FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 13: Limites de Funções, Derivadas e Taxas de Variação

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

2024

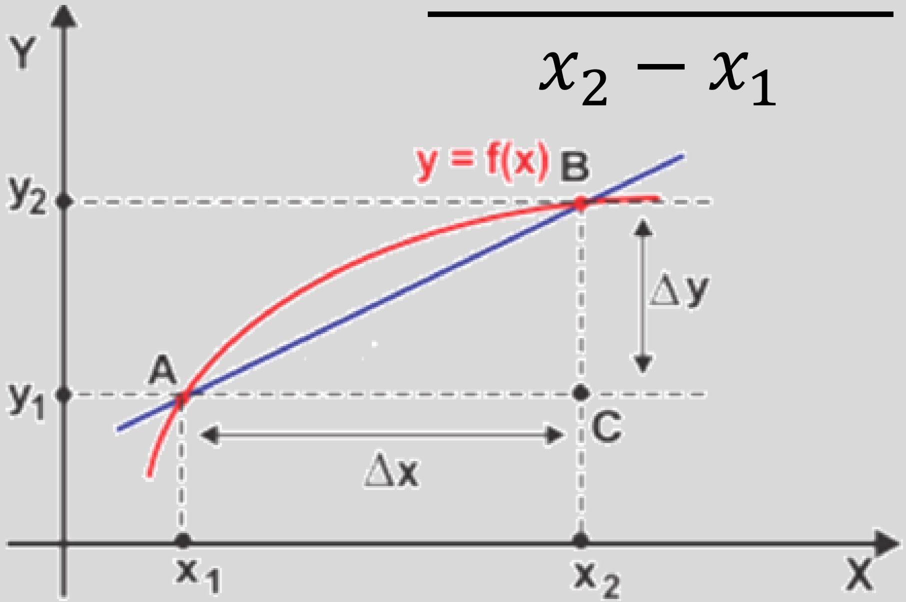
Objetivos

- Revisar o conceito de Limites de Funções, Derivadas e Taxas de Variação;
- Formas de representação;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

Taxa de variação média

Relembrando... A taxa de variação média de uma função $f(x)$ calculada entre os pontos
$A = (x_1, f(x_1))$ e $B = (x_2, f(x_2))$ é expressa por

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

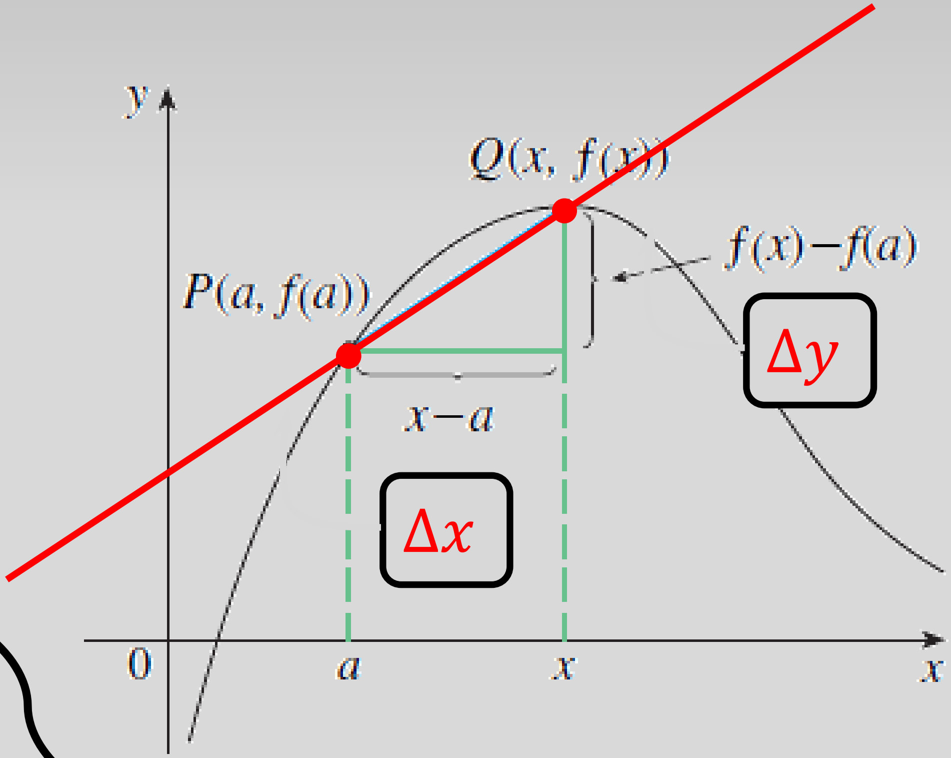


A taxa de variação média de uma função em um intervalo $[x_1, x_2]$ é igual à inclinação da reta secante ao gráfico da função nos pontos inicial e final do intervalo

