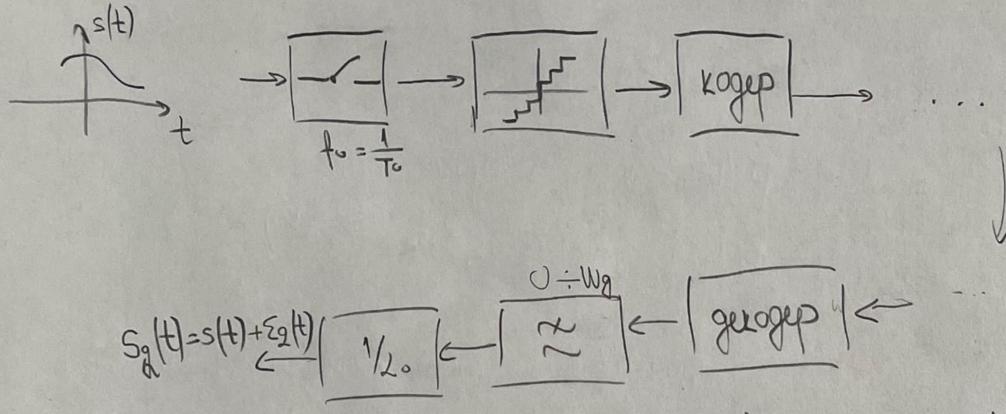
ЧАС 7



A/D конверзија

D/A конверзија

PCM (Pulse Code Modulation) или ІКМ (импулсна кодна модулација)

- квалитет репродукције меримо помоћу односа сигнал/шум квантовања, тј.

$$SNR_Q[dB] = 10\log\frac{P_s}{P_Q} = 10\log\frac{\overline{s^2}}{\overline{\varepsilon_Q^2}}$$

P_s - снага сигнала

P_Q - снага шума услед квантовања

$\overline{\varepsilon_Q^2} = \frac{\Delta^2}{12}$ - код униформног квантовања

1. Анализирати униформно квантовање код Гаусовог процеса нулте средње вредности

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_s}\cdot e^{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}}$$

σ_s - стандардна девијација

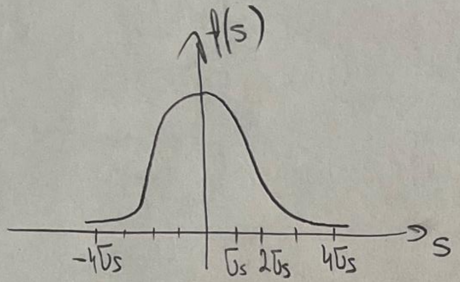
σ_s^2 - варијанса

$\sigma_s^2 = \overline{s^2} - \bar{s}^2$

$\Rightarrow$ с обзиром да је речено да је $\bar{s} = 0 \Rightarrow \sigma_s^2 = \overline{s^2} \Rightarrow P_s = \overline{s^2} = \sigma_s^2$

колики је опсег квантизера?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,ds = 1$$



$$P\left(|s| < \sigma_s\right) \cong 0{,}68$$
$$P\left(|s| < 2\sigma_s\right) \cong 0{,}954$$
$$P\left(|s| < 3\sigma_s\right) \cong 0{,}997 \quad (99{,}7\%)$$

$\Rightarrow$ можемо усвојити опсег квантизера $(-4\sigma_s, 4\sigma_s)$ јер је тада скоро јединична вероватноћа да се вредности овог Гаусовог процеса налазе унутар опсега $|s| < 4\sigma_s$

$$\Delta = \frac{4\sigma_s - (-4\sigma_s)}{q} = \frac{8\sigma_s}{q} = \frac{8\sigma_s}{2^n}$$

$$SNR_Q = 10\log\frac{P_s}{P_Q} = 10\log\frac{\overline{s^2}}{\overline{\varepsilon_q^2}} = 10\log\frac{\sigma_s^2}{\frac{\Delta^2}{12}} = 10\log\frac{\sigma_s^2}{\frac{\frac{64\sigma_s^2}{2^{2n}}}{12}} =$$

$$= 10\log\frac{12\cdot 2^{2n}}{64} = 10\log 2^{2n} + 10\log\frac{12}{64} \boxed{= 6n - 7{,}2\ [dB]}$$

$\Rightarrow$ сваки додатни бит побољшава SNR_Q за 6dB

2. Одредити SNR_Q код униформно квантоване синусоиде пуне скале.

$$s(t) = A_s \cdot \sin(\omega_s t)$$

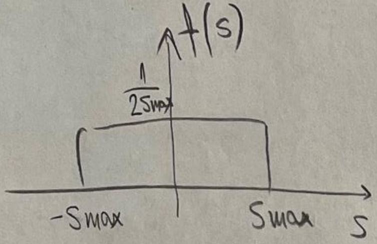
$$P_s = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

