FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 18: Integrais Definidas

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

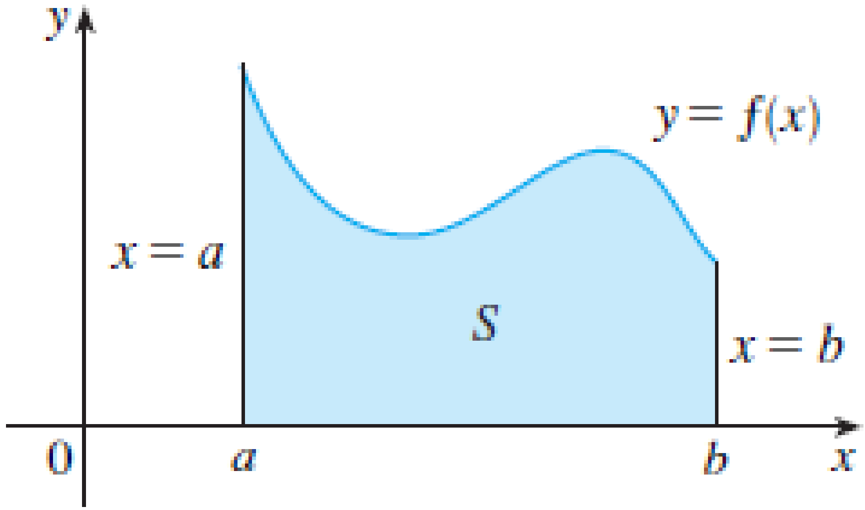
2024

Objetivos

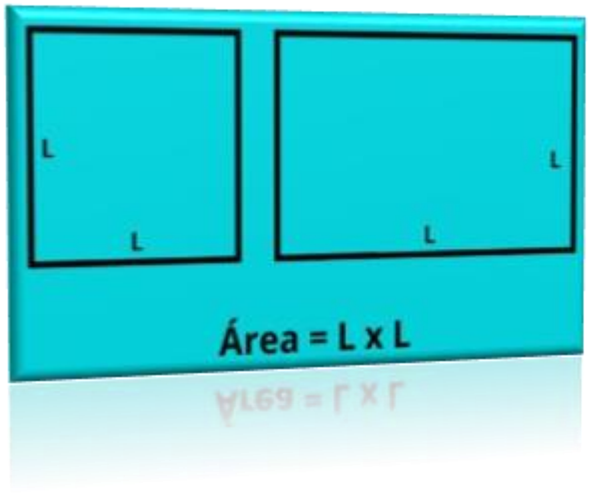
- Entender o conceito de resolução de integrais definidas;
- Formas de representação;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

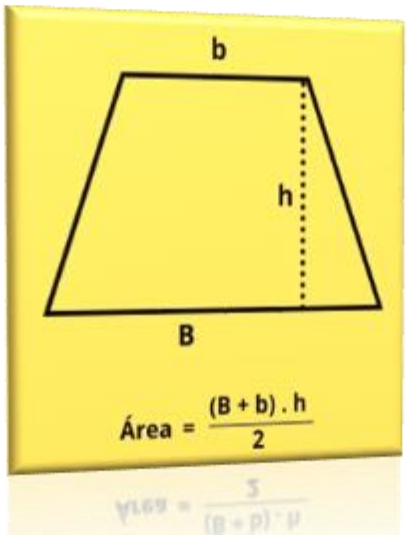
O problema da Área

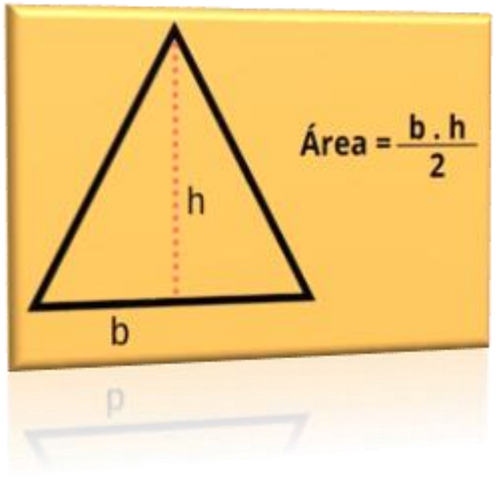
Como calcular a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$?



