Formalne metode

u softverskom inženjerstvu

03 Deterministički automati

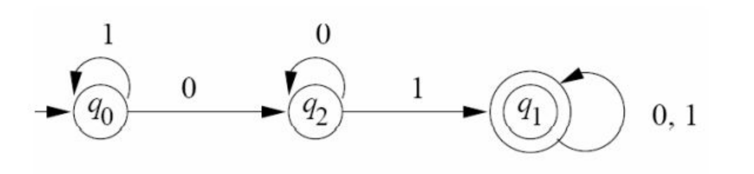
ETFBL 24-25

Dunja Vrbaški

DETERMINISTIČKI KONAČNI AUTOMAT (DKA)

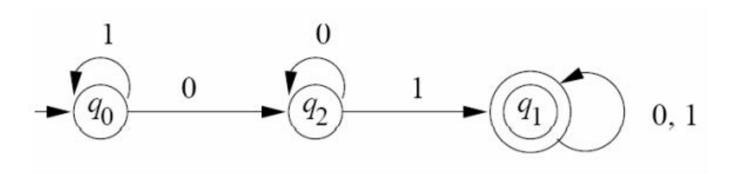
$A = (S, \Sigma, \sigma, s_0, F)$

- S - skup stanja
- Σ - alfabet
- σ - funkcija prelaza, $\sigma: S \times \Sigma \rightarrow S$
- s_0 - inicijalno stanje
- F - skup ciljnih stanja



?

Kako izgledaju reči jezika koji ovaj automat prihvata?

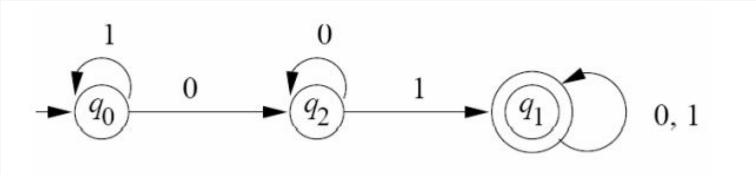


- $S = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $s_0 = q_0$
- $F = \{q_1\}$
- σ:

$\sigma(q_0, 1) = q_0$ $\sigma(q_0, 0) = q_2$

$\sigma(q_2, 1) = q_1$ $\sigma(q_2, 0) = q_2$

$\sigma(q_1, 1) = q_1$ $\sigma(q_1, 0) = q_1$



- $S = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $s_0 = q_0$
- $F = \{q_1\}$
- σ:

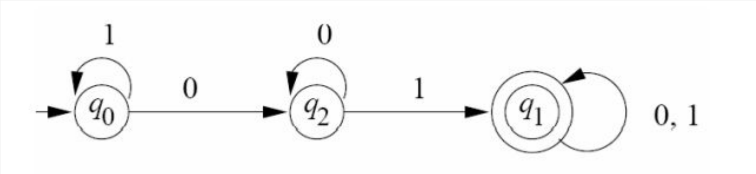
  $\sigma(q_0, 1) = q_0$ $\quad$ $\sigma(q_0, 0) = q_2$

  $\sigma(q_2, 1) = q_1$ $\quad$ $\sigma(q_2, 0) = q_2$

  $\sigma(q_1, 1) = q_1$ $\quad$ $\sigma(q_1, 0) = q_1$

Tabela prelaza

	1	**0**
$\rightarrow$ **q_0**	q_0	q_2
q_2	q_1	q_2
*** q_1**	q_1	q_1



Kako bismo implementirali ovaj automat?

Pretpostavimo da imamo proizvoljnu reč. Na primer, x = 1101

- $S = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $s_0 = q_0$
- $F = \{q_1\}$
- σ:

$\sigma(q_0, 1) = q_0$ $\sigma(q_0, 0) = q_2$

$\sigma(q_2, 1) = q_1$ $\sigma(q_2, 0) = q_2$

$\sigma(q_1, 1) = q_1$ $\sigma(q_1, 0) = q_1$

Tabela prelaza

	1	**0**
→ $\mathbf{q_0}$	q_0	q_2
$\mathbf{q_2}$	q_1	q_2
* $\mathbf{q_1}$	q_1	q_1

Proširena funkcija prelaza σ^*

σ: S x Σ → S

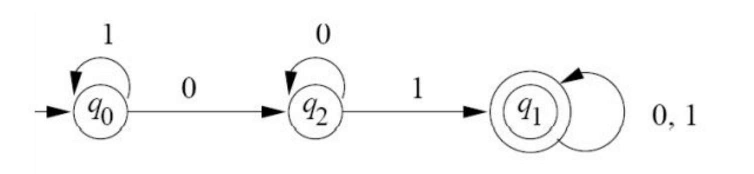
σ^*: S x Σ* → S

Funkcija se proširuje tako da obuhvata čitavu reč, a ne jedan simbol.

$\sigma^*(s, \varepsilon) = s$

$\sigma^*(s, wa) = \sigma(\sigma^*(s, w), a)$

- za praznu reč nema promene stanja
- za proizvoljnu reč funkcija se rekurzivno primenjuje na prefiks w gde se na kraju primenjuje osnovna funkcija za sufiks (simbol) a



x = 1101

$\sigma^*(q_0, 1101) = \sigma(\sigma^*(q_0, 110), 1)$

$\sigma^*(q_0, 110) = \sigma(\sigma^*(q_0, 11), 0)$

$\sigma^*(q_0, 11) = \sigma(\sigma^*(q_0, 1), 1)$

$\sigma^*(q_0, 1) = \sigma(\sigma^*(q_0, \varepsilon), 1)$

$\sigma^*(q_0, \varepsilon) = q_0$

$\sigma^*(q_0, 1) = \sigma(q_0, 1) = q_0$

$\sigma^*(q_0, 11) = \sigma(q_0, 1) = q_0$

$\sigma^*(q_0, 110) = \sigma(q_0, 0) = q_2$

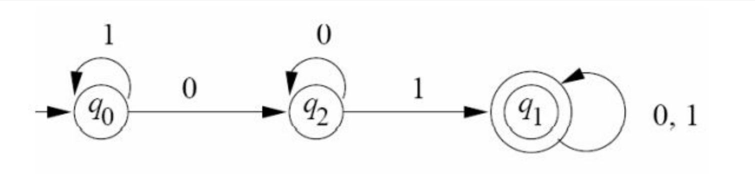
$\sigma^*(q_0, 1101) = \sigma(q_2, 1) = q_1$

	1	**0**
→ q_0	q_0	q_2
q_2	q_1	q_2
*** q_1**	q_1	q_1

Automat $A = (S, \Sigma, \sigma, s_0, F)$ prihvata ulaznu reč $w \in \Sigma^*$ ako $\sigma^*(q_0, w) \in F$.

Jezik automata:
$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \sigma^*(q_0, w) \in F\}$

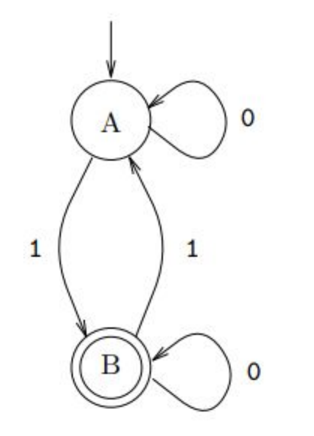
Konačni automat prihvata jezike koje zovemo regularni jezici.



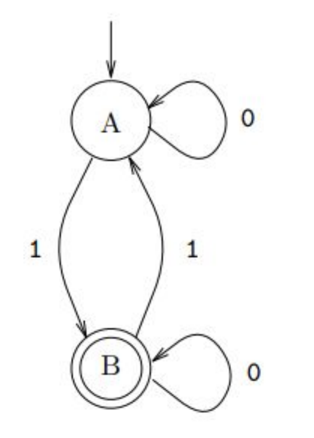
Automat je deterministički jer je jednoznačno određena promena stanja za svaki ulazni simbol.

Ako posmatramo funkciju prelaza kao program možemo se zapitati da li možemo da kombinujemo programe?

Da li možemo nekako da kombinujemo automate?


A
0
1
1
B
0

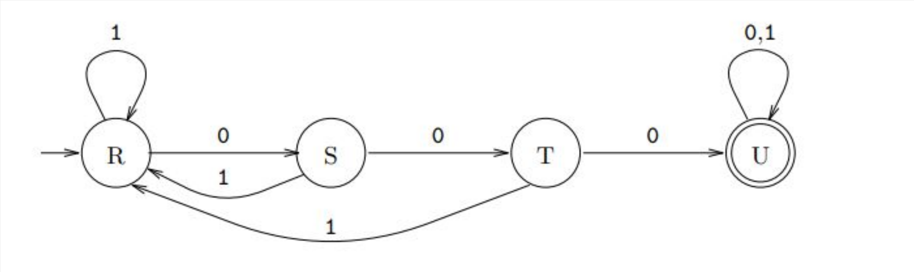
?



