Análise Estatística de Dados

Pós-graduação em Inteligência Artificial e Ciência de Dados

Introdução ao Teste de Hipótese

IMT – Instituto Mauá de Tecnologia

Outubro/2023

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Teste de Hipótese

● Processo que usa *estatísticas amostrais* para testar uma afirmação sobre o *valor de um parâmetro populacional*.

EXEMPLO

Considere um fabricante que anuncia que seu novo carro híbrido tem média de consumo de combustível de 50 milhas por galão. Se você suspeitar que o consumo médio não é de 50 milhas por galão, como você poderia mostrar que o anúncio é falso?

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Teste de Hipótese

Como fazer?

❶ Obviamente não podemos testar todos os veículos, mas somos capazes de tomar uma *decisão razoável* sobre o consumo médio retirando uma *amostra aleatória* da população de veículos e medindo o consumo de cada um.

❷ Se a média da amostra diferir o suficiente da média anunciada, podemos decidir que o anúncio está errado.

O anúncio é falso?

$$\mu = 50 \text{ mi/gl} \xrightarrow{n\,=\,30 \text{ veículos}} \begin{array}{l} \bar{x} = 47 \text{ mi/gl} \\ s = 5{,}5 \text{ mi/gl} \end{array}$$

Teste de Hipótese

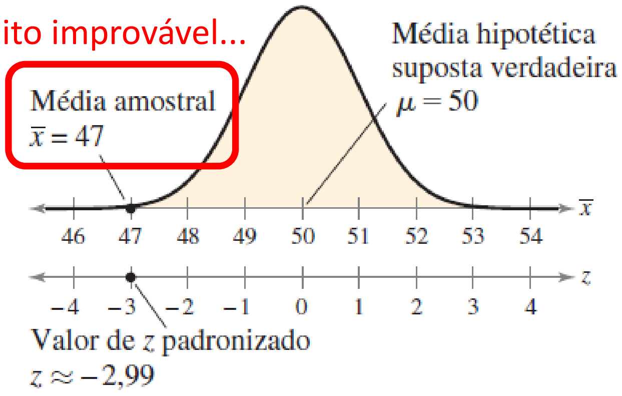
❸ Para decidir, fazemos algo incomum: supomos que o anúncio está correto! Ou seja, μ é de fato 50 mi/gl.

❹ Então, examinamos a *distribuição amostral das médias* (com $n = 30$) obtida de uma população na qual $\mu = 50$ e $\sigma = 5{,}5$.

$\mu_{\bar{x}} = 50$ e $\sigma_{\bar{x}} = 5{,}5/\sqrt{30} \approx 1$

Distribuição amostral de $\bar{x}$ relativa a uma população de média 50.

Muito improvável...



$P(x \leq 47) = 0{,}0013 \Rightarrow$ Evento incomum

❺ A suposição de que o anúncio da empresa está correto nos levou a um resultado improvável...

Teste de Hipótese

❻ Há duas possibilidades: ou nossa amostra é muito incomum, ou o anúncio é provavelmente falso.

❼ A conclusão lógica é a de que o anúncio *provavelmente é falso*.

Vamos retomar esse passo-a-passo em detalhe e estabelecer um procedimento estatístico confiável para realizar testes de hipótese.

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

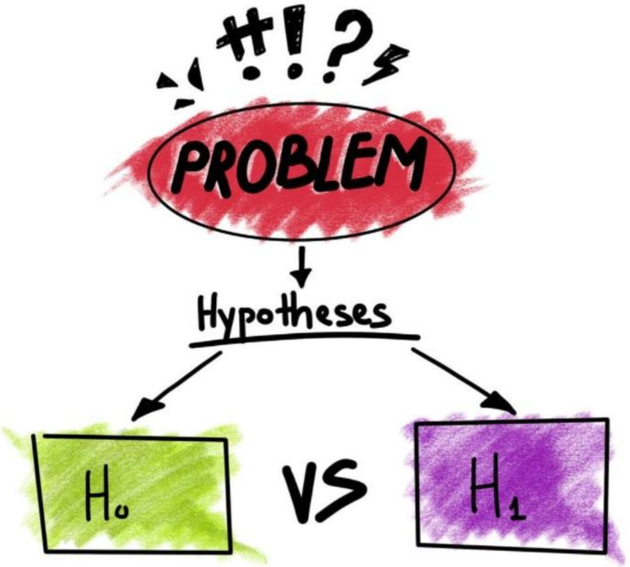
MAUÁ

Estabelecendo uma hipótese

● Para testar uma afirmação sobre um parâmetro populacional, devemos especificar, cuidadosamente, um *par de hipóteses* — uma que represente a *afirmação* e outra, seu *complemento*.

