FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 10: Derivadas e Taxas de Variação

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

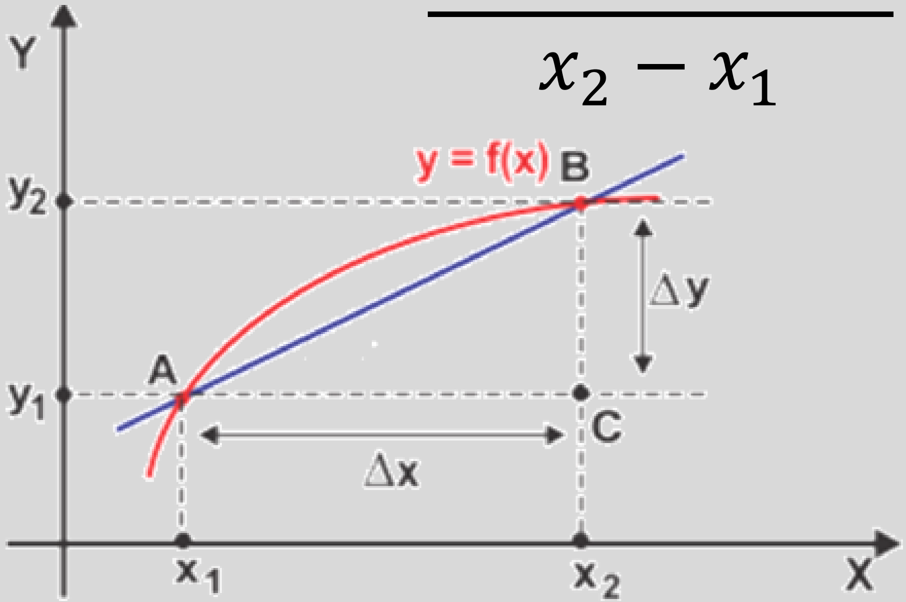
Objetivos

- Explorar o conceito de Derivadas e Taxas de Variação;
- Formas de representação;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

Taxa de variação média

Relembrando... A taxa de variação média de uma função $f(x)$ calculada entre os pontos
$A = (x_1, f(x_1))$ e $B = (x_2, f(x_2))$ é expressa por

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



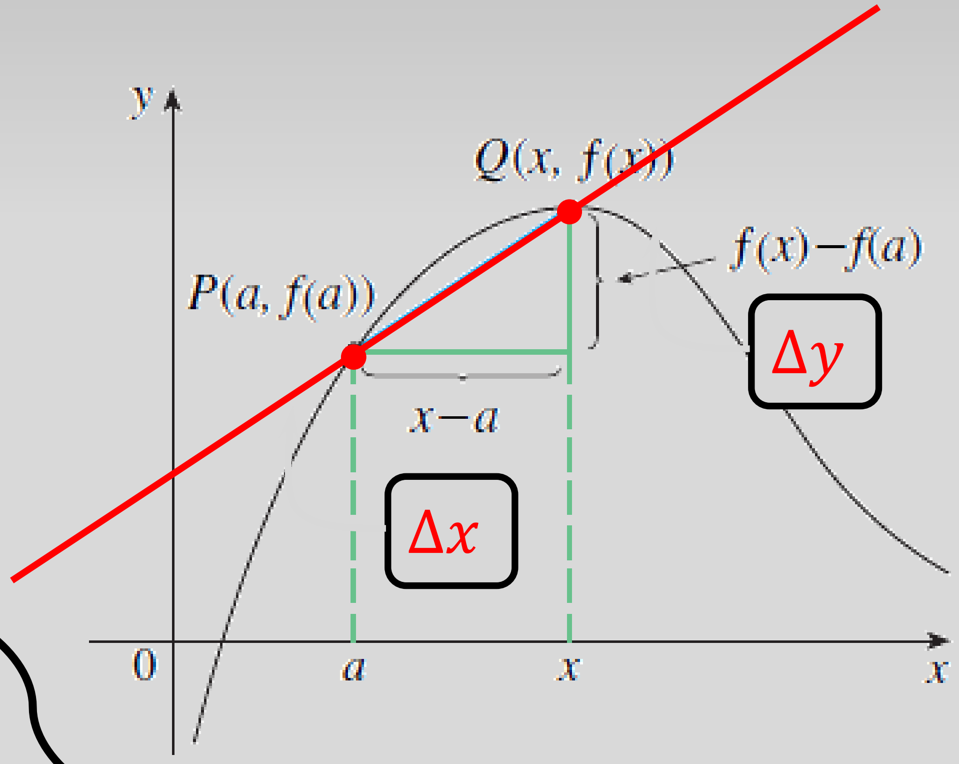
A taxa de variação média de uma função em um intervalo $[x_1, x_2]$ é igual à inclinação da reta secante ao gráfico da função nos pontos inicial e final do intervalo

