, DDDDD\}$

b. M = {Dos dispositivos están en buen estado}

$n(M) = \binom{8}{2} \times \binom{6}{3} = 560$

$n(\Omega) = \binom{14}{5} = 2002$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{560}{2002} = 0,28$

c. N = {Al menos 4 (4 o más) dispositivos presentan defectos}

$N = \{DDDDB, DDBDD, \ldots, DDDDD\}$

$n(N) = \binom{6}{4}\binom{8}{1} + \binom{6}{5}\underbrace{\binom{8}{0}}_{1} = 126$

$P(N) = \frac{n(N)}{n(\Omega)} = \frac{126}{2002} = 0.063$

Ejercicio

Si una empresa constructora se presenta a una licitación de tres proyectos de carreteras. Considerando que es igualmente probable que gane (G) o pierda (P) la empresa cada proyecto.

a. Defina el espacio muestral.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos dos proyectos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que gane los tres proyectos?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que no gane ningún proyecto?

a. $\Omega = \{GGG, GGP, GPG, PGG, GPP, PGP, PPG, PPP\}$

b. $A = \{$ganar $\underbrace{\text{por lo menos 2}}_{\text{2 o más}}$ proyectos$\} = \{GGG, GGP, GPG, GGP\} \Rightarrow n(A) = 4, \; P(A) = 4/8$

c. $B = \{$ganar los 3 proyectos$\} = \{GGG\} \Rightarrow n(B) = 1, \; P(B) = 1/8$

$P(X \cup Y) \neq P(X) + P(Y)$

d. $C = \{$no gana ningún proyecto$\} = \{PPP\} \Rightarrow n(C) = 1, \; P(C) = 1/8$

* B y C son mutuamente excluyentes porque $B \cap C = \phi \equiv P(B \cap C) = 0$, pero no son colectivamente exhaustivos porque $B \cup C \neq \Omega$. por lo tanto, B y C no son complementarios

Ejercicio

En un curso universitario hay 24 estudiantes: 10 con alto desempeño (A), 9 con desempeño medio (M) y 5 con bajo desempeño (B). El profesor selecciona al azar a 7 estudiantes sin reposición para presentar un trabajo grupal.

A → 10
M o B → 14

a. Defina el espacio muestral
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo esté conformado por 3 A, 2 M y 2 B?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 5 de los 7 estudiantes tengan desempeño medio o bajo?

a. $\Omega = \{AAAAAAA, AAAMMMB, BBBBBAM, \ldots\}$, $n(\Omega) = \binom{24}{7} = 346104$

b. $H = \{$el grupo está conformado por 3A, 2M y 2B$\}$, $n(H) = \binom{10}{3} \times \binom{9}{2} \times \binom{5}{2} = 43200$

$$P(H) = \frac{43200}{346104} = 0.125$$

c. $V = \{\underbrace{\text{al menos } 5}_{5,\ 6 \text{ o } 7}$ tienen desempeño $\underbrace{\text{medio o bajo}}\}$, $n(V) = \binom{14}{5} \times \binom{10}{2} + \binom{14}{6} \times \binom{10}{1} + \binom{14}{7}\binom{10}{0}$

$n(V) = 90090 + 30030 + 3432 = 123552 \Rightarrow P(V) = 0.36$

Ejercicios

De 20 pacientes que fueron operados el mismo día y fueron llevados a una sala de hospitalización, 15 se recuperaron completamente en 3 días. Al cabo de este tiempo, se escogen al azar a 5 personas de la sala para un chequeo:

a. Defina el espacio muestral
b. ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 sean dados de alta?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que 4 sean dados de alta?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 sean dados de alta?
e. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea dado de alta?