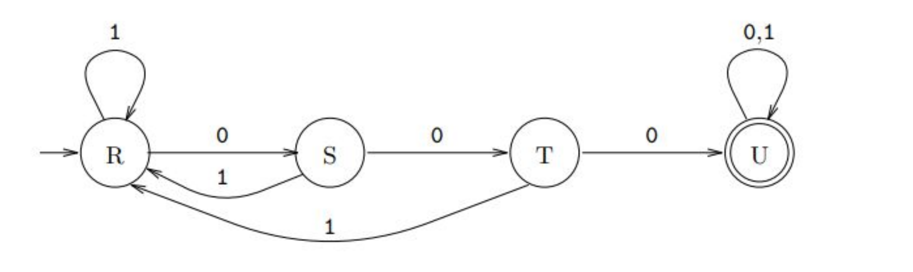
Proverava da li ulaz ima neparan broj simbola 1.

1101
1001

Šta znači "proverava"?


1
0,1
0
0
0
R
S
T
U
1
1

?



Proverava da li ulaz ima podniz 000.

110001
1001

Da li od ovih automata možemo da napravimo automate koji proveravaju

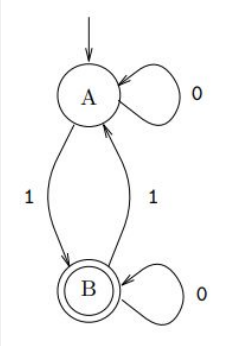
- da li ima neparan broj 1 i ima podniz 000
- da li ima neparan broj 1 ili ima podniz 000
- da li ima neparan broj 1 i nema podniz 000
- da li ima paran broj 1 i ima podniz 000
- da li ima paran broj 1
- da li nema podniz 000

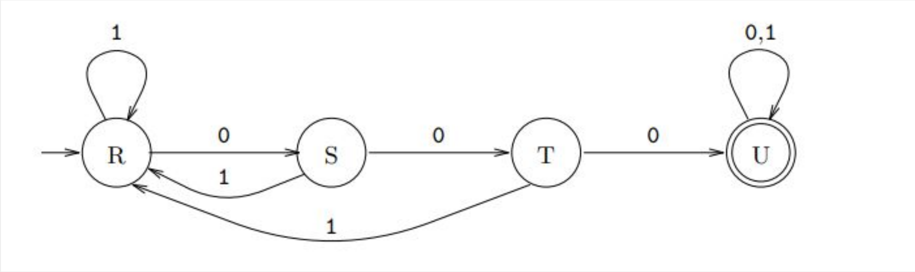
Da li od ovih automata možemo da napravimo automate koji proveravaju

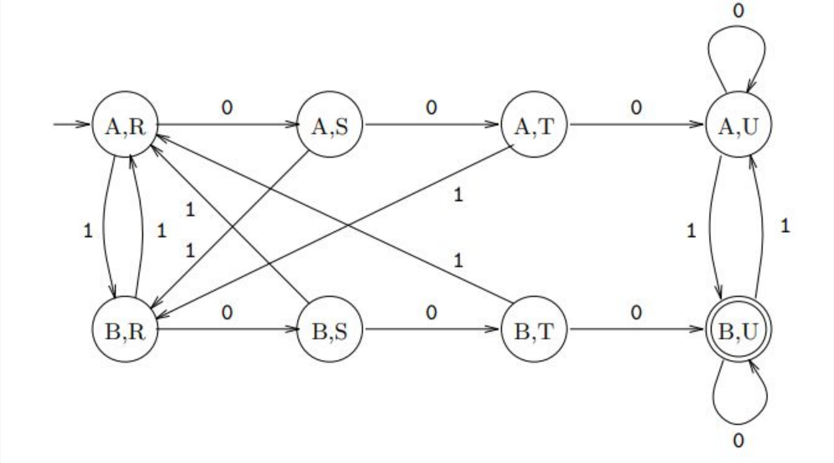
- da li ima neparan broj 1 i ima podniz 000
- da li ima neparan broj 1 ili ima podniz 000
- da li ima neparan broj 1 i nema podniz 000
- da li ima paran broj 1 i ima podniz 000
- da li ima paran broj 1
- da li nema podniz 000

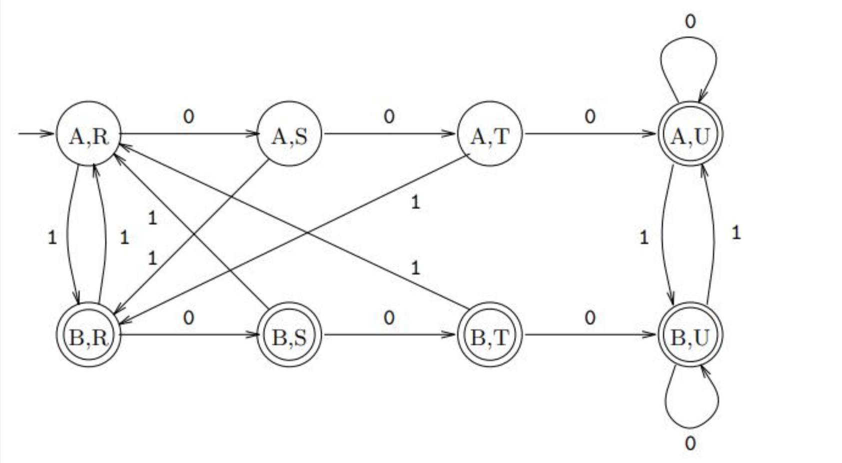
Na šta nas asociraju ova pitanja?

Šta znači zatvorenost u odnosu na operacije?


A
B
0
1
1
0


R
S
T
U
1
0
0
0
0,1
1
1


A,R
A,S
A,T
A,U
B,R
B,S
B,T
B,U
0
1


A,R
A,S
A,T
A,U
B,R
B,S
B,T
B,U
0
1

Kako?

Da li imamo sistematičan način da kombinujemo automate za bilo koje jezike?

Ne možemo prosto, serijski, nadovezati, ulaz se čita simbol po simbol.

Da li možemo nekako da ih pustimo paralelno da se izvršavaju?
Da se nekako pamte stanja oba automata?

Imamo dva DKA:

$A_1 = (S_1, \Sigma, \sigma_1, q_1, F_1)$ prihvata jezik L_1

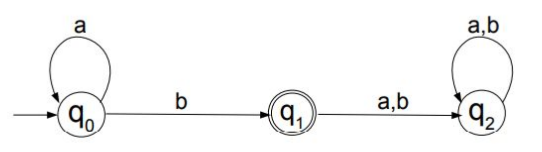
$A_2 = (S_2, \Sigma, \sigma_2, q_2, F_2)$ prihvata jezik L_2

Formiramo novi DKA

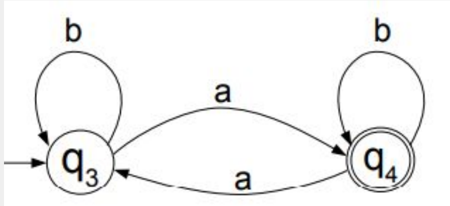
$A = (S, \Sigma, \sigma, q_0, F)$

$S = S_1 \times S_2$
$q_0 = (q_1, q_2)$
$\sigma((p, q), a) = (\sigma_1(p, a), \sigma_2(q, a))$

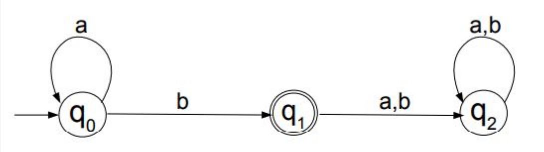
$L_1 \cup L_2 : F = \{(p, q) \mid p \in F_1 \vee q \in F_2\}$
$L_1 \cap L_2 : F = \{(p, q) \mid p \in F_1 \wedge q \in F_2\}$
$L_1 \setminus L_2 : F = \{(p, q) \mid p \in F_1 \wedge q \notin F_2\}$


a
a,b
b
a,b
q0
q1
q2

?

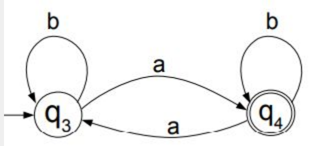

b
b
a
a
q_3
q_4

?



