Exercícios – Probabilidade

Ex01

Usando o princípio fundamental da contagem

Você está comprando um carro novo. Os fabricantes possíveis, tamanhos dos carros e as cores estão listados.

Fabricantes:	Ford, GM, Honda
Tamanhos:	compacto, médio
Cores:	branco (W), vermelho (R), preto (B), verde (G)

De quantas maneiras diferentes você pode selecionar um fabricante, um tamanho e uma cor? Use um diagrama de árvore para checar seu resultado.

Obs.: monte a arvore de possibilidades.

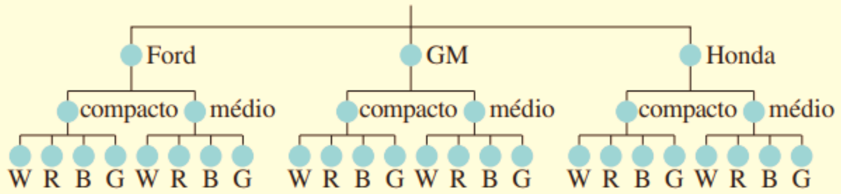
Solução

Há três escolhas de fabricantes, duas de tamanhos e quatro de cores. Usando o princípio fundamental da contagem, podemos determinar que o número de maneiras para selecionarmos um fabricante, um tamanho e uma cor é:

$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ maneiras.

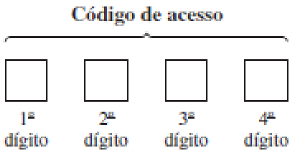
Usando o diagrama de árvore da Figura 3.3, podemos ver por que há 24 opções.

Figura 3.3 Diagrama de árvore para seleção do carro.



Ex02

Figura 3.4



Usando o princípio fundamental da contagem

O código de acesso para o sistema de segurança de um carro consiste em quatro dígitos (veja a Figura 3.4). Cada dígito pode ser qualquer número de 0 a 9.

Quantos códigos de acesso são possíveis se:

1. Cada dígito pode ser usado somente uma vez e não pode ser repetido?
2. Cada dígito pode ser repetido?
3. Cada dígito pode ser repetido, mas o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1?

Solução

1. Já que cada dígito só pode ser usado uma vez, há 10 escolhas para o primeiro dígito, 9 escolhas restantes para o segundo dígito, 8 escolhas restantes para o terceiro dígito e 7 escolhas restantes para o quarto dígito. Usando o princípio fundamental da contagem, podemos concluir que há:

   $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ códigos de acesso possíveis.

2. Uma vez que cada dígito pode ser repetido, há 10 escolhas para cada um dos 4 dígitos. Então, há:

   $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10.000$ códigos de acesso possíveis.

3. Como o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1, há 8 escolhas para o primeiro dígito. Em seguida, há 10 escolhas para cada um dos três dígitos restantes. Então há:

   $8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 8.000$ códigos de acesso possíveis.

Ex03

Encontrando probabilidades clássicas

Você joga um dado de seis faces. Calcule a probabilidade de cada evento.

1. Evento A: sair um 3.
2. Evento B: sair um 7.
3. Evento C: sair um número menor que 5.

Solução

Quando o dado é lançado, o espaço amostral consiste em seis resultados: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Há um resultado no evento $A = \{3\}$. Então,

   $$P(\text{sair um } 3) = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.$$

2. Em razão de 7 não estar no espaço amostral, não há resultados no evento B. Então,

   $$P(\text{sair um } 7) = \frac{0}{6} = 0.$$

3. Há quatro resultados no evento $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Então,

   $$P(\text{sair um número menor que } 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667.$$

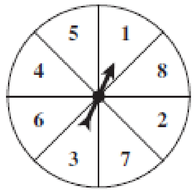
Ex04

Usando um diagrama de árvore

Um experimento probabilístico consiste em lançar uma moeda e girar a roda mostrada na Figura 3.9. A roleta tem a mesma chance de parar em cada um dos números. Use um diagrama de árvore para encontrar a probabilidade de cada evento.

1. Evento A: sair coroa (T) e indicar um número ímpar.
2. Evento B: sair cara (H) ou indicar um número maior que 3.

Figura 3.9 Roleta para escolha aleatória de um número no intervalo de 1 a 8.



Obs.: monte a arvore de possibilidades.

Solução

Com base no diagrama de árvore da Figura 3.10, você pode ver que há 16 resultados.

