

Modell av solsystemet

Marte Lunde Kvam og Jelena Jovanovic

October 2020

Contents

1	Introduksjon	3
2	Metoder	4
2.1	Jord-sol-systemet	4
2.2	Euler-metoden	6
2.3	Velocity Verlet-metoden	7
2.4	Test av algoritmene	8
2.5	Bevaring av vinkelmomentet	9
2.6	Testing av ulike former for krefter	9
2.7	Unnslipningsfart	11
2.8	Tre-legeme problemet	11
2.9	Modell for alle planetene i solsystemet	12
2.10	Perihelion presesjon til Merkur	13
3	Resultater	15
3.1	Test av algoritmene	15
3.2	Bevaring av vinkelmomentet	21
3.3	Testing av ulike former for krefter	21
3.4	Unnslipningshastighet	24
3.5	Tre-legeme problemet	25
3.6	Modell for alle planetene i solsystemet	27
3.7	Perihelion presesjon til Merkur	28
4	Diskusjon	28
4.1	Test av algoritmene	28
4.2	Bevaring av vinkelmomentet	29
4.3	Teststing av ulike former for krefter	29
4.4	Unnslipningshastighet	30
4.5	Tre-legeme-systemet	30
4.6	Modell for alle planetene	30
4.7	Perihelion presesjon til Merkur	30
5	Konklusjon	30
6	Kilder/referanser	31

I denne rapporten skal vi se på to metoder for å simulere solsystemet vårt, ved å skrive en objektorientert kode. De to metodene vi bruker er Velocity Verlet og Eulers metode. Vi fant at CPU-tiden for de ulike algoritmene er: 0.108 sekunder for Euler metoden, og 0.114 sekunder for Velocity Verlet-metoden for Jordens bane rundt Solen over ett år. Dette skyldes antall FLOPs for de to ulike metodene, nemlig $4n$ FLOPs for Euler metoden, og $7n$ FLOPs for Velocity Verlet. Vi fant også ut at energien av systemet blir bevart om vi bruker Velocity Verlet-metoden, mens med Euler blir ikke den totale energien av systemet bevart. Det betyr at Euler-metoden er dermed mer effektiv, mens Velocity Verlet gir bedre stabilitet.

1 Introduksjon

Mennesker har fra gammelt av vært interessert i å lære om dannelsen av universet, hva universet består av, men også hvordan planetene i solsystemet vårt beveger seg rundt Solen, samtidig som det beveger seg mot stjernebildet Herkules og stjernen Vegas. I denne rapporten har vi, ved hjelp av en kjent kode for å løse sammenkoblede- førsteordens differensialligninger, nemlig Velocity Verlet, utviklet en kode for å simulere solsystemet. Ettersom en slik kode vil bestå av mange repeterende elementer, hvor det eneste som varierer vil være de fysiske konstantene og variablene, skal vi skrive den objektorientert. Dette gjør at vi enkelt kan utvide programmet til å gjelde så mange planeter vi ønsker, når vi har løst de grunnleggende differensiallikningene. Ved hjelp av Velocity Verlet-metoden kan vi simulere solsystemet vårt over mange år.

Likningen vi ønsker å løse er Newtons gravitasjonslov, gitt ved kraften F_G

$$F_G = \frac{GM_o M_{Earth}}{r^2}$$

Vi starter rapporten med å sette opp algoritmene vi bruker for å kunne løse differensiallikningen som gir oss banene til systemet. Til dette formål har vi sett på hvordan dette kan gjøres ved hjelp av Euler-metoden og Velocity Verlet. Deretter har vi brukt algoritmene for å simulere jord-sol-systemet, hvor vi så har testet algoritmene, ved blant annet å se på bevaring av energi og vinkelmoment, og til slutt også CPU-tid og antall FLOPS. Vi kommer også til å se på systemet dersom formelen for kraften hadde vært annerledes, før vi begynner å legge til flere planeter. Avslutningsvis, etter at vi har lagt til alle planetene i solsystemet, kommer vi til å studere planeten Merkur, og dens bane, nærmere.

Rapporten starter med metode-delen som tar for seg alle utregninger, og forklarer hvordan vi kommer frem til resultatene våre. Deretter presenterer vi resultatene før vi i diskusjonens-delen går nærmere inn på resultatene og diskuterer disse.

2 Metoder

2.1 Jord-sol-systemet

Newton 2.lov kan skrives som en andre-ordens-differensiallikning

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t) \quad (1)$$

som vi kan skrive om til to sammenkoblede differensiallikninger

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v(t, x) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{F(x, t)}{m} = a(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Ved å sette $h = \frac{t_n - t_0}{n}$ kan vi diskritisere likningene slik at vi får

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hv_i \\ v_{i+1} &= v_i + ha_i \end{aligned}$$

Vi bruker det faktum at jordas bane er tilnærmet sirkulær rundt solen, og setter dermed kraften til å være gitt ved

$$F_G = \frac{M_{Earth}v^2}{r} = \frac{GM_o M_{Earth}}{r^2}$$

hvor v er hastigheten til jorda.

Fra Newtons 2.lov har vi da differensiallikningen for x, y og z-retning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{M_E}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{M_E} \quad \text{og} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F_z}{M_E}$$

Vi introduserer vektoren \vec{r} som er en vektor mellom Jorden og Sola. Dette er illustrert på figur 1.

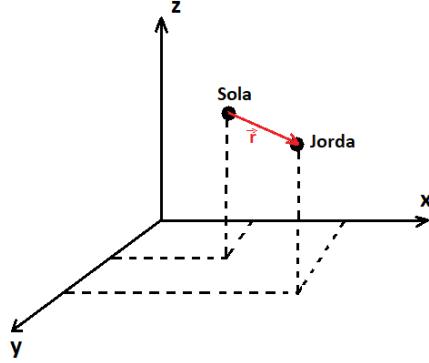


Figure 1: Jorda- og Sola-systemet i 3 dimensjoner. Vektoren \vec{r} peker fra Solen mot Jorden.

Avstanden r mellom Jorden og Sola skriver vi som

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vi kan skrive uttrykkene for kraftene i x, y og z-retning som

$$F_x = -\frac{GM_o M_E}{r^3} x, \quad F_y = -\frac{GM_o M_E}{r^3} y \quad \text{og} \quad F_z = -\frac{GM_o M_E}{r^3} z$$

Vi har nå 6 sammenkoblede differensialligninger(Hjorth-Jensen,2020):

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GM_o}{r^3} x, \\ \frac{dx}{dt} &= v_x, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GM_o}{r^3} y, \\ \frac{dy}{dt} &= v_y, \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{GM_o}{r^3} z, \\ \frac{dz}{dt} &= v_z \end{aligned} \tag{3}$$

Vi introduserer astronomisk enhet $1AU = 1.5 \times 10^{11} m$. Dette er avstanden fra Solen til Jorden. Vi antar at Jordens bane rundt Sola er en sirkel, slik at

$$\frac{M_E v^2}{r} = F = \frac{GM_o M_E}{r^2}$$

hastigheten til Jorden er $v = 2\pi r/\text{år} = 2\pi AU/\text{år}$.
Dette kan brukes til å vise at

$$v^2 r = GM_o = 4\pi^2 \frac{AU^3}{\dot{a}r^2}$$

2.2 Euler-metoden

Vi starter med de to sammenkoblede differensiallikningene 2. Vi trenger å diskretisere disse to likningene først. Vi definerer

$$x(t) = x(t_i) = x_i, \quad v(t) = v(t_i) = v_i \quad \text{og} \quad a(t) = a(t_i) = a_i$$

Vi bruker Taylor expansion for posisjonen x:

$$x(t_i \pm h) = x(t_i) \pm h x(t_i)' + \frac{h^2}{2} x(t_i)'' + O(h^3)$$

Og så har vi lignende uttrykk for hastigheten:

$$v(t_i \pm h) = v(t_i) \pm h v(t_i)' + \frac{h^2}{2} v(t_i)'' + O(h^3)$$

Nå kan vi sette opp algoritmene til Euler-metoden (Hjorth-Jensen,2020):

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h x_i' \\ &= x_i + h v_i \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i + h v_i' \\ &= v_i + h a_i \end{aligned} \tag{5}$$

Når vi skal implementere Euler-metoden skal vi gjøre følgende steg:

