FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 2: Funções

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

Dezembro/2023

Objetivos

- Entender o conceito de função;
- Formas de se representar uma função;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

Por que estudar funções?

- Porque continuamente construímos teorias sobre as dependências entre as quantidades na natureza e na sociedade.

- Porque as funções são as principais ferramentas na construção de modelos matemáticos representativos de fenômenos.

- Porque as funções estão literalmente em todo o lugar, muitas vezes de forma explícita, outras tantas de forma implícita.

Como representar as funções

É possível representar uma função de quatro maneiras:

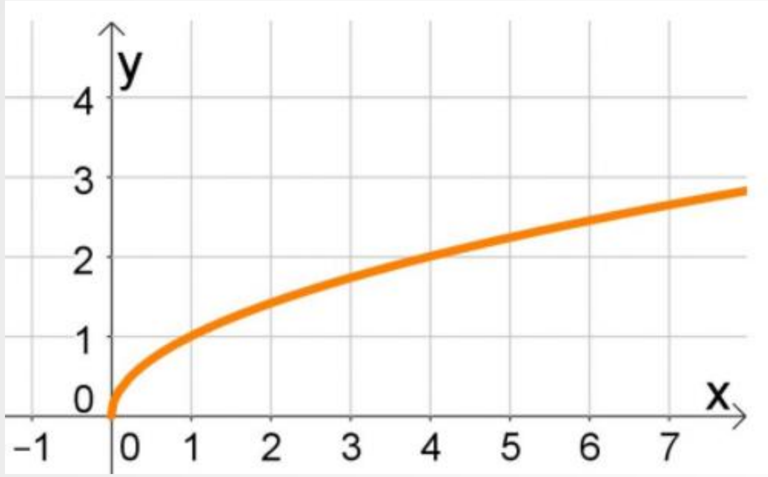
- Verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- Numericamente (tabela de valores)

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

- Algebricamente (fórmula explícita)

$$y = \sqrt{x - 3}$$

- Visualmente (gráficos)



FIAP

Um exemplo de análise

unica

Consumo de combustíveis

Estado: São Paulo
Combustível: Gasolina A
Unidade: Litros

Elaborado pela União da Indústria da Cana-de-Açúcar (UNICA) a partir de dados publicados pela Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) e pela Associação Brasileira das Empresas Distribuidoras de Gás Canalizado (ABEGAS)

Mês	2016	2017	2018	2019	2020
Janeiro	549.367.895	638.044.052	546.344.795	464.951.960	458.333.230
Fevereiro	596.900.832	645.411.570	531.531.503	451.496.217	457.737.397
Março	655.665.374	702.766.332	616.296.244	481.640.721	397.351.630
Abril					318.791.058
Maio					353.042.861
Junho					391.800.220
Julho					443.293.102
Agosto					432.238.844
Setembro	571.964.973	598.641.165	452.781.991	470.854.325	461.953.403
Outubro	622.613.943	602.037.067	458.405.095	506.361.396	0
Novembro	666.946.718	577.307.348	464.072.251	484.227.425	0
Dezembro	748.789.621	641.967.456	531.419.659	531.260.195	0
Total	7.293.077.015	7.644.642.731	6.150.755.482	5.801.814.527	3.714.541.745

Função em formato de tabela!

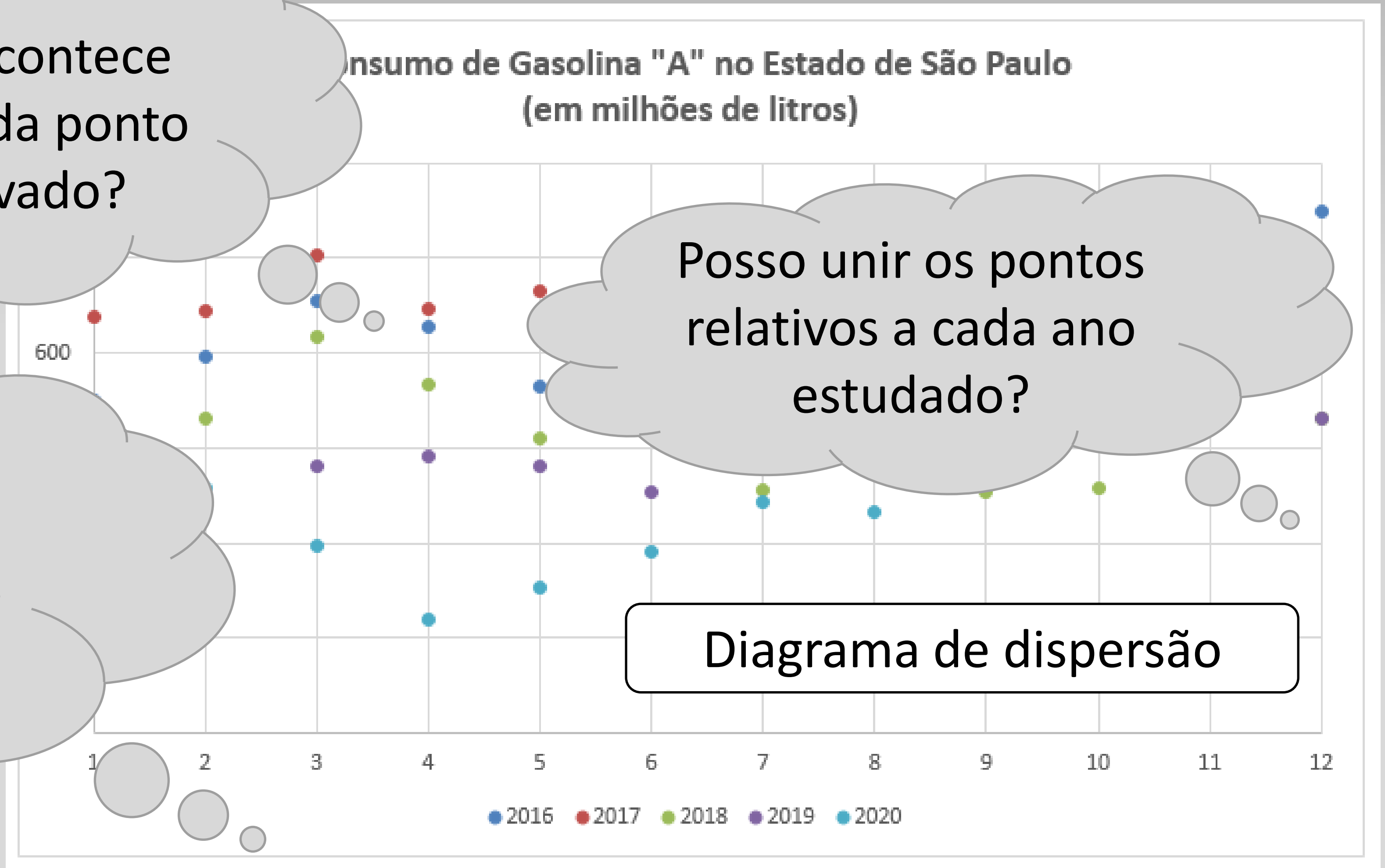
Fonte: https://observatoriodacana.com.br, acesso em 11.02.22

Problema: Prever o consumo de Gasolina A em São Paulo no último trimestre de 2020.

Um exemplo de análise

❶ Visualização
dados: Conve
relações de
dependência do
formato ta
for

O que acontece entre cada ponto observado?



Posso unir os pontos relativos a cada ano estudado?

Será que o consumo de gasolina é função apenas da época do ano?

Diagrama de dispersão

Um exemplo de análise

❶ Visualização dos dados: Converter as relações de dependência do formato tabela para o formato gráfico.