R = Se recuperaron (15)

R^c = No se recuperaron (5)

a. $\Omega = \{ R R^c R^c R^c R^c,\ R R^c R R^c R, \dots \}$, $n(\Omega) = \binom{20}{5} = 15\,504$

b. $F = \{RRRRR\}$, 5 son dados de alta, $n(F) = \binom{15}{5} \times \binom{5}{0} = 3003$

$P(F) = \frac{3003}{15\,504} = 0.194$

5

$R_1\ R_2\ R_3 \dots R_{15}$ $R^c_{16}\ R^c_{17}\ R^c_{18}\ R^c_{19}\ R^c_{20}$

$R_1 R_2 R_3 R_4 R_5$

$R_1 R_2 R_3 R_4 R_6$

$R_1 R_3 R_7 R_8 R_{14} \dots$

c. $W = \{4 \text{ son dados de alta}\}$, $n(W) = \binom{15}{4} \times \binom{5}{1} = 6825 \Rightarrow P(W) = \frac{6825}{15504} = 0.44$

d. $R = \{\text{al menos } 4 \text{ son dados de alta}\}$, $n(R) = n(F) + n(W) = 9828 \Rightarrow P(R) = \frac{9828}{15504} = 0.634$

e. $A = \{\text{ninguno es dado de alta}\}$, $n(A) = \binom{15}{0}\binom{5}{5} = 1 \Rightarrow P(A) = 1/15504 = 0.00006$

Ejercicio

En un curso se han matriculado estudiantes de diversas carreras:

Carrera	Número de estudiantes
Gestión Empresarial	10 ✓
Economía	8 ✓
Biología	7 ✓
Pesquería	5
Agronomía	4
Estadística Informática	2 ✓
	36

Se deben formar grupos de 5 estudiantes, ¿cuál de las siguientes situaciones es la más probable?

- Que los 5 estudiantes pertenezcan a la carrera de Pesquería → A
- Que los 5 estudiantes pertenezcan a la carrera de Biología → B
- Que haya un estudiante de cada carrera de la facultad de Economía y Planificación → C
- Que el grupo incluya a un estudiante de Economía y otro de Biología → D

D es la situación más probable entre las propuestas.

a. $n(\Omega) = \binom{36}{5} = 376992$

$n(A) = \binom{5}{5}\binom{31}{0} = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{376992} = 0.00000265 \approx 0$

b. $n(B) = \binom{7}{5}\binom{29}{0} = 21 \Rightarrow P(B) = \frac{21}{376992} = 0.0000557 \approx 0$

c. $n(C) = \binom{8}{1}\binom{10}{1}\binom{2}{1}\binom{16}{2} = 19200$

$P(C) = \frac{19200}{376992} = 0.051$

d. $n(D) = \binom{8}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{3} = 74\,480$

$P(D) = \frac{74480}{376992} = \boxed{0.20}$

Propiedades de probabilidad

1. Para cualquier evento A,

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$A \cup A^c = \Omega$

$P(A \cup A^c) = P(\Omega)$

$P(A) + P(A^c) = 1$

2. La probabilidad del evento imposible es cero:

$$P(\emptyset) = 0$$

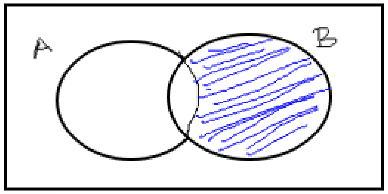
Ω y ϕ son complementarios

$\underbrace{P(\Omega)}_{1} = 1 - P(\phi)$

3. Para dos eventos A y B cualesquiera:

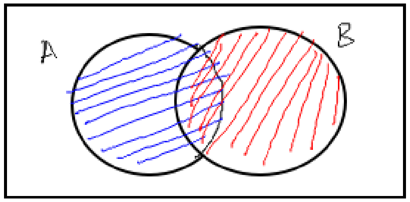
Solo B

$$* \quad \boxed{P(A^c \cap B)} = P(B) - P(A \cap B)$$



4. Para dos eventos A y B cualesquiera:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underline{P(A \cap B)}$$



$* \ P(A \cap B^c)$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) \longrightarrow P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) \longrightarrow P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$$

Ejercicio

Una universidad realizó una encuesta a 1000 estudiantes para determinar el uso de plataformas digitales en sus estudios. Se les preguntó si usan plataformas como Google Classroom, Moodle o Teams. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Facultad	Usa plataforma (U)	No usa plataforma (U^c)	Total
Ciencias (C)	180	120	300
Ingeniería (I)	150	150	300
Letras (L)	100	100	200
Educación (E)	120	80	200
Total	550	450	1000

$\Omega = \{ CU, CU^c, IU, IU^c, LU, LU^c, EU, EU^c \}$

Hay puntos muestrales más probables que otros.

