Modell av solsystemet

Marte Lunde Kvam og Jelena Jovanovic

October 2020

Contents

1 Introduksjon **3**

2 Metoder **3**
2.1 Jord-sol-systemet . . . 3
2.2 Euler metoden . . . 5
2.3 Velocity Verlet metoden . . . 6
2.4 Test av algoritmene . . . 7
2.5 Bevaring av vinkelmomentet . . . 7
2.6 Testing av ulike former for krefter . . . 8
2.7 Unnslippningsfart . . . 10
2.8 Tre-legeme problemet . . . 10
2.9 Modell for alle planetene i solsystemet . . . 11
2.10 Perihelion presesjon til Merkur . . . 12

3 Resultater **13**
3.1 Test av algoritmene . . . 13
3.2 Bevaring av vinkelmomentet . . . 15
3.3 Testing av ulike former for krefter . . . 15
3.4 Unnslippingshastighet . . . 17
3.5 Tre-legeme problemet . . . 18
3.6 Modell for alle planetene i solsystemet . . . 20
3.7 Perihelion presesjon til Merkur . . . 20

4 Diskusjon **20**
4.1 Test av algoritmene . . . 20
4.2 Bevaring av vinkelmomentet . . . 21
4.3 Teststing av ulike former for krefter . . . 21
4.4 Unnslippningshastighet . . . 22
4.5 Tre-legeme-systemet . . . 22
4.6 Modell for alle planetene . . . 22
4.7 Perihelion presesjon til Merkur . . . 22

5 Konklusjon **22**

6 kilder/referanse **22**

I denne rapporten skal vi se på to metoder for å simulere solsyemet, ved å skrive en objektorientert kode. De to metodene vi bruker er Velocity Verlet og Eulers metode. Vi fant at CPU-tiden for de ulike alogritmene er..., og at .. er dermed er mer effektiv, mens ... gir bedre stabilitet... Nevn hvilken CPU-tid det er for hver av algotitmene. Og antall flops

1 Introduksjon

I denne rapporten har vi, ved hjelp av en kjent kode for å løse sammenkoblede- førsterdens differensialligninger, nemlig velocity velet, utviklet en kode for å simulere solsystemet. Ettersom en slik kode vil bestå av mange repeterende elementer, hvor det eneste som varierer vil være de fysiske konstantene og variablene, skal vi skrive den objektorientert. Noe som gjør at vi enkelt kan utvide programmet til å gjelde så mange planeter vi ønsker, når vi har løst de grunnleggende differensiallikningene. Likningen vi ønsker å løse er Newtons gravitasjonslov gitt ved kraften F_G

$$F_G = \frac{GM_oM_{Earth}}{r^2}$$

Vi starter rapporten med å sette opp algoritmene vi bruker for å kunne løse differensiallikningen som gir oss banene til systemet. Til dette formål har vi sett på hvordan dette kan gjøres ved hjelp av Euler-metoden og Velocity Verlet. Deretter har vi brukt algoritmene for å simulere jord-sol-systemet, hvor vi så har har testet algoritmene, ved blant annet å se på bevaring av energi og vinkelmoment, og til slutt også CPU-tid og antall FLOPS. Vi kommer også til å se på systemet dersom foremelen for kraften hadde vært anderledes, før vi begynner å legge til flere planeter. Avslutningsvis, etter at vi har lagt til alle planetene i solsystemet, kommer vi til å studere nærmere planeten Merkur, og dens bane.
Rapporten starter med metode-delen som tar for seg alle utregninger, og forklarer hvordan vi kommer frem til resultatene våre. Deretter presenterer vi resultatene før vi diskusjonens-delen går nærmere inn på resultatene og diskuterer de.

