FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 15: Máximos e mínimos das funções

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

2024

Objetivos

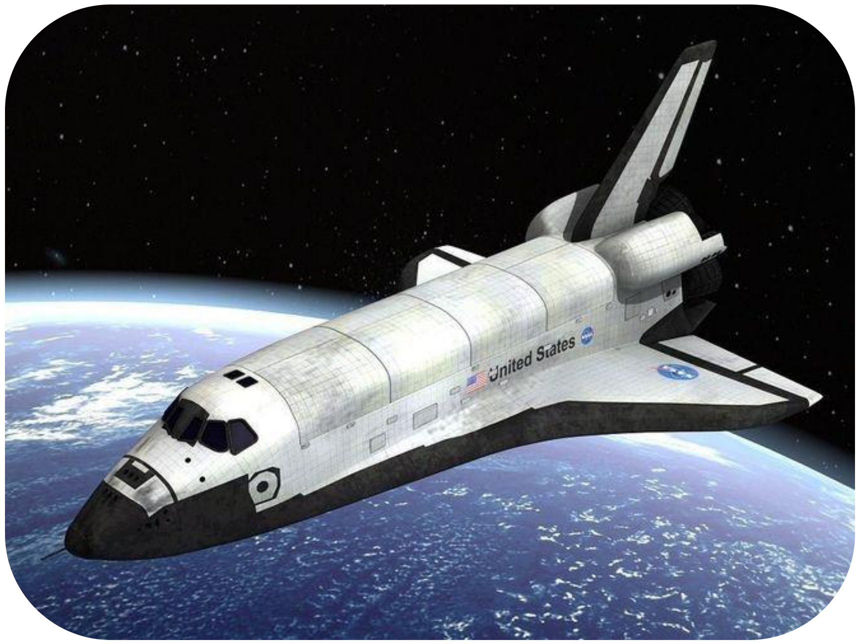
- Entender o conceito para encontrar os valores de máximo e mínimo das funções;
- Formas de representação;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

Valores Máximo e Mínimo

Aplicação – Problemas de otimização:

- Qual é a forma de uma lata de alumínio que minimiza o custo de manufatura?

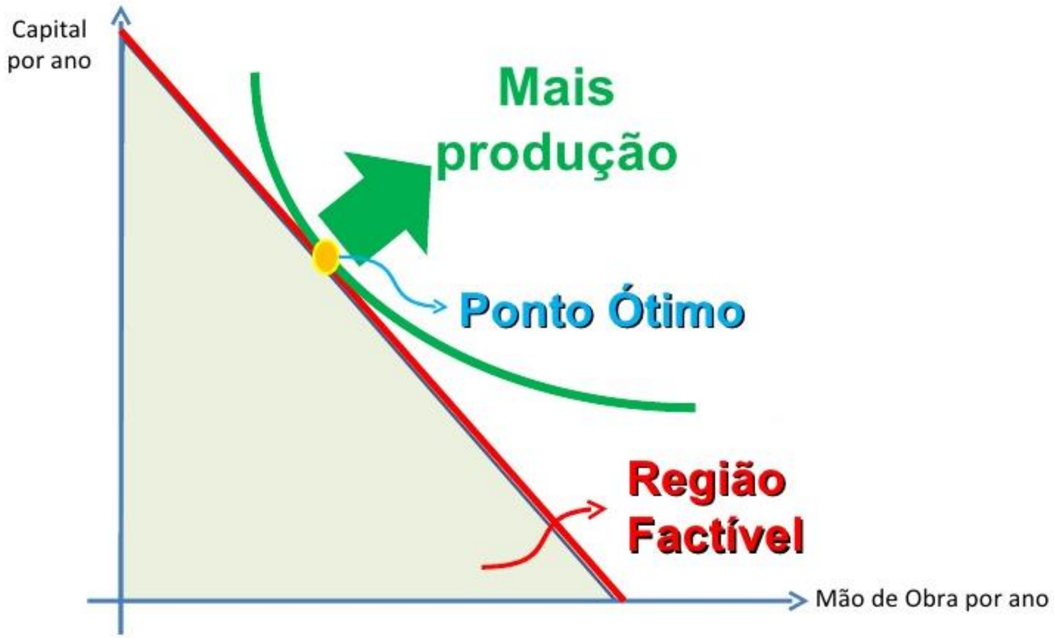
- Qual é a aceleração máxima suportada por um ônibus espacial?



