UNIVERZITET U BANJOJ LUCI
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Matematika IV
Auditorne vježbe

I sedmica - Principi prebrojavanja

- Faktorijel: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$, $n \in \mathbb{N}$
- Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, 2 \ldots, n\}$, $0! = 1$
- Pravilo zbira: Neka su skupovi A_i disjunktni. Ako skup A_1 ima n_1 elemenata, skup A_2 ima n_2 elemenata,..., skup A_k ima n_k elemenata, i ako se bira jedan element iz $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ ovakvih izbora ima $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$.
- Pravilo proizvoda: ako skup A_1 ima n_1 elemenata, skup A_2 ima n_2 elemenata, ..., skup A_k ima n_k elemenata, i ako se bira po jedan element iz svakog od skupova A_i pri čemu su svi posmatrani elementi različiti, ovakvih izbora ima $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.
- Permutacije:
  - **Permutacije bez ponavljanja**: svi elementi skupa se raspoređuju u uredjenu n-torku; broj ovakvih rasporeda je $P(n) = P_n = n!$.
  - **Permutacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ se bira n_1 puta element a_1, n_2 puta element a_2, ..., n_k puta element a_k, i izabrani elementi se svrstavaju u uređenu n-torku onim redom kojim su birani; ovakvih izbora ima $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k}(n) = P^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k}$, gdje je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.
- Varijacije:
  - **Varijacije bez ponavljanja**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se $k \leq n$ puta bira neki element tako da svi izabrani elementi budu različiti (prethodno izabrani elementi se ne biraju ponovo), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku; ovakvih izbora raspoređivanja ima $V^n_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k!$.
  - **Varijacije sa ponavljanjem**:iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se k puta bira neki element tako da svaki izabrani elementi bira iz cijelog skupa A (prethodno izabrani elementi se mogu birati ponovo), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku; ovakvih izbora raspoređivanja ima $\overline{V}^n_k = n^k$.
- Kombinacije:
  - **Kombinacije bez ponavljanja**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se bira podskup od $k \leq n$ elemenata; ovakvih podskupova ima $C^n_k = \binom{n}{k}$.
  - **Kombinacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se bira podskup u kome se elementi mogu ponavljati, ali tako da ukupno elemenata sa ponavljanjima bude k; ovakvih izbora ima $\overline{C}^n_k = \binom{n+k-1}{k}$.

1. Naći sve permutacije od elemenata a, b, c.
2. Koliko se može sastaviti petocifrenih telefonskih brojeva od 5 cifara tako da su u svakom od tih brojeva cifre različite?
3. Naći sve permutacije od elemenata a, b, b.
4. Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara 1, 1, 1, 2, 5, 3?
5. Izračunati broj permutacija sljedećih 11 elemenata 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4.