Steg 1: Evaluere x_{i+1} ved hjelp av formel 4

Steg 2: Evaluere v_{i+1} ved hjelp av formel 5

2.3 Velocity Verlet-metoden

Vi ser igjen på andre-ordens-differensielllikning 1 som kan skrives om til to sammenkoblede differensielllikninger 2. Utfører vi en Taylor-utvidelse får vi et uttrykk for posisjonen

$$x(t+h) = x(t) + hx^{(1)}(t) + \frac{h^2}{2}x^{(2)}(t) + O(h^3)$$

Og det tilsvarende uttrykket for hastighet er gitt ved

$$v(t+h) = v(t) + hv^{(1)}(t) + \frac{h^2}{2}v^{(2)}(t) + O(h^3)$$

Vi vet at $x^{(1)}(t) = v(t)$ og at $x^{(2)}(t) = v^{(1)}(t)$ er akserelasjonen $a(x, t) = F(x_i t_i)/m$. Vi kan skrive disse likningene om ved å først si at $x(t+h)$ er det samme som x_{i+1} og $x(t)$ er samme som x_i . Det samme gjør vi med likningen for hastighet, og setter inn $x^{(2)}(t) = a(x, t)$ (Hjorth-Jensen,2020).

$$x_{i+1} = x_i + hv_i + \frac{h^2}{2}a_i + O(h^3) \quad (6)$$

og lignende uttrykk for v_{i+1} :

$$v_{i+1} = v_i + ha_i + \frac{h^2}{2}v_i^{(2)} + O(h^3) \quad (7)$$

Her er $v_i^{(2)}$ ukjent. En kjent metode som vi kan bruke for å finne et uttrykk for den andrederiverte av hastigheten heter Forward Euler-metoden. Da kan vi skrive uttrykket som

$$v_i^{(2)} = \frac{v_{i+1}^{(1)} - v_i^{(1)}}{h}$$

Vi ser at $v_{i+1}^{(1)} - v_i^{(1)}$ er det samme som $a_{i+1} - a_i$. Vi setter dette uttrykket for $v_i^{(2)}$ i likning 7 og får

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i + \frac{h}{2}[v_{i+1}^{(1)} + v_i^{(1)}] + O(h^3) \\ &= v_i + \frac{h}{2}[a_{i+1} + a_i] + O(h^3) \end{aligned} \quad (8)$$

Når vi skal implementere Velocity Verlet-metoden skal vi gjøre følgende steg:

Steg 1: Evaluere x_{i+1} ved hjelp av formel 6

Steg 2: Oppdatere akserelasjonen

$$a_i = F(x_i)/m$$

Steg 3: Regne ut akserelasjonen a_{i+1} :

$$a_{i+1} = F(x_{i+1})/m$$

Steg 4: Oppdatere v_{i+1} ved hjelp av formel 7

2.4 Test av algoritmene

Ved å sjekke om Velocity Verlet- og Euler-metoden bevarer energien av systemet kan vi se forskjellen mellom disse to metodene. Om man antar en sirkulær bane rundt Solen, forventer vi at både kinetisk og potensiell energi er bevart. Dette skyldes at avstanden mellom Jorden og Solen er konstant hele veien. Da blir også hastigheten konstant. Vi vil også ha en konstant akserelasjon inn mot sentrum. Dette kalles for sentripetalakserelasjon og har uttrykk $a = \frac{v^2}{r}$. Ved å kombinere dette med Newtons andre lov kan vi finne uttrykk for den totale energien:

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_k + E_p \\ E_{tot} &= \frac{Gm_1m_2}{2r} - \frac{Gm_1m_2}{r} \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{2r} \end{aligned} \tag{9}$$

Fra dette ser vi at den totale energien skal være bevart i en sirkel bane.

En annen ting vi kan sjekke for de to algoritmene vi bruker er antall FLOPs disse algoritmene bruker for å regne ut hastigheten og posisjonen til planetene. Om vi ser på ligning 8 ser vi at det totalt er 3 antall operasjoner som blir utført. I ligning 6 er det 4 antall operasjoner. Det betyr at det tilsammen er 7 antall operasjoner i Velocity Verlet-algoritmen. Når vi implementerer denne metoden i en for-loop med n antall iterasjoner, vil det være $7n$ antall FLOP-s.

Når vi nå ser på Euler-metoden, ser vi at det sammen er 2 antall operasjoner i ligning 4 og 2 operasjoner i ligning 5. Når vi kjører denne metoden i en for-loop med n antall iterasjoner, vil det tilsammen være $4n$ FLOPs.

2.5 Bevaring av vinkelmomentet

Vi kan bruke Keplers andre lov for å vise at vinkelmomentet er bevart. Keplers andre lov sier at linjen mellom Solen M og planeten m sveiper ut like store arealer i like tidsintervaller. Dette fører til forholdet

$$v_a r_a = v_p r_p \quad (10)$$

I likningen 10 er v_a hastigheten til massen m i punktet A, aphelion. Hastigheten v_p hastigheten til massen m i punktet P, perihelion. Aphelion er det punktet i en bane av et objekt rundt solen hvor gjenstanden ligger lengst fra solen, som er motsatt fra perihelion. Dette er illustrert på figur 2.

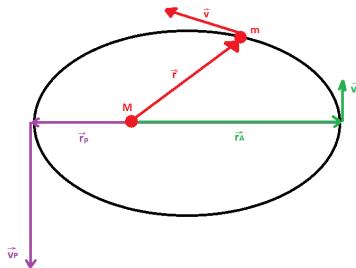


Figure 2: Keplers andre lov. r_p er radiusen fra M til m i perihelion, mens r er radiusen fra M til m i aphelion

Siden massen M er festet på rotasjonsaksen, er systemets vinkelmomentet koncentrert i massen m. Systemets vinkelmomentet kan da skrives som

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \quad (11)$$

Her er v hastigheten til massen m. Vi kan skrive om ligningen 11 ved punktene A og P til:

$$L_p = mv_p r_p \quad \text{og} \quad L_a = mv_a r_a$$

På grunn av forholdet mellom radiusene og hastighetene (formel 2) vil dermed $L_p = L_a$, altså er vinkelmomentet bevart.

2.6 Testing av ulike former for krefter

Fra geometriske egenskaper vet man at alle punkt-kilder som påvirker andre objekter likt i alle retninger uten noen begrensning følge en invers-kvadratisk lov. Intensiteten den påvirker andre objekter med, som befinner seg en avstand r unna, er avhengig av kildens styrke delt på arealet til arealet til sfæren. For gravitasjonskraften er dette illustrert i figur 3

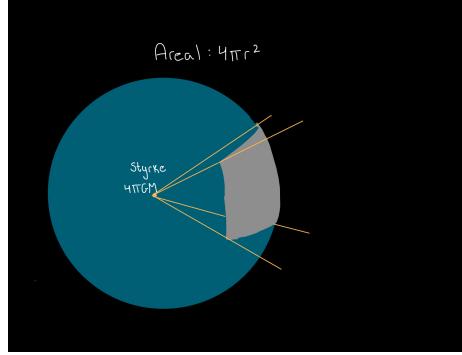


Figure 3: a nice plot

Dette vil gi oss $\frac{GM}{r^2}$ for gravitasjonskraften.

For at en masse skal bli sett på som en en punkt-masse, må fordelingen av massen være sfærisk symmetrisk. Dette er ikke tilfellet for planetene vi ser på, men ettersom avstanden mellom objektene er mye større enn massen på objektet, vil det være en god tilnærming å se på det som en punkt-masse hvor massesenteret er i sentrum av objektet.

Til nå har vi dermed antatt at vi har en invers-kvadratisk kraft gitt ved F_G

$$F_G = \frac{GM_{\odot}M_{\text{Earth}}}{r^2}.$$

Vi er nå interesserte i å se hva som skjer dersom vi bytter ut denne loven med

$$F_G = \frac{GM_{\odot}M_{\text{Earth}}}{r^\beta},$$

hvor $\beta \in [2, 3]$. For undersøke dette skal vi se på Sol-jord-systemet ved å bruke Velocity Verlet-algoritmen forklart i avsnitt 3.4, *Velocity Velvet-metoden*. Videre skal vi også se på samme situasjon, men denne gangen hvor jorda har en elliptisk bane rundt sola. Vi setter da initialverdiene til jorda til å ha avstanden 1 AU fra sola, og hastigheten i y-retning til å være 5 AU/år. Her er det interessant å se på om den totale energien og angulærmomentet er konstant for ulike verdien av β , og regner dermed ut dette for hvert steg, ved å bruke uttrykkene

$$E_{\text{kinetisk}} = \frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$E_{\text{potensiell}} = \frac{GM}{r}$$

$$\text{Angulærmoment} = M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)r$$

hvor r er avstanden fra mellom objektene, illustert i figur 4

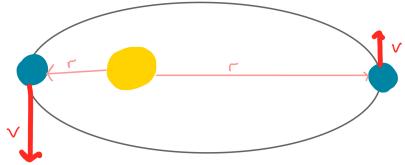


Figure 4: Illustrasjon av bevaring av vinkelmoment. Fartsvektoren er større i aphelon og mindre i perihelon.

