FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 24: Área entre Curvas

Prof. Jones Egydio

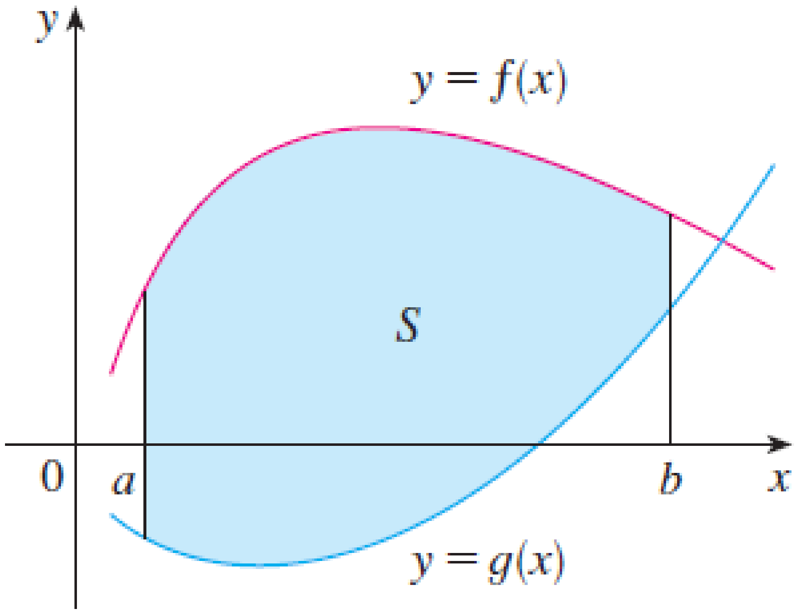
profjones.egydio@fiap.com.br

2024

Objetivos

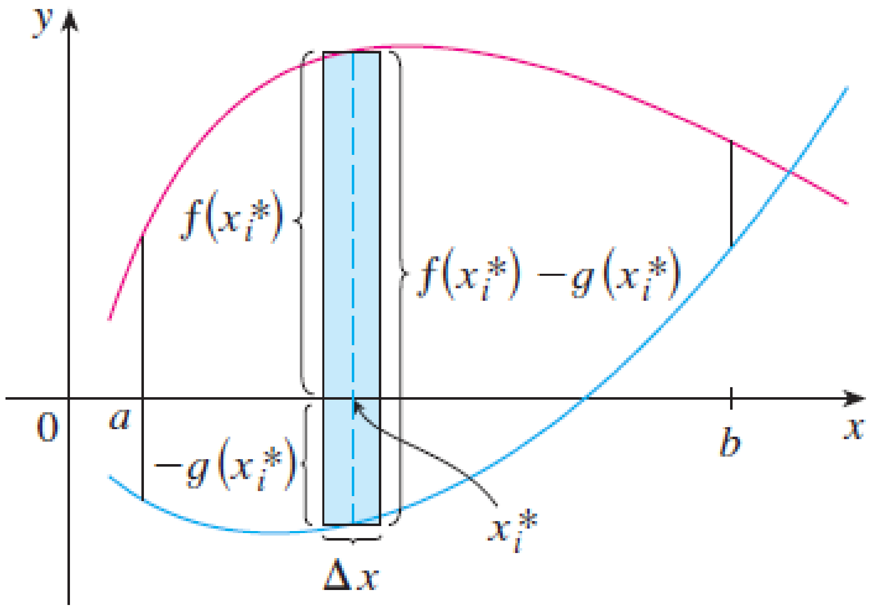
- Estudar uma aplicação de integração: área entre curvas;
- Envio do tema;
- Conclusão;
- Perguntas.

Área entre curvas



Considere a região S que se encontra entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, em que f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Área entre curvas



