

PROBLEM DOMINIRAJUĆEG STABLA

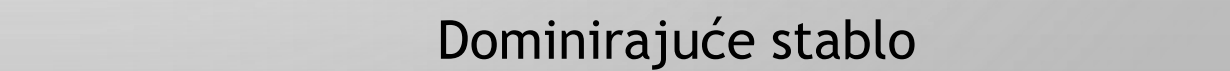
VALENTINA KRIŽ, JELENA KURILIĆ

DEFINICIJA PROBLEMA

Dan je neusmjeren povezan težinski graf $G = (V, E)$, gdje je V skup svih vrhova, a E skup svih bridova. Svakom bridu $e \in E$ pridružena je nenegativna težina w_e . Stablo $T = (V(T), E(T))$ grafa G je **dominirajuće stablo** (dominating tree - DT) ako je svaki vrh $v \in V$ koji nije u stablu T susjedan nekom vrhu iz T . Težina stabla je definirana kao suma težina svih bridova.

Problem dominirajućeg stabla (*dominating tree problem* - DTP) je problem pronalaska dominirajućeg stabla grafa G minimalne težine.

Početni graf



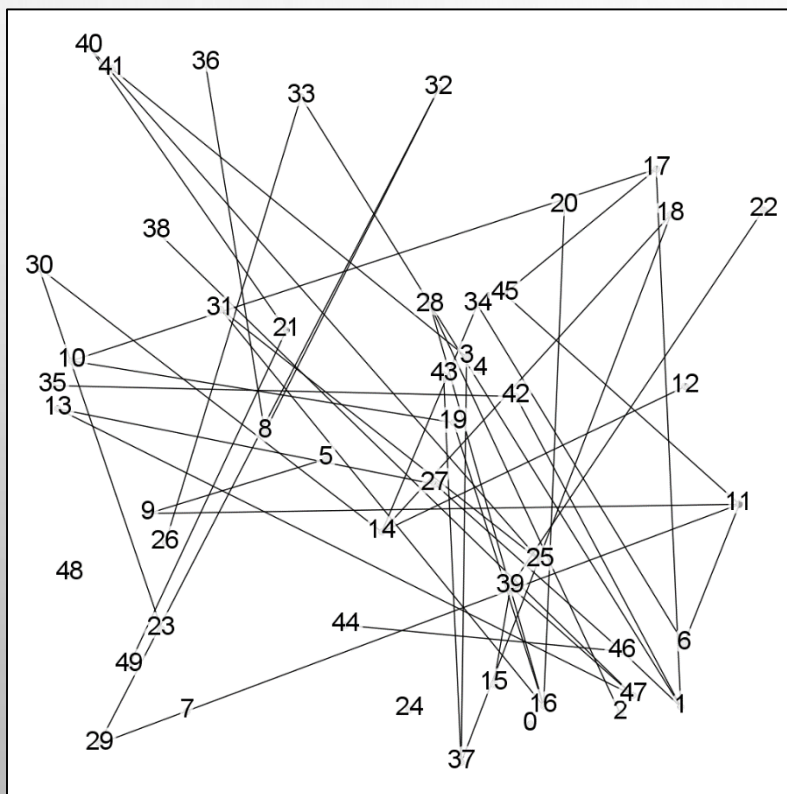
Dominirajuće stablo

NAŠE RJEŠENJE

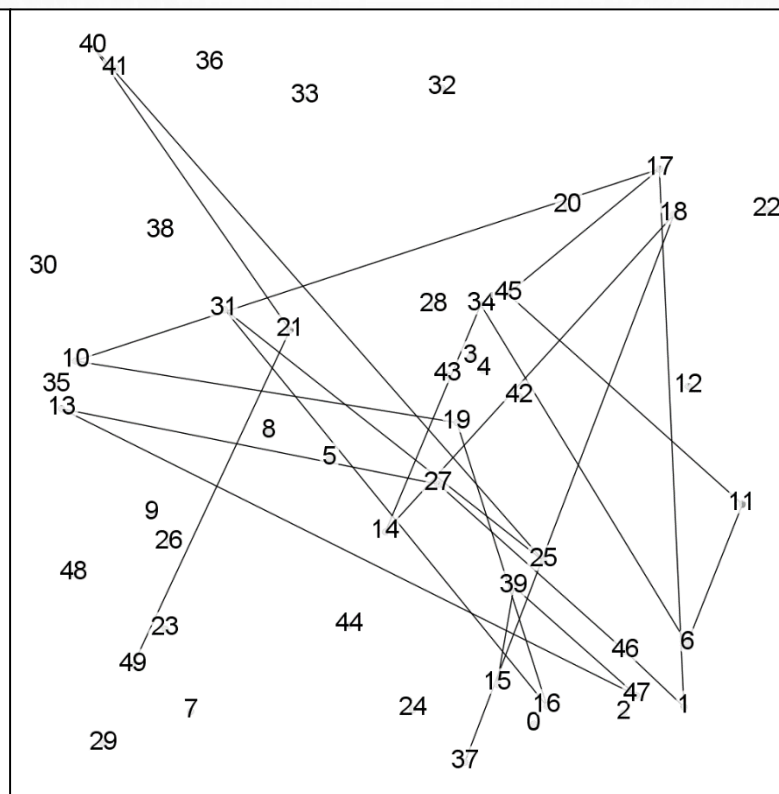
- programski jezik: C++ (standard c++11)
- IDE: Qt Creator 4.7.2
- vizualizacija grafova: Gephi 0.8.2
- implementacija grafa pomoću liste susjedstva
- genetski algoritam
- bitne funkcije:
 - rezanje nepotrebnih listova (CUT)
 - konstrukcija minimalnog razapinjućeg stabla (MST)
 - konstruktor početne populacije
 - križanje
 - mutacija

FUNKCIJE CUT I MST

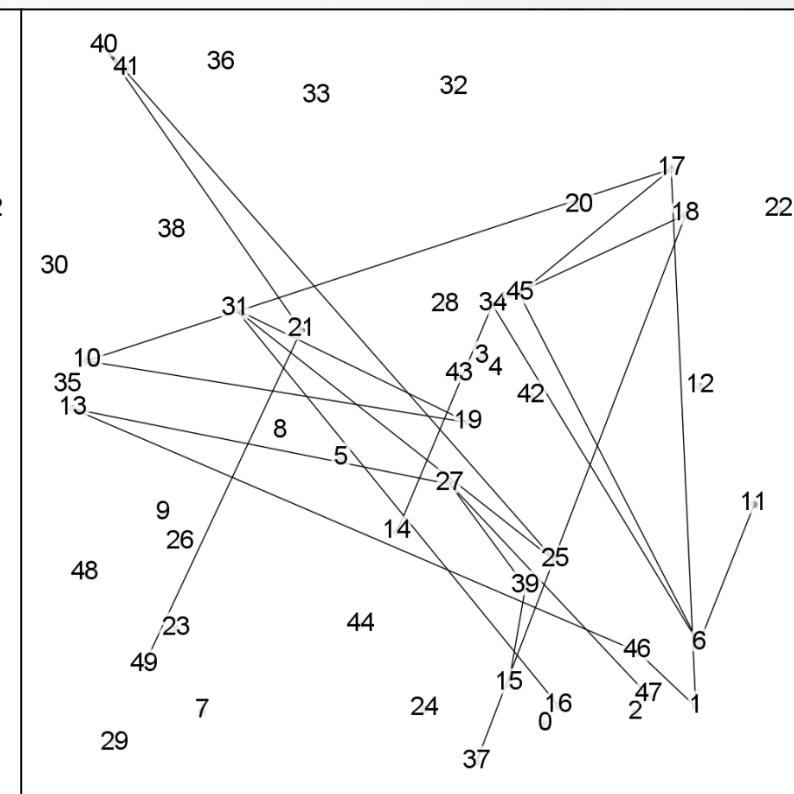
- CUT = rezanje nepotrebnih listova
- MST = konstrukcija minimalnog razapinjućeg stabla (Primov algoritam)



Prije CUT i MST



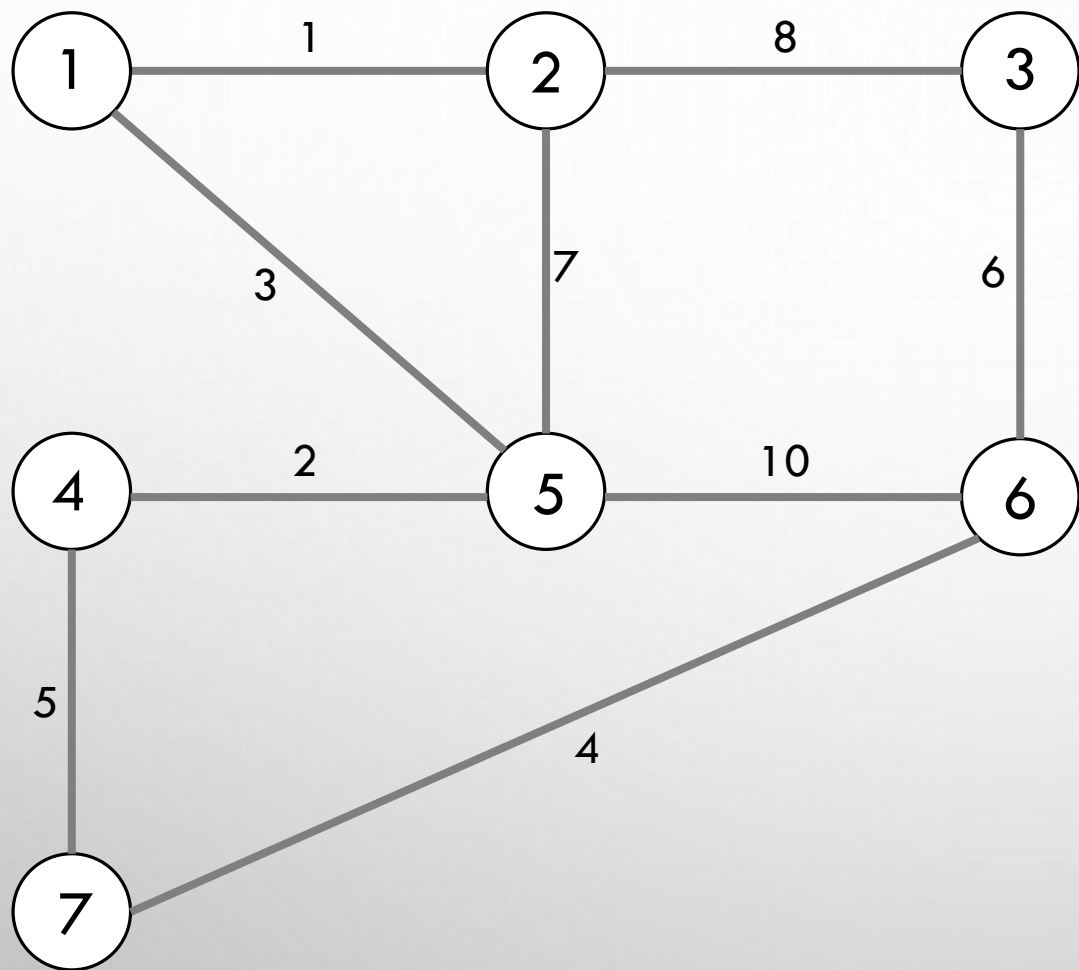
Nakon CUT






Nakon MST

POČETNA POPULACIJA

- označi sve vrhove kao neposjećene
- U = skup posjećenih vrhova koji nisu u rješenju (na početku prazan)
- V = skup vrhova u rješenju (na početku prazan)
- odaberi vrh na slučajan način (Mersenne-Twister)
 - dodaj ga u V , a njegove susjede u U
- sve dok ne posjetiš sve vrhove:
 - odaberi vrh $u \in U$ i vrh $v \in V$, ako su susjedi dodaj vrh u u skup V i brid koji ih povezuje u rješenje
 - posjeti susjede od u
- odreži nepotrebne listove
- konstruiraj minimalno razapinjuće stablo

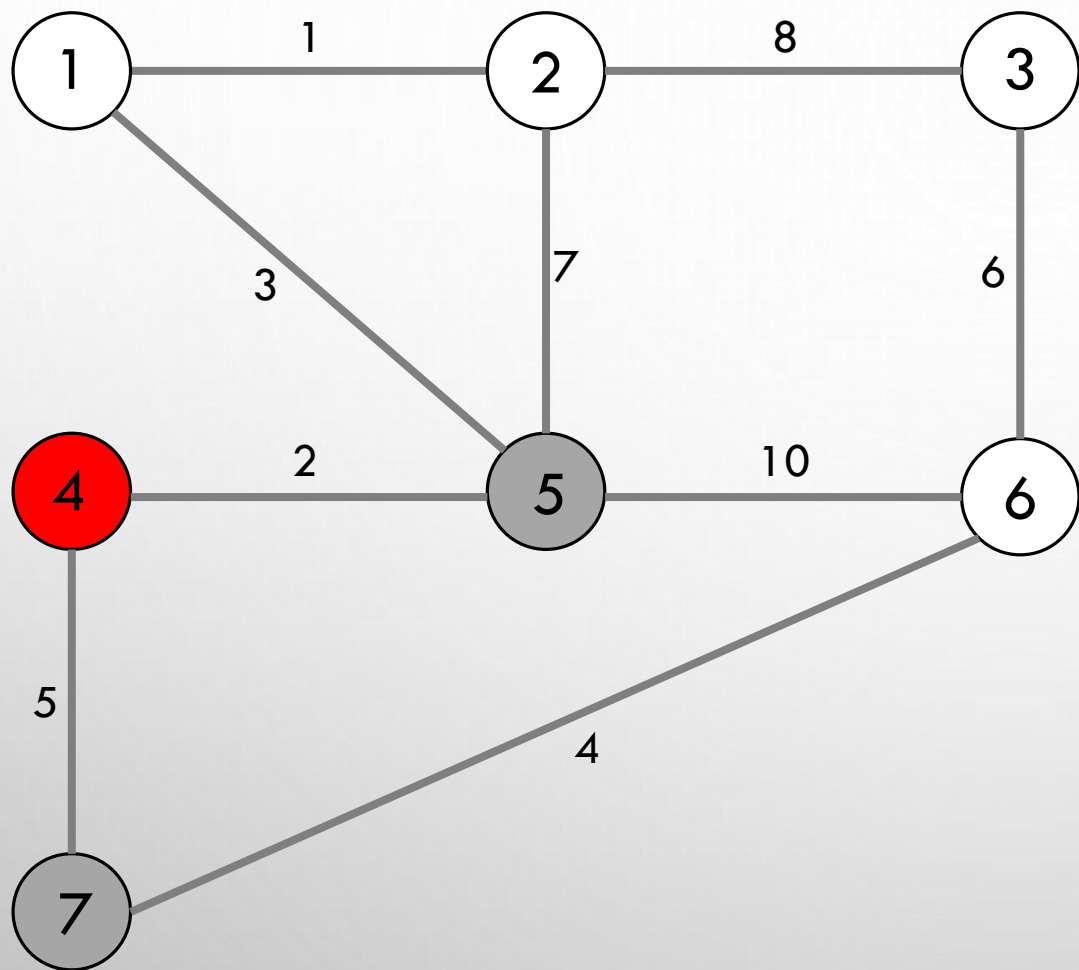


-  Neposjećeni vrh
-  Posjećeni vrh
-  Vrh u rješenju

$V = \{\}$

$U = \{\}$

Random vrh je 4.



- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

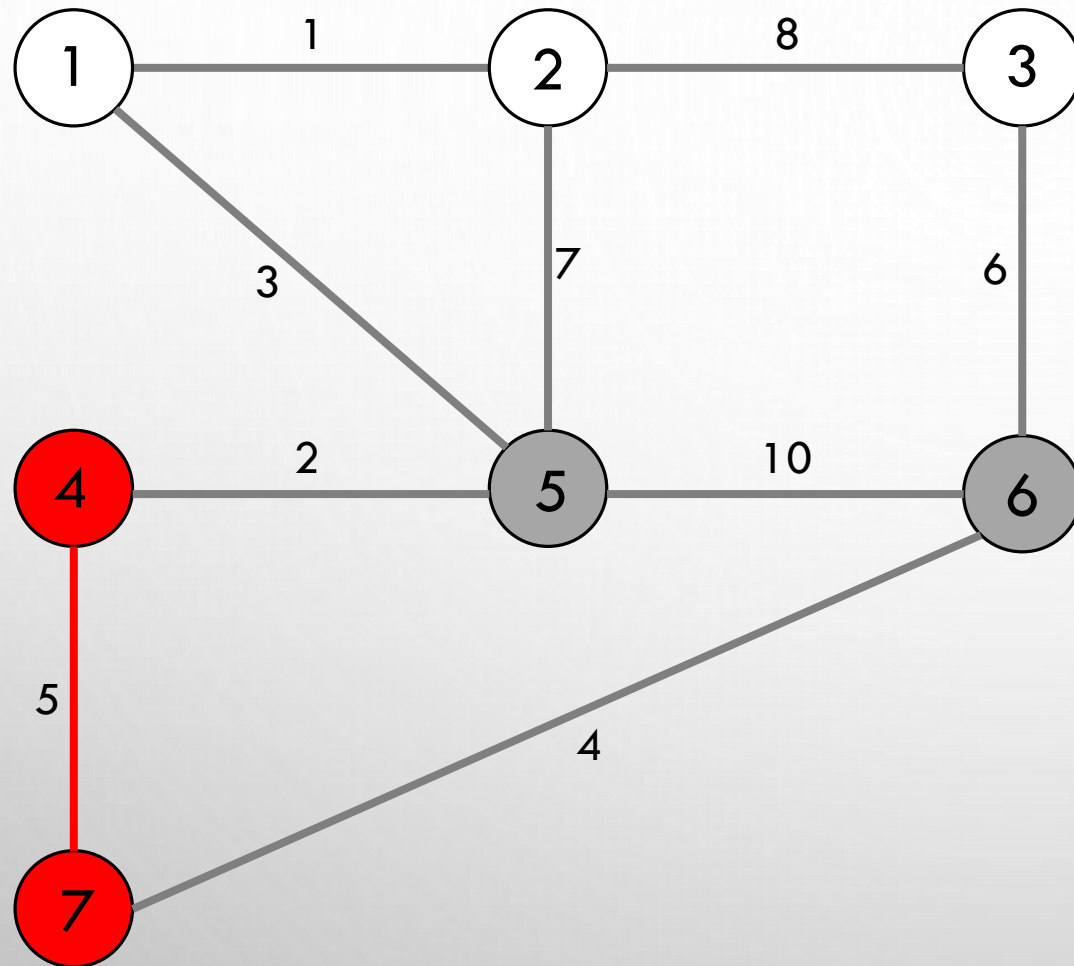
$$V = \{4\}$$

$$U = \{5, 7\}$$

Random $v \in V$ je 4.