2 Metoder

2.1 Jord-sol-systemet

Newtons 2.lov kan skrives som en andre-ordens-differensiallikning

$$m\frac{\partial^2 x}{dt^2} = F(x,t) \tag{1}$$

som vi kan skrive om til to sammenkoblede differensiallikninger

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v(t,x) \\
\frac{dv}{dt} = \frac{F(x,t)}{m} &= a(x,t)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Ved å sette $h = \frac{t_n - t_0}{n}$ kan vi diskritisere likningene slik at vi får

$$x_{i+1} = x_i + hv_i$$
$$v_{i+1} = v_i + ha_i$$

Vi bruker det faktum at jordas bane er tilnærmet sirkulær rundt solen, og setter dermed karaften til å være gitt ved

$$F_G = \frac{M_{Earth}v^2}{r} = \frac{GM_oM_{Earth}}{r^2}$$

hvor v er hastigheten til jorda.

Fra Newtons 2.lov har vi da differensiallikningen for x, y og z-retning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{M_E}\ , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{M_E} \quad \text{og} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F_z}{M_E}$$

Vi introduserer vektoren $\vec{r}$ som er en vektor mellom Jorden og Sola. Dette er illustrert på figur 1.

Figure 1: Jorda og Sola-systemet i 3 dimensjoner

Avstanden r mellom Jorden og Sola skriver vi som

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vi kan skrive uttrykkene for kraftene i x, y og z-retning som

$$F_x = -\frac{GM_oM_E}{r^3}x, \quad F_y = -\frac{GM_oM_E}{r^3}y \quad \text{og} \quad F_z = -\frac{GM_oM_E}{r^3}z$$

Vi har nå 6 sammenkoblede differensialligninger:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GM_o}{r^3}x, \\
\frac{dx}{dt} &= v_x, \\
\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GM_o}{r^3}y, \\
\frac{dy}{dt} &= v_y, \\
\frac{dv_z}{dt} &= -\frac{GM_o}{r^3}z, \\
\frac{dz}{dt} &= v_z
\end{aligned} \tag{3}$$

Vi introduserer astronomisk enhet $1AU = 1.5 \times 10^{11}m$. Dette er avstanden fra SOlen til Jorden. Vi antar at Jordens bane rundt Sola er en sirkel, slik at

$$\frac{M_Ev^2}{r} = F = \frac{GM_oM_E}{r^2}$$

hastigheten til Jorden er $v = 2\pi r/\text{år} = 2\pi AU/\text{år}$.
Dette kan brukes til å vise at

$$v^2r = GM_o = 4\pi^2\frac{AU^3}{\text{år}^2}$$

2.2 Euler metoden

Vi starter med de to sammenkoblede differensiallikninger 2. Vi trenger å diskretisere disse to likningene først. Vi definerer

$$x(t) = x(t_i) = x_i\ , \quad v(t) = v(t_i) = v_i \quad \text{og} \quad a(t) = a(t_i) = a_i$$

Vi bruker Taylor expansion for posisjonen x:

$$x(t_i \pm h) = x(t_i) \pm hx(t_i)' + \frac{h^2}{2}x(t_i)'' + O(h^3)$$

Og så har vi lignende uttrykk for hastigheten:

$$v(t_i \pm h) = v(t_i) \pm hv(t_i)' + \frac{h^2}{2}v(t_i)'' + O(h^3)$$

Nå kan vi sette opp algoritmene til Euler metoden:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hx_i' \\ &= x_i + hv_i \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i + hv_i' \\ &= v_i + ha_i \end{aligned} \tag{5}$$

Når vi skal implementere Euler metoden skal vi gjøre følgende steg:

Steg 1: Evaluere x_{i+1} ved hjelp av formel 4

Steg 2: Evaluere v_{i+1} ved hjelp av formel 5

2.3 Velocity Verlet metoden

Vi ser igjen på andre-ordens-differensiallikning 1 som kan skrives om til to sammenkoblede differensiallikninger 2. Utfører vi en Taylor-utvidelse får vi et uttrykk for posisjonen