6. U koliko permutacija cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 stoje cifre 1, 2, 3, 4 jedna pored druge i to:
   (a) u datom poretku,
   (b) u proizvoljnom poretku?
7. Naći broj mogućnosti da se u dvije kutije razmjesti po jedna od 4 pilule a, b, c, d.
8. Od cifara $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ formirati sve dvocifrene brojeve kod kojih se cifre
   (a) ne ponavljaju
   (b) ponavljaju.
9. Koliko ima trocifrenih brojeva sa različitim ciframa obrazovanih od cifara 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
10. Koliko ima različitih voznih karata za putovanje željezničkom prugom na kojoj ima 27 stanica?
11. U posudi se nalazi 7 kuglica numerisanih od 1 do 7. Koliko se može dobiti izbora ako se vadi po 5 kuglica pri čemu izvučene kuglice vraćaju u posudu.
12. Za dati skup $\{a, b, c, d, e\}$ odrediti sve tročlane podskupove.
13. Odjeljenje od 20 osoba treba da izabere svoja 3 delegata za školsko vijeće. Koliko različitih mogućnosti postoji za taj izbor?
14. Hor se sastoji od 10 članova. Na koliko načina se može birati po 6 članova za nastup, za svaki od 3 dana turneje hora, ali tako da
    (a) sastavi za nastup različitih dana mogu biti isti,
    (b) sastavi za nastup različitih dana ne mogu biti isti?
15. Na koliko se različitih načina 20 jabuka može podijeliti između 4 djece?
16. Koliko ima petocifrenih brojeva kojima su sve cifre različite?
17. Koliko ima šestocifrenih brojeva u kojima su bar dvije cifre iste?
18. U radnji postoji k različitih vrsta razglednica, koje treba poslati prijateljima, kojih ima n.
    (a) Na koliko načina je moguće svakom prijatelju poslati tačno jednu razglednicu?
    (b) Koliko ima načina ako se svakom prijatelju treba poslati različitu razglednicu?
    (c) Od svake vrste razglednica je kupljena tačno po jedna. Na koliko načina je moguće poslati razglednice prijateljima (prijatelj može dobiti bilo koji broj razglednica, uključujući i 0).
19. U odjeljenju ima m djevojčica i n dječaka.
    (a) Na koliko načina se učenici mogu poređati u vrstu?
    (b) Na koliko načina se učenici mogu poređati u vrstu tako da su sve djevojčice zajedno?
20. Na koliko različitih načina možemo izabrati 5 karata iz špila od 52 karte tako da među izabranim kartama bude
    (a) tačno 2 keca
    (b) bar 2 keca
    (c) najviše 2 keca?
21. Na koliko različitih načina možemo izabrati 8 karata iz špila od 52 karte tako da među izabranim kartama bude
    (a) tačno 2 sedmice i 3 keca
    (b) tačno 2 sedmice i bar 3 keca
    (c) tačno 2 sedmice i najviše 2 keca?

22. Naći broj rješenja jednačine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ ako
    (a) $x_i \in \mathbb{N}_0$
    (b) $x_i \in \mathbb{N}$.
23. Iz grupe od 10 muškaraca i 8 žena treba odabrati 6 osoba među kojima najmanje 3 treba da budu žene. Na koliko načina se može izvršiti ovakav izbor?
24. Koliko se riječi može napisati koristeći slova a, b, c, d, e tako da svako slovo u riječi se javlja najviše jednom i tako da riječ
    (a) obavezno sadrži slovo a,
    (b) počinje slovom a
25. Ako je $n \geq 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ u kojima su
    (a) brojevi 1 i 2 susjedni,
    (b) broj 2 stoji (ne obavezno odmah) iza broja 1?
26. U kutiji se nalazi 36 žutih, 27 plavih, 18 zelenih i 9 crvenih kuglica pri čemu se kuglice iste boje ne razlikuju međusobno. Na koliko načina se može izabrati 10 kuglica?

II sedmica - Prostor događaja i pojam vjerovatnoće

1. Navesti skup elementarnih ishoda za sljedeće eksperimente:
    (a) bacanje kockice za igru i jednog novčića,
    (b) bacanje dva puta kockice za igru,
    (c) izvlačenje jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 3 bijele, 4 crvene i 2 plave kuglice,
    (d) izvlačenje dvije kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 3 bijele, 4 crvene i 2 plave kuglice pri čemu je bitan redoslijed izvučenih kuglica,
    (e) izvlačenje dvije kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 3 bijele, 4 crvene i 2 plave kuglice pri čemu nije bitan redoslijed izvučenih kuglica,
    (f) registrovanje ispravnosti tri sijalice.
2. Radnik je proizveo 3 artikla. Neka je X_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ događaj i-ti proizvedeni artikal ispravan (artikal razlikujemo po tome kojim su redom su proizvedeni). Pomoću događaja X_i i $\overline{X}_i$ izraziti skup elementarnih ishoda kao i događaje:
    (a) A - svi su artikli ispravni,
    (b) B - bar jedan artikal je neispravan,
    (c) C - tačno jedan artikal je ispravan,
    (d) D - najviše dva artikla su ispravna,
    (e) E - bar dva artikla ispravna,
    (f) F - tačno dva artikla su neispravna.
3. Meta se gađa sa 3 strijele. Neka je S_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ događaj i- tom strijelom je je meta pogođena. Preko događaja S_i izraziti događaje:
    (a) A - ostvarena su tri pogotka,
    (b) B - ostvarena su tri promašaja,
    (c) C - ostvaren je bar jedan pogodak,
    (d) D - ostvaren je bar jedan promašaj,
    (e) E - ostvarena su bar dva pogotka,
    (f) F - ostvaren je najviše jedan pogodak.

