Formalne metode

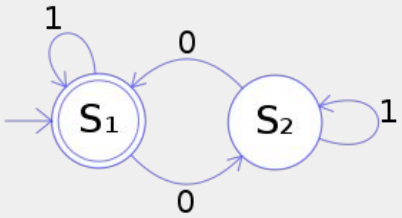
u softverskom inženjerstvu

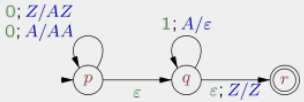
02 Deterministički automati

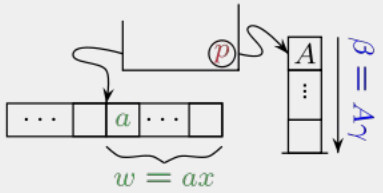
ETFBL 24-25

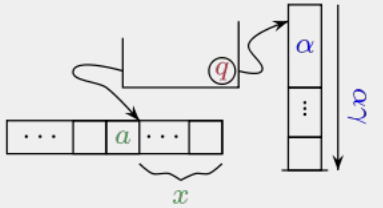
Dunja Vrbaški

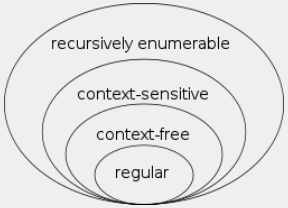
TEORIJA AUTOMATA I FORMALNIH JEZIKA



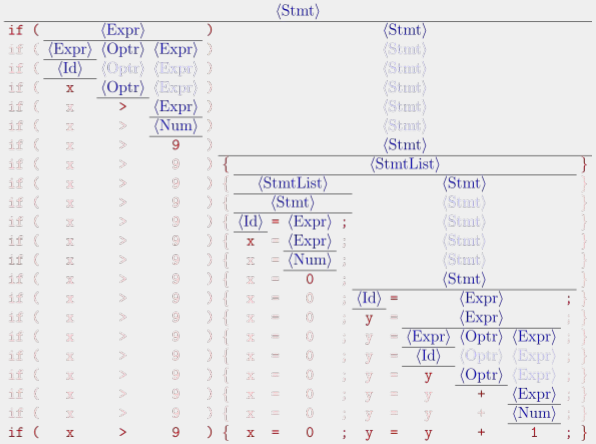








⟨Stmt⟩ → ⟨Id⟩ = ⟨Expr⟩ ;
⟨Stmt⟩ → { ⟨StmtList⟩ }
⟨Stmt⟩ → if (⟨Expr⟩) ⟨Stmt⟩
⟨StmtList⟩ → ⟨Stmt⟩
⟨StmtList⟩ → ⟨StmtList⟩ ⟨Stmt⟩
⟨Expr⟩ → ⟨Id⟩
⟨Expr⟩ → ⟨Num⟩
⟨Expr⟩ → ⟨Expr⟩ ⟨Optr⟩ ⟨Expr⟩
⟨Id⟩ → x
⟨Id⟩ → y
⟨Num⟩ → 0
⟨Num⟩ → 1
⟨Num⟩ → 9
⟨Optr⟩ → >
⟨Optr⟩ → +



OSNOVNI POJMOVI

Alfabet (azbuka) - konačan, neprazan skup simbola

$\Sigma = \{0, 1\}$
$\Sigma = \{a, b, c\}$
$\Sigma = \{a, b, c, \ldots z\}$

$\Sigma = \{ aa, ab, ac \}$?

izbegavamo pojam "karakter"

Reč (string) - sekvenca elemenata iz alfabeta konačne dužine

$\Sigma = \{0, 1\} - 0, 11, 010, 0000000,...$
$\Sigma = \{a, b, c\} - aaaa, abc, cba,...$
$\Sigma = \{a, b, c, ... z\} - formalne, metode, banja, luka, novi, sad,...$
$\Sigma = \{ aa, ab, ac \} - aaaaaa, abaaab, ac, acac,...$

Dužina reči

$|11| = 2$
$|abc| = 3$
$|metode| = 6$
$|acac| = 2$

Prazna reč - reč koja ne sadrži nijedan simbol

ε
λ

$|\varepsilon| = 0$

Konkatenacija - spajanje dve reči
(nad alfabetom)

$$x\ i\ y \rightarrow w = xy$$

x je prefiks u novoj reči w
y je sufiks u novoj reči w

Stepen alfabeta - n-ti stepen alfabeta je skup reči dužine n

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Sigma^1 = \{0, 1\}$$
$$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$
$$\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$
...

