FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 5: Limites de funções

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

Dezembro/2023

Objetivos

- Explorar o conceito de limite;
- Formas de representação;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

Retas secantes

Problema: Dado gráfico da função $y = f(x)$, como encontrar a equação da reta secante que passa pelos pontos $P = (p, f(p))$ e $Q = (p + \Delta x, f(p + \Delta x))$?

Forma ponto-inclinação

Inclinação: $m_s = \frac{f(p+\Delta x)-f(p)}{\Delta x}$

Ponto: $P = (p, f(p))$

Taxa de variação média de $f(x)$ entre os pontos P e Q

$$y - f(p) = \frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta x}(x - p)$$

Taxa de variação média

A taxa de variação média de uma função $f(x)$ entre os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ é expressa por

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Funções lineares:
Taxa de variação média = constante = inclinação

Exemplo: Taxa de variação média de uma função linear $f(x) = mx + b$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + b - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Retas tangentes

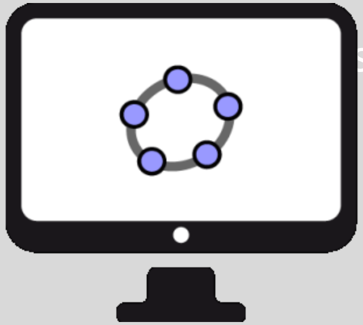
Definição: A reta tangente a uma curva S no ponto $P = (x, y)$ é uma reta que, nas vizinhanças de P, toca a curva S apenas em P.

A palavra tangente vem do latim *tanges*, que significa "tocando".

A determinação da reta tangente a uma curva é um problema local!

Aguarde o estudo da derivada de uma função!

VERIFIQUE!



Taxa de variação instantânea

Se Δx for diminuindo (tendendo à zero), no limite como será a reta obtida?

Nesta situação, a reta secante torna-se a reta tangente!

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta x}$$

A inclinação da reta tangente no ponto $P = (p, f(p))$ é a taxa de variação instantânea de f avaliada em P.

O problema da velocidade

Como calcular a velocidade instantânea de um objeto em MRUV com distância percorrida no instante t governada por $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$?

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \cdots = v_0 + at$$

E a aceleração instantânea?

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \cdots = a$$

O problema da velocidade

Ex01: Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura, em metros, após t segundo é dada pela equação horária $y(t) = 10t - 4{,}9t^2$.

(a) Determine a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1{,}5\ s$ e dura:

(a.1) $0{,}5\ s$

(a.2) $0{,}1\ s$

(a.3) $0{,}01\ s$

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1{,}5\ s$.

(c) Encontre uma equação que permita relacionar a velocidade instantânea da bola com o tempo.

O limite de uma função

Definição (informal): Suponha que $f(x)$ seja definida quando x está próximo ao número a. Escrevemos:

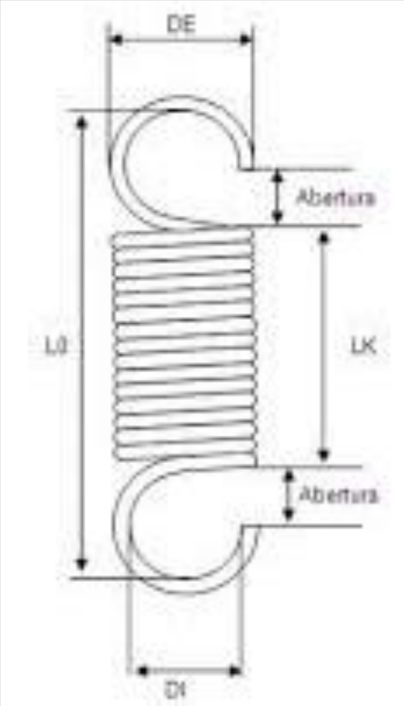
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

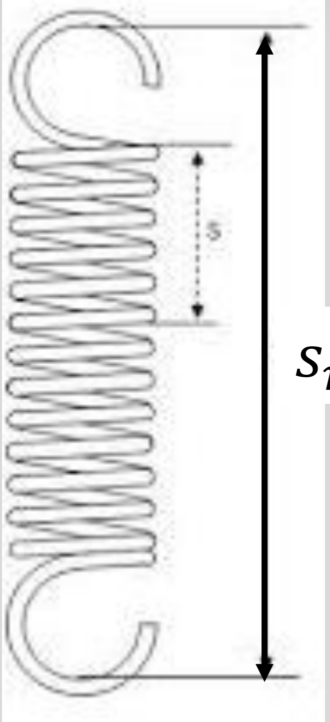
se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

O limite de uma função: uma analogia

❶ Hipótese: Considere que uma mola helicoidal de tração se quebrará se uma massa igual ou superior a 10 kg estiver presa a ela.