4. Računar je sa spiska riječi formiranih pomoću slova $a, a, a, e, i, k, m, m, t, t$ odabrao jednu. Izračunati vjerovatnoću da je odabrana riječ *matematika*.

5. Novčić se baca 4 puta. Izračunati vjerovatnoće događaja:

   (a) A - pao je paran broj pisama

   (b) B - pala su bar 2 pisma

6. Kocka za igru se baca n puta. Izračunati vjerovatnoću vjerovatnoću događaja:

   (a) A - bar jednom je pala 6

   (b) B - tačno jednom je pala 6.

7. Iz grupe od 10 izviđača pet noći je biran po jedan član da brine o logorskoj vatri. Kolika je vjerovatnoća da je neko od izviđača bar 2 puta biran?

8. Cifre od 0 do 9 redaju se na slučajan način. Kolika je vjerovatnoća da 0 i 1 nisu susjedne?

9. U jednoj kutiji je a bijelih i b crnih, a u drugoj c bijelih i d crnih. Iz svake se bira po jedna kuglica. Naći vjerovatnoće događaja:

   (a) A - obje su bijele

   (b) B - različitih su boja.

10. Iz špila od 52 karte dijeli se na slučajan način na 2 jednaka dijela. Naći vjerovatnoće događaja:

    (a) A - u svakom dijelu se nalaze po 2 keca

    (b) B - u jednom dijelu su sva 4 keca.

11. U kutiji se nalazi n bijelih i n crvenih. Iz kutije se vade po 2 kuglice bez vraćanja, sve dok se kutija ne isprazni. Izračunati vjerovatnoću da smo u svakom izvlačenju izvukli jednu crvenu i jednu bijelu kuglicu.

12. Četiri crne i četiri crvene karte nižu se slučajno. Naći vjerovatnoće sljedećih događaja:

    (a) A - niz počinje i završava crnom kartom,

    (b) B - crne karte su jedna do druge,

    (c) C - crne karte su jedna do druge i crvene karte su jedna druge,

    (d) D - boje su naizmjenično poredane.

13. Naći vjerovatnoću da među k ljudi postoji bar dvoje rođenih istog dana.

14. Iz skupa
    $$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) : x_1 + \cdots + x_{10} = 20, x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2, \dots, 10\}$$
    na slučajan način se bira jedan elemenat $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$. Odrediti vjerovatnoću da je $x_1 \geq 3$ i $x_{10} \geq 5$.

15. Dvije kutije sadrže po 10 kuglica. Iz kutija izvlačimo na slučajan način po jednu kuglicu, pri čemu se pri svakom izvlačenju kutija slučajno bira. Kolika je vjerovatnoća, da u momentu kada se konstatuje da je jedna kutija prazna, druga sadrži 7 kuglica?

16. Neka je $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Naći vjerovatnoću da za slučajno izabrano neprazne, različite podskupove $A, B \subset X$ vrijedi:

    (a) $A \cap B = \emptyset$,

    (b) $A \cup B = X$.

17. N lica izmješaju svoje šešire i nasumice stavljaju na glavu po jedan šešir. Naći vjerovatnoću da bar jedno lice stavi svoj šešir na glavu. Odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$!

18. U voz sa m vagona na slučajan način i nezavisno jedan od drugog ulazi n putnika $(n \geq m)$. Odrediti vjerovatnoću da u svaki vagon uđe bar jedan putnik.

19. Slučajno se bira element iz razvijenog oblika determinante reda n. Naći vjerovatnoću, da on ne sadrži element sa glavne dijagonale. Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$!

III sedmica - Bejsova formula, Formula potpune vjerovatnoće

1. Kocka se baca jednom, pa ako je pao broj manji od 3 baca se ponovo sve dok zbir dobijenih brojeva bude veći ili jednak od 3. Naći vjerovatnoću događaja da je zbir dobijenih brojeva veći ili jednak 4.