● Quando uma dessas hipóteses é falsa, a outra deve ser verdadeira.

● Qualquer uma das hipóteses — a *hipótese nula* ou a *hipótese alternativa* — pode representar a afirmação original.



INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

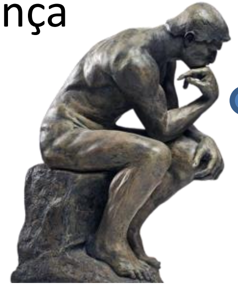
MAUÁ

Estabelecendo uma hipótese

Definição

1. Uma **hipótese nula** H_0 é uma hipótese estatística que contém uma afirmação de igualdade, tal como $\leq$, $=$ ou $\geq$.
2. A **hipótese alternativa** H_a é o complemento da hipótese nula. É uma afirmação que é aceita como verdadeira se H_0 for falsa e contém uma declaração de desigualdade estrita, tal como $<$, $\neq$ ou $>$.

Escreva a afirmação sobre o parâmetro populacional por meio de uma sentença matemática. Então, escreva seu complemento. *A hipótese nula corresponde à sentença que contém a igualdade.*



Se a afirmação na hipótese nula não é verdadeira, então, a hipótese alternativa deve ser aceita como verdadeira.

Estabelecendo uma hipótese

EXEMPLO Se o valor da afirmação é em relação a k e o parâmetro populacional é μ, então alguns pares possíveis de hipóteses nula e alternativa são:

$$\begin{cases} H_0\colon \mu \leq k \\ H_a\colon \mu > k \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0\colon \mu \geq k \\ H_a\colon \mu < k \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} H_0\colon \mu = k \\ H_a\colon \mu \neq k \end{cases}$$

● *Independente de qual dos três pares de hipóteses usarmos, sempre admitiremos que $\mu = k$* e examinaremos a distribuição amostral de x com base nessa suposição (H_0 verdadeira). Dentro dessa distribuição amostral, determinaremos se a estatística amostral é ou não incomum.

Estabelecendo uma hipótese

Declaração sobre H_0 ***A média é...***	**Sentença matemática**	**Declaração sobre H_a** ***A média é...***
... maior ou igual a k. *... pelo menos k.* *... não menos que k.*	$\begin{cases} H_0\colon \mu \geq k \\ H_a\colon \mu < k \end{cases}$	*... menor que k.* *... abaixo de k.* *... menos que k.*
... menor ou igual a k. *... no máximo k.* *... não mais que k.*	$\begin{cases} H_0\colon \mu \leq k \\ H_a\colon \mu > k \end{cases}$	*... maior que k.* *... acima de k.* *... mais que k.*
... igual a k. *... k.* *... exatamente k.*	$\begin{cases} H_0\colon \mu = k \\ H_a\colon \mu \neq k \end{cases}$	*... não igual a k.* *... diferente de k.* *... não k.*

A interpretação correta do problema é fundamental para a formulação de hipóteses!

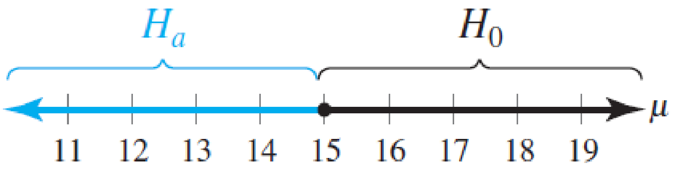
Estabelecendo uma hipótese

EXEMPLO Estabelecendo as hipóteses nula e alternativa

Escreva a afirmação como uma sentença matemática. Formule as hipóteses nula e alternativa e identifique qual representa a afirmação.

1 Uma concessionária de automóveis anuncia que o tempo médio para uma troca de óleo é menor que 15 minutos.

A afirmação *"tempo médio... é menor que 15 minutos"* pode ser escrita como $\mu < 15$. Seu complemento é $\mu \geq 15$. Uma vez que $\mu \geq 15$ contém a igualdade, ela se torna a hipótese nula. Nesse caso, a hipótese alternativa representa a afirmação.