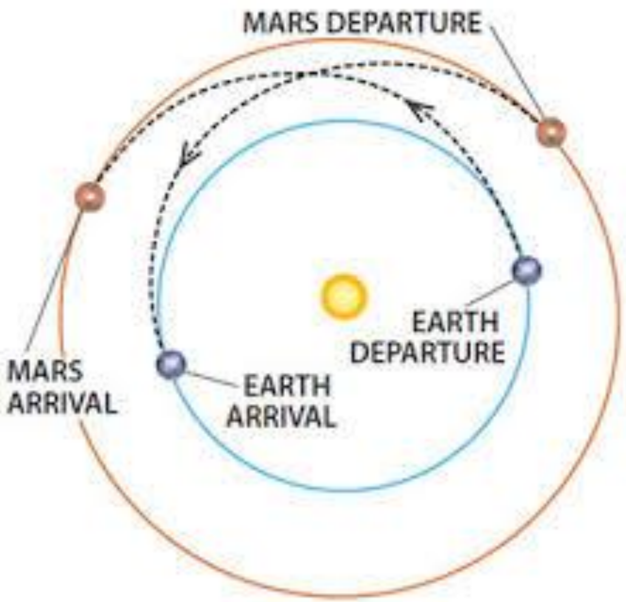
Valores Máximo e Mínimo

Aplicação – Problemas de otimização:

- Qual o ponto de produção ótimo em uma empresa?



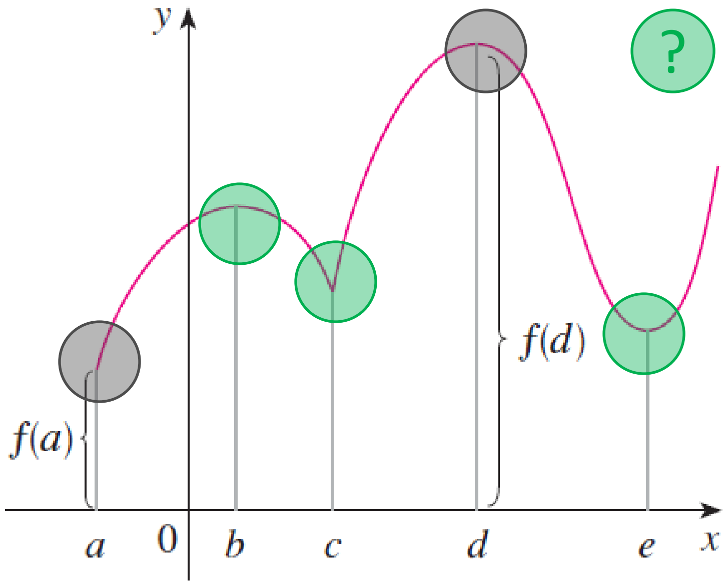
- Qual a trajetória ótima para uma viagem à Marte?



Valores Máximo e Mínimo

Definição: Seja c um número no domínio D de uma função f.
Então $f(c)$ é o:

- Valor máximo absoluto de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D.
- Valor mínimo absoluto de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D.