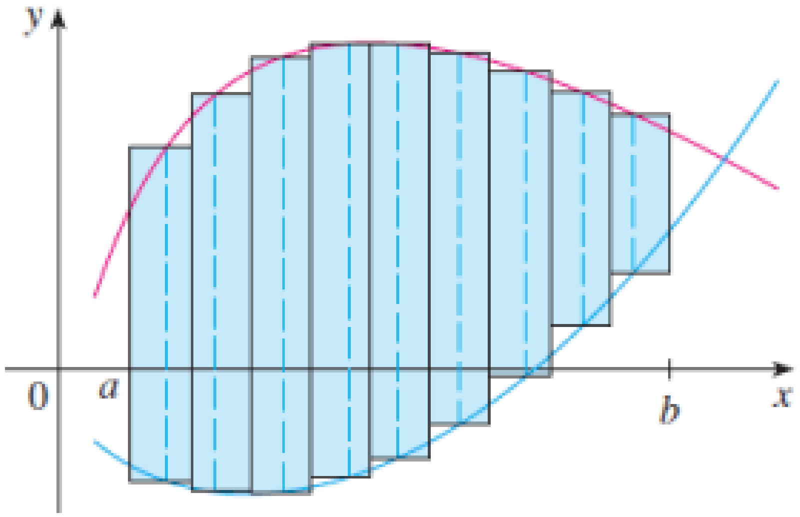
Retângulo típico

Estratégia: Dividir a região S em n faixas de larguras iguais e então aproximar a *i-ésima* faixa por um retângulo com base Δx e altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. Ou seja:

$$\boxed{(\text{Área da faixa } i) \cong [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x}$$

Área entre curvas

Como antes, a Soma de Riemann aproxima a área da região S:



Retângulos aproximantes

$$\text{Área} \cong \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

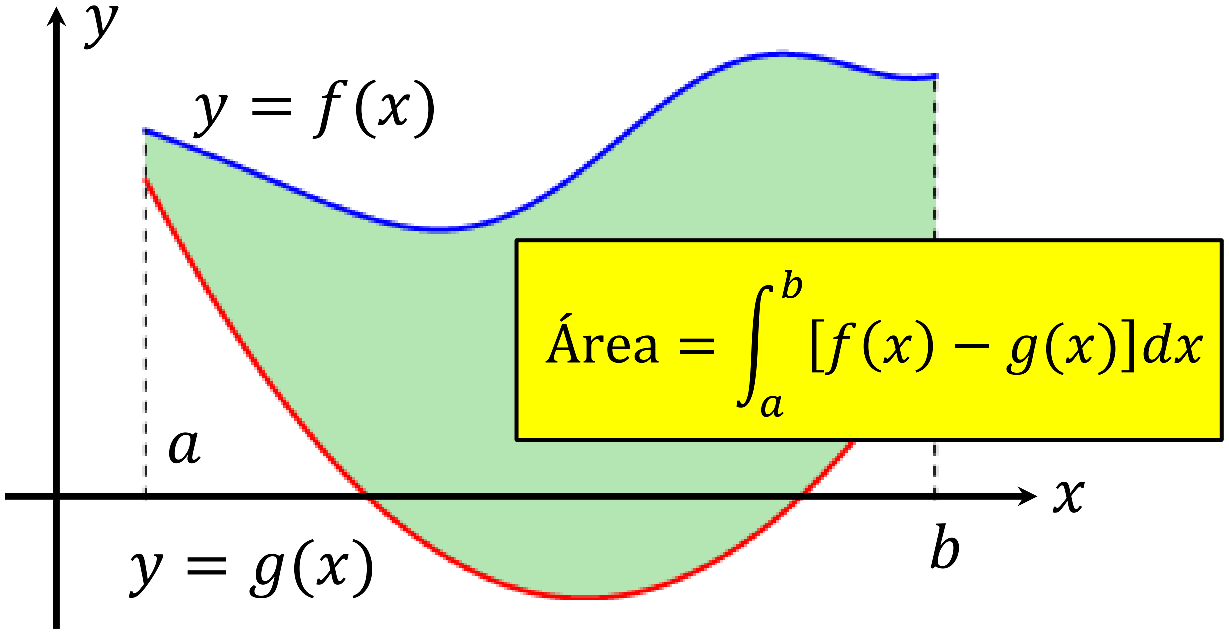
A aproximação torna-se exata quando $n \to \infty$, e então:

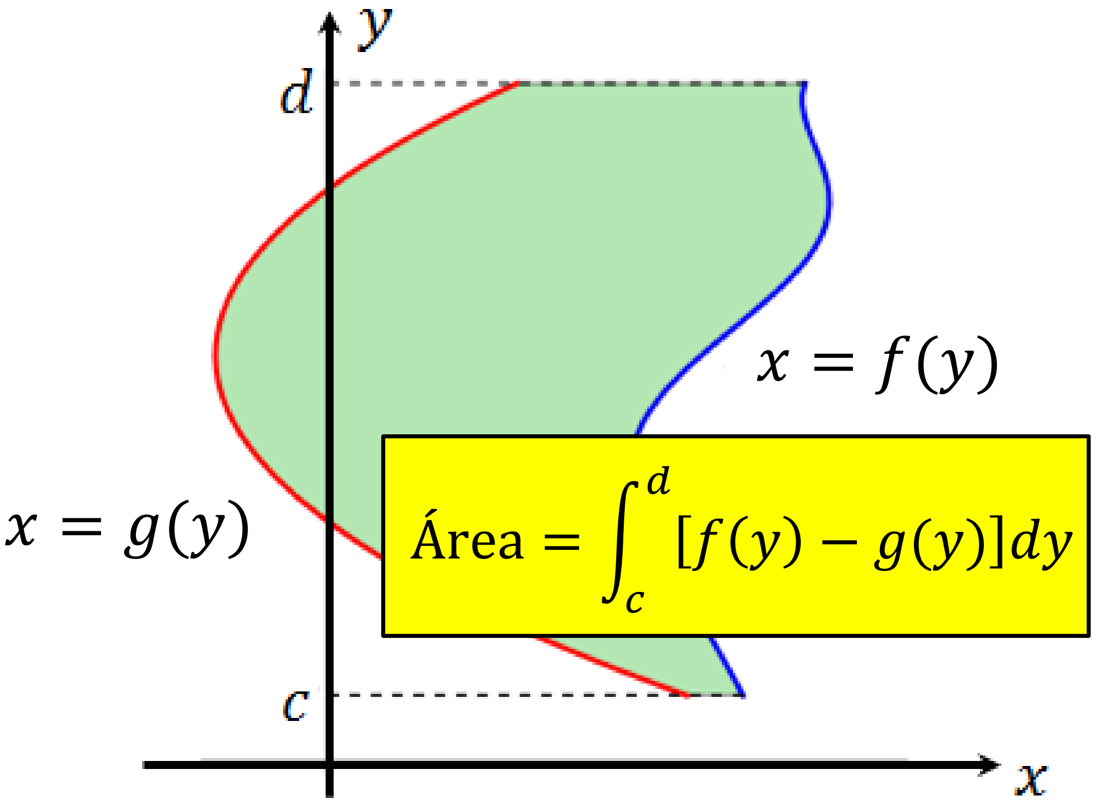
$$\boxed{\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

FIAP

Área entre curvas

É possível estender o resultado anterior para curvas explicitadas por funções de y!

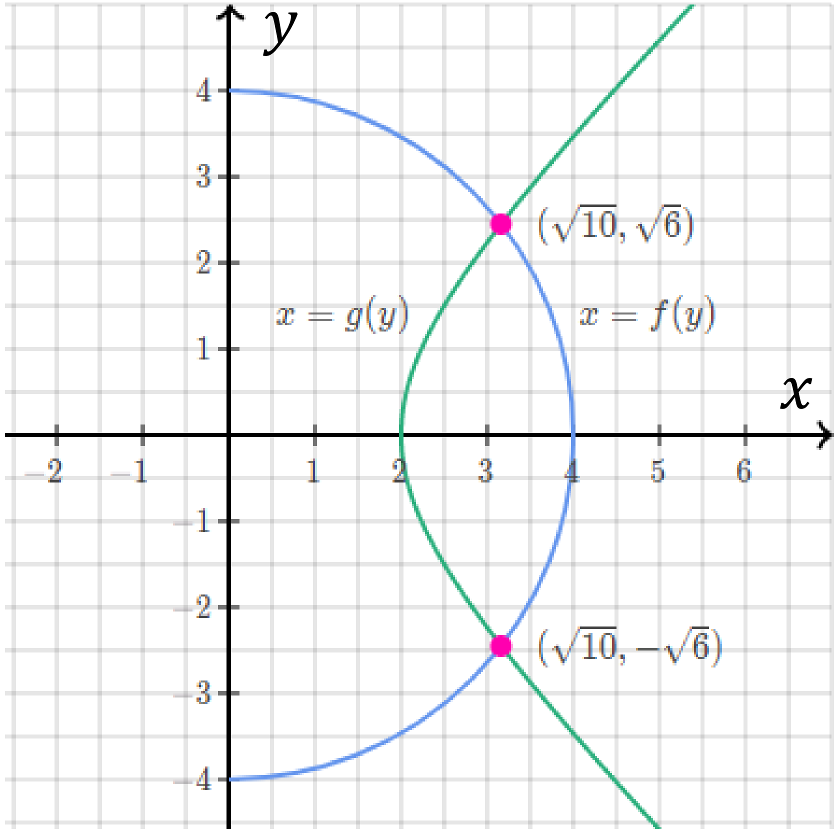




Exercícios

Ex01: Seja S a região delimitada pelas curvas $f(y) = \sqrt{16 - y^2}$ e $g(y) = \sqrt{4 + y^2}$. Qual integral representa a área de S?