H_0: $\mu \geq 15$ minutos

H_a: $\mu < 15$ minutos (Afirmação.)

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

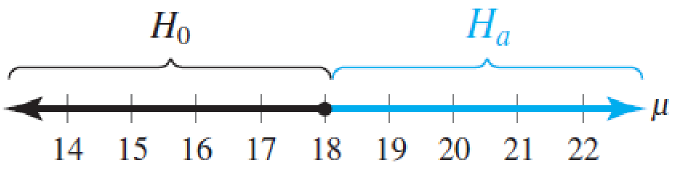
Estabelecendo uma hipótese

EXEMPLO Estabelecendo as hipóteses nula e alternativa

Escreva a afirmação como uma sentença matemática. Formule as hipóteses nula e alternativa e identifique qual representa a afirmação.

2 Uma companhia anuncia que a vida útil média de seus fornos é superior a 18 anos.

A afirmação *"vida útil média... é superior a 18 anos"* pode ser escrita como $\mu > 18$. Seu complemento é $\mu \leq 18$. Uma vez que $\mu \leq 18$, ela se torna a hipótese nula. Nesse caso, a hipótese alternativa representa a afirmação.



H_0: $\mu \leq 18$ anos

H_a: $\mu > 18$ anos (Afirmação.)

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA
MAUÁ

Tipos de erros e nível de significância

● Iniciamos um teste de hipótese *supondo que a condição de igualdade na hipótese nula é verdadeira*.

Duas decisões possíveis:

✓ Rejeitar a hipótese nula

✓ Não rejeitar a hipótese nula

Pelo fato da decisão ser baseada em uma amostra e não na população inteira, *há sempre a possibilidade de que tomemos uma decisão errada*.

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

MAUÁ

Tipos de erros e nível de significância

Definição

Um **erro tipo I** ocorre se a hipótese nula é rejeitada quando na realidade é verdadeira.

Um **erro tipo II** ocorre se a hipótese nula não é rejeitada quando na realidade é falsa.

Resultados possíveis de um teste de hipótese.

	Realidade de H_0	
Decisão	**H_0 é verdadeira**	**H_0 é falsa**
Não rejeita H_0	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeita H_0	Erro tipo I	Decisão correta

Tipos de erros e nível de significância

- *Rejeitaremos a hipótese nula quando o valor da estatística amostral for um valor incomum na distribuição amostral* (probabilidade de 0,05 ou menor).

- Quando testes estatísticos são realizados, às vezes a ocorrência de um evento incomum é caracterizada por uma probabilidade de 0,10 ou menor, 0,05 ou menor ou 0,01 ou menor.

Pelo fato de haver variação de amostra para amostra, sempre há uma possibilidade de que você rejeite a hipótese nula quando ela é, na realidade, verdadeira.

Tipos de erros e nível de significância

Definição

Em um teste de hipótese, **o nível de significância** é a probabilidade máxima permitida de cometer um erro do tipo I. Ele é simbolizado por α (letra grega minúscula alfa).

A probabilidade de um erro tipo II é simbolizada por β (letra grega minúscula beta).

- Estabelecendo-se o nível de significância em um valor pequeno, nosso desejo é que a probabilidade de rejeitar uma hipótese nula verdadeira seja pequena. Os três níveis de significância usuais são $\alpha = 0{,}10$, $\alpha = 0{,}05$ e $\alpha = 0{,}01$.

Testes estatísticos e valores *p*

● O próximo passo em um teste de hipótese é *obter uma amostra aleatória* da população e *calcular as estatísticas amostrais* de interesse (tais como $\bar{x}$, s^2), correspondentes aos parâmetros na hipótese nula (μ, σ^2).

Estatística de teste (variável de teste)

● Sob a suposição de que a hipótese nula é verdadeira, *o valor específico da estatística de teste é então transformado em uma estatística de teste padronizada*, tal como z, t, ou χ^2.