2.7 Unnslipningsfart

Vi vil nå se på analytisk og numerisk unnslipningshastighet for jorda. Det vil si den miste farten jorda må ha for å gå ut av banen til Sola.

Vi vil igjen ta for oss sola-jord-systemet hvor jorda går i en elliptisk bane rundt Sola, og vi bruker den invers-kvadratiske kraften. For å finne et analytisk uttrykk for unnslipningshastigheten ser vi på konservering av energi.

$$(E_{kinetisk} + E_{potensiell})_{start} = (E_{kinetisk} + E_{potensiell})_{slutt}$$

Vi setter slutt-posisjonen til å være sted uendelig langt borte, med fart lik null. Dette fører til at både potensiell og kinetisk energi blir null her. Vi får da

$$\frac{1}{2}M_{Jorda}v_{esc} + \frac{-GM_{\odot}M_{Jorda}}{r} = 0 + 0$$

Mer generelt kan vi si at unnslipningshastigheten er den farten den har når summen av den kinetiske energien og potensielle gravitasjonsenergien er lik null.

$$\frac{1}{2}M_{Jorda}v_{esc} = \frac{GM_{\odot}M_{Jorda}}{r}$$

hvor v_{esc} er unnslipningshastigheten til jorda, og r er avstanden fra jorda til sola

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}$$

Farten til jorda må altså være større eller like stor som v_{esc} for at jorda ikke skal bli trekt inn av gravitasjonskraften, men fortsette i en rett linje.

Vi observerer at unnslipningshastigheten er uavhengig av massen til unnslipningsobjektet.

Vi har her antatt at objektet unnslipper ved å beveger seg fra et gravitasjonsfelt for en uniform sfærisk masse og at det kun er denne kraften som virker på objektet.

2.8 Tre-legeme problemet

Vi er nå interessert i å se på problemet når vi legger til en massiv planet, som Jupiter. Den tilleggskraften Jorden blir påvirket av fra Jupiter i x-retning er

$$F_x^{EJ} = -\frac{GM_J M_E}{r_{EJ}^3} (x_E - x_J)$$

Der E står for Earth, og J for Jupiter. Avstanden mellom Jorden og Jupiter r_{EJ} skriver vi som

$$r_{EJ} = \sqrt{(x_E - x_J)^2 + (y_E - y_J)^2 + (z_E - z_J)^2}$$

Her er x_E, y_E og z_E koordinatene til Jorden, x_J, y_J og z_J er koordinatene til Jupiter. X-komponenten til hastigheten til Jorden blir til

$$\frac{dv_x^E}{dt} = -\frac{GM_o}{r^3} x_E - \frac{GM_J}{r_{EJ}^3} (x_E - x_J) \quad (12)$$

Vi kan skrive likningen 12 om til

$$\frac{dv_x^E}{dt} = -\frac{4\pi^2}{r^3} x_E - \frac{4\pi^2 M_J / M_o}{r_{EJ}^3} (x_E - x_J) \quad (13)$$

Der brukte vi at

$$GM_J = GM_o \left(\frac{M_J}{M_o} \right) = 4\pi^2 \frac{M_J}{M_o}$$

På samme måte kan vi skrive likningen 13 for y- og z-retning:

$$\begin{aligned} \frac{dv_y^E}{dt} &= -\frac{4\pi^2}{r^3} y_E - \frac{4\pi^2 M_J / M_o}{r_{EJ}^3} (y_E - y_J) \\ \frac{dv_z^E}{dt} &= -\frac{4\pi^2}{r^3} z_E - \frac{4\pi^2 M_J / M_o}{r_{EJ}^3} (z_E - z_J) \end{aligned} \quad (14)$$

Nå har vi likningene for Jupiter klare, og på samme måte er det lett å legge til flere planeter, kun ved å legge til ekstra kraft.

2.9 Modell for alle planetene i solsystemet

Vi vil nå utvide systemet vårt til å gjelde alle planetene i solsystemet. For å forhindre at solsystemet vårt ikke beveger seg fra oss, setter vi sentrum av systemet til å være systemets massesenter, istedenfor å sette sola i ro i sentrum. Dette er også kalt ”barycenter”, og er massesenteret til alle legemene som går i bane rundt hverandre. Dette er illustrert i 5, med Sola og Jupiter som eksempel. Selv om massen til Jupiter er mye mindre enn solas vil det ”barycentriske” massesenteret være utenfor jordans overflate fordi avstanden mellom dem er så stor. Den vil alltid være nærmest legemet med den største massen.

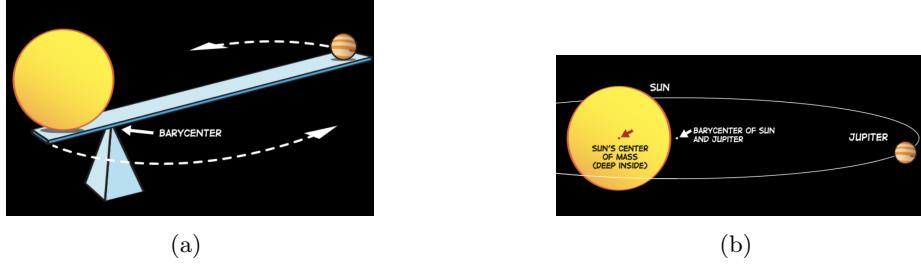


Figure 5: Illustasjon av ”Barycentric.(SpacePlace, 2020)

Vi vil nå få et masseenter som forblir i samme posisjon, og vi ser at alle legemne går i bane rundt et punkt, også sola.

For å regne ut massesenteret multipliserer vi objektenets masse med avstanden fra koordinatsystemets nullpunkt for hver av objektene og adderer dette opp. Til slutt deler vi på den totale massen.

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots m_{total} \text{antall legemer}}{m_1 + m_2 + m_3 \dots m_{total}}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots m_{total} \text{antall legemer}}{m_1 + m_2 + m_3 \dots m_{total}}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots m_{total} \text{antall legemer}}{m_1 + m_2 + m_3 \dots m_{total}}$$

Deretter subtraherer vi startposisjonen med masse-senterposisjonen for å korrigere for massesenteret.

$$x_{ny} = x_0 - x_{cm}$$

$$y_{ny} = y_0 - y_{cm}$$

$$z_{ny} = z_0 - z_{cm}$$

Når vi har gjort dette kan vi legge til alle planetene til programmet vårt. Vi finner alle initialposisjonene og initialhastighetene fra NASA sine nettsider.

2.10 Perihelion presesjon til Merkur

En lukket elektrisk bane er et spesialtilfelle av en nye newtonsk kraft. Dersom man gjøre endringer på denne kraften vil vi generelt sett få en bane som ikke er lukket, det vil si at planeten ikke vil havne på nøyaktig samme posisjon som etter et den har fullført en bane rundt sola. Dersom disse endringene det er små vil banen være nesten den samme, bare med en liten forskyvning. Vi kan se på det som at ellipsen har gjort en rotasjon. Fra observasjoner kan vi observere denne rotasjonen av banen for Merkur, som har en perihelion presisjon på 43 busekunder per århundre. Vi skal i denne under-seksjonen undersøke om vi kan observere denne rotasjonen i vårt program dersom vi legger til en slik

liten endring i kraften. Vi legger til den relativistiske korreksjonen for Newtons gravitasjonskraft, slik at kraften blir

$$F_G = \frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Merkur}}}{r^2} \left[1 + \frac{3l^2}{r^2c^2} \right]$$

hvor M_{Merkur} er massen til Merkur, r er avstanden mellom merkur og sola, $l = |\vec{r} \times \vec{v}|$ er størrelsen på merkur orbilate (?) angulære moment per enhet masse, og c er lyshastigheten.

$$\tan \theta_p = \frac{y_p}{x_p}$$

hvor x_p (y_p) $x-$ ($y-$) posisjonen til Merkur i perihelion, som er posisjonen hvor avstanden mellom Merkur og Sola er minst. For at man skal kunne legge merke til perhelionvinkelen må tidssteget være lite nok. Vi regner ut tidssteget ved å se på en trekanten på figur 6 der r er avstanden mellom planeten og solen, og dx er tidssteget. Theta er vinkelen mellom radiusen og tidssteget når Merkur er i perihelion. Da blir dx lik:

$$\begin{aligned} \theta &= 43'' = 0.000279^\circ \\ r &= 0.3075AU \\ \tan \theta &= \frac{dx}{r} \\ dx &= \tan \theta * r = 6.4 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