2. Novčić se baca do prve pojave pisma. Naći vjerovatnoću događaja:

   (a) A - izvedeno je najviše pet bacanja;

   (b) B - izvedeno je paran broj bacanja.

3. Tri igrača A, B, C, igraju turnir u stonom tenisu. Prvu partiju igraju A i B, C je slobodan. Dok svaku sljedeću igraju pobjednik i slobodan igrač iz prethodne partije. pobjednik je onaj igrač koji pobijedi 2 igre uzastopno. Naći vjerovatnoću pobjede svakog igrača. Rezultati partija su nezavisni.

4. Kocka za igru se baca 2 puta. Ako je pao broj iste parnosti, odrediti verovatnoću da je zbir dobijenih brojeva manji od 5.

5. U kutiji se nalazi 5 bijelih i 5 crnih kuglica. Slučajno se biraju 3 kuglice odjednom. Izračunati vjerovatnoću događaja da nisu sve 3 kuglice bijele, ako je bar jedna kuglica bijela.

6. Kocka se baca sve dok ne padne broj 6. Naći vjerovatnoću da su izvedena bar 3 bacanja, ako se u prvom bacanju nije pojavio broj 6.

7. U svakoj od dvije kutije nalazi se po m bijelih i n crnih kuglica. Iz prve kutije se bira jedna kuglica i stavlja u drugu kutiju, a zatim se iz druge kutije bira jedna kuglica. Kolika je vjerovatnoća da je izabrana bijela kuglica?

8. Takmičaru su ponuđene 3 kutije od kojih bira jednu. Samo jedna kutija sadrži nagradu. Takmičar na slučajan nači bira jednu kutiju, a zatim voditelj kviza otvara jednu od preostale dvije 2 kutije i pokazuje da je prazna. Potom, takmičar ima izbor da promijeni izbor kutije. Šta je povoljnije po takmičara, da zadrži ili promijeni kutiju?

9. Na ispitu je 10 pitanja. Na svakoj cedulji ima po jedno pitanje. Student će položiti ispit, ako zna odgovor na 2 slučajno izabrana pitanja, ili ako tačno odgovori na jedno, a zatim tačno odgovori na treće dopunsko pitanje. Na koliko pitanja student treba da zna odgovor da bi se sa vjerovatnoćom većom od 0.8 položio?

10. Milan ima 4 crvena i 7 bijelih klikera, a Dijana 5 crvenih i 4 bijela klikera. Nasumično biraju po dva klikera i započinju igru. Tokom igre jedan kliker se polomi.

    (a) Koliko iznosi vjerovatnoća da je polomljeni kliker bijele boje?

    (b) Ako se zna da je polomljeni kliker bijele boje, koliko iznosi vjerovatnoća da je kliker bio Dijanin?

11. Iz džepa u kome su bile 3 bijele i 6 crnih kuglica ispala je jedna kuglica. Nakon toga izvučene su dvije kuglice. Kolika je vjerovatnoća da je izgubljena bijela ako su izvučene bijele kuglice?

12. U svakoj od n kutija se nalazi po a bijelih i b crnih kuglica. Na slučajan način iz prve kutije bira se kuglica i prebacuje u drugu, zatim iz druge u treću itd., dok se iz zadnje kutije ne izvuče jedna kuglica.

    (a) Koliko je vjerovatnoća da je zadnja izvučena kuglica bijela?

    (b) Ako je treća izvučena kuglica bijela, kolika je vjerovatnoća da je i prva bijela?

13. Student traži profesora na fakultetu. Profesor se sa podjednakim vjerovatnoćama nalazi u nekoj od pet učionica, a vjerovatnoća da se uopšte nalazi na fakultetu je p. Student je već provjerio četiri učionice i nije našao profesora. Kolilka je vjerovatnoća da će ga naći u petoj učionici?

