FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 21: Introdução a Integração Numérica

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

2024

Objetivos

- Introduzir o conceito de integração numérica;
- Formas de representação;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

Integrais Indefinidas

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) estabelece conexões entre as primitivas e as integrais definidas.

Precisamos de uma notação conveniente para as primitivas...

$\int f(x)dx = F(x)$ significa $F'(x) = f(x)$

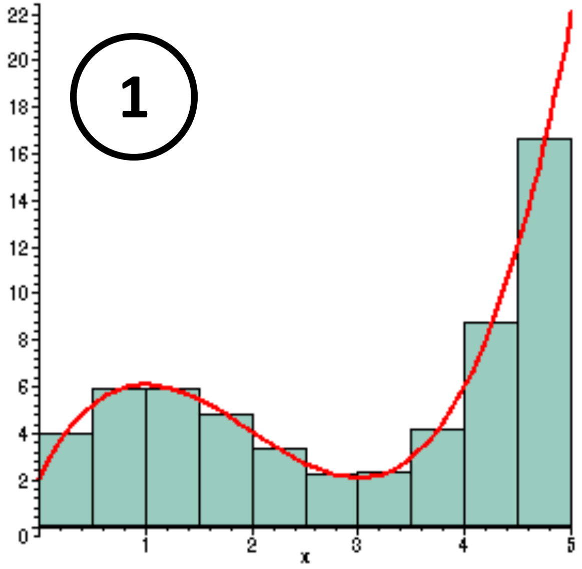
Integral Indefinida

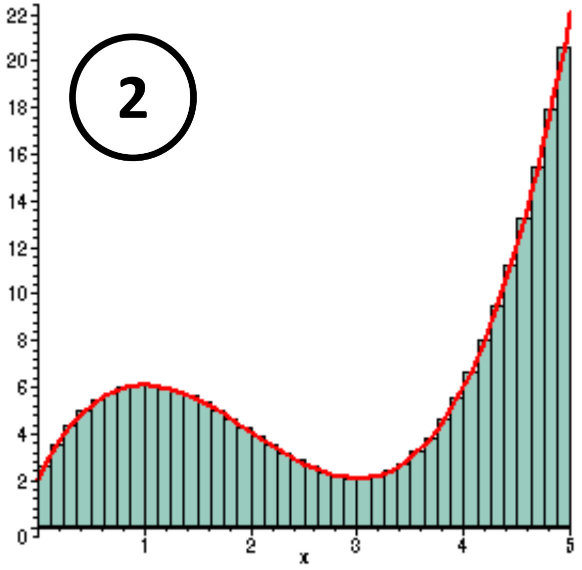
Exemplo: Podemos escrever $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ pois $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$

O problema da Área

Parte do problema da área é tornar precisa a noção intuitiva, dando uma definição exata de área.

Procedimento analítico: Aproximar a região utilizando retângulos (1) e depois tomar o limite da soma das áreas desses retângulos à medida que o número de retângulos aumenta (2).