- $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{16 - y^2} - \sqrt{4 + y^2}\right) dy$
- $\int_{\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \left(\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{16 - x^2}\right) dx$
- $2\int_{2}^{4} \left(\sqrt{16 - x^2} - \sqrt{x^2 - 4}\right) dx$
- $2\int_{0}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{4 + y^2} - \sqrt{16 - y^2}\right) dy$



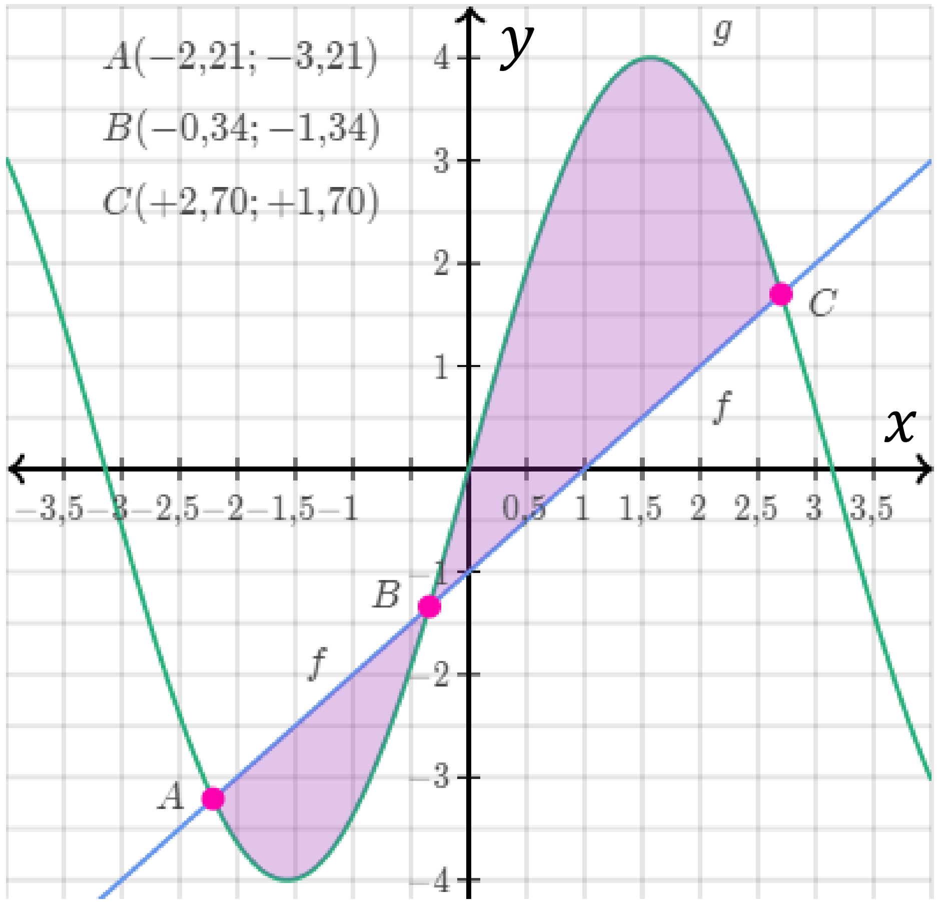
Exercícios

- $\displaystyle\int_{-2,21}^{-0,34} (4\operatorname{sen} x - x + 1)dx + \int_{-0,34}^{+2,70} (x - 1 - 4\operatorname{sen} x)dx$