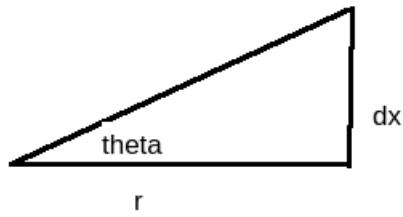


Figure 6

3 Resultater

3.1 Test av algoritmene

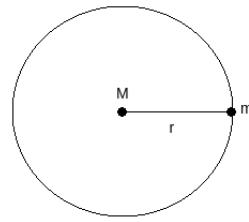


Figure 7: Massen m sirkulerer rundt massen M i en sirkulær bane. Radiusen r er lik hele veien

Når banen til massen m , som går rundt massen M , er sirkulær, er omkretsen $s = 2\pi r$. Vi ser på systemet der m er Jorden, og M er Solen, så radiusen r er $r = 1\text{AU}$ mens perioden T Jorden bruker på et omløp er 1 år. Derfor er hastigheten til en sirkulær bane gitt ved

$$v = \frac{s}{T} = 2\pi \text{AU}/\text{år} \quad (15)$$

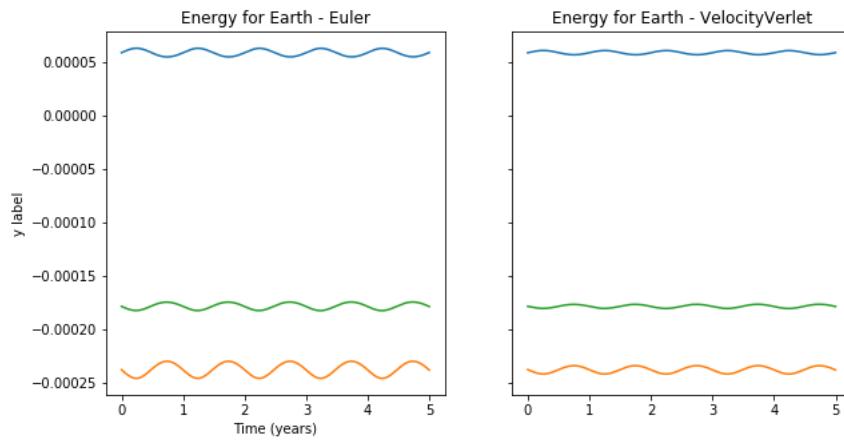
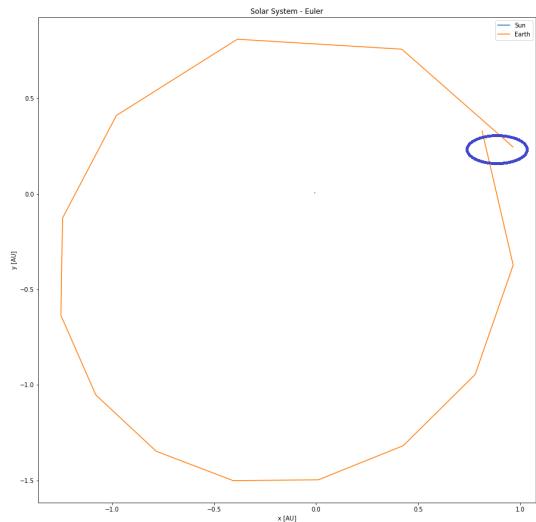
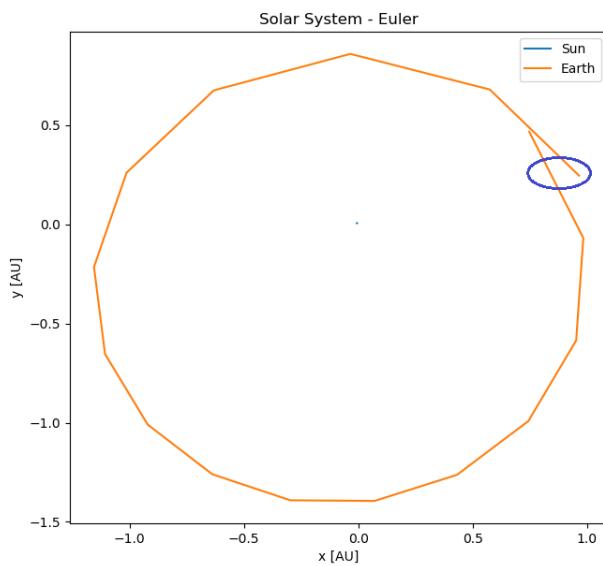


Figure 8: På disse to plottene ser vi kinetisk, potensiell og den totale energien til Jorda. Til venstre har vi brukt Euler metoden, og til høyre Velocity Verlet. Kinetisk energi er tegnet med blå, potensiell med gul og total energi med grønn.

Vi vil også se på hvor stabile de to metodene er, for forskjellige tidssteg Δt .



(a) tidssteg = 10



(b) tidssteg = 15

Figure 9: Sol-Jord systemet simulert over ett år med 10 og 15 tidssteg. Vi brukte Euler metoden

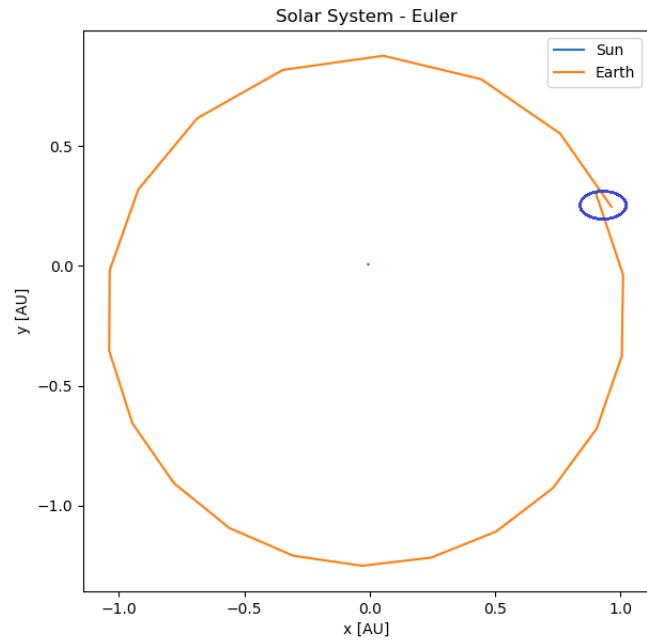
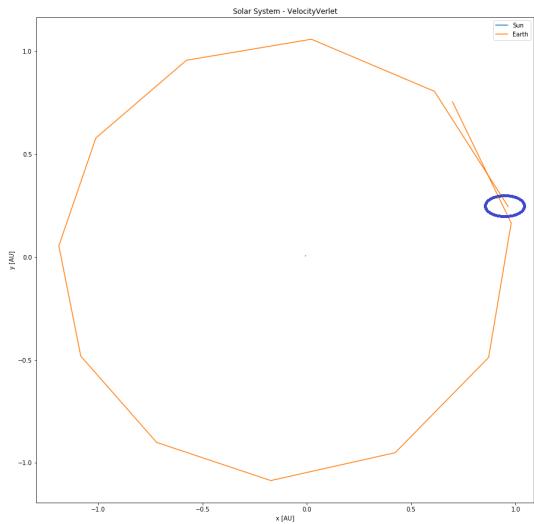
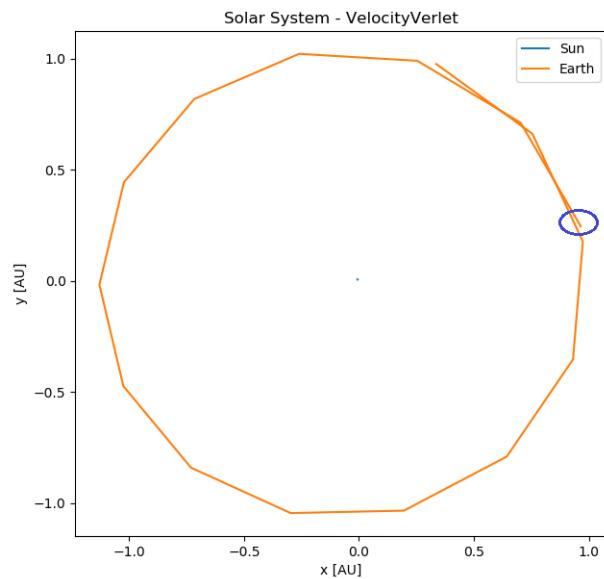


Figure 10: Sol-Jord systemet simulert over ett år med 20 tidssteg. Vi brukte Euler metoden



(a) Sol-Jord systemet simulert over ett år med 10 tidssteg.
Vi brukte Velocity Verlet metoden



(b) Sol-Jord systemet simulert over ett år med 15 tidssteg.
Vi brukte Velocity Verlet metoden