- u čemu je razlika između alfabeta i prvog stepena alfabeta?
- šta je nulti stepen?

$\Sigma = \{0, 1\}$ simboli

$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$ nije prazan skup

$\Sigma^1 = \{0, 1\}$ reči

$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$

$\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

...

Klinijeva zvezda - skup svih reči nad alfabetom uključujući i praznu
(nad alfabetom)

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \ldots = \bigcup_{i \geqslant 0} \Sigma^i$$

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \ldots = \bigcup_{i \geqslant 0} \Sigma^i$$

$$\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \ldots = \bigcup_{i \geqslant 1} \Sigma^i = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} = \Sigma^*\Sigma$$

$\Sigma = \{0, 1\}$
$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots., 1100101, \ldots. \}$
$\Sigma^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots., 1100101, \ldots. \}$

Jezik - bilo koji podskup skupa Σ*

$$\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$$

$$\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$$

$$\mathcal{L}_1 = \emptyset$$
$$\mathcal{L}_2 = \{\varepsilon\}$$
$$\mathcal{L}_3 = \Sigma^*$$

$$\mathcal{L}_4 = \{0\}$$
$$\mathcal{L}_5 = \{\varepsilon, 101, 111111\}$$
$$\mathcal{L}_6 = \{1, 11, 111, 11111, \ldots\}$$
$$\mathcal{L}_7 = \{01, 0001, 0101, 01111001, \ldots\}$$
...

Konkatenacija - spajanje dva jezika gde novi jezik sadrži sve reči nastale konkatenacijom reči iz pojedinačnih jezika

$$L_1L_2 = L_1 \cdot L_2 = \{w = xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

$\Sigma = \{0, 1\}$
$L_1 = \{00, 11\}$
$L_2 = \{\varepsilon, 1\}$

$L_1L_2 = \{00, 11, 001, 111\}$

$L_1 = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \ldots\}$
$L_2 = \{\varepsilon, 1, 11, 111, \ldots\}$

$L_1 \cdot L_2 = ?$

- alfabet?
- preciznost definicije jezika?

Stepenovanje

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0 \\ LL^{n-1}, & n \geqslant 1 \end{cases}$$

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0 \\ LL^{n-1}, & n \geqslant 1 \end{cases}$$

$\Sigma = \{0, 1\}$
$L = \{00, 11\}$

$L^0 = \{\varepsilon\}$
$L^1 = \{00, 11\}$
$L^2 = \{0000, 0011, 1100, 1111\}$
$L^3 = ?$

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i \geqslant 0} L^i$$

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i \geqslant 0} L^i$$

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i \geqslant 1} L^i$$

Tvrđenje

$$L^+ = LL^*$$

Kako bismo dokazali?

$$L^+ = LL^*$$

Treba pokazati jednakost skupova.
Kad su skupovi jednaki?

$$L^+ \subseteq LL^*$$
$$LL^* \subseteq L^+$$

Ako neki x pripada skupu sa leve strane pokazati da onda pripada i skupu sa desne

$$L^+ \subseteq LL^*$$

$$x \in L^+$$

$$\rightarrow$$

$$x \in \bigcup_{i \geqslant 1} L^i$$

$$\rightarrow$$

$$\exists i,\ i \geqslant 1,\ x \in L^i = LL^{i-1}$$

$$\rightarrow$$

$$x \in \bigcup_{i \geqslant 1} L^i = \bigcup_{i \geqslant 1} LL^{i-1} = L \bigcup_{i \geqslant 1} L^{i-1} = L \bigcup_{i \geqslant 0} L^i = LL^*$$

$$LL^* \subseteq L^+$$

$$x \in LL^*$$

$$\rightarrow$$

$$x \in L \bigcup_{i \geqslant 0} L^i$$

$$\rightarrow$$

$$\exists i,\ i \geqslant 0,\ x \in LL^i$$

$$\rightarrow$$

$$x \in L \bigcup_{i \geqslant 0} L^i = \bigcup_{i \geqslant 0} LL^i = \bigcup_{i \geqslant 0} L^{i+1} = \bigcup_{i \geqslant 1} L^i = L^+$$