Retas Tangentes

Problema (já solucionado!): Encontrar a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P = (a, f(a))$.

Consideramos um ponto próximo $Q = (x, f(x))$, com $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:



$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

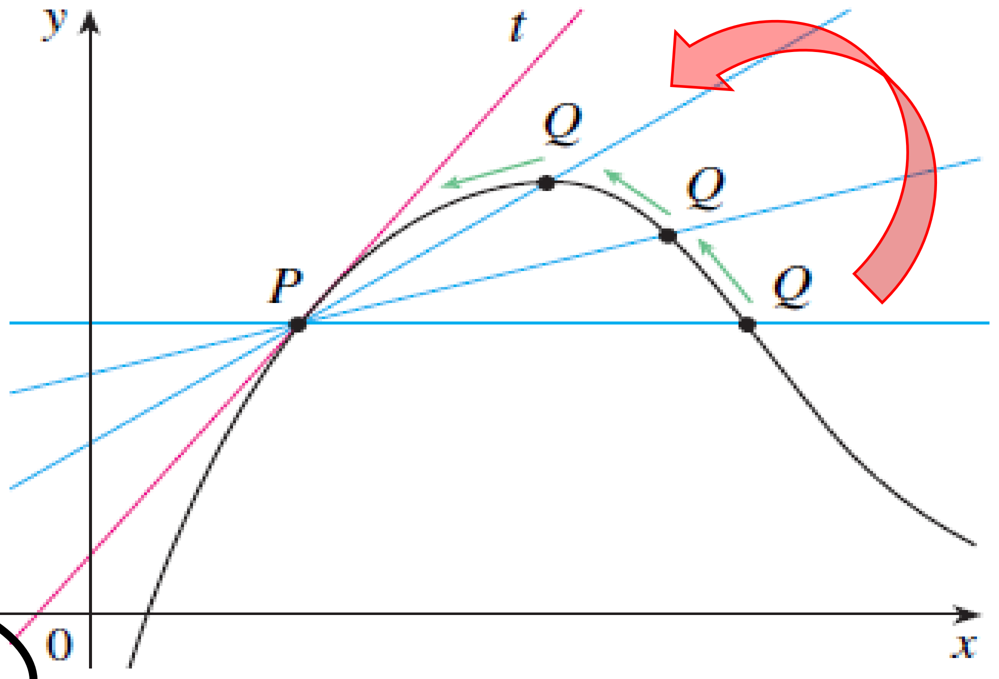
Taxa de variação média

Retas Tangentes

Problema (já solucionado!): Encontrar a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P = (a, f(a))$.

Então, fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva, obrigando $x \to a$. Assim, a reta tangente (de inclinação m) é a posição limite da reta secante PQ quando $Q \to P$:

$$\boxed{m = \lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$



Taxa de variação instantânea

$$m = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Retas Tangentes

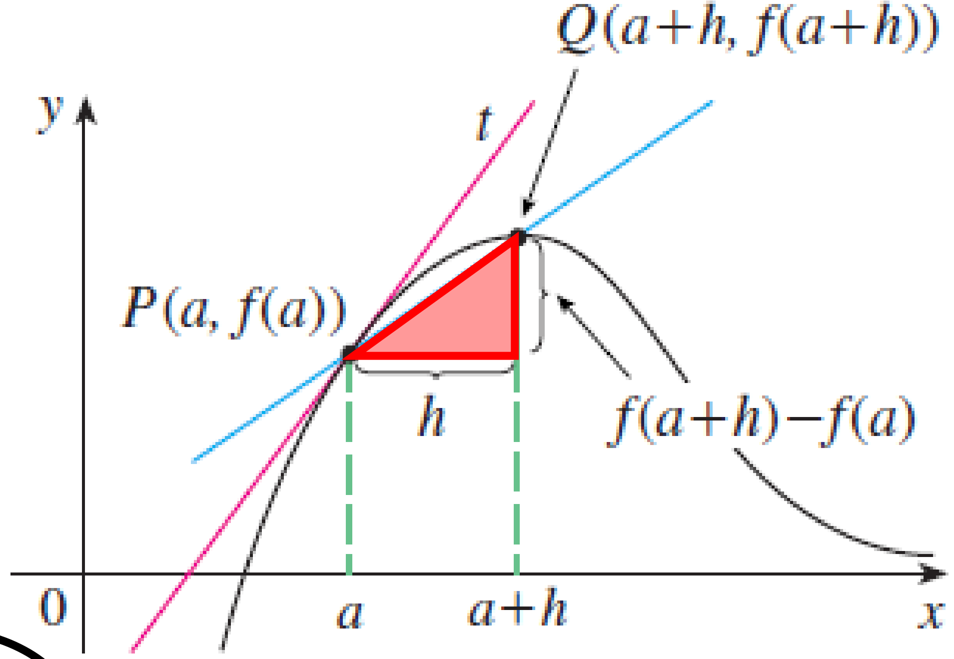
Mudança de variável: Se $h = x - a$, então $x = a + h$.

$$m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Fazendo $Q \to P$, isto é,
$x \to a$ ou $h \to 0$

$$m = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

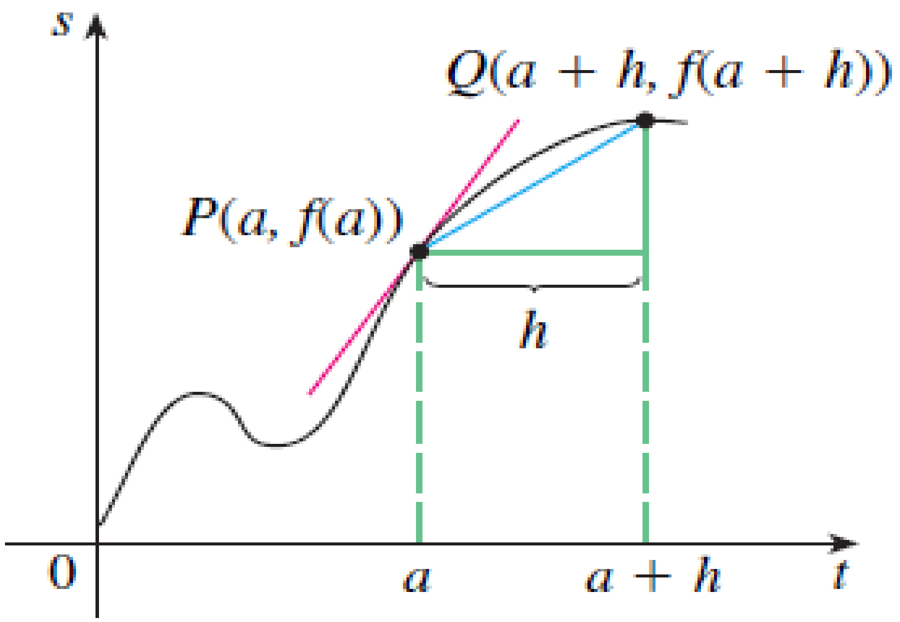
Taxa de variação instantânea



Velocidades

Função posição: $s = f(t)$

No intervalo de tempo entre $t_1 = a$ e $t_2 = a + h$, a variação na posição será de
$f(t_2) - f(t_1) = f(a+h) - f(a)$



Velocidade média $= v_m[t_1, t_2] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_{PQ}$

Taxa de variação média

Velocidades

Velocidade instantânea: Fazemos o intervalo de tempo $\Delta t = h \to 0$.