$$x(t+h) = x(t) + hx^{(1)}(t) + \frac{h^2}{2}x^{(2)}(t) + O(h^3)$$

Og det tilsvarende uttrykket for hastighet er gitt ved

$$v(t+h) = v(t) + hv^{(1)}(t) + \frac{h^2}{2}v^{(2)}(t) + O(h^3)$$

Vi vet at $x^{(1)}(t) = v(t)$ og at $x^{(2)}(t) = v^{(1)}(t)$ er akserelasjonen $a(x,t) = F(x_i t_i)/m$. Vi kan skrive disse likningene om ved å først si at $x(t+h)$ er det samme som x_{i+1} og $x(t)$ er samme som x_i. Det samme gjør vi med likningen for hastighet, og setter inn $x^{(2)}(t) = a(x,t)$.

$$x_{i+1} = x_i + hv_i + \frac{h^2}{2}a_i + O(h^3) \tag{6}$$

og lignende uttrykk for v_{i+1}:

$$v_{i+1} = v_i + ha_i + \frac{h^2}{2}v_i^{(2)} + O(h^3) \tag{7}$$

Her er $v_i^{(2)}$ ukjent. En kjent metode som vi kan bruke for å finne et uttrykk for den andre deriverte av hastigheten heter Forward Euler metoden. Da kan vi skrive uttrykket som

$$v_i^{(2)} = \frac{{v_{i+1}}^{(1)} - v_i^{(1)}}{h}$$

Vi ser at ${v_{i+1}}^{(1)} - v_i^{(1)}$ er det samme som $a_{i+1} - a_i$. Vi setter dette uttrykket for $v_i^{(2)}$ i likning 7 og får

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i + \frac{h}{2}[{v_{i+1}}^{(1)} + v_i^{(1)}] + O(h^3) \\ &= v_i + \frac{h}{2}[a_{i+1} + a_i] + O(h^3) \end{aligned}$$

Når vi skal implementere Velocity Verlet metoden skal vi gjøre følgende steg:

Steg 1: Evaluere x_{i+1} ved hjelp av formel 6

Steg 2: Oppdatere akserelasjonen

$$a_i = F(x_i)/m$$

Steg 3: Regne ut akserelasjonen a_{i+1}:

$$a_{i+1} = F(x_{i+1})/m$$

Steg 4: Oppdatere v_{i+1} ved hjelp av formel 7

2.4 Test av algoritmene

jelena: stability, kinetisk og potensiell, plott
og sjekk om du finner FLOPs

2.5 Bevaring av vinkelmomentet

Vi kan bruke Keplers andre lov for å vise at vinkelmomentet er bevart. Keplers andre lov sier at linjen mellom Solen M og planeten m sveiper ut like store arealer i like tidsintervaller. Dette fører til forholdet

$$v_a r_a = v_p r_p \tag{8}$$

I likningen 8 er v_a hastigheten til massen m i punktet A, aphelion. Hastigheten v_p hastigheten til massen m i punktet P, perihelion. Aphelion er det punktet i en bane av et objekt rundt solen hvor gjenstanden ligger lengst fra solen, som er motsatt fra perihelion. Dette er illustrert på figur 2.

Figure 2: Keplers andre lov. r_p er radiusen fra M til m i perihelion, mens r er radiusen fra M til m i aphelion

Siden massen M er festet på rotasjonsaksen, er systemets vineklmomentet konsentrert i massen m. Systemets vinkelmomentet kan da skrives som

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \tag{9}$$

Her er v hastigheten til massen m. Vi kan skrive om ligningen 9 ved punktene A og P til:

$$L_p = mv_p r_p \quad \text{og} \quad L_a = mv_a r_a$$

På grunn av forholdet mellom radiusene og hastighetene (formel 2) vil dermed $L_p = L_a$, altså er vinkelmomentet bevart.

2.6 Testing av ulike former for krefter

Fra geometriske egenskaper vet man at alle punkt-kilder som påvirker andre objekter likt i alle retninger uten noen begrensing følge en invers-kvadratisk lov. Intensiteten den påvirker andre objekter med,som befinner seg en avstand r unna, er avhengig av kildens styrke delt på arealet til arealet til sfæren. For gravitasjonskraften er dette illustrert i figur 3

Figure 3: a nice plot

Dette vil gi oss $\frac{GM}{r^2}$ for gravitasjonskraften.