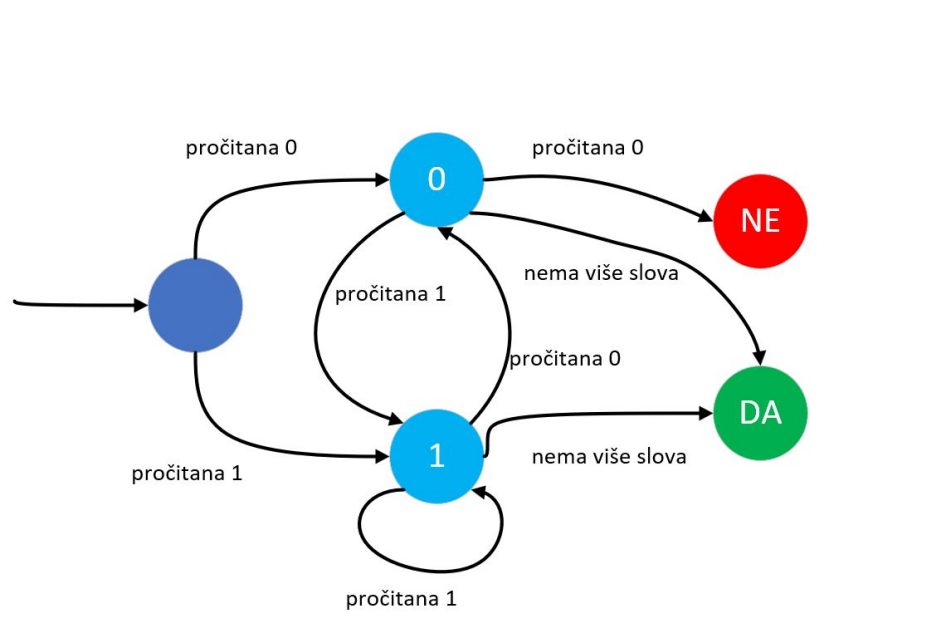
- Posmatramo, izučavamo jezike
- Da li postoje neka pravila, zakonitosti?
- Da li postoje neke kategorije?
- Koja je veza između jezika i automata?

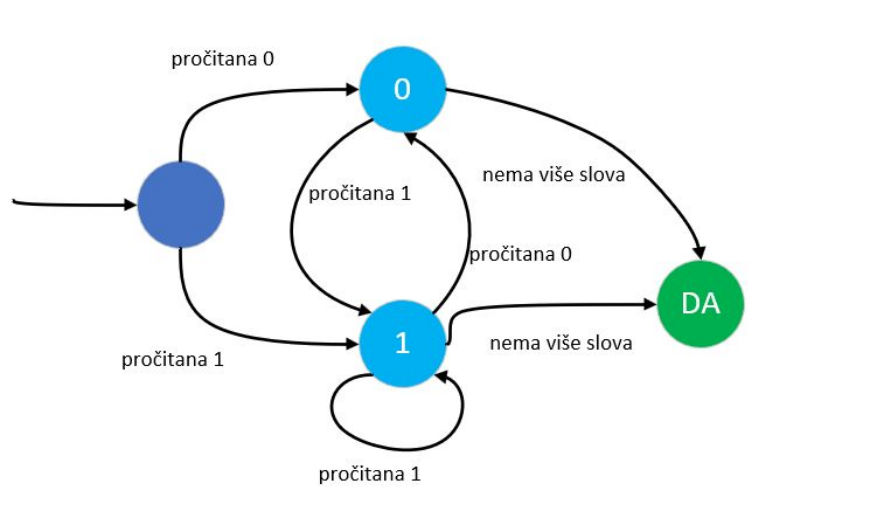
- Da li reč pripada jeziku?