14. Bacaju se istovremeno kocka za igru i novčić. Kolika je vjerovatnoća da se pojave grb i broj veći od dva?

15. Iz špila od 52 karte izvlači se jedna karta. Ispitati nezavisnost događaja A - izvučena je dama, B - izvučen je pik.

16. Tri strane pravilnog tetraedra obojene su redom plavom, zelenom i crvenom bojom, a četvrta strana obojena je sa sve tri boje. Neka A_1 označava događaj da se prilikom bacanja tetraedra pojavila plava boja, A_2 događaj da se pojavila zelena boja i A_3 događaj da se pojavila crvena boja. Ispitati nezavisnost događaja u parovima i u ukupnosti.

17. Profesor je preuzeo pet identičnih ključeva za učionicu. Ako znamo da vrata otključava samo jedan ključ naći vjerovatnoću da će profesor pronaći pravi ključ iz k-tog pokušaja ako:

    (a) neadekvatni ključ vraća u grupu iz koje vrši izbor,

    (b) neadekvatni ključ izbacuje iz grupe za izbor.

18. Ako su nezavisni događaji A i B, onda su takvi događaji A^c i B^c, A^c i B, A i B^c.

19. Tri igrača A, B i C tim redom bacaju kocku sve dok prvi put ne padne broj 6. Pobjeđuje onaj igrač kod koga padne 6. Naći vjerovatnoću pobjede svakog igrača?

20. Igrači A i B igraju 3 partije šaha. Vjerovatnoća pobjede igrača A u svakoj partiji je p, nezavisno od rezultata ostalih partija. Naći vjerovatnoću da će igrač A dobiti tačno jednu partiju i naći vjerovatnoću da će A dobiti bar jednu partiju.

21. Svaki motor aviona kvari se u toku leta sa vjerovatnoćom p. Motori se kvare nezavisno jedan od drugoga. Avion može da leti ako radi bar polovina od postojećeg broja motora.

    (a) Da li je sigurniji tromotorni od četveromotornog aviona?

    (b) Koliko treba da je $0 < p < 1$ da bude sigurniji dvomotorni od četveromotornog aviona?

22. Otac je obećao nagradu sinu ako igrajući 3 partije tenisa protiv oca i trenera po jednoj od šema: O-T-O, T-O-T, dobije barem 2 partije zaredom. Trener je bolji igrač od oca. Koja šema je bolja za sina?

23. Serija od 100 proizvoda se smatra ispravnom ako se u 5 slučajno izabranih proizvoda iz te serije ne nalazi ni jedan neispravan. Kolika je verovatnoća da će serija od 5% neispravnih proizvoda biti proglašena ispravnom?

24. U kutiji se nalaze bijela i crna kuglica. Iz kutije se izvlači po jedna kuglica sve dok se izvuče crna, pri čemu ako se izvuče bijela kuglica u kutiju se dodaju još 2 bijele kuglice i nastavljamo izvlačenje. Naći vjerovatnoću da crna kuglica neće biti izvučena u prvih 50 izvlačenja.

Geometrijska definicija vjerovatnoće

1. Vozovi dužine 180m kreću se brzinom $30\frac{m}{s}$ po prugama koje se međusobno ukrštaju. Trenutak u kome će oni proći kroz raskršće je slučajan između $9:00$ i $9:30$. Izračunati vjerovatnoću sudara.

2. Na duži $\overline{AB}$ dužine a, na slučajan način su izabrane tačke M i N. Naći vjerovatnoću da tačka M bude bliža N nego tački A.

3. U krugu poluprečnika r bira se na slučajan način jedna tačka. Odrediti vjerovatnoću da je tačka bliža kružnoj liniji nego centru kruga.

4. Na slučajan način se biraju dva broja iz intervala $[0,1]$. Kolika je vjerovatnoća da je njihov zbir manji od 1, a proizvod veći od $\frac{2}{9}$.

5. Duž dužine a podijeljena je na tri dijela. Odrediti vjerovatnoću da se od dobijenih dijelova može konstruisati trougao.

6. Data je jednačina $\frac{x^3}{3} - a^2x + b = 0$, gdje se a i b slučajno biraju iz intervala $(0,1)$. Neka je N broj realnih korijena te jednačine. Naći $P\{N = k\}, k = 1,2,3$.

