

## Први поправни колоквијум из Теорије бројева

20. јун 2023. године

1. Доказати да је, за сваки непаран број  $n$ , број  $n^3 + 3n^2 - n - 3$  дељив са 48.
2. (а) Колико заједничких делилаца имају бројеви 11! и 6750?  
(б) Израчунати  $\tau(\sigma(2256) - \varphi(485))$ .
3. Ако је  $p$  прост број, онда је  $p^4 + p^2 + 1$  сложен број. Доказати.
4. Ако је  $p > 20$  прост број, одредити остатак при дељењу са  $p$  броја

$$17^p + \sum_{k=1}^{15} k^{3(p-1)}.$$

5. Одредити последње две цифре броје  $2007^{2007^{2007}}$ .

## Други поправни колоквијум из Теорије бројева

20. јун 2023. године

1. **(5 поена)** Дечак има 12 оловака. Зелених има исто колико и жутих, а црвених има два пута више него плавих. Колико оловака сваке боје има дечак?
2. (а) **(3 поена)** Одредити све парове целих бројева  $x$  и  $y$  тако да је њихов производ 13 пута већи од њиховог збира.  
(б) **(3 поена)** Једначину  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$  решити у скупу природних бројева.
3. **(3 поена)** Постоје ли природни бројеви  $x$  и  $y$  такви да је

$$9(x^2 + y^2 + 1) + 2(3xy + 2) = 2005?$$

4. **(4 поена)** Одредити неконгруентна решења линеарне конгруенције

$$10x \equiv -2 \pmod{58}.$$

5. **(4 поена)** Решити систем конгруенција:

$$4x \equiv 1 \pmod{7}$$

$$x \equiv 15 \cdot 5^{-1} \pmod{4}$$

$$13x \equiv 9 \pmod{15}.$$