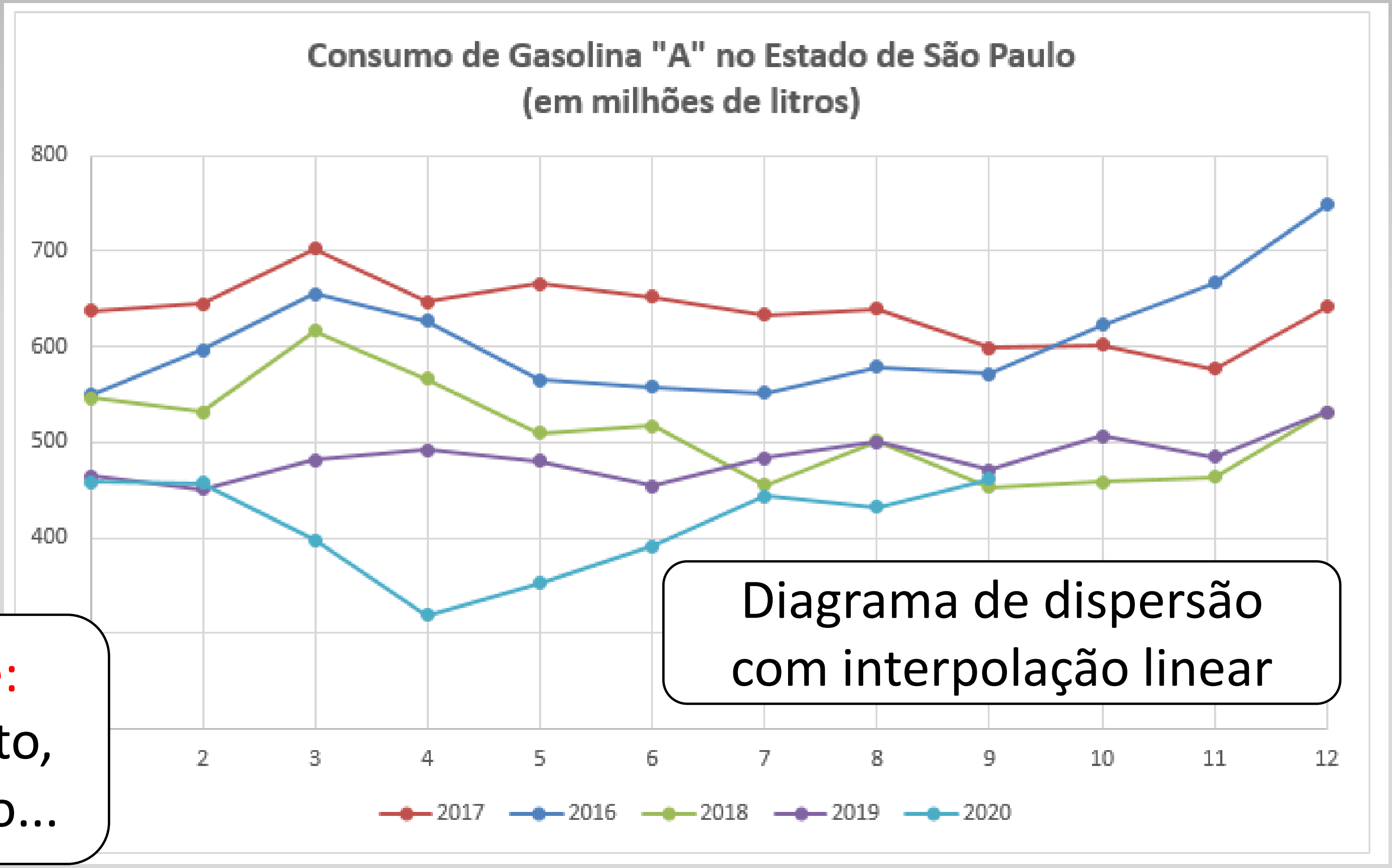
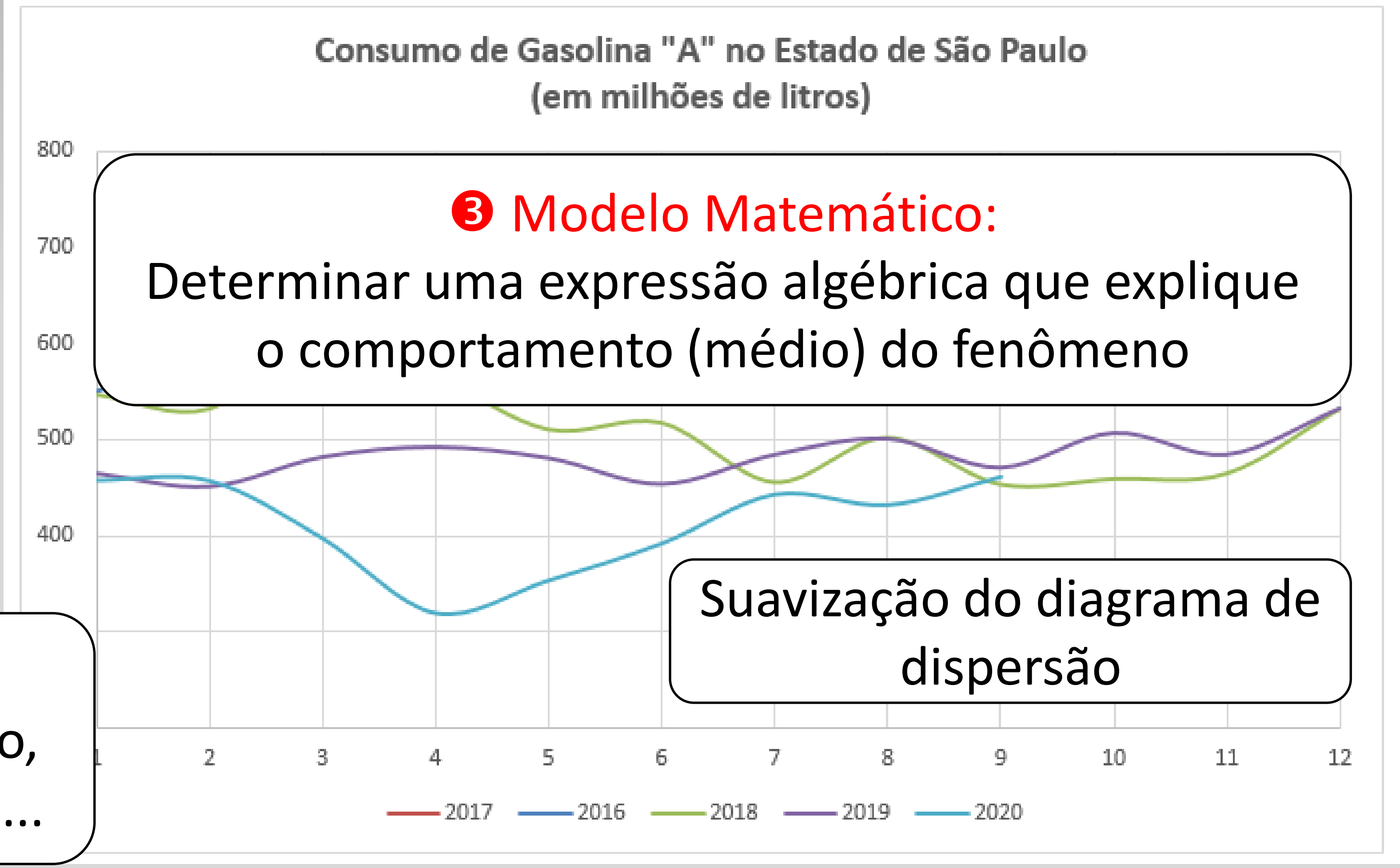


Diagrama de dispersão com interpolação linear

❷ Hipótese de Continuidade:
O domínio inicialmente discreto, torna-se um intervalo contínuo...

Um exemplo de análise

❶ Visualização dos dados: Converter as relações de dependência do formato tabela para o formato gráfico.



❸ Modelo Matemático:
Determinar uma expressão algébrica que explique o comportamento (médio) do fenômeno

Suavização do diagrama de dispersão

❷ Hipótese de Continuidade:
O domínio inicialmente discreto, torna-se um intervalo contínuo...

Um exemplo de análise

E então?

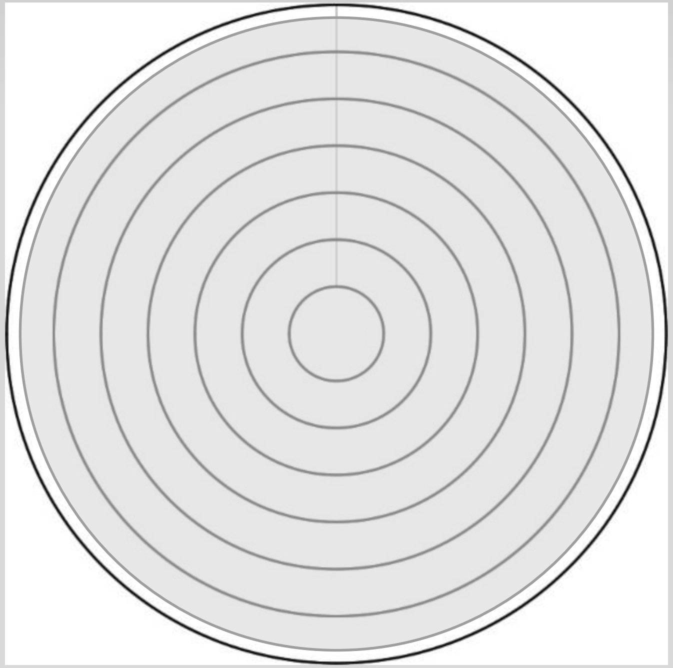
<u>Como você resolveria o problema?</u>

Após a aula, quando os conceitos estiverem compreendidos e sedimentados, acesse a planilha clicando no ícone do Microsoft Excel® e implemente sua solução!

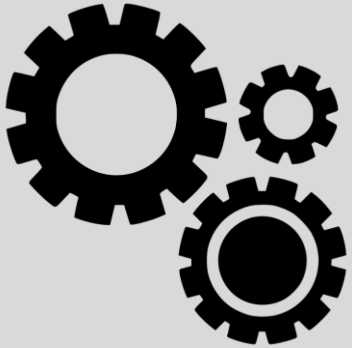
O que é uma função?

Definição informal: Função é uma relação matemática que surge da dependência entre grandezas.

A área *A* de um círculo depende de seu raio *r*.



A relação entre essas grandezas é $A = \pi r^2$. A cada número *r* positivo está associado um único valor de *A*. Dizemos que *A* é uma função de *r*.



Forneça mais exemplos!

A visão do Cálculo

Definição formal: Uma função f é uma lei que associa, a cada elemento x em um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ (denominado domínio de f), exatamente um único elemento $y = f(x)$ no conjunto $\mathbb{R}$ (chamado contradomínio).

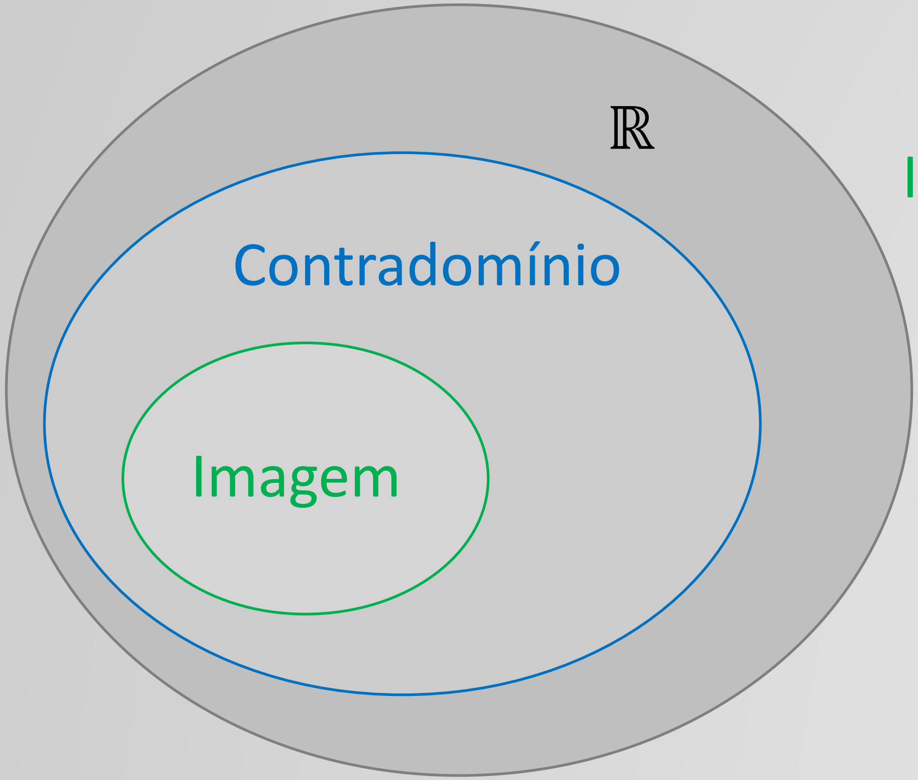
Notações:

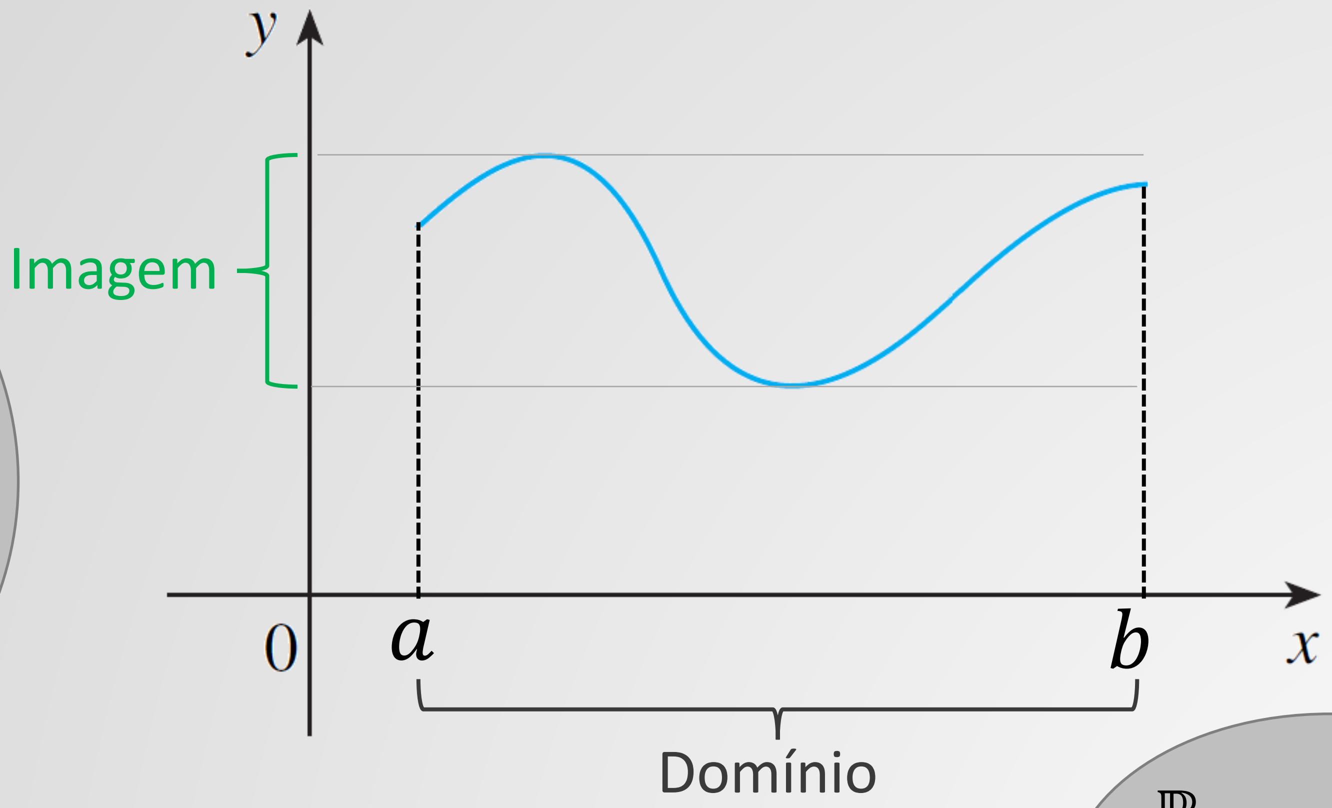
Usaremos esta forma!

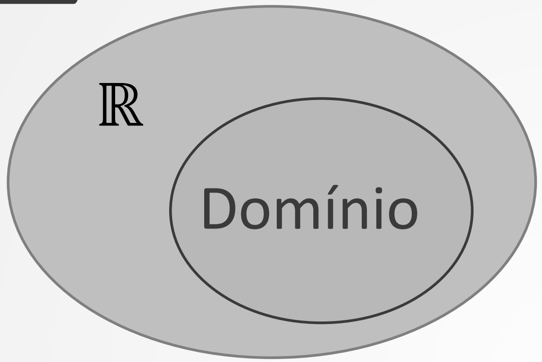
$y = f(x)$
(simplificada)

A imagem de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ obtidos quando x varia por todo o domínio. A imagem de f é, portanto, um subconjunto de seu contradomínio.

Visualizando o Domínio e a Imagem







A visão da Engenharia

É útil considerar uma função f como uma máquina...

Domínio

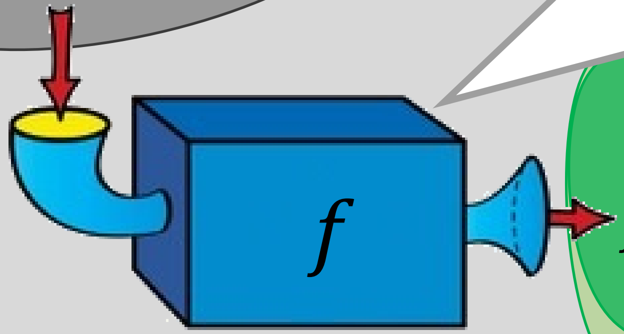
x (entrada)

A função torna-se o modelo matemático de um sistema!

Contradomínio

Imagem

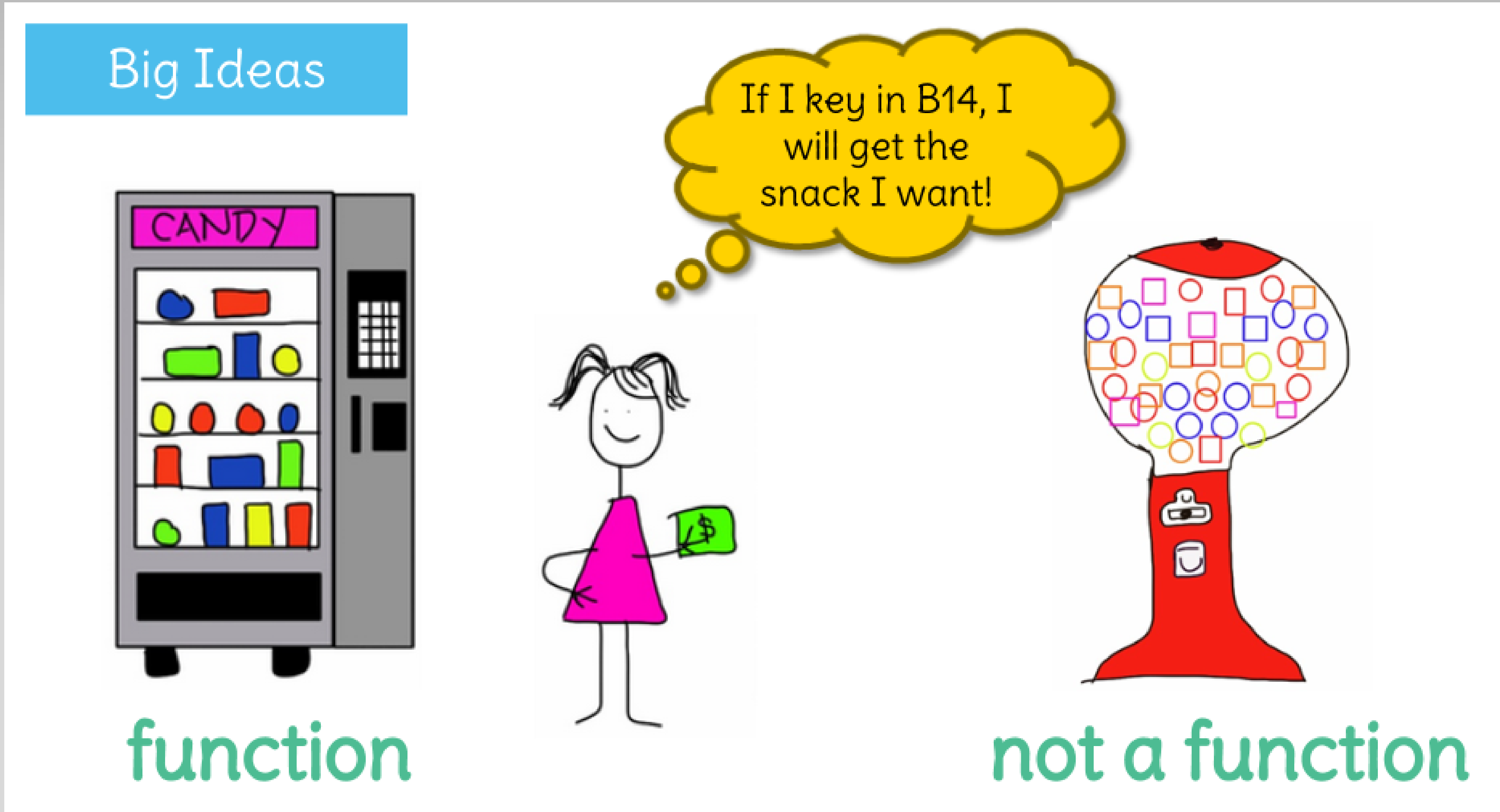
O símbolo que representa um número arbitrário no domínio, neste caso x, é chamado variável independente.



$f(x)$ (saída)

O símbolo que representa um número na imagem, neste caso $y = f(x)$, é chamado variável dependente.

Uma outra analogia...



emplos

Toda associação / relação é função?