7. Brojevi x i y se na slučajan način i nezavisno jedan od drugog biraju iz intervala $[0,1]$. Neka je

$$A = \left\{(x,y) : |x-y| \leq \frac{1}{2}\right\} \text{ i } B = \left\{(x,y) : \max\{x,y\} \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

    Naći vjerovatnoću događaja $A \cup B$.

8. Na kružnici poluprečnika R slučajno su izabrane tri tačke A, B i C. Kolika je vjerovatnoća da je trougao $\triangle ABC$ oštrougli?

9. Neka je $a \geq 1$ i $b \geq a+1$. Na koordinatnim odsječcima $[0,a]$ i $[0,b]$ se na slučajan način bira po jedna tačka na rastojanju x, odnosno y, od koordinatnog početka $(0,0)$. Odrediti vjerovatnoću da se od ovih odsječaka dužine x i y, i od jedinične duži može konstruisati trougao.

10. Loptom prečnika $5cm$ se gađa mreža u obliku kvadratne rešetke. Svaki otvor na mreži je kvadrat stranice $8cm$.

    (a) Odrediti vjerovatnoću da lopta prođe kroz mrežu bez dodirivanja mreže

    (b) Koliko najmanje nezavisnih bacanja treba izvesti da bi vjerovatnoća da lopta bar jednom prođe bila veća od vjerovatnoće da nijednom ne prođe?

11. Ako je $\Omega = \big\{(x,y) \mid x, y \in [0,1]\big\}$, za koje vrijednosti parametra a su događaji

    $$A = \big\{(x,y) \in \Omega : |x-y| \geq a\big\} \text{ i } B = \big\{(x,y) \in \Omega : x+y \leq 3a\big\},$$

    nezavisni.

12. Na duži dužine a na slučajan način se biraju dvije tačke. Odrediti vjerovatnoću da je svaka od tri tako dobijene duži kraća od $b \left(b > \frac{a}{3}\right)$.

IV sedmica - Višestruka ispitivanja

1. Dva igrača igraju 5 setova stonog tenisa. Svaki put prvi igrač dobija sa vjerovatnoćom $p = \frac{2}{3}$ nezavisno od rezultata ostalih setova. Neka je X broj setova koji je dobio prvi igrač. Izračunati vjerovatnoću

    (a) pobjede svakog igrača

    (b) da je prvi igrač dobio paran broj setova

    (c) prvi igrač je dobio bar dva seta

    (d) prvi igrač je dobio ne više od 4 seta

2. Koji događaj ima veću vjerovatnoću

    (a) da u 6 porođaja budu 4 dječaka

    (b) da u devet porođaja bude 5 djevojčica

3. Tačke M, N, P su sredine stranica trougla $\triangle ABC$. Na slučajan način se bira n tačaka u $\triangle ABC$. Odrediti vjerovatnoću p_i, $i = \overline{1,n}$ da se u trouglu $\triangle MNP$ nalazi i tačaka. Za koje i je ta vjerovatnoća maksimalna?

4. Jedan uređaj sastoji se od 2000 dijelova. Vjerovatnoća kvara jednog dijela u toku godine je 0.001. Kvar jednog dijela ne zavisi od ostalih dijelova. Odrediti vjerovatnoću kvara u toku godine

    (a) jednog dijela

    (b) dva dijela

    (c) bar dva dijela

    (d) najviše dva dijela

5. Tehnička kontrola provjerava seriju od 100 aparata sa vjerovatnoćom $0,01$ da aparat ima defekt A i nezavisno od toga sa vjerovatnoćom od 0.02 da ima defekt B. Aparat je defektan ako ima bar jedan ovih defekata. Kolika je vjerovatnoća da je broj defektnih aparata u seriji od njih 100 između 2 i 5?

6. Neka je vjerovatnoća rođenja muškog djeteta $p = 0,515$. Odrediti vjerovatnoću događaja da će od 10000 beba biti

    (a) 5150 dječaka

    (b) više od 5050 dječaka

(c) između 5000 i 5200 dječaka.