- $\displaystyle\int_{-2,21}^{+2,70} (4\operatorname{sen} x - x + 1)dx$

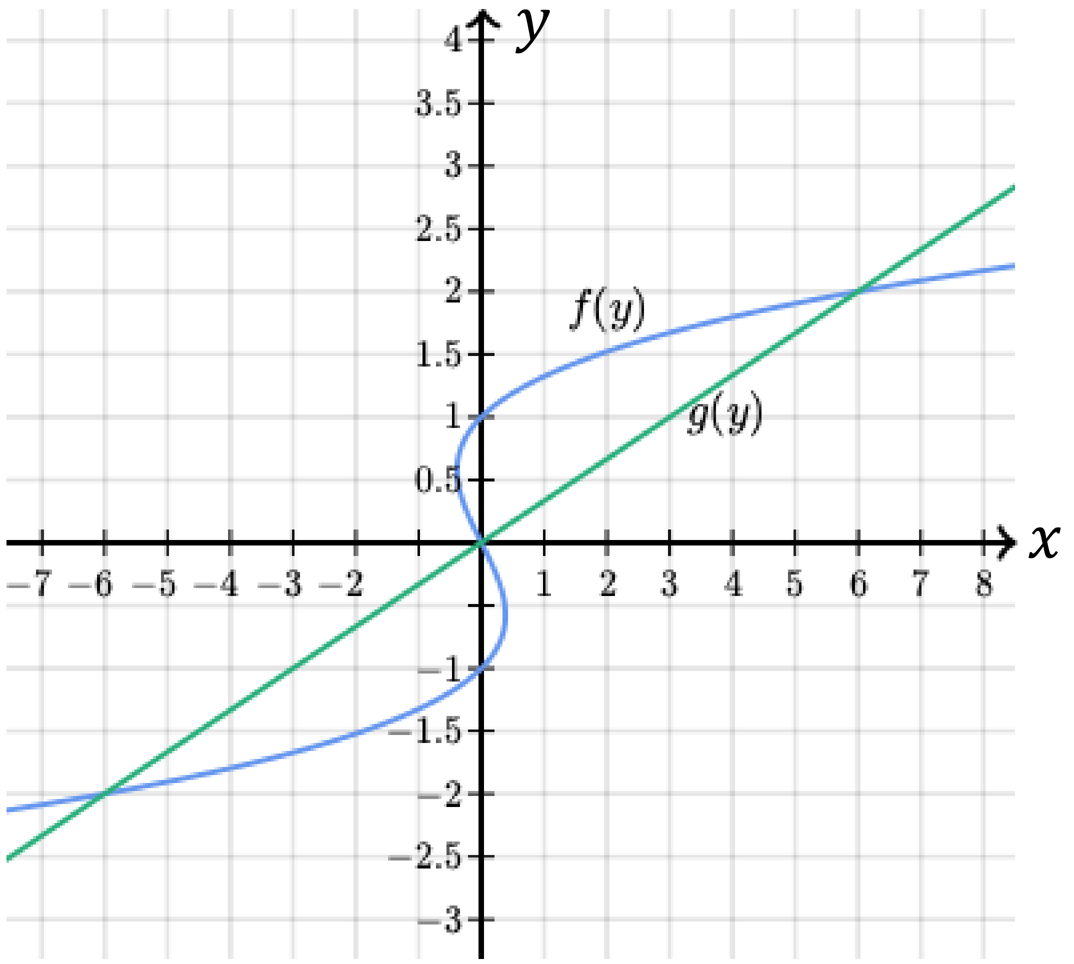
- $\displaystyle\int_{-2,21}^{+2,70} (x - 1 - 4\operatorname{sen} x)dx$

- $\displaystyle\int_{-2,21}^{-0,34} (x - 1 - 4\operatorname{sen} x)dx + \int_{-0,34}^{+2,70} (4\operatorname{sen} x - x + 1)dx$



Exercícios

Ex03: A região delimitada por $f(y) = y^3 - y$ e $g(y) = 3y$ consiste em duas partes. Determine a área da região.



Exercícios

Ex04: Esboce e determine a área da região delimitada pelas curvas:

(a) $y = 2x^2 + 10$ e $y = 4x + 16$
(b) $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$
(c) $x = \frac{y^2}{2} - 3$ e $y = x - 1$