Tomada de decisão sobre a rejeição ou não da hipótese nula

Testes estatísticos e valores p

Parâmetro populacional	Estatística de teste	Estatística de teste padronizada
μ	$\bar{x}$	z (σ conhecido) ; t (σ desconhecido)
σ^2	s^2	χ^2

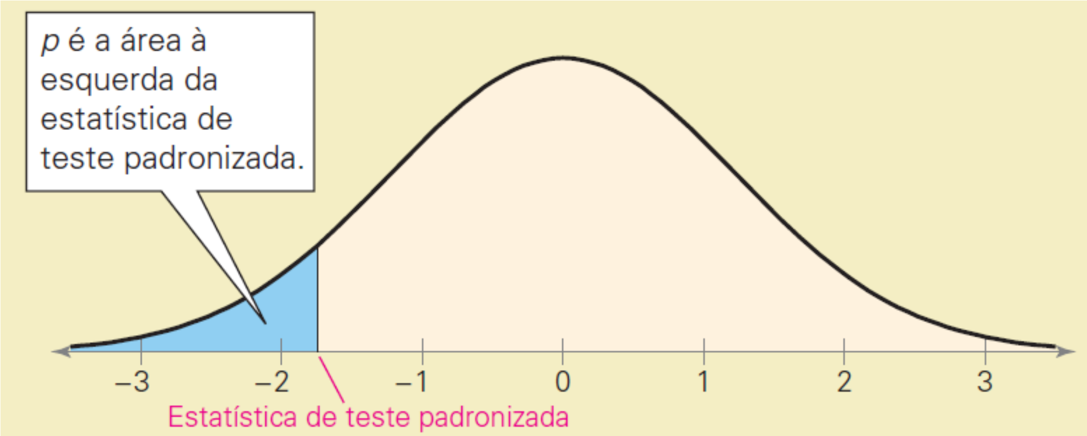
Definição

Supondo a hipótese nula verdadeira, então um **valor *p*** (ou ***p-value***) de um teste de hipótese é a probabilidade da estatística amostral assumir um valor tão extremo ou maior que aquele determinado em função dos dados da amostra. Quando o valor p for menor ou igual que o nível de significância, rejeita-se H_0.

Testes estatísticos e valores p

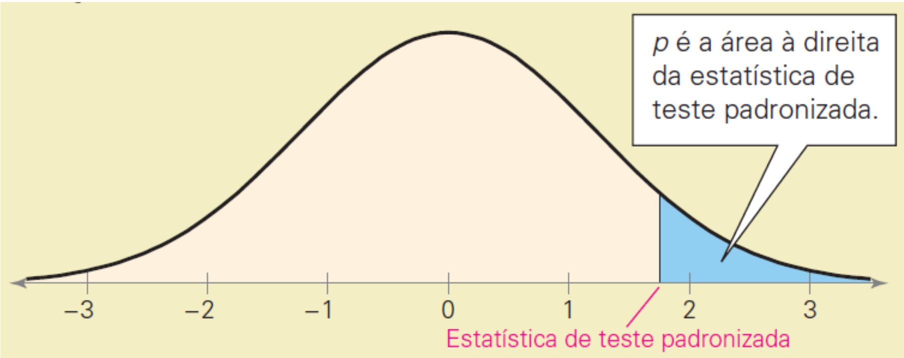
● O valor p de um teste de hipótese depende da natureza do teste. Há três tipos: *teste unilateral à esquerda, unilateral à direita e bilateral*. O tipo depende da localização da região da distribuição amostral que favorece a rejeição de H_0. Essa região é indicada pela hipótese alternativa.

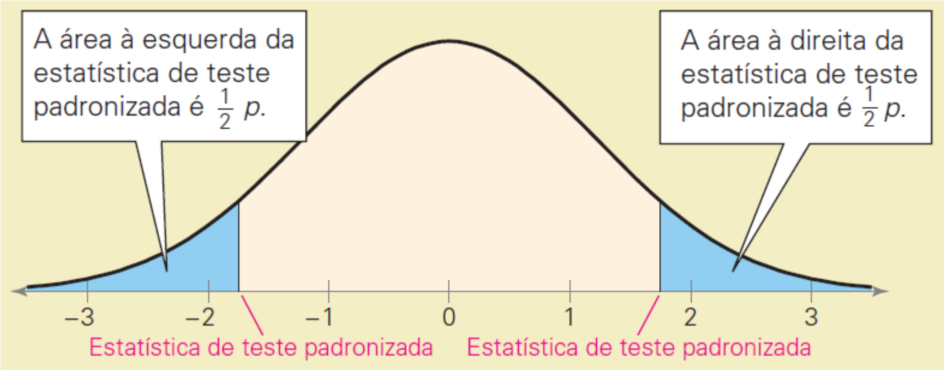
❶ Se a hipótese alternativa H_a contém o símbolo "menor que" ($<$), então o teste de hipótese é um teste unilateral à esquerda.