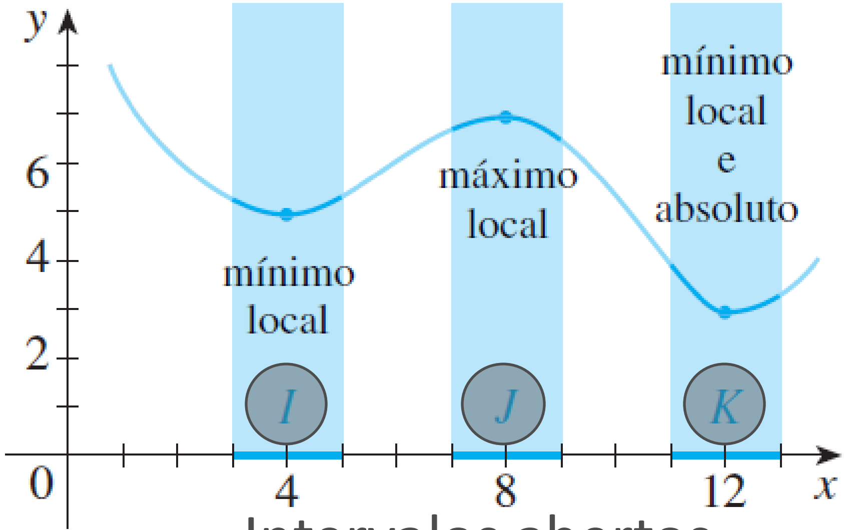
$$D = \text{Dom}\, f = [a, e]$$
$$f(a) \rightarrow \text{mínimo absoluto em } D$$
$$f(d) \rightarrow \text{máximo absoluto em } D$$

Valores Máximo e Mínimo

Definição: O número $f(c)$ é um:

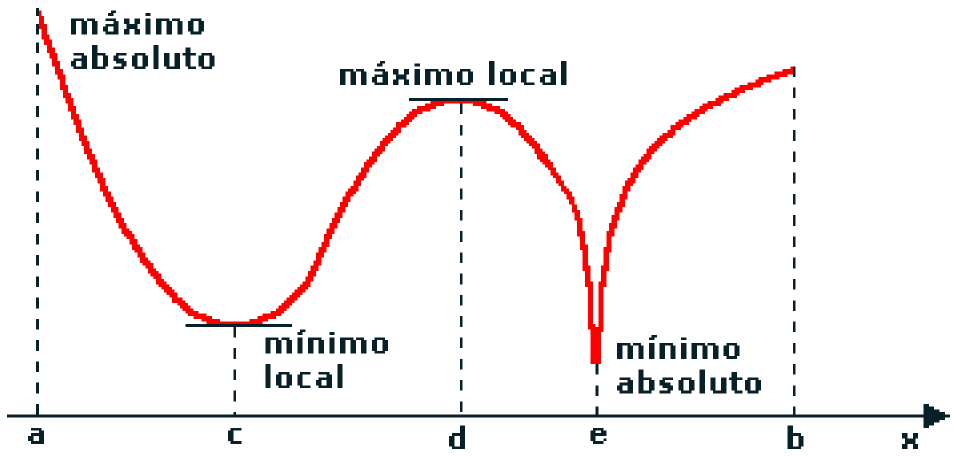
- Valor máximo local de f se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c.
- Valor mínimo local de f se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c.