FIAP

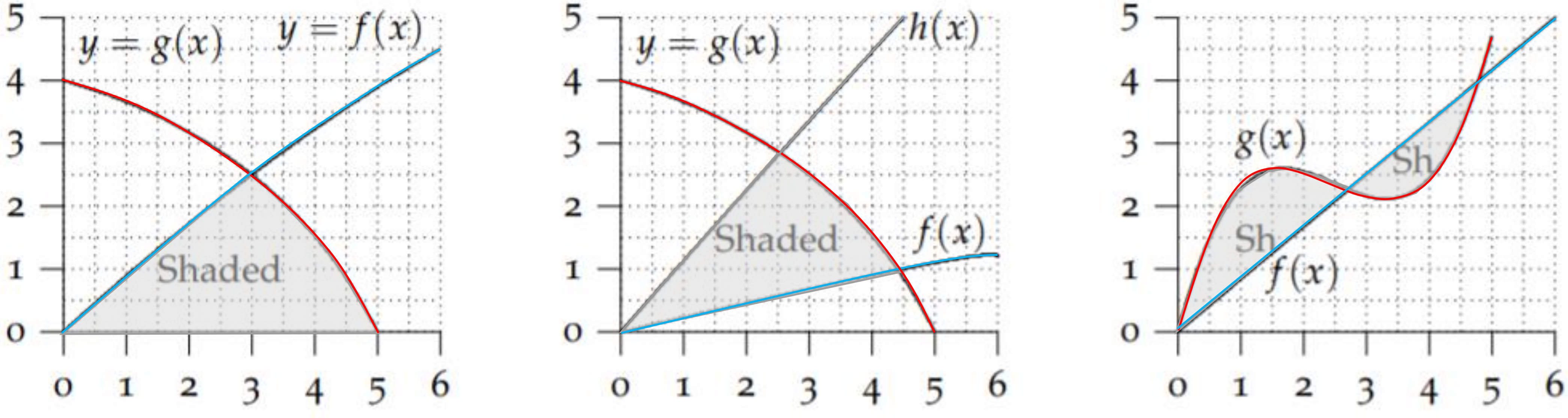
Exercícios

Ex05: Represente a região do 1º quadrante que fica entre as parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e abaixo da reta $y = 2x$. Mostre que sua área vale 4.

Ex06: Represente a região do plano limitada acima pela curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ e abaixo pela parábola $y = \frac{x^2}{2}$. Calcule a área da região.

Exercícios

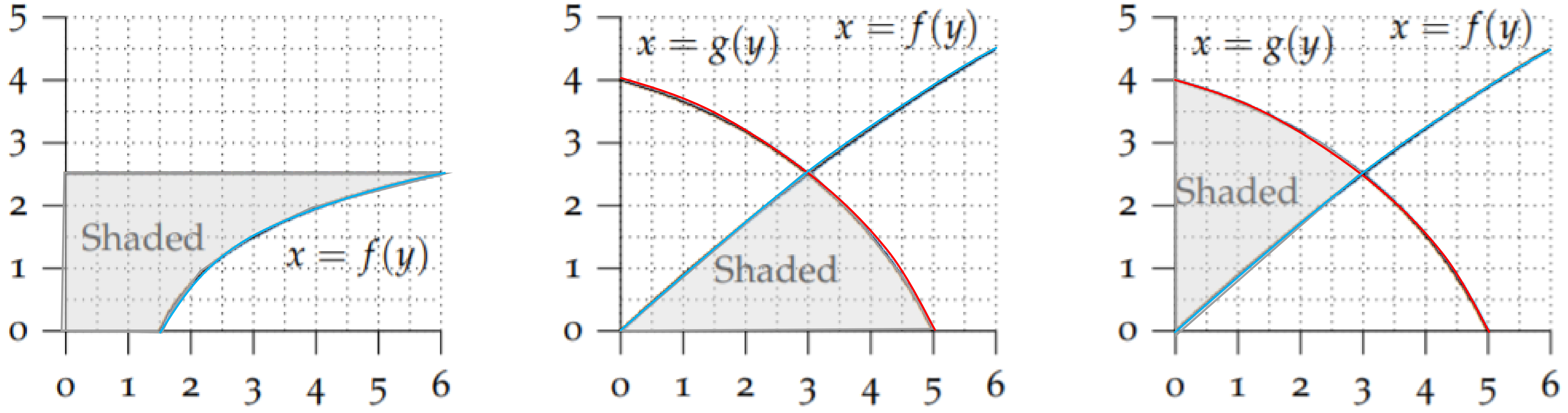
Ex07: Escreva as integrais que calculam as áreas sombreadas das três regiões a seguir, empregando as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ em conjunto com seus pontos de intersecção.



FIAP

Exercícios

Ex08: Escreva as integrais que calculam as áreas sombreadas das três regiões a seguir, empregando as funções $f(y)$ e $g(y)$ em conjunto com seus pontos de intersecção.



Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!