Testes estatísticos e valores *p*

❷ Se a hipótese alternativa H_a contém o símbolo "maior que" (>), então o teste de hipótese é um teste unilateral à direita.





❸ Se a hipótese alternativa H_a contém o símbolo "diferente de" (≠), então o teste de hipótese é um teste bilateral.

Testes estatísticos e valores p

● Quanto menor o valor p do teste, mais evidência há para rejeitar a hipótese nula. Um valor p muito pequeno indica um evento incomum.

Mesmo um valor p muito baixo não constitui prova de que a hipótese nula é falsa, somente que **provavelmente** é falsa!

EXEMPLO **Identificando a natureza de um teste de hipótese**

Para cada afirmação, expresse H_0 e H_a em palavras e em símbolos. Então, determine se o teste de hipótese é unilateral à esquerda, unilateral à direita ou bilateral. Esboce uma distribuição amostral normal e sombreie a área para o valor p.

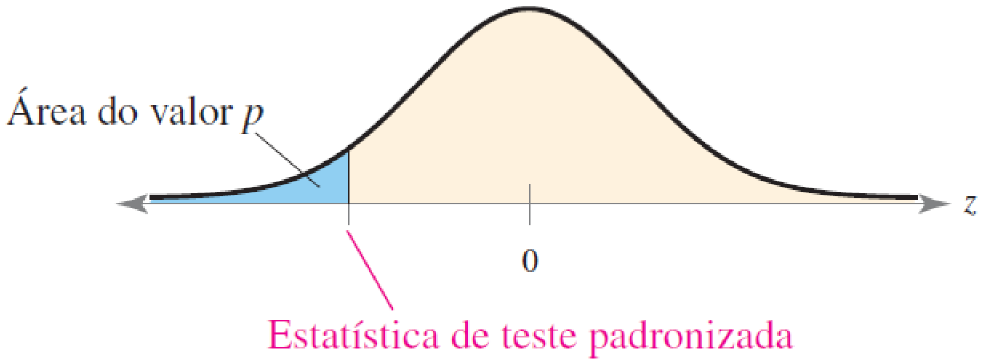
Testes estatísticos e valores *p*

1 Uma concessionária de automóveis anuncia que o tempo médio para uma troca de óleo é menor que 15 minutos.

$H_0: \mu \geq 15$ min — O tempo médio para uma troca de óleo é maior ou igual a 15 minutos.

$\boxed{H_a: \mu < 15 \text{ min}}$ — O tempo médio para uma troca de óleo é menor que 15 minutos.

Teste de hipótese unilateral à esquerda



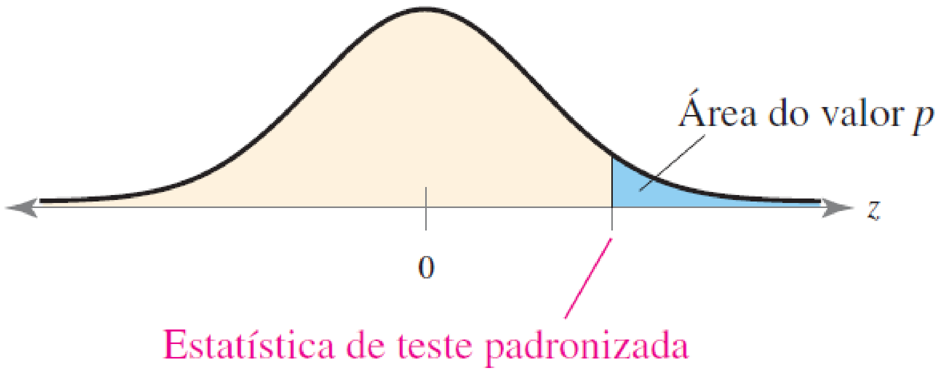
Testes estatísticos e valores *p*

❷ Uma companhia anuncia que a vida útil média de seus fornos é superior a 18 anos.

$H_0: \mu \leq 18$ anos — A vida média dos fornos é menor ou igual a 18 anos.

$\boxed{H_a: \mu > 18 \text{ anos}}$ — A vida média dos fornos é maior que 18 anos.