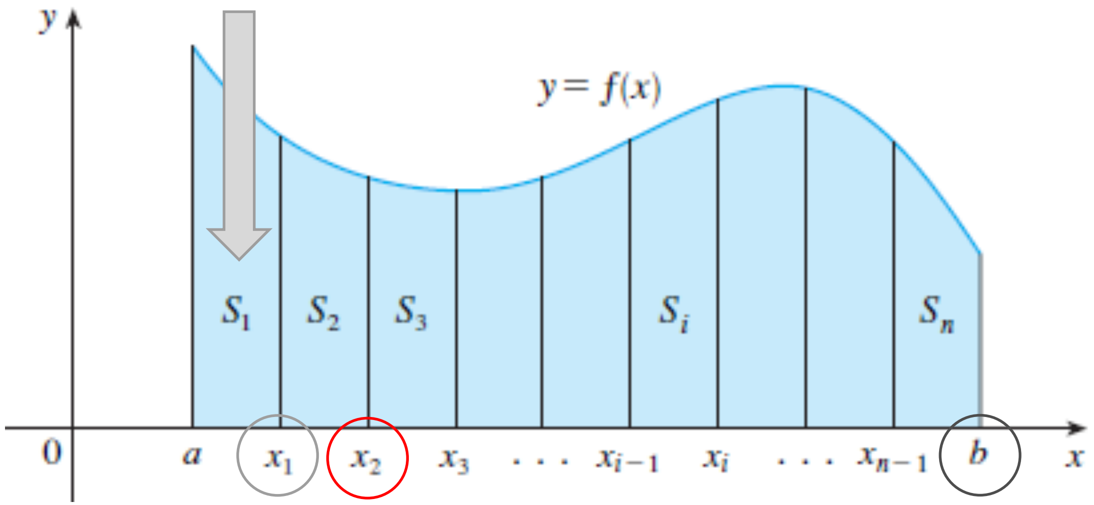
O problema da Área

Generalizando o procedimento...

Divide-se a área S em n faixas $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ de igual largura.

$x \in [a, b]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$



O intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

$x_0 = a \; ; \; x_n = b$

Extremidades direitas:

$x_1 = a + \Delta x$

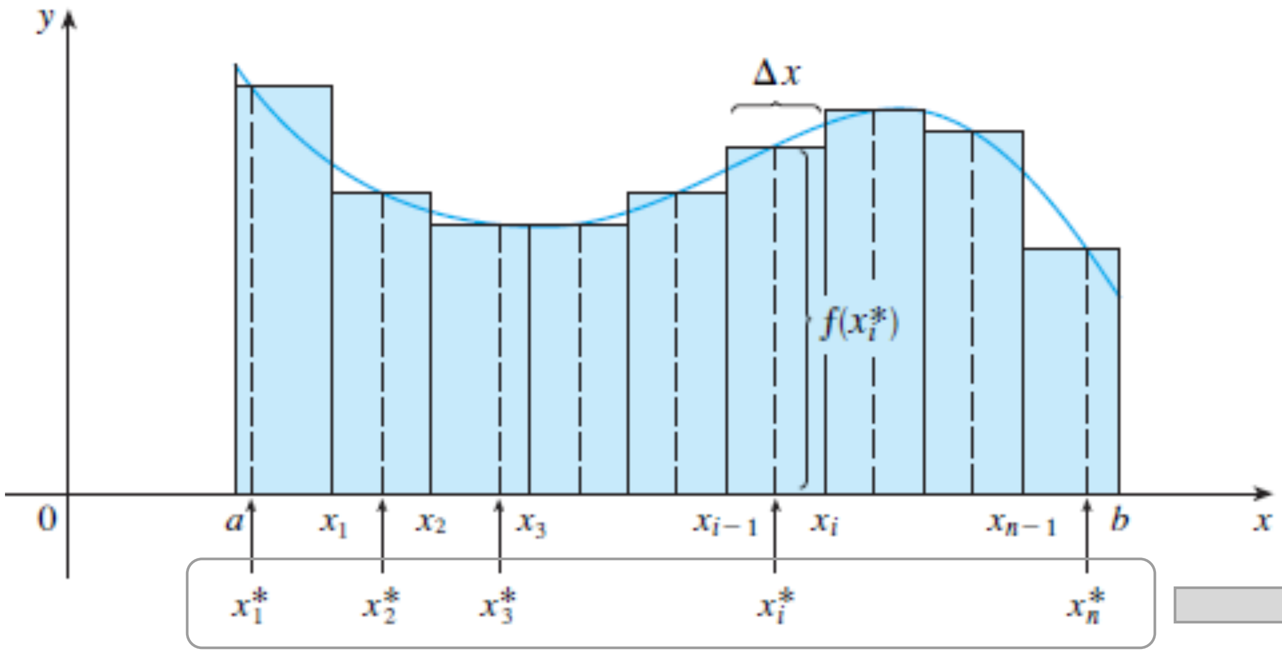
$x_2 = a + 2\Delta x$

$\vdots$

$x_n = a + n\Delta x = b$

O problema da Área

De fato, ao invés de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do *i*-ésimo retângulo como o valor de f em qualquer número x_i^* no *i*-ésimo subintervalo.



$$A = \lim_{n\to\infty} AD_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Pontos amostrais

FIAP

A Integral Definida

Concluímos que... Um limite da forma

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

aparece quando calculamos áreas, distâncias e trabalho. Este limite ocorre em uma grande variedade de situações, mesmo quando f não é, necessariamente, uma função positiva.