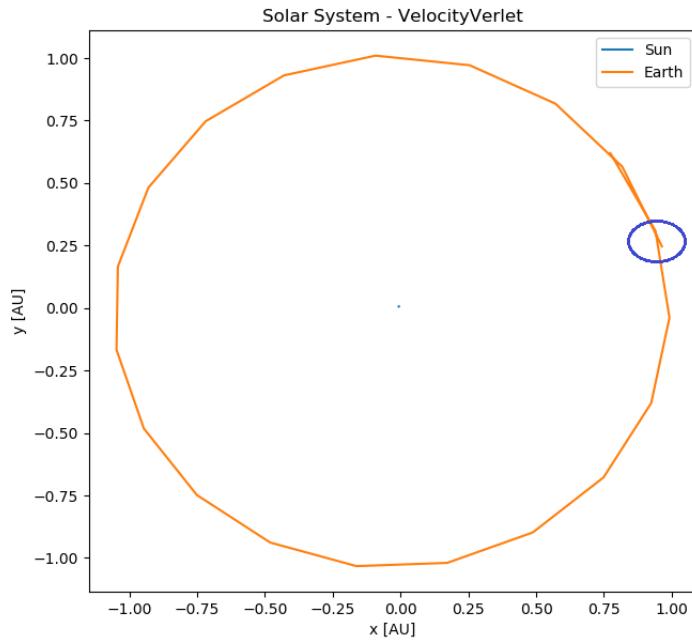


Figure 12: Sol-Jord systemet simulert over ett år med 20 tidssteg. Vi brukte Velocity Verlet metoden

Vi har målt CPU-tiden for Velocity-Verlet og Euler metoden. Målingene er vist i tabel 1

Table 1: CPU-tid for Velocity Verlet og Euler metoden, målt i sekunder. Vi brukte 30 000 integrasjonspunkter over 1 år

Metode	CPU-tid [s]	F LOPS
Euler	0.108 s	4n
Velocity-Verlet	0.114	7n

3.2 Bevaring av vinkelmomentet

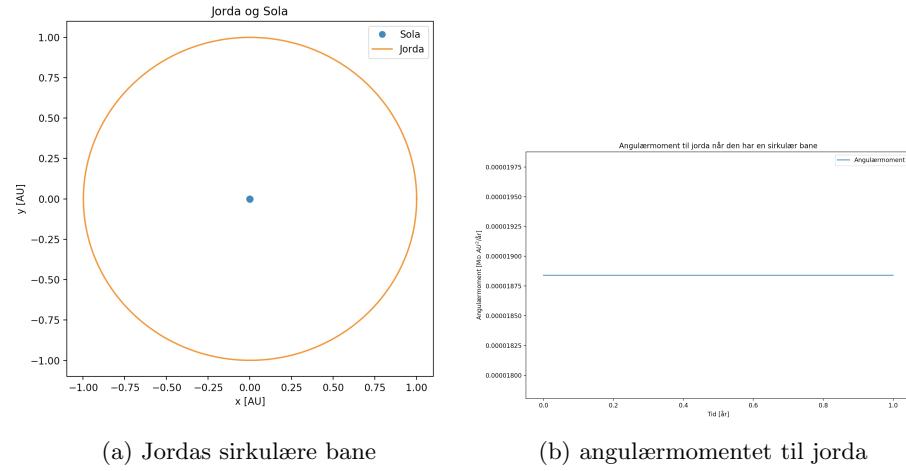


Figure 13: Angulærmomentet til jorda når den går i en sirkulærbane rundt sola. Plottet går over 1 år.

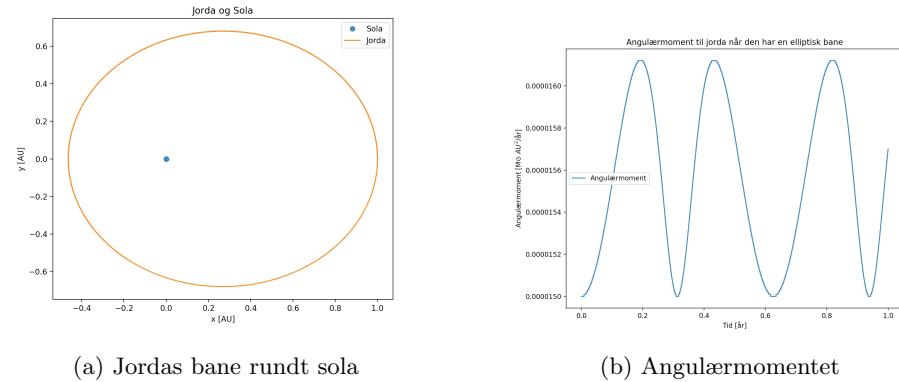


Figure 14: Angulærmomentet til jorda når den går i en elliptisk bane rundt sola. Plottet går over 1 år

3.3 Testing av ulike former for krefter

Resultater er illustrert i figur 15. Dette var når vi hadde sirkulær bane rundt solen. Her kan vi se at når β nærmer seg 3, spinner jorda ut av bane.

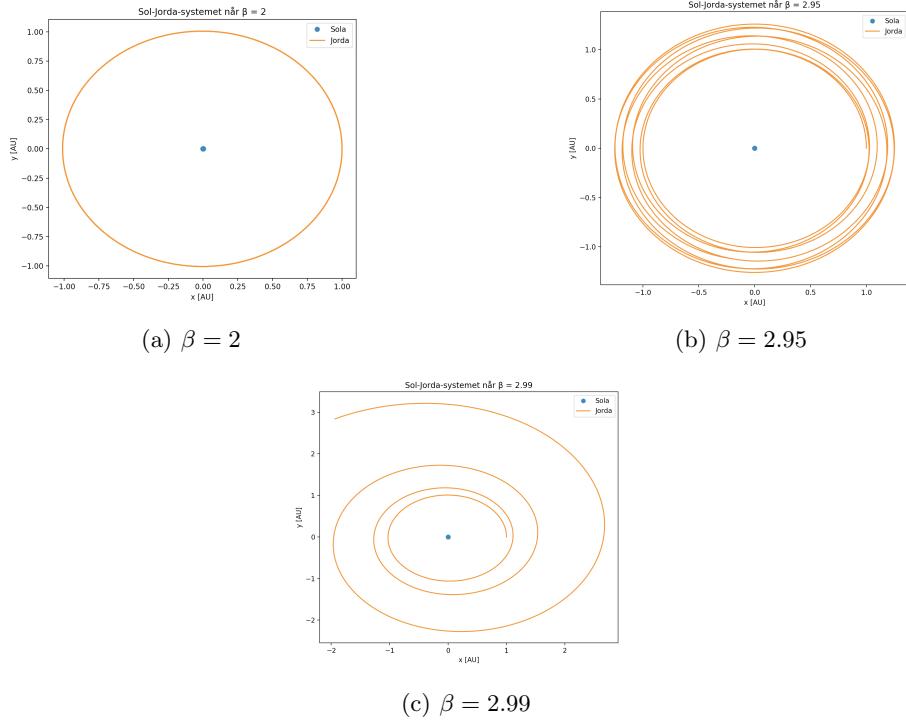


Figure 15: Vi ser på tidutliklingen over 10 år

I figur 23 ser vi resultatene fra når jorda går i en ellipsebane rundt sola. Her ser vi at vi rask får en ellipsebane som flytter seg hvor hvert omløp. Dette ser vi også tydelig når vi øker $\beta = 2.5$. Slik vil den fortsette til vi setter $\beta = 2.85$. Da ser vi at den kommer for nærmee solen og skytes ut av sin bane.