Temos uma ideia intuitiva do que é a área de uma região...



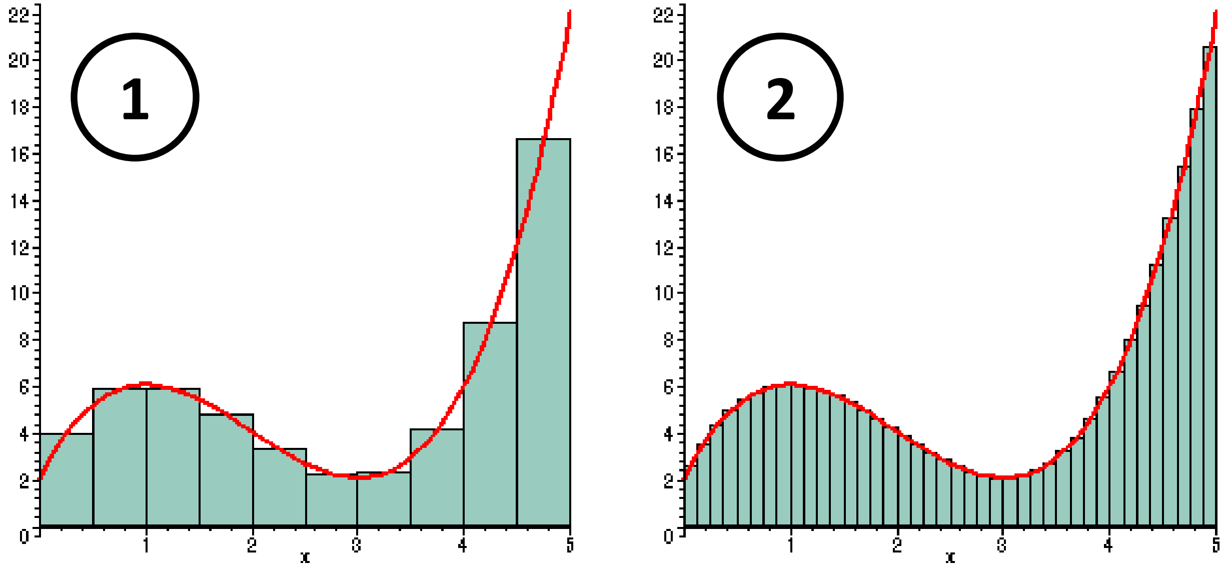




O problema da Área

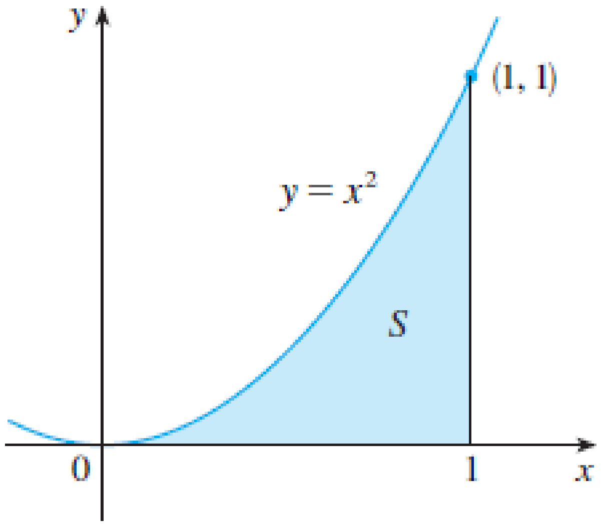
No entanto, parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área.

<u>Procedimento analítico:</u> Aproximar a região utilizando retângulos (1) e depois tomar o limite da soma das áreas desses retângulos à medida que o número de retângulos aumenta (2).