A Integral Definida

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0 (= a)$, x_1, x_2, ... , $x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos e sejam x_1^*, x_2^*, ... , x_n^* pontos arbitrários nesses intervalos, de forma que x_i^* esteja no *i-ésimo* subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Então, a Integral Definida de f calculada de a a b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Desde que o limite exista e resulte o mesmo para qualquer escolha de pontos amostrais. Se o limite existir, diremos que f é integrável em $[a, b]$.

FIAP

A Integral Definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Integral de Riemann

Soma de Riemann

Bernhard Riemann

Sinal de integração, introduzido por Leibniz (é um S alongado, pois a integral é um limite de somas)

Limites de integração: a é o limite inferior e b é o limite superior

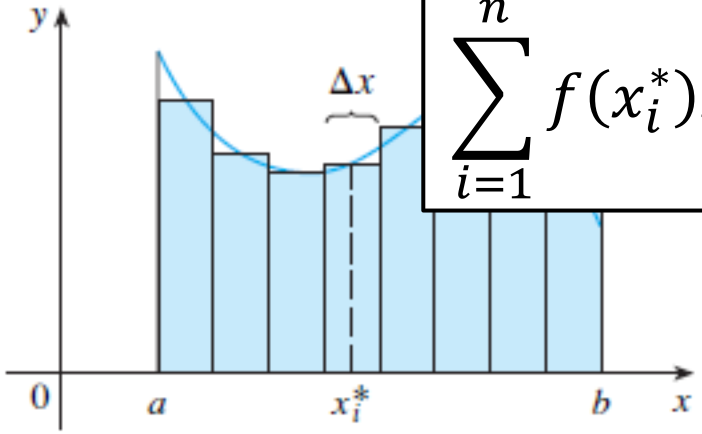
Integrando

Por enquanto, dx não tem significado por si só; apenas designa que a variável independente é x.

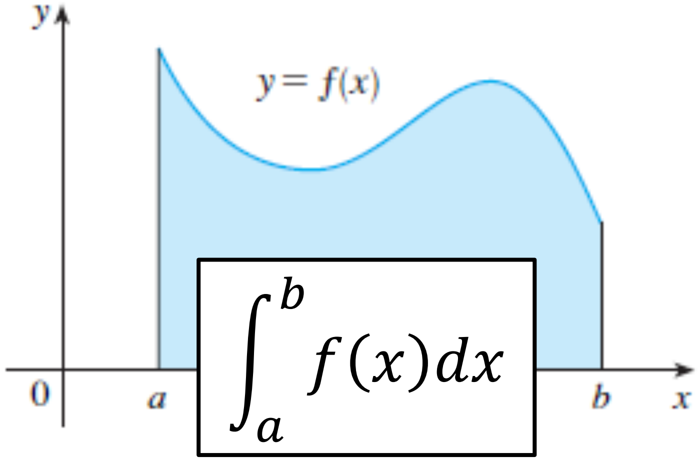
A Soma de Riemann

- A integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.

- Se f for positiva em $[a, b]$, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes e a integral definida pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ com $x \in [a, b]$.