Sejam os conjuntos $D = \{♣, ♢, ♡, ♠\}$ e $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, com apenas quatro elementos cada. As leis de associação f e g são funções de D em E?

x	$f(x)$
♣	δ
♢	α
♠	γ
♢	β
♡	γ

x	$g(x)$
♣	
♠	

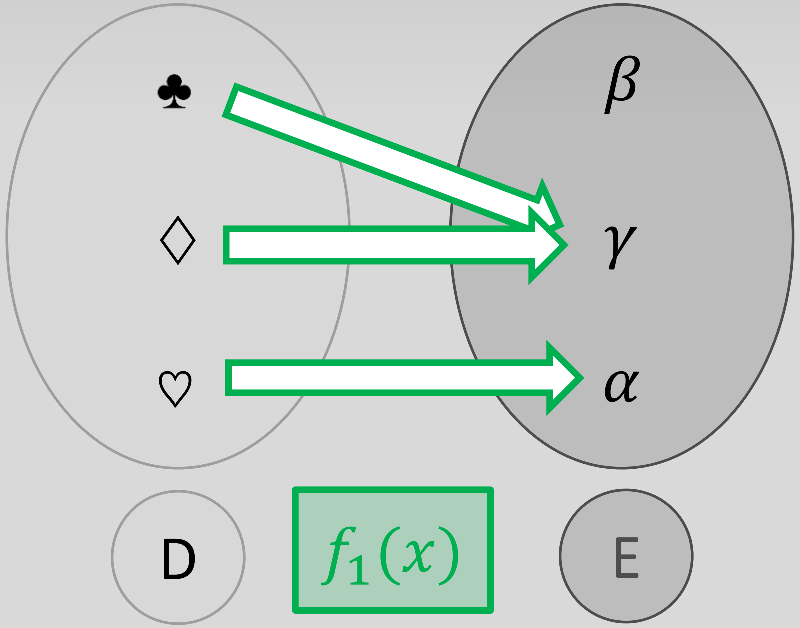
Um único elemento em D é mapeado em dois elementos de E...

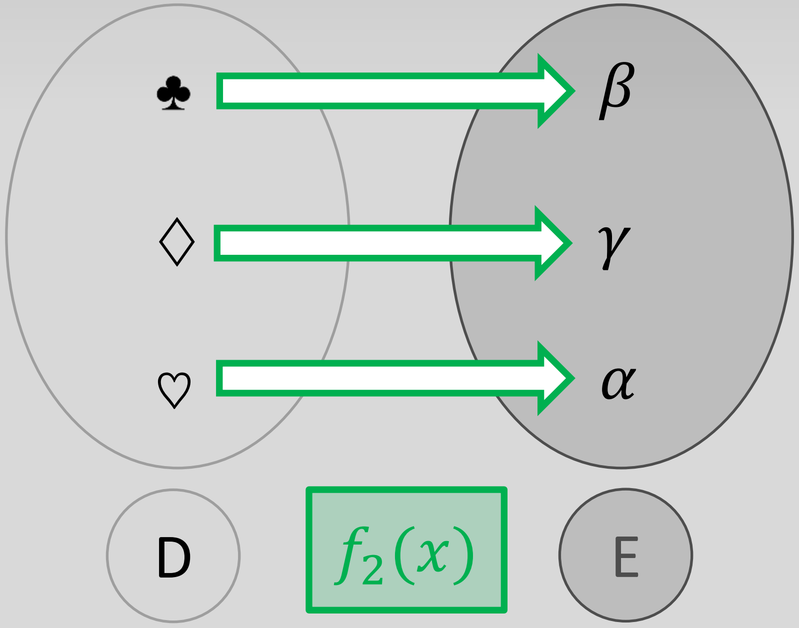
- ☐ f é uma função
- ☒ f não é uma função

- ☒ g é uma função
- ☐ g não é uma função

Funções injetoras

Sejam $D = \{\clubsuit, \Diamond, \heartsuit\}$ e $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ os conjuntos domínio e contradomínio, respectivamente, das funções f_1 e f_2.

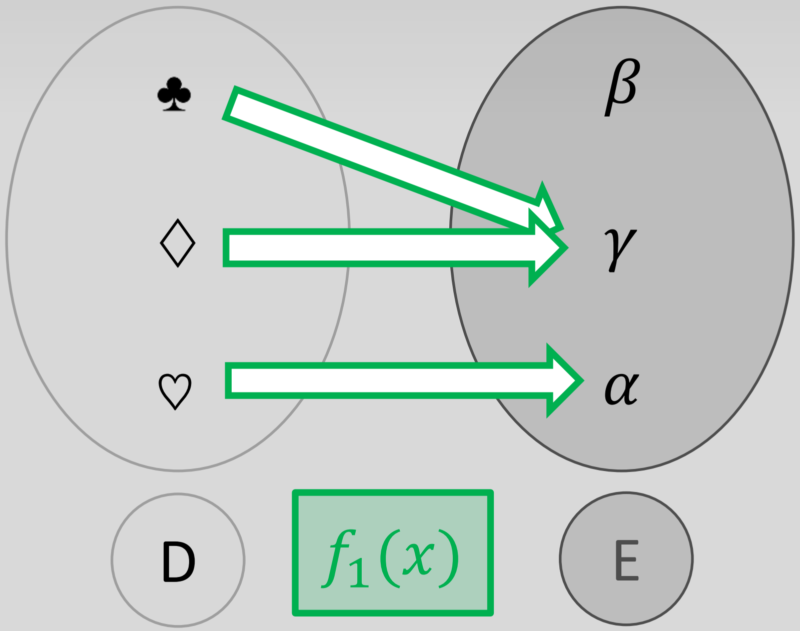


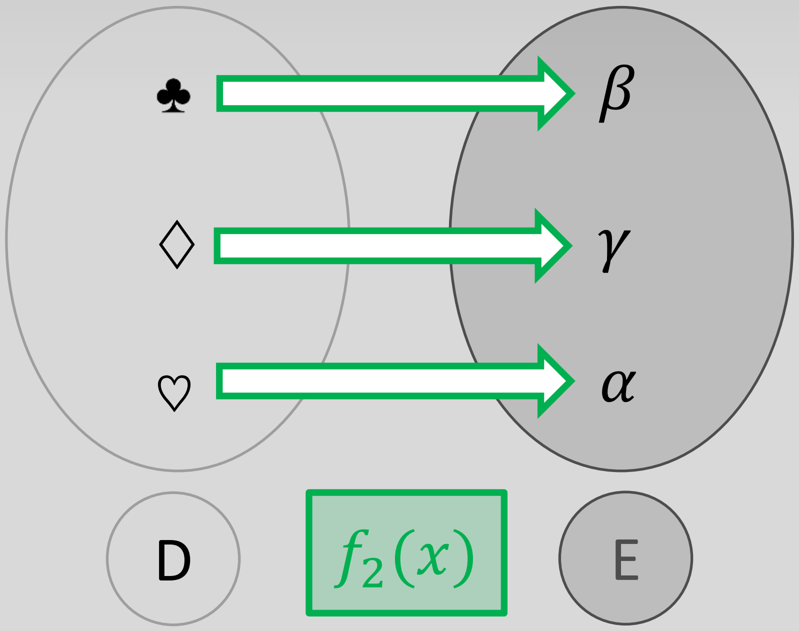


Definição: Uma função $f(x)$ é dita injetora (ou um-a-um) se, e somente se, $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$.

Funções injetoras

Sejam $D = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ e $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ os conjuntos domínio e contradomínio, respectivamente, das funções f_1 e f_2.





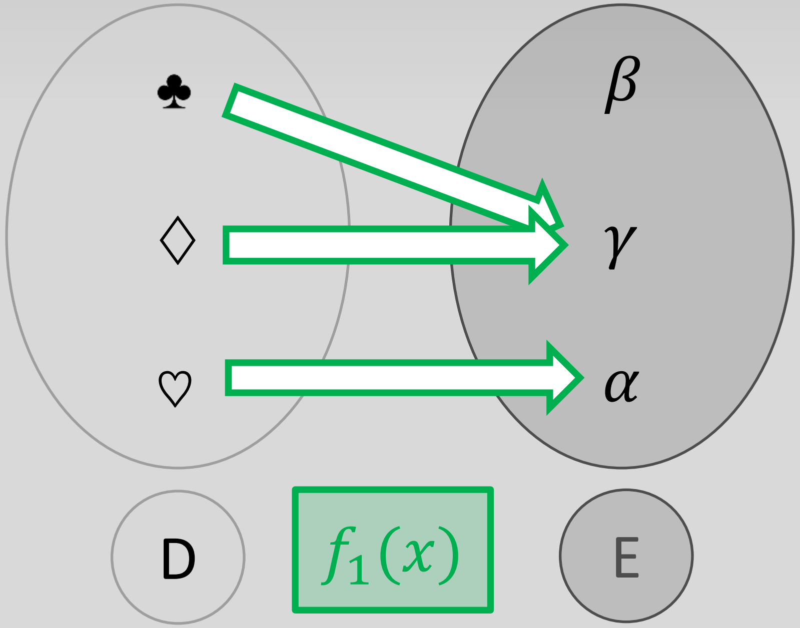
Definição: Uma função $f(x)$ é dita injetora (ou um-a-um) se, e somente se, $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$.

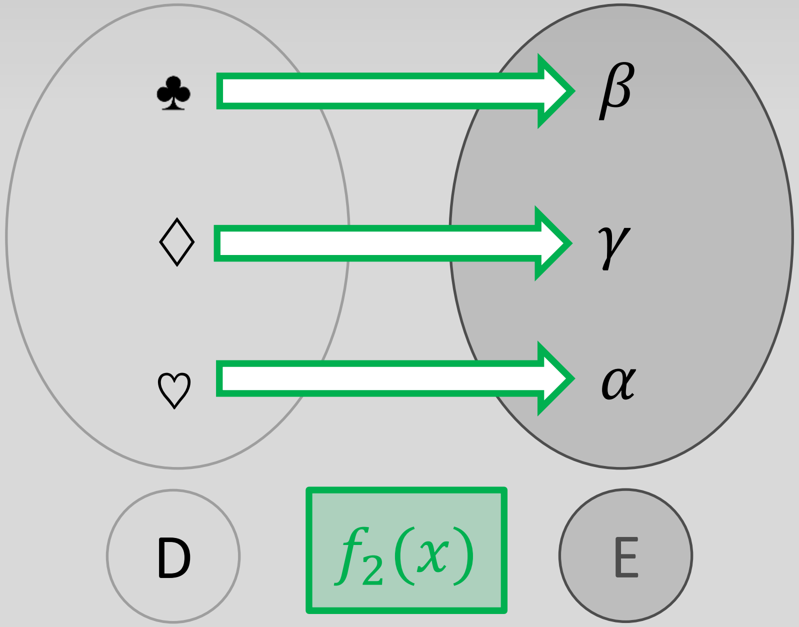
☐ f_1 é injetora

f_2 é injetora

Funções sobrejetoras

Sejam $D = \{♣, ♢, ♡\}$ e $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ os conjuntos domínio e contradomínio, respectivamente, das funções f_1 e f_2.