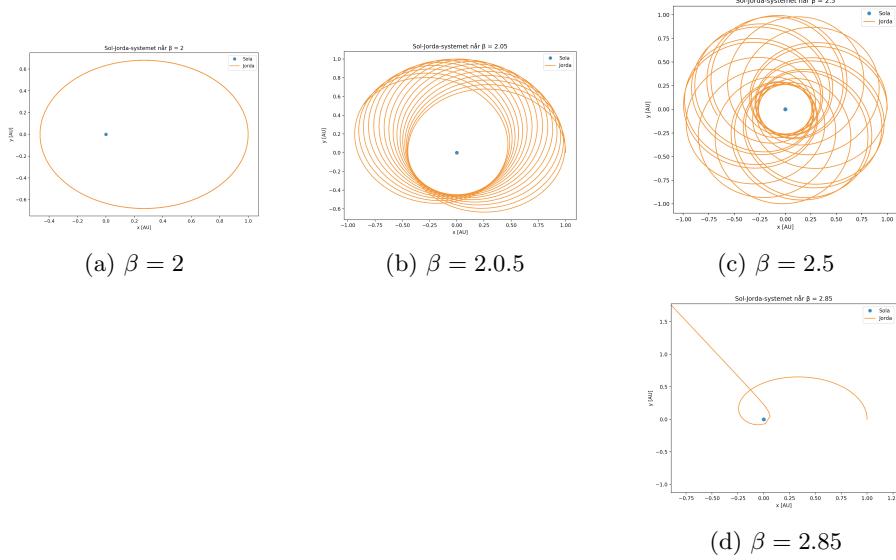


Figure 16: Den totale, kinetiske og potensielle energien

I figur 17 kan vi se en illustrasjon av energi-fordelingen når jorda går i en ellipsebane rundt Sola for ulike β . Vi ser i 17b at når $\beta = 2$ så er den totale energien konstant. Etterhvert som β øker ser vi at den total kinetiske energien ikke er konstant lenger, dette skjer allerede når vi setter $\beta = 2.05$

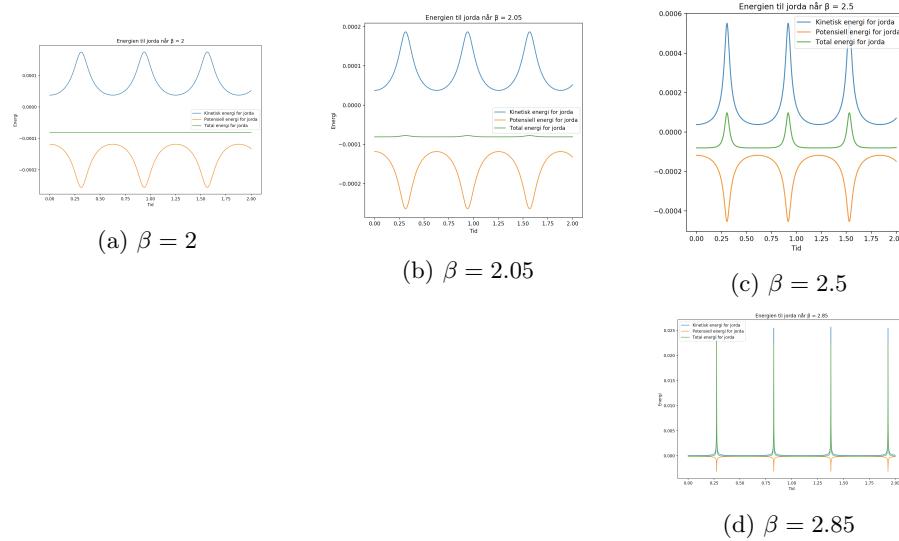


Figure 17: Vi ser på tidsutviklingen over 10 år

I figur 24 ser vi plottene for bevaring av vinkelmoment når vi øker β .

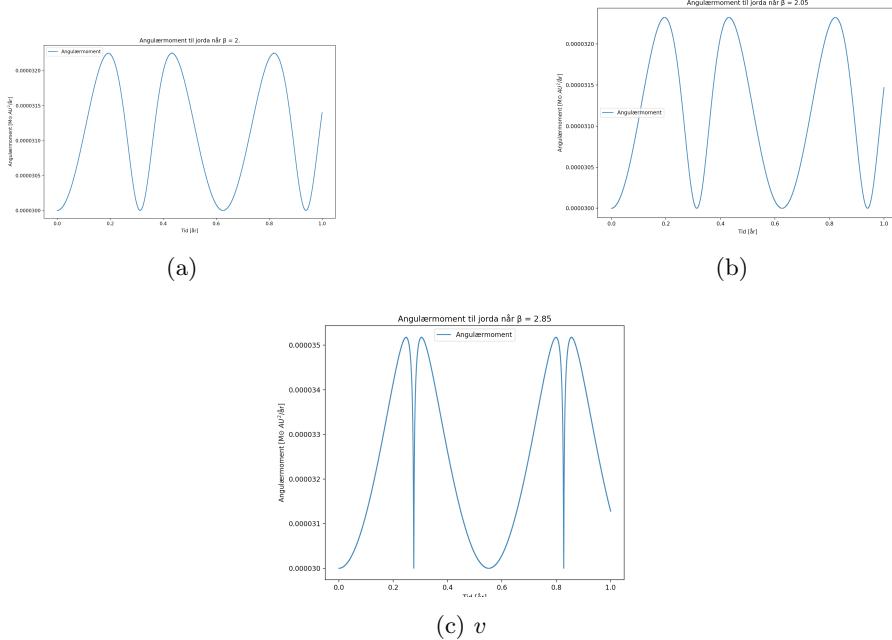


Figure 18: Illustrasjon av Sol-Jorda-Systemet for ulike fartfarter til jorda.

3.4 Unnslipningshastighet

Utrykket vi kom frem til, i metodedelen, for unnslipningshastighet til jorda er gitt ved

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}$$

Setter vi inn de gitte verdiene, $M_{\odot} = 1.98847 \times 10^{30} kg$, $r = 1AU = 149597871 km$ og gravitasjonskonstanten, $G = 6.674 \times 10^{11} m^3 kg^{-1} s^2$, får vi

$$v_{esc} = 42338.785 m/s = 8.925 AU/\text{år}$$

Numerisk får vi verdiene illustrert i figur 24. I figur 24c har vi plottet det analytiske unnslipningshastigheten, og i figur 19b har vi plottet hastighetene sett før unnslipningshastigheten. Vi ser at den her fortsatt vil gå i bane men banen strekker seg 50 AU i x-retning.

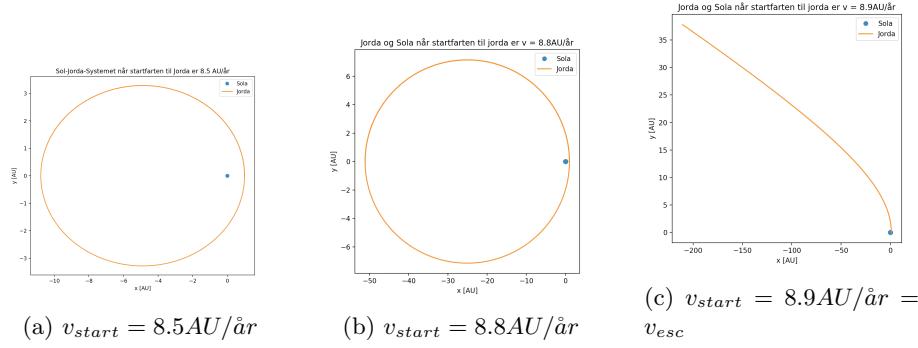


Figure 19: Illustrasjon av Sol-Jorda-Systemet for ulike fartfarter til jorda.

3.5 Tre-legeme problemet

i figur 20 ser vi Jupiter, Sol og Jord- systemet. I 21 og 22 ser vi hvordan banen hadde sett ut dersom vi øker Juiters masse 10 og 1000 ganger så mye.