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$



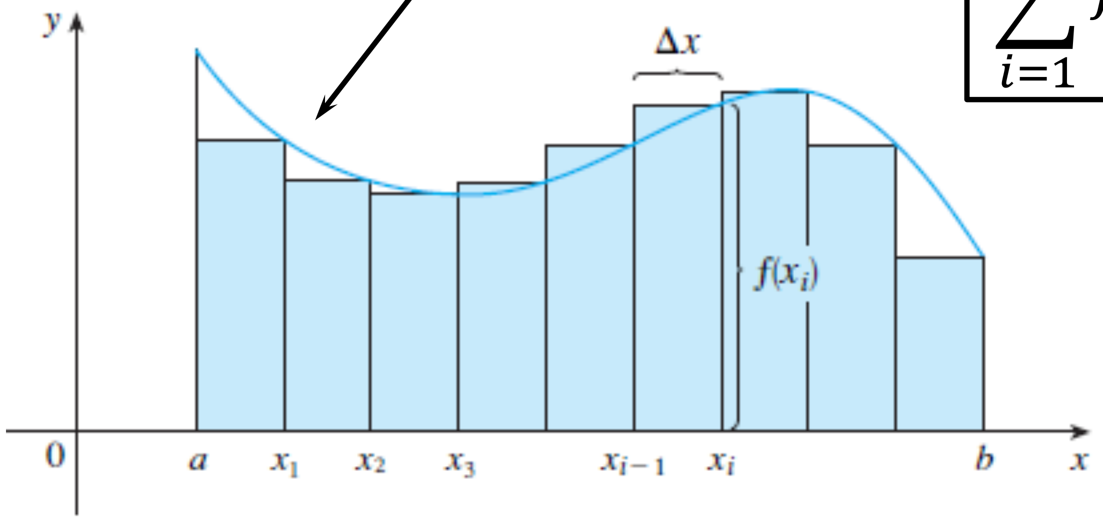
$$\int_a^b f(x)dx$$

A Soma de Riemann

A soma de Riemann pode ser calculada por um método iterativo. Podemos estabelecer a quantidade de iterações necessárias para se atingir uma ordem de erro estabelecida ou atribuir, arbitrariamente, a quantidade de iterações a serem realizadas. Vejamos:

Um método iterativo é um procedimento que gera uma sequência de soluções numéricas que, espera-se, vão convergindo para a solução exata de um problema, conforme as iterações são executadas.

n retângulos



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\Delta x = h = \frac{b - a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = a + ih$$

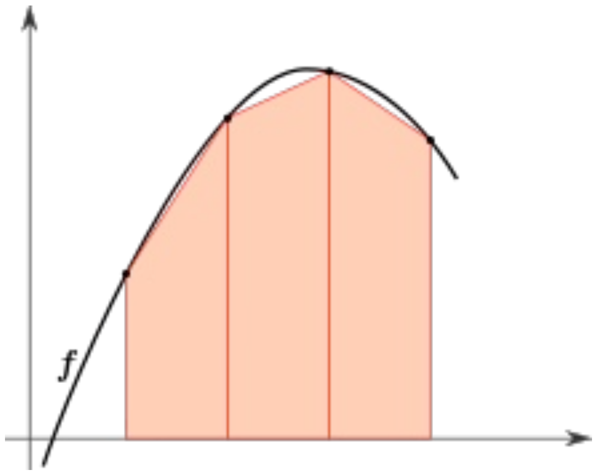
A Soma de Riemann

Exemplo 1: Use o MS Excel e a soma de Riemann para estimar a área A sob a curva $y = x^2$ com $x \in [0,1]$. Utilize:

(i) $n = 5$ retângulos
(ii) $n = 10$ retângulos
(iii) $n = 100$ retângulos

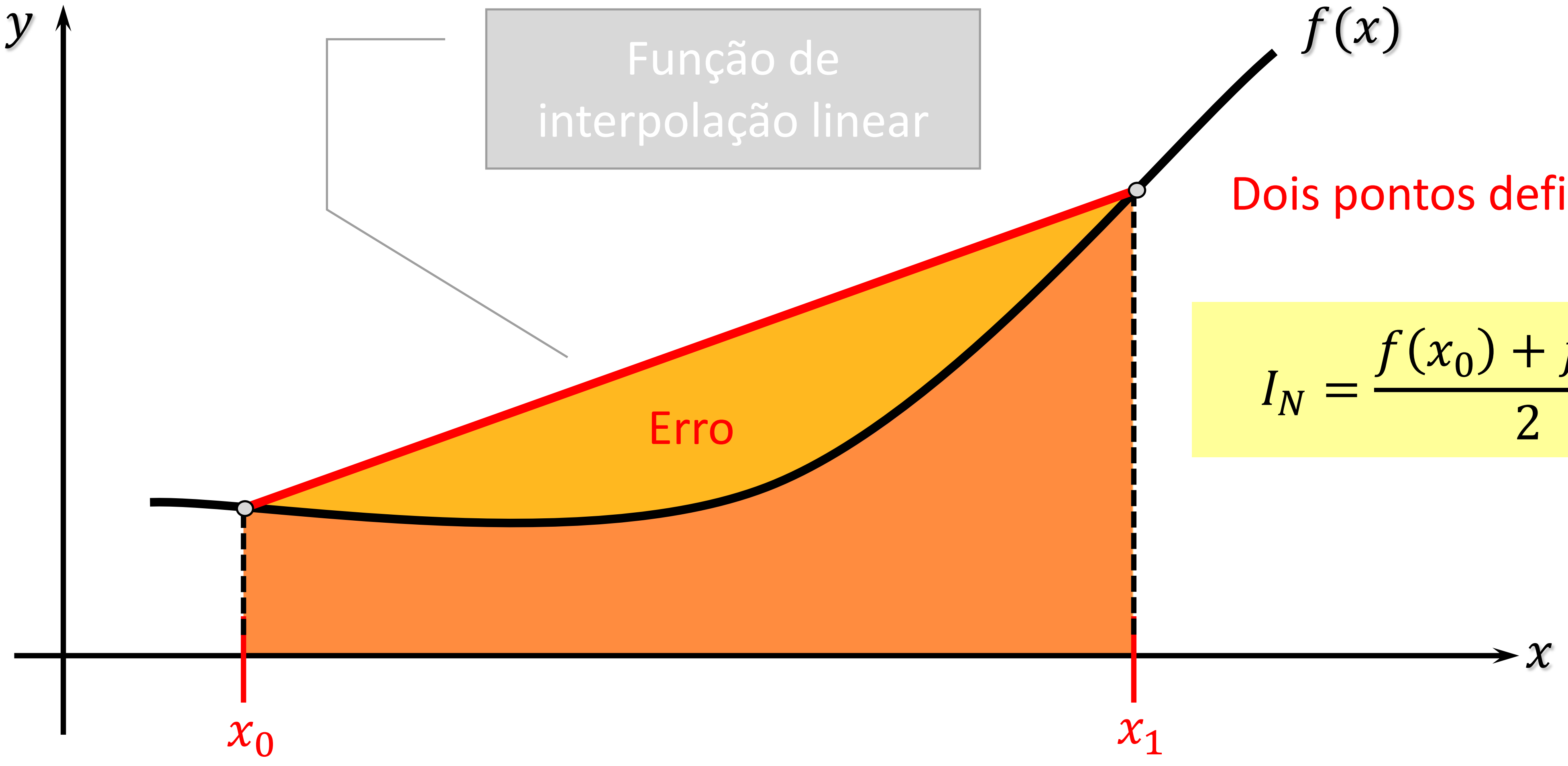
Sendo a área exata $A = 1/3$, avalie o erro percentual cometido nos itens (i), (ii) e (iii).

Método dos Trapézios



- Método simples para integrar numericamente uma função $f(x)$.
- Não requer conhecimento da forma analítica da primitiva $F(x)$ da função $f(x)$.
- A função $f(x)$ deve estar expressa na forma discreta.
- Se $f(x)$ estiver na forma analítica, deve-se antes discretizá-la utilizando-se subintervalos de largura h, ou seja, deve-se subdividir o intervalo de integração em n partes iguais.