❷ Problema: Determinar a máxima deformação s que a mola pode sofrer sem quebrar.

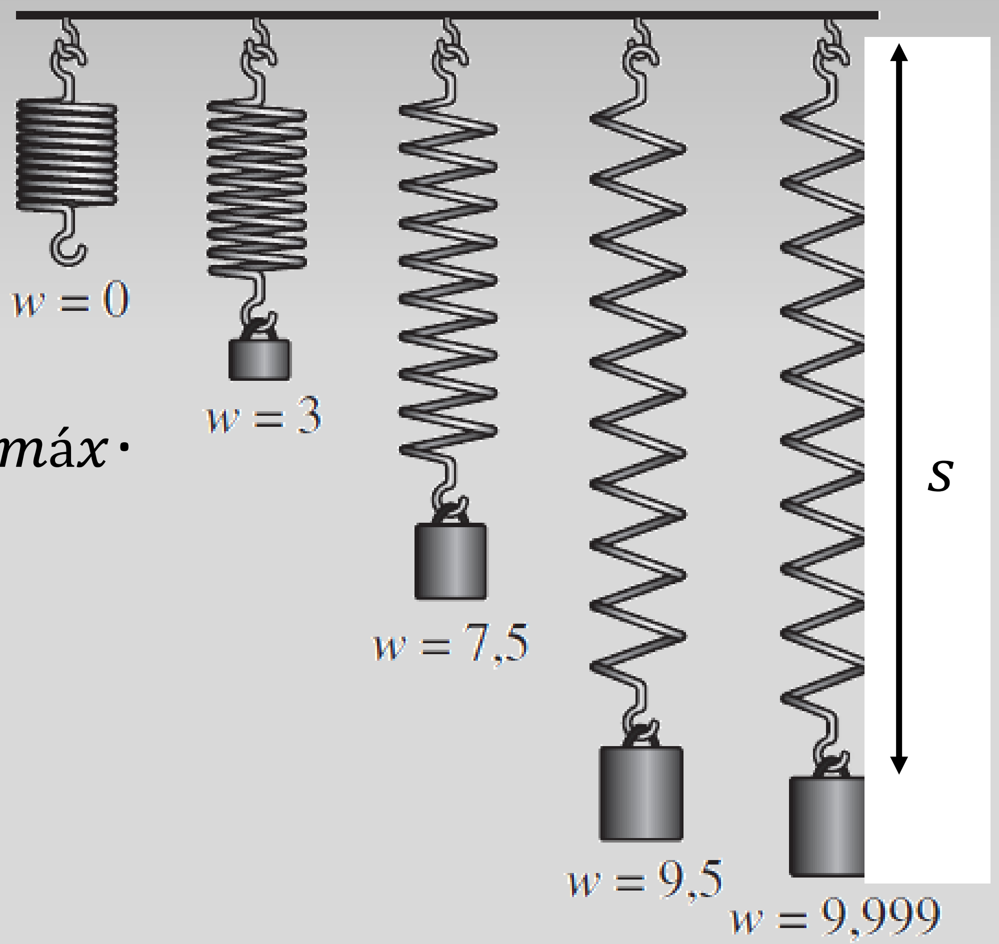




$s_{máx}$?

O limite de uma função: uma analogia

❸ Uma estratégia: Aumentar progressivamente a carga imposta à mola e medir o seu respectivo comprimento!