O problema da Área

Exemplo: Use retângulos para estimar a área sob a curva $y = x^2$ com $x \in [0,1]$.



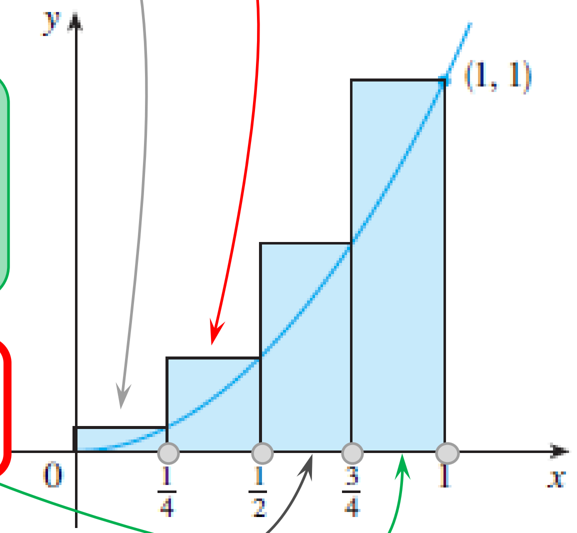
1ª aproximação: 4 retângulos com bases de comprimento ¼ e alturas definidas pelo valor de $y = f(x) = x^2$ na extremidade direita de cada subintervalo.

$$\boxed{AD_4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}(1)^2$$

$$= \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Superestimativa

4 retângulos, extremo direito dos subintervalos



O problema da Área

Conclusão 1: A área exata A é tal que $A < 0{,}46875$.

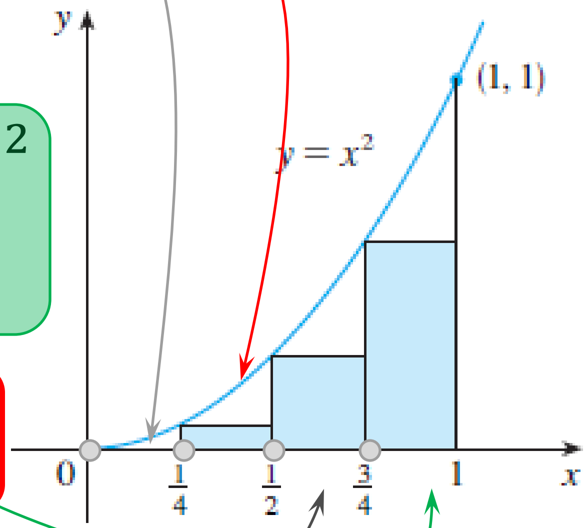
2ª aproximação: 4 retângulos com bases de comprimento ¼ e alturas definidas pelo valor de $y = f(x) = x^2$ na extremidade esquerda de cada subintervalo.

$$\boxed{AE_4} = \frac{1}{4}(0)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{7}{32} = 0{,}21875$$

Subestimativa

4 retângulos, extremo esquerdo dos subintervalos



O problema da Área

Conclusão 2: A área exata A é tal que $A > 0{,}21875.$

Conclusão 3: A área exata A é tal que $\boxed{0{,}21875} < A < \boxed{0{,}46875.}$

subestimativa superestimativa

Como melhorar estas estimativas?

Aumentando o número de retângulos!

Área exata = 1/3

Demonstre!