Primer sa prvog predavanja

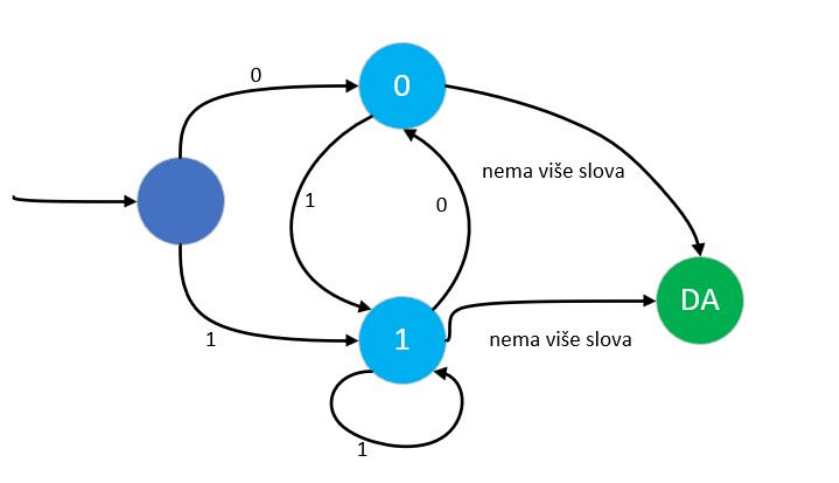
```
1110101101
10110110101
1101110111011101


00000
101101101001
```

Sekvenca nula i jedinica proizvoljne dužine pri čemu ne postoji podsekvenca od dve nule jedna za drugom.


pročitana 0
0
pročitana 0
NE
nema više slova
pročitana 1
pročitana 0
DA
1
nema više slova
pročitana 1
pročitana 1



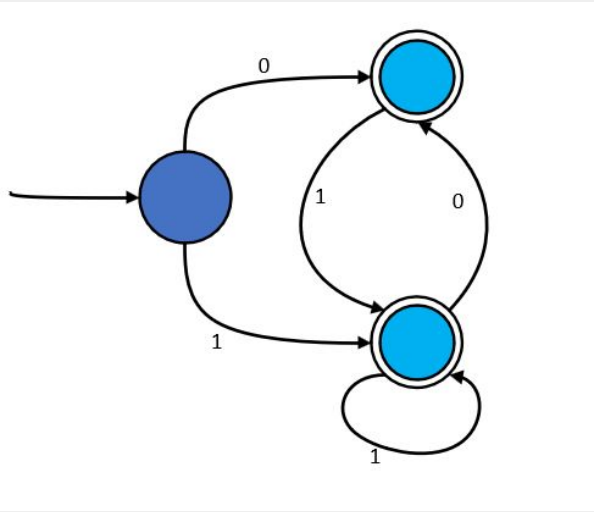
Ako stigne u ciljno stanje - reč se prihvata
Ako ne stigne u ciljno stanje - reč se ne prihvata



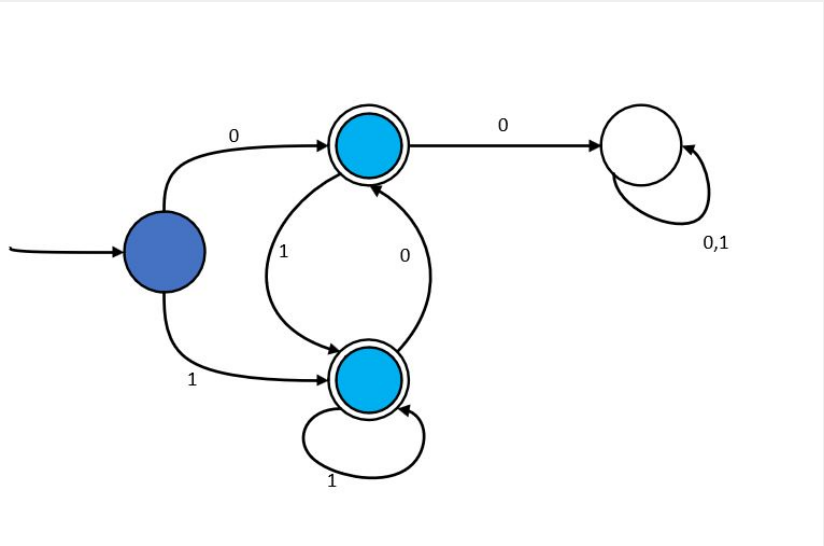
Čita karakter po karakter
Menja stanja

Ako stigne u ciljno stanje - reč se prihvata
Ako ne stigne u ciljno stanje - reč se ne prihvata