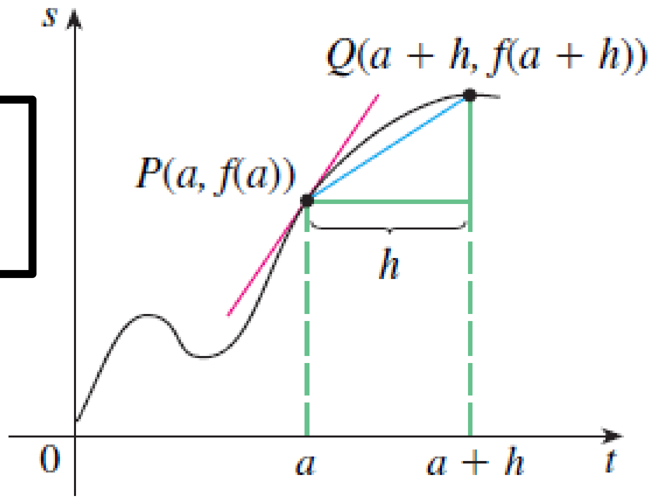
A velocidade no instante $t = a$ é expressa por:

$$\boxed{v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Taxa de variação instantânea

É o mesmo limite empregado no cálculo da inclinação da reta tangente!

Inclinação da reta tangente em P.



Resumindo...

Seja $f(x)$ uma função definida em certo intervalo I. Sejam os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (a + h, f(a + h))$ pertencentes ao gráfico de f.

A taxa de variação instantânea traz um olhar cinemático à análise, enquanto a inclinação da reta tangente traz uma perspectiva geométrica.

Taxa de variação instantânea em $x = a$

$\Updownarrow$

Inclinação da reta tangente em $x = a$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Derivadas

Definição: A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é expressa por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

se o limite existir.

Redefinindo...

A reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$ com inclinação igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

FIAP

Derivadas e Taxas de variação

Seja $y = f(x)$.

Assim, y é uma quantidade que depende de outra quantidade x.

Se x varia de x_1 a x_2, então a variação em x (também chamada incremento de x) será $\Delta x = x_2 - x_1$ e a variação correspondente em y será $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

$$\text{Taxa de variação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Inclinação da reta secante à curva $y = f(x)$ que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Derivadas e Taxas de variação

Seja $y = f(x)$.

Assim, y é uma quantidade que depende de outra quantidade x.

$$\boxed{\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$.

A derivada $f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ em relação a x, quando $x = a$.

Derivadas de funções essenciais

Durante o curso, estudamos algumas funções que chamamos de essenciais.

Esta denominação é dada pela relevância, aplicações e por uma estratégia de aprendizado utilizada na matemática.

Assim, revisaremos algumas das principais funções estudadas na matemática e suas respectivas derivadas!

Funções Simples

- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x = 1$
- $\frac{d}{dx}cx = c$
- $\frac{d}{dx}x^c = cx^{c-1}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^c}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-c}\right) = -\frac{c}{x^{c+1}}$
- $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$

Derivadas de funções essenciais

Funções Exponenciais e Logarítmicas

- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a)$

Funções Trigonométricas

- $\frac{d}{dx}\,\text{sen}\, x = \cos\, x$
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}\, x,$
- $\frac{d}{dx}\ \text{tg}\ x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}\sec x = \ \text{tg}\ x \sec x$
- $\frac{d}{dx}\ \text{cotg}\ x = -\text{cossec}\ ^2 x$
- $\frac{d}{dx}\ \text{cossec}\ x = -\text{cossec}\ x\ \text{cotg}\ x$

Exercícios

3–32 Differentiate the function.

3. $f(x) = 186.5$
4. $f(x) = \sqrt{30}$
5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$
6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$
7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$
8. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$
9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$
10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$
11. $y = x^{-2/5}$
12. $y = 5e^x + 3$
13. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
14. $R(t) = 5t^{-3/5}$
15. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$
16. $B(y) = cy^{-6}$
17. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$
18. $y = \sqrt[3]{x}$
19. $F(x) = (\frac{1}{2}x)^5$
20. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
21. $y = ax^2 + bx + c$
22. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$
23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$
24. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$
25. $y = 4\pi^2$
26. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$
27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$
28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$
29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$
30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$
31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$
32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Find an equation of the tangent line to the curve at the given point.

33. $y = \sqrt[4]{x}, \quad (1, 1)$
34. $y = x^4 + 2x^2 - x, \quad (1, 2)$

35–36 Find equations of the tangent line and normal line to the curve at the given point.

35. $y = x^4 + 2e^x, \quad (0, 2)$
36. $y = (1 + 2x)^2, \quad (1, 9)$

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!