n	AE	AD
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

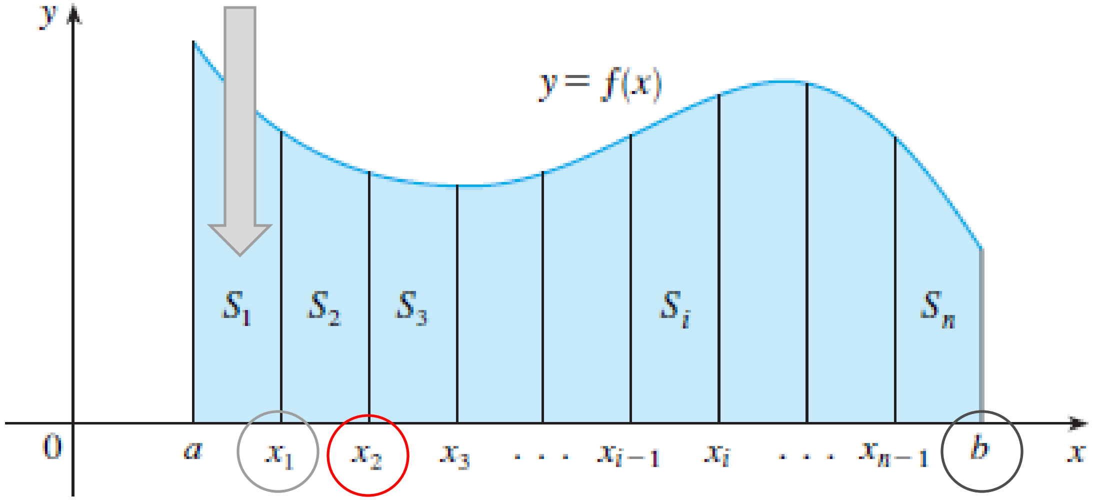
O problema da Área

Generalizando o procedimento...

Divide-se a área S em n faixas $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ de igual largura.

$x \in [a, b]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$



O intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

$x_0 = a \; ; \; x_n = b$

Extremidades direitas:

$x_1 = a + \Delta x$

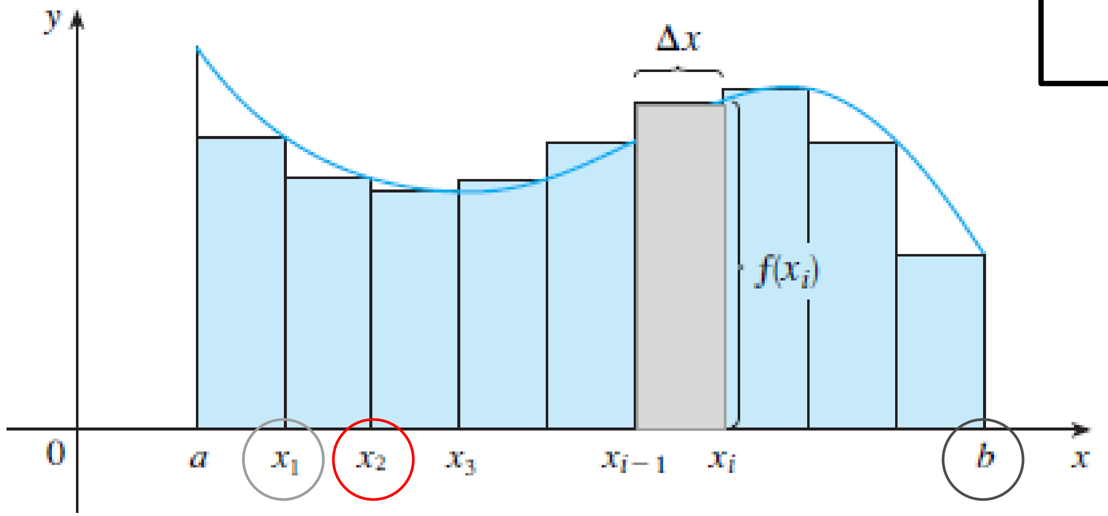
$x_2 = a + 2\Delta x$

$\vdots$

$x_n = a + n\Delta x = b$

O problema da Área

Utilizando-se o valor de f na extremidade direita de cada subintervalo:



$$AD_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

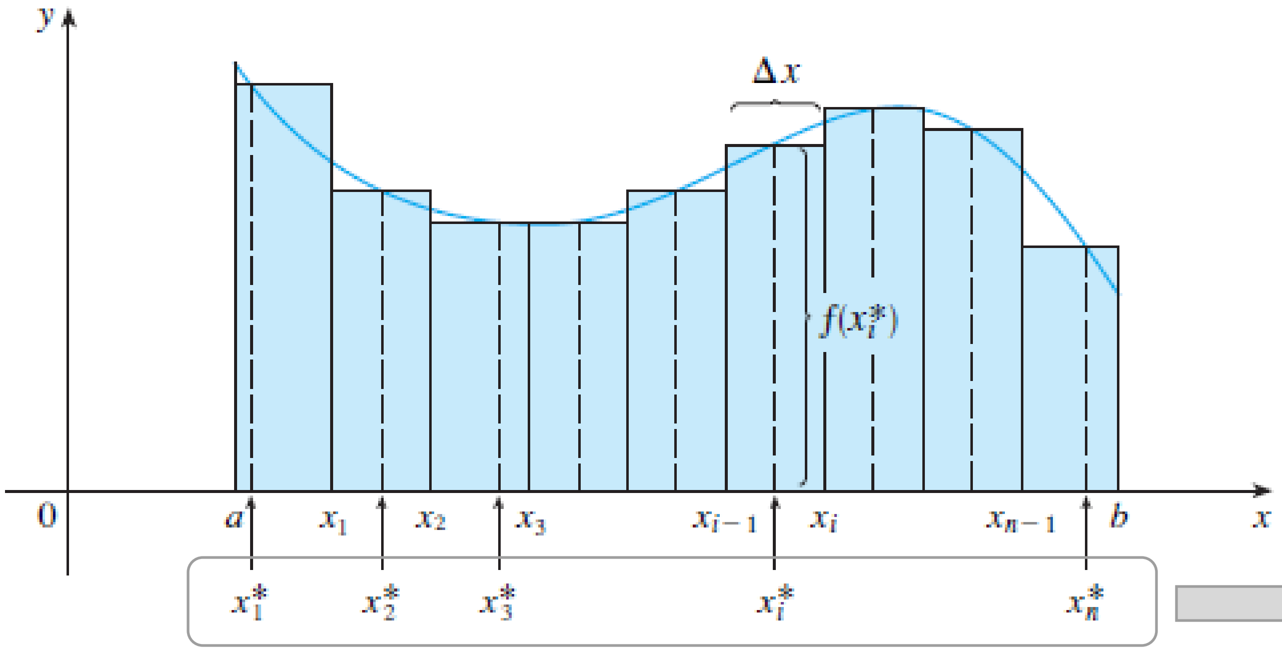
Esse resultado também é válido quando empregamos as extremidades esquerdas!

Definição: A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} AD_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

O problema da Área

De fato, ao invés de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do *i*-ésimo retângulo como o valor de f em qualquer número x_i^* no *i*-ésimo subintervalo.



$$A = \lim_{n\to\infty} AD_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Pontos amostrais

A Integral Definida

Acabamos de verificar que... Um limite da forma

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

aparece quando calculamos <u>áreas, distâncias e trabalho</u>. Este limite ocorre em uma grande variedade de situações, mesmo quando f não é, necessariamente, uma função positiva.

A Integral Definida

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots , x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots , x_n^*$ pontos arbitrários nesses intervalos, de forma que x_i^* esteja no *i-ésimo* subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Então, a Integral Definida de f calculada de a a b é:

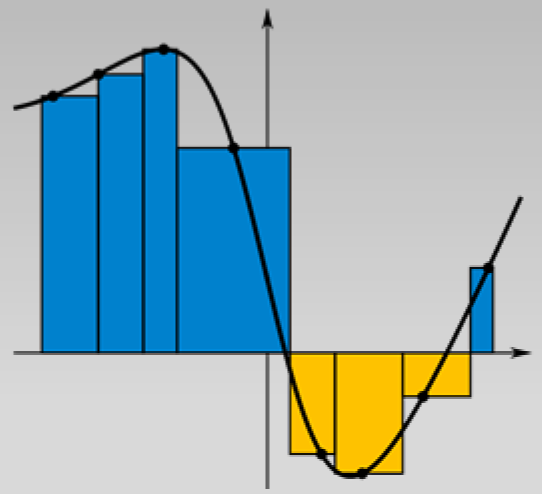
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Desde que o limite exista e resulte o mesmo para qualquer escolha de pontos amostrais. Se o limite existir, diremos que f é integrável em $[a, b]$.