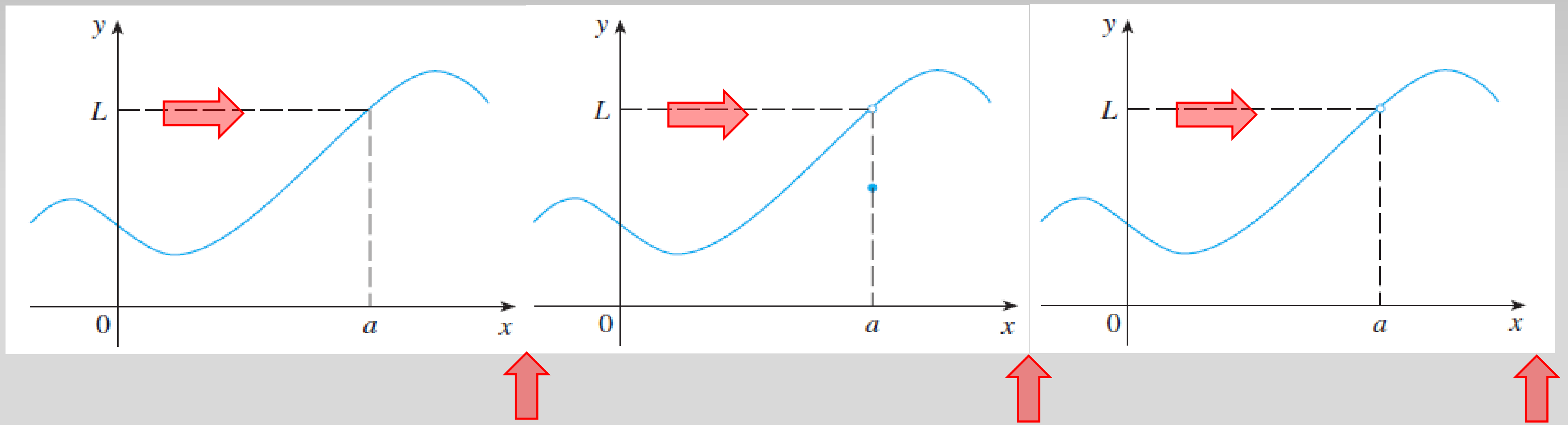


❹ Conclusão: À medida que $w \to 10$, $s \to s_{máx}$. Logo, é correto afirmar que "o limite de s, quando w tende a 10, é igual a $s_{máx}$". Matematicamente:

$$\lim_{w \to 10} s(w) = s_{máx}$$

O limite de uma função

Atenção! Nos três casos a seguir, tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$.



Quanto vale $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$?

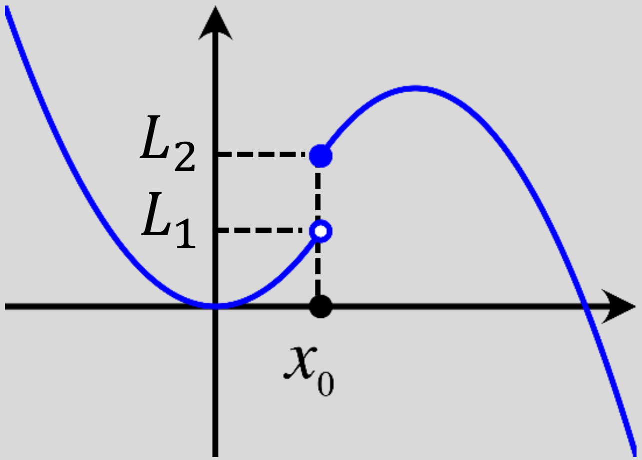
Indeterminação!!!

Limites laterais

Limites laterais: Escrevemos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

e dizemos que o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a (ou limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda) é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$$

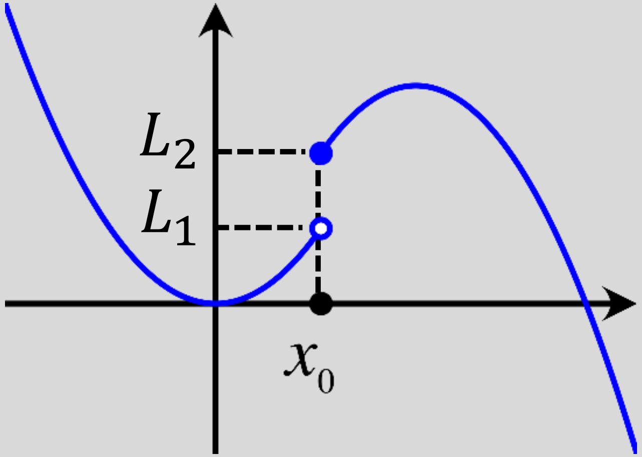


Limites laterais

Limites laterais: Escrevemos $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

e dizemos que o limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a (ou limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita) é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x maior que a.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$$



Limite central

Teorema: $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Ex03: Para a função g cujo gráfico é dado, determine o valor de cada limite, se ele existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$