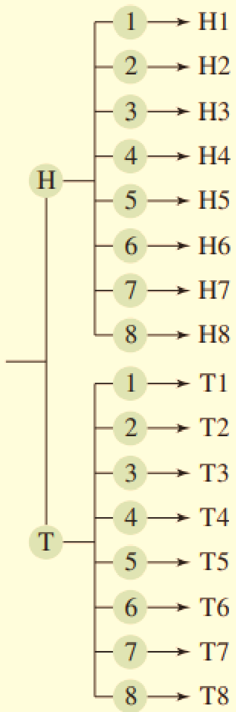
1. Há quatro resultados no evento $A = \{T1, T3, T5, T7\}$. Então,

$$P(\text{sair coroa e indicar um número ímpar}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

2. Há 13 resultados no evento $B = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, H7, H8, T4, T5, T6, T7, T8\}$. Então,

$$P(\text{sair cara e indicar um número maior que 3}) = \frac{13}{16} \approx 0{,}813.$$

Figura 3.10 Diagrama de árvore para o experimento da moeda e da roleta.



Ex05

Encontrando probabilidade condicionais

1. Duas cartas são selecionadas em sequência de um baralho normal de 52 cartas. Encontre a probabilidade de que a segunda carta seja uma rainha, dado que a primeira carta é um rei (considere que o rei não seja reposto).
2. A Tabela 3.4 mostra os resultados de um estudo no qual os pesquisadores examinaram o QI de uma criança e a presença de um gene específico nela. Encontre a probabilidade de que a criança tenha um QI alto, dado que ela tem o gene.

Tabela 3.4

	Gene presente	Gene ausente	Total
QI alto	33	19	52
QI normal	39	11	50
Total	72	30	102

Solução

1. Em razão de a primeira carta ser um rei e ela não ser reposta, restam 51 cartas no baralho, 4 das quais são rainha. Então,

   $$P(B \mid A) = \frac{4}{51} \approx 0{,}078.$$

   A probabilidade de que a segunda carta seja uma rainha, dado que a primeira é um rei, é de aproximadamente 0,078.
2. Há 72 crianças que têm o gene. Então, o espaço amostral consiste em 72 crianças, conforme mostrado na Tabela 3.5. Dessas, 33 tem QI alto. Então,

   $$P(B \mid A) = \frac{33}{72} \approx 0{,}458.$$

Ex06

Usando a regra da multiplicação para encontrar probabilidades

1. Duas cartas são selecionadas, sem reposição da primeira carta, de um baralho normal de 52 cartas. Encontre a probabilidade de selecionar um rei e depois uma rainha.
2. Uma moeda é jogada e um dado é lançado. Encontre a probabilidade de se obter cara e 6.

Solução

1. Como a primeira carta não é reposta, os eventos são dependentes.

$$P(K \text{ e } Q) = P(K) \cdot P(Q|K)$$
$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{16}{2.652} \approx 0{,}006$$

Então, a probabilidade de selecionar um rei e uma rainha, sem reposição, é de aproximadamente 0,006.

2. Os eventos são independentes.

$$P(H \text{ e } 6) = P(H) \cdot P(6)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$$

Então, a probabilidade de tirar cara e 6 é de aproximadamente 0,083.

Ex07

Usando a regra da multiplicação para encontrar probabilidades

A probabilidade de que uma cirurgia reconstrutiva do ligamento cruciforme anterior (LCA) seja bem-sucedida é de 0,95. (*Fonte: The Orthopedic Center of St. Louis.*)

1. Determine a probabilidade de que três cirurgias do LCA sejam bem-sucedidas.
2. Determine a probabilidade de que nenhuma das três cirurgias do LCA seja bem-sucedida.
3. Determine a probabilidade de que pelo menos uma das três cirurgias do LCA seja bem-sucedida.

Solução

1. A probabilidade de que cada cirurgia do LCA seja bem-sucedida é 0,95. A chance de sucesso em uma cirurgia é independente da chance de sucesso nas outras cirurgias.

$$P(\text{três sucessos}) = (0{,}95)\,(0{,}95)\,(0{,}95) \approx 0{,}857$$

Então, a probabilidade de que todas as três cirurgias sejam bem-sucedidas é de aproximadamente 0,857.

2. Uma vez que a probabilidade de sucesso em uma cirurgia é 0,95, a probabilidade de fracasso em uma cirurgia é $1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

$$P(\text{nenhum sucesso}) = (0{,}05)\,(0{,}05)\,(0{,}05) \approx 0{,}0001$$

Então, a probabilidade de que nenhuma das cirurgias seja bem-sucedida é de aproximadamente 0,0001. Note que, como 0,0001 é menor que 0,05, isso pode ser considerado um evento incomum.

3. A frase "pelo menos um" significa um ou mais. O complemento do evento "pelo menos um sucesso" é o evento "nenhum sucesso". Usando a regra do complemento,

$$P(\text{pelo menos um sucesso}) = 1 - P(\text{nenhum sucesso})$$
$$\approx 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999.$$

Então, a probabilidade de que pelo menos uma das três cirurgias seja bem-sucedida é aproximadamente 0,9999.