$L_1=\{a^n b \mid n\geq 0\}$

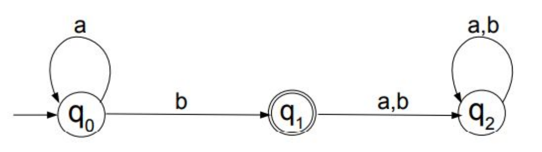
$L_2=\{x\in\{a,b\}^* \mid x \text{ sadrži neparan broj simbola } a\}$

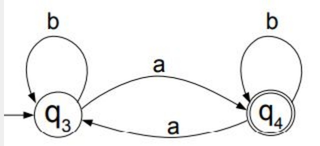


$A_1=(\{q_0,q_1,q_2\},\{a,b\},\delta_1,q_0,\{q_1\})$

$A_2=(\{q_3,q_4\},\{a,b\},\delta_2,q_3,\{q_4\})$

Kako izgleda automat koji predstavlja uniju?





$L_1=\{a^nb \mid n\geq 0\}$

$L_2=\{x\in\{a,b\}^* \mid$ x sadrži neparan broj simbola a$\}$

$A_1=(\{q_0,q_1,q_2\},\{a,b\},\delta_1,q_0,\{q_1\})$

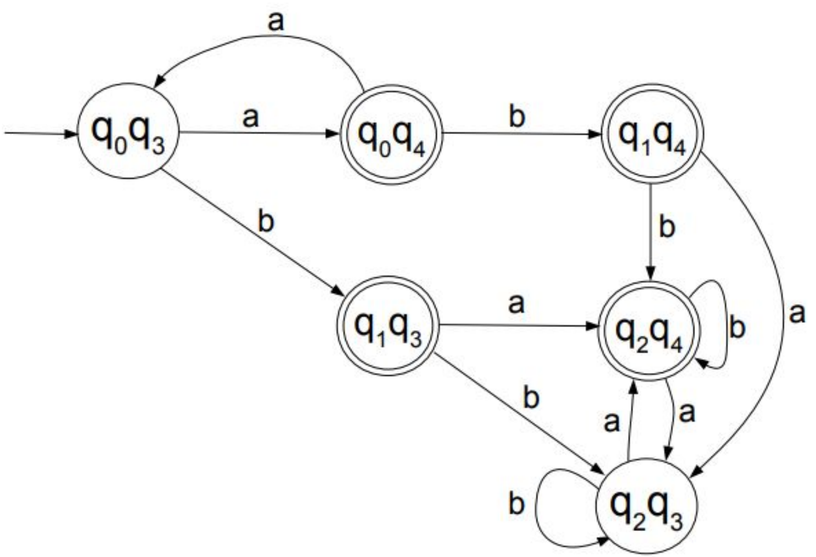
$A_2=(\{q_3,q_4\},\{a,b\},\delta_2,q_3,\{q_4\})$

$$A=(\{q_0q_3,q_0q_4,q_1q_3,q_1q_4,q_2q_3,q_2q_4\},\{a,b\},\delta,q_0q_3,\{q_0q_4,q_1q_3,q_1q_4,q_2q_4\})$$

$\delta(q_0q_3,a)=q_0q_4$, jer je $\delta_1(q_0,a)=q_0$ i $\delta_2(q_3,a)=q_4$

$\delta(q_0q_3,b)=q_1q_3$

$\delta(q_0q_4,a)=q_0q_3$	$\delta(q_1q_4,b)=q_2q_4$
$\delta(q_0q_4,b)=q_1q_4$	$\delta(q_2q_3,a)=q_2q_4$
$\delta(q_1q_3,a)=q_2q_4$	$\delta(q_2q_3,b)=q_2q_3$
$\delta(q_1q_3,b)=q_2q_3$	$\delta(q_2q_4,a)=q_2q_3$
$\delta(q_1q_4,a)=q_2q_3$	$\delta(q_2q_4,b)=q_2q_4$

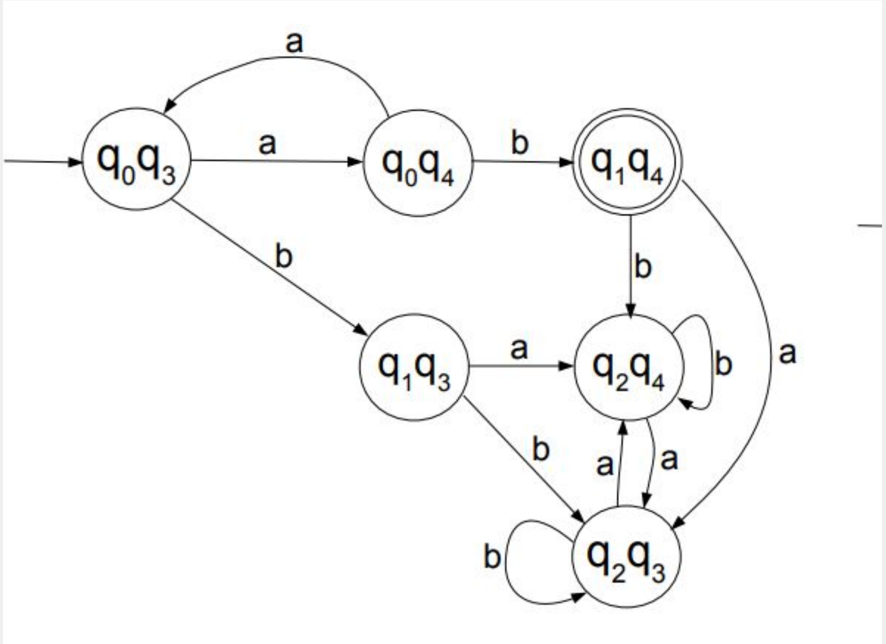


	a	b
$\rightarrow q_0q_3$	q_0q_4	q_1q_3
$*q_0q_4$	q_0q_3	q_1q_4
$*q_1q_3$	q_2q_4	q_2q_3
$*q_1q_4$	q_2q_3	q_2q_4
q_2q_3	q_2q_4	q_2q_3
$*q_2q_4$	q_2q_3	q_2q_4

Unija

Koji jezik ovaj automat prihvata? Kakve reči?

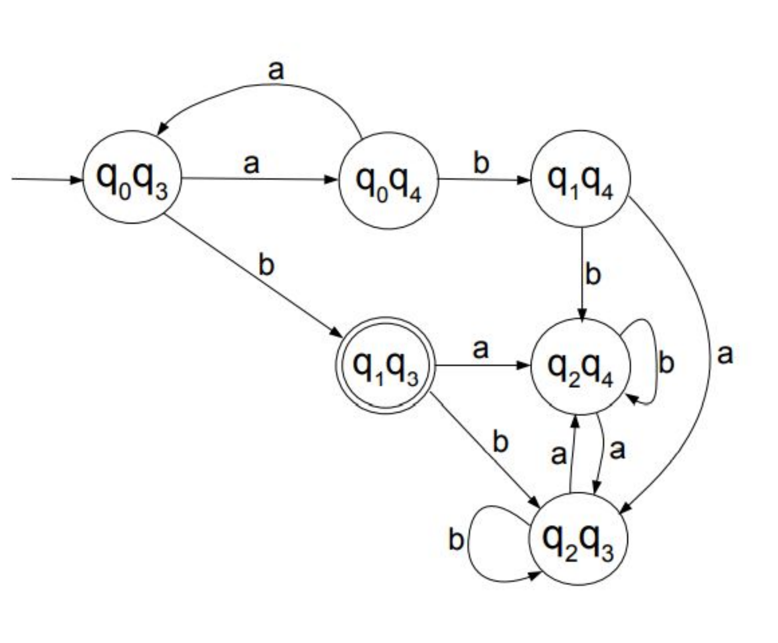
$F_1 = \{q_1\}$
$F_2 = \{q_4\}$



Presek

Koji jezik ovaj automat prihvata? Kakve reči?

$F_1 = \{q_1\}$
$F_2 = \{q_4\}$

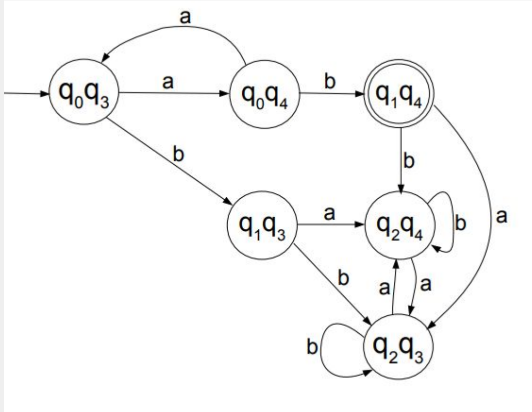


Razlika

Koji jezik ovaj automat prihvata? Kakve reči?