(b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$

(c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

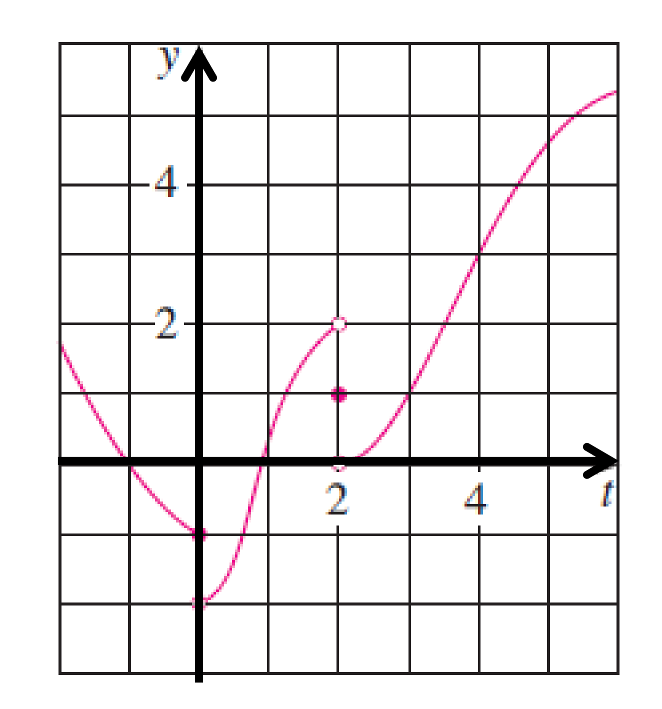
(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$

(e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$

(f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$

(h) $\lim_{t \to 4} g(t)$



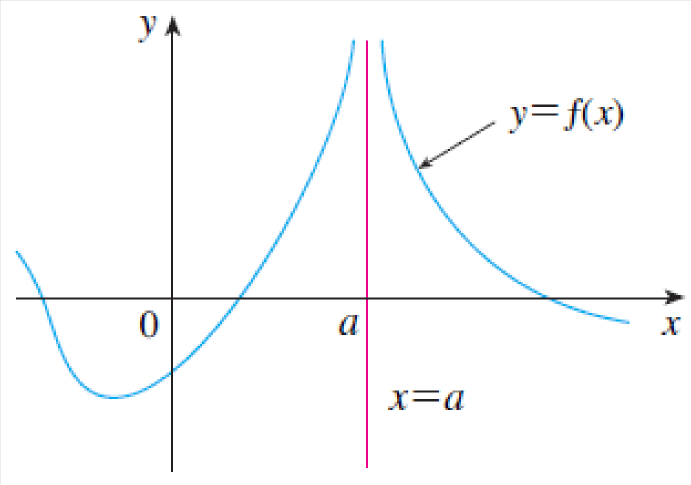
Limites infinitos

Definição: Seja $f(x)$ uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, tornando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$$