Retas Tangentes

Problema (já solucionado!): Encontrar a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P = (a, f(a))$.

Consideramos um ponto próximo $Q = (x, f(x))$, com $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

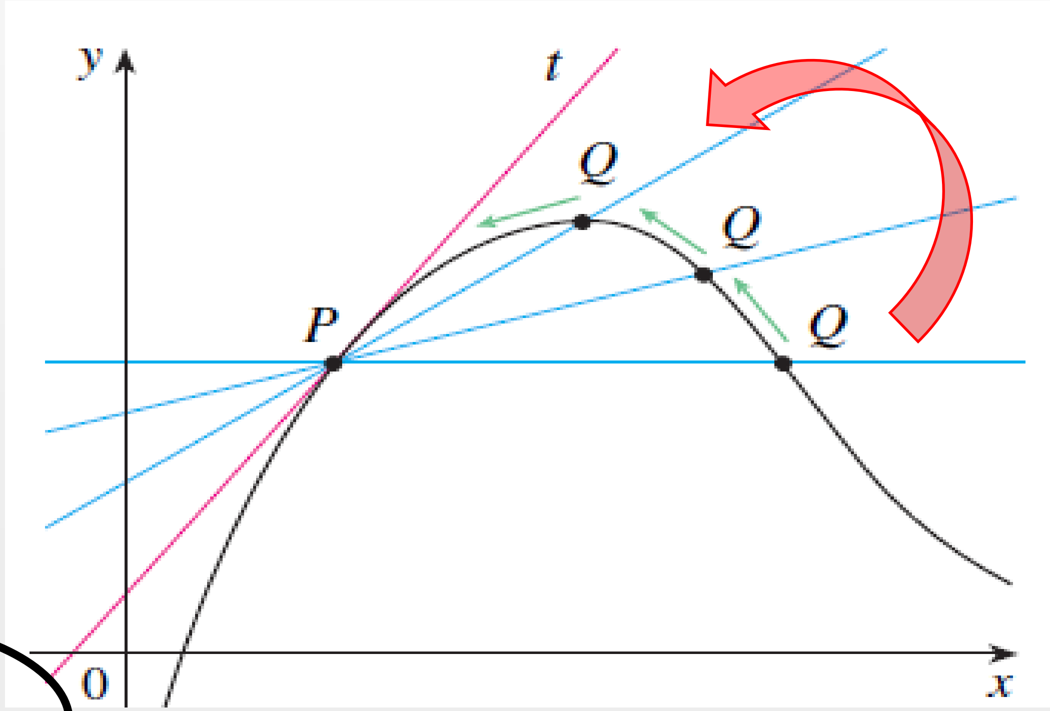


Taxa de variação média

Retas Tangentes

Problema (já solucionado!): Encontrar a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P = (a, f(a))$.