Random $u \in U$ je 7.

Susjedni su \rightarrow poveži ih.



- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

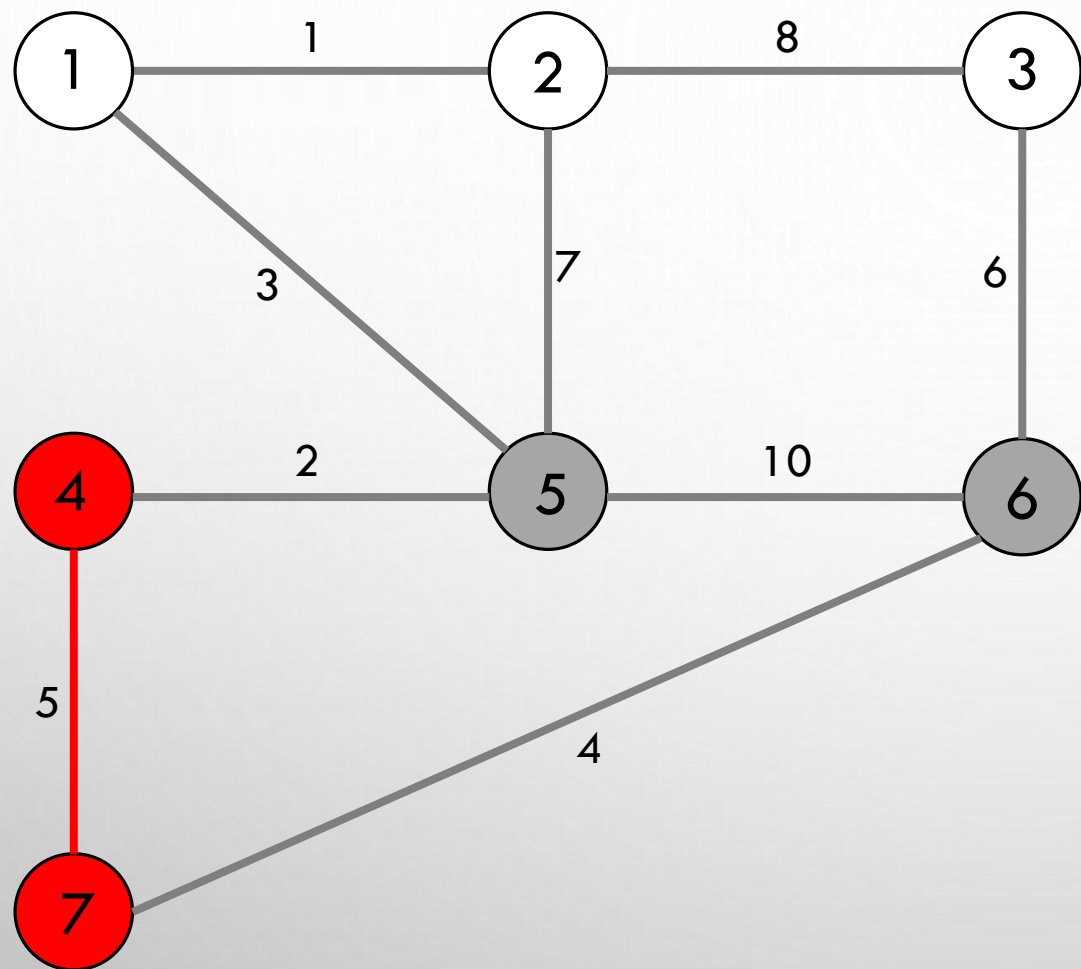
$$V = \{4, 7\}$$

$$U = \{5, 6\}$$

Random $v \in V$ je 4.

Random $u \in U$ je 6.

Nisu susjedni \rightarrow ne radi ništa.



- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

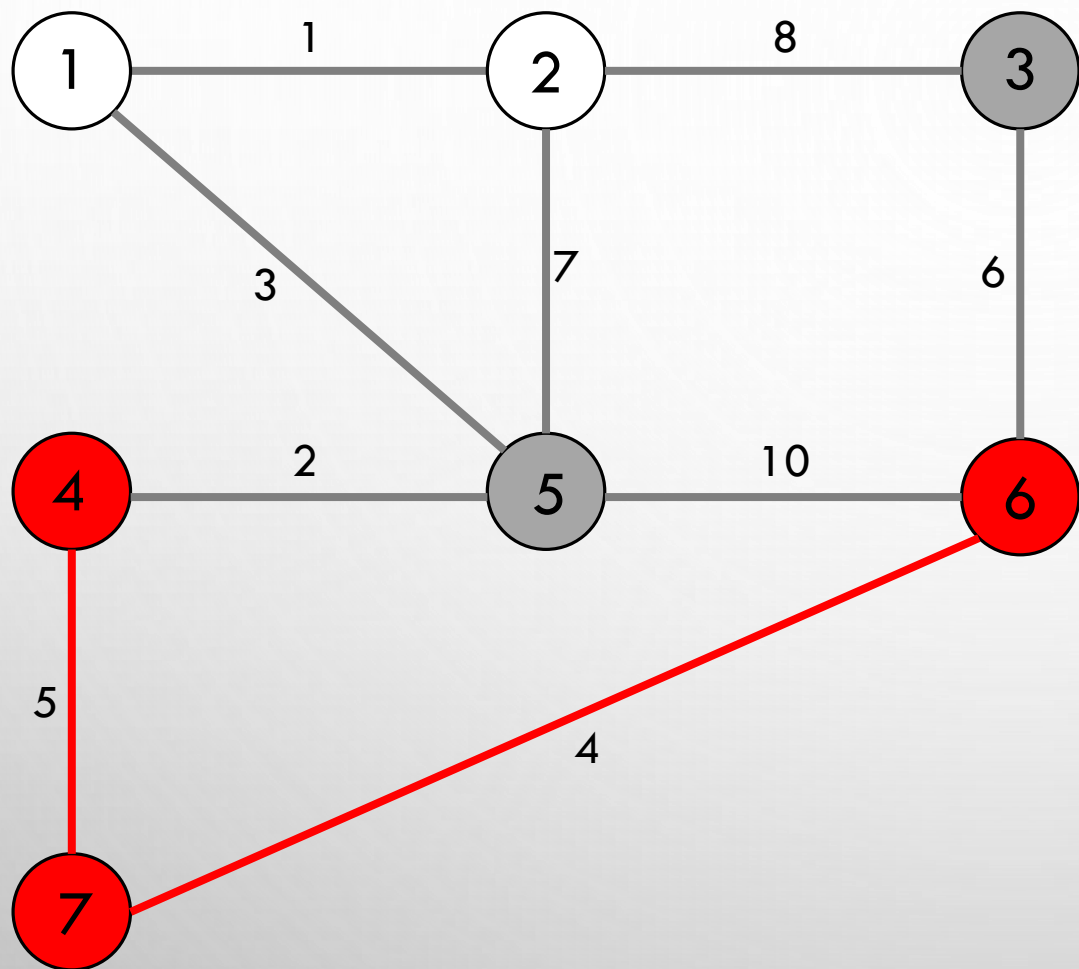
$V = \{4, 7\}$

$U = \{5, 6\}$

Random $v \in V$ je 7.

Random $u \in U$ je 6.

Susjedni su \rightarrow poveži ih.



- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

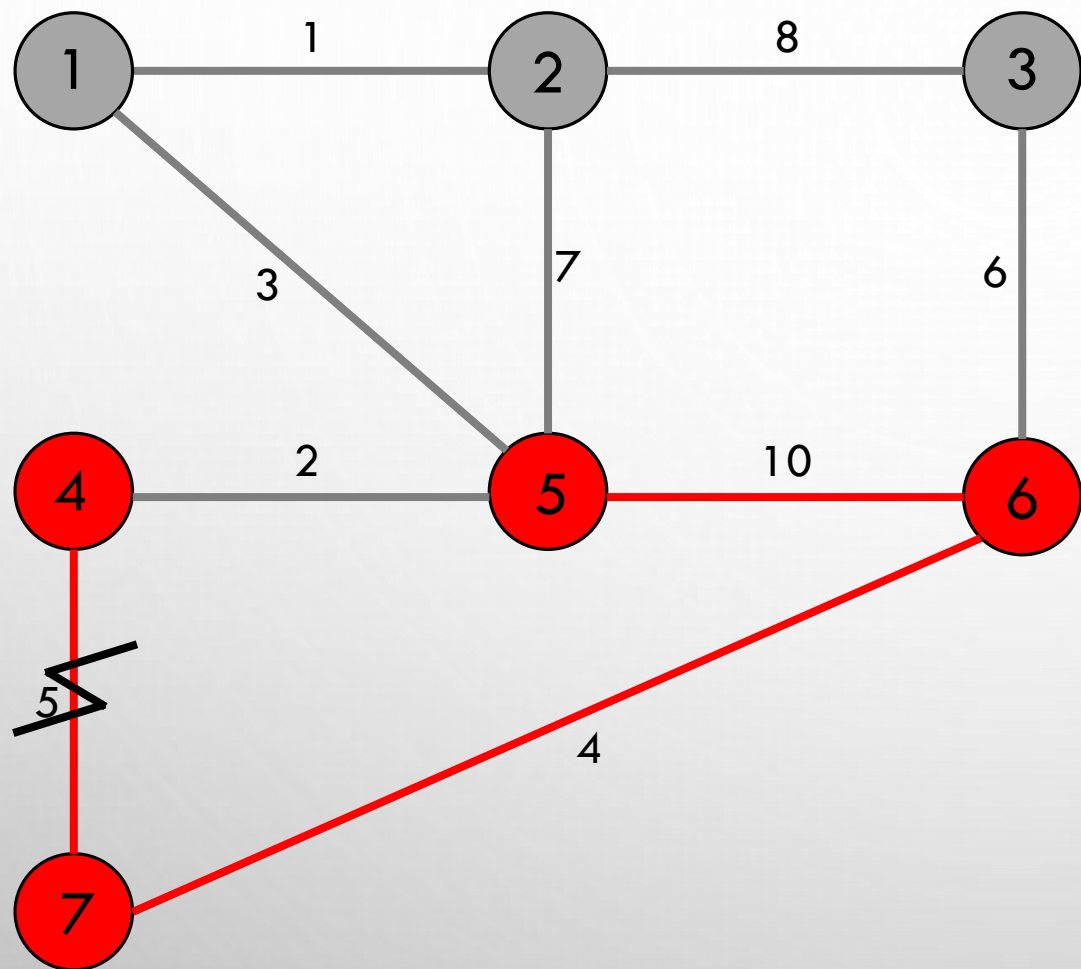
$$V = \{4, 6, 7\}$$

$$U = \{3, 5\}$$

Random $v \in V$ je 6.

Random $u \in U$ je 5.

Susjedni su \rightarrow poveži ih.

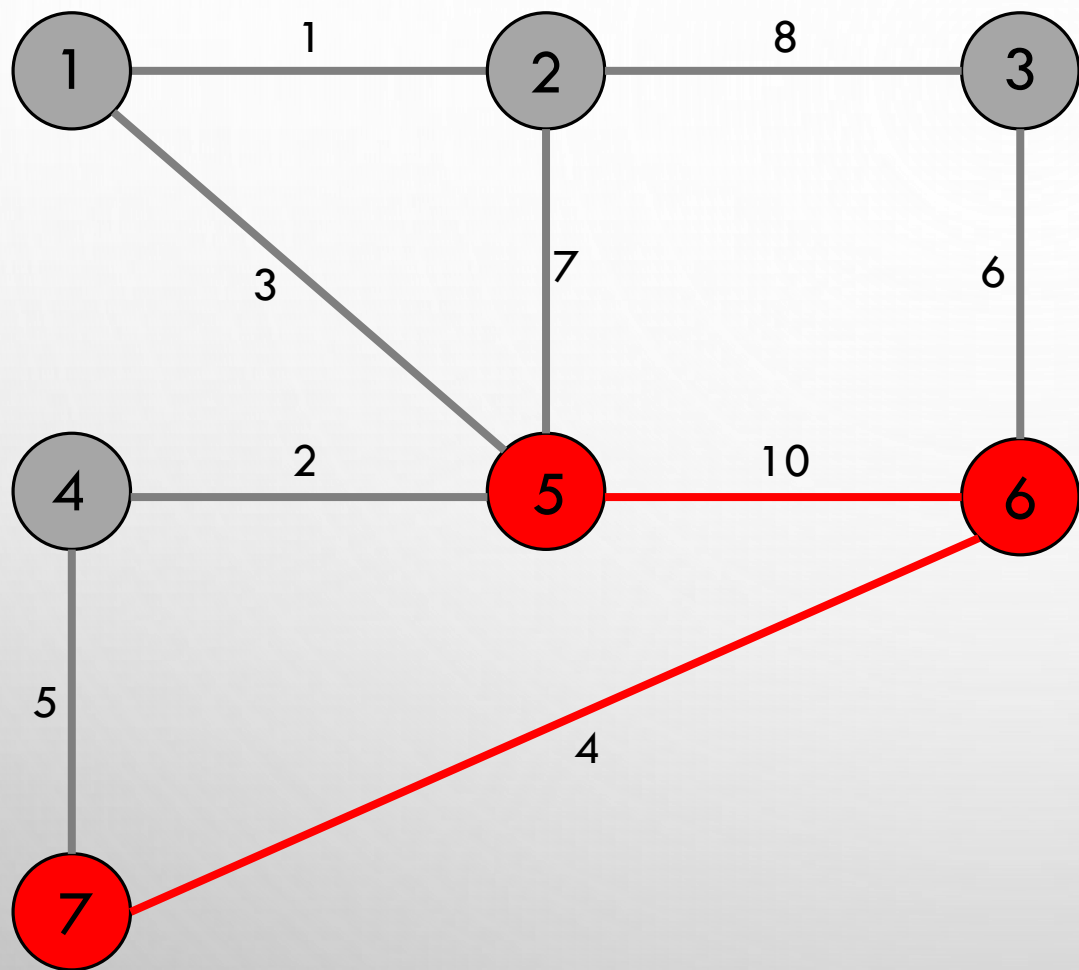


- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

$V = \{4, 5, 6, 7\}$

$U = \{1, 2, 3\}$

Posjećeni svi vrhovi → kraj.



- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

$$V = \{5, 6, 7\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4\}$$

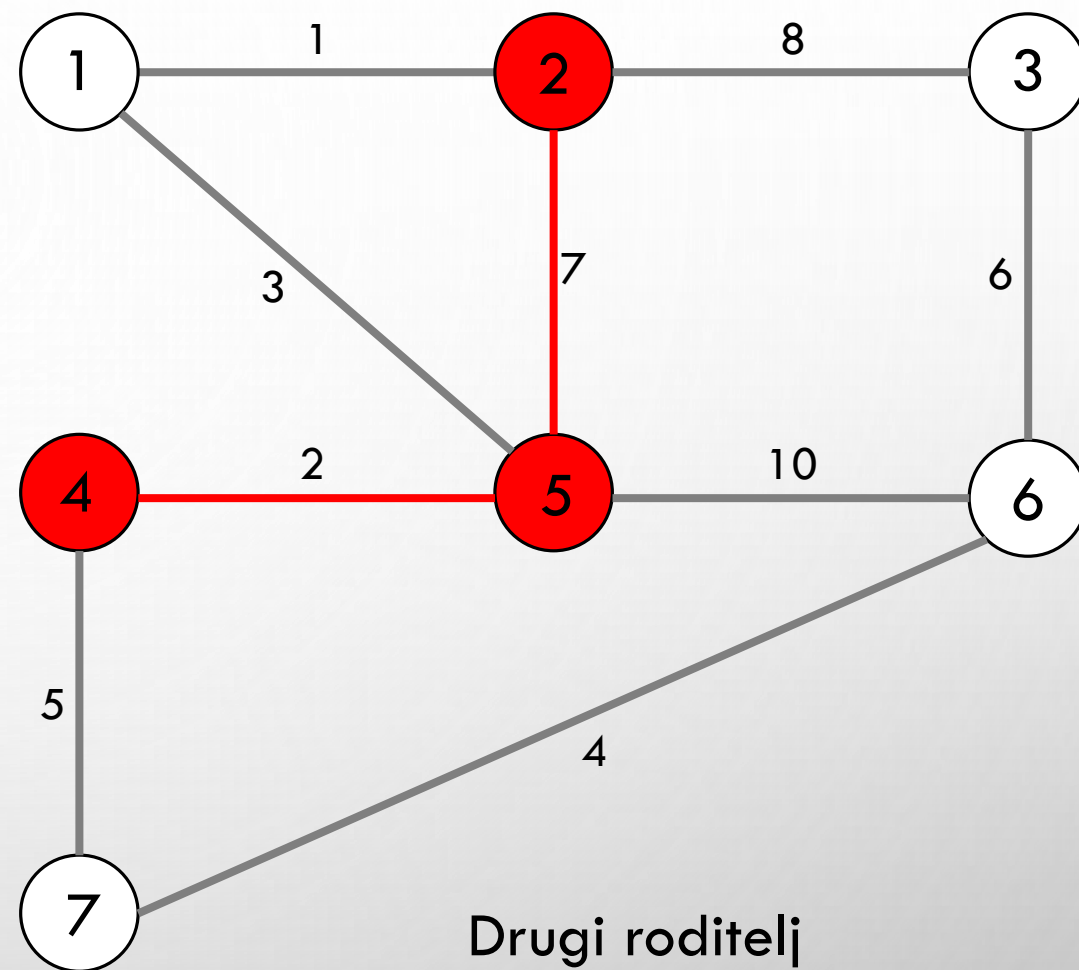
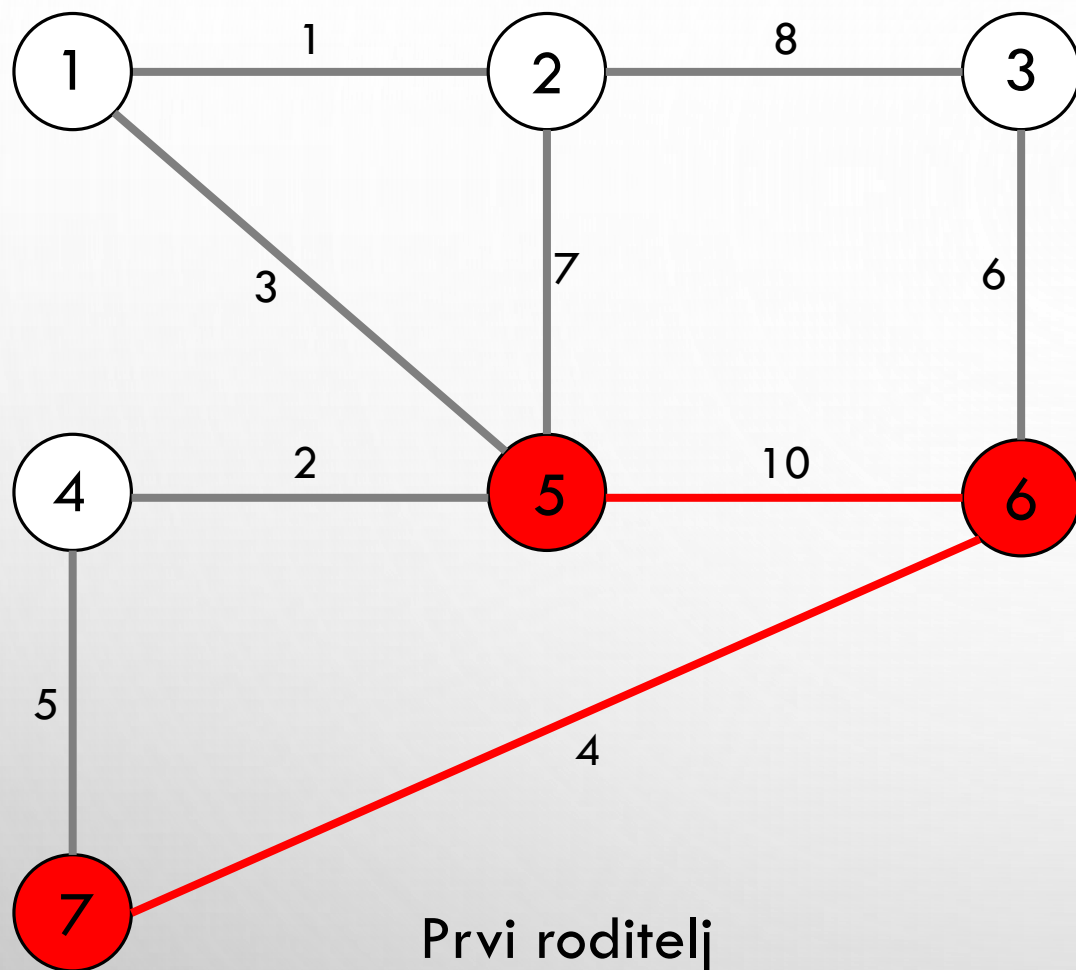
Posjećeni svi vrhovi → kraj.

KRIŽANJE

- V_1 = skup vrhova u prvom roditelju
- V_2 = skup vrhova u drugom roditelju
- C = skup vrhova u potomku (na početku prazan)
- na slučajan način odaberi prvi vrh iz V_1 ili prvi vrh iz V_2 i dodaj ga u C
- označi odabrani vrh i sve njegove susjede kao posjećene
- sve dok ne posjetiš sve vrhove:
 - na slučajan način odaberi sljedeći vrh v iz V_1 ili V_2
 - ako postoji brid između v i bilo kojeg vrha iz C , dodaj v u C i brid u rješenje
 - ako ne postoji brid, pronađi najkraći put s najvećim potencijalom između vrha v i svih vrhova iz C

KRIŽANJE

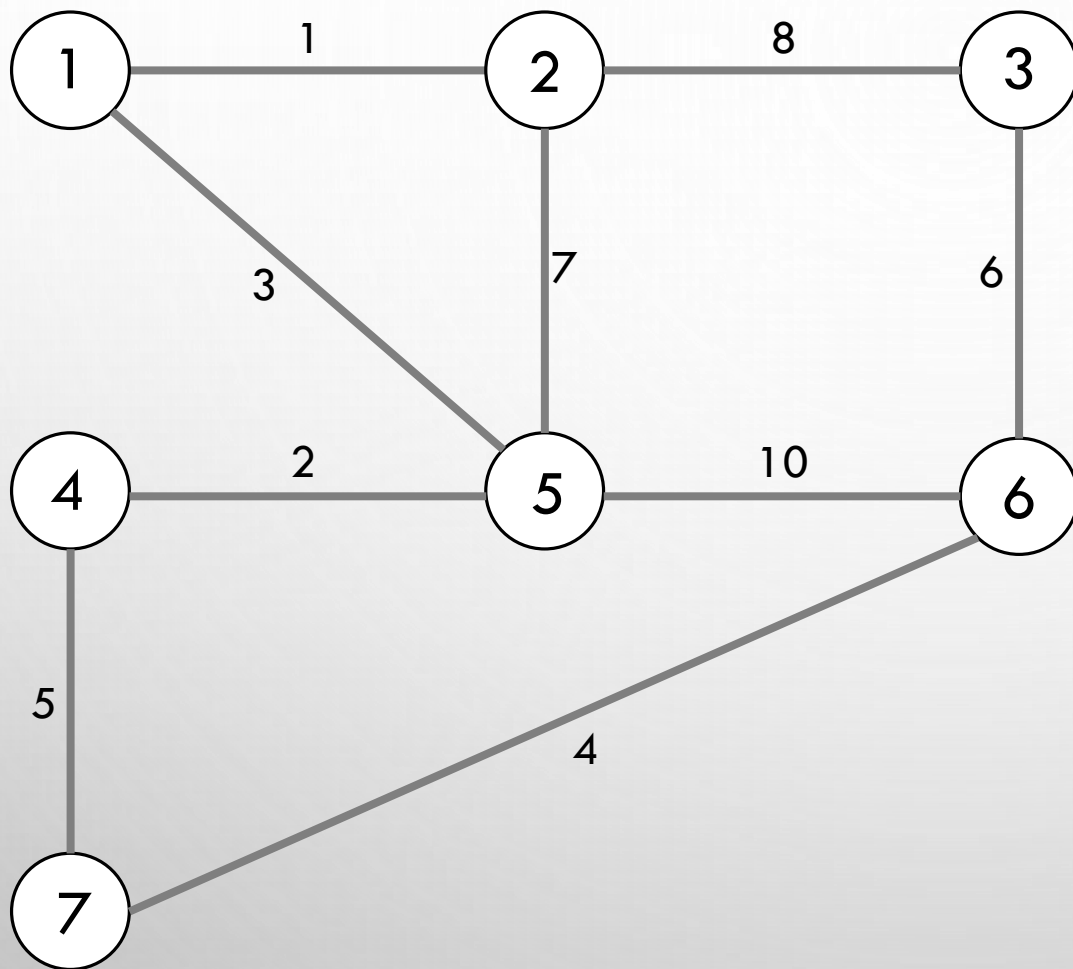
- $potencijal = \frac{broj\ neposjećenih\ vrhova\ u\ putu}{težina\ puta}$
- dodaj sve vrhove i bridove iz puta u rješenje
- posjeti susjede svih vrhova iz puta
- odreži nepotrebne listove
- konstruiraj minimalno razapinjuće stablo






$$V_1 = \{5, 6, 7\}$$

$$V_2 = \{2, 4, 5\}$$

$$C = \{\}$$



-  Neposjećeni vrh
-  Posjećeni vrh
-  Vrh u rješenju

$$V_1 = \{5, 6, 7\}$$

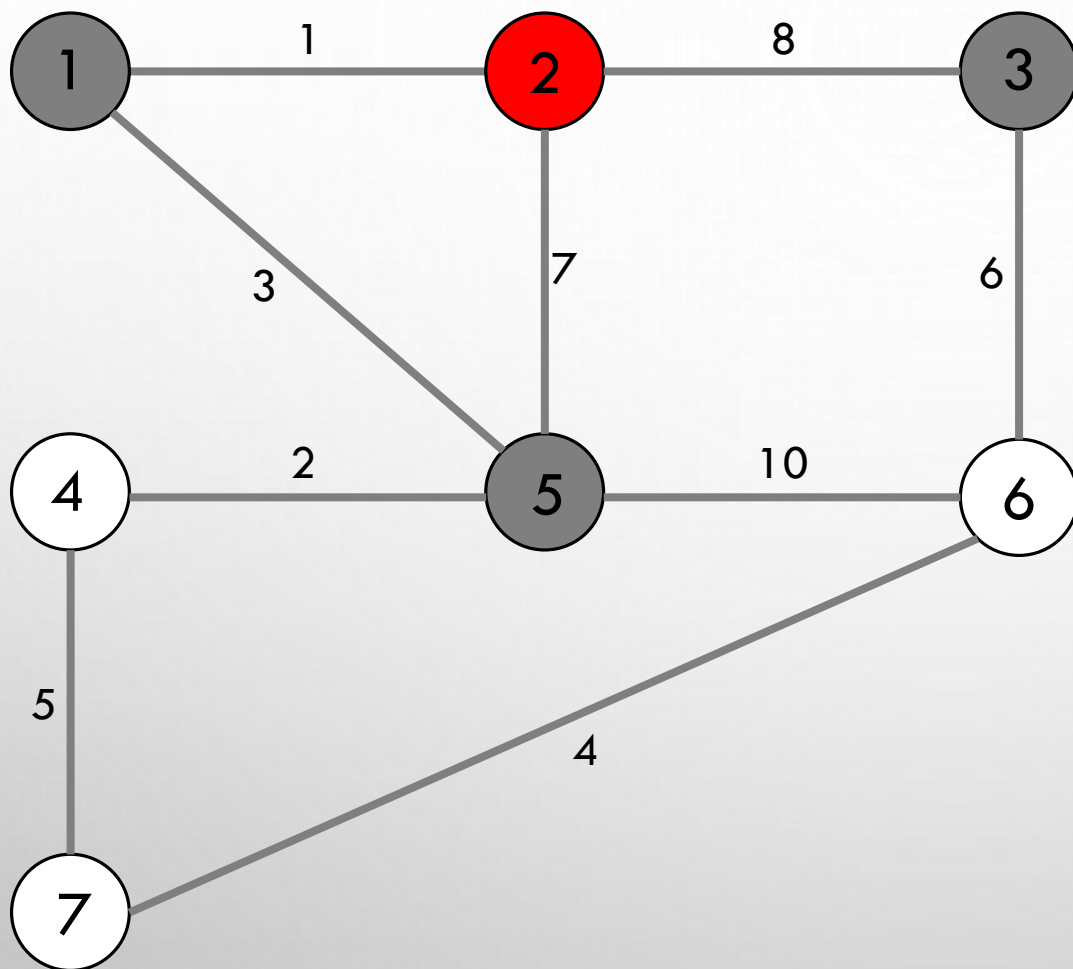
$$V_2 = \{2, 4, 5\}$$

$$C = \{\}$$

$v \in V_2$ je 2.

Dodaj ga u C.

Posjeti susjede.



- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

$$V_1 = \{5, 6, 7\}$$

$$V_2 = \{4, 5\}$$

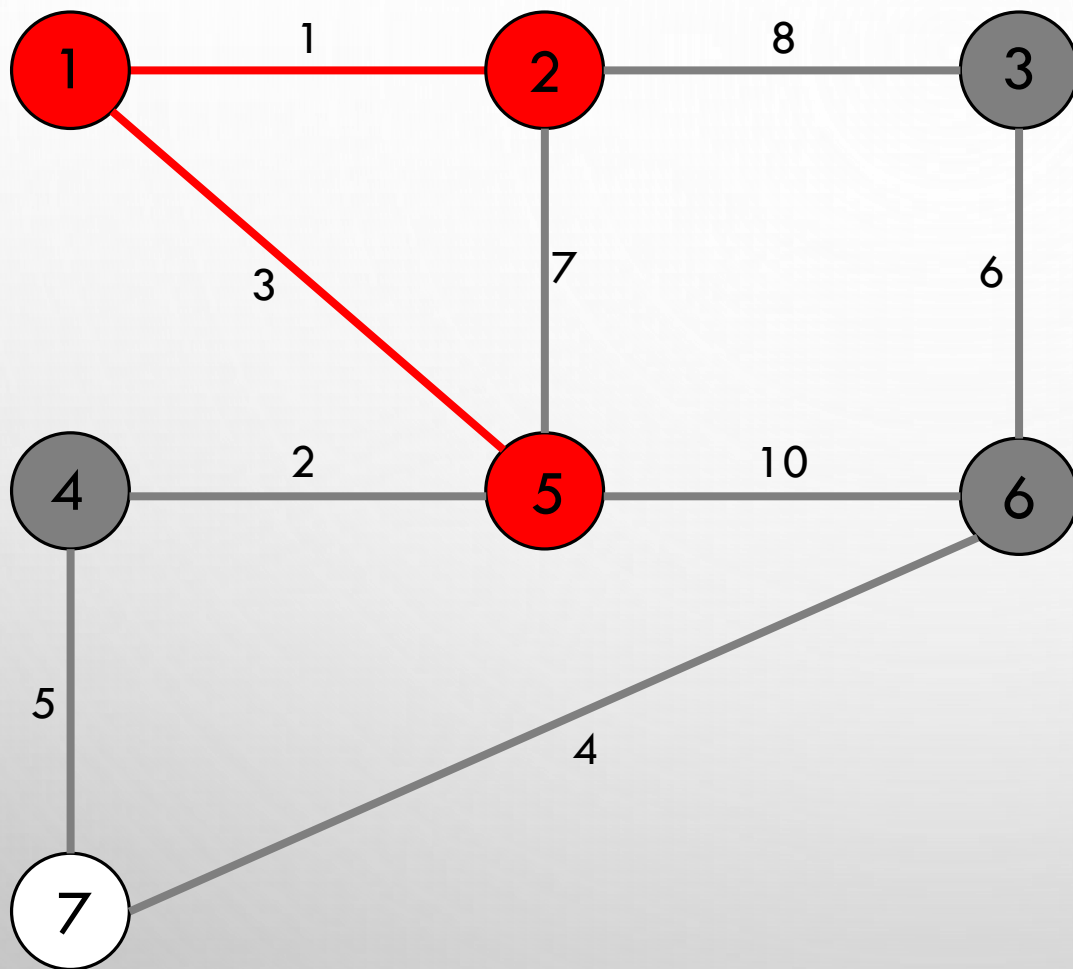
$$C = \{2\}$$

$v \in V_1$ je 5.

Najkraći put s najvećim potencijalom je $2 \rightarrow 1 \rightarrow 5$.

Dodaj vrhove iz puta u C.

Posjeti susjede.



- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

$$V_1 = \{6, 7\}$$

$$V_2 = \{4, 5\}$$

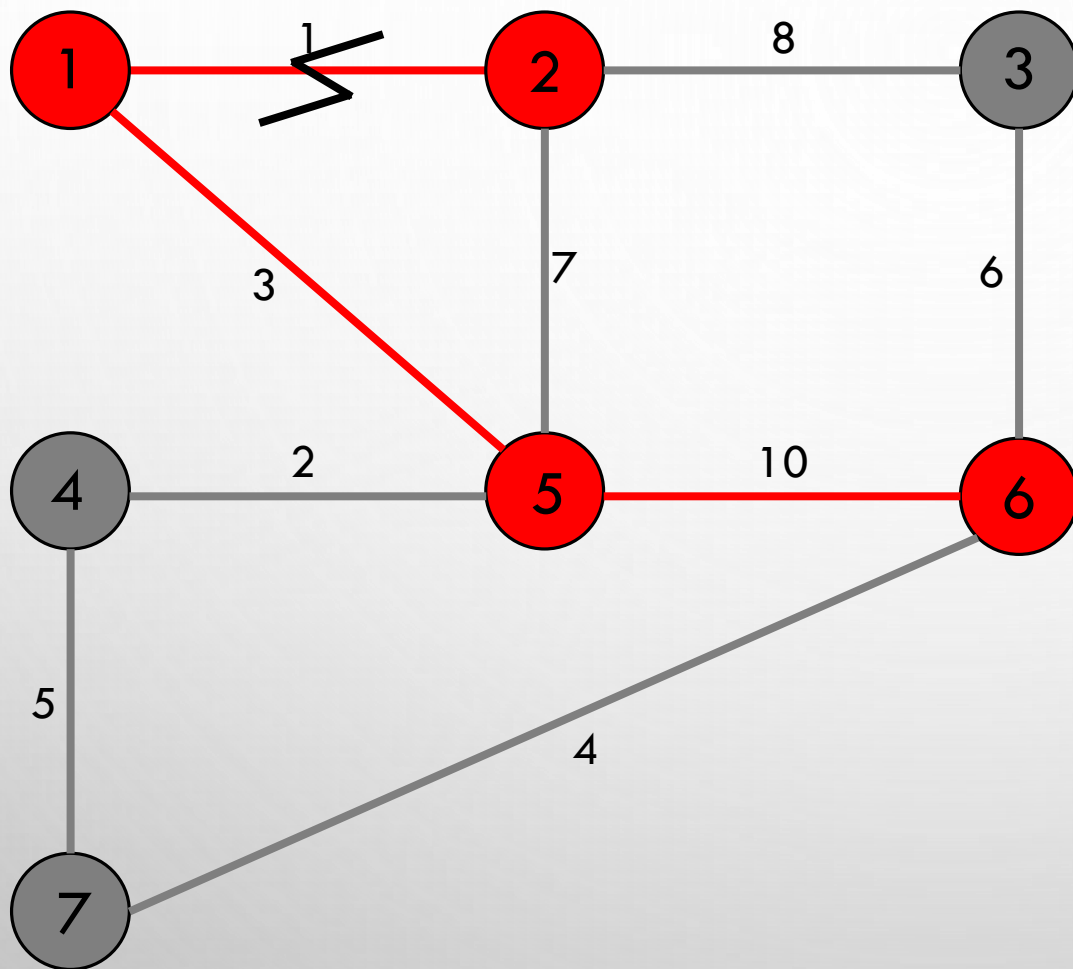
$$C = \{1, 2, 5\}$$

$v \in V_1$ je 6.

Postoji brid između 6 i 5.

Dodaj v u C .

Posjeti susjede.



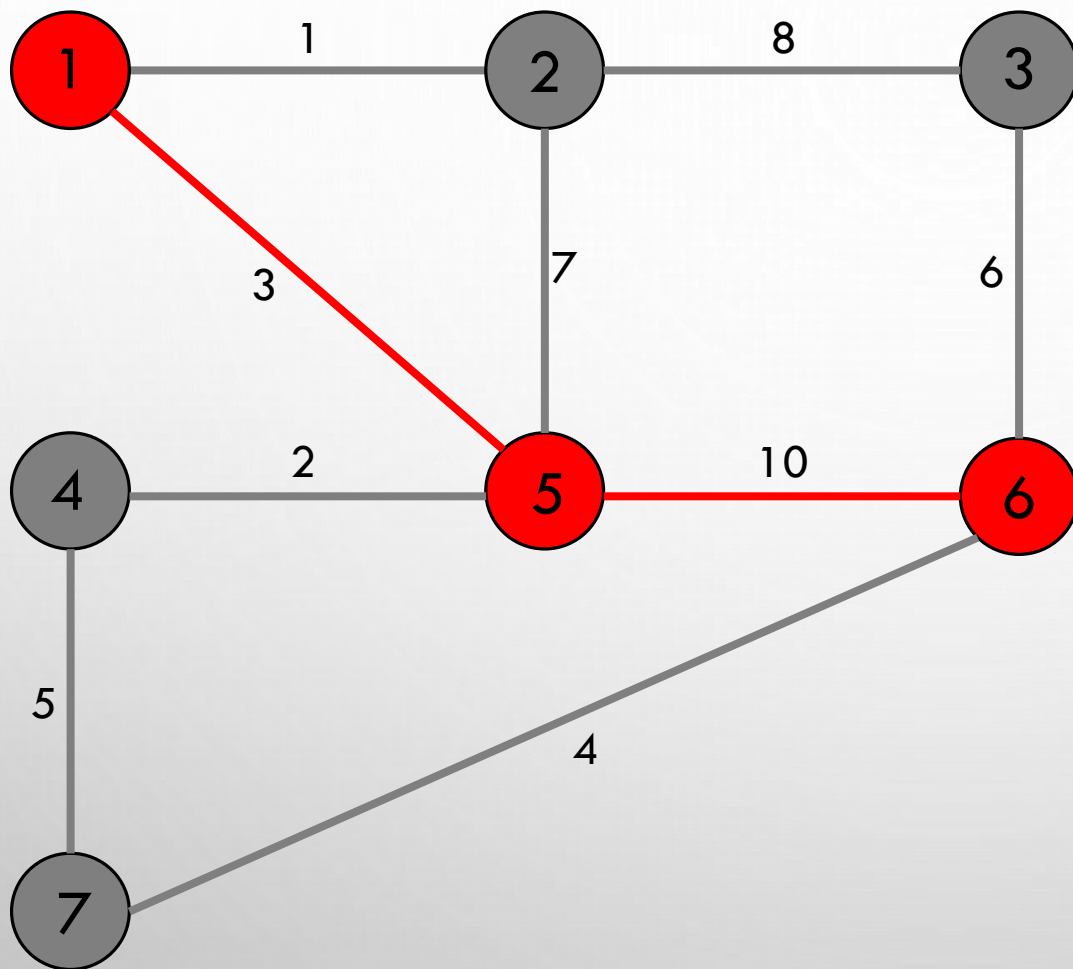
- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

$$V_1 = \{7\}$$

$$V_2 = \{4, 5\}$$

$$C = \{1, 2, 5, 6\}$$

Svi vrhovi posjećeni → kraj.



- Neposjećeni vrh
- Posjećeni vrh
- Vrh u rješenju

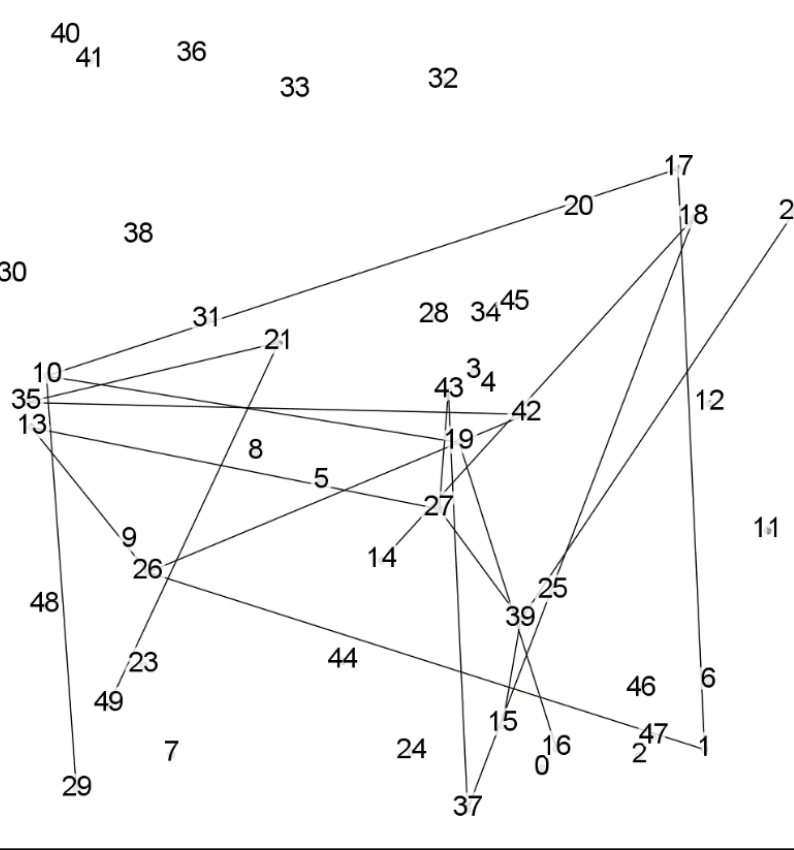
$$V_1 = \{7\}$$

$$V_2 = \{4, 5\}$$

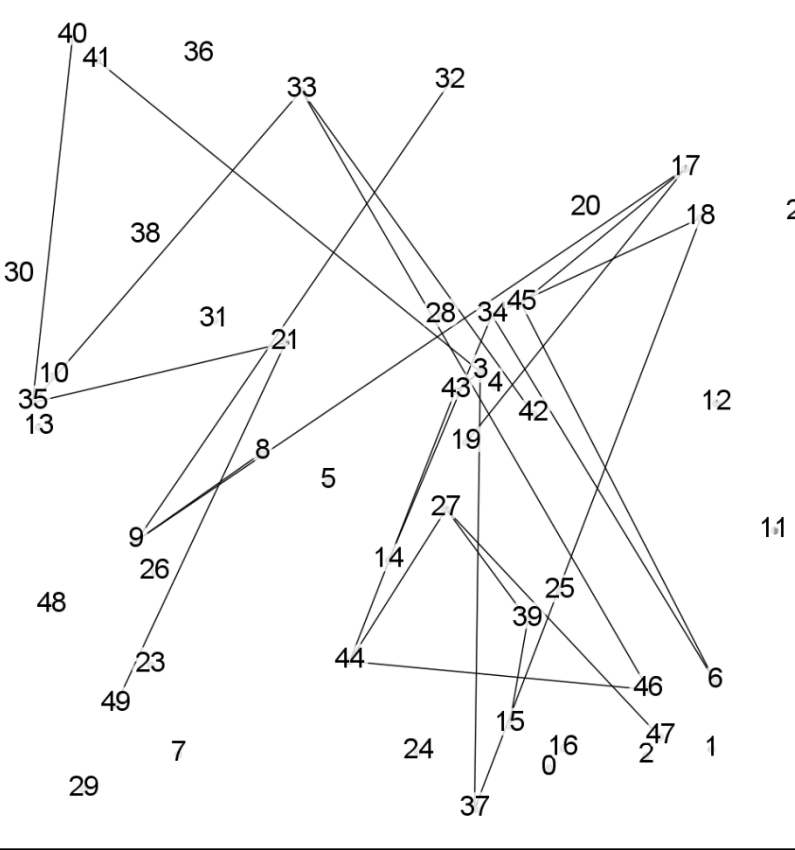
$$C = \{1, 5, 6\}$$

Svi vrhovi posjećeni → kraj.

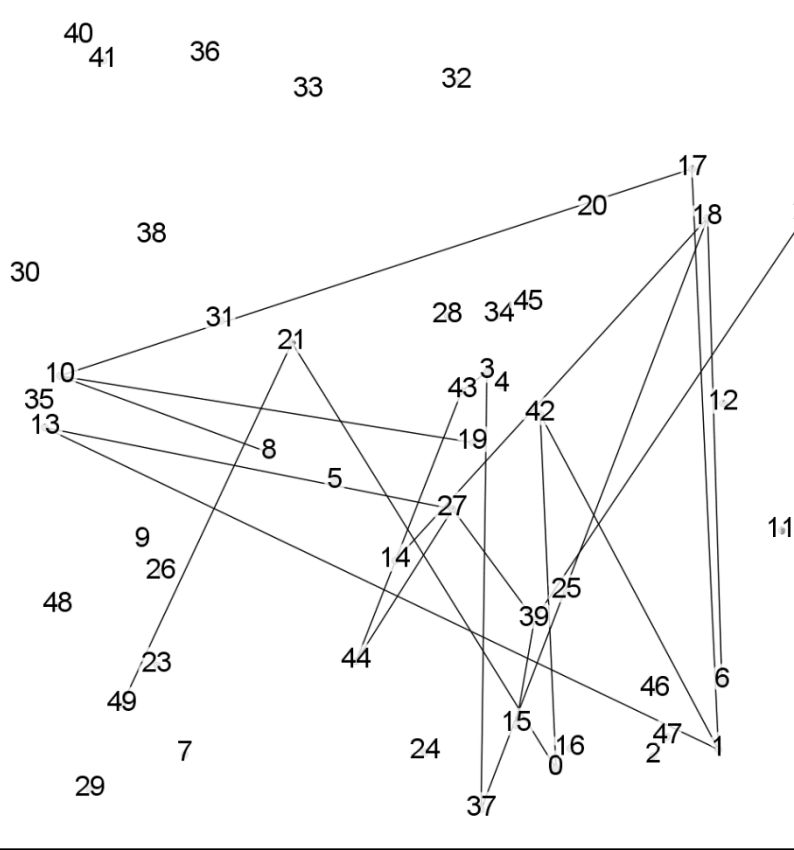
PRIMJER KRIŽANJA



Prvi roditelj



Drugi roditelj



Potomak

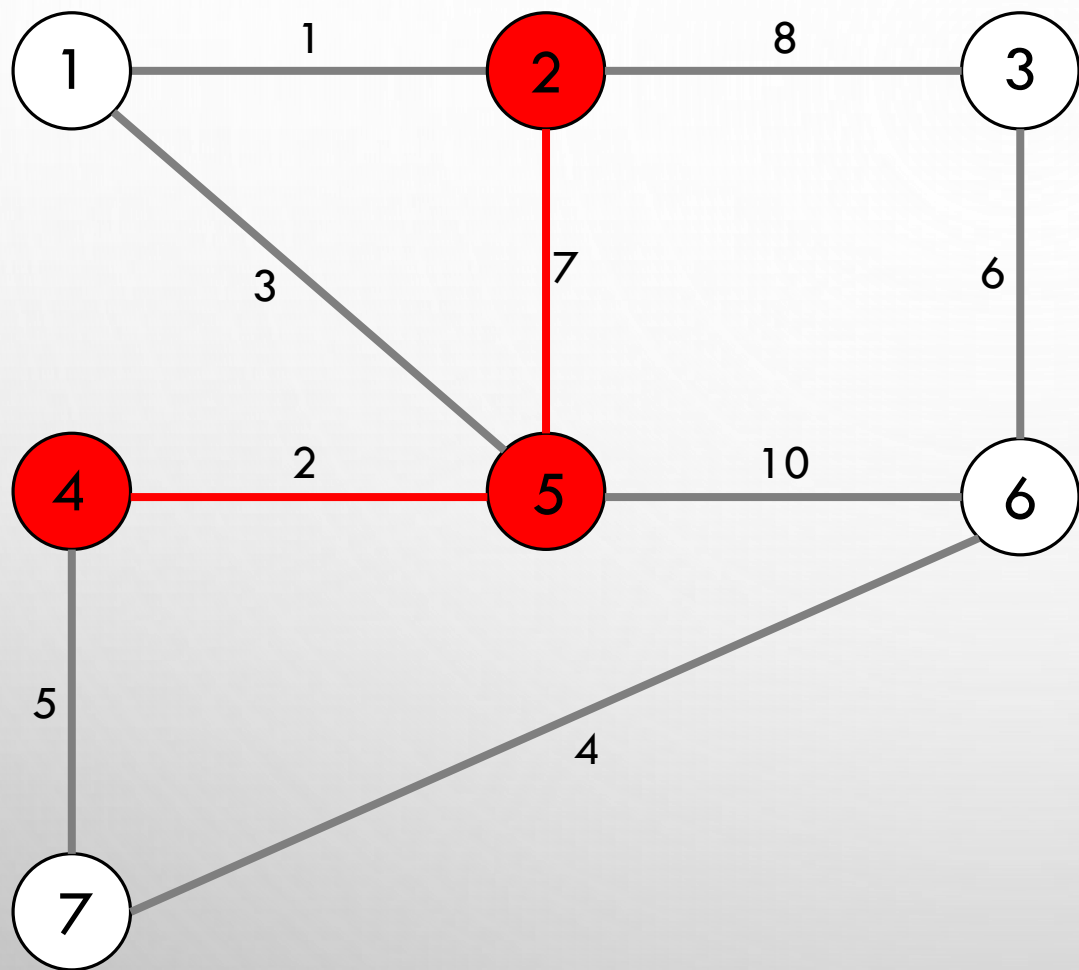
Prvi roditelj Drugi roditelj Potomak

Prvi roditelj Drugi roditelj Potomak

Prvi roditelj Drugi roditelj Potomak

MUTACIJA

- kopiraj roditelja u potomak
- C = skup vrhova u potomku
- V = skup vrhova u početnom grafu
- iz skupa $V \setminus C$ na slučajan način odaberi skup vrhova V_m t.d. $|V_m| = pm * \min(|C|, |V \setminus C|)$
- sve dok je V_m neprazan:
 - na slučajan način odaberi vrh $v_c \in C$
 - pronadi vrh $v_m \in V_m$ koji je najbliži vrhu v_c i spoji ih najkraćim putem
 - izbaci v_m iz V_m
- odreži nepotrebne listove
- konstruiraj minimalno razapinjuće stablo