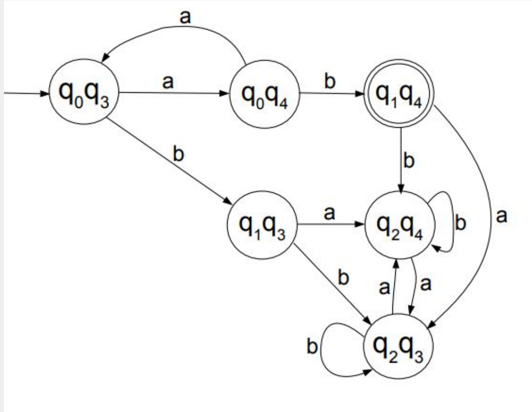
$F_1 = \{q_1\}$
$F_2 = \{q_4\}$

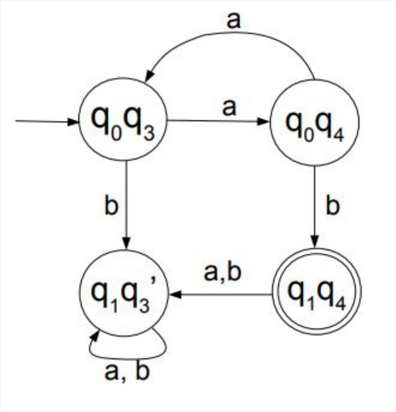
Posmatrajmo, na primer, presek.



Imamo sistematičan postupak za formiranje preseka.

Da li možda postoji ekvivalentan automat, ali jednostavniji?





Da li za pronalaženje ekvivaletnog imamo sistematičan postupak?

MINIMIZACIJA AUTOMATA

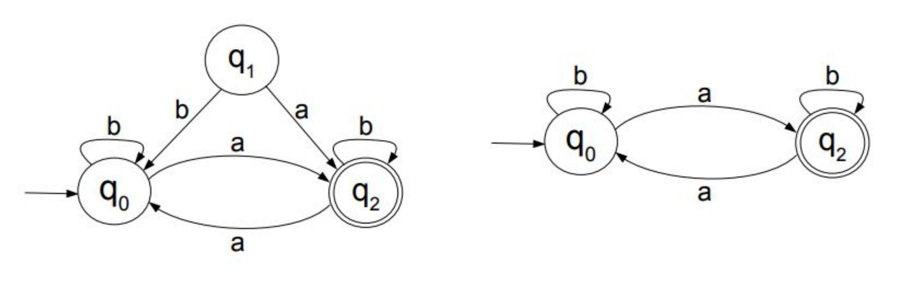
ekvivalentan: $L(A_1) = L(A_2)$
jednostavniji: Ima manje stanja.

Zadatak je otkriti sva **suvišna** stanja:

- nedostižna
- ekvivalentna

Nedostižno stanje

Stanje p je nedostižno ako ne postoji reč $w \in \Sigma^*$ za koju važi $p = \delta^*(q_0,w)$,



Ako krećemo iz inicijalnog stanja ono je dostižno i dalje prelazimo samo u dostižna stanja.

Nedostižna stanja nikako ne utiču na rad automata i možemo ih izbaciti.

Automat je dostižan ako su sva njegova stanja dostižna.

Odbacivanje nedostižnih stanja
→
Pronalaženje dostižnih stanja

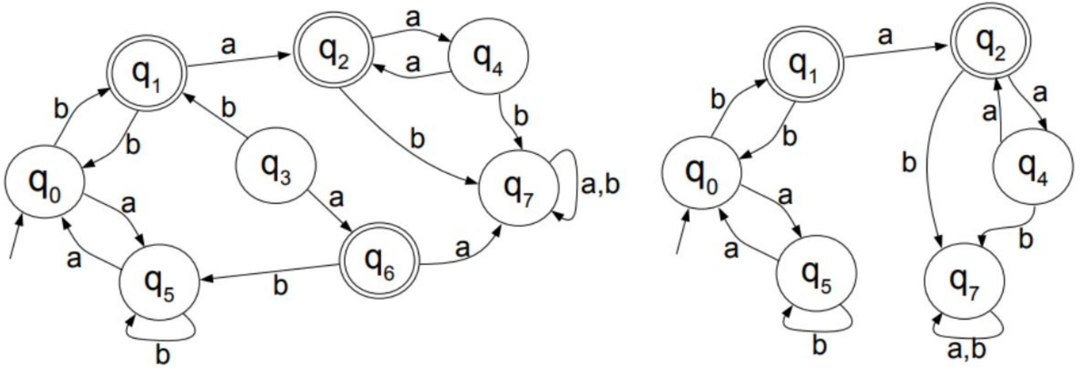
- polazi se od početnog stanja q_0,
- skup dostižnih stanja se u svakom koraku proširuje stanjima do kojih se funkcijom prelaza može preći iz nekog od stanja u skupu,
- algoritam se ponavlja dok god se skup dostižnih stanja proširuje.

1) $DS = \{q_0\}$,

2) $DS = \{q_0\} \cup \{q_5, q_1\}$,

3) $DS = \{q_0\} \cup \{q_5, q_1\} \cup \{q_2\}$,

4) $DS = \{q_0\} \cup \{q_5, q_1\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_7\}$.



Ekvivalentna stanja

Stanja koja “se svode na isto”.

Šta ovo znači i kako precizirati?

Potrebno je uvesti još neke pojmove.

Relacija ekvivalencije

Binarna relacija R na skupu S je skup uređenih parova elemenata iz S.

$(a, b) \in R$
aRb

Relacija “manje od”, “<”: $\{(a,b) \mid a \text{ je manje od } b\}$

Relacija R je relacija ekvivalencije ako je:

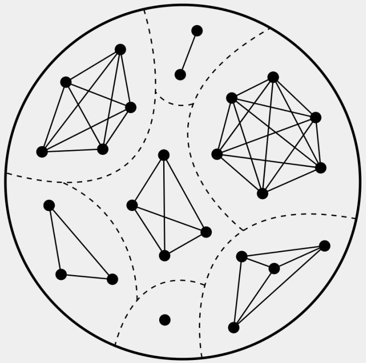
- refleksivna: aRa
- simetrična: $aRb \rightarrow bRa$
- tranzitivna: $aRb, bRc \rightarrow aRc$

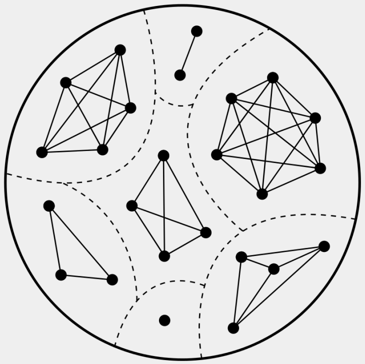
= relacija ekvivalencije
< relacija poretka (nije ekvivalencije, asimetrična je)

Relacija ekvivalencije deli skup na disjunktne podskupove koje zovemo **klase ekvivalencije**.

aRb akko su a i b u istoj klasi ekvivalencije.

Unija svih klasa ekvivalencije je sam skup S.





S = Z
=
a i b imaju istu apsolutnu vrednost
isti ostatak pri deljenju
a+b je parno

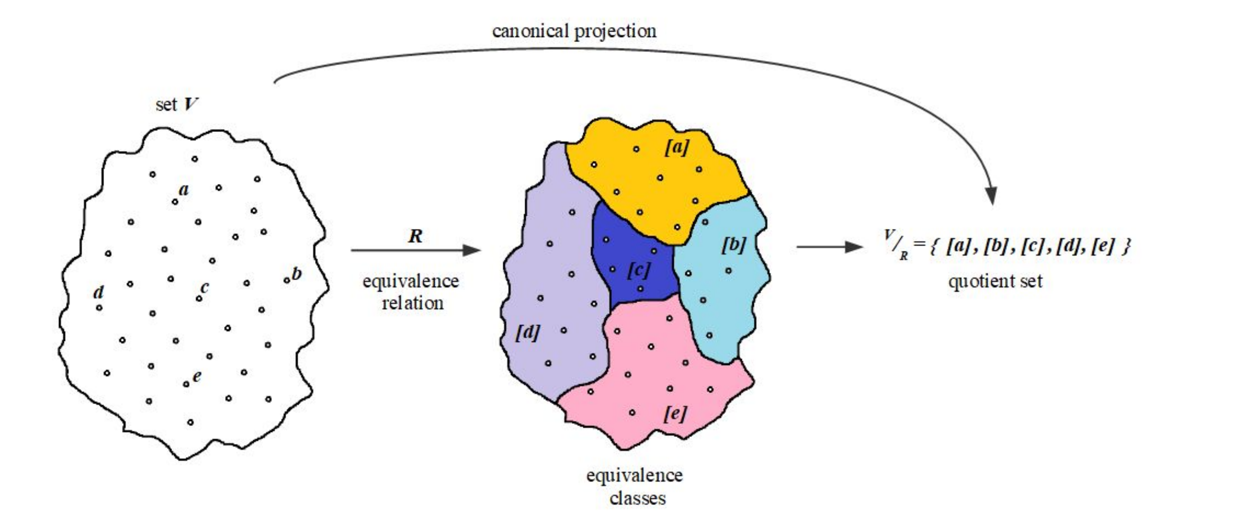
S = skup reči nekog jezika
reči imaju istu dužinu

Obratiti pažnju.
Relacija ne mora imati “pravilo”.
Relacija je jedan najobičniji skup uređenih parova.