Exp. Aleatorio

UNIÓN

Si se selecciona al azar a un estudiante, halle la probabilidad de que:

a. Pertenezca a la facultad de Ciencias o Educación.

b. Pertenezca a la facultad de Letras y use plataforma.

c. No pertenezca a la facultad de ingeniería y no use plataforma.

INTERSECCIÓN

a. $A = \{\text{Pertenece a C o E}\}$

$A = \{ CU, CU^c, EU, EU^c \}$

$P(A) = \frac{500}{1000} = 0.5$

$P(C \cup E) = P(\text{Cien}) + P(\text{Educ})$
$= \frac{300}{1000} + \frac{200}{1000}$

b. $P(L \cap U) = \frac{10\cancel{0}}{100\cancel{0}} = 0.10$

c. $P(I^c \cap U^c) = \frac{300}{1000} = 0.3$

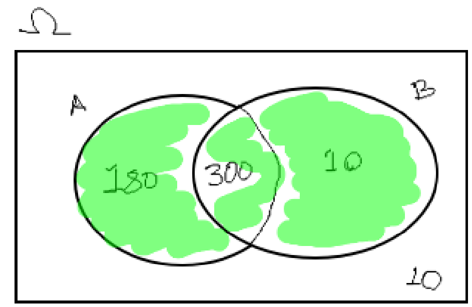
Ejercicio

Una universidad encuestó a 500 estudiantes sobre su experiencia con herramientas de inteligencia artificial. Los resultados fueron los siguientes:

- 480 estudiantes han usado ChatGPT $\rightarrow A$
- 310 estudiantes han usado Gemini $\rightarrow B$
- 300 estudiantes han usado ambas herramientas
- El resto no ha usado ninguna de las dos.

Si se selecciona un estudiante al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado ambas herramientas?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado solo ChatGPT?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que haya usado al menos una de las dos herramientas?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya usado ninguna de las dos herramientas?



$n(\Omega) = 500$

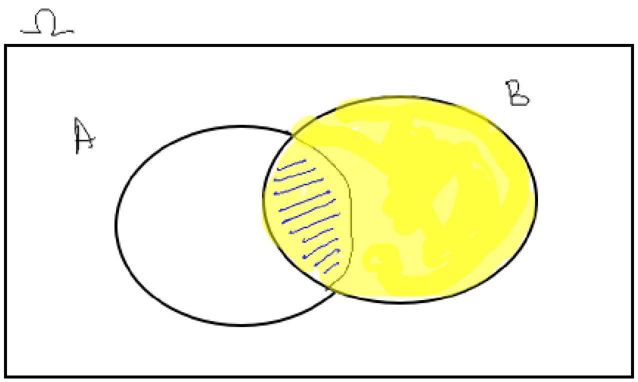
a. $P(A\cap B) = \frac{300}{500} = 0.6$

b. $P(A\cap B^C) = \frac{180}{500} = P(A) - P(A\cap B) = \frac{480}{500} - \frac{300}{500} = 0.6$

c. $P(A\cup B) = \frac{490}{500} = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{480}{500} + \frac{310}{500} - \frac{300}{500} = \frac{490}{500} = 0.98$

d. $P(A^C \cap B^C) = \frac{10}{500} = P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.98 = 0.02$

Probabilidad condicional



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propiedades de la probabilidad condicional