7. Strijelac pogađa metu sa vjerovatnoćom 0.4. Koliko najmanje gađanja treba da izvede da vjerovatnoća da će imati više od 80 pogodaka bude 0.9.

8. Elektrostanica opslužuje mrežu sa 10000 sijalica. Vjerovatnoća uključenja svake od sijalica uveče iznosi 0.9. Izračunati vjerovatnoću da ukupan broj uključenih sijalica uveče bude manji od 9100?

9. U kutiji sa 300 bijelih i 200 crnih kuglica slučajno se bira 150 kuglica sa vraćanjem. Naći vjerovatnoću da će se broj bijelih kuglica nalaziti između 78 i 108.

10. Vjerovatnoća da je slučajno izabrani čovjek viši od $180cm$ je $0,27$. Odrediti vjerovatnoću da se u grupi od 1200 ljudi nalazi ne više od 300 ljudi preko $180cm$.

11. Serija Playstation uređaja sadrži 5% neispravnih uređaja. Ako je distributer naručio 120 uređaja iz date serije, odrediti vjerovatnoće da:

    (a) neće biti reklamacija u garantnom roku;

    (b) ne bude više od tri reklamacije u garantnom roku.

12. Vjerovatnoća proizvodnje neispravnog proizvoda je 0.02. Naći vjerovatnoću da u seriji od 2500 proizvoda broj neispravnih bude između 36 i 57.

13. Uređaj može imati kvar A sa vjerovatnoćom $0,01$ i nezavisno od toga kvar B sa vjerovatnoćom $0,02$. Uređaj je pokvaren ako ima oba kvara. Kupac prihvata seriju od 1000 uređaja ako u seriji nema više od k neispravnih uređaja. Odrediti k takvo da kupac prihvati seriju sa vjerovatnoćom 0.999. (primijeniti Moavr Laplasovu teoremu)

14. Iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se na slučajan način bira $2n$ brojeva sa vraćanjem ($n \geq 10$). Odrediti k takvo da je broj izvučenih četvorki u tih $2n$ izvlačenja manji od k sa vjerovatnoćom $0,95$.

15. Vjerovatnoća da student položi ispit je 0.3. Studenti polažu ispit nezavisno jedan od drugog.

    (a) Ako ispit polaže 100 studenata naći vjerovatnoću da će bar 35 studenata položiti ispit.

    (b) Koliko studenata treba da izađe na ispit pa da sa vjerovatnoćom 0.9905 položi bar 50?

V sedmica

Diskretna slučajna promjenljiva

1. Bacamo kocku za igru 2 puta. Neka je X - manji od dva dobijena broja. Odrediti raspodjelu vjerovatnoća slučajne veličine X, a zatim funkciju raspodjele F_X.

2. Kocka za igru baca se 4 puta. Odrediti raspodjele za X - broj dobijenih šestica, Y - broj dobijenih brojeva djeljivih sa 3.

3. U jednoj porodici ima sedmoro djece. Ako pretpostavimo da je podjednako vjerovatno rađanje dječaka ili djevojčice, odrediti vjerovatnoću da među djecom ima

    (a) tačno četiri djevojčice

    (b) više djevojčica nego dječaka.

4. Događaj A u jednom izvođenju ima vjerovatnoću p. Eksperiment se izvodi sve dok se događaj A ne realizuje $r \geq 1$ puta. Naći raspodjelu vjerovatnoća slučajne promjenljive X - broj izvedenih eksperimenata.

5. Neka skup A ima N elemenata, od čega je M elemenata prve vrste ($M \leq N$). Ako se bira n elemenata ($n < N$), naći raspodjelu za X - broj elemenata prve vrste od n izabranih.

6. Iz grupe od 10 dječaka i 8 djevojčica bira se njih 5 za šahovsku ekipu. Izračunati vjerovatnoću da u toj ekipi bude najviše 3 dječaka.