{ (1, 2), (3, 7), (3, 3) }

Formalni mehanizam za podelu skupa

Umesto celog skupa može se posmatrati predstavnik jedne homogene grupe, jedne grupe gde elementi imaju neko zajedničko svojstvo.



faktor skup

Od klasa ekvivalencije dobijamo faktor skup čiji su elementi predstavnici.

Važno je da taj faktor skup $S_{/R}$ sačuva svojstva polaznog skupa S.

R - osim što je relacija ekvivalencije treba i da bude saglasna sa operacijama nad S.
Nekako treba na prirodan način da prenese operacije iz S.

Algebra: skupovi; pojmovi: kongruencija, homomorfizam

Ideja za minimizaciju automata:

Da li postoje stanja koja se “svode na isto”?

$\Leftrightarrow$

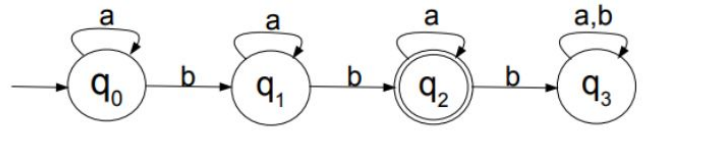
Da li postoji relacija ekvivalencije koja deli stanja automata na klase ekvivalencije?

Umesto cele klase mogli bismo uzeti jednog predstavnika - faktor automat.

Relacija ekvivalencije bi trebala nekako i prirodno da preslika i operacije iz polaznog automata.

Šta nam je važno? Da bude isti jezik.
Nova funkcija prelaza (operacija) bi trebalo to da očuva.

Smanjili bismo broj stanja.



DKA koji prihvata reči koje sadrže tačno dva simbola b

Kad se automat nalazi u različitim stanjima, reči koje su u tom trenutku na ulazu se dele u sledeće grupe:

- reči koje ne sadrže b (q_0),
- reči koje sadrže jedan simbol b (q_1),
- reči koje sadrže dva simbola b (q_2),
- reči koje sadrže više od dva simbola b (q_3).

Razlikovanje reči

Za reči x i y iz alfabeta Σ kažemo da se razlikuju u odnosu na jezik L ako postoji riječ $z \in \Sigma^*$ takva da važi:

$(xz \in L \;\; \wedge \;\; yz \notin L) \;\; \vee \;\; (xz \notin L \;\; \wedge \;\; yz \in L)$

To znači da postoji bar jedna reč z takva da xz pripada jeziku L, a yz ne pripada, ili obrnuto.

Automat mora konstrukcijom biti u stanju razlikovati takve reči (postojanjem različitih stanja).

Reči u skupu $S \subseteq \Sigma^*$ se razlikuju po parovima u odnosu na L,
ako za svaki par (x,y) različitih reči iz S, važi da su x i y različite u odnosu na L.

Teorema

Ako je dat DKA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ koji prihvata jezik $L \subseteq \Sigma^*$, važe sedeće tvrdnje:

1. Ako su x i y dve reči iz Σ koje se razlikuju u odnosu na L, onda je: $\delta^*(q_0, x) \neq \delta^*(q_0, y)$
2. Ako postoji skup od *n* reči koje se razlikuju po parovima u odnosu na jezik L onda, za svako *n≥2n,* skup Q mora imati bar *n* stanja.

Dokaz

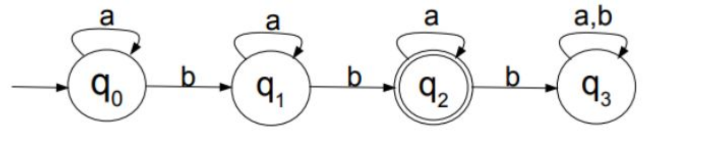
Pošto su x i y različite u odnosu na L, a automat A prihvata jezik L, jedno od stanja $\delta^*(q_0, xz)$ i $\delta^*(q_0, yz)$ je konačno, a drugo nije.

Iz definicije proširene funkcije prelaza sledi:

$\delta^*(q_0, xz) = \delta^*(\delta^*(q_0, x), z)$
$\delta^*(q_0, yz) = \delta^*(\delta^*(q_0, y), z)$

Pošto su leve strane izraza različite i desne moraju biti, pa sedi: $\delta^*(q_0, x) \neq \delta^*(q_0, y)$

Ako bi automat A imao manje od *n* stanja, to znači da bi bar dve od *n* reči završile u istom konačnom stanju, što je nemoguće jer se te reči razlikuju u odnosu na LL.



DKA koji prihvata reči koje sadrže tačno dva simbola b

- reči koje ne sadrže b (q_0),
- reči koje sadrže jedan simbol b (q_1),
- reči koje sadrže dva simbola b (q_2),
- reči koje sadrže više od dva simbola b (q_3).

Ako se sa S označi bilo koji od ovih skupova:

- bilo koje dve reči iz S se ne razlikuju u odnosu na L
- svaka reč iz S se razlikuje u odnosu na L od bilo koe reči koja ne pripada S

Definišemo relaciju I_L za jezik $L \subseteq \Sigma^*$:

$(x, y) \in I_L$ akko se x i y ne razlikuju u odnosu na L.

I_L je relacija ekvivalencije

S_L je faktor skup, skup klasa ekvivalencije

Automat A_L koji odgovara automatu A je
$A_L = (S_L, \Sigma, \sigma, s_0, F)$

S_L - stanja koja odgovaraju klasama ekvivalencije; oznaka za elemente: [x]

Σ - isto kao kod A

$\sigma^*([x], a) = [xa]$

$s_0 = [\varepsilon]$

$F = \{ [x] \in S_L \mid x \in L \}$

A_L
- prihvata jezik L
- minimalni broj stanja
- broj stanja je jednak broju klasa ekvivalencije

Ako je [x] = [y]

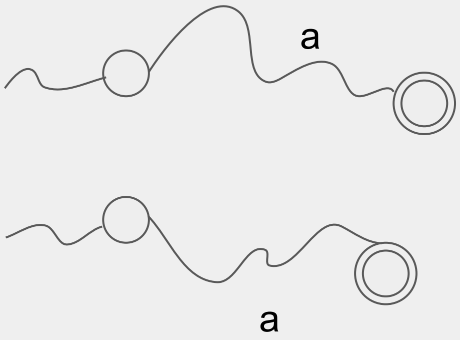
$\sigma^*([x], a) = [xa]$
$\sigma^*([y], a) = [ya]$
$\rightarrow$
[xa] = [ya]

Sve reči iz klase prelaze u isto stanje.
Očuvana su svojstva.

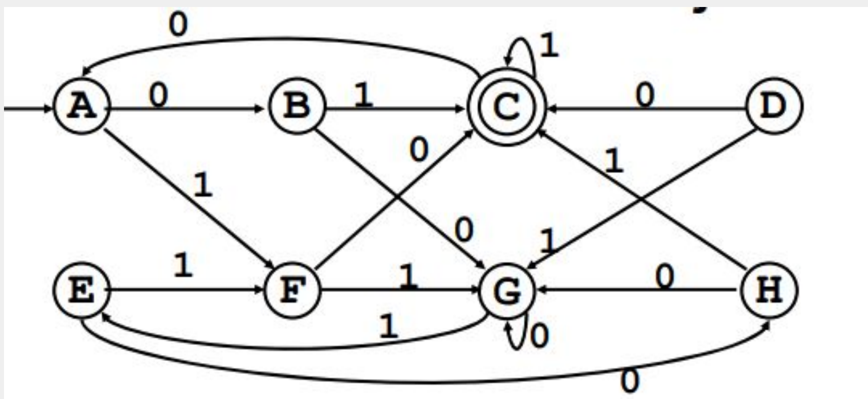
Koja stanja su ekvivalentna u A?