Método dos Trapézios

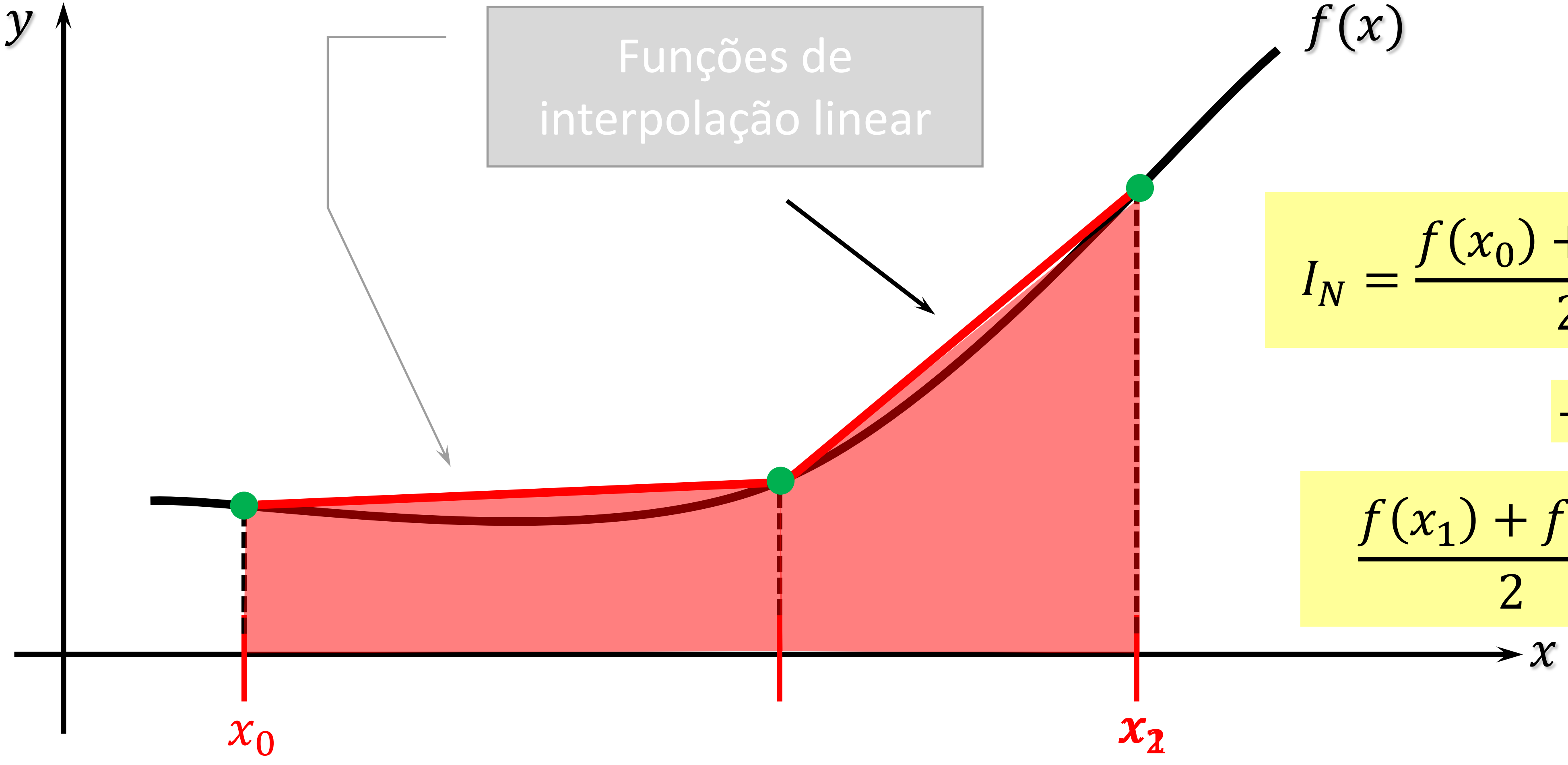


Dois pontos definem uma reta!