7. Dato je 10 kuglica numerisanih brojevima od 1 do 10. Slučajno se biraju 4 kuglice. Neka je X - broj izabranih kuglica koje su označene brojem djeljivim sa 3. Odrediti raspodjelu vjerovatnoća slučajne veličine X, ako se:
   (a) kuglice izvlače bez vraćanja
   (b) kuglice izvlače sa vraćanjem.
8. Strijelac ima n metaka. On gađa metu dok je ne pogodi ili ne potroši sve metke, pri čemu u svakom gađanju mete vjerovatnoća pogađanja je p, nezavisno od ostalih gađanja. Ako je X - broj izvedenih gađanja naći raspodjelu za X.

Slučajni vektor

1. Neka su X i Y nezavisne slučajne promjenljive sa raspodjelama

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   Odrediti raspodjelu vektora (X, Y) i odrediti raspodjelu slučajne veličine $Z = X + Y$, $U = \left|X - \frac{3}{2}\right|$ i $V = X^3$.
2. Petar izvlači jednu kuglicu iz kutije u kojoj se nalazi sedam kuglica označenih sa brojevima $3, 4, 5, 6, 7, 8$ i 9. Ako je izvučen broj djeljiv sa tri, dobija jedan poen, ako je izvučen broj djeljiv sa 4 dobija dva poena, a u ostalim slučajevima dobija tri poen. Slučajna promjenljiva X predstavlja broj poena koje je Petar osvojio. Slučajna promjenljiva Y uzima vrijednost nula ako je izvučen paran broj, a vrijednost jedan ako je izvučen neparan broj. Naći zakon raspodjele slučajne promjenljive (X, Y). Izračunati vjerovatnoće $P(X = 1 \mid Y = 0)$, $P(Y = 0 \mid X = 3)$ i $P(X < 3, Y = 0)$.
3. Aleksandar baca dva puta kockicu za igru. Neka je X - broj pojavljivanja broja djeljivog sa tri, a Y- broj pojavljivanja broja tri. Naći zakon raspodjele slučajne promjenljive (X, Y). Ispitati nezavisnost slučajnih promjenljivih X i Y.
4. Kocka za igru baca se dva puta. Neka je X manji od dobijenih brojeva, a Y NZS dobijenih brojeva. Naći zajedničku raspodjelu za X i Y, ispitati njihovu nezavisnost i naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = \max\{3X, Y\}$.

Neprekidna slučajna promjenljiva

1. Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na dva sata. Neka slučajna promjenljiva X označava vrijeme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina slučajne promjenljive X data je sa

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

   (a) Izračunati $F_X(1.2)$, $F_X(-1)$, $F_X(3.5)$, a zatim naći funkciju raspodjele $F_X(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Kolika je vjerovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?
   (c) Izračunati vjerovatnoće $P(X \le 1)$, $P(X > 1.5)$, $P(X = 1)$.
   (d) Grafički predstaviti funkciju gustine $f_X(x)$ ifunkciju raspodjele F_x.
2. Profesor nikada ne završi čas prije zvona, ali završi u toku prve minute nakon zvona. Neka X predstavlja vrijeme (u minutama) koje prođe od zvona do završetka predavanja. Gustina za X data je sa

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

   (a) Odrediti konstantu k.
   (b) Naći funkciju raspodjele za X.

(c) Kolika je vjerovatnoća da će čas biti produžen najduže pola minute?

(d) Kolika je vjerovatnoća da će čas biti produžen više od 40 sekundi?

3. Gustina raspodjele slučajne promjenljive X data je sa $f_X(x) = \begin{cases} cx, & x \in [3,6] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

(a) Odrediti konstantu c.

(b) Naći vjerovatnoću $P\{X^2 - 9X + 20 \geq 0\}$.

4. Neka je $Y \in \mathcal{N}(1,4)$. Naći vjerovatnoću da kvadratna jednačina $4X^2 + 4YX + Y + 2 = 0$ (po X) ima pozitivna rješenja.

5. Neka slučajna veličina $X \in \mathcal{E}(1)$.Odrediti rapsodjelu slučajne veličine (i gustinu ako postoji)

(a) $Y = X^2$

(b) $Y = \lfloor X \rfloor$.

6. Gustina raspodjele slučajne promjenljive X je $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1), & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Naći raspodjelu za $Y = 1 - X^2$.