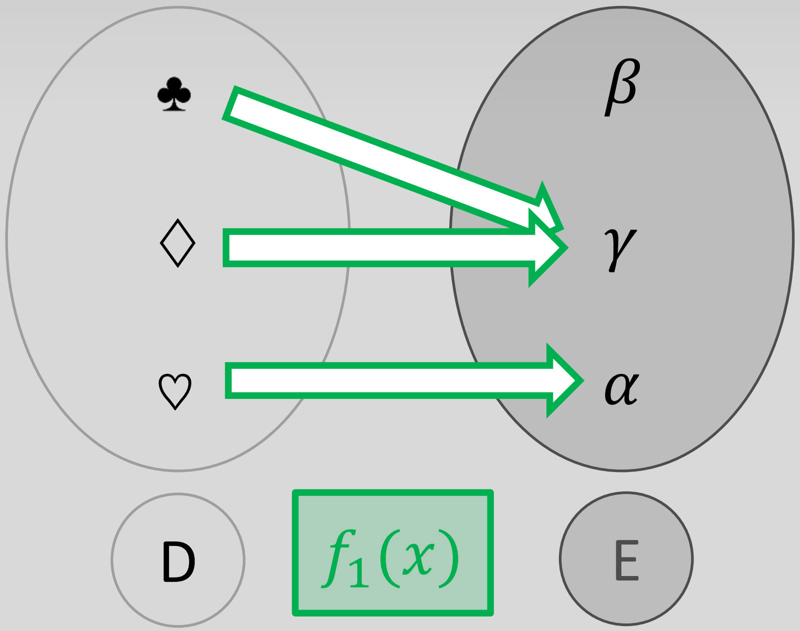


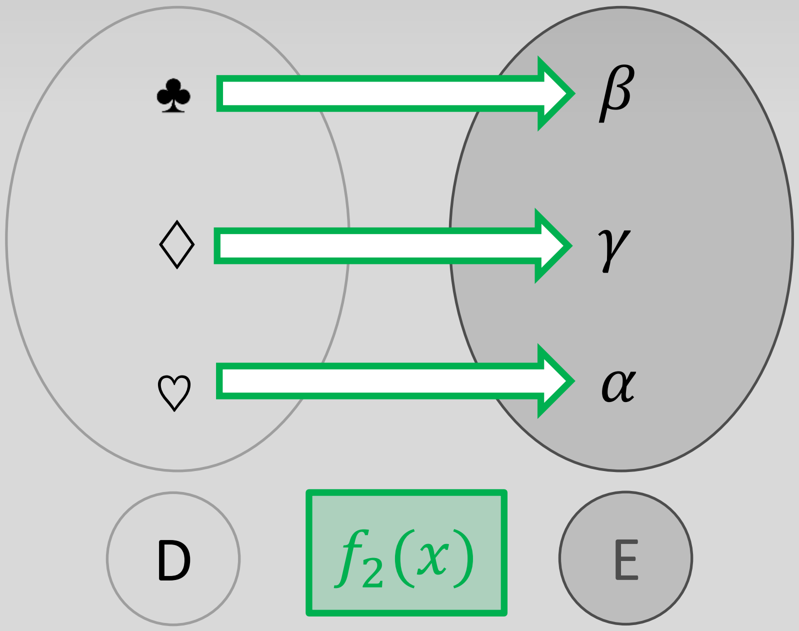


Definição: Uma função $f(x)$ é dita sobrejetora se, e somente se, seu conjunto imagem é igual ao seu contradomínio.

Funções sobrejetoras

Sejam $D = \{♣, ♢, ♡\}$ e $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ os conjuntos domínio e contradomínio, respectivamente, das funções f_1 e f_2.



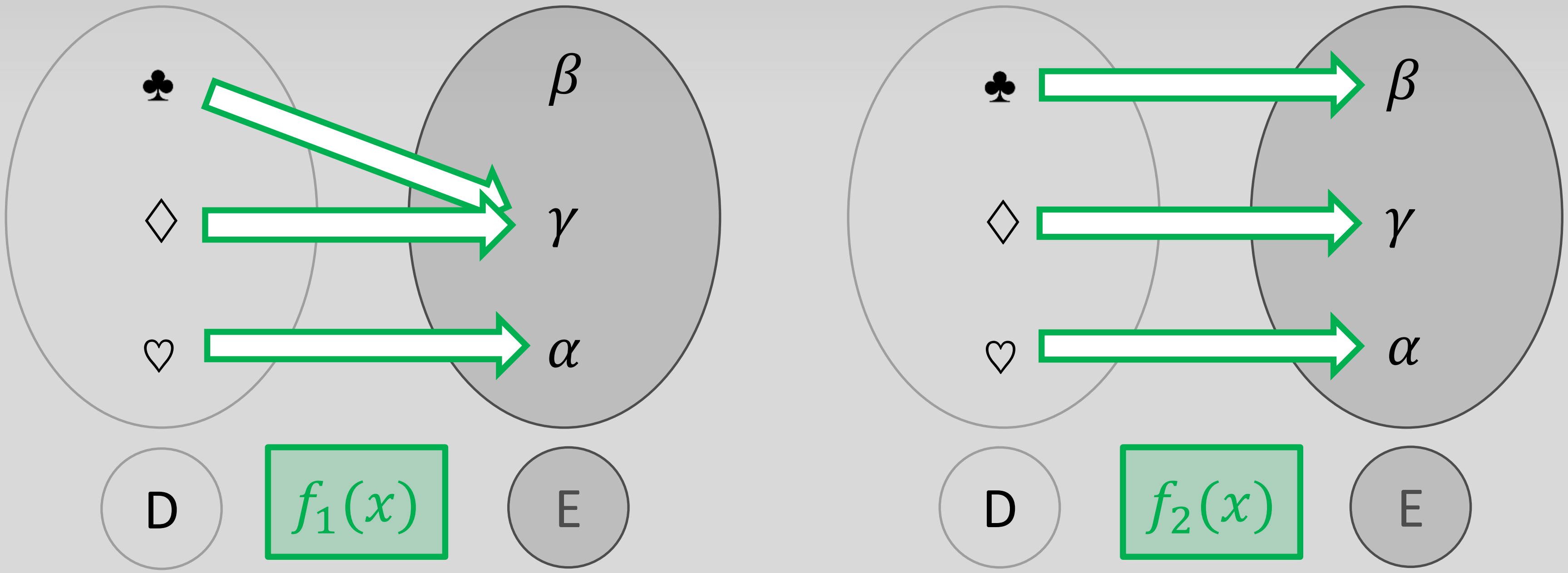


Definição: Uma função $f(x)$ é dita sobrejetora se, e somente se, seu conjunto imagem é igual ao seu contradomínio.

- ☐ f_1 é injetora
- ☒ f_2 é injetora
- ☐ f_1 é sobrejetora
- ☒ f_2 é sobrejetora

Funções bijetoras

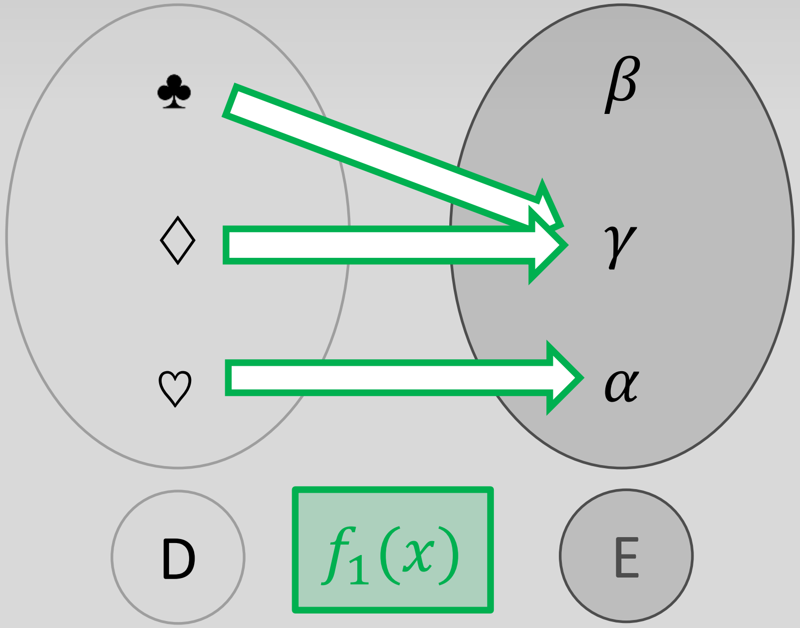
Sejam $D = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ e $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ os conjuntos domínio e contradomínio, respectivamente, das funções f_1 e f_2.

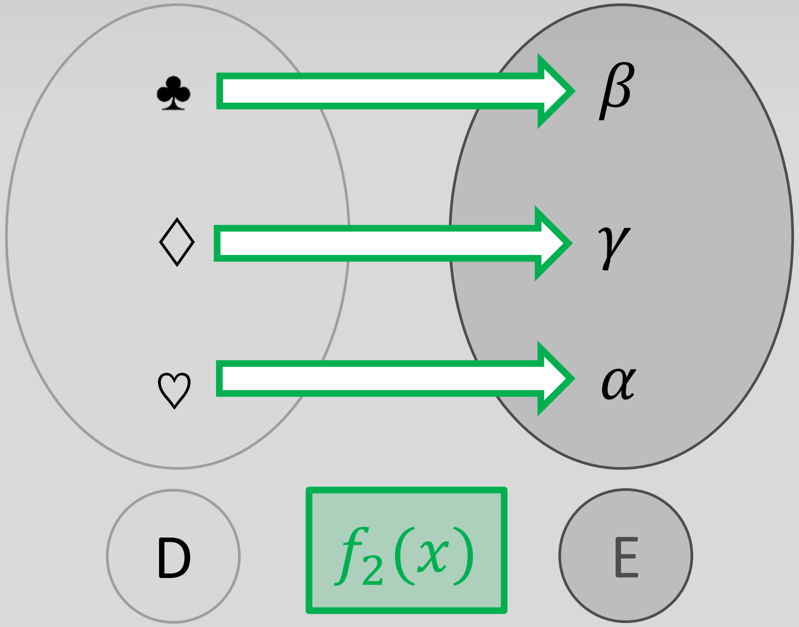


Definição: Uma função $f(x)$ é dita bijetora se, e somente se, $f(x)$ é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Funções bijetoras

Sejam $D = \{♣, ♢, ♡\}$ e $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ os conjuntos domínio e contradomínio, respectivamente, das funções f_1 e f_2.