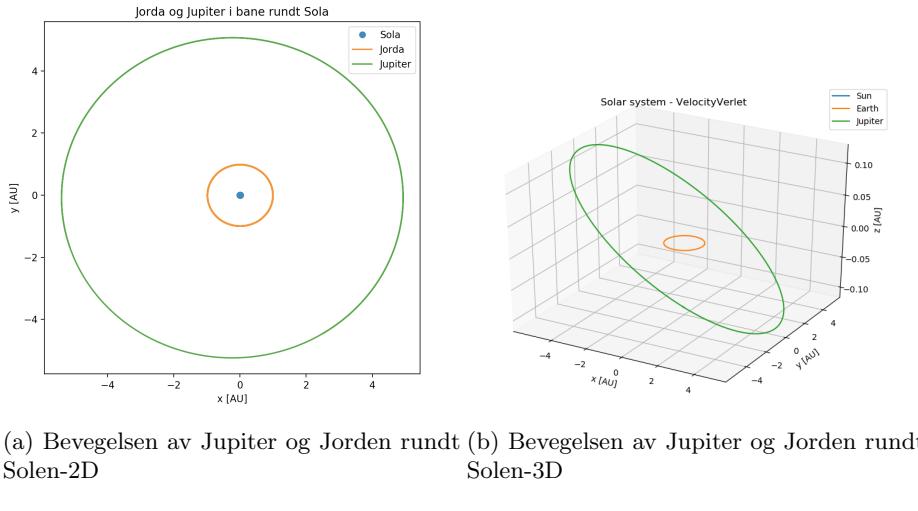
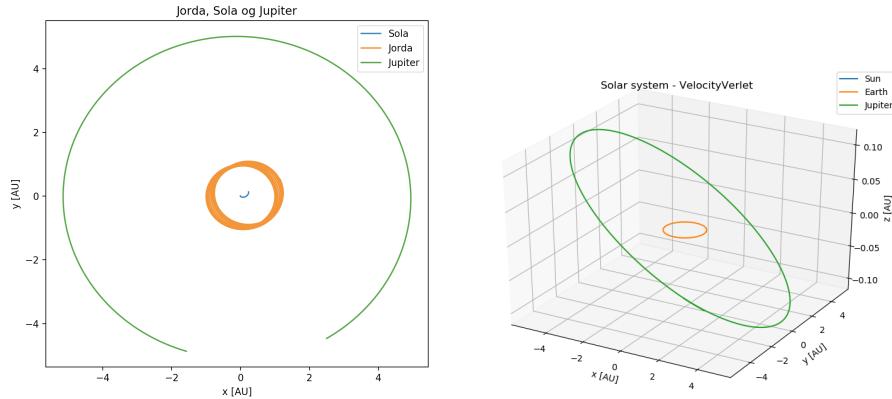
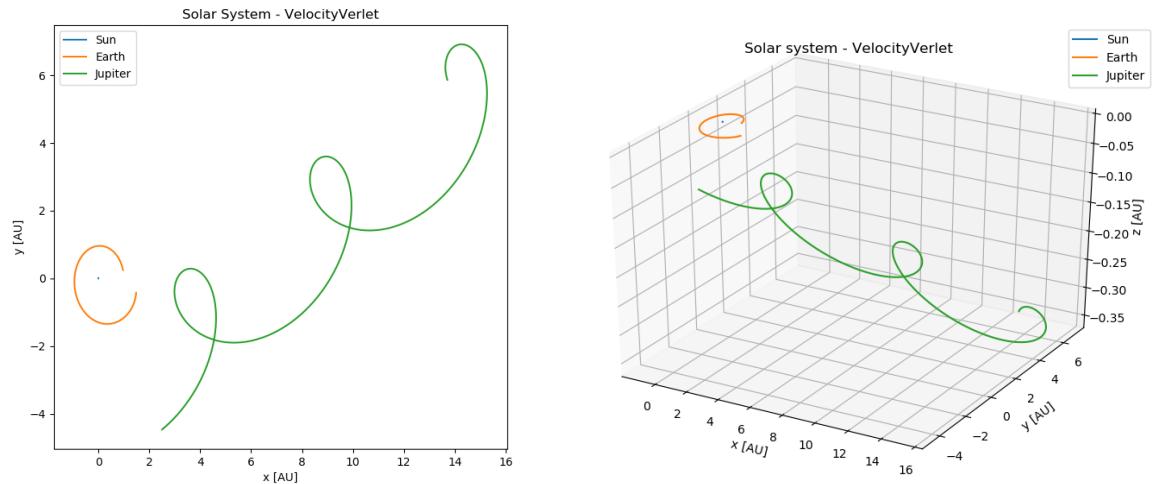


Figure 20: Jupiter, Jorda og Sola- systemet.



(a) Bevegelsen av Jupiter og Jorden rundt Solen-2D.
 (b) Bevegelsen av Jupiter og Jorden rundt Solen-3D.

Figure 21: Jupiter, Jorda og Sola- systemet når vi setter massen til Jupiter til å være 10 ganger så stor.



(a) Bevegelsen av Jupiter og Jorden rundt Solen-2D. (b) Bevegelsen av Jupiter og Jorden rundt Solen-3D.

Figure 22: Jupiter, Jorda og Sola- systemet når vi setter massen til Jupiter til å være 1000 ganger så stor. .

3.6 Modell for alle planetene i solsystemet

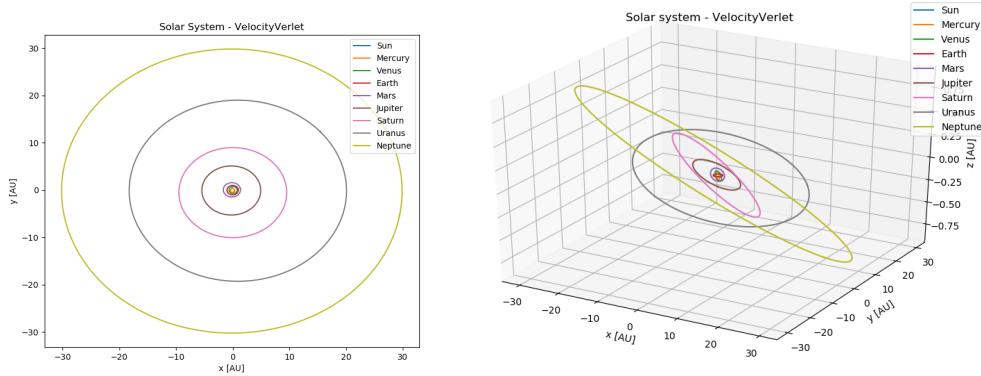


Figure 23: Angulærmomentet til jorda når den går i en sirkulærbane rundt sola. Plottet går over 1 år.

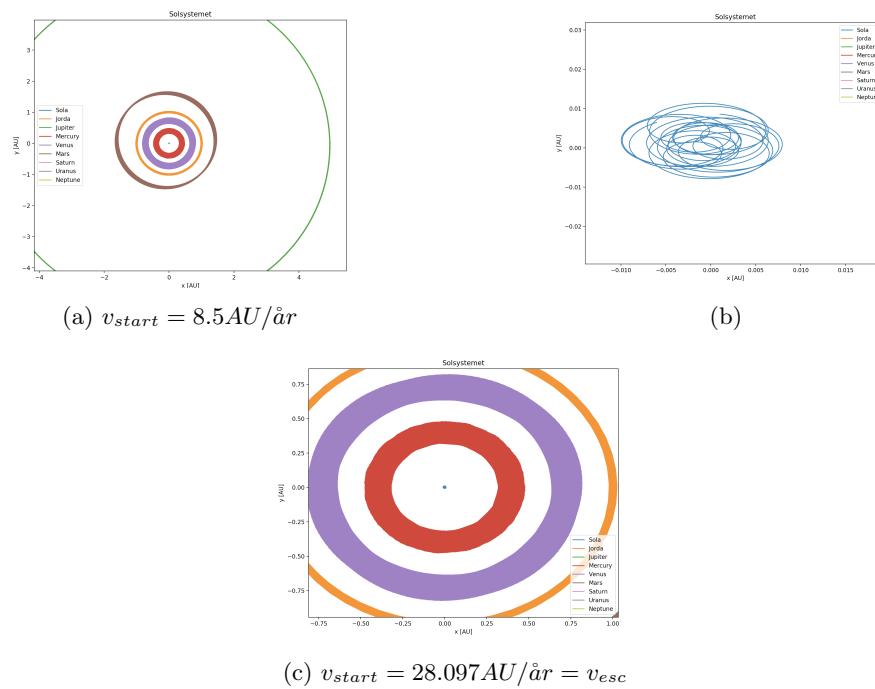


Figure 24: Vi har her zoomet inn på modellen av solsystemet.

3.7 Perihelion presesjon til Merkur

I figur 25a og 25b ser vi plottet av perihekionvinkelen, med og uten den relativistiske korreksjonen til Newtons gravitasjonslov,

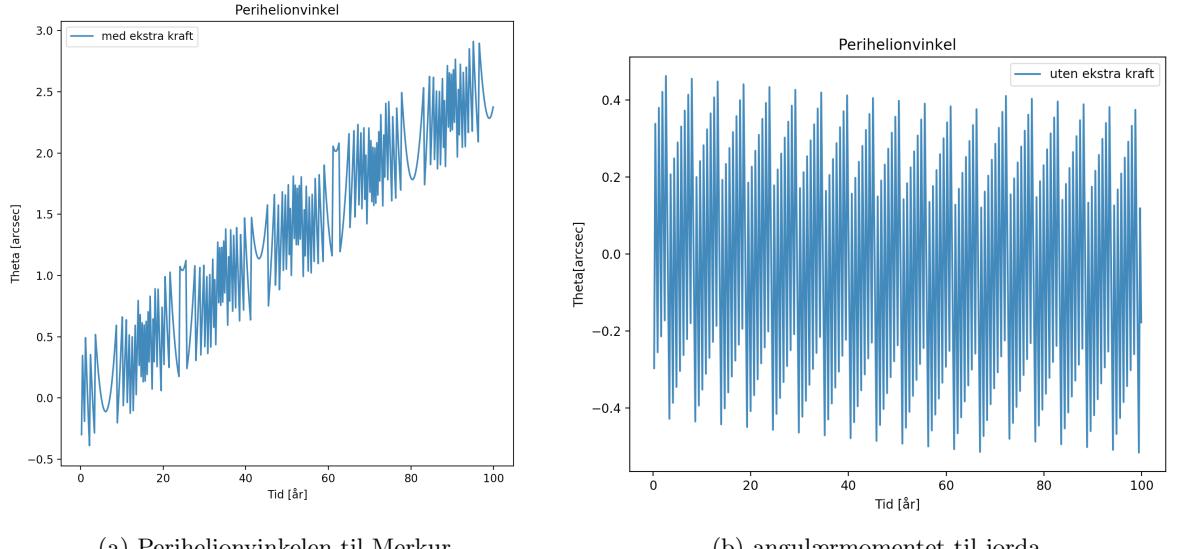


Figure 25: Perihelionvinkelen til Merkur.