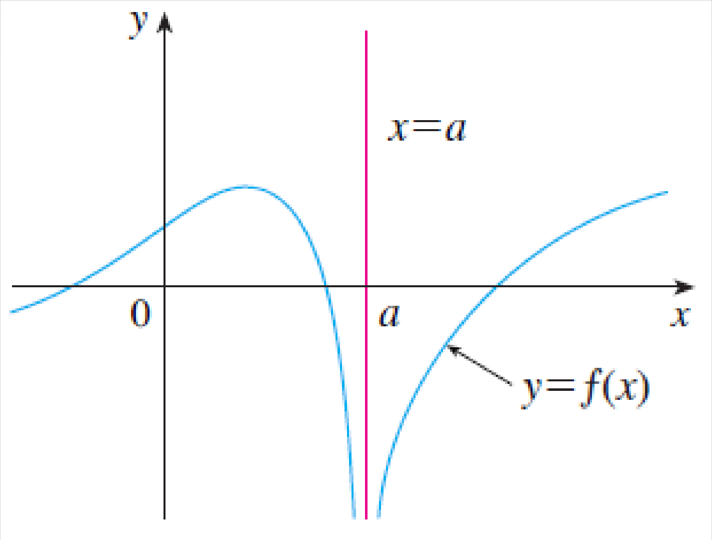
Limites infinitos

Definição: Seja $f(x)$ uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

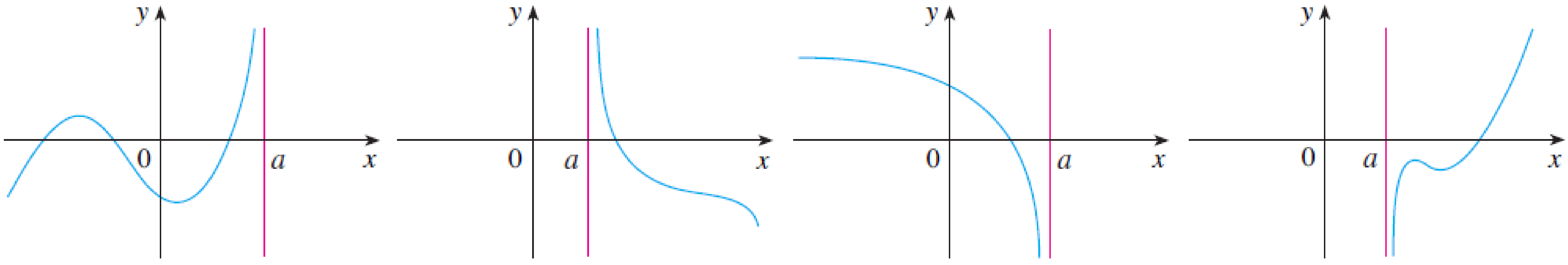
significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos, tornando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty}$$



Limites infinitos

Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais.



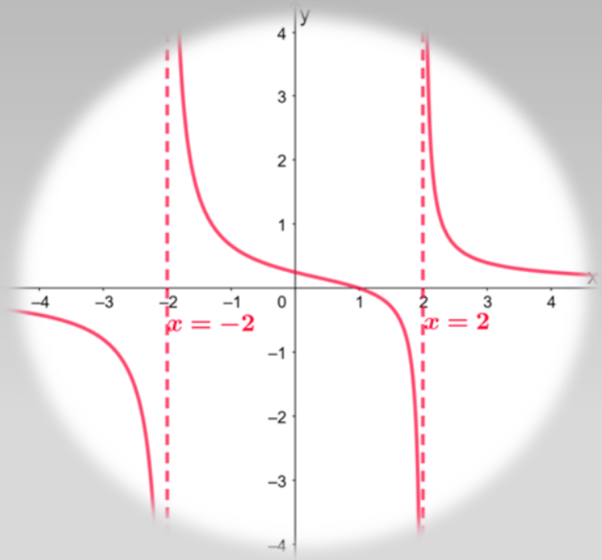
(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

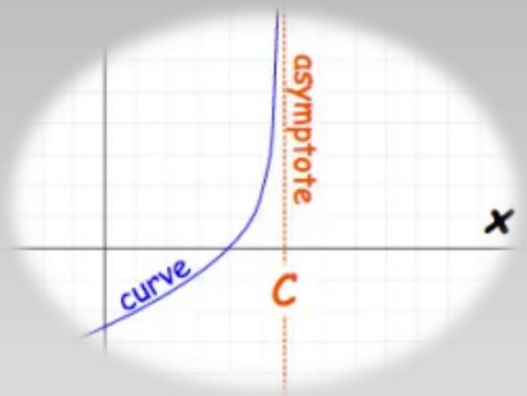
Ex04: Calcule os limites infinitos:

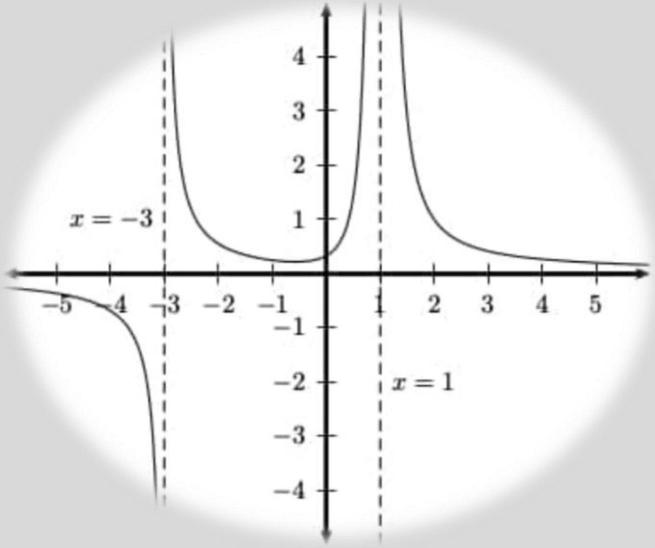
$\lim_{x \to -2^+} \frac{-4}{x+2}$	$\lim_{x \to 4^-} \frac{3}{(4-x)^3}$