Definição: Uma função $f(x)$ é dita bijetora se, e somente se, $f(x)$ ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

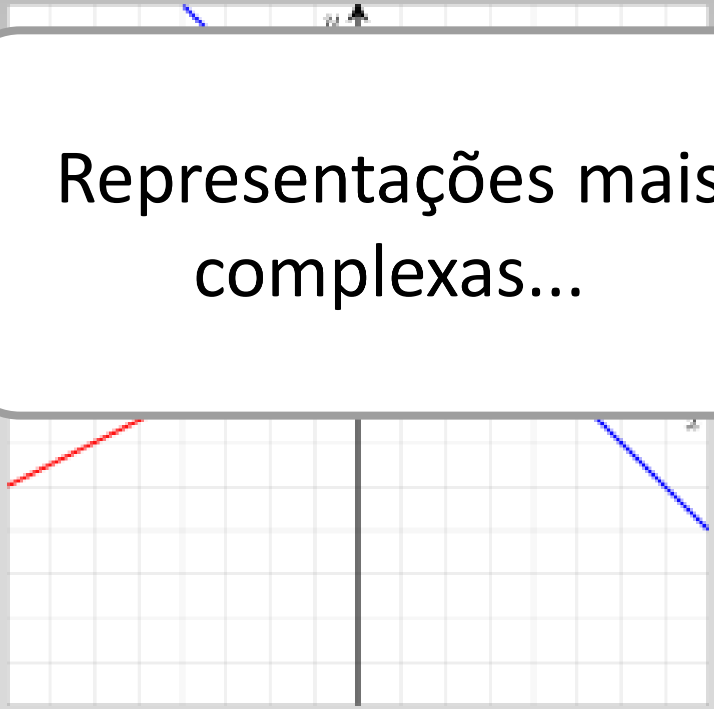
- ☐ f_1 é injetora
- ☒ f_2 é injetora
- ☐ f_1 é sobrejetora
- ☒ f_2 é sobrejetora
- ☐ f_1 é bijetora
- ☒ f_2 é bijetora

Gráfico de uma função

Se f for uma função com domínio D, então seu gráfico será o conjunto de pares ordenados entrada-saída $\{(x, f(x)) | x \in D\}$.

O gráfico de f consiste de todos os pontos do plano coordenado Oxy tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f.

Gráfico de uma função



Representações mais complexas...

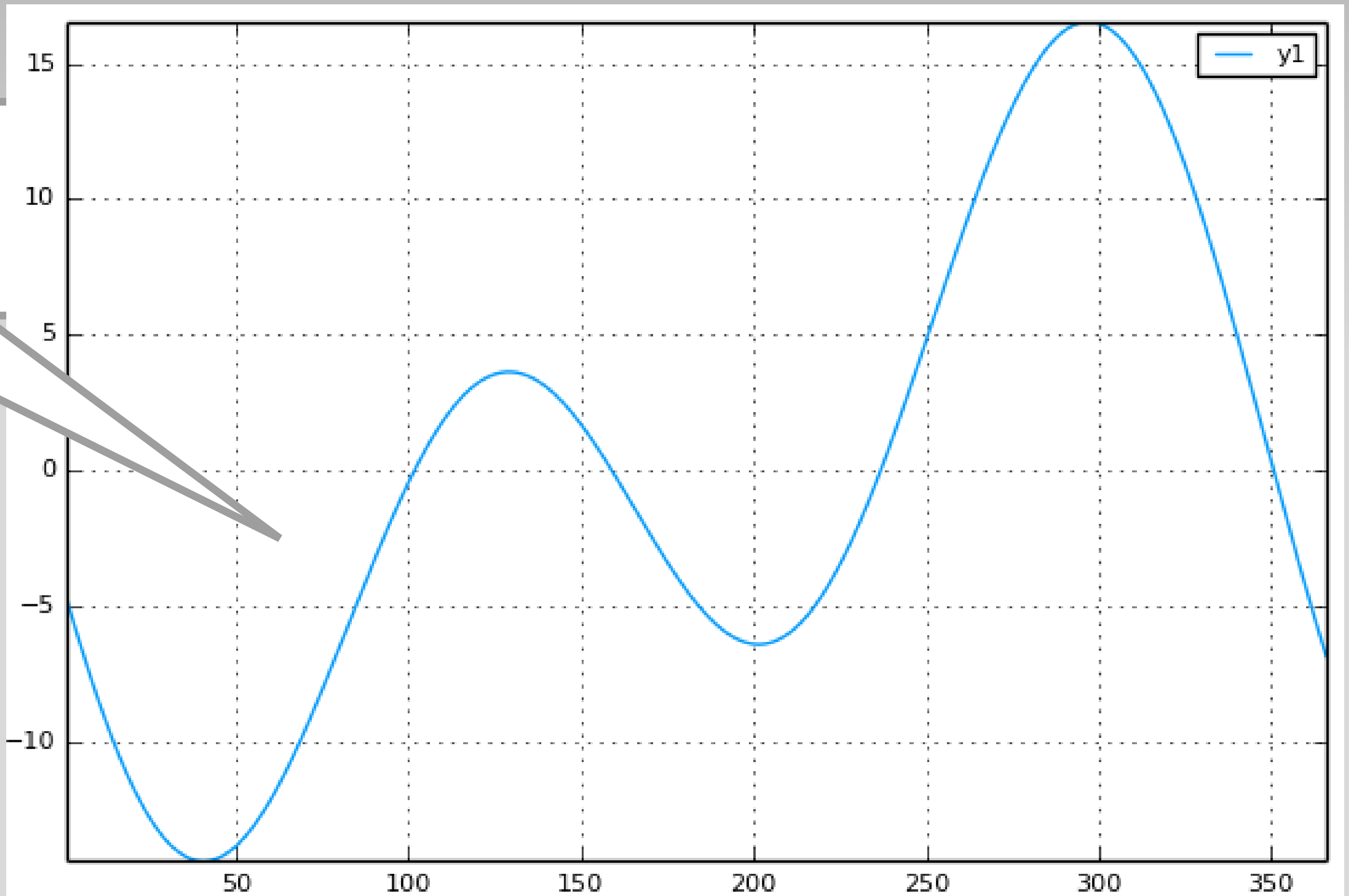
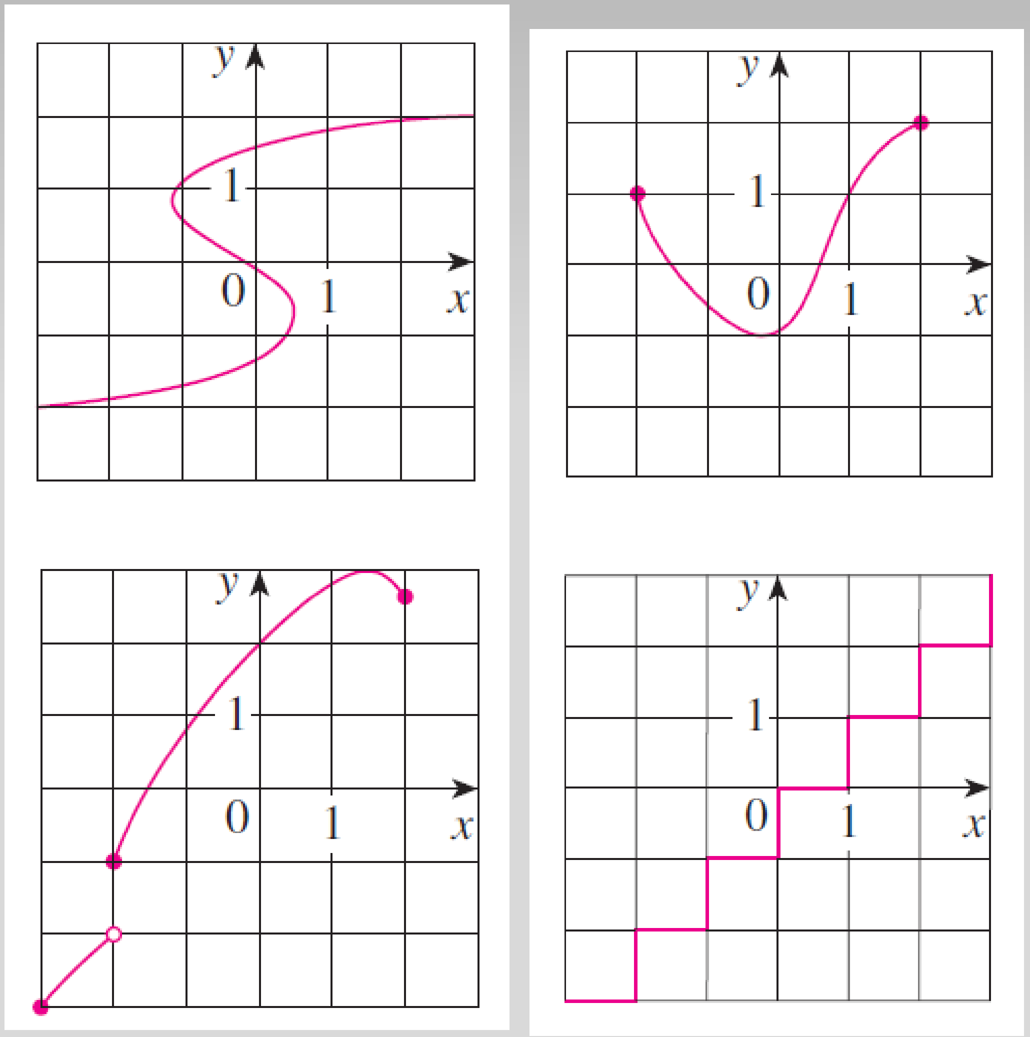


Gráfico de uma função

Ex01: Determine se a curva é o gráfico de uma função $f\colon \mathrm{Dom}\, f \rightarrow [-3{,}3]$. Se o for, determine o domínio, a imagem e julgue se é injetora, sobrejetora ou bijetora.



> Teste da reta Vertical. Uma curva no plano Oxy é o gráfico de uma função de x se, e somente se, nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.

Funções definidas por partes

São funções definidas por expressões distintas em diferentes partes de seu domínio.