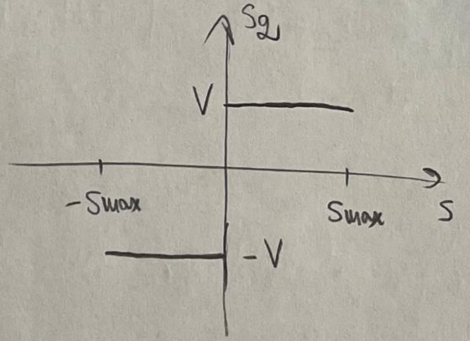
$$R = 1\Omega \Rightarrow P_s = U^2 = \left(\frac{A_s}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{A_s^2}{2}$$

$$P_Q = \overline{\varepsilon_Q^2} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\left(\frac{A_s - (-A_s)}{q}\right)^2}{12} = \frac{\left(\frac{2A_s}{q}\right)^2}{12} = \frac{4A_s^2}{q^2\cdot 12} = \frac{A_s^2}{3q^2}$$

$$SNR_Q = 10\log\frac{P_s}{P_Q} = 10\log\frac{\frac{\cancel{A_s^2}}{2}}{\frac{\cancel{A_s^2}}{3q^2}} = 10\log\frac{3q^2}{2} = 10\log\frac{3\cdot 2^{2n}}{2} = 10\log\frac{3}{2} + 20n\cdot\log 2 = \boxed{= 6n + 1{,}7\,[dB]}$$

3. Одредити величину кванта за процес са униформном функцијом густине вјероватноће расподјеле тренутних амплитуда ако се ради о једнобитском кодовању.





$n=1$

$q=2$

$\overline{\varepsilon_q^2} = ?$

$$\overline{\varepsilon_{q_i}^2} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} (s - s_{q_i})^2 f(s)\, ds$$

$$\overline{\varepsilon_q^2} = \sum_i \overline{\varepsilon_{q_i}^2}$$

$$\overline{\varepsilon_{q_1}^2} = \overline{\varepsilon_{q_2}^2} \Rightarrow \overline{\varepsilon_q^2} = 2\overline{\varepsilon_{q_1}^2} = 2\overline{\varepsilon_{q_2}^2}$$

$$\overline{\varepsilon_q^2} = 2 \cdot \int_0^{S_{max}} (s - V)^2 \cdot \frac{1}{2S_{max}}\, ds = \frac{1}{S_{max}} \int_0^{S_{max}} (s^2 - 2V\cdot s + V^2)\, ds =$$

$$= \frac{1}{S_{max}} \cdot \left(\frac{s^3}{3} - V\cdot s^2 + V^2 \cdot s\right)\Bigg|_0^{S_{max}} = \frac{1}{S_{max}}\left(\frac{S_{max}^3}{3} - V\cdot S_{max}^2 + V^2 \cdot S_{max}\right) =$$

$$= V^2 - V\cdot S_{max} + \frac{S_{max}^2}{3}$$

минимизација снаге шума квантовања у односу на квантизациони ниво (V):

$$\frac{d(\overline{\varepsilon_q^2})}{dV} = 0$$

$$2V - S_{max} = 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{S_{max}}{2}}$$

4. Сигнал $u(t)$ се преноси системом са ИКМ (PCM) модулатором. Квантовање одбирака сигнала $u(t)$ се обавља са 4 квантизациона нивоа. Функција густине вероватноће амплитуда је дата изразом:

$$p(u) = \begin{cases} k \cdot e^{-|u|}, & |u(t)| \leq 4V \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Одредити:

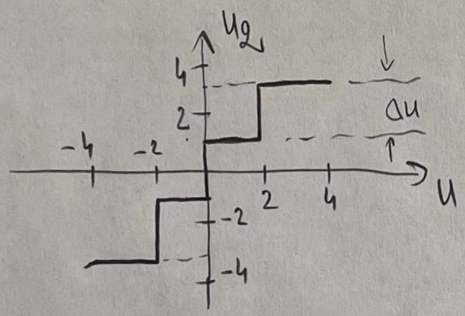
а) корак квантовања Δu при равномерном униформном квантовању,

б) снагу сигнала и снагу шума,

в) однос сигнал/шум квантовања (SNRq).