For at en masse skal bli sett på som en en punkt-masse, må fordelingen av massen være sfærisk symmetrisk. Dette er ikke tilfellet for planetene vi ser på, men ettersom avstanden mellom objektene er mye større enn massen på objektet, vil det være en god tilnæring å se på det som en punkt-masse hvor massesenteret er i sentrum av objektet.

Til nå har vi dermed antatt at vi har en invers-kvadratisk kraft gitt ved F_G

$$F_G = \frac{GM_\odot M_{\text{Earth}}}{r^2}.$$

Vi er nå interesserte i å se hva som skjer dersom vi bytter ut denne loven med

$$F_G = \frac{GM_\odot M_{\text{Earth}}}{r^\beta},$$

hvor $\beta \in [2, 3]$. For undersøke dette skal vi se på Sol-jord systemet ved å bruke Velocity Verlet algoritmen forklart i avsnitt 3.4, *Velocity Velvet metoden*. Videre skal vi også se på samme situasjon, men denne gangen hvor jorda har en elliptisk bane rundt sola. Vi setter da initialverdiene til jorda til å ha avstanden 1 AU fra sola, og hastigheten i y-retning til å være 5 AU/år. Her er det interessant å se på om den totale energien og angulærmomentet er konstant for ulike verdien av β, og regner dermed ut dette for hvert steg, ved å bruke utrykkene

$$E_{kinetisk} = \frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$E_{potensiell} = \frac{GM}{r}$$

$$Angulærmoment = M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)r$$

hvor r er avstanden fra mellom objektene, illustert i figur 4

Figure 4: Illustrasjon av bevaring av vinkelmoment

2.7 Unnslippningsfart

Vi vil nå se på analytisk og numerisk unnslippingshastighet for jorda. Det vil si den miste farten jorda må ha å gå ut av banen til Sola.

Vi vil igjen ta for oss sola-jord-systemet hvor jorda går i en elliptisk bane rundt Sola,og vi bruker den invers-kvadratiske kraften. For å finne et analytisk utrykk for unnslippingshastigheten ser vi på konservering av energi.

$$(E_{kinetisk} + E_{potensiell})_{start} = (E_{kinetisk} + E_{potensiell})_{slutt}$$

Vi setter slutt-posisjonen til å være sted uendelig langt borte, med fart lik null. Dette fører til at både potensiell og kinetisk energi blir null her. Vi får da

$$\frac{1}{2}M_{Jorda}v_{esc} + \frac{-GM_{\odot}M_{\text{Jorda}}}{r} = 0 + 0$$

Mer generealt kan vi si at unnslippingshastigheten er den farten den har når summen a den kinetiske energien og potensille gravitasjonsenergien er lik null.

$$\frac{1}{2}M_{Jorda}v_{esc} = \frac{GM_{\odot}M_{\text{Jorda}}}{r}$$

hvor v_{esc} er unnslippingshastigheten til jorda, og r er avstanden fra jorda til sola

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}$$

Farten til jorda må altså være større eller like stor som v_{esc} for at jorda ikke skal bli trekt inn av gravitasjonskraften, men fortsette i en rett linje.

Vi observerer at unnslippingshastigheten er uavhengig av massen til unnslippningsobjektet.

Vi har her antatt at objektet unnslipper ved å beveger seg fra et gravitasjonsfelt for en uniform sfærisk masse og at det kun er denne kraften som virker på objektet.

