ОКИТИ – II колоквијум 06.06.2022.

1. $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

$p(A) = 0.05$
$p(B) = 0.17$
$p(D) = 0.1$
$p(E) = 0.15$
$p(H) = 0.11$

$p(C) : p(F) : p(G) = 2:4:1$

(а) $H(s) = ?$
(б) $H_{max} = ?$ За које p
(в) $H^{9} = ?$
(г) $R = ?$
(д) Шенон, $\bar{L} = ?$, BBBB
(ђ) Хафман, $\{0,1,2\}$ $\bar{L} = ?$ $\sigma_s^2 = ?$
BBBB
(е) аритметичко, $b = ?$

Рад:

придружена пропорција

$$\left\{\begin{array}{c} a:b:c = d:e:f \\ \Updownarrow \\ a:d = b:e = c:f \end{array}\right\}$$

$p(C) : p(F) : p(G) = 2:4:1$

$p(C) : 2 = p(F) : 4 = p(G) : 1$

$\Rightarrow p(C) : 2 = p(G) : 1 \Rightarrow p(C) = 2p(G)$

$p(F) : 4 = p(G) : 1 \Rightarrow p(F) = 4p(G)$

$p(A) + p(B) + p(C) + p(D) + p(E) + p(F) + p(G) + p(H) = 1$

$0{,}05 + 0{,}17 + 2p(G) + 0{,}1 + 0{,}15 + 4p(G) + p(G) + 0{,}11 = 1$

$7p(G) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$

$\boxed{p(G) = 0{,}06} \Rightarrow \boxed{p(C) = 0{,}12}, \boxed{p(F) = 0{,}24}$

(а) $H(s) = ?$

$$H(s) = \sum_{i=1}^{q} p(S_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(S_i)} = -\sum_{i=1}^{q} p(S_i) \log_2 p(S_i)$$

$H(s) = -\left[p(A) \cdot \log_2 p(A) + \dots + p(H) \cdot \log_2 p(H)\right] = -\left[0{,}05 \log 0{,}05 + 0{,}17 \cdot \log_2 0{,}17 + 0{,}12 \log 0{,}12 + \right.$

$\left. + 0{,}1 \log 0{,}1 + 0{,}15 \log_2 0{,}15 + 0{,}24 \log 0{,}24 + 0{,}06 \log 0{,}06 + 0{,}11 \log 0{,}11\right] =$

$= -\left[-0{,}216 - 0{,}436 - 0{,}367 - 0{,}332 - 0{,}410 - 0{,}494 - 0{,}243 - 0{,}350\right] = 2{,}848 \approx 2{,}85 \frac{sh}{simb}$

(б) $H_{max} = \log_2 q = \log_2 8 = 3 \frac{sh}{simb}$

Ентропија је максимална када су вјероватноће за сваки симбол подједнаке, тј. $\frac{1}{q}$.
У нашем случају би то било за $p(A) = \dots = p(H) = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

(в) $H(s^n) = n \cdot H(s)$

$\Rightarrow H(s^9) = 9 \cdot H(s) = 9 \cdot 2{,}848 = 25{,}632 \approx 25{,}63 \frac{sh}{simb}$

(е) $R = 1 - \eta = 1 - \frac{H(S)}{H_{max}(S)} = 1 - \frac{2,848}{3} = 1 - 0,9493 = 0,0507$

$R[\%] = 5,07\%$

(g) Шеноновим поступком кодне ријечи, $\bar{L} = ?$ BBBB

$1^\circ = 0,56$
$2^\circ = 0,44$

S	p(S)	I	II	III	IV
F	0,24	0	00	00	00
B	0,17	0	01	010	010
E	0,15	0	01	011	011
C	0,12	1	10	100	100
H	0,11	1	10	101	101
D	0,1	1	11	110	110
G	0,06	1	11	111	1110
A	0,05	1	11	111	1111

BBBB = 010010 010 010

$\bar{L} = \sum_{i=1}^{8} p(S_i) \cdot$ бр. бита $=$

$= 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot (0,17 + 0,15 + 0,12 + 0,11 + 0,1) +$

$+ 4 \cdot (0,06 + 0,05) =$

$= 0,48 + 3 \cdot 0,65 + 4 \cdot 0,11 = 2,87$ b/simb

(h) $m = 3$, $\{0, 1, 2\}$, $\bar{L} = ?$ $\sigma_s^2 = ?$ BBBB

$\frac{q - q_0}{m - 1} \in \mathbb{Z}$ $\quad 2 \le q_0 \le m$

$q_0 = 3 \Rightarrow \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$

$\boxed{q_0 = 2}$

S	p(S)		S_1		S_2		S_3	
F	0,24	2	0,24	2	0,32	1	0,44	0
B	0,17	00	0,17	00	0,24	2	0,32	1
E	0,15	01	0,15	01	0,17	00	0,24	2
C	0,12	02	0,12	02	0,15	01		
H	0,11	11	0,11	10	0,12	02		
D	0,1	12	0,11	11				
G	0,06	100	0,1	12				
A	0,05	101						