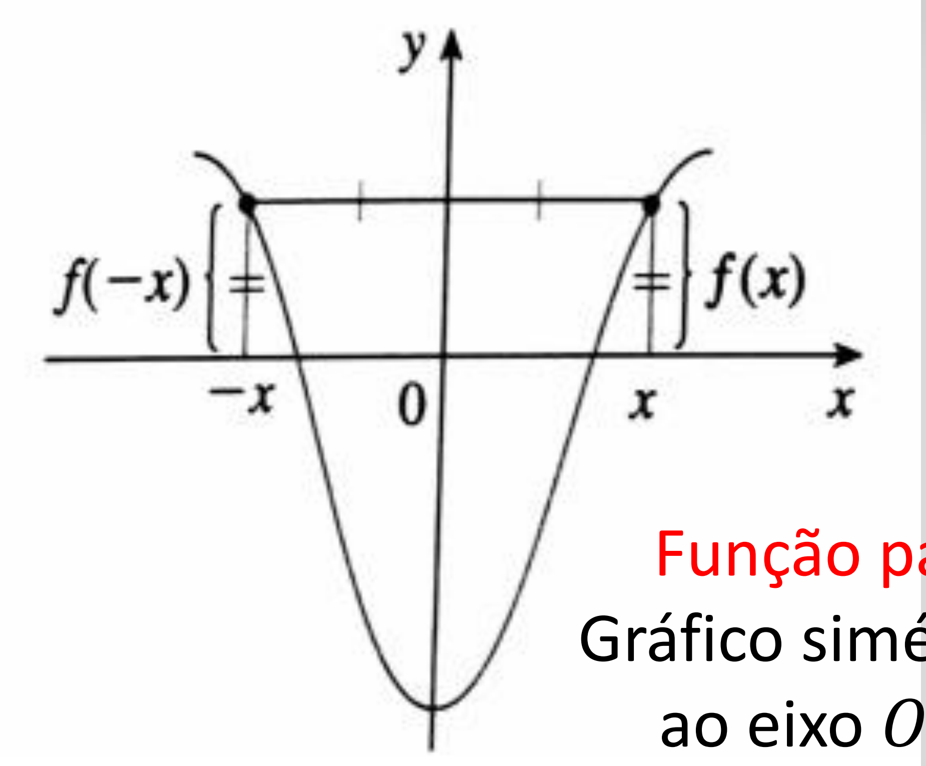
Ex02: Esboce o gráfico das funções a seguir. Determine os conjuntos domínio e imagem de cada uma delas.

$$f_1(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} -2, \text{se } x \leq -2 \\ x+1, \text{se } -2 < x \leq 0 \\ x^2, \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Funções simétricas

☑ Se uma função f satisfaz $f(-x) = f(x)$ para todo número x em seu domínio, então f é chamada função par.

Qual o significado geométrico?

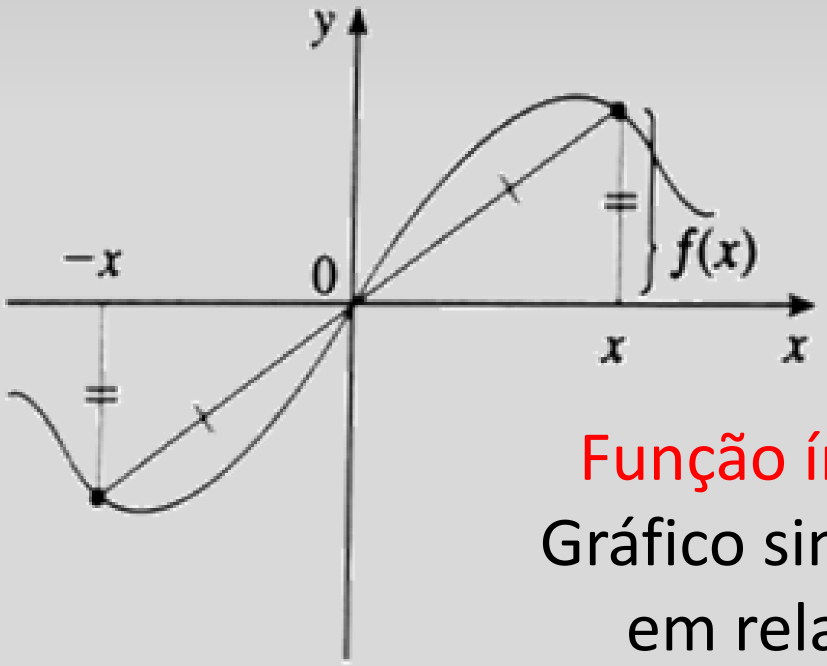


Função par:
Gráfico simétrico ao eixo Oy.

Funções simétricas

☑ Se uma função f satisfaz $f(-x) = -f(x)$ para todo número x em seu domínio, então f é chamada função ímpar.

Qual o significado geométrico?

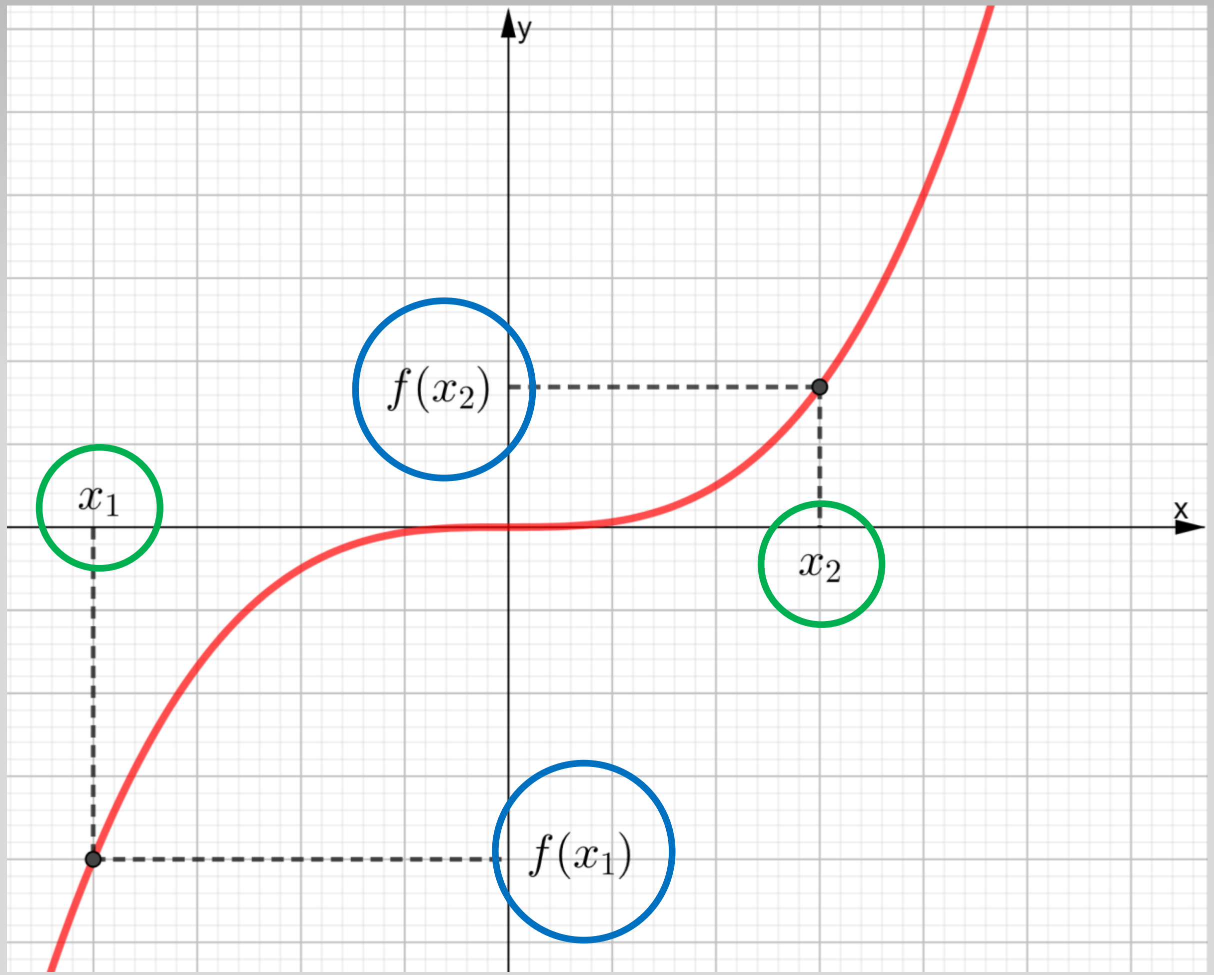


Função ímpar:
Gráfico simétrico em relação à origem.

Crescimento e Decrescimento

☑ Uma função f é chamada crescente em um intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$ em I.