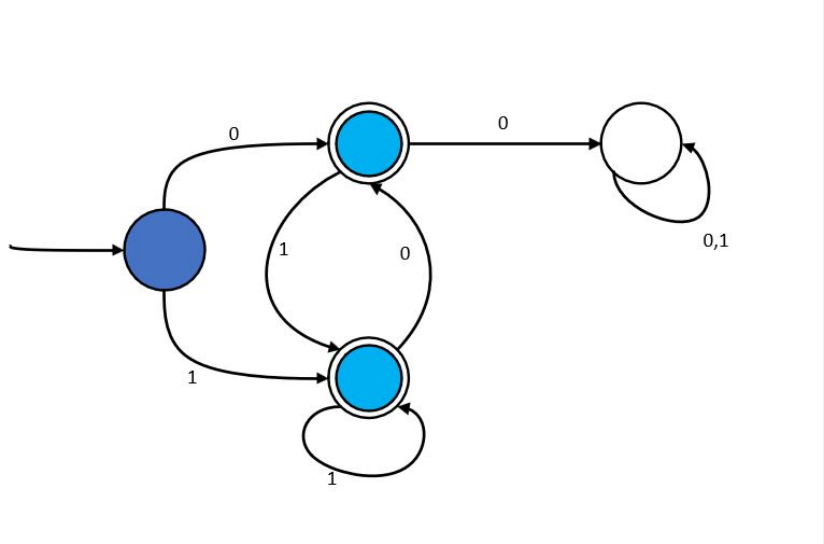
“nema više slova”?

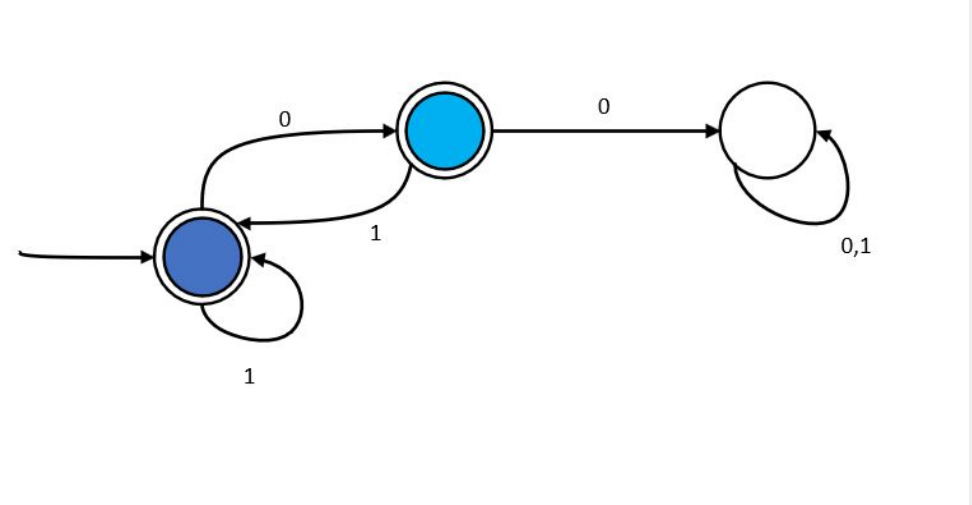


dupli krug - oznaka za završno stanje



zamka (trap)





Konačna predstava beskonačnog skupa

KONAČNI AUTOMAT

$A = (S, \Sigma, \sigma, s_0, F)$

- S - skup stanja
- Σ - alfabet
- σ - funkcija prelaza, σ: S x Σ → S
- s_0 - inicijalno stanje
- F - skup ciljnih stanja

Funkcija prelaza definiše novo stanje na osnovu ulaznog simbola i prethodnog stanja

$\sigma(s_0, a_0) = s_1$

$\sigma(s_1, a_1) = s_2$

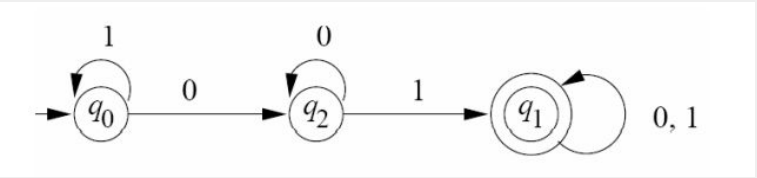
$\sigma(s_2, a_2) = s_3$

...

$\sigma(s_n, a_n) = s_{n+1}$

s_{n+1} pripada F?

Jezik konačnog automata je skup svih reči koje automat prihvata.



Koji jezik prepoznaje ovaj automat?