$\Sigma = 1$ ✓

$\bar{L} = 1 \cdot 0,24 + 2 \cdot (0,17 + 0,15 + 0,12 + 0,11 + 0,1) + 3(0,06 + 0,05) = 0,24 + 1,3 + 0,33 = 1,87$ b/simb

$\sigma_s^2 = \sum_{i=1}^{8} p(s_i) \cdot (l_i - \bar{L})^2 = 0,24 \cdot (1 - 1,87)^2 + (2 - 1,87)^2 (0,17 + 0,15 + 0,12 + 0,11 + 0,1) + (3 - 1,87)^2 \cdot 0,11 =$

$= 0,187 + 0,011 + 0,140 = 0,338$

BBBB = 00000000

Scanned with CamScanner

1) аритметично кодиране

S		p(S)	подинтервал
A	0	0,05	[0; 0,05)
B	1	0,17	[0,05; 0,22)
C	2	0,12	[0,22; 0,34)
D		0,1	[0,34; 0,44)
E		0,15	[0,44; 0,59)
F		0,24	[0,59; 0,83)
G		0,06	[0,83; 0,89)
H		0,11	[0,89; 1)

BBBB.

$l^{(0)} = 0$, $u^{(0)} = 1$, $r^{(0)} = 1$

B:

$X(B) =$

$l^{(1)} = l^{(0)} + F(1) \cdot r^{(0)} = 0,05$

$u^{(1)} = l^{(0)} + F(2) \cdot r^{(0)} = 0,22$

$r^{(1)} = 0,17$

B:

$l^{(2)} = l^{(1)} + F(1) \cdot r^{(1)} = 0,05 + 0,05 \cdot 0,17 = 0,0585$

$u^{(2)} = l^{(1)} + F(2) \cdot r^{(1)} = 0,05 + 0,22 \cdot 0,17 = 0,0874$

$r^{(2)} = 0,0289$

B:

$l^{(3)} = l^{(2)} + F(1) \cdot r^{(2)} = 0,0585 + 0,05 \cdot 0,0289 = 0,059945$

$u^{(3)} = l^{(2)} + F(2) \cdot r^{(2)} = 0,0585 + 0,22 \cdot 0,0289 = 0,064858$

$r^{(3)} = 0,004913$

B: $l^{(4)} = l^{(3)} + F(1) \cdot r^{(3)} = 0,059945 + 0,05 \cdot 0,004913 = 0,06019065$

$u^{(4)} = l^{(3)} + F(2) \cdot r^{(3)} = 0,059945 + 0,22 \cdot 0,004913 = 0,06102586$

$r^{(4)} = 0,00083521$

$[\underbrace{0,06019065}_{x}; \underbrace{0,06102586}_{y})$

$\text{Пр}(1) = (0.1)_2 = 0,5 > x, > y \Rightarrow 0$

$\text{Пр}(01) = (0.01)_2 = 0,25 > x, > y \Rightarrow 0$

$\text{Пр}(001) = (0.001)_2 = 0,125, > x, > y \Rightarrow 0$

$\text{Пр}(0001) = (0.0001)_2 = 0,0625 > x, > y \Rightarrow 0$

$\text{Пр}(00001) = (0.00001)_2 = 0,03125 < x, < y \Rightarrow 1$ ✓

$\text{Пр}(000011) = (0.000011)_2 = 0,03125 + 0,015625 =$
$= 0,046875 < x, < y \Rightarrow 1$ ✓

$\text{Пр}(0000111) = (0.0000111)_2 = 0,046875 + 0,0078125 =$
$= 0,0546875 < x, < y \Rightarrow 1$ ✓

$\text{Пр}(00001111) = (0.00001111)_2 = 0,0546875 + 0,00390625 =$
$= 0,05859375 < x, < y \Rightarrow 1$ ✓

$\text{Пр}(000011111) = (0.000011111)_2 = 0.05859375 + 0,001953125 =$
$= 0,060546875 > x, < y$ — край

$BBBB = \underbrace{000011111}_{9\,b}$

2. Да ли су једнозначно декодиви и тренутни:

(а) {1, 011, 01110, 1110, 10011}

Код није префиксан, па није ни тренутан.

X_0	X_1	X_2
1	110	011
011	0011	10
01110	10	0
1110		
10011		

код није једнозначно декодив

(б) {0, 01, 110, 111}

X_0	X_1	X_2	X_3		
0	1	10	$\boxed{0}$		
01		11	1		
110					
111					

код није једнозначно декодив, па није ни тренутан

(в) {0, 10, 110, 1110}

X_0	X_1	
0		
10		
110		
1110		

Јесте једнозначно декодив, а и тренутан (јер је префиксан)

(г) {00, 10, 11, 0001, 11000, 101}

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
00	01	0	0	
10	1	1	001	
11	000	1000	1	
0001		01	1000	
11000			01	
101			00	

Није једнозначно декодив, а ни тренутан

3. 311103211111113201113, W=8, LZ77, степен уштеде

[0,3] [0,1] [1,1,2] [0,0] [1,5,1] [0,2] [1,6,3] [1,3,3] [1,8,1] [1,8,1] [0,0] [1,6,4]

ASCII = $20 \cdot 8b = 160b$

LZ77 = $9 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 45 + 49 = 94b$

$\eta = \frac{94}{160} = 0{,}5875 \Rightarrow$ ст. ком. $1 - 0{,}5875 = 0{,}4125 \Leftrightarrow 41{,}25\%$

4. Хемингов код (12, 8)

(а) 1000 1000

(б) грешка на 7. b, бит синдрома?