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$, para todo evento A y B
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Si los eventos $A_1, \ldots, A_k$ son mutuamente excluyentes, entonces $P(\cup_{i=1}^{k} A_j|B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j|B) = P(A_1|B) + \ldots + P(A_k|B)$
4. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
5. $P(\emptyset|B) = 0$
6. $P((A^c \cap B)|C) = P(B|C) - P((A \cap B)|C)$
7. $P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C) - P((A \cup B)|C)$

Ejercicio

En una universidad el 70% de los estudiantes son de Ciencias y el 30% de Letras; de los estudiantes de Ciencias, el 60% son hombres y de los estudiantes de Letras son hombres el 40%. Si se elige aleatoriamente un estudiante.

a. Hallar la probabilidad de que sea un estudiante hombre:

Sean los eventos:

A = {El estudiante elegido es de Ciencias} $\quad A^c = \{\text{Letras}\}$

B = {El estudiante elegido es varón}

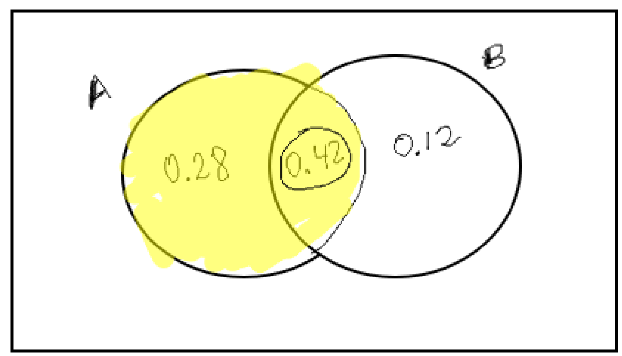
$$P(B) = 0.70 \times 0.60 + 0.30 \times 0.40 = 0.42 + 0.12 = 0.54$$

$$= P(A) \times P(B|A) + P(A^c)\, P(B|A^c)$$

Ciencias

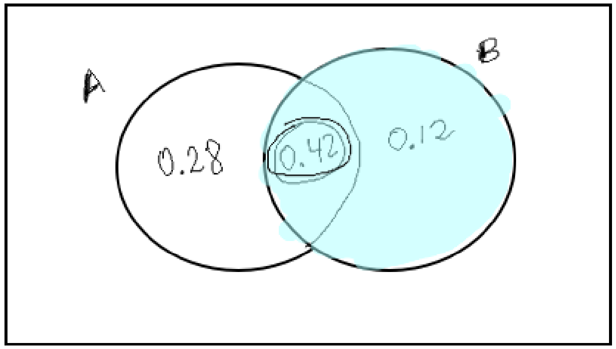
b. Hallar la probabilidad de que sea un estudiante hombre, si se sabe que es de Ciencias:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.42}{0.70} = 0.60$$



c. Si se sabe que es hombre, hallar la probabilidad de que sea un estudiante de Ciencias:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.42}{0.54} = 0.778$$



Ejercicio

En una universidad se seleccionó una muestra de 200 alumnos y se encontró que 9 tienen sanciones académicas, 10 tienen sanciones administrativas, y 2 tienen ambos tipos de sanciones.

a) Si se selecciona un estudiante con sanción administrativa, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga sanción académica? 0.80

b) Si se selecciona un estudiante con sanción académica, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga sanción administrativa? 0.222

c) Si se selecciona un estudiante con al menos una sanción, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea académica? $9/17 = 0.529$

$A = \{$El estudiante tiene sanción académica$\}$ $\quad P(A) = 9/200$

$B = \{$El estudiante tiene sanción administrativa$\}$ $\quad P(B) = 10/200$

$P(A \cap B) = 2/200 = P(B \cap A)$

$$a)\ P(A^c | B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{\frac{2}{\cancel{200}}}{\frac{10}{\cancel{200}}} = 0.8$$

$$b)\ P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{\cancel{200}}}{\frac{9}{\cancel{200}}} = \frac{2}{9} = 0.222$$

$$c)\ P(A | A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(\overbrace{A \cap A}^{A}) + P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{\frac{9}{\cancel{200}}}{\frac{17}{\cancel{200}}}$$