2.8 Tre-legeme problemet

Vi er nå interessert i å se på problemet når vi legger til en massiv planet, som Jupiter. Den tilleggskraften Jorden blir påvirket av fra Jupiter i x-retning er

$$F_x^{EJ} = -\frac{GM_J M_E}{r_{EJ}^3}(x_E - x_J)$$

Der E står for Earth, og J for Jupiter. Avstanden mellom Jorden og Jupiter r_{EJ} skriver vi som

$$r_{EJ} = \sqrt{(x_E - x_J)^2 + (y_E - y_J)^2 + (z_E - z_J)^2}$$

Her er x_E,y_E og z_E koordinatene til Jorden, x_J,y_J og z_J er koordinatene til Jupiter. X-komponenten til hastigheten til Jorden blir til

$$\frac{dv_x^E}{dt} = -\frac{GM_o}{r^3}x_E - \frac{GM_J}{r_{EJ}^3}(x_E - x_J) \tag{10}$$

Vi kan skrive likningen 10 om til

$$\frac{dv_x^E}{dt} = -\frac{4\pi^2}{r^3}x_E - \frac{4\pi^2 M_J/M_o}{r_{EJ}^3}(x_E - x_J) \tag{11}$$

Der brukte vi at

$$GM_J = GM_o(\frac{M_J}{M_o}) = 4\pi^2\frac{M_J}{M_o}$$

På samme måte kan vi skrive likningen 11 for y- og z-retning:

$$\begin{aligned} \frac{dv_y^E}{dt} &= -\frac{4\pi^2}{r^3}y_E - \frac{4\pi^2 M_J/M_o}{r_{EJ}^3}(y_E - y_J) \\ \frac{dv_z^E}{dt} &= -\frac{4\pi^2}{r^3}z_E - \frac{4\pi^2 M_J/M_o}{r_{EJ}^3}(z_E - z_J) \end{aligned} \tag{12}$$

Nå har vi likningene for Jupiter klare, og på samme måte er det lett å legge til flere planeter, kun ved å legge til ekstra kraft.

2.9 Modell for alle planetene i solsystemet

Vi vil nå utvide systemet vårt til å gjelde alle planetene i solsystemet. For å forhindre at solsystemet vårt ikke beveger seg fra oss, setter vi sentrum av systemet til å være systemets massesenter, istedenfor å sette sola i ro i sentrum. Dette er også kalt "barycenter", og er massesenteret til alle legemene som går i bane rundt hverandre. Dette er illustrert i 5, med Sola og Jupiter som eksempel. Selv om massen til Jupiter er mye mindre enn solas vil det barycentrike massesenteret være utenfor jordans overflate fordi avstanden mellom de er så stor. Den vil alltid være nærmest legemet med den største massen.

(a)

(b)

Figure 5: Illustasjon av "Barycentric. Hentet fra https://spaceplace.nasa.gov/barycenter/en/" massesenter

Vi vil nå få et masseenter som forblir i samme posisjon, og vi ser at alle legemne går i bane rundt et punkt, også sola.

For å regne ut massesenteret multipliserer vi objektenets masse med avstanden fra koordinatsystemets nullpunkt for hver av objektene og adderer dette opp. Til slutt deler vi på den totale massen.

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ...mx_{totantalllegemer}}{m_1 + m_2 + m_3...m_{totantalllegemer}}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + ...my_{totantalllegemer}}{m_1 + m_2 + m_3...m_{totantalllegemer}}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + ...m_{totantalllegemer}}{m_1 + m_2 + m_3...m_{totantalllegemer}}$$

Deretter subtraherer vi startposisjonen med masse-senterposisjonen for å korrigere for masseeneret.

$$x_{ny} = x_0 - x_{cm}$$

$$y_{ny} = y_0 - y_{cm}$$

$$z_{ny} = z_0 - z_{cm}$$

Nå vi har gjort dette kan vi legge til alle planetene til programmet vårt. Vi finner alle initalposisjonene og initial hastighetne i NASA-linken oppgitt i oppgaven

2.10 Perihelion presesjon til Merkur

Vi skal nå se på Merkurs bane rundt sola, ved å legge til den generelle korreksjonen til den Newtonske kraften, slik at kraften blir

$$F_G = \frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Merkur}}}{r^2}\left[1 + \frac{3l^2}{r^2c^2}\right]$$

hvor M_{Merkur} er massen til Merkur, r er avstanden mellom merkur og sola, $l = |\vec{r} \times \vec{v}|$ er størrelsen på merkur orbilate (?) angulære moment per enhet masse, og c er lyshastigheten.