Teste de hipótese unilateral à direita



Tomando uma decisão e interpretando-a

Regra de decisão baseada no valor *p*

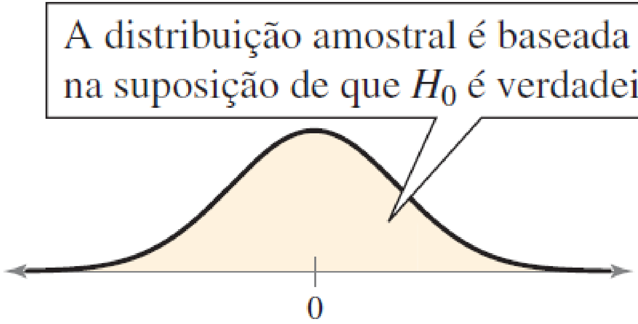
Para usar um valor *p* para tomar uma decisão em um teste de hipótese, compare o valor *p* com α.

1. Se $p \leq \alpha$, então rejeite H_0.
2. Se $p > \alpha$, não rejeite H_0.

	Afirmação inicial	
Decisão	**Afirmação está em H_0**	**Afirmação está em H_a**
Rejeita H_0	Há evidência suficiente para rejeitar a afirmação.	Há evidência suficiente para apoiar a afirmação.
Não rejeita H_0	Não há evidência suficiente para rejeitar a afirmação.	Não há evidência suficiente para apoiar a afirmação.

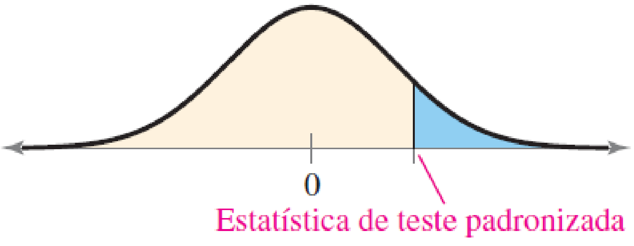
Passos para o teste de hipótese

1. Expresse a afirmação verbal e matematicamente. Identifique as hipóteses nula e alternativa.
2. Especifique o nível de significância.
3. Estabeleça a distribuição amostral padronizada e esboce seu gráfico.



Passos para o teste de hipótese

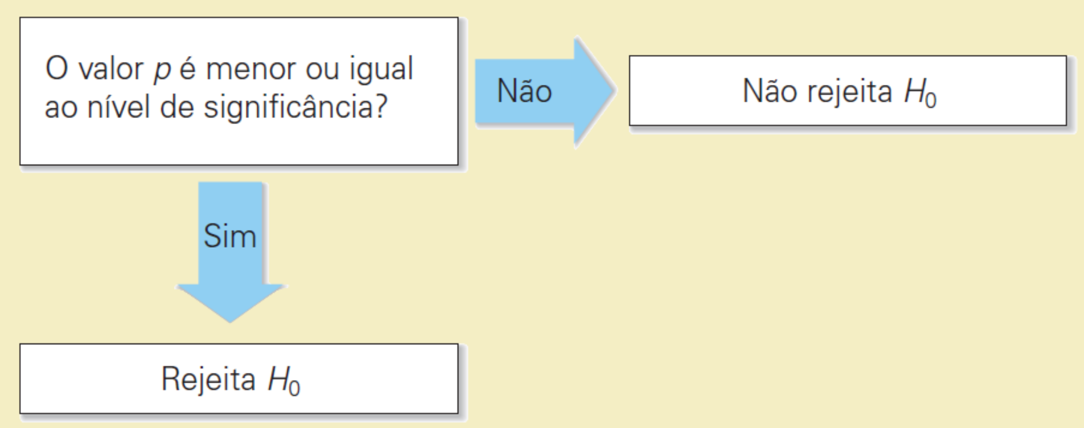
❹ Calcule a estatística de teste e sua correspondente estatística de teste padronizada. Acrescente isso no seu esboço.



❺ Encontre o valor p.

❻ Use a regra de decisão.

❼ Conclua interpretando a decisão no contexto da afirmação original.



Análise Estatística de Dados

Pós-graduação em Inteligência Artificial e Ciência de Dados

Introdução ao Teste de Hipótese

IMT – Instituto Mauá de Tecnologia

Outubro/2023