г) Поновити поступак из тачака а), б) и в) ако је функција густине вероватноће униформна, тј. $p(u) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & |u(t)| \leq 4V \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

а) $$\Delta u = \frac{A_2 - (-A_2)}{2} = \frac{4-(-4)}{4} = \frac{8}{4} = \boxed{2V}$$



б) $$P = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u)\, du = 1$$ (вероватноћа да је сигнал $-\infty < u(t) < +\infty$)

$$\int_{-4}^{4} k \cdot e^{-|u|} du = 1 \Rightarrow 2k \int_{0}^{4} e^{-u} du = -2k \cdot e^{-u} \Big|_{0}^{4} = 2k \cdot e^{-u} \Big|_{4}^{0} =$$

$$= 2k(1 - e^{-4}) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2(1-e^{-4})} \approx 0{,}509$$

$$P_s = \overline{u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot p(u)\, du = \int_{-4}^{4} u^2 \cdot k \cdot e^{-|u|} du = 2 \cdot 0{,}509 \int_{0}^{4} u^2 \cdot e^{-u} du$$

$$\int_a^b u^n \cdot e^{-u} du = -\left(u^n + n \cdot u^{n-1} + n(n-1)u^{n-2} + \dots\right) \cdot e^{-u} \Big|_a^b$$

$$P_S = 2 \cdot 0{,}509 \cdot (u^2 + 2u + 2) \cdot e^{-u} \Big|_4^0 = 2 \cdot 0{,}509 \left(2 - 26 \cdot e^{-4}\right) = 1{,}55 \, [V^2]$$

$\overline{\varepsilon_q^2} = ?$

$$\overline{\varepsilon_q^2} = \overline{\varepsilon_{q1}^2} + \overline{\varepsilon_{q2}^2} + \overline{\varepsilon_{q3}^2} + \overline{\varepsilon_{q4}^2}$$

$u_0 = -4V$
$u_1 = -2V$ $\rightarrow u_{q1} = -3V$
$u_2 = 0V$ $\rightarrow u_{q2} = -1V$
$u_3 = 2V$ $\rightarrow u_{q3} = 1V$
$u_4 = 4V$ $\rightarrow u_{q4} = 3V$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{q1}^2} &= \overline{\varepsilon_{q4}^2} \\ \overline{\varepsilon_{q2}^2} &= \overline{\varepsilon_{q3}^2} \end{aligned}\right\}$$ – због симетрије карактеристике квантизера

$$\overline{\varepsilon_{q3}^2} = \int_0^2 (u-1)^2 K \cdot e^{-|u|} du = K \cdot \int_0^2 (u-1)^2 e^{-u} du = K\left((u-1)^2 + 2(u-1) + 2\right) e^{-u} \Big|_2^0 =$$

$$= K\left(u^2 \cancel{-2u} + 1 \cancel{+2u} \cancel{-2} \cancel{+2}\right) e^{-u} \Big|_2^0 = K \cdot (u^2 + 1) e^{-u} \Big|_2^0 = K\left(1 - 5e^{-2}\right) = 0{,}1646 \, [V^2]$$

$$\overline{\varepsilon_{q4}^2} = \int_2^4 (u-3)^2 K \cdot e^{-|u|} du = K \int_2^4 (u-3)^2 e^{-u} du = K\left((u-3)^2 + 2(u-3) + 2\right) \cdot e^{-u} \Big|_4^2 =$$

$$= K\left(u^2 - 6u + 9 + 2u - 6 + 2\right) e^{-u} \Big|_4^2 = K\left(u^2 - 4u + 5\right) e^{-u} \Big|_4^2 = K\left(e^{-2} - 5e^{-4}\right) =$$

$$= 0{,}0223 \, [V^2]$$

$$\overline{\varepsilon_q^2} = 2\left(\overline{\varepsilon_{q3}^2} + \overline{\varepsilon_{q4}^2}\right) = 0{,}374 \, [V^2]$$

б) $$SNR_Q = \frac{\overline{u^2}}{\overline{\varepsilon_q^2}} = \frac{1{,}55}{0{,}374} \boxed{= 4{,}144}$$

$$SNR_Q[dB] = 10 \log 4{,}144 \boxed{= 6{,}17 dB}$$

i)

$$p(u) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & |u(t)| \le 4V \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\overline{u^2} = \int_{-4}^{4} u^2 p(u)\,du = \int_{-4}^{4} \frac{1}{8} \cdot u^2 du = \frac{1}{8} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_{-4}^{4} = \frac{1}{24}\left(64 - (-64)\right) = \frac{128}{24} = \frac{16}{3}\,[V^2]$$

$$\overline{\varepsilon_q^2} = \frac{\Delta u^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\,[V^2]$$

$$SNR_Q = \frac{\overline{u^2}}{\overline{\varepsilon_q^2}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}} \boxed{= 16} \boxed{= 4^2 = q^2}$$

$$SNR_Q\,[dB] = 10 \log 16 \boxed{= 12\,dB}$$