Então, fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva, obrigando $x \to a$. Assim, a reta tangente (de inclinação m) é a posição limite da reta secante PQ quando $Q \to P$:



$$\boxed{m = \lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Taxa de variação instantânea

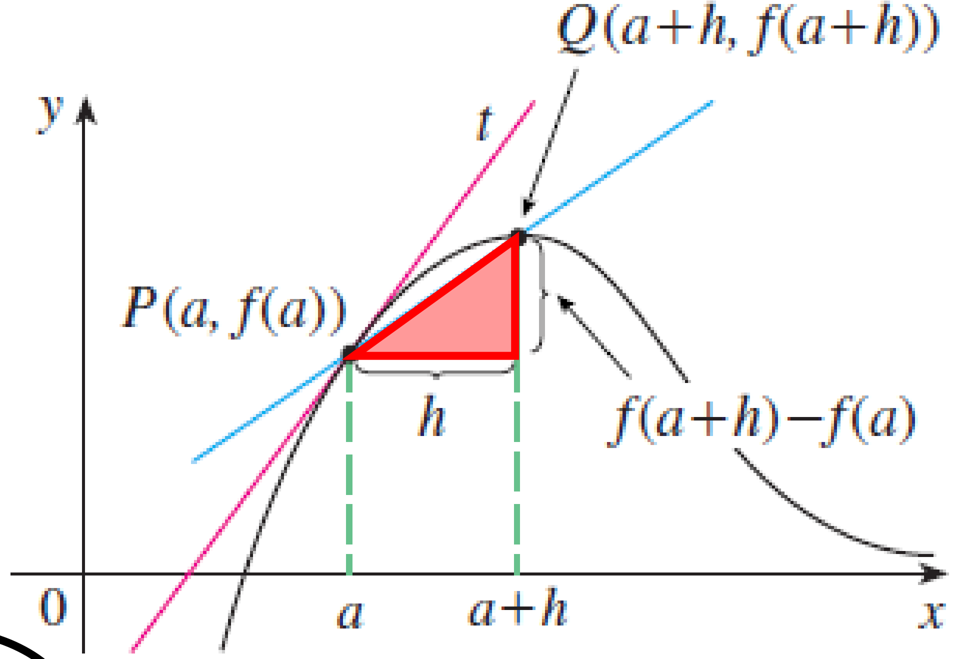
Retas Tangentes

Mudança de variável: Se $h = x - a$, então $x = a + h$.

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fazendo $Q \to P$, isto é,
$x \to a$ ou $h \to 0$

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Taxa de variação instantânea

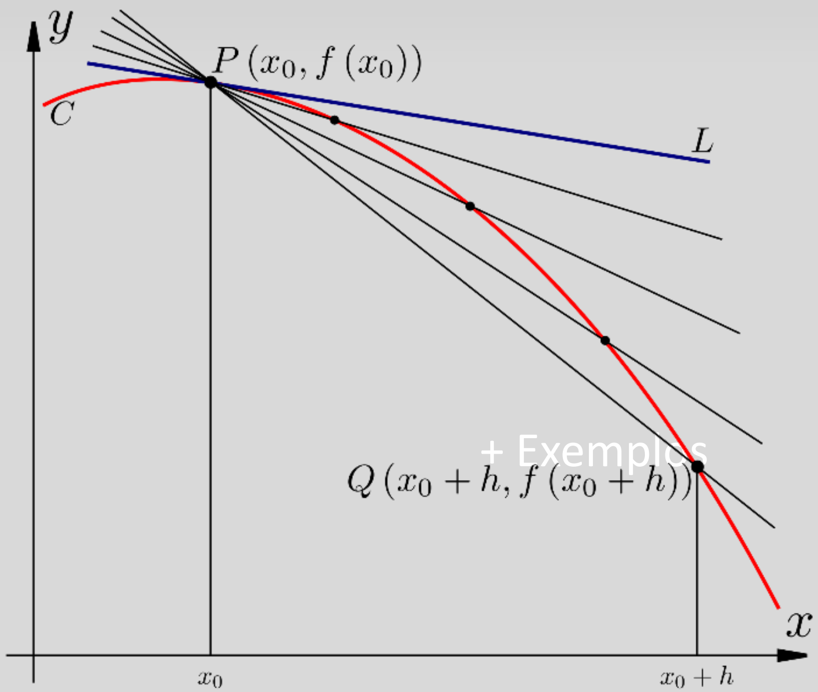
Retas Tangentes

Ex02: (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1,0)$:

(i) Usando a definição $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

(ii) Usando a definição $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).