Intervalo aberto contendo c



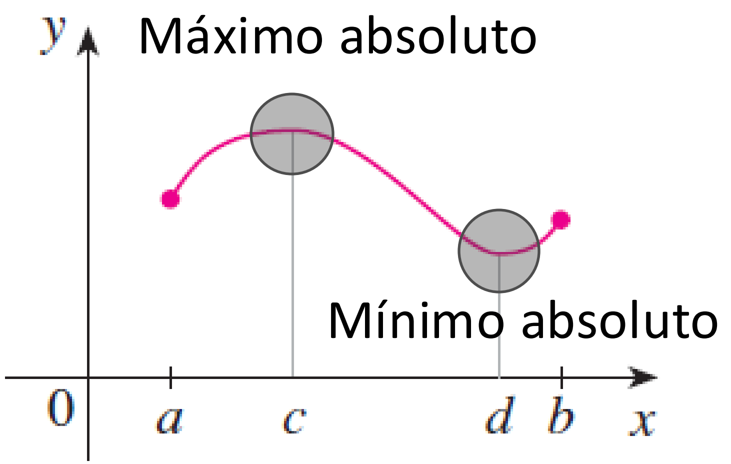
Intervalos abertos

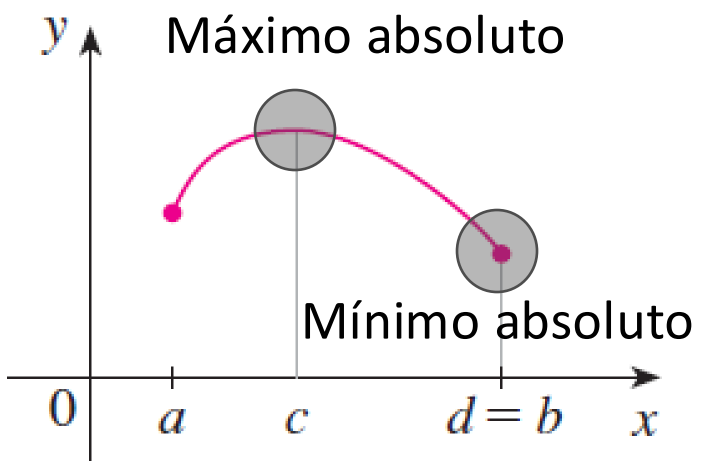
Junção dos dois conceitos:

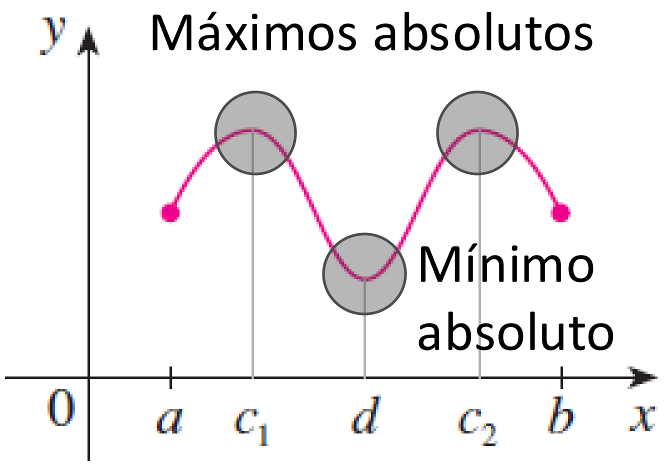


Valores Máximo e Mínimo

Teorema do Valor Extremo: Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.