$$\tan\theta_{\mathrm{p}} = \frac{y_{\mathrm{p}}}{x_{\mathrm{p}}}$$

hvor x_{p} (y_{p}) is the x (y) position of Mercury at perihelion,

3 Resultater

3.1 Test av algoritmene

Figure 6: Massen m sirkulerer rundt massen M i en sirkulær bane. Radiusen r er lik hele veien

Når banen til massen m, som går rundt massen M, er sirkulær, er omkretsen $s = 2\pi r$. Vi ser på systemet der m er Jorden, og M er Solen, så radiusen r er $r = 1\mathrm{AU}$ mens perioden T Jorden bruker på et omløp er 1 år. Derfor er hastigheten til en sirkulær bane gitt ved

$$v = \frac{s}{T} = 2\pi\mathrm{AU/år} \tag{13}$$

Figure 7: På disse to plottene ser vi kinetisk, potensiell og den totale energien til Jorda. Til venstre har vi brukt Euler metoden, og til høyre Velocity Verlet. Kinetisk energi er tegnet med blå, potensiell med gul og total energi med grønn.

Vi vil også se på hvor stabile de to metodene er, for forskjellige tidssteg Δt.

(a) $\beta = 2$ (b) $\beta = 2.95$ (c) $\beta = 2.99$

Figure 8: Vi ser på posisjonen til Jorden rundt Solen for forksjellige tidssteg, ved å bruke Euler metoden

(a) $\beta = 2$ (b) $\beta = 2.95$ (c) $\beta = 2.99$

Figure 9: Vi ser på posisjonen til Jorden rundt Solen for forksjellige tidssteg, ved å bruke Velocity Verlet metoden

Sett inn CPU-tid

3.2 Bevaring av vinkelmomentet

(a) Jordas sirkulære bane (b) angulærmomentet til jorda

Figure 10: Angulærmomentet til jorda når den går i en sirkulærbane rundt sola. Plottet går over 1 år.

(a) Jordas bane rundt sola (b) Angulærmomentet

Figure 11: Angulærmomentet til jorda når den går i en elliptisk bane rundt sola. Plottet går over 1 år

3.3 Testing av ulike former for krefter

Resultater er illustrert i figur 12. Dette var når vi hadde sirkulær bane rundt solen. Her kan vi se at når β nærner seg 3 går ikke sola i bane lenger og spinner ut av bane.

(a) $\beta = 2$

(b) $\beta = 2.95$

(c) $\beta = 2.99$

Figure 12: Vi ser på tidutliklingen over 10 år

I figur 20 ser vi resultatene fra når jorda går i en ellipsebane rundt sola. Her ser vi at vi rask får en ellipsebane som flytter seg hvor hvert omløp. Dette ser vi også tydelig når vi øker $\beta = 2.5$. Slik vil den fortsette til vi setter $\beta = 2.85$. Da ser vi at den kommer for nærme solen og skytes ut av sin bane.

(a) $\beta = 2$

(b) $\beta = 2.0.5$

(c) $\beta = 2.5$

(d) $\beta = 2.85$

Figure 13: Den totale, kinetiske og potensielle energien

I figur 14 kan vi se en illustrasjon av energi-fordelingen når jorda går i en ellipsebane rundt Sola for ulike β. Vi ser i 14b at når $\beta = 2$ så er den totale energien konstant. Etterhvert som β øker ser vi at den total kinetiske energien ikke er konstant lenger, dette skjer allerede når vi setter $\beta = 2.05$

(a) $\beta = 2$

(b) $\beta = 2.05$

(c) $\beta = 2.5$

(d) $\beta = 2.85$

Figure 14: Vi ser på tidsutviklingen over 10 år

Sett inn et plott for angulærmoment

(a)

(b)

(c) v

Figure 15: Illustrasjon av Sol-Jorda-Systemet for ulike fartfarter til jorda.