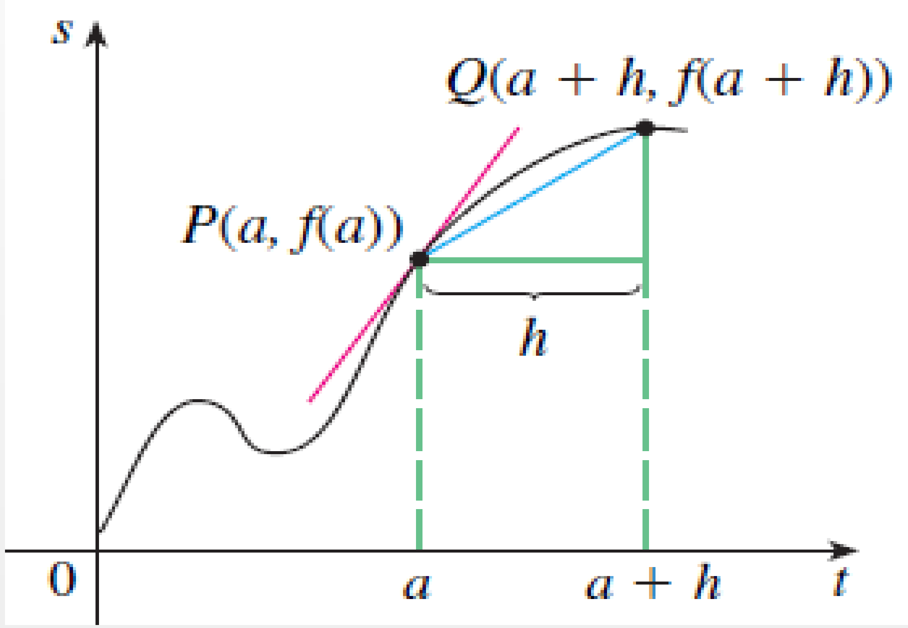


Velocidades

Função posição: $s = f(t)$

No intervalo de tempo entre $t_1 = a$ e $t_2 = a + h$, a variação na posição será de

$$f(t_2) - f(t_1) = f(a+h) - f(a)$$



$$\text{Velocidade média} = v_m[t_1, t_2] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = m_{PQ}$$

Taxa de variação média

Velocidades

Velocidade instantânea: Fazemos o intervalo de tempo $\Delta t = h \to 0$.

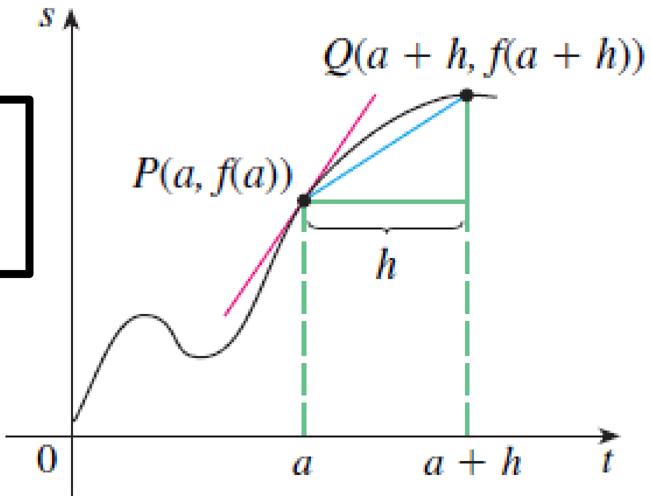
A velocidade no instante $t = a$ é expressa por:

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Taxa de variação instantânea

É o mesmo limite empregado no cálculo da inclinação da reta tangente!

Inclinação da reta tangente em P.



Resumindo...

Seja $f(x)$ uma função definida em certo intervalo I. Sejam os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (a + h, f(a + h))$ pertencentes ao gráfico de f.