Ako sa S_p označimo skup reči takvih da $\sigma^*(p, a) \in F$

Stanja p i q su ekvivalentna ($p \equiv q$) ako se ne mogu razlikovati reči iz skupa S_p i S_q
($\sigma^*(p, a) \in F$ i $\sigma^*(q, a) \in F$)



Dva stanja su ekvivalentna ako su S_p i S_q podskupovi iste klase ekvivalencije I_L



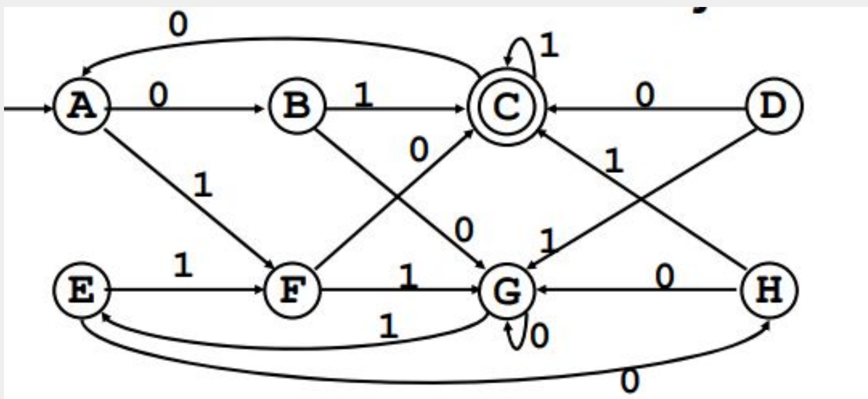
$\sigma^*(p, a) \in F$ i $\sigma^*(q, a) \in F$

ε - nam daje razlikovanje između završnih i stanja koja to nisu

p ≡ q
ili su oba finalna
ili nisu oba finalna

C i G nisu ekvivalentna stanja
ε ih razlikuje

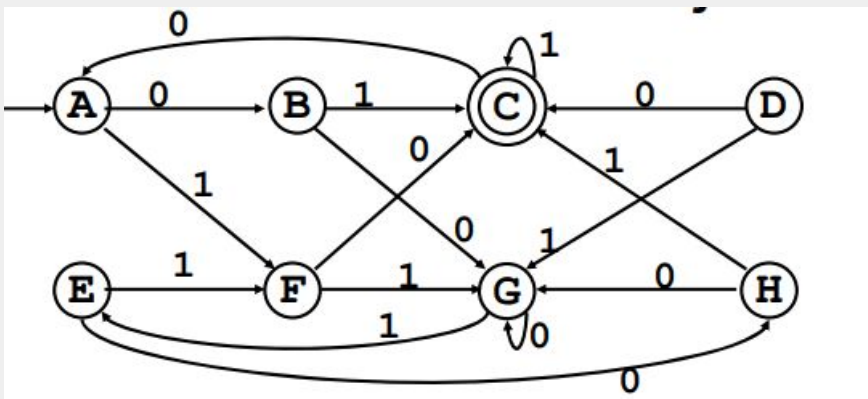
$\sigma^*(C, \varepsilon) \in F$ i $\sigma^*(G, \varepsilon) \notin F$



$\sigma^*(p, a) \in F$ i $\sigma^*(q, a) \in F$

A i G nisu ekvivalentna stanja
01 ih razlikuje

$\sigma^*(A, 01) = C \in F$
$\sigma^*(G, 01) = E \notin F$



$\sigma^*(p, a) \in F$ i $\sigma^*(q, a) \in F$

A i E su ekvivalentna stanja

$\sigma^*(A, 1) = F$
$\sigma^*(E, 1) = F$
$\rightarrow$
$\sigma^*(A, 1x) = \sigma^*(E, 1x)$

$\sigma^*(A, 0) = B$
$\sigma^*(E, 0) = H$

$\sigma^*(B, 0) = G$ $\sigma^*(B, 1) = C$
$\sigma^*(H, 0) = G$ $\sigma^*(H, 1) = C$

$\rightarrow$
$\sigma^*(A, 0x) = \sigma^*(E, 0x)$

Definišemo skup S_M kao skup parova različitih stanja (p, q) $p \neq q$

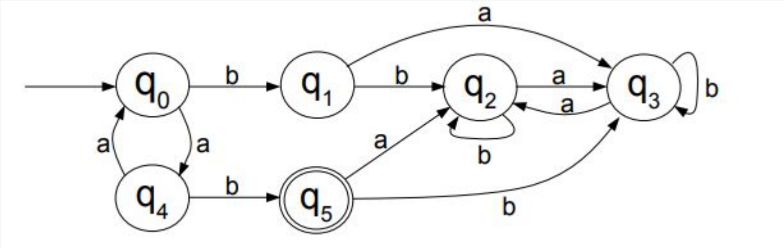
Postupak:

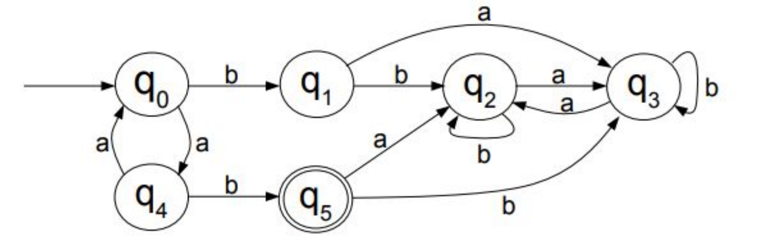
- početak: podskup sadrži parove u kojima je jedno stanje završno
- iterativno: ako postoji $a \in \Sigma$ za koje $(\sigma(p, a), \sigma(q, a)) \in S_M$ onda i $(p, q) \in S_M$

Posmatraju se svi parovi koji nisu u skupu S_M
Ako postoji bar jedan ulazni simbol za koji je rezultujući par stanja već u skupu S_M
onda se i taj par dodaje u skup S_M

Završavamo kad više nema promena, nema više proširenja

Da li će ostati neki parovi?

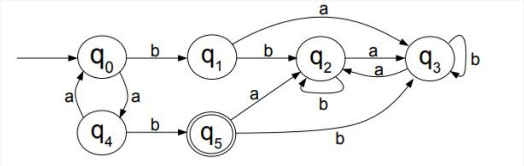

q0
q1
q2
q3
q4
q5
a
b
a
b
a
a
b
a
a
b
a
b
b



q_1					
q_2					
q_3					
q_4					
q_5	1	1	1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

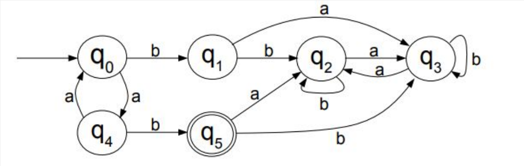
Implikaciona tabela

Dodajemo parove kod kojih je jedno stanje završno



Par stanja	Prelazi
(q_0, q_1)	$\delta(q_0,a)=q_4,\ \delta(q_1,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1,\ \delta(q_1,b)=q_2$
(q_0, q_2)	$\delta(q_0,a)=q_4,\ \delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1,\ \delta(q_2,b)=q_2$
(q_0, q_3)	$\delta(q_0,a)=q_4,\ \delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_0,b)=q_1,\ \delta(q_3,b)=q_3$
(q_0, q_4)	$\delta(q_0,a)=q_4,\ \delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_0,b)=q_1,\ \delta(q_4,b)=q_5$
(q_1, q_2)	$\delta(q_1,a)=q_3,\ \delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_1,b)=q_2,\ \delta(q_2,b)=q_2$
(q_1, q_3)	$\delta(q_1,a)=q_3,\ \delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_1,b)=q_2,\ \delta(q_3,b)=q_3$
(q_1, q_4)	$\delta(q_1,a)=q_3,\ \delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_1,b)=q_2,\ \delta(q_4,b)=q_5$
(q_2, q_3)	$\delta(q_2,a)=q_3,\ \delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_2,b)=q_2,\ \delta(q_3,b)=q_3$
(q_2, q_4)	$\delta(q_2,a)=q_3,\ \delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_2,b)=q_2,\ \delta(q_4,b)=q_5$
(q_3, q_4)	$\delta(q_3,a)=q_2,\ \delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_3,b)=q_3,\ \delta(q_4,b)=q_5$

q_1					
q_2					
q_3					
q_4					
q_5	1	1	1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4