3.4 Unnslippingshastighet

Utrykket vi kom frem til, i metodedelen, for unnslippingshastighet til jorda er gitt ved

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}$$

Setter vi inn de gitte verdiene, $M_{\odot} = 1.98847 \times 10^{30} kg$, $r = 1AU = 149597871 km$ og gravitasjonsknstanten, $G = 6.674 \times 10^{11} m^3 kg^1 s^2$, får vi

$$v_{esc} = 42338.785\text{m/s} = 8.925\text{AU/år}$$

Numerisk får vi verdiene illustrert i figur 21. I figur 21c har vi plottet det analytiske unnslipningshastigheten, og i figur 16b har vi plottet hastighetene sett før unnslippingshastigheten. Vi ser at den her fortsatt vil gå i bane men banen strekker seg 50 AU i x-retning.

(a) $v_{start} = 8.5AU/år$ (b) $v_{start} = 8.8AU/år$ (c) $v_{start} = 8.9AU/år = v_{esc}$

Figure 16: Illustrasjon av Sol-Jorda-Systemet for ulike fartfarter til jorda.

3.5 Tre-legeme problemet

i figur 17 ser vi Jupiter, Sol og Jord- systemet. I 18 og 19 ser vi hvordan banen hadde sett ut dersom vi øker Juiters masse 10 og 1000 ganger så mye.

(a) Jordas sirkulære bane (b) angulærmomentet til jorda

Figure 17: Jupiter, Jorda og Sola- systemet.

(a) Jordas sirkulære bane

(b) angulærmomentet til jorda

Figure 18: Jupiter, Jorda og Sola- systemet når vi setter massen til Jupiter til å være 10 ganger så stor.

(a) Jordas sirkulære bane

(b) angulærmomentet til jorda

Figure 19: Jupiter, Jorda og Sola- systemet når vi setter massen til Jupiter til å være 1000 ganger så stor. .

3.6 Modell for alle planetene i solsystemet

(a) Jordas sirkulære bane

(b) angulærmomentet til jorda

Figure 20: Angulærmomentet til jorda når den går i en sirkulærbane rundt sola. Plottet går over 1 år.

(a) $v_{start} = 8.5AU/år$

(b)

(c) $v_{start} = 28.097AU/år = v_{esc}$

Figure 21: Vi har her zoomet inn på modellen av solsystemet.

3.7 Perihelion presesjon til Merkur

TA TIL SLUTT :)

Dersom man subtraherer de to vinklene man finner når man regner med og uten den ekstra kraften, hva skal man få som resultat da?

4 Diskusjon

4.1 Test av algoritmene

Når vi har en sirkulær bane vil avstanden mellom sola og jorda være den samme hele tiden dermed vil også farten holder seg konstant. Ettersom den kinetiske

energien til jorda er avhengig av farten, vil den kinetiske energien holder seg konstant gjennom hele sirkel banen. Det samme gjelder potensiell energi, ettersom avstanden mellom jorda og sola konstant hele veien burde også den potensielle energien holder seg konstant. Dette ser vi fra grafen i figur 7.

For elipse-banen vil også den totale mekaniske energien var bevart, men her vil farten og avstanden varierer, og derfor vil ikke den potensielle og den kinetiske energien bare bevart gjennom hele banen. Farten til jorda ville være størst når avstanden mellom dem er minst, deretter vil gravitasjonskraften fra sola bremse farten til jorda helt til den når den lengste avstanden. Deretter vil farten begynne å øke igjen .Dette er også illustrert i figur 4. Det betyr at når jorda beveger seg fra sola vil den kinetiske energien bli mindre, mens den potensielle energien bli større, altså vil den kinetiske energien gå over til å bli potensiell energi når den beveger seg fra sola.

