

FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 1

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

Objetivos

- Apresentação da disciplina;
- Apresentação pessoal;
- Bibliografia da disciplina;
- Organização do curso;
- Avaliações;
- Demonstrar duas aplicações de cálculo diferencial e integral com uma abordagem analítica e computacional;
- Conclusão;
- Perguntas.

Quem sou eu

Formação Acadêmica

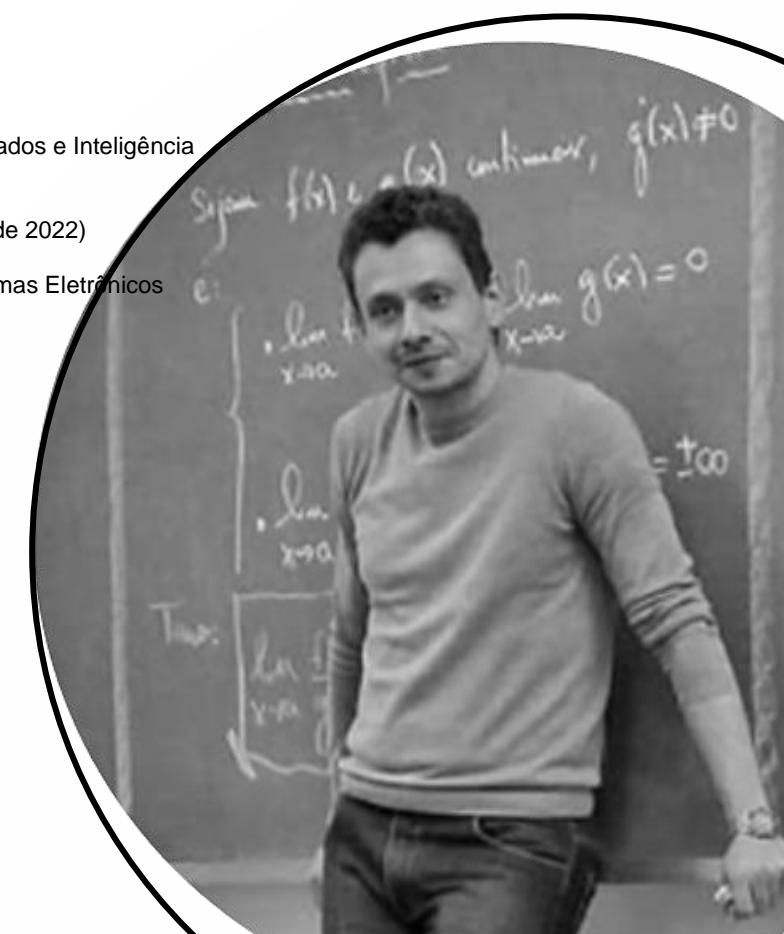
- USP – Universidade de São Paulo (2023 – em andamento).
Pós-graduação Stricto Sensu – Doutorado em Engenharia Elétrica.
 - Área de pesquisa: Engenharia de Sistemas e Inteligência Artificial.
- UFABC – Universidade Federal do ABC (2014).
Pós-graduação Stricto Sensu – Mestrado em Engenharia Elétrica.
 - Dissertação: Análise de Interferências Eletromagnéticas em Veículos Automotores utilizando Métodos Numéricos.
- PUCRS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (2019).
Pós-graduação Lato Sensu – Filosofia e Autoconhecimento.
 - USCS – Universidade de São Caetano do Sul (2011).
Pós-graduação Lato Sensu – Docência no Ensino Superior.
 - Pesquisa: Uso de Recursos Tecnológicos como Ferramenta de Aprendizagem em Disciplinas de Matemática no Curso de Engenharia.
 - IMT – Instituto Mauá de Tecnologia (2002 – 2007).
 - Graduação em Engenharia Eletrônica.
 - Centro Universitário Fundação Santo André (1998 – 2001).
 - Graduação em Bacharelado em Matemática.

Experiência profissional

- Itaú – MLOps Engineer (fev./2024).
- FIAP e Mackenzie – Professor (fev./2024).
- IMT – Instituto Mauá de Tecnologia (fev./2008 – dez/2023).
 - Professor assistente – Departamento Fundamental
 - Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Inteligência Artificial (desde 2022)
 - Coordenador do Programa de Minor em Ciência de Dados (desde 2022)
 - Professor e pesquisador do Laboratório NSEE (Núcleo de Sistemas Eletrônicos Embarcados) (desde 2022)
 - Orientação de alunos em Trabalhos de Conclusão de Curso, participação em projetos envolvendo a FAPESP, Faculdade de Saúde Pública da USP e Fundação Oncocentro do Estado de São Paulo;
 - Departamento Fundamental (desde 2008)
 - Preparação e ministração de aulas para os cursos de Engenharia da Computação, Sistemas da Informação e Ciência da Computação do Instituto Mauá de Tecnologia.
 - Preparação e ministração de aulas para o curso de Cálculo Diferencial e Integral, Estatística, Matemática Computacional (Cálculo Numérico) e Vetores, Curvas e Superfícies (Geometria Analítica) e Álgebra Linear do Instituto Mauá de Tecnologia;
- GM do Brasil (jan./2008 – set./2019).
 - Engenheiro de desenvolvimento de produto
 - Engenheiro de simulação elétrica (desde nov./2010);

[LinkedIn](#)

[Lattes](#)



Por que matemática?