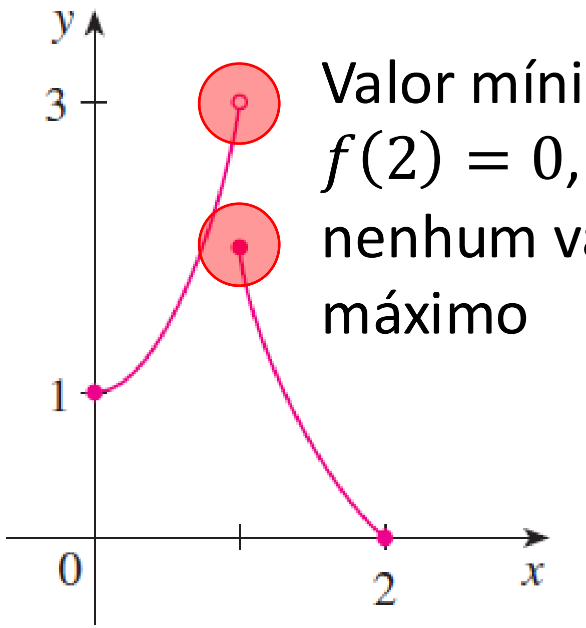




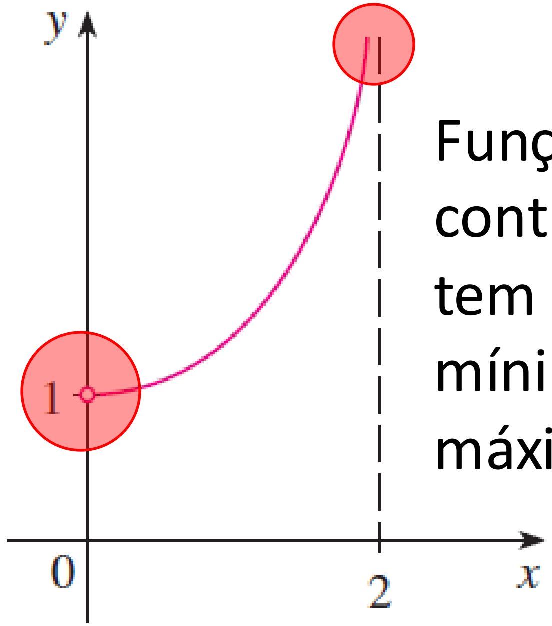
Valores Máximo e Mínimo

Teorema do Valor Extremo: Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

<u>Uma função pode não possuir valores extremos</u> se for omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado)



Valor mínimo $f(2) = 0$, mas nenhum valor máximo



Função contínua, não tem valor mínimo nem máximo

Valores Máximo e Mínimo

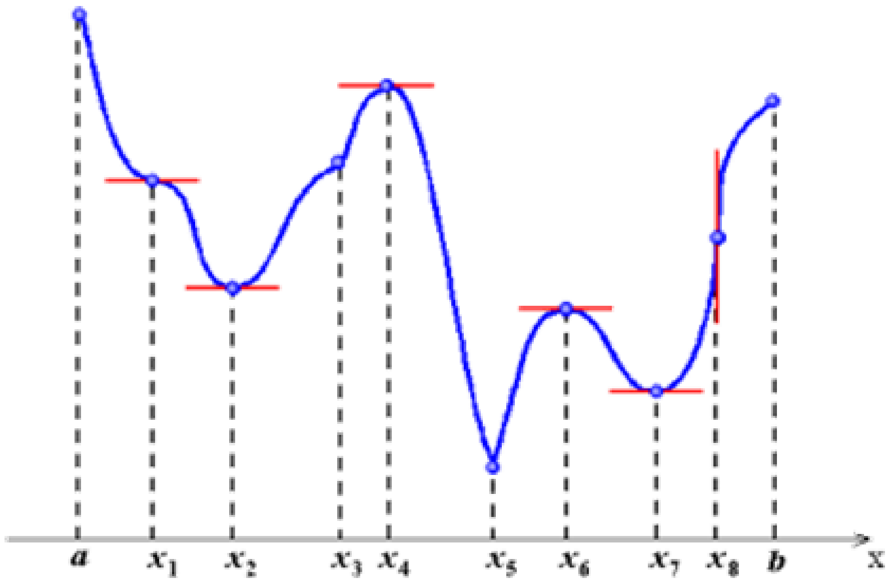
Teorema de Fermat: Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Mesmo quando $f'(c) = 0$, não é necessário existir um máximo ou mínimo em c. Além disso, pode existir um valor extremo mesmo quando $f'(c)$ não existir.

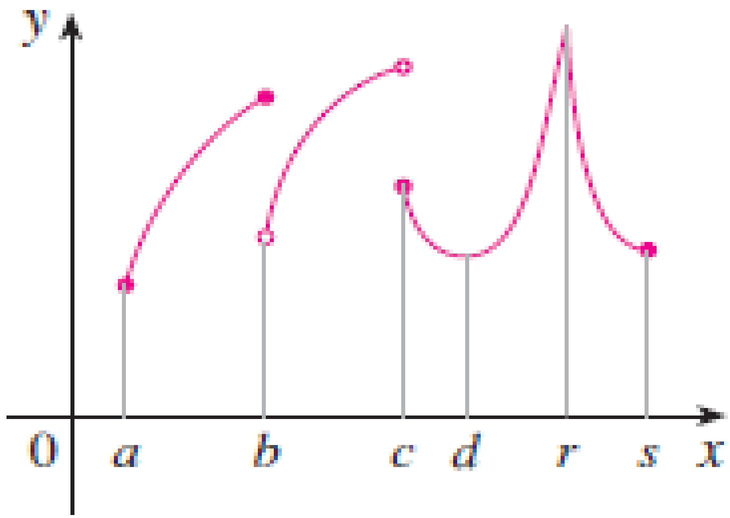
Definição: Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Exercícios