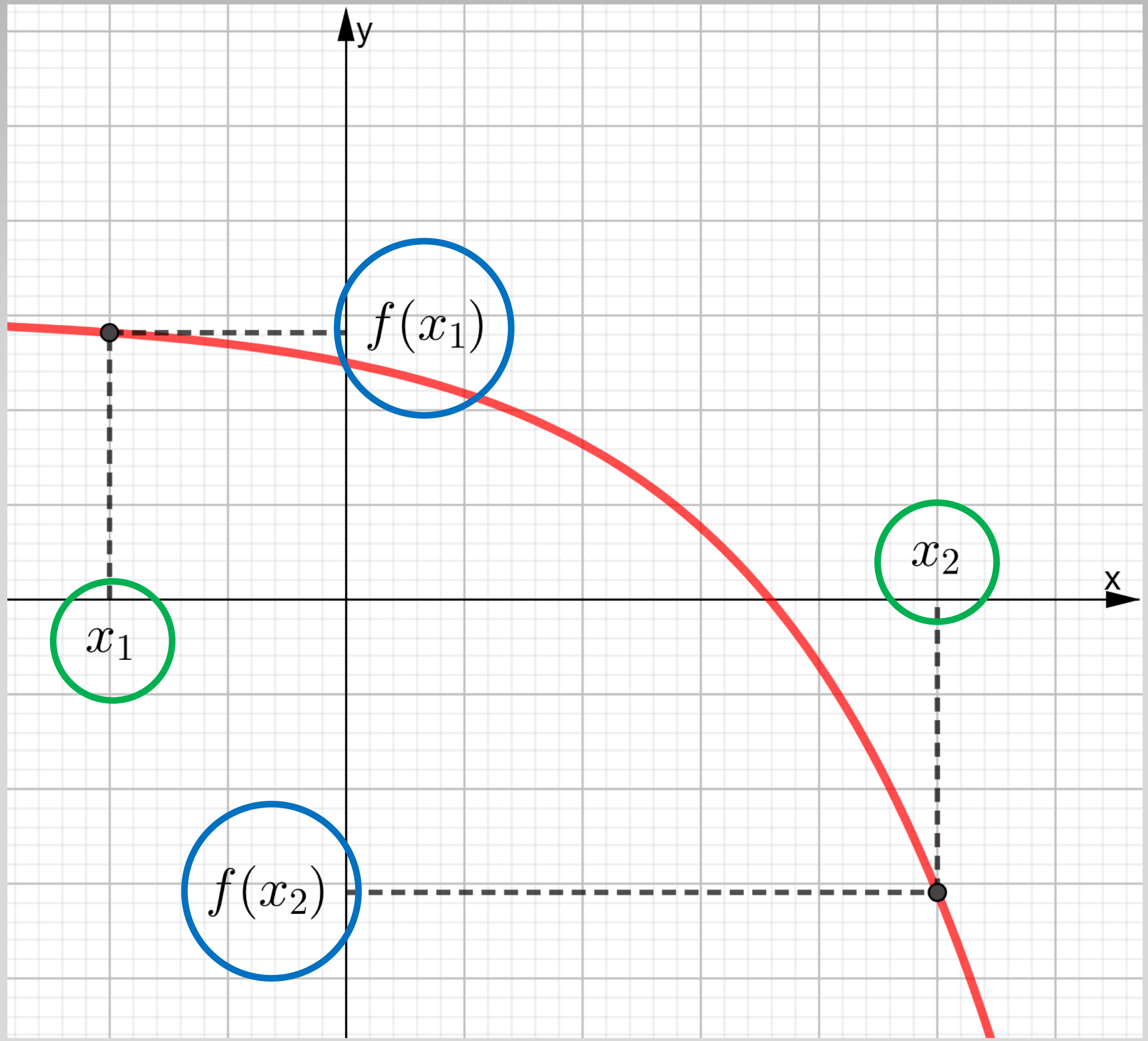
$$\boxed{x_1 < x_2} \Leftrightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$



Crescimento e Decrescimento

☑ Uma função f é chamada decrescente em um intervalo I se $f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$ em I.

$$\boxed{x_1 < x_2} \Leftrightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$$



Exercícios

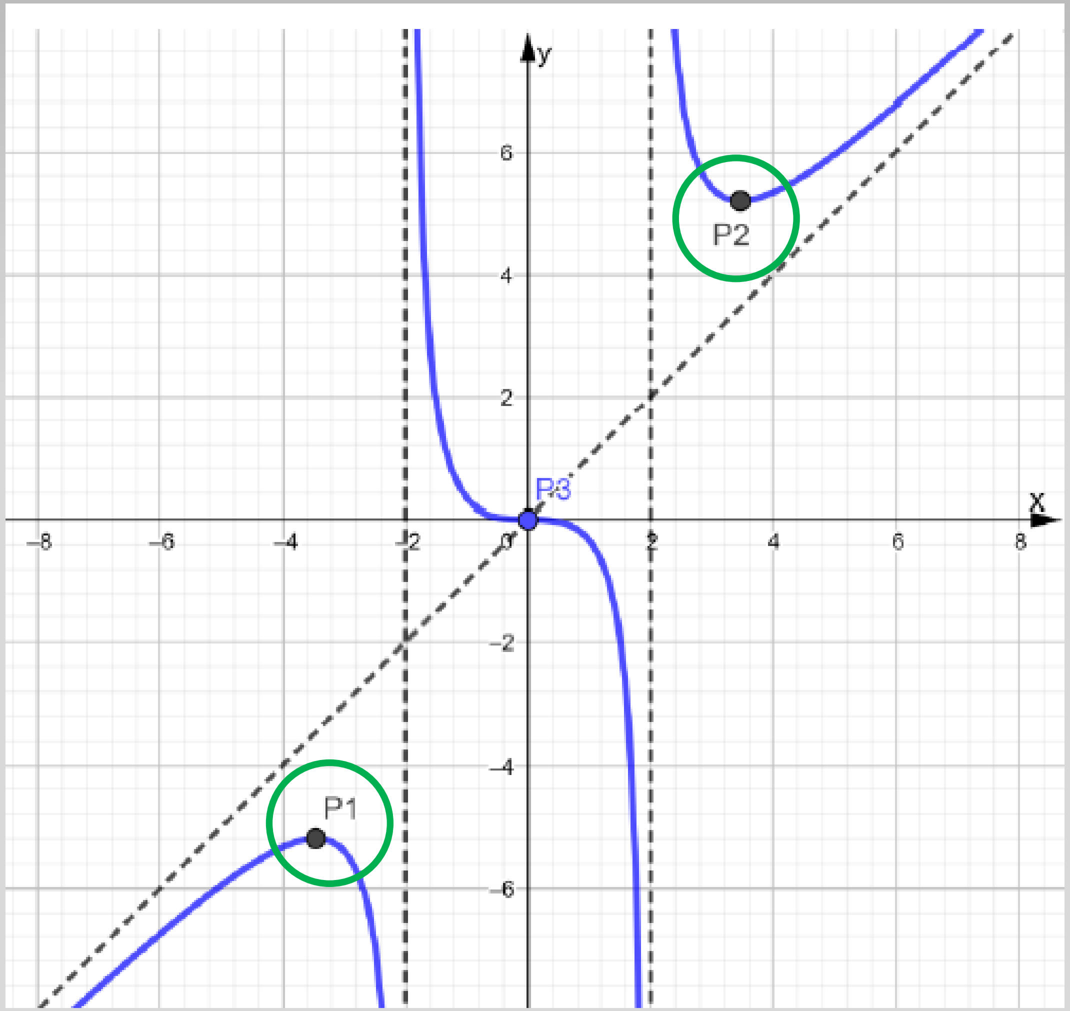
Ex03: Considere o gráfico de uma função f. Determine:

(a) Simetria.

(b) Domínio e Imagem.

(c) Intervalos de crescimento e decrescimento.

$$P_1 = \left(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}\right) \text{ e } P_2 = \left(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$$



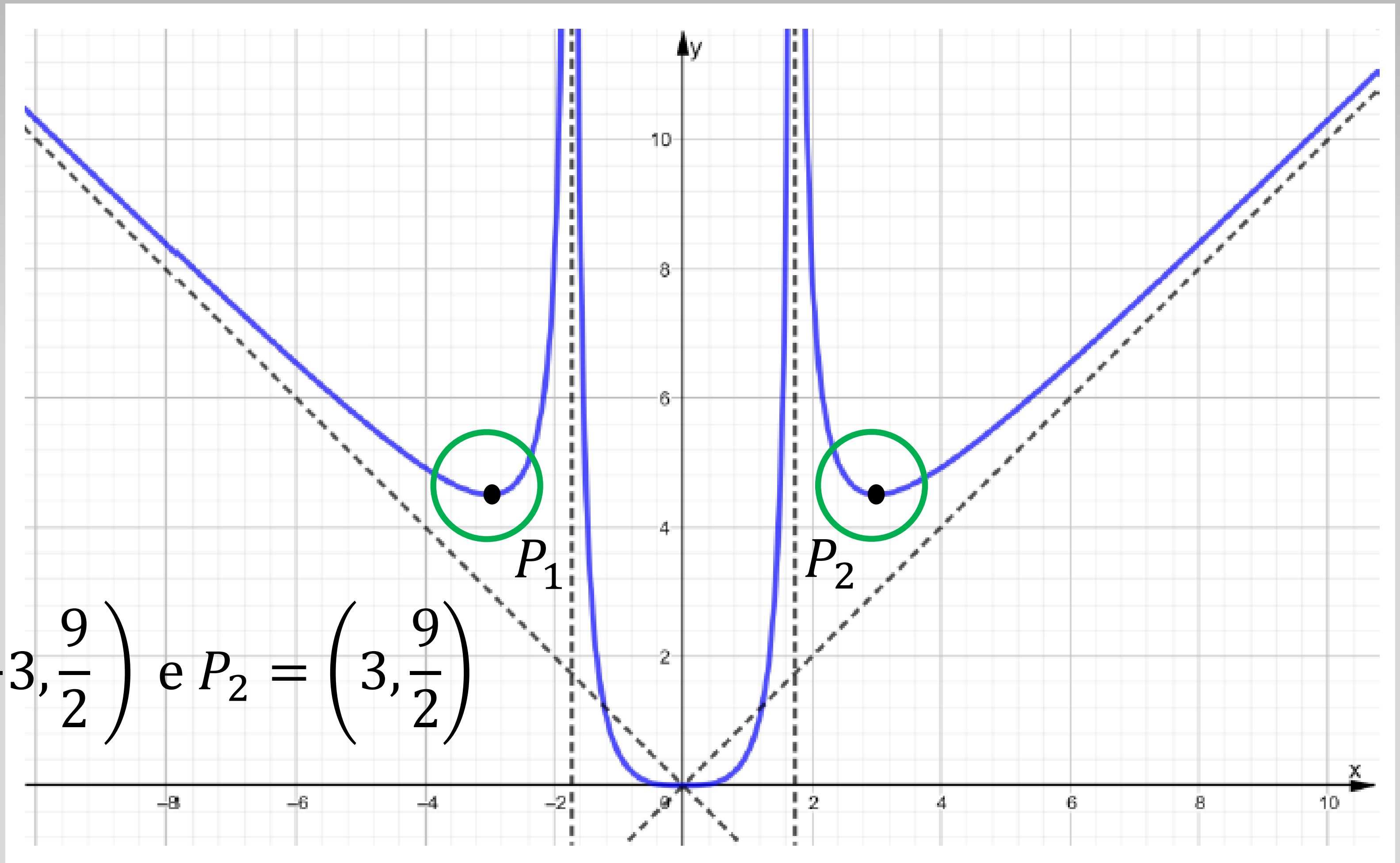
Exercícios

Ex04: Considere o gráfico de uma função f. Determine:

(a) Simetria.

(b) Domínio e Imagem.

(c) Intervalos de crescimento e decrescimento.



$$P_1 = \left(-3, \frac{9}{2}\right) \text{ e } P_2 = \left(3, \frac{9}{2}\right)$$

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!