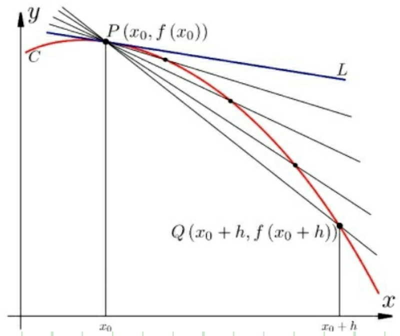
Ex02: (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto (1,0):

(i) Usando a definição $m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(ii) Usando a definição $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).



(a) Dado: $P(1,0)$

$y = x - x^3$

(i) $m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Sendo $\begin{cases} y = f(x) = x - x^3, \\ a = 1 \end{cases}$ temos:

$$m = \lim_{x\to 1} \frac{(x-x^3)-(1-1^3)}{x-1} = \frac{0}{0} \quad \text{(pela substituição direta!)}$$

Logo,

$$m = \lim_{x\to 1} \frac{x(1-x^2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(1+x)\overbrace{(1-x)}^{-(x-1)}}{x-1} =$$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{x(1+x)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = -2$$

(ii) $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, temos:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)-(1+h)^3]-(1-1^3)}{h} = \frac{0}{0} \quad \text{quando } h \to 0.$$

Logo,

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-(1+3h^2+3h+h^3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}+h-\cancel{1}-3h^2-3h-h^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(1-\cancel{3h}^{\,0}-3-\cancel{h^2}^{\,0})}{\cancel{h}} = -2$$

(b) Temos: $\begin{cases} P(1,0) \\ m = -2 \end{cases}$ EQ. Reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$, $m \to -2$, $P(1,0)$

Obs: $y_{r_t} \to$ reta tangente

Portanto,

$$y - 0 = -2(x-1)$$

$$y_{r_t} = -2x + 2$$

Ex04: Seja $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$. Calcule a derivada de f no ponto $a = 1$.

Seja: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, assim:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)}{4-(1+h)^2} - \frac{1}{4-1^2}}{h} = \frac{0}{0} \quad \text{Logo,}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{3(1+h) - (4-(1+h)^2)}{3(4-(1+h)^2)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3} + 3h - \cancel{4} + \cancel{1} + 2h + h^2}{3h(4-(1+h)^2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(5+h)}{3\cancel{h}(4-(1+h)^2)} = \frac{5}{9}$$

Temos também:

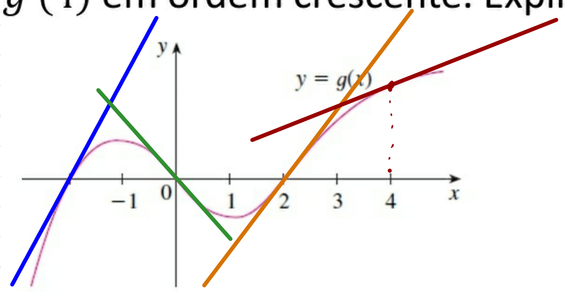
$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$, Portanto:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x}{4-x^2} - \frac{1}{3}}{x-1} = \frac{0}{0}, \quad \text{assim:}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{3x-4+x^2}{3(4-x^2)}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x-4+x^2}{3(4-x^2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{3(4-x^2)\cancel{(x-1)}} = \frac{5}{9}$$

Ex05: Para a função g, ordene os números 0, $g'(-2)$, $g'(0)$, $g'(2)$ e $g'(4)$ em ordem crescente. Explique seu raciocínio.



Definition: Derivative of $f(x)$ at $x = a$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ or}$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$$g'(0) < 0 < g'(4) < g'(2) < g'(-2)$$

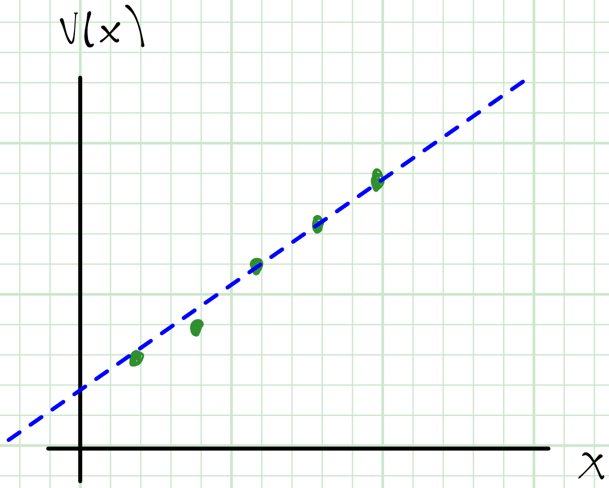
Ex06: Os candidatos à Presidência acreditam que o apoio à sua candidatura em uma certa região é afetado pelo número de anúncios televisivos exibidos. Seja $V(x)$ o número de eleitores (em milhares) que acabam votando em um candidato que utiliza x anúncios durante a campanha. A tabela fornece valores para $V(x)$.

x	$V(x)$
180	16
190	20
200	28
210	34
220	37

(a) Estime $V'(200)$. Qual sua unidade?

(b) Qual é o significado prático de $V'(200)$?

Temos:



Uma estimativa do gráfico!

(a) Para $V'(200)$, podemos:

$$V'(200) \simeq \frac{210-200}{34-28} = \frac{10}{6} = 5/3$$

ou

$$V'(200) = \frac{200-190}{28-20} = \frac{10}{8} = 5/4$$

Unidade: $V'(x) = \left[\frac{\text{milhares de eleitores}}{\text{anúncios}}\right]$

(b) Significa a taxa de crescimento de eleitores pela variação de anúncios publicados.