● Vrh u rješenju
● Vrh u skupu V_m

$$|C| = 3$$

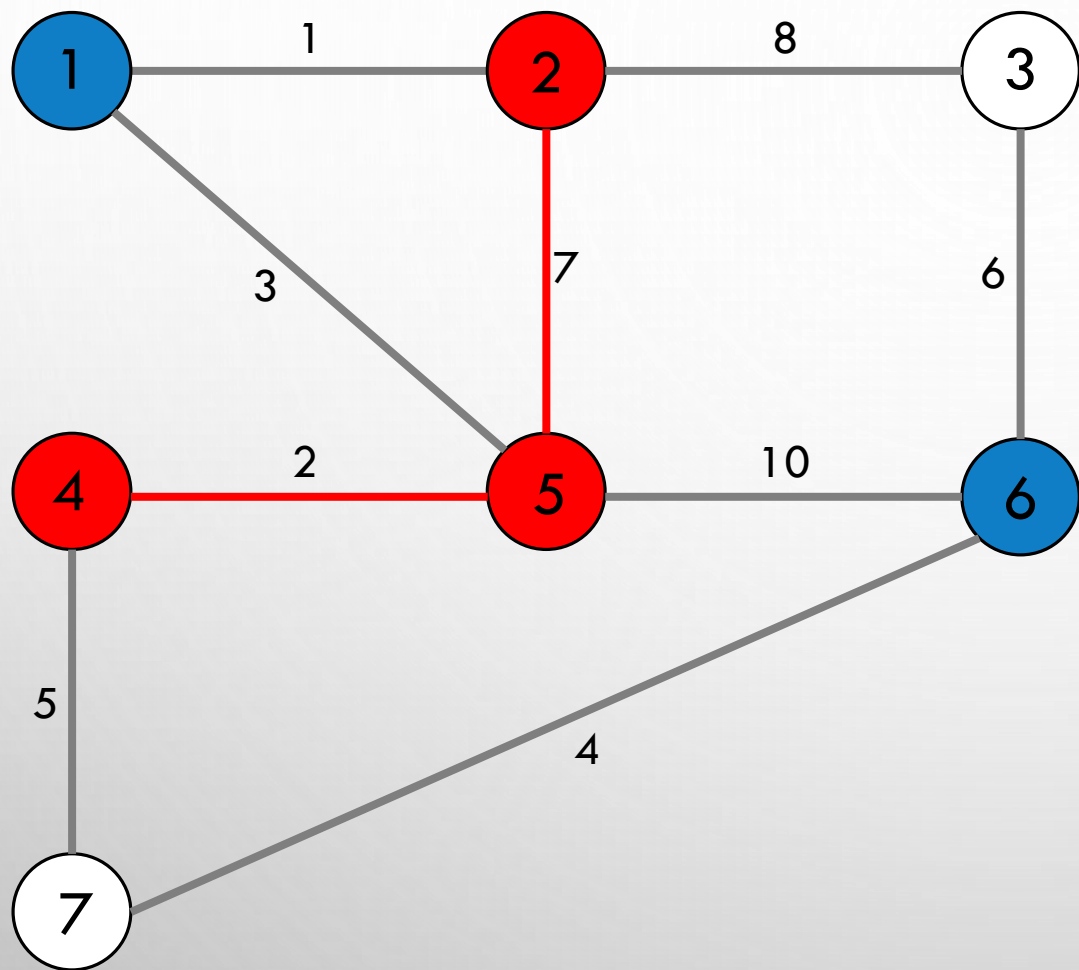
$$|V \setminus C| = 4$$

$$p_m = 0.7$$

$$|V_m| = \lfloor 0.7 * 3 \rfloor = 2$$

Random odabran vrh 1.

Random odabran vrh 6.



● Vrh u rješenju
● Vrh u skupu V_m

$$V_m = \{1, 6\}$$

$$C = \{2, 4, 5\}$$

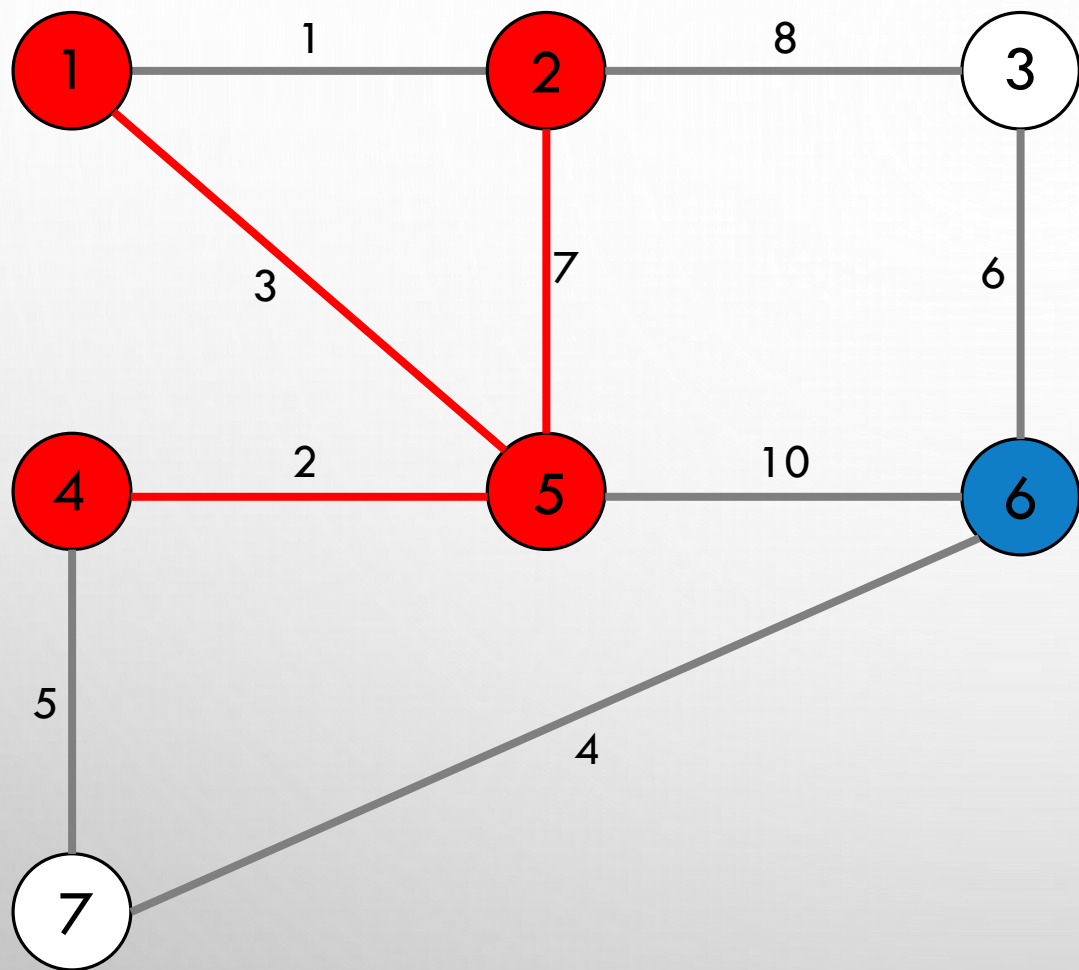
Random $v_c \in C$ je 4.

Najkaći putevi:

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ težine 5

$4 \rightarrow 7 \rightarrow 6$ težine 9

Spajamo vrhove 4 i 1
najkraćim putem.



● Vrh u rješenju
● Vrh u skupu V_m

$$V_m = \{6\}$$

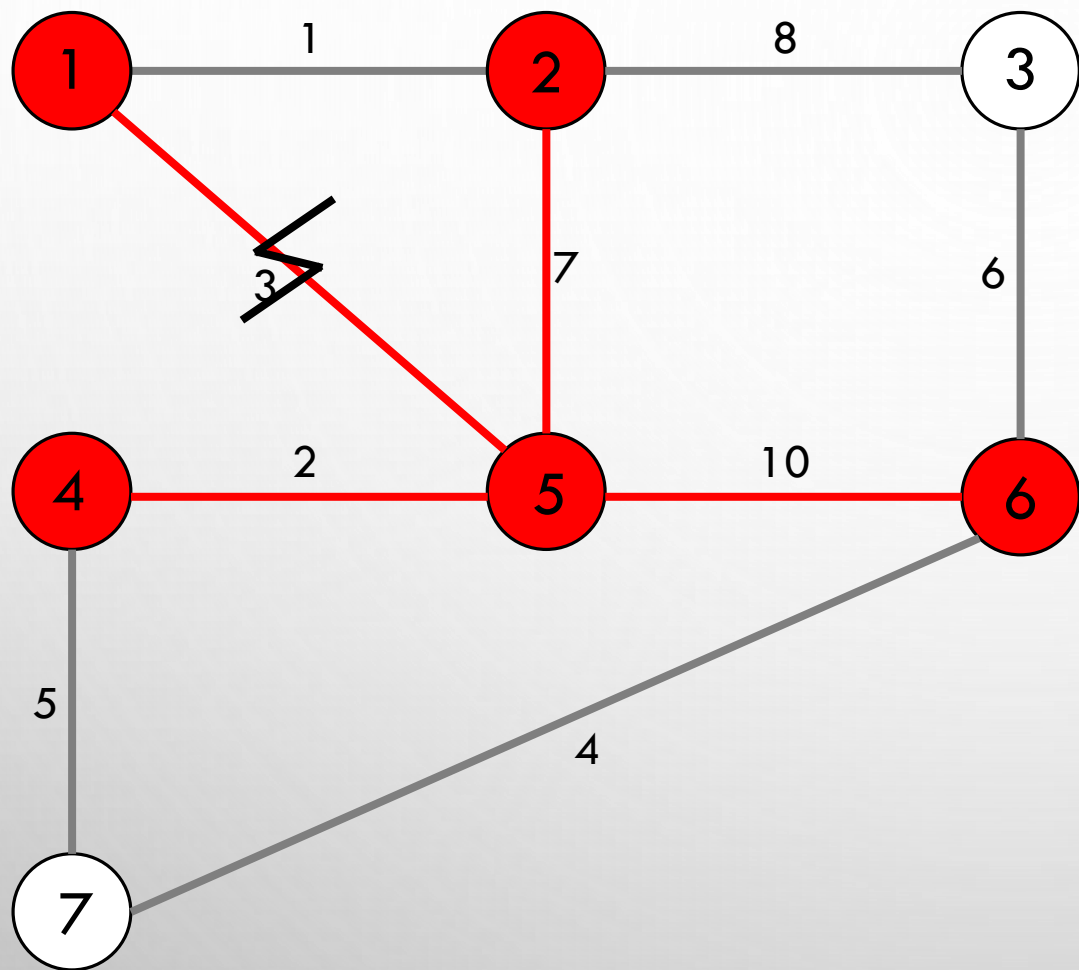
$$C = \{1, 2, 4, 5\}$$

Random $v_c \in C$ je 5.

Najkaći putevi:

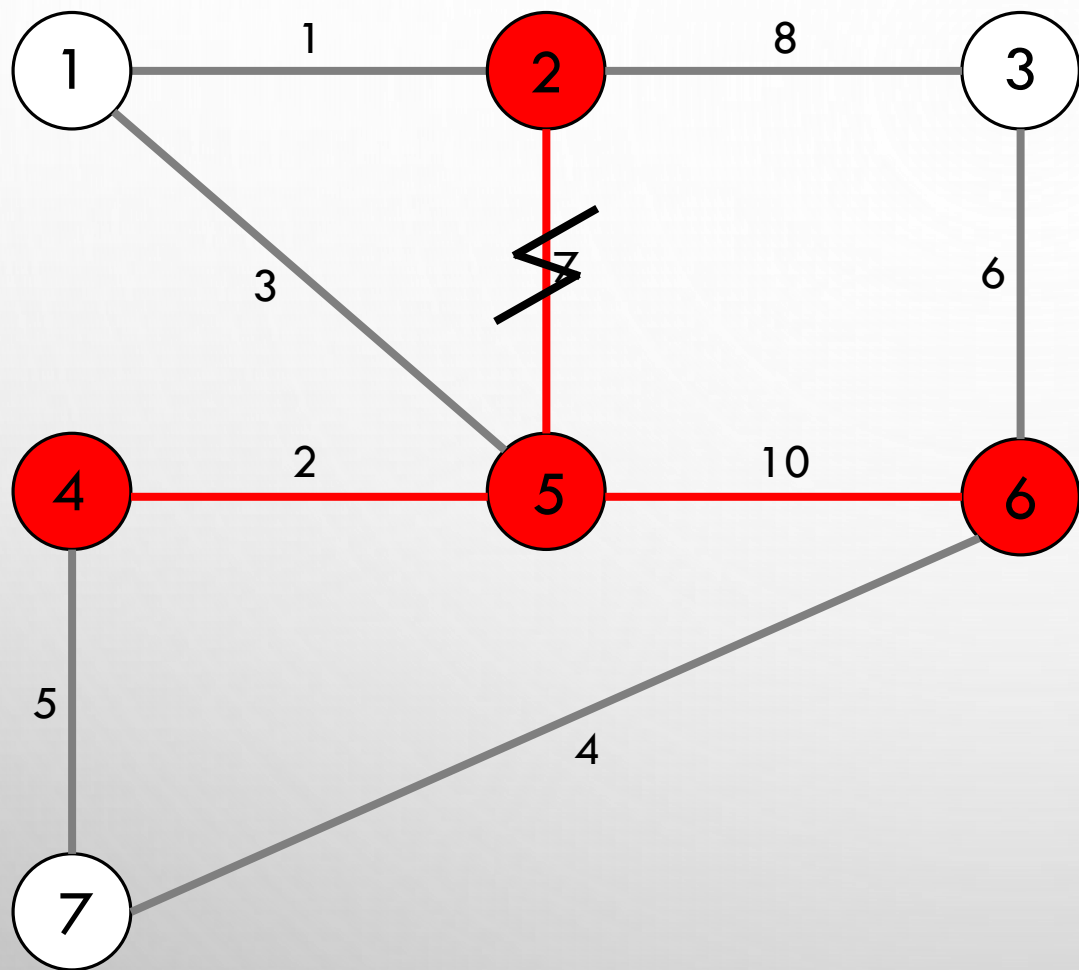
$5 \rightarrow 6$ težine 10

Spajamo vrhove 5 i 6
najkraćim putem.