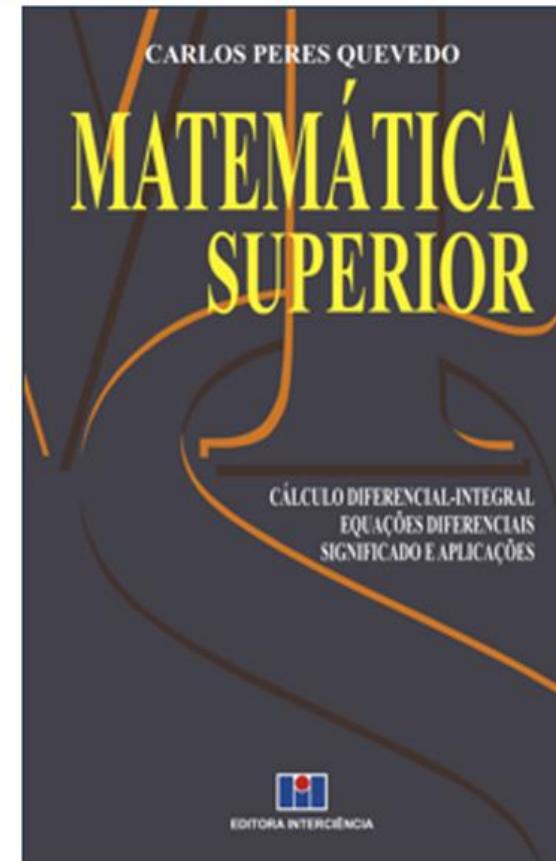
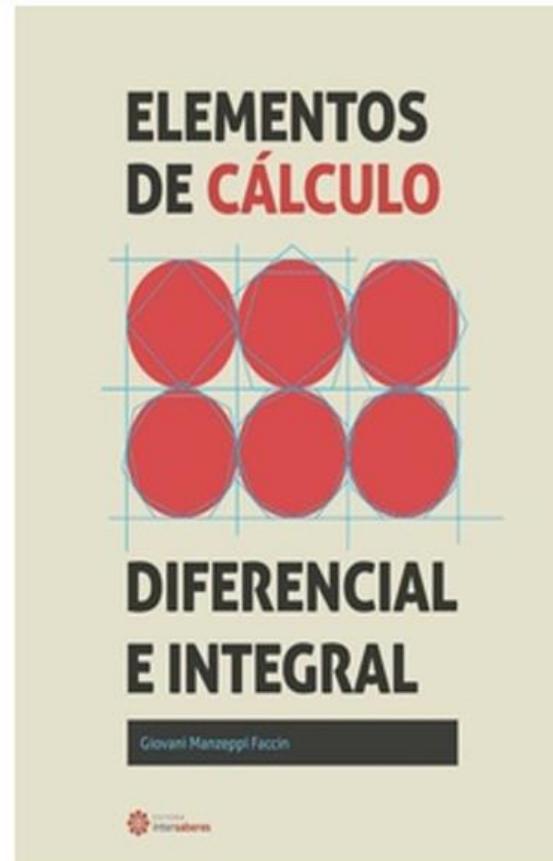
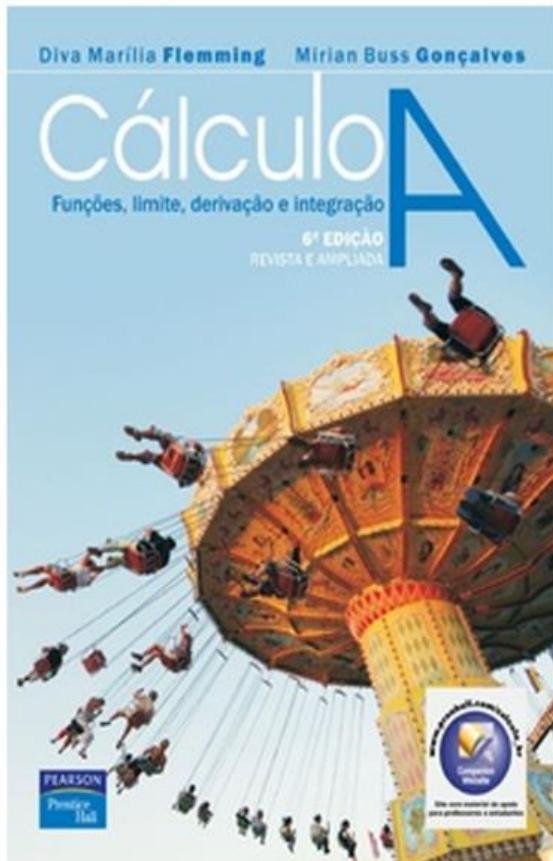
- Fundação Teórica
- Modelagem e Simulação
- Análise de Dados
- Algoritmos e Otimização
- Inovação e Pesquisa
- Inteligência Computacional
- Comunicação e Padrões Universais