Ex01: Considere o gráfico da função f. Quais os pontos críticos de f? Quais os máximos e mínimos locais e absolutos?



Ex02: Diga se a função possui máximos ou mínimos locais ou absolutos, ou mesmo se não existem máximos e mínimos.



Exercícios

Ex03: Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em $[-2, 6]$ e que possua máximo absoluto em $x = 0$, mínimo absoluto em $x = 5$, máximo local em $x = 3$ e mínimo local em $x = 1$.

Ex04: (Desafio!) Encontre os números críticos das funções:

(a) $g(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$	(b) $f(z) = \frac{z+4}{2z^2+z+8}$

Método do Intervalo Fechado

Para encontrar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

(1) Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).

(2) Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.

(3) O maior valor entre as etapas (1) e (2) é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exercícios

Ex05: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo fornecido:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, no intervalo $[-3, 5]$

b) $f(x) = x^3 \ln^2(x + 2)$, no intervalo $[-1, 0]$

Exercícios – aplicação

Problema 1: Otimização de Custo em Infraestrutura de Rede

Uma empresa de tecnologia está construindo uma infraestrutura de rede para um novo centro de dados. O custo total $C(x)$ de instalar e manter os cabos de fibra ótica em uma área é modelado pela função:

$$C(x) = 10x^2 + 4000x + 50000$$

onde x representa a quantidade de cabos instalados (em quilômetros). A empresa deseja minimizar o custo total de instalação e manutenção.

Pergunta: Quantos quilômetros de cabos devem ser instalados para minimizar o custo total? Qual é o custo mínimo?

```python
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definindo a variável
x = sp.Symbol('x')

# Definindo a função de custo
C = 10*x**2 + 4000*x + 50000

# Derivada da função de custo
C_prime = sp.diff(C, x)

# Encontrando o ponto crítico
critical_point = sp.solve(C_prime, x)[0]

# Calculando o custo mínimo
min_cost = C.subs(x, critical_point)

# Convertendo a função simbólica para uma função numérica
C_func = sp.lambdify(x, C, 'numpy')

# Gerando valores de x e calculando C(x)
x_vals = np.linspace(-300, 100, 400)
C_vals = C_func(x_vals)

# Plotando o gráfico
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_vals, C_vals, label='C(x) = 10x^2 + 4000x + 50000', color='blue')
plt.scatter([critical_point], [min_cost], color='red', zorder=5)
plt.text(critical_point, min_cost, f'Min: ({critical_point:.2f}, {min_cost:.2f})',
         horizontalalignment='right', verticalalignment='top')
plt.title('Otimização de Custo em Infraestrutura de Rede')
plt.xlabel('Quantidade de Cabos (km)')
plt.ylabel('Custo Total')
plt.axvline(x=critical_point, color='red', linestyle='--')
plt.axhline(y=min_cost, color='red', linestyle='--')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Exercícios – aplicação

Problema 2: Maximização de Receita em uma Campanha de Marketing

Uma startup está planejando uma campanha de marketing para promover seu novo software. A receita $R(x)$ gerada pela campanha pode ser modelada pela função:

$$R(x) = -5x^2 + 1000x$$

onde x representa o investimento em publicidade (em milhares de reais). A startup deseja maximizar a receita gerada pela campanha.

Pergunta: Qual deve ser o investimento em publicidade para maximizar a receita? Qual é a receita máxima?

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!