(в) $P_e = ?$ $p = 0{,}0001$

(г) (13, 8) - дода с бит за провјеру на парност, $P_e = ?$ и са (8,4) упореди

Рад

(а) (12, 8) $n = 12$, $k = 8$, $n - k = 4$

$2^4 \geq n+1$

$16 \geq 13$ ✓

4 контролна бита на $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c_1	c_2	i_1	c_3	i_2	i_3	i_4	c_4	i_5	i_6	i_7	i_8
		1		0	0	0		1	0	0	0

позиција	бин. запис	
1	0001	c_1
2	0010	c_2
3	0011	i_1
4	0100	c_3
5	0101	i_2
6	0110	i_3
7	0111	i_4
8	1000	c_4
9	1001	i_5
10	1010	i_6
11	1010	i_7
12	1100	i_8

$c_1 = \underset{1}{i_1} \oplus \underset{0}{i_2} \oplus \underset{0}{i_4} \oplus \underset{1}{i_5} = 0$

$c_2 = \underset{1}{i_1} \oplus \underset{0}{i_3} \oplus \underset{0}{i_4} \oplus \underset{0}{i_6} \oplus \underset{0}{i_7} = 1$

$c_3 = \underset{0}{i_2} \oplus \underset{0}{i_3} \oplus \underset{0}{i_4} \oplus \underset{0}{i_8} = 0$

$c_4 = \underset{1}{i_5} \oplus \underset{0}{i_6} \oplus \underset{0}{i_7} \oplus \underset{0}{i_8} = 1$

Код: 011000011000

(б)

$\vec{y} \Rightarrow 0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0$

$\vec{e} \Rightarrow 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0 \quad \oplus$

$\underbrace{0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0}$

S_4	S_3	S_2	S_1	
0	0	0	1	y_1
0	0	1	0	y_2
0	0	1	1	y_3
0	1	0	0	y_4
0	1	0	1	y_5
0	1	1	0	y_6
0	1	1	1	y_7
1	0	0	0	y_8
1	0	0	1	y_9
1	0	1	0	y_{10}
1	0	1	1	y_{11}
1	1	0	0	y_{12}

$S_4: \overset{1}{y_8} \oplus \overset{1}{y_9} \oplus \overset{0}{y_{10}} \oplus \overset{0}{y_{11}} \oplus \overset{0}{y_{12}} = 0$

$S_3: \overset{0}{y_4} \oplus \overset{0}{y_5} \oplus \overset{0}{y_6} \oplus \overset{1}{y_7} \oplus \overset{0}{y_{12}} = 1$

$S_2: \overset{1}{y_2} \oplus \overset{1}{y_3} \oplus \overset{0}{y_6} \oplus \overset{1}{y_7} \oplus \overset{0}{y_{10}} \oplus \overset{0}{y_{11}} = 1$

$S_1: \overset{0}{y_1} \oplus \overset{1}{y_3} \oplus \overset{0}{y_5} \oplus \overset{1}{y_7} \oplus \overset{1}{y_9} \oplus \overset{0}{y_{11}} = 1$

$S_4 S_3 S_2 S_1 = (0111)_2 = 7_{10}$ ✓

(в) $$P_e = \sum_{k=2}^{12} \binom{12}{k} p^k \cdot (1-p)^{12-k} = \binom{12}{2} p^2 \cancel{(1-p)^{10}}^{\approx 1} + \underbrace{\binom{12}{3} p^3 \cancel{(1-p)^9}^{\approx 1} + \dots + \binom{12}{12} p^{12}}_{p \ll 1 \Rightarrow \approx 0} \approx$$

$$\approx \binom{12}{2} p^2 = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{2 \cdot \cancel{10!}} \cdot (0{,}0001)^2 = \frac{\cancel{12}^{6} \cdot 11}{\cancel{2}} \cdot 10^{-8} = 66 \cdot 10^{-3}$$

(г) Ако се дода бит за провјеру на парност, можемо детектовати двоструку грешку:

$$P_e = \sum_{k=3}^{13} \binom{13}{k} p^k (1-p)^{13-k} \approx \frac{13 \cdot \cancel{12}^{2} \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot \cancel{10!}} \cdot (10^{-4})^3 = 286 \cdot 10^{-12} = 0{,}286 \cdot 10^{-9} = 0{,}0286 \cdot 10^{-8}$$

када је $(8,4)$

$$P_e = \sum_{k=3}^{8} \binom{8}{k} p^k (1-p)^{8-k} \approx \binom{8}{3} p^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot \cancel{5!}} \cdot (10^{-4})^3 = 56 \cdot 10^{-12}$$

Грешка је мања код $(8,4)$, око 5 пута мања.