21/02/2024

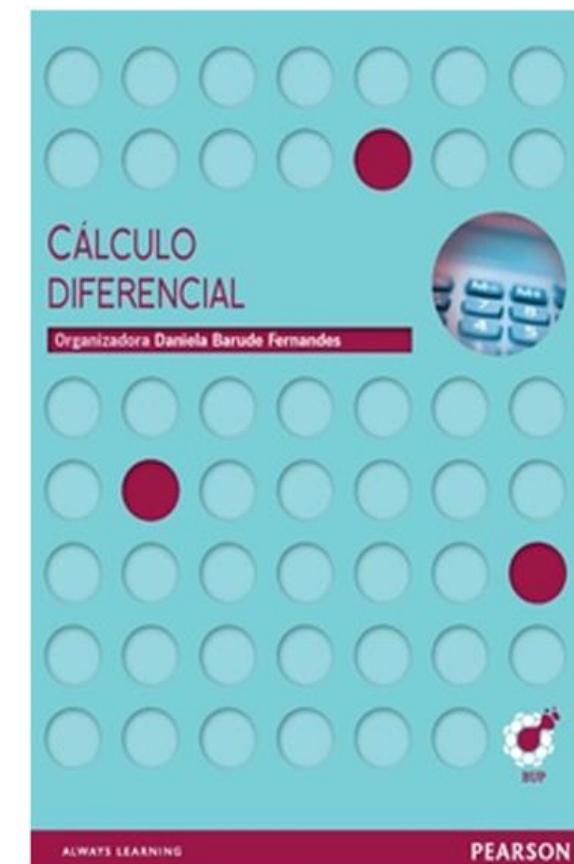
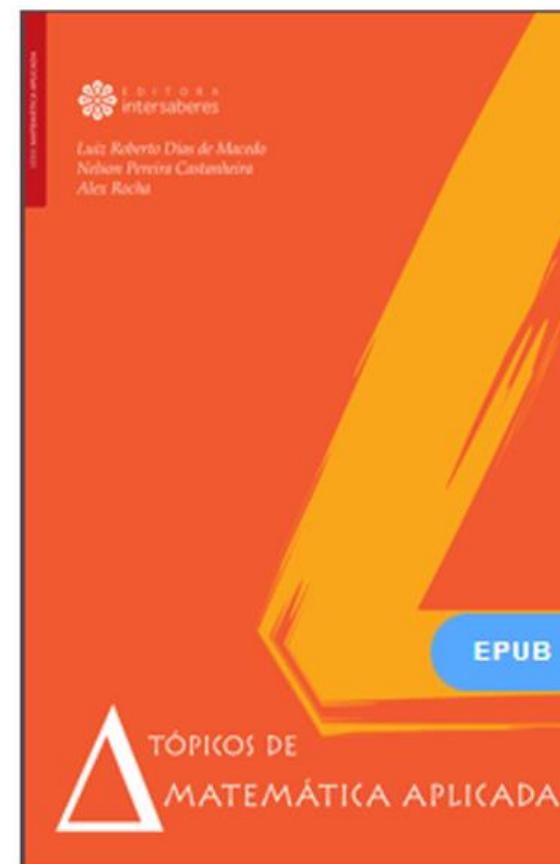
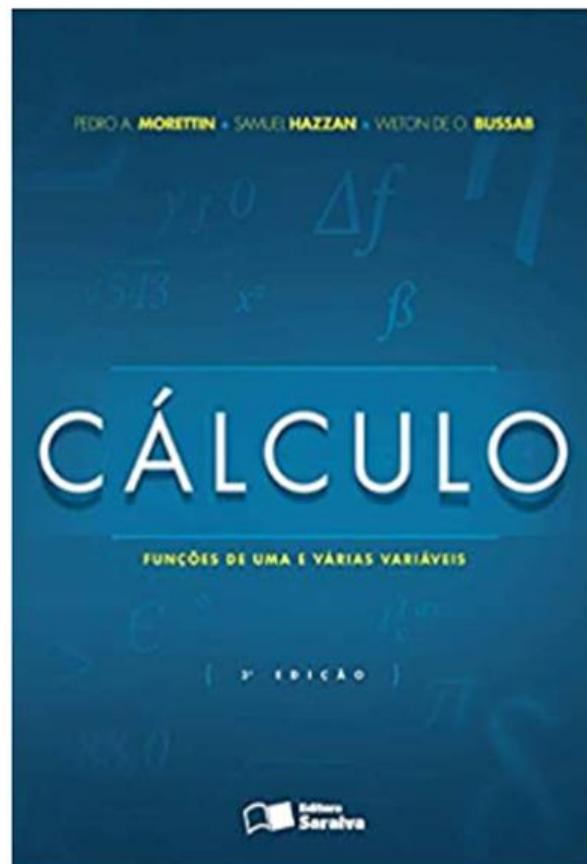
Profissões ligadas à matemática equivalem a 4,6% do PIB