$$I_N = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0)$$

FIAP

Método dos Trapézios



$$I_N = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0)$$

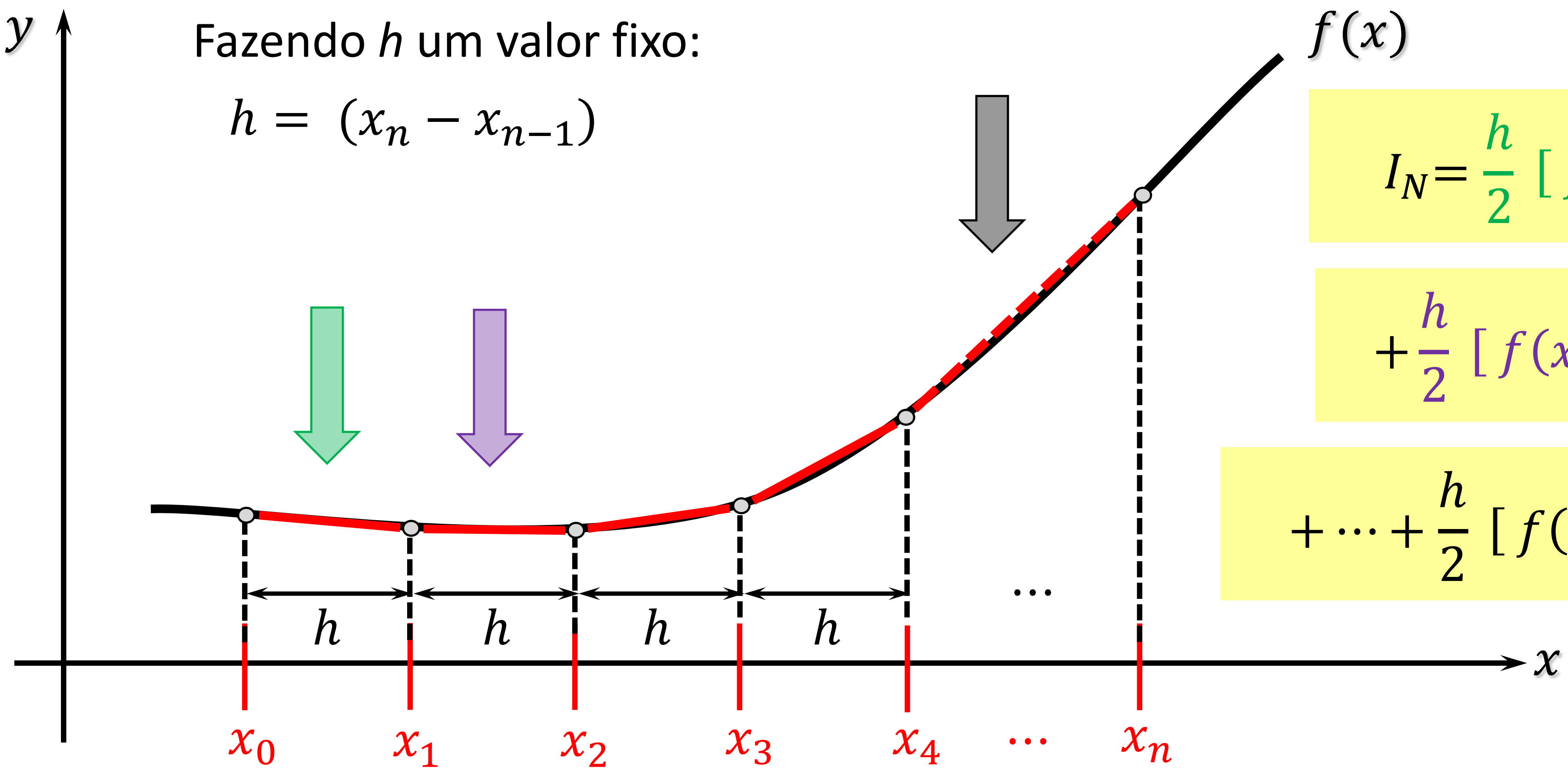
$$+$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1)$$

Método dos Trapézios

Fazendo *h* um valor fixo:

$$h = (x_n - x_{n-1})$$

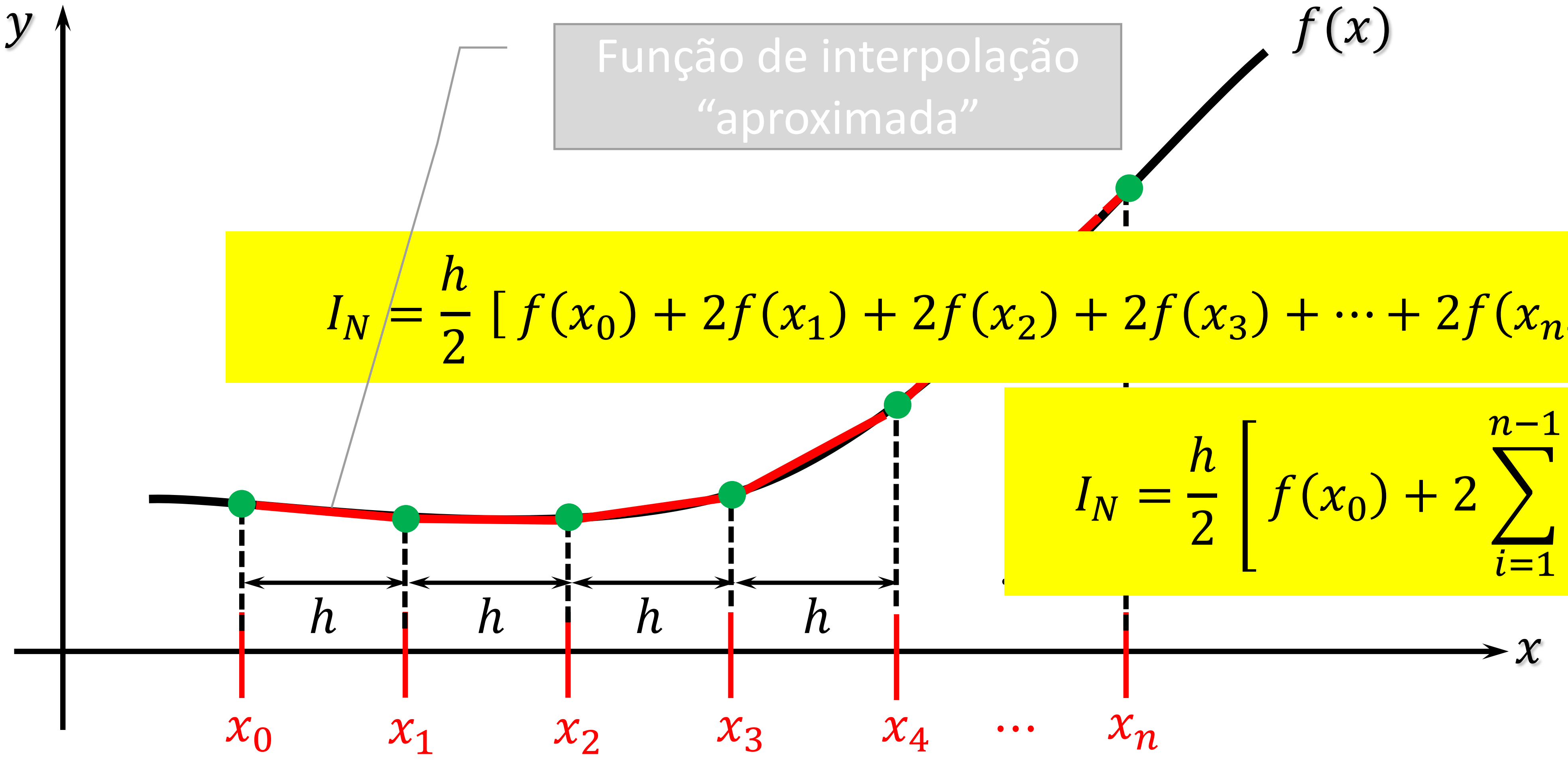


$$I_N = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] +$$

$$+\frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] +$$

$$+\cdots+\frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Método dos Trapézios



$$I_N = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

$$I_N = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Método dos Trapézios

Exemplo 2: Use o MS Excel e o Método dos Trapézios para estimar a área A sob a curva $y = x^2$ com $x \in [0,1]$. Utilize:

(i) $n = 5$ subintervalos
(ii) $n = 10$ subintervalos
(iii) $n = 100$ subintervalos

Sendo a área exata $A = 1/3$, avalie o erro percentual cometido nos itens (i), (ii) e (iii).

Exercício

Ex01: Calcule, numericamente, $\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x}\,dx$ empregando a Soma de Riemann e o Método dos Trapézios. Utilize em ambas formas:

(i) $n = 10$ retângulos / subintervalos
(ii) $n = 100$ retângulos / subintervalos

Compare os resultados obtidos pelos métodos numéricos com o resultado obtido pelo *Symbolab* e/ou *GeoGebra*.

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!