4 Diskusjon

4.1 Test av algoritmene

Når vi har en sirkulær bane vil avstanden mellom sola og jorda være den samme hele tiden dermed vil også farten holder seg konstant. Ettersom den kinetiske energien til jorda er avhengig av farten, vil den kinetiske energien holder seg konstant gjennom hele sirkel banen. Det samme gjelder potensiell energi, ettersom avstanden mellom jorda og sola konstant hele veien burde også den potensielle energien holder seg konstant. Dette ser vi fra grafen i figur 8. Fra figur 8 ser vi at den totale energien varierer mer når vi bruker Euler metoden. Energien er derfor mest bevart når vi bruker Velocity Verlet metoden. Den totale energien varierer veldig lite, den er nesten flat.

For ellipse-banen vil også den totale mekaniske energien var bevart, men her vil farten og avstanden varierer, og derfor vil ikke den potensielle og den kinetiske energien bare bevart gjennom hele banen. Farten til jorda ville være størst når avstanden mellom dem er minst, deretter vil gravitasjonskraften fra sola bremse farten til jorda helt til den når den lengste avstanden. Deretter vil farten begynne å øke igjen. Dette er også illustrert i figur 4. Det betyr at

når jorda beveger seg fra sola vil den kinetiske energien bli mindre, mens den potensielle energien bli større, altså vil den kinetiske energien gå over til å bli potensiell energi når den beveger seg fra sola.

Vi så på hvor stabile de to metodene er ved å plotte bevegelsen til Jorden rundt Sola for forskjellige tidssteg Δt . Dette ser vi på plottet 9 og ???. På figur 9a ser vi at avviket fra Jordas startposisjon til sluttpunktet etter ett år er stor. Når tidssteget er 15, er avviket mindre. Når vi ser på avviket for forskjellige tidssteg (figur ???) ser vi at avviket er størst for små tidssteg. Men allikevel er avviket for tidssteg 10 størst for Euler enn Verlet. Det betyr at Velocity Verlet metoden er mer stabil.

Fra tabellen 1 ser vi at Velocity-Verlet metoden bruker lengre tid på å regne ut posisjonene og hastighetene til planetene. Dette er fordi den har flere antall FLOPs.

4.2 Bevaring av vinkelmomentet

Ettersom det i jord-sol-systemet ikke er tilført noe ytre dreiemoment som virker på systemet vil vinkelmomentet være bevart. Dette ser vi fra resultatet i figur 23b, her ser vi at vinkel-momentet for en sirkulær bane er bevart.

Dette vil også være tilfellet for systemet hvor jorda går i en ellipsebane, vinkelmomentet til det totale systemet vil være bevart. Men når Jorda beveger seg i en ellipsebane, vil massesenteret til systemet befinner seg litt utefor solas massesenter, og det vil derfor ikke kun være jorda som beveget seg rundt massesenteret men også sola (dette kan man se illustrert i figur 5), dette vil føre til at vinkelmomentet til jorda vil variere litt slik som vi ser i resultatet i figur 14a

4.3 Teststing av ulike former for krefter

I figur 15 ser vi en illustrasjon av hvordan banen til jorda hadde sett ut dersom den hadde fulgt $\frac{1}{r^\beta}$. Her ser vi at når β nærmer seg 3 går banen til jorda oppfører seg som en sirkulær bane. Ettersom vi fra observasjoner vet at ikke er slik banen til jorda oppfører seg, kan vi anta at $\beta = 3$ ikke er en god tilnærming av farten. Det samme gjelder for figur ?? hvor vi ser samme situasjonen, men denne gangen for en ellipse bane. Vi vil også her observere at jo større β blir jo mer vil den avvike fra banen som vi observerer den, helt til den til slutt sendes ut av bane.

Vi presenterte også plott for energien til jorda når den går i en ellipsebanen rund sola, for ulike verdier for β , illustrert i figur 16. Her kan vi se at når $\beta = 1$ er energien konstant, mens etterhvert som β blir øker vil den kinetiske energien i perioder også bli større enn den potensielle, og vi vil dermed ikke lenger få konstant energi.

4.4 Unnslipningshastighet

Fra figur, ser vi at den numeriske unnslipningshastigheten tilsvarer den har litt analytiske. Når vi setter start-hastighetene til å være mindre unnslipningshastigheten ser vi at jorda fortsatt vil gå i bane rundt sola.

4.5 Tre-legeme-systemet

I figur 20, 21 og 22 ser vi hvordan massen til Jupiter vil påvirke Jordas bane rundt sola. Her ser vi i figur 22 at når massen til Jupiter blir 1000 ganger større enn sin opprinnelige masse ser vi at banen til jorda blir sendt ut av sin opprinnelig bane, mens Jupiter og sola begynner å gå i bane sammen. I figur 21 ser vi at når Jupiter er 10 ganger større endrer den Jordas bane litt. På figur 22a ser vi hvordan banen til Jorden blir påvirket når vi øker Jupiter sin masse 1000 ganger. Kraften som virker på Jorden vil være større.

4.6 Modell for alle planetene

Ettersom posisjonene til legmene i bane rundt sola hele tiden forandrer seg, vil også ”barycenteret” til hele solsystemet endre posisjon. Dette kan vi observere vi ?? hvor vi ser at sola sin bane beveger seg rundt, og endrer bane. Altså er denne uatabile banen forutsaket av at av at massesenteret til systemet til hele er i forandring.(SpacePlace, 2020)

4.7 Perihelion presesjon til Merkur

Fra figur 25, som beskriver perihelionvinkelen for banen til Merkur, ser at bør vi legge til en relativistisk korrektsjon for Newtons gravitasjons kraft får vi en endring i vinkelen slik som forventet. I figur 25b ser vi at vinkelen at vinkelen holder seg relativt stabil. I figur 25a derimot ser vi at vi får en endring i vinkelen, denne endringen hadde vi forventet at skulle få den teoretiske verdien, 43 buevinkler per århundre, men observerer fra plottet at den her beveger seg 3 buesekunder per århundre. Altså er formen på plottene slik vi forventet, mens dimensjonen avviker fra de teoretiske verdiene. Dette kan komme av feil i programmet, eller unøyaktigheter ved utregning.

5 Konklusjon

Vi har ved hjelp av metoden som løser sammenkoblede-førsteprdens differensielligner, nemlig Velocity Verlet, simulert banen til de 9 planetene i solsystemet vårt. Vi sammenlignet Velocity Verlet metoden med en annen metode som heter Euler. Det viste seg at Euler metoden er mer effektiv når vi regner ut posisjonene og hastighetene til planeten, mens Velocity Verlet metoden er mer stabil, dvs. at den totale energien av systemet blir bevart. Når vi simulerer Jordens bane rundt Solen over ett år, med 30 000 tidssteg, får vi at Velocity Verlet bruker 0.114 sekunder mens Euler bruker 0.108 sekunder. Velocity Verlet

metoden bruker $7n$ FLOPs mens Euler bruker $4n$ FLOPs når vi simulerer med n -iterasjoner.

Vi har fått vist at den totale energien er bevart under sirkulære baner, men også under elliptiske. Forskjellen er at den kinetiske og potensielle energien er konstante under sirkulære baner, men under elliptiske baner vil kinetisk og potensiell energi variere med avstanden fra Solen.

For all kode sjekk github-linken <https://github.com/jelenaj98/Prosjekt-3>

6 Kilder/referanser

- Hjorth-Jensen M.(2020, sep 24). *Computational Physics Lectures: Ordinary differential equations*. Department of Physics. University of Oslo. (Department of Physoics and Astronomy and Nattional Superconducting Cyclotron Laboratory. Michigan State University)
- Hjorth-Jensen M. (2015). *Computational Physics* . Department of Physics, University of Oslo.
- (2020 2 juli) *Barycenter*. Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Barycenter>
- Ericson, K. (2020, 29.okt). *What is baysenter?*. Nasa science, spaceplace. <https://spaceplace.nasa.gov/barycenter/en/>
- Bilde 5: Ericson, K. (2020, 29.okt). *What is baysenter?*. Nasa science, <https://spaceplace.nasa.gov/barycenter/en/>
- Hjorth-Jensen M.github link: <https://github.com/CompPhysics/ComputationalPhysics/tree/master/doc/x01TBJFrrIK6imUdBKuQ>