Fra figur 7 ser vi at den totale energien varierer mer når vi bruker Euler metoden. Energien er derfor mest bevart når vi bruker Velocity Verlet metoden. Den totale energien varierer veldig lite, den er nesten flat.

Vi så på hvor stabile de to metodene er ved å plotte bevegelsen til Jorden rundt Sola for forskjellige tidssteg Δt. Dette ser vi på plottet 8 og 9. På figur 8a ser vi at avviket fra Jordas startposisjon til sluttpunktet etter ett år er stor. Når tidssteget er 15, er avviket mindre. Når vi ser på avviket for forskjellige tidssteg (figur 9) ser vi at avviket er størst for små tidssteg. Men allikevel er avviket for tidssteg 10 størst for Euler enn Verlet. Det betyr at Velocity Verlet metoden er mer stabil.

Nevn hvordan CPU tid og FLOPS er for de ulike, og hvoirdan dette påvirker.

4.2 Bevaring av vinkelmomentet

Ettersom det i jord-sol-systemet ikke er tilført noe ytre dreiemoment som virker på systemet vil vinkelenmomentet være bevart. Dette ser vi fra resultatet i figur 20b, her ser vi at vinkel-momentet for en sirkulær bane er bevart.

Dette vil også være tilfellet for systemte hvor jorda går i en ellipsebanet, vinkelmomentet til det totale systemet vil være bevart. Men når Jorda beveger seg i en ellipsebane, vil massesenteret til systemet befinne seg litt utefor solas massesenter, og det vil derfor være ikke kun være jorda som beveget seg rundt massesenteret men også sola (dette kan man se illustrert i figur5), dette vil føre til at vinkelmomentet til jorda vil variere litt slik som vi ser i resultatet i figur 11a

4.3 Teststing av ulike former for krefter

Diskuter energiene og angulærmomenetet

Og hvordan banen ser ut

Vi ser fra figur 12 og 13 a når vi endre vinkel

4.4 Unnslippningshastighet

Fra figur, ser vi at den numeriske unnslippningshastigheten tilsvarer den har litt analytiske. Når vi setter start-hastighetene til å være mindre unnslippning-shastigheten ser vi at jorda fortsatt vil gå i bane rundt sola.

4.5 Tre-legeme-systemet

Diskuter stabiliteten

Repeat the calculations by increasing the mass of Jupiter by a factor of 10 and 1000 and plot the position of the Earth. Study again the stability of the Verlet solver.

I figur 17, 18 og 19 ser vi hvordan massen til Jupiter vil påvirke Jordan bane rundt sola. Her ser vi i figur 19 at når massen til Jupiter blir 1000 ganger større enn sin opprinnelige masse ser vi at banen til jorda blir sendt ut av sin opprinnelig bane, mens Jupiter og sola begynner å gå i bane sammen. I figur 18 ser vi at at når Jupiter er 10 ganger større endrer den jordas bane litt.

4.6 Modell for alle planetene

Ettersom posisjonene til legmene i bane rundt sola hele tiden forandrer seg, vil også "barycenteret" til hele solsytemet constant endre posisjon. Dette kan i observere i **??** hvor vi ser at sola sin bane beveger seg rundt (ikke er den samme hele tiden). "Barycenteret" kan gå fra å være nær solar eget massesenter til å være på utsiden.

Foerskjellen på baycdntric koordinat og ikke.

4.7 Perihelion presesjon til Merkur

5 Konklusjon

6 kilder/referanse

Give always references to material you base your work on, either scientific articles/reports or books. • Refer to articles as: name(s) of author(s), journal, volume (boldfaced), page and year in parenthesis.

• Refer to books as: name(s) of author(s), title of book, publisher, place and year, eventual page numbers

For oppgave oppgave h (under metode): https://en.wikipedia.org/wiki/Barycenter https://astro.unl.edu/naap/esp/centerofmass.html

For oppgave h (under diskusjon): https://spaceplace.nasa.gov/barycenter/en/

Bilde 5: https://spaceplace.nasa.gov/barycenter/en/