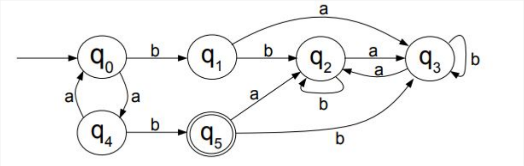
Par stanja	Prelazi	Odluka
(q_0,q_1)	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_1,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_1,b)=q_2$	
(q_0,q_2)	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_2,b)=q_2$	
(q_0,q_3)	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_3,b)=q_3$	
(q_0,q_4)	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_4,b)=q_5$	(q_1,q_5) pripada skupu P, pa se u P dodaje i par (q_0,q_4)
(q_1,q_2)	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_2,b)=q_2$	
(q_1,q_3)	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_3,b)=q_3$	
(q_1,q_4)	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_4,b)=q_5$	(q_2,q_5) pripada skupu P, pa se u P dodaje i par (q_1,q_4)
(q_2,q_3)	$\delta(q_2,a)=q_3$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_2,b)=q_2$, $\delta(q_3,b)=q_3$	
(q_2,q_4)	$\delta(q_2,a)=q_3$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_2,b)=q_2$, $\delta(q_4,b)=q_5$	(q_2,q_5) pripada skupu P, pa se u P dodaje i par (q_2,q_4)
(q_3,q_4)	$\delta(q_3,a)=q_2$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_3,b)=q_3$, $\delta(q_4,b)=q_5$	(q_3,q_5) pripada skupu P, pa se u P dodaje i par (q_3,q_4)

q_1					
q_2					
q_3					
q_4					
q_5	1	1	1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

ako postoji $a \in \Sigma$ za koje
$(\sigma(p, a), \sigma(q, a)) \in S_M$ onda i $(p, q) \in S_M$

** u tabeli je S_M označen sa P*

q_1					
q_2					
q_3					
q_4	2	2	2	2	
q_5	1	1	1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4



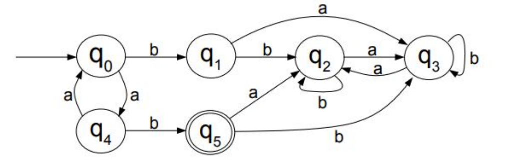
Par stanja	Prelazi	Odluka
(q_0, q_1)	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_1,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_1,b)=q_2$	(q_4,q_3) pripada skupu P, pa se u P dodaje i par (q_0,q_1)
(q_0, q_2)	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_2,b)=q_2$	(q_4,q_3) pripada skupu P, pa se u P dodaje i par (q_0,q_2)
(q_0, q_3)	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_3,b)=q_3$	(q_4,q_2) pripada skupu P, pa se u P dodaje i par (q_0,q_3)
$\cancel{(q_0, q_4)}$	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_4,b)=q_5$	
(q_1, q_2)	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_2,b)=q_2$	
(q_1, q_3)	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_3,b)=q_3$	
$\cancel{(q_1, q_4)}$	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_4,b)=q_5$	
(q_2, q_3)	$\delta(q_2,a)=q_3$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_2,b)=q_2$, $\delta(q_3,b)=q_3$	
$\cancel{(q_2, q_4)}$	$\delta(q_2,a)=q_3$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_2,b)=q_2$, $\delta(q_4,b)=q_5$	
$\cancel{(q_3, q_4)}$	$\delta(q_3,a)=q_2$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_3,b)=q_3$, $\delta(q_4,b)=q_5$	

q_1					
q_2					
q_3					
q_4	2	2	2	2	
q_5	1	1	1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

ako postoji $a \in \Sigma$ za koje
$(\sigma(p, a), \sigma(q, a)) \in S_M$ onda i $(p, q) \in S_M$

** u tabeli je S_M označen sa P*

q_1	3				
q_2	3				
q_3	3				
q_4	2	2	2	2	
q_5	1	1	1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4



q_1	3				
q_2	3				
q_3	3				
q_4	2	2	2	2	
q_5	1	1	1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

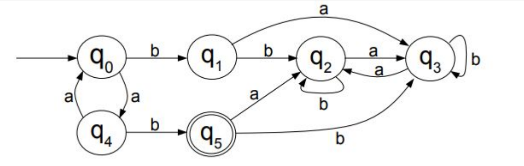
ako postoji $a \in \Sigma$ za koje
$(\sigma(p, a), \sigma(q, a)) \in S_M$ onda i $(p, q) \in S_M$

** u tabeli je S_M označen sa P*

Par stanja	Prelazi	Odluka
~~(q_0, q_1)~~	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_1,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_1,b)=q_2$	
~~(q_0, q_2)~~	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_2,b)=q_2$	
~~(q_0, q_3)~~	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_3,b)=q_3$	
~~(q_0, q_4)~~	$\delta(q_0,a)=q_4$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_0,b)=q_1$, $\delta(q_4,b)=q_5$	
(q_1, q_2)	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_2,b)=q_2$	
(q_1, q_3)	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_3,b)=q_3$	
~~(q_1, q_4)~~	$\delta(q_1,a)=q_3$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_1,b)=q_2$, $\delta(q_4,b)=q_5$	
(q_2, q_3)	$\delta(q_2,a)=q_3$, $\delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_2,b)=q_2$, $\delta(q_3,b)=q_3$	
~~(q_2, q_4)~~	$\delta(q_2,a)=q_3$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_2,b)=q_2$, $\delta(q_4,b)=q_5$	
~~(q_3, q_4)~~	$\delta(q_3,a)=q_2$, $\delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_3,b)=q_3$, $\delta(q_4,b)=q_5$	

Nema dalje!

Ostali su neraspoređeni parovi

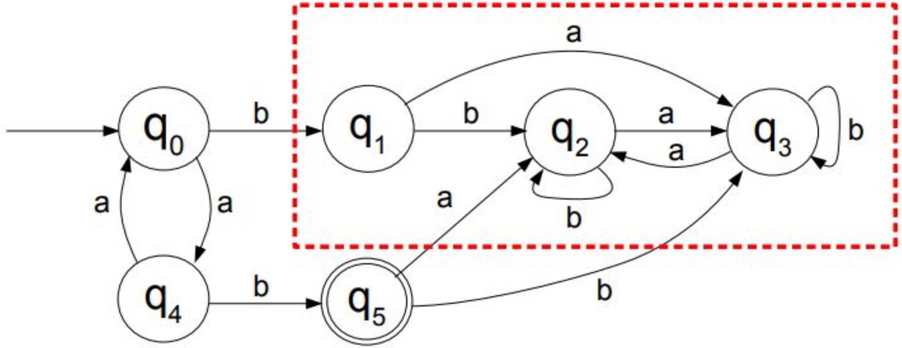


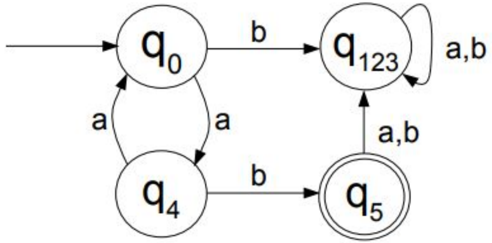
q_1	3				
q_2	3				
q_3	3				
q_4	2	2	2	2	
q_5	1	1	1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

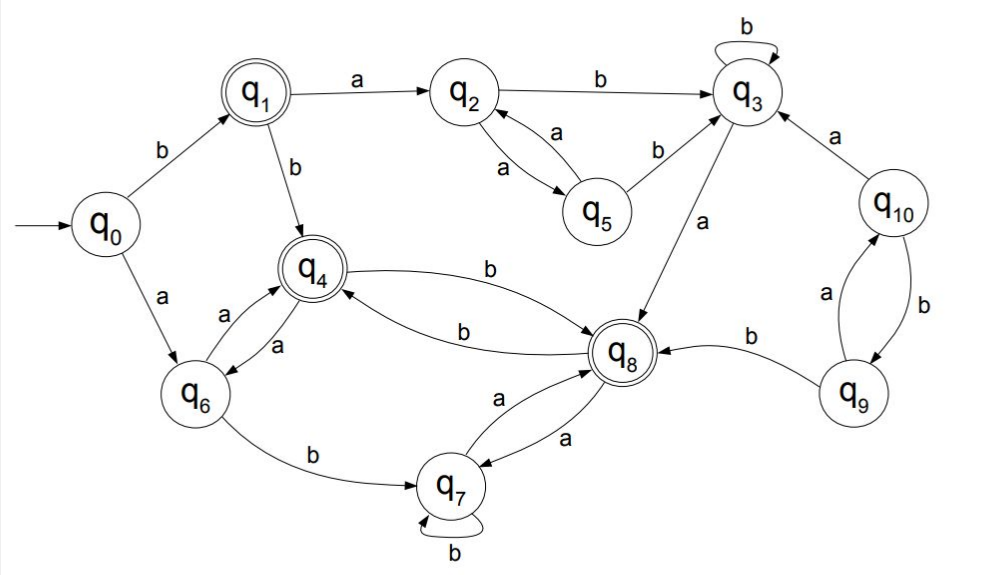
Par stanja	Prelazi	Odluka
(q_0, q_1)	$\delta(q_0,a)=q_4,\ \delta(q_1,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1,\ \delta(q_1,b)=q_2$	
(q_0, q_2)	$\delta(q_0,a)=q_4,\ \delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_0,b)=q_1,\ \delta(q_2,b)=q_2$	
(q_0, q_3)	$\delta(q_0,a)=q_4,\ \delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_0,b)=q_1,\ \delta(q_3,b)=q_3$	
(q_0, q_4)	$\delta(q_0,a)=q_4,\ \delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_0,b)=q_1,\ \delta(q_4,b)=q_5$	
(q_1, q_2)	$\delta(q_1,a)=q_3,\ \delta(q_2,a)=q_3$ $\delta(q_1,b)=q_2,\ \delta(q_2,b)=q_2$	
(q_1, q_3)	$\delta(q_1,a)=q_3,\ \delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_1,b)=q_2,\ \delta(q_3,b)=q_3$	
(q_1, q_4)	$\delta(q_1,a)=q_3,\ \delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_1,b)=q_2,\ \delta(q_4,b)=q_5$	
(q_2, q_3)	$\delta(q_2,a)=q_3,\ \delta(q_3,a)=q_2$ $\delta(q_2,b)=q_2,\ \delta(q_3,b)=q_3$	
(q_2, q_4)	$\delta(q_2,a)=q_3,\ \delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_2,b)=q_2,\ \delta(q_4,b)=q_5$	
(q_3, q_4)	$\delta(q_3,a)=q_2,\ \delta(q_4,a)=q_0$ $\delta(q_3,b)=q_3,\ \delta(q_4,b)=q_5$	