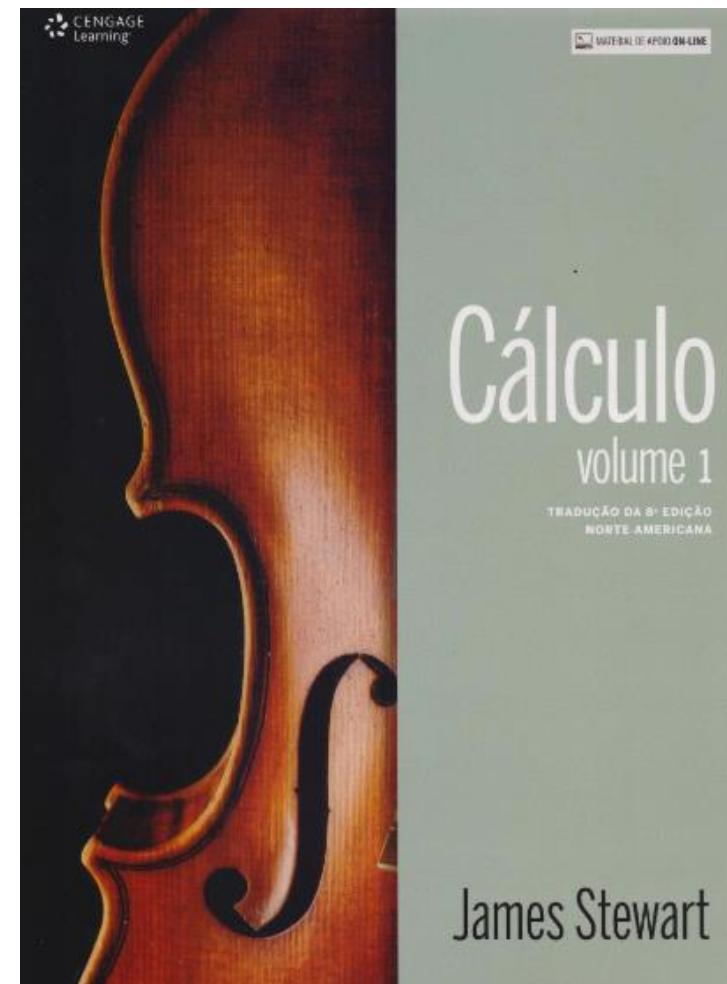
Bibliografia básica do curso



Bibliografia do curso – complementar



Bibliografia do curso – complementar



Organização do curso



Avaliação

As notas semestrais na FIAP são compostas:

- 40% Project Checkpoint Challenge&Feedback (**2 Challenges + 3 Checkpoints**)
- 60% Global Solution (solução de tarefas de Cases reais)

$$\text{MS1} = (\text{PCC\&F} \times 0.4 + \text{GS} \times 0.6)$$

A média anual é ponderada, ou seja, os semestres possuem pesos diferentes:

$$\text{MA} = (\text{MS1} \times 0.4 + \text{MS2} \times 0.6)$$

Avaliação

CRITÉRIOS DE APROVAÇÃO

Média Anual	Situação
0 a 3.9	Reprovado
4.0 a 5.9	Exame
6.0 a 10	Aprovado

CASO O ALUNO FIQUE DE EXAME:

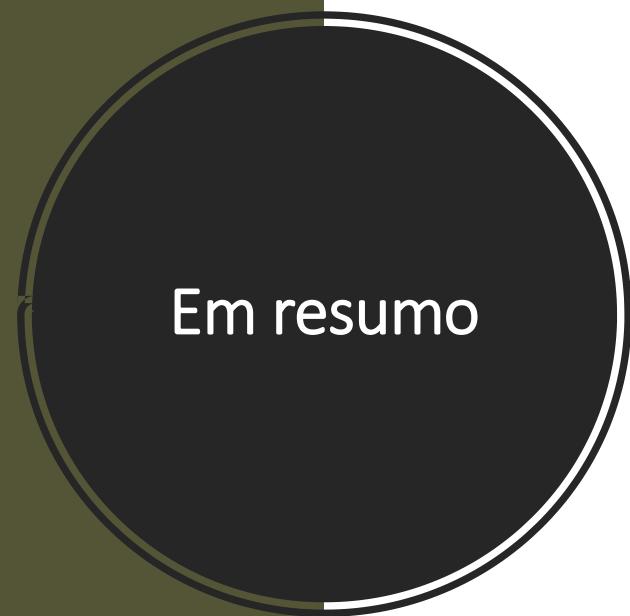
Nota para aprovação = $(12 - \text{Média Anual})$



Calendário

JUNHO

- 27/05 a 07/06** Período de avaliação semestral (Global Solutions).
- 10 a 14** Período de avaliação semestral de disciplinas de dependência.
- 10 a 14** Período de solicitação de avaliações substitutivas regulares e de dependência.
- 17 a 21** Período de avaliações substitutivas regulares e de dependência.
- 24 a 28** Vistas de provas
- 28** Final das fases / divulgação dos resultados das avaliações semestrais



Global Solution
Final do
semestre



Sprint
entregas

Checkpoint
Entregas durante
o semestre

Avaliação

Calendário (sujeito a alteração) 1º semestre:

- CP1: TBD
- CP2: TBD
- CP3: TBD

Problema #1

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R\$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R\$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

Problema de
Otimização

Compreendendo o problema

Suponha que $C(x)$ seja o custo total de que uma empresa incorre na produção de x unidades de um certo produto. A função $C(x)$ é denominada **função de custo**. Se o número de itens produzidos aumenta de x_1 para x_2 , o custo adicional será $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite dessa grandeza quando $\Delta x \rightarrow 0$, ou seja, a taxa instantânea de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, é denominado **custo marginal** pelos economistas:

$$Custo\ marginal = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Compreendendo o problema

Fazendo $\Delta x = 1$ e n muito grande (de modo que Δx seja pequeno comparado com n), temos:

$$C'(x) \approx C(n+1) - C(n)$$

Assim, o custo marginal de produção de n unidades é aproximadamente igual ao custo de produção de mais uma unidade [a($n + 1$) – *ésima unidade*].

Em geral, é apropriado representar uma **função custo** por um **polinômio**:

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Onde a representa os custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, manutenção), e os outros termos representam o custo das matérias-primas, da mão de obra e assim por diante. O custo das matérias-primas pode ser proporcional a x , mas o custo da mão de obra poderia depender parcialmente das potências mais altas de x , em decorrência dos custos de horas extras e ineficiências envolvidas em operações de larga escala.

Compreendendo o problema

Seja $p(x)$ o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades. Então, $p(x)$ é chamada **função demanda** (ou **função preço**) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de x . Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então a **receita total** será:

$$R(x) = xp(x)$$

E $R(x)$ é chamada **função receita**. A derivada $R'(x)$ da função receita é chamada **função receita marginal** e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas.

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

E $L(x)$ é chamada **função lucro**. A **função lucro marginal** é $L'(x)$, a derivada da função lucro.

Resolvendo o problema

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R\$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R\$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar** sua receita?

Abordagem analítica

Se x for no número de aparelhos de vídeo game vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$. Para cada aumento de 20 unidades vendidas, o preço cai em R\$ 10,00. Portanto, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será:

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

Resolvendo o problema

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R\$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R\$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar sua receita**?

A função receita é:

$$R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

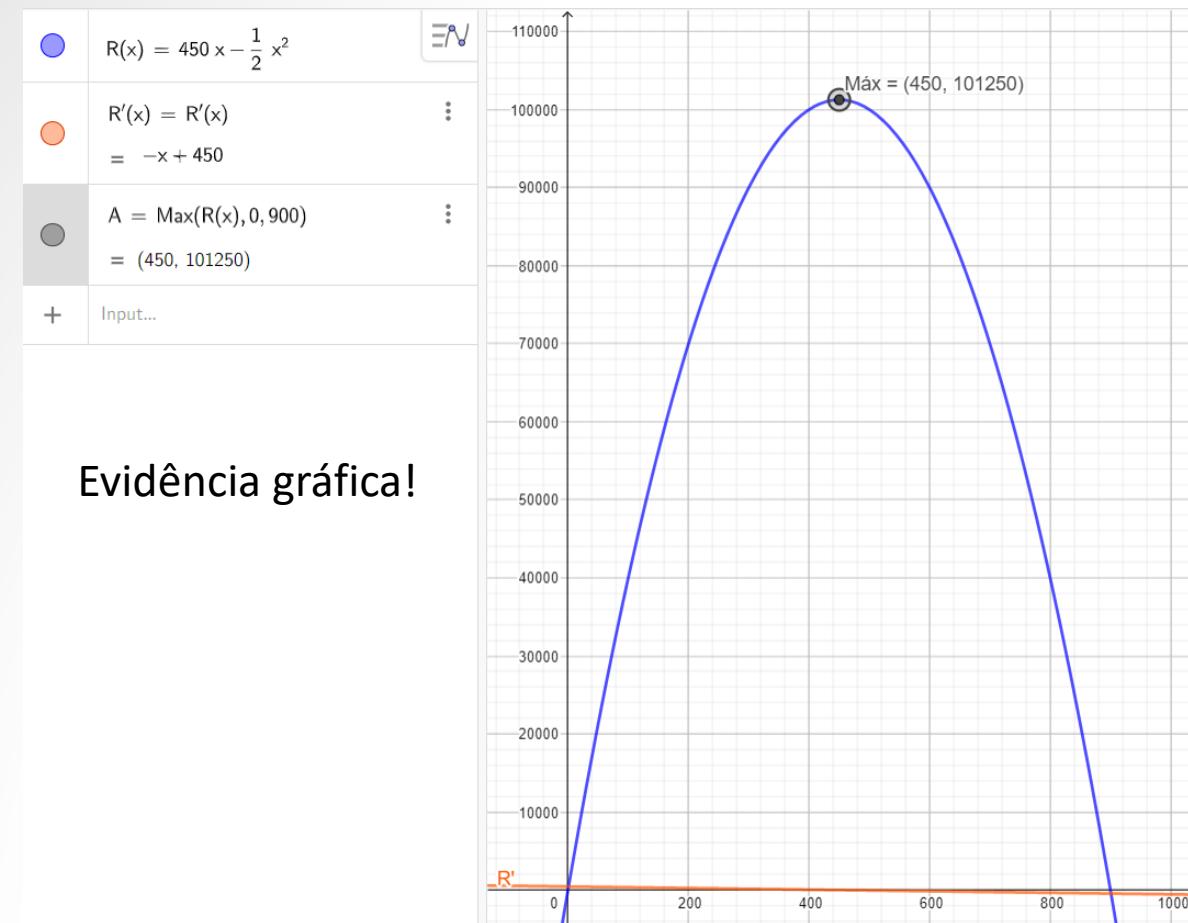
Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada ou apenas estudando o sinal da primeira derivada. Assim, o preço correspondente é:

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

E o desconto é $350 - 225 = 125$. Portanto, para maximizar a receita, a loja deve oferecer um desconto de R\$ 125,00

Resolvendo o problema

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R\$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R\$ 100,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar** sua receita?

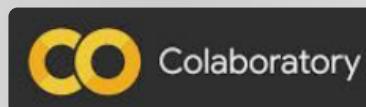


Resolvendo o problema

Uma loja tem vendido 200 aparelhos de vídeo game por semana a R\$ 350,00 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada R\$ 10,00 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a **função demanda** e a **função receita**. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para **maximizar sua receita**?

Abordagem computacional

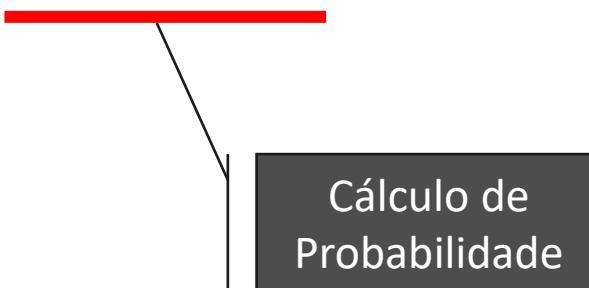
Usaremos Python para resolver o problema.



Problema #2

Seja $f(x) = 0,006x(10 - x)$ para $0 \leq x \leq 10$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x .

- (a) Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade;
- (b) Encontre $P(4 \leq X \leq 8)$.



Cálculo de
Probabilidade

Cálculo de Probabilidade

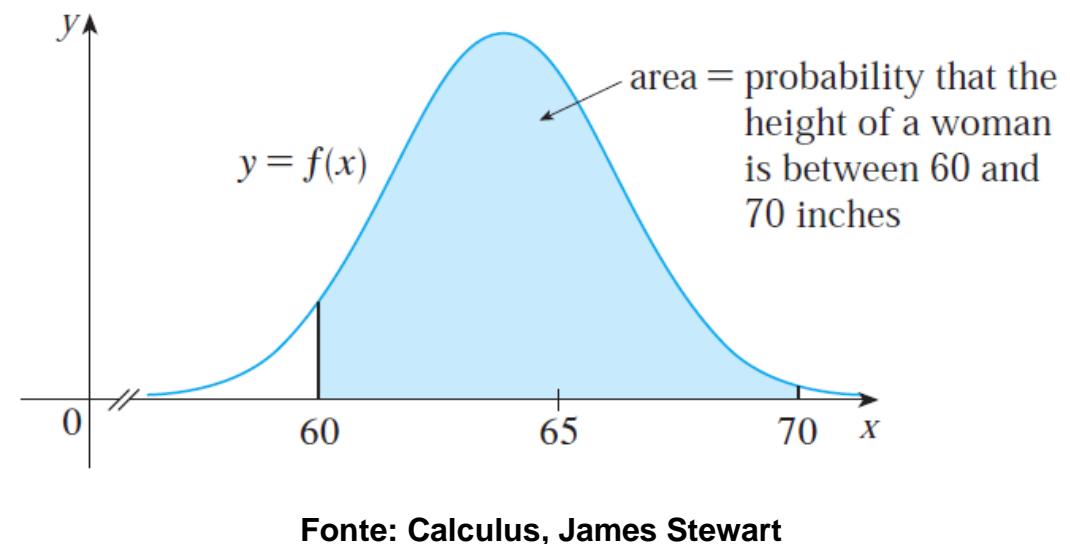
O cálculo tem um papel na análise de um comportamento aleatório. Suponha que consideremos o nível de colesterol de uma pessoa escolhida aleatoriamente em um grupo de determinada idade, ou a altura de uma mulher adulta escolhida aleatoriamente. Essas quantidades são chamadas de **variáveis aleatórias contínuas**, porque seus valores variam em um intervalo de números reais, embora possam ser medidos ou registrados apenas com o inteiro mais próximo. Por exemplo, poderíamos determinar a probabilidade de uma pilha durar entre 100 e 200 horas. Se X representar a durabilidade daquele tipo de bateria, denotamos a probabilidade como:

$$P(100 \leq X \leq 200)$$

Cálculo de Probabilidade

Cada variável aleatória contínua X tem uma função densidade de probabilidade f . Isso significa que a probabilidade de X estar entre a e b é encontrada pela integração de f de a até b :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Fonte: Calculus, James Stewart

Cálculo de Probabilidade

Em geral, a **função densidade de probabilidade** f de uma variável aleatória X satisfaz $f(x) \geq 0$ para todo x . Como as probabilidades são medidas em uma escala de 0 até 1, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Resolvendo o problema

Seja $f(x) = 0,006x(10 - x)$ para $0 \leq x \leq 10$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x .

