FIAP

Differentiated Problem Solving

Aula 8: Funções exponenciais e logarítmicas

Prof. Jones Egydio

profjones.egydio@fiap.com.br

Objetivos

- Explorar as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas;
- Formas de representação;
- Exemplos e exercícios;
- Conclusão;
- Perguntas.

Função exponencial

Funções exponenciais são do tipo

$$f(x) = a^x\text{, com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

- Se $a = 1$, então $f(x) = 1^x = 1$,
uma função constante.

- Se $a = 0$, então $f(x) = 0^x = 0$, uma função constante.

- Se $a < 0$, $f(x) = a^x$ resultaria em imagens reais e complexas, por exemplo:

$$f(x) = (-4)^x \Rightarrow f(2) = (-4)^2 = 16 \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} = 2i$$

Função exponencial

Propriedades de $f(x) = a^x$:

❶ $f(0) = 1$ (A função sempre assumirá o valor 1 quando $x = 0$)

❷ $f(x) \neq 0$ (Uma função exponencial jamais se anula)

❸ $f(x) > 0$ (Uma função exponencial é sempre positiva)

$\left.\right\}$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+^*$

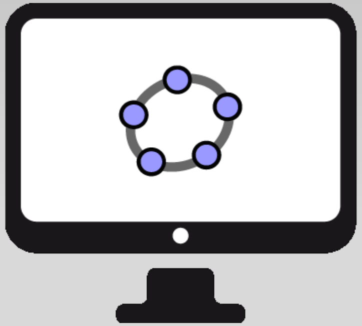
❹ $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

❺ Se $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ (f decrescente)

❻ Se $a > 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (f crescente)

Função exponencial

Gráfico de $f(x) = K \cdot a^{bx+c} + d$:



Ex01: Esboce o gráfico de $y = 1 - 3 \cdot 2^{1-\frac{x}{2}}$

Funções exponenciais modelam crescimento e decaimento

Fenômenos que exibem rápido crescimento

Fenômenos que exibem rápido decaimento, nunca atingindo zero

O número e

O número $e \approx 2{,}71828$ (conhecido como Número de Euler, embora tenha sido descoberto por Jacob Bernoulli em seus estudos de juros compostos) é a escolha de base para a função exponencial $f(x) = a^x$ tal que $f'(0) = 1$.

Leonhard Euler

Jacob Bernoulli

Ou seja, a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$ em $x = 0$ tem inclinação unitária.

FIAP

O número *e*

As afirmações a seguir são equivalentes:

1 $e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

(Limites Exponenciais Fundamentais)

2 $e = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

3 e é o único real positivo tal que $\int_1^e \frac{1}{t}\, dt = 1$

4 Se $f(t)$ é uma função exponencial, então $\tau = f(t)/f'(t)$ é denominada constante de tempo, sendo compreendida como o intervalo de tempo necessário para que a função exponencial cresça de um fator e: $f(t + \tau) = e \cdot f(t)$.

+ Exemplos

Função logarítmica

Funções logarítmicas são do tipo

Funções inversas!

$$f(x) = \boxed{y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, \text{com } a > 0 \text{ e } a \neq 1}$$

- $\text{Dom } f = (0, \infty) = \mathbb{R}_+^*$
- $\text{Im } f = \mathbb{R}$
- Se $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ (f decrescente)
- Se $a > 1$: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (f crescente)

Por quê?

Função logarítmica

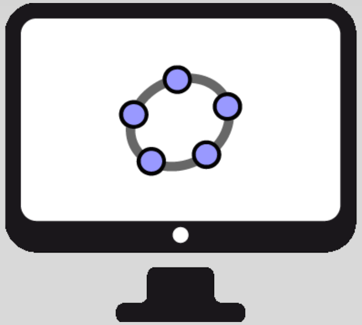
Sejam $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$:

$$\boxed{\begin{gathered}\log_a a^x = x, \forall\, x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} = x, \forall\, x > 0\end{gathered}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered}f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x) = x, \forall\, x \in \mathbb{R} \\ g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = x, \forall\, x > 0\end{gathered}}$$

Gráfico de $y = K \log_a(bx + c) + d$:



Função logarítmica

IMPORTANTE A função inversa de $y = e^x$ é $\underbrace{y = \log_e x = \ln x}_{\text{Logaritmo natural ou neperiano}}$

Propriedades:

❶ Logaritmo do produto: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

❷ Logaritmo do quociente: $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

❸ Logaritmo da potência: $\log_a x^y = y \log_a x$

❹ Mudança de base: $\log_a x = (\log_b x)/(\log_b a)$

Exercícios

Ex01: Esboce, passo a passo, o gráfico de $y = -\ln(2x+1) + 3$.

Ex02: Determine o valor exato de cada expressão:

(a) $\log_2 16$	(b) $\log_4 16$	(c) $\log_5 625$	(d) $\ln \sqrt[3]{e}$	(e) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8}$

Ex03: Simplifique as expressões:

(a) $\ln x^3 y^4 z^5$	(b) $\log_3 \left(\frac{9x^4}{\sqrt{y}}\right)$	(c) $\ln \left(\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}\right)$

Referências bibliográficas

- STEWART, J., Calculus 7E Early Transcendentals, CENGAGE Learning, NY, 2012.

Obrigado!