$\{(q_1, q_2), (q_1, q_3), (q_2, q_3)\}$
grupisaće se u jedno stanje
(pripadaju istoj klasi ekvivalencije)
Zašto?

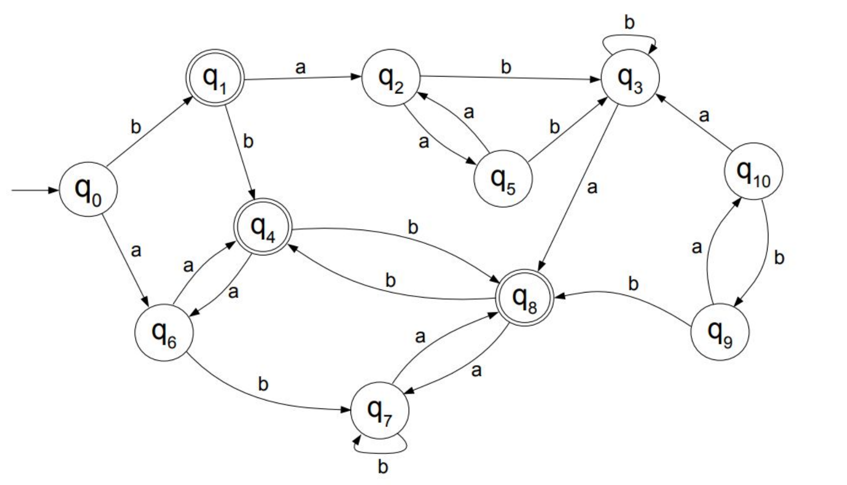
q_0, q_4, q_5
nisu ekvivalentna
(pripadaju različitim klasama ekvivalencije)

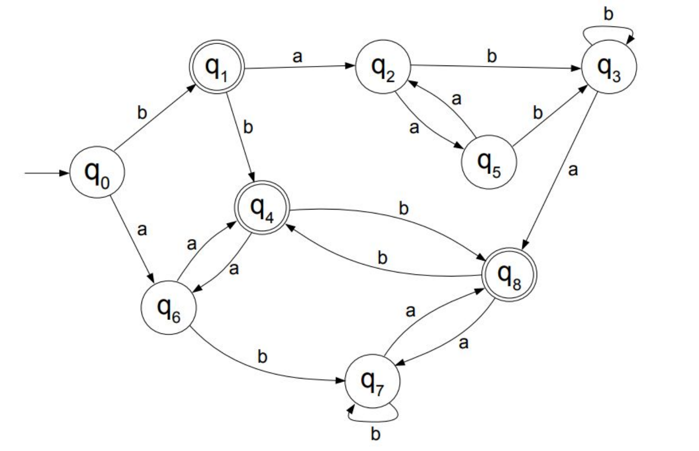

a
b
b
a
a
q0
q1
q2
q3
b
a
a
a
a
b
b
q4
q5
b
b

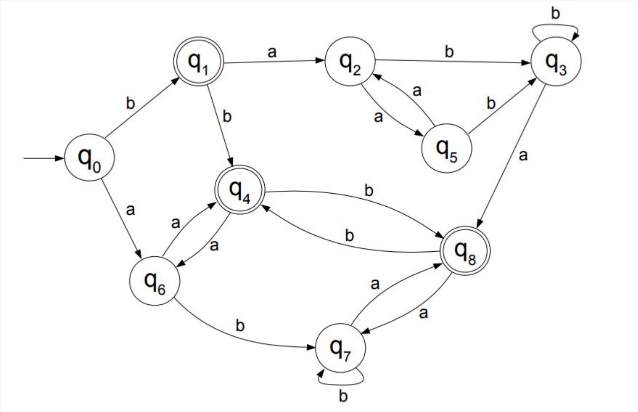

q0
b
q123
a,b
a
a
a,b
q4
b
q5



Izbaciti nedostižna stanja
Sažeti ekvivalentna stanja

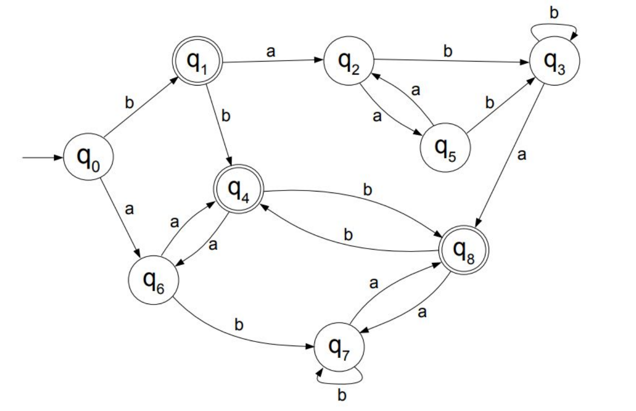

b
q1
a
q2
b
q3
a
a
b
a
q10
q0
b
a
b
q5
a
a
b
q4
b
a
a
a
b
b
q8
q9
q6
a
b
a
q7
b

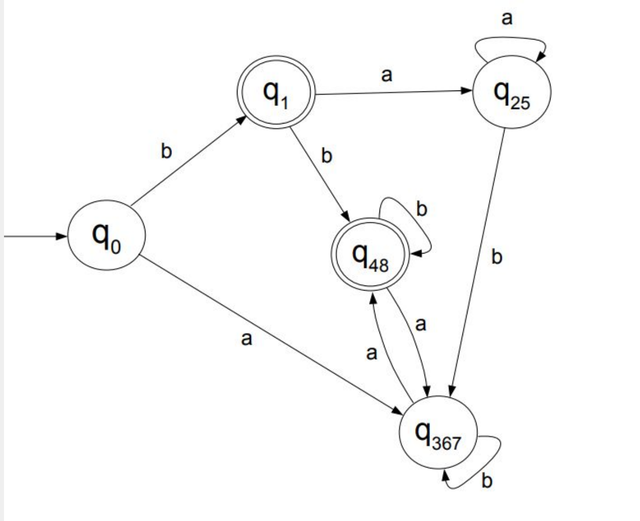

b
q1
a
q2
b
q3
b
a
a
b
b
q0
q5
a
a
b
q4
a
a
b
q8
q6
a
b
a
q7
b



q_1	1							
q_2	2	1						
q_3	2	1	2					
q_4	1	3	1	1				
q_5	2	1		2	1			
q_6	2	1	2		1	2		
q_7	2	1	2		1	2		
q_8	1	3	1	1		1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

- neoznačeni parovi su (q_2,q_5), (q_3,q_6), (q_3,q_7), (q_4,q_8), (q_6,q_7),
- ekvivalentne klase su $\{q_0\}$, $\{q_1\}$, $\{q_2,q_5\}$, $\{q_3,q_6,q_7\}$, $\{q_4,q_8\}$





q_1	1							
q_2	2	1						
q_3	2	1	2					
q_4	1	3	1	1				
q_5	2	1		2	1			
q_6	2	1	2		1	2		
q_7	2	1	2		1	2		
q_8	1	3	1	1		1	1	1
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7

- neoznačeni parovi su (q_2,q_5), (q_3,q_6), (q_3,q_7), (q_4,q_8), (q_6,q_7),
- ekvivalentne klase su $\{q_0\}$, $\{q_1\}$, $\{q_2,q_5\}$, $\{q_3,q_6,q_7\}$, $\{q_4,q_8\}$