MATEMATIKA IV

Odgovori na ispitna pitanja (2022/23)

Autor: Dejana Smiljanić

Odgovori su rađeni na osnovu materijala sa predavanja, knjige prof. dr Zorana Mitrovića „Matematika 4, I dio (Vjerovatnoća)“, materijala dostupnih na Učionici i samostalno. Za eventualne greške obavijestite me i biće ispravljene.

Napomena:

U nekim odgovorima je relativno široko opisano šta se radi, ali samo da bi bilo jasnije šta se radi i kako. Od ukupnog broja strana određeni dio pripada Sadržaju, samom tekstu pitanja i sl, tako da je manje same teorije nego što se čini na prvi pogled.

Dodatak na kraju je dodan da bi se dva odgovora kompletirala, ali nije nužno da se izvode, pa su zato odvojeni.

Sadržaj:

1.

(a) Definisati prostor elementarnih događaja i slučajan događaj. Navesti barem dva primjera prostora elementarnih događaja i slučajnih događaja.

(b) Definisati $\sigma-$polje događaja. Navesti dva primjera $\sigma-$polja događaja.

(c) Neka je F $\sigma-$polje događaja. Dokazati:

(i) $\emptyset \in F$

(ii) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B, A \setminus B \in F$

(iii) $A_i \in F, i \in N \Rightarrow \bigcap_{i \in N} A_i \in F.$

(d) Aksiome teorije vjerovatnoće.

(e) Formulisati i dokazati osnovne osobine vjerovatnoće.

(a) Definisati klasičnu i geometrijsku vjerovatnoću.

(b)Jedno društvo od n osoba izmiješalo je svoje šešire i svako uzima nasumice po jedan šešir. Naći vjerovatnoću da nijedna osoba neće uzeti svoj šešir. Zatim naći graničnu vrijednost ove vjerovatnoće kada $n \to +\infty$.

(c) Formulisati i riješiti "problem susreta".

3.

(a) Definisati pojam uslovne vjerovatnoće i nezavisnost događaja u parovima i cjelini.

(b) Pokazati primjerom da nezavisnost u parovima ne povlači nezavisnost u cjelini.

(c) Ako su događaji A i B nezavisni, pokazati da su takvi i A i B^C , A^C i B i A^C i B^C .

(d) Ako su $A_1, \ldots, A_n$ nezavisni (u cjelini) pokazati da vrijedi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-p(A_i)\right)$$

(e) Ako je $\mathcal{F}$ $\sigma-$polje događaja, P vjerovatnoća i $P(H) > 0$ dokazati da je funkcija $P(\cdot|H) : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ vjerovatnoća.

4.

(a) Definisati potpun sistem događaja. Formulisati i dokazati formulu potpune vjerovatnoće.

(b) Formulisati i dokazati Bayesovu formulu.

(c) Pri proizvodnji istog proizvoda, 3 mašine tipa A, 5 tipa B i 2 tipa C proizvode redom 5%, 3%, 1% neispravnih proizvoda. Slučajno se bira jedan proizvod.
(i) Kolika je vjerovatnoća da je neispravan ?
(ii) Ako je izabrani proizvod neispravan, kolika je vjerovatnoća da je proizveden na mašini tipa B?

5.

(a) Definisati Bernulijevu šemu i relativnu učestalost. Odrediti najvjerovatniji broj pojavljivanja događaja u Bernulijevoj šemi.

(b) Formulisati i dokazati teoremu o Puasonovoj aproksimaciji. Poznato je da u određenoj knjizi od 500 stranica postoji 500 štamparskih grešaka slučajno raspodijeljenih. Kolika je vjerovatnoća da na slučajno odabranoj stranici knjige nema manje od tri greške ?

(c) Formulisati lokalnu i integralnu Mauvr-Laplasovu teoremu. Vjerovatnoća proizvodnje neispravnog proizvoda je 0.002. Naći vjerovatnoću da u seriji od 2500 proizvoda broj neispravnih bude između 36 i 57.

6.

(a) Definisati pojam slučajne promjenljive i navesti primjer diskretne i primjer neprekidne slučajne promjenljive.

(b) Definisati funkciju raspodjele slučajne promjenljive, navesti i dokazati njene osnovne osobine.

(c) Navesti osnovne raspodjele.

7.

(a) Definisati višedimenzionalnu slučajnu promjenljivu.

(b) Zakon raspodjele vjerovatnoća slučajnog vektora i marginalni zakoni raspodjela.

(c) Definisati funkciju raspodjele slučajnog vektora i navesti njene osnovne osobine.

(d) Uslovne raspodjele diskretnih slučajnih promjenljivih.

(e) Funkcije (transformacije) slučajnih promjenljivih, obrazložiti diskretan i neprekidan slučaj.