- (a) Verifique se $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{10} 0,006x(10 - x)dx = 0,006 \left[5x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = 1$$

Portanto, $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

- b) Encontre $P(4 \leq X \leq 8)$.

$$P(4 \leq X \leq 8) = \int_4^8 f(x)dx = 0,006 \left[5x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_4^8 = 0,544$$



Outros exemplos: Gradiente Descendente

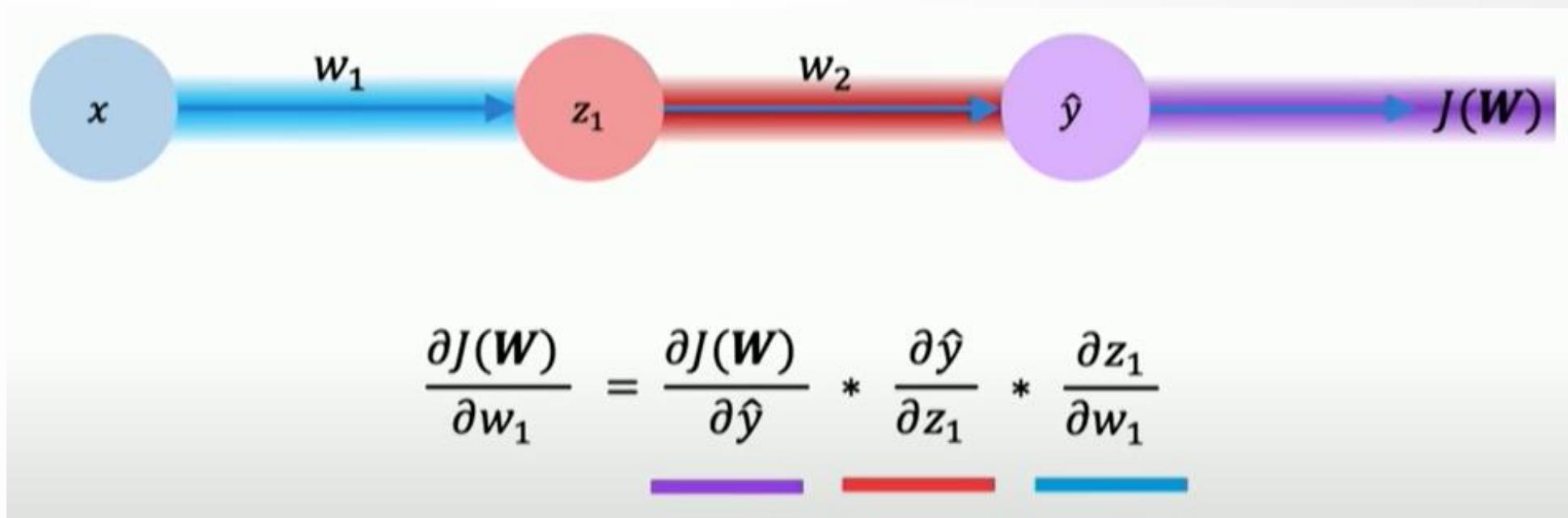
É um algoritmo de otimização usado para encontrar o valor mínimo de uma função. Frequentemente é usado em aprendizado de máquina e inteligência artificial para minimizar funções de erro ou perda, ajustando iterativamente os parâmetros do modelo.

Algoritmo:

1. Inicializar os pesos da rede randomicamente $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
2. Iterar até a convergência:
 1. Calcular o gradiente, $\frac{\partial J(W)}{\partial W}$
 2. Atualizar os pesos, $W \leftarrow W - \eta \frac{\partial J(W)}{\partial W}$
 3. Retornar

Gradiente Descendente e *backpropagation*

- Aplicação em um *perceptron* com uma entrada, um neurônio e uma saída:



Fonte: MIT Introduction to Deep Learning

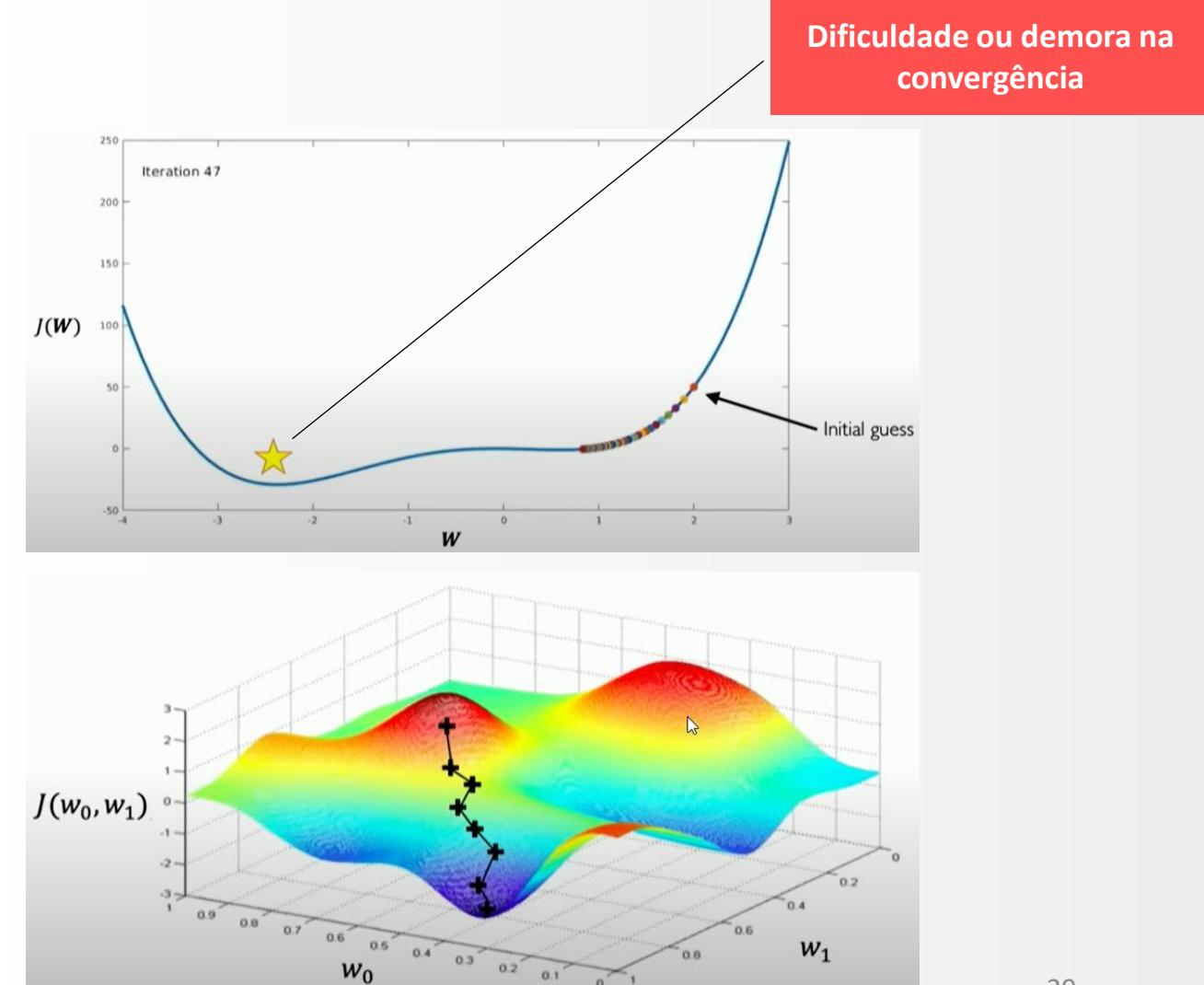
Gradiente Descendente e dificuldades no cálculo

- Otimização pelo Gradiente Descendente:

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} - \eta \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}}$$

↑
Taxa de aprendizagem

Fonte: MIT Introduction to Deep Learning



Conclusões

- Embora seja um problema simples, a metodologia de cálculo e resolução empregadas no problema de otimização podem ser utilizadas em outras aplicações;
- É possível utilizar recursos computacionais para se obter e reproduzir resultados analíticos. No entanto, quando analisamos aplicações reais de engenharia, o objetivo sempre será a solução de um problema e a resposta deve ser numérica. Assim, métodos computacionais são largamente utilizados nos ambientes de desenvolvimento;
- Existem diversos métodos para se trabalhar com otimização, como programação linear e não-linear, Algoritmos Genéticos, Otimização Convexa etc.
- A integração é uma ferramenta essencial para calcularmos probabilidades, assim, um fundamento matemático para os algoritmos de Machine Learning e Inteligência Artificial;
- O algoritmo de Gradiente Descendente é essencialmente uma derivada utilizando uma regra da cadeia.

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.
- MIT – Introduction to Deep Learning, disponível em: <http://introtodeeplearning.com/>, acesso em 24/5/2023;
- GOMES, I., Visão Geral de uma Rede Neural, disponível em: <https://medium.com/neuronio-br/vis%C3%A3o-geral-de-redes-neurais-ee4b882d32af>, acesso em 24/5/2023;
- HAYKIN, S., Redes Neurais – Princípios e Prática, 2^a Edição. Porto Alegre: Bookman, 2007;
- CABRAL, E. L. L., Notas de Aula – Pós Graduação em Ciência de Dados e Inteligência Artificial, Redes Neurais Artificiais, 2023.
- ASSUNÇÃO, R., Fonte: ASSUNÇÃO, R., Notas de Aula – Deep Learning – UFMG, disponível em: <https://homepages.dcc.ufmg.br/~assuncao/AAP/>, Acesso em 24/05/2023.



Perguntas?



Obrigado!