Cálculo de Integrais

Ex01: Calcule as integrais:

(a) $\int_0^3 (1 + 2x^2)dx$ (b) $\int_0^2 (2x + x^3)\, dx$



Propriedades da Integral Definida

Na definição da Integral Definida, assume-se que $a < b$. Mas a Soma de Riemann também faz sentido se $a > b$.

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

Uma vez que Δx mudará de $(b-a)/n$ para $(a-b)/n$

Se $a = b$, então $\Delta x = 0$, de modo que:

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

Propriedades da Integral Definida

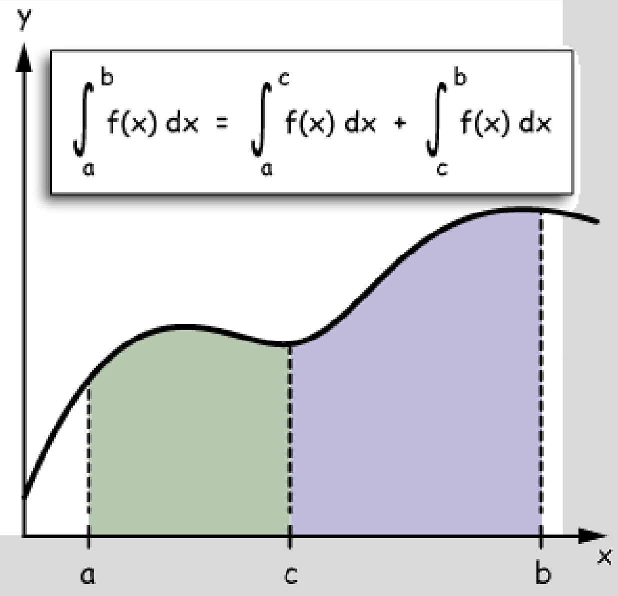
(1) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, em que c é qualquer constante.

(2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, em que $c \in \mathbb{R}$

(4) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

(5) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$



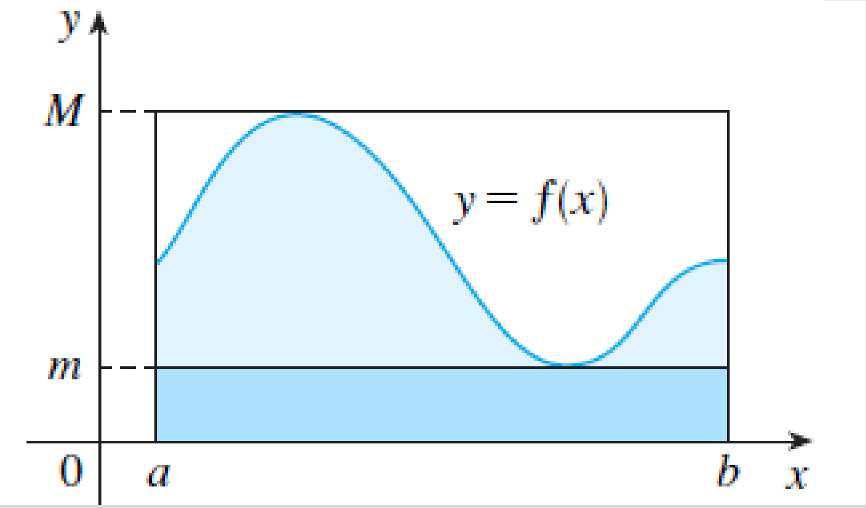
Propriedades da Integral Definida

(6) Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(7) Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

(8) Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então:

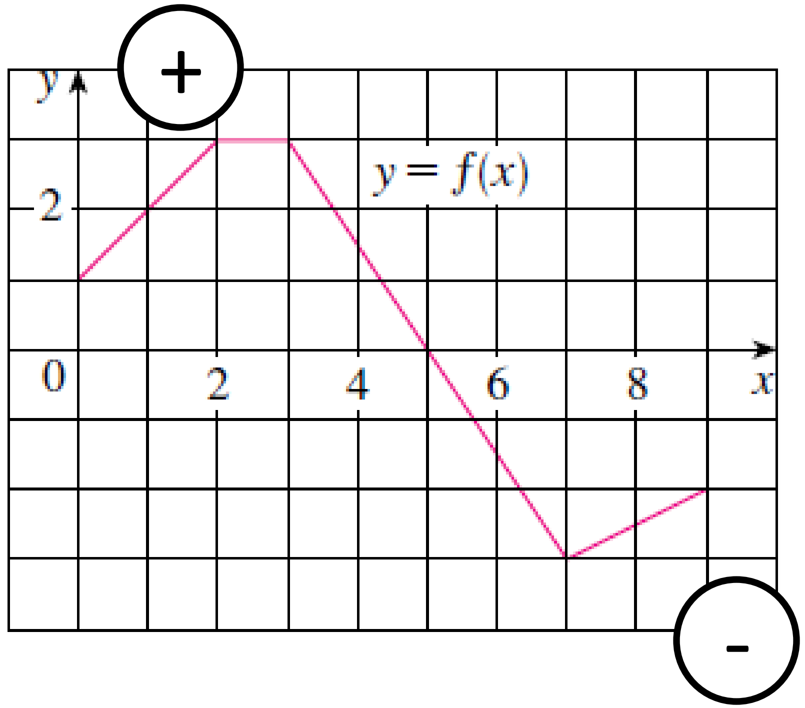
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$



Exercícios

Ex02: É dado o gráfico da função f. Calcule cada integral interpretando-as em termos de áreas.

(a) $\int_0^2 f(x)\,dx$	(b) $\int_0^5 f(x)\,dx$
(c) $\int_5^7 f(x)\,dx$	(d) $\int_0^9 f(x)\,dx$



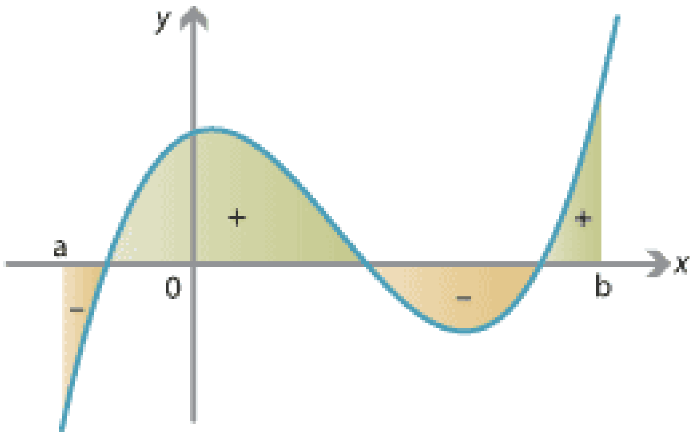
Observe o balanço de áreas!

Exercícios

Ex03: Calcule $\int_{-6}^{6} f(x)dx$, interpretando-a em termos de áreas.

$$f(x) = \begin{cases} -2, \text{se } x \leq -4 \\ -|x| + 2, \text{se } -4 < x \leq 3 \\ x - 4, \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Observe o balanço de áreas!



Exercícios

Ex04: Calcule:

(a) $\int_{-1}^{5}(1+3x)dx$

(b) $\int_{-2}^{0}(x^2+x)dx$

Ex05: Demonstre que $\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Ex06: Calcule cada integral, interpretando-a em termos de áreas.

(a) $\int_{-1}^{2}(1-x)dx$	(b) $\int_{-1}^{2}\lvert x\rvert dx$

Ex07: Escreva como uma única integral na forma $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{5} f(x)dx - \int_{-2}^{-1} f(x)dx$$

Ex08: Se $\int_1^5 f(x)dx = 12$ e $\int_4^5 f(x)dx = 3{,}6$, encontre $\int_1^4 f(x)dx$.

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!