Assíntotas verticais

Definição: A reta $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se ao menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:







$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Assíntotas verticais

Ex05: Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine:

(a) $\lim_{x \to -7} f(x)$

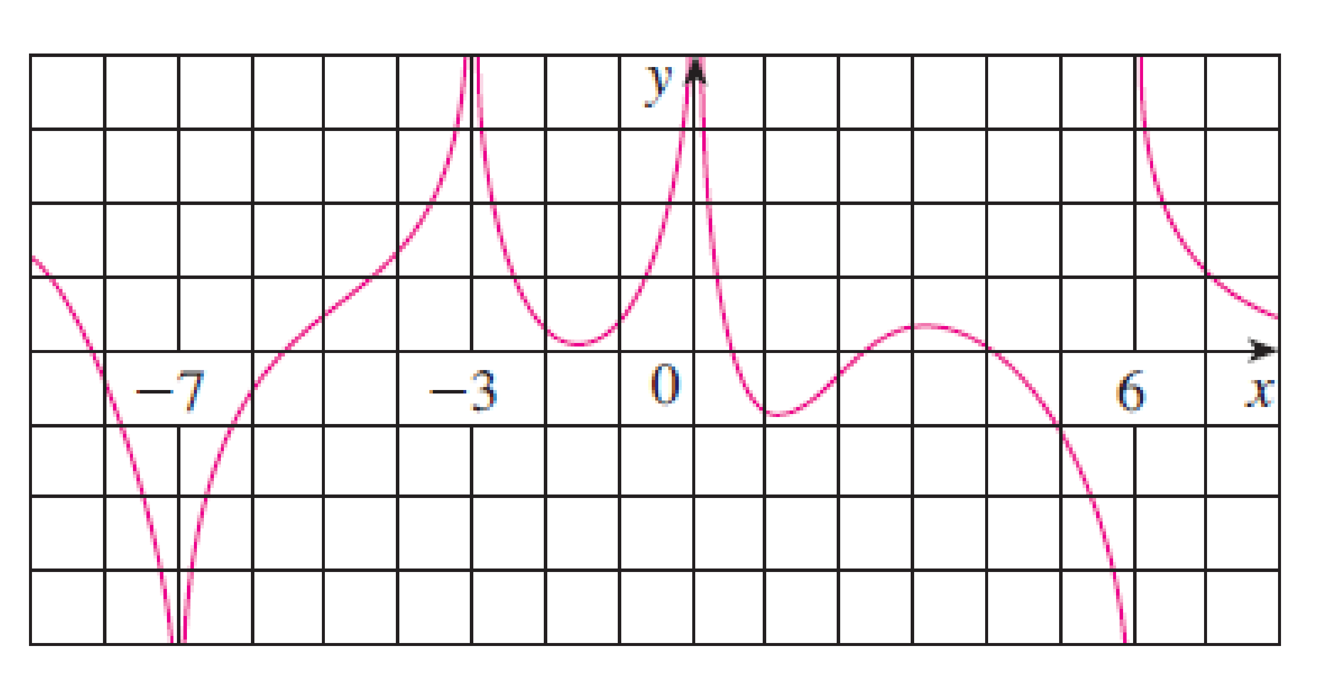
(b) $\lim_{x \to -3} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 6^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \to 6^+} f(x)$

(f) As equações das assíntotas verticais.



Tarefa Complementar

TC01: O deslocamento de uma partícula que se move ao longo de uma reta é dado pela equação de movimento $s(t) = 2\sin(\pi t) + 3\cos(\pi t)$, em que t é medido em segundos e s, em centímetros.

(a) Encontre a velocidade média em cada período:

- (a.1) [1, 2]
- (a.2) [1; 1,1]
- (a.3) [1; 1,01]
- (a.4) [1; 1,001]

(b) Estime a velocidade instantânea da partícula quando $t = 1$.

Tarefa Complementar

TC02: Calcule os limites infinitos:

$\lim_{x \to -3^+} \frac{x+2}{x+3}$	$\lim_{x \to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$

TC03: Determine, se existirem, as assíntotas verticais da curva

$$y = f(x) = \frac{3\sqrt{x+2}}{x^2 - 5x + 4}$$

Plote a curva no GeoGebra e confira seus resultados!

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!