(f) X i Y su nezavisne slučajne promjenljive sa Poasonovom raspodjelom $P(\lambda)$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $X|X + Y = m$.

8.

(a) Definisati matematičko očekivanje slučajne promjenljive. (Diskretna i neprekidna slučajna promjenljiva). Navesti i dokazati osnovne osobine matematičkog očekivanja.

(b) Pokazati primjerom da ne postoji matematičko očekivanje za svaku slučajnu promjenljivu.

(c) Izračunati matematička očekivanja za binomnu i ravnomjernu raspodjelu.

9.

(a) Definisati varijansu, navesti osnovne osobine varijanse.

(b) Izračunati varijanse za normalnu i Puasonovu raspodjelu.

10.

(a) Navesti i dokazati nejednakost Markova i nejednakost Čebiševa.

(b) Formulisati i dokazati Bernulijev zakon velikih brojeva.

(c) Formulisati centralnu graničnu teoremu.

11.

(a) Osnovni pojmovi statistike. (Populacija, uzorak, obilježje statistika, najčešće statistike.)

(b) Ocjene parametara. Metod maksimalne vjerodstojnosti. (Primjeri za geometrijsku i normalnu raspodjelu.)

(c) Linearna regresija. Sistem normalnih jednačina.

(d) Mjerenjem su dobijene sljedeće vrijednosti

x_k	1	2	3	4
y_k	3	5	7	9

Odrediti koeficijente a i b tako da prava y = ax + b najbolje odgovara mjerenjima u smislu metode najmanjih kvadrata. Prognozirati koja će vrijednost odgovarati za x = 5.

12.

(a) Interpolacija funkcije polinomima. Pokazati da za $n+1$ čvor $(x_k, f_k), k = 0, 1, \dots, n$ postoji jedinstven polinom $P_n(x)$ stepena n takav da je $P_n(x_k) = f_k, k = 0, 1, \dots, n$.

(b) Lagranžov interpolacioni polinom.

13.

(a) Definisati grešku interpolacije.

(b) Ako je f n+1 puta diferencijabilna funkcija dati procjenu za $|R_n(x)|$. Objasniti šta je M_{n+1} i $\Pi_{n+1}(x)$.

14.

(a) Opšte trapezno pravilo.

(b) Ocjena greške kod opšteg trapeznog pravila.

15.

(a) Opšte Simpsonovo pravilo.

(b) Ocjena greške kod opšteg Simpsonovog pravila.

16.

(a) Njutnova metoda tangente.

(b) Dati procjenu za $|x_n - x^*|$, pri čemu je niz $\{x_n\}$ dobijen Njutnovom metodom tangente, a $x^* = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

17.

(a) Metoda sječice.

(b) Procjena greške kod metode sječice.

Dodatak

1.

(a) *Definisati prostor elementarnih događaja i slučajan događaj. Navesti barem dva primjera prostora elementarnih događaja i slučajnih događaja.*

Odgovor:

Skup Ω svih mogućih ishoda nekog opita (eksperimenta) naziva se prostor elementarnih događaja.

Slučajan događaj je bilo koji podskup skupa Ω. Navodimo primjere bacanja kocke za igru, te bacanje novčića.

Primjer 1. Baca se kocka za igru, pri čemu se posmatra broj na gornjoj strani kocke. Označimo sa A – događaj da je uočeni broj paran. Prostor elementarnih događaja u ovom slučaju biće $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, a prostor slučajnog događaja A, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, pri čemu važi da je ω_k – pao je paran broj.

Primjer 2. Novčić se baca četiri puta i registruje koliko je ukupno puta palo pismo. Neka je A događaj - broj pisama jednak je broju grbova. Tada je prostor elementarnih događaja Ω = {GGGG, GGGP, . . . , PPPP}, sa ukupno 16 elemenata. Prostor događaja A biće A = {GGPP, GPGP, GPPG, PGGP, PGPG, PPGG}, sa ukupno 6 elemenata. Podrazumijevano je P – pismo, a G – grb.

Napomena: moguće je dodati primjer sa beskonačnim skupom elemenata unutar prostora elementarnih događaja (npr. bacanje novčića do pojave pisma).

(b) *Definisati σ−polje događaja. Navesti dva primjera σ−polja događaja.*

Odgovor:

Neka je Ω prostor elementarnih događaja i $\mathcal{P}(\Omega)$ familija svih podskupova od Ω. Skup $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ nazivamo σ−polje događaja ako vrijedi:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $(\forall i \in \mathbb{N})\ A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Primjer 1. Neka je Ω proizvoljan skup i $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$. Tada je $\mathcal{F}$ σ−polje događaja.

Primjer 2. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, familija $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$ je σ−polje događaja.

(c