A taxa de variação instantânea traz um olhar cinemático à análise, enquanto a inclinação da reta tangente traz uma perspectiva geométrica.

Taxa de variação instantânea em $x = a$

$$\Updownarrow$$

Inclinação da reta tangente em $x = a$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Derivadas

Definição: A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é expressa por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

se o limite existir.

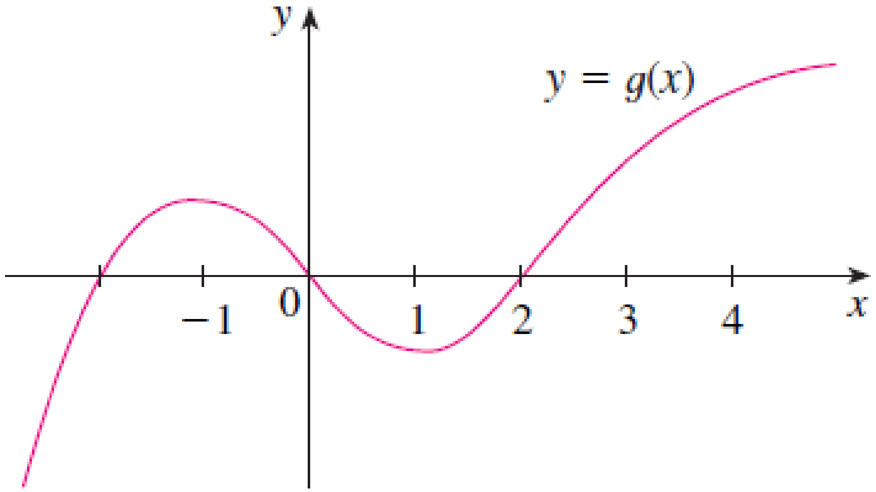
Redefinindo...

A reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$ com inclinação igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

Exercícios

Ex04: Seja $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$. Calcule a derivada de f no ponto $a = 1$.

Ex05: Para a função g, ordene os números 0, $g'(-2)$, $g'(0)$, $g'(2)$ e $g'(4)$ em ordem crescente. Explique seu raciocínio.



Definition: Derivative of $f(x)$ at $x = a$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ or}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

FIAP Derivadas e Taxas de variação

Seja $y = f(x)$.

Assim, y é uma quantidade que depende de outra quantidade x.

Se x varia de x_1 a x_2, então a variação em x (também chamada incremento de x) será $\Delta x = x_2 - x_1$ e a variação correspondente em y será $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

$$\boxed{\text{Taxa de variação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

Inclinação da reta secante à curva $y = f(x)$ que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Derivadas e Taxas de variação

Seja $y = f(x)$.

Assim, y é uma quantidade que depende de outra quantidade x.

$$\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$.

A derivada $f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ em relação a x, quando $x = a$.

Exercícios

Ex05: Os candidatos à Presidência acreditam que o apoio à sua candidatura em uma certa região é afetado pelo número de anúncios televisivos exibidos. Seja $V(x)$ o número de eleitores (em milhares) que acabam votando em um candidato que utiliza x anúncios durante a campanha. A tabela fornece valores para $V(x)$.

x	$V(x)$
180	16
190	20
200	28
210	34
220	37

(a) Estime $V'(200)$. Qual sua unidade?

(b) Qual é o significado prático de $V'(200)$?

Exercícios Extra

TC01: Seja $f(x) = \frac{2x}{x+3}$.

Calcule a derivada de f no ponto $a = 0$.

TC02: Seja $g(v)$ a função que representa o consumo de combustível de um automóvel em milhas/galão em função da velocidade, medida em milhas/hora.

(a) Quais são as unidades de $g'(90)$?

(b) Qual é o significado físico de $g'(55) = -0{,}54$?

Exercícios Extra

TC03: O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5000 + 10x + 0{,}05x^2$.

(a) Encontre a taxa de variação média de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando

(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encontre a taxa instantânea de variação de C em relação a x quando $x = 100$ (Isso é chamado custo marginal).

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!