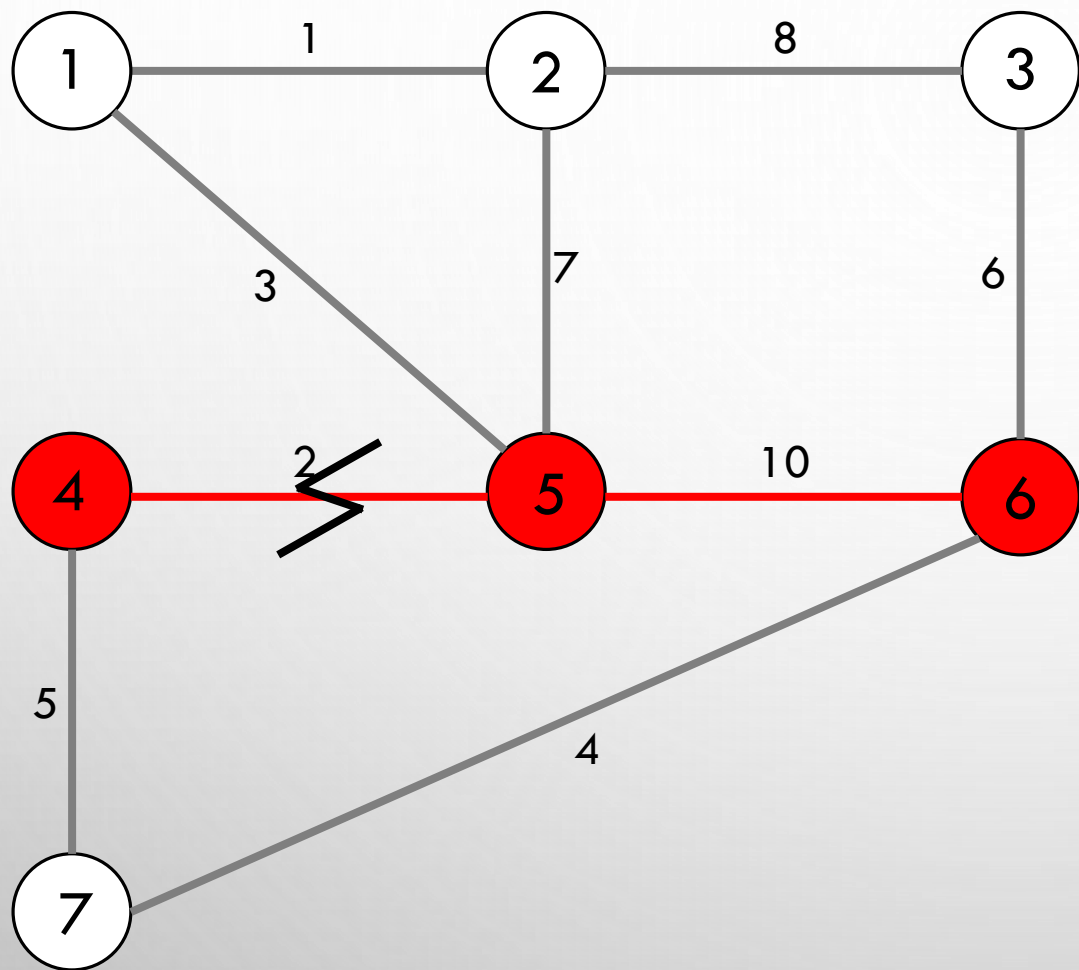
● Vrh u rješenju
 ● Vrh u skupu V_m



$V_m = \{\} \rightarrow \text{kraj}$
 $C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$



● Vrh u rješenju
● Vrh u skupu V_m

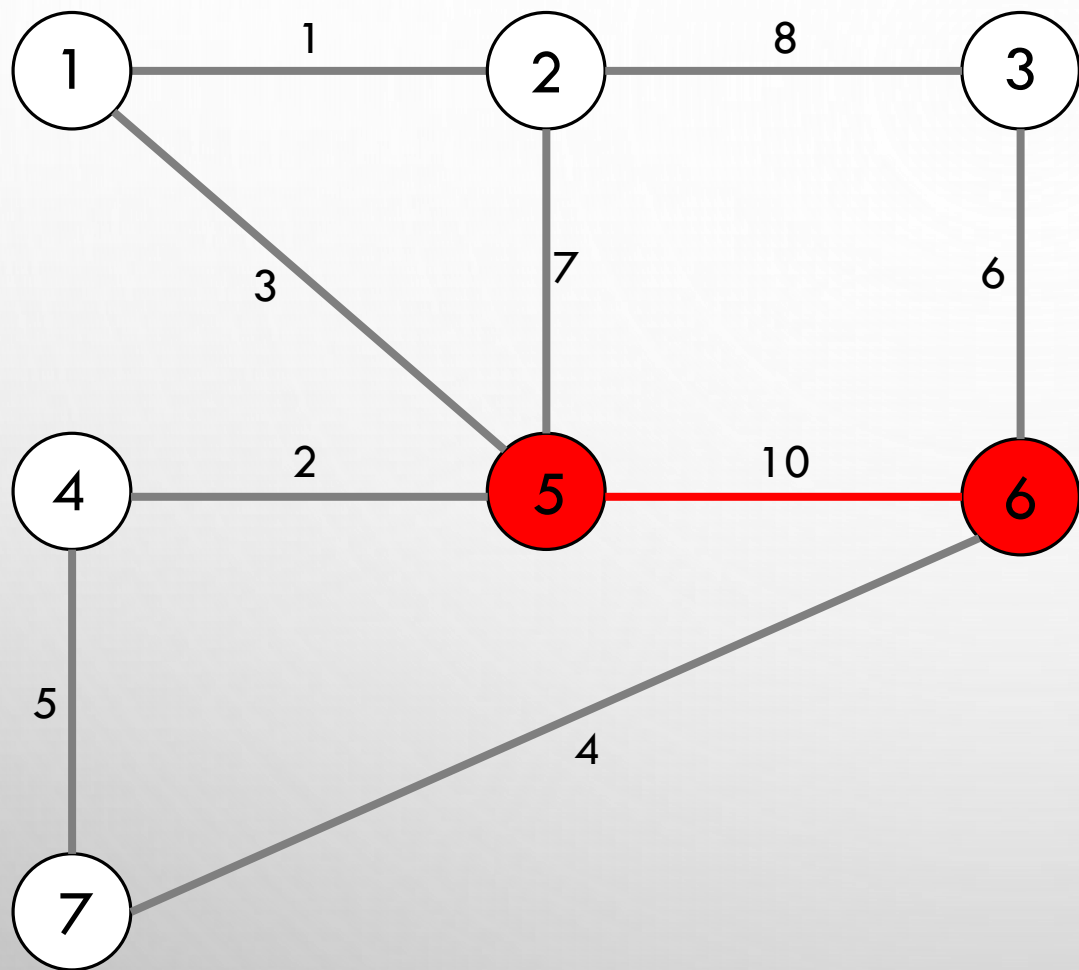
$V_m = \{\} \rightarrow \text{kraj}$
 $C = \{2, 4, 5, 6\}$



 Vrh u rješenju
 Vrh u skupu V_m

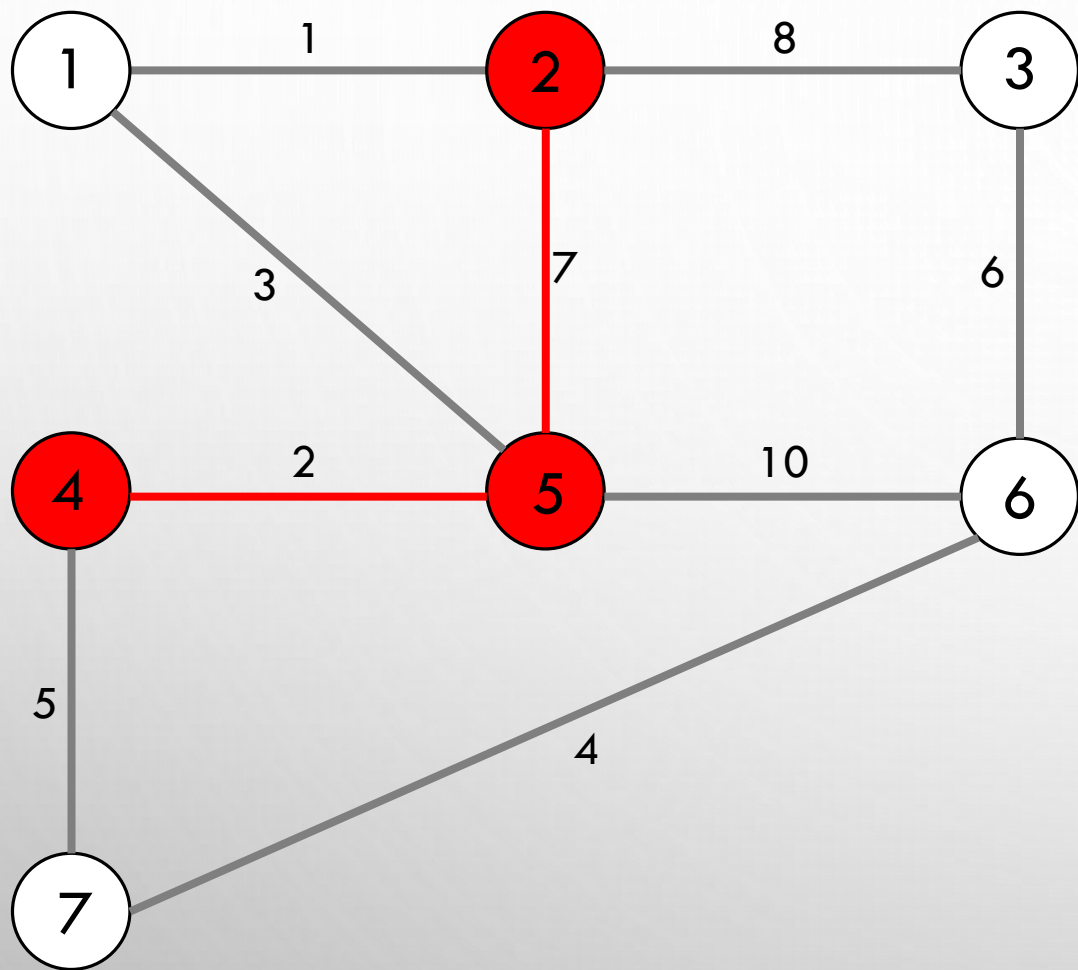
$V_m = \{\}$ \rightarrow kraj

$C = \{4, 5, 6\}$

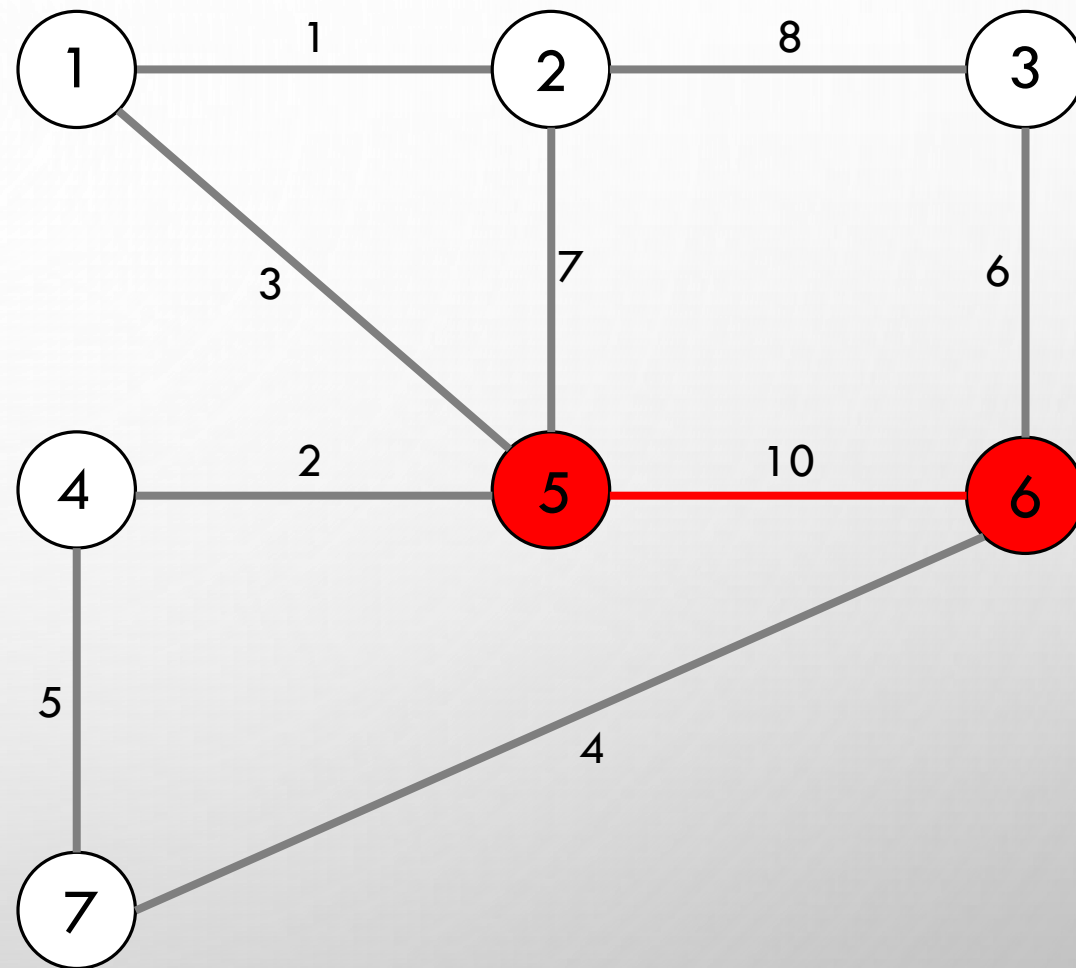


● Vrh u rješenju
● Vrh u skupu V_m

$V_m = \{\}$ \rightarrow kraj
 $C = \{5, 6\}$

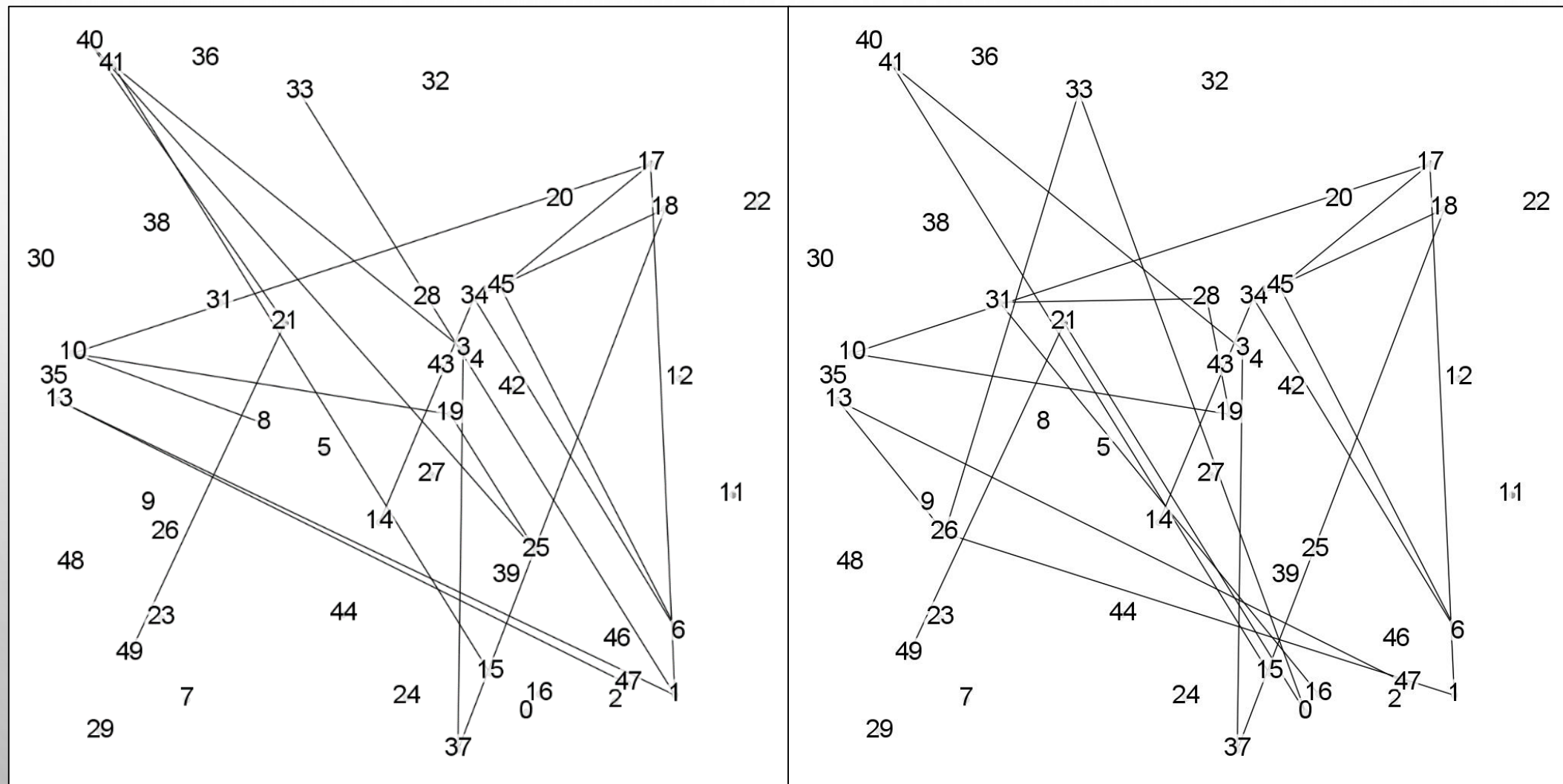


Roditelj



Potomak

PRIMJER MUTACIJE



Roditelj

Potomak

ALGORITAM

- funkcija cilja = funkcija dobrote = zbroj težina bridova u rješenju
- parametri:
 - pop = veličina populacije
 - n = broj generacija
 - p = vjerojatnost križanja
 - p_c = vjerojatnost selekcije bolje jedinke za križanje
 - p_m = vjerojatnost selekcije bolje jedinke za mutaciju
 - pm = p_m u mutaciji
- konstruiraj početnu populaciju veličine pop
- n puta:
 - s vjerojatnošću p učini križanje, inače učini mutaciju
 - ako je potomak drugačiji od svih jedinki, ubaci ga u populaciju i izbaci najgoru jedinku

ALGORITAM - NASTAVAK

- selekcija za mutaciju:
 - na slučajan način odaberi 2 jedinke
 - s vjerojatnošću p_m odaberi bolju jedinku
- selekcija za križanje:
 - na slučajan način odaberi 2 jedinke
 - s vjerojatnošću p_c odaberi bolju jedinku
 - postupak ponovi 2 puta (za prvog i drugog roditelja)

REZULTATI

- testni primjeri: mreže bežičnih senzora
 - 3 skupine (domet senzora 100m, 125m i 150m) po 18 primjera (po 3 primjera mreža veličine 50, 100, 200, 300, 400 i 500 senzora)
 - u svim primjerima senzori raspoređeni u prostoru dimenzija 50m×50m
- parametri:
 - $pop = 200$ veličina populacije
 - $n = 25\ 000$ broj generacija
 - $p = 0.8$ vjerojatnost križanja
 - $p_c = 0.8$ vjerojatnost selekcije bolje jedinice za križanje
 - $p_m = 0.8$ vjerojatnost selekcije bolje jedinice za križanje
 - $p_m = 0.4$ p_m u mutaciji
 - nisu idealni za sve testne primjere, ali daju dobre rezultate

REZULTATI – RANGE 100

Datoteka	Vrhovi	Bridovi	Gustoća	Najbolje rj.	Naše rj.	Odstupanje (%)
050_01	50	122	0.0488	1204.41	1204.41	0
050_02	50	118	0.0472	1340.44	1347.31	0.5099049217
050_03	50	126	0.0504	1316.39	1317.42	0.07818311548
100_01	100	535	0.0535	1217.47	1252.08	2.764200371
100_02	100	526	0.0526	1128.4	1160.66	2.77945307
100_03	100	481	0.0481	1252.99	1272.73	1.550996676
200_01	200	2188	0.0547	1206.79	1293.21	6.682596021
200_02	200	2147	0.053675	1216.41	1285.02	5.33921651
200_03	200	2069	0.051725	1247.73	1353.04	7.783214096
300_01	300	4983	0.055367	1215.48	1273.77	4.576179373
300_02	300	4737	0.052633	1170.85	1283.24	8.758299305
300_03	300	4577	0.050856	1249.54	1361.65	8.23339331
400_01	400	8738	0.054613	1212.51	1332.2	8.984386729
400_02	400	8314	0.051963	1199.23	1273.23	5.811989978
400_03	400	8109	0.050681	1246.94	1350.99	7.70175945
500_01	500	13716	0.054864	1200.06	1313.64	8.64620444
500_02	500	13069	0.052276	1220.68	1290.13	5.383178439
500_03	500	12681	0.050724	1231.81	1353.43	8.986057646

REZULTATI – RANGE 125

Datoteka	Vrhovi	Bridovi	Gustoća	Najbolje rj.	Naše rj.	Odstupanje (%)
050_01	50	194	0.0776	802.95	808.92	0.7380210651
050_02	50	192	0.0768	1055.1	1065.89	1.012299581
050_03	50	188	0.0752	877.77	882.69	0.5573870781
100_01	100	798	0.0798	943.01	950.16	0.7525048413
100_02	100	781	0.0781	917	919.66	0.2892373268
100_03	100	726	0.0726	998.18	1010.73	1.241676808
200_01	200	3244	0.0811	910.17	929.48	2.077505702
200_02	200	3221	0.080525	921.76	943.85	2.340414261
200_03	200	3090	0.07725	939.58	976.47	3.777893842
300_01	300	7406	0.082289	979.81	1013.86	3.358451857
300_02	300	7008	0.077867	913.01	951.96	4.091558469
300_03	300	6841	0.076011	974.78	1005.51	3.056160555
400_01	400	12958	0.080988	965.99	986.1	2.039346922
400_02	400	12419	0.077619	941.02	1007.17	6.567908099
400_03	400	11942	0.074638	1002.61	1059.88	5.403441899
500_01	500	20377	0.081508	963.89	1006.73	4.255361418
500_02	500	19374	0.077496	948.96	1035.67	8.37235799
500_03	500	18791	0.075164	981.9	1064.35	7.746511956

REZULTATI – RANGE 150

Datoteka	Vrhovi	Bridovi	Gustoća	Najbolje rj.	Naše rj.	Odstupanje (%)
050_01	50	276	0.1104	647.75	647.75	0
050_02	50	262	0.1048	863.69	865.45	0.2033624126
050_03	50	269	0.1076	743.94	745.96	0.2707919996
100_01	100	1041	0.1041	876.69	879.65	0.3364974706
100_02	100	1078	0.1078	657.35	660.92	0.540156146
100_03	100	1013	0.1013	722.87	724.18	0.1808942528
200_01	200	4345	0.108625	809.9	821.81	1.449240092
200_02	200	4446	0.11115	736.26	740.89	0.6249240778
200_03	200	4246	0.10615	792.71	809.28	2.047499011
300_01	300	10039	0.111544	796.29	812.96	2.050531391
300_02	300	9693	0.1077	741.02	746.25	0.7008375209
300_03	300	9418	0.104644	819.76	842.01	2.642486431
400_01	400	17629	0.110181	795.53	819.14	2.882291183
400_02	400	17058	0.106613	779.63	785.67	0.7687706034
400_03	400	16340	0.102125	814.14	827.14	1.571680731
500_01	500	27720	0.11088	793.98	806.89	1.599970256
500_02	500	26676	0.106704	779.35	791.59	1.546255006
500_03	500	25814	0.103256	808.5	837.88	3.506468707

KOMENTAR

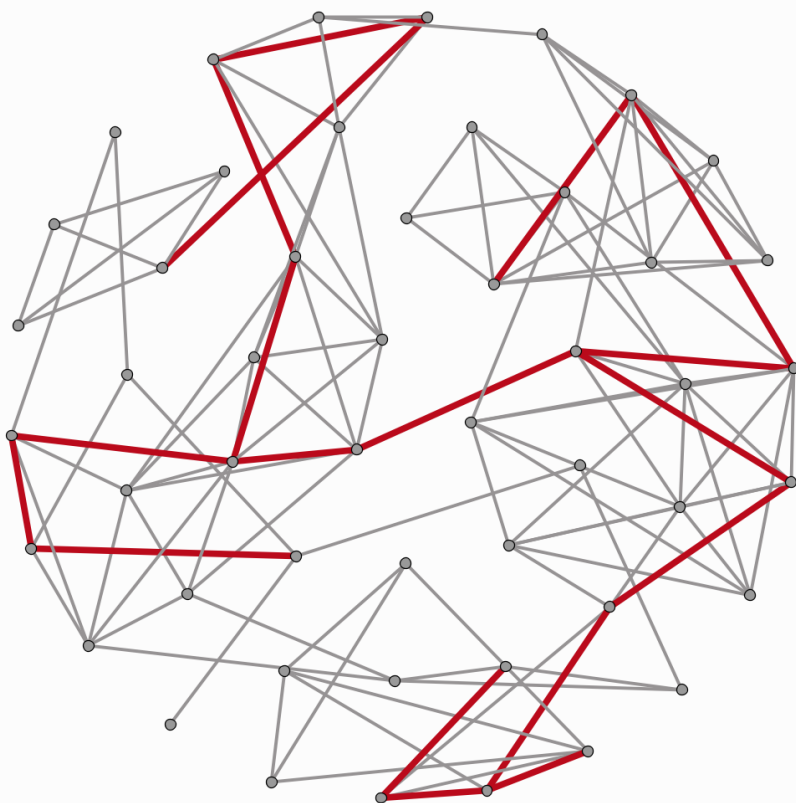
- srednje odstupanje od najboljeg rješenja (u %):

Broj vrhova	Odstupanje
50	0.3744389081
100	1.739269494
200	3.569167068
300	4.163099801
400	4.636841733
500	5.560262873

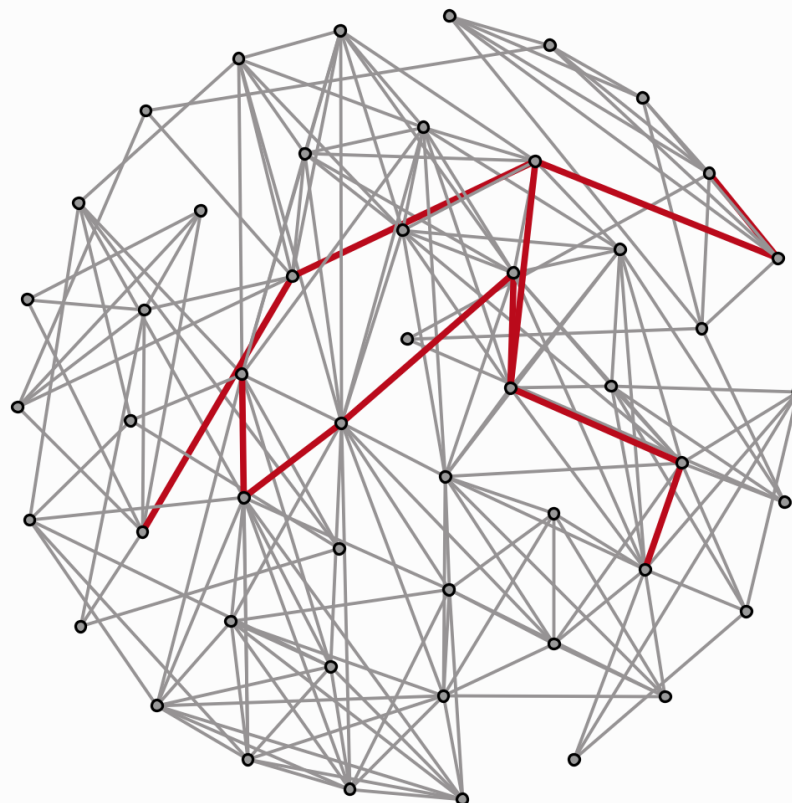
Gustoća	Odstupanje
0.05	5.253845192
0.08	3.204335537
0.1	1.273480961

- bolji rezultati za gušće grafove i grafove s manje vrhova

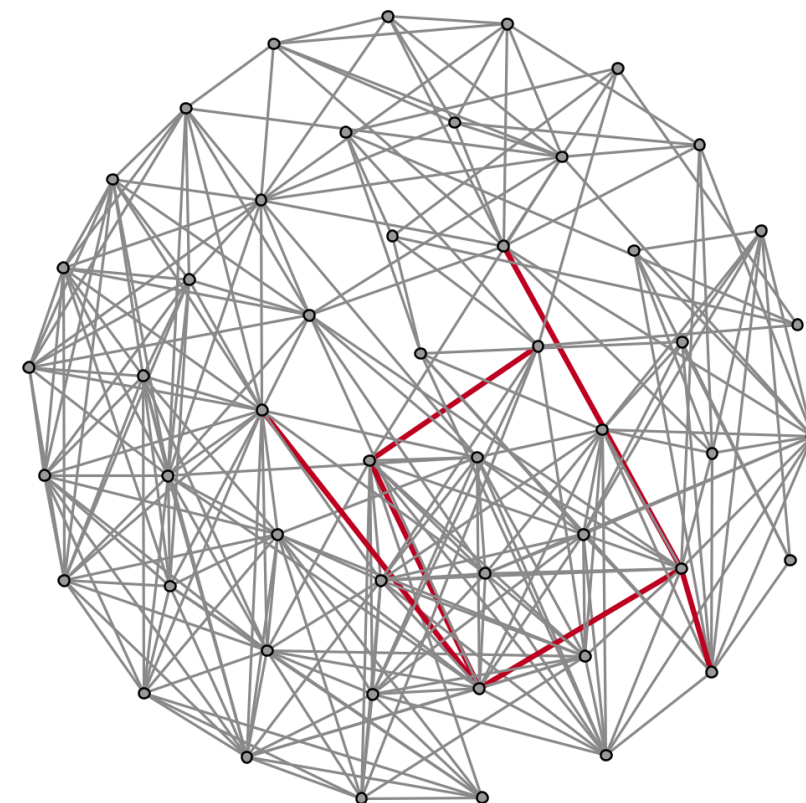
GRAFOVI S 50 VRHOVA



Range 100 - 122 brida
(naše rješenje 19 vrhova,
najbolje 19 vrhova)

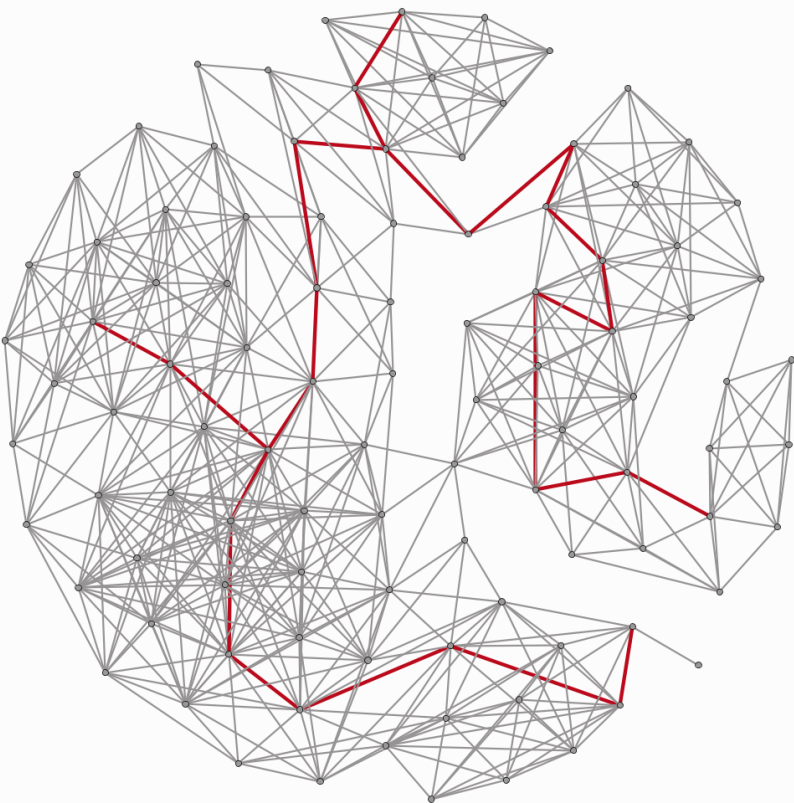


Range 125 - 188 bridova
(naše rješenje 12 vrhova,
najbolje 10 vrhova)

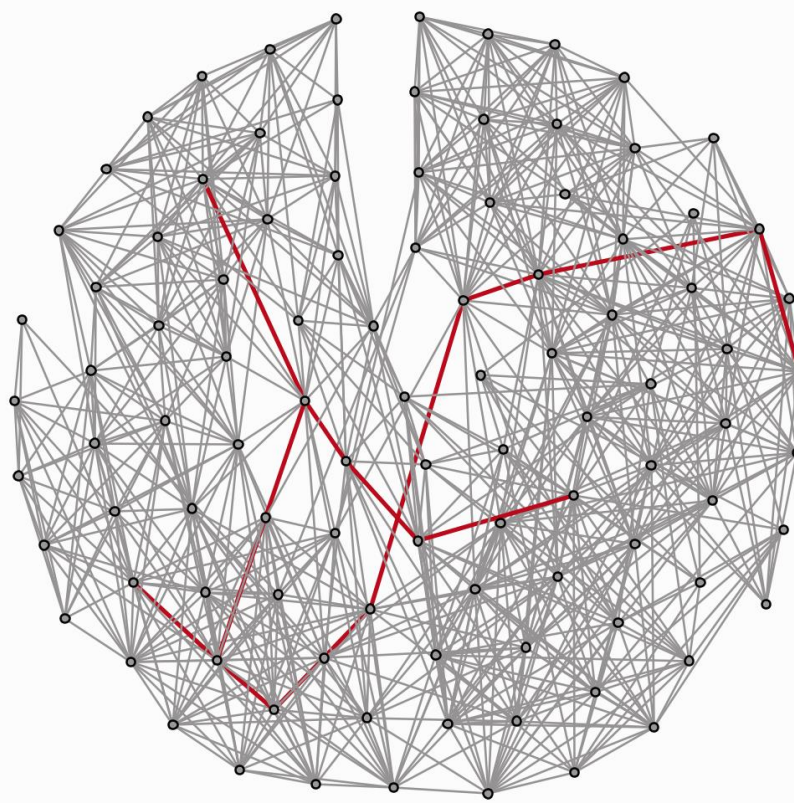


Range 150 - 276 bridova
(naše rješenje 7 vrhova,
najbolje 7 vrhova)

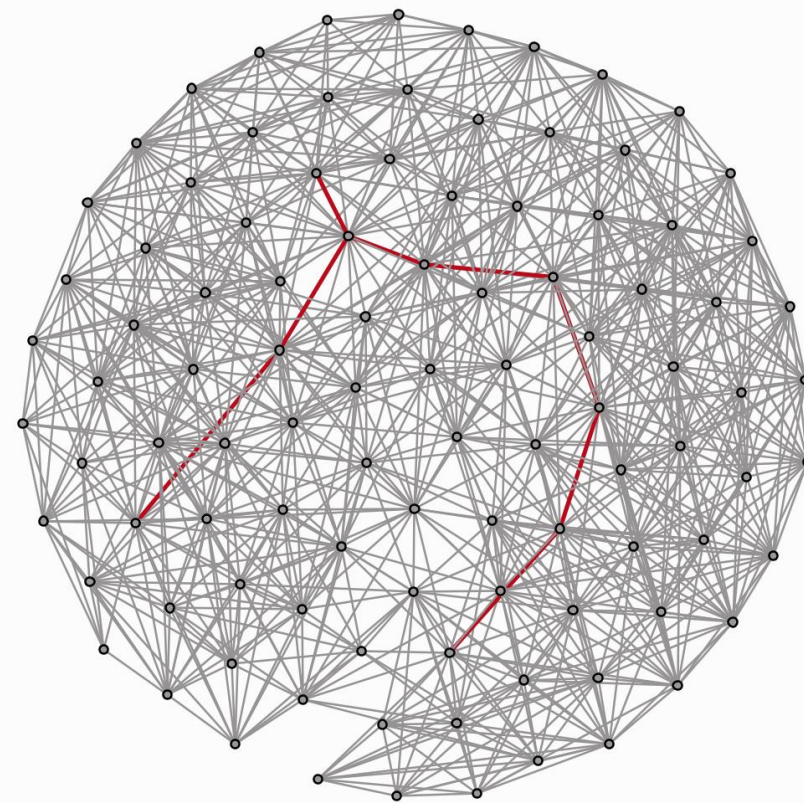
GRAFOVI SA 100 VRHOVA



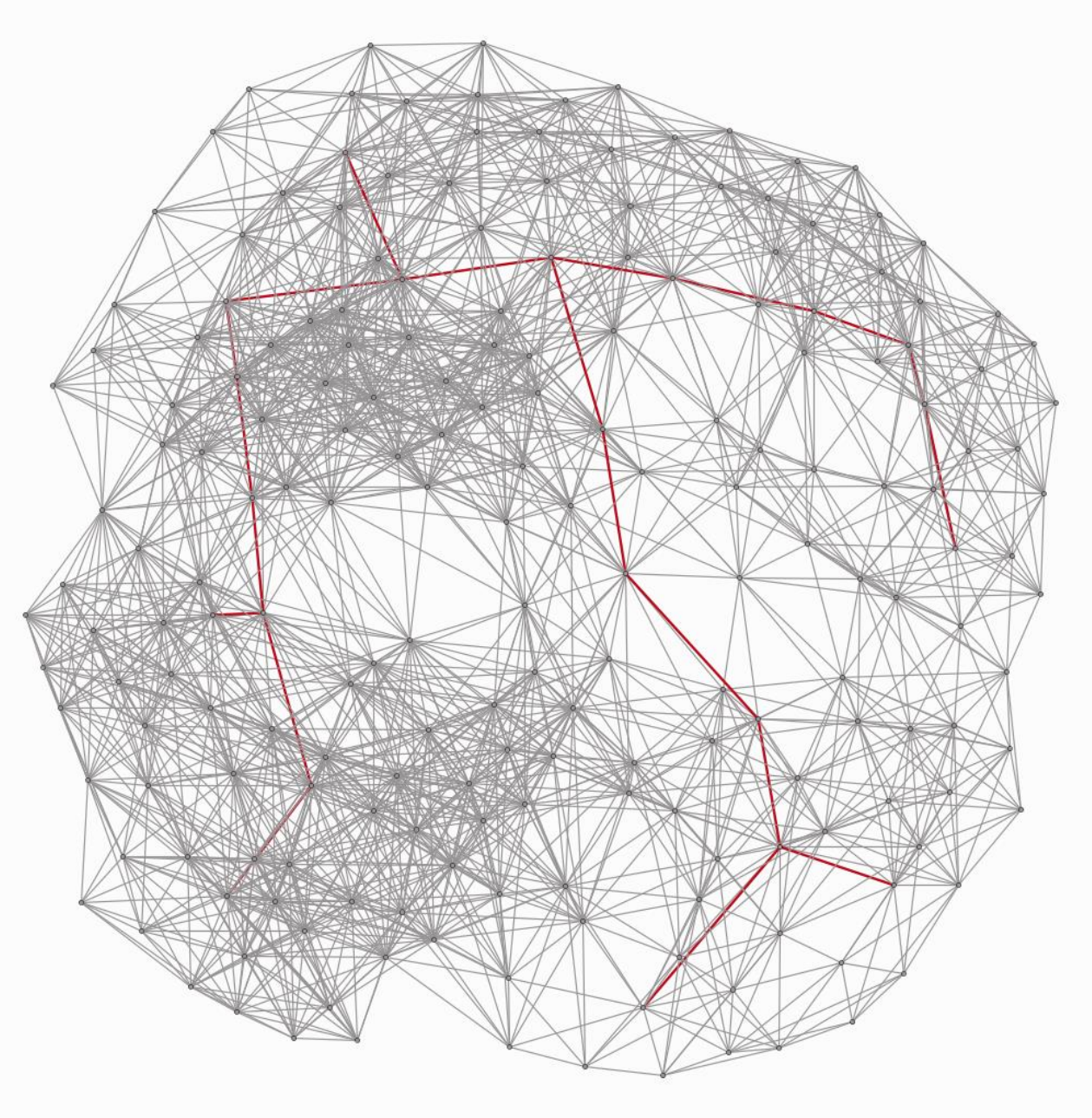
Range 100 - 535 bridova
(naše rješenje 24 vrhova,
najbolje 18 vrhova)



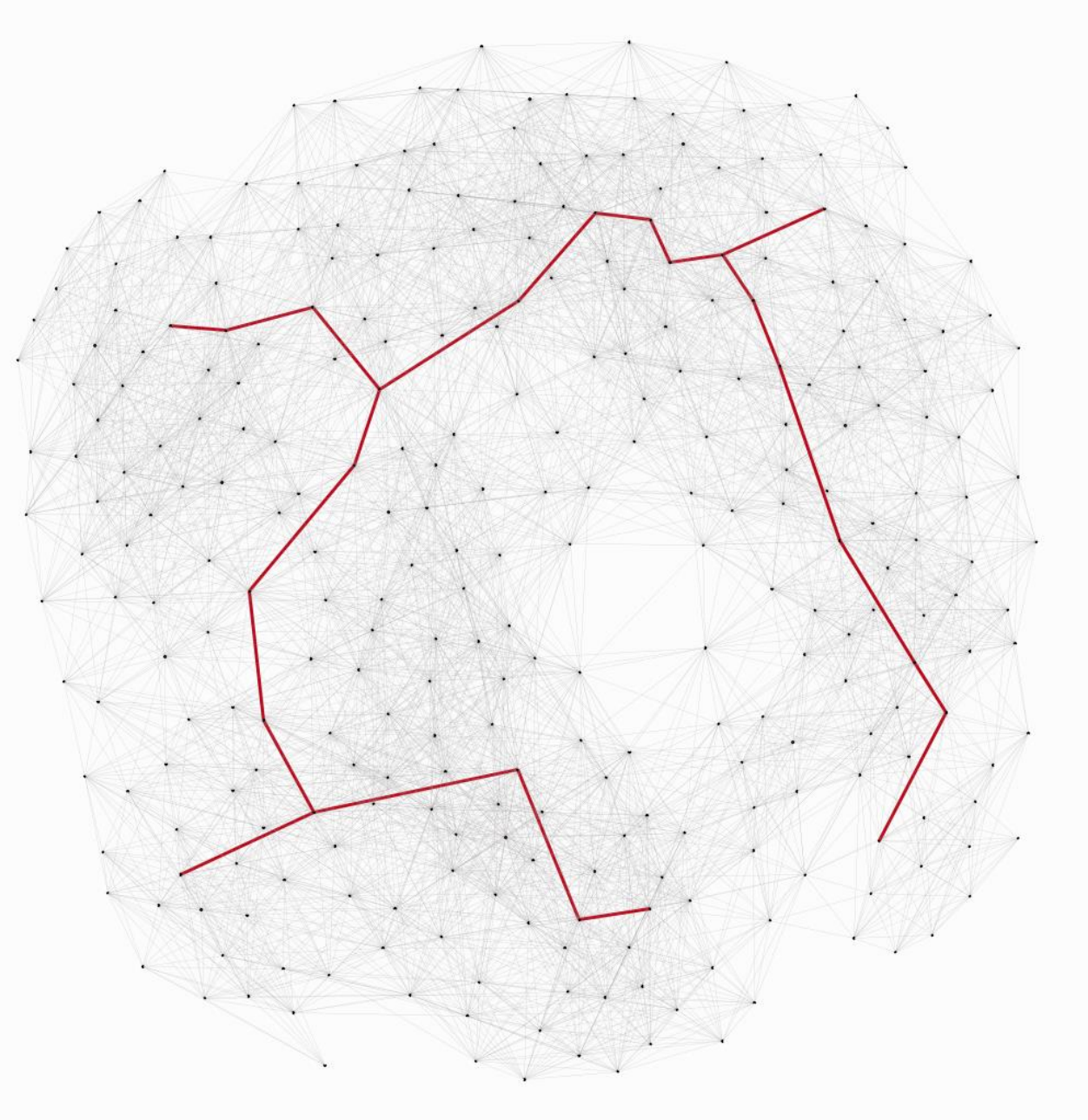
Range 125 - 781 brid
(naše rješenje 13 vrhova,
najbolje 13 vrhova)



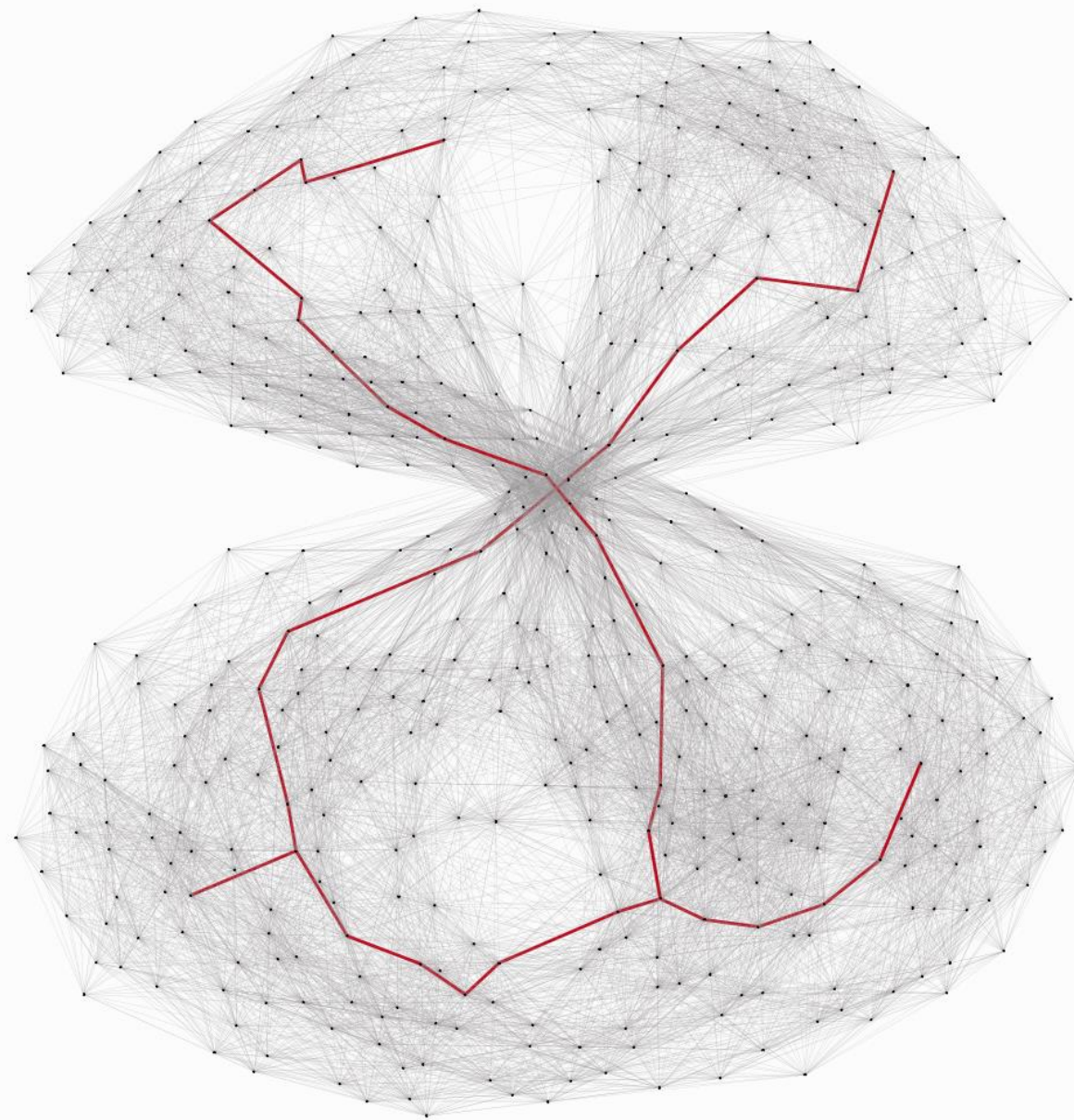
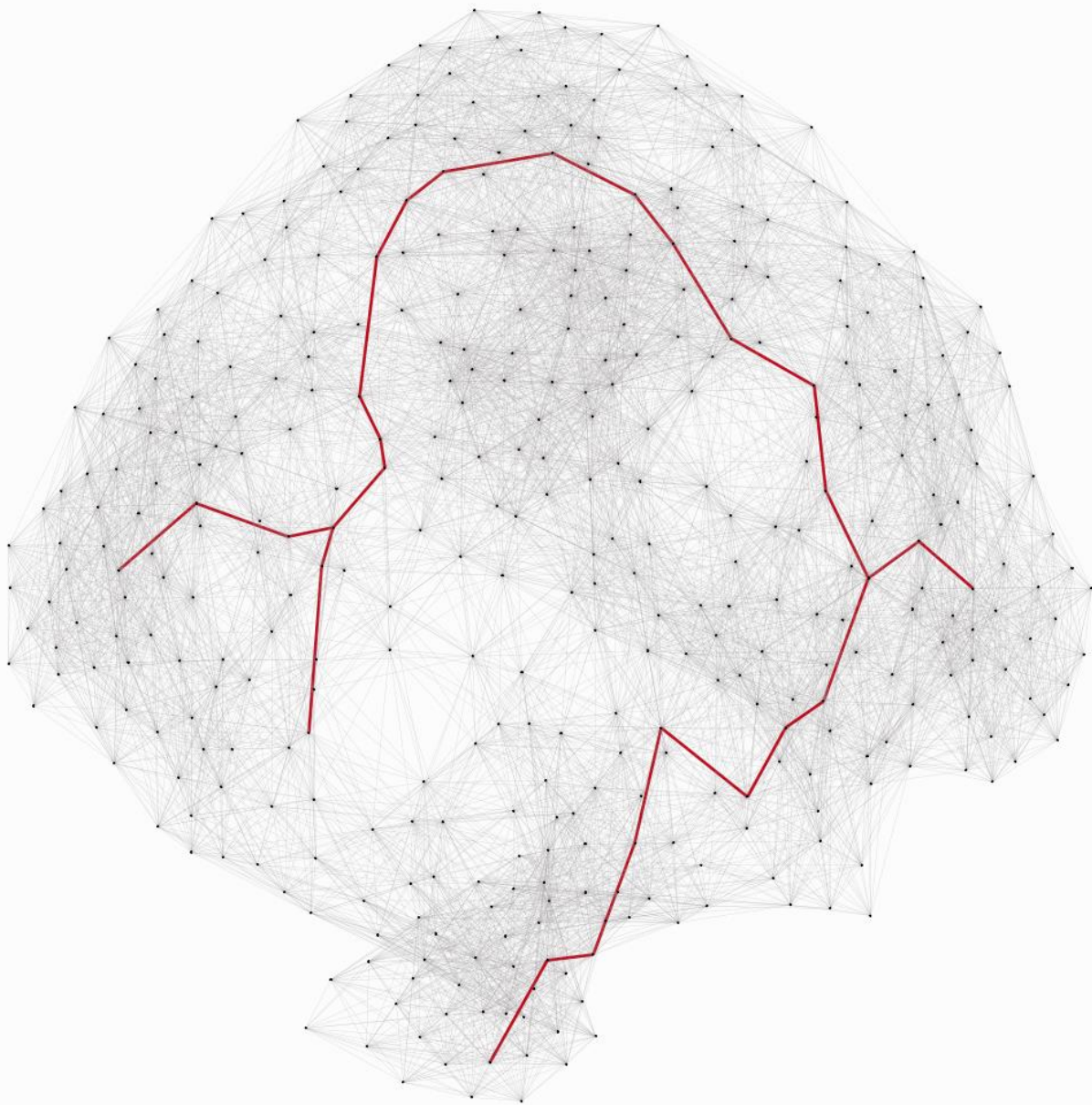
Range 150 - 1013 bridova
(naše rješenje 9 vrhova,
najbolje 9 vrhova)



200 vrhova, 2147 bridova
(naše rješenje 19 vrhova, najbolje 20 vrhova)



300 vrhova, 4983 bridova
(naše rješenje 24 vrha, najbolje 23 vrha)



LITERATURA

- I. Shin, Y. Shen, M.T. Thai, *On approximation of dominating tree in wireless sensor networks*, Optim Lett Springer 4:393-403, 2010.
- S. Sundar, A. Singh, *New heuristic approaches for the dominating tree problem*, Appl Soft Comput 13:4695-4703, 2013.
- S.N. Chaurasia, A. Singh, *A hybrid heuristic for dominating tree problem*, Soft Comput 20:377-397, 2014.
- S. Sundar, *A steady-state genetic algorithm for the dominating tree problem*, In: *Proceedings of the tenth international conference on simulated evolution and learning (SEAL 2014)*, LNCS, vol 8886. Springer-Verlag, Dunedin, pp 48-57, 2014.

LITERATURA

- S. Sundar, S.N. Chaurasia, A. Singh, *An Ant Colony Optimization Approach for the Dominating Tree Problem*, In: B. Panigrahi, P. Suganthan, S. Das, S. Satapathy (eds) *Swarm, Evolutionary, and Memetic computing*, SEMCCO 2015. Lecture Notes in Computer Science, vol 9873. Springer, Cham, 2016.
- Z. Dražić, M. Čangalović, V. Kovačević-Vujčić, *A meta-heuristic approach to the dominating tree problem*, Optim Lett Springer 11:1155-1167, 2017.
- K. Singh, S. Sundar, *Two new heuristics for the dominating tree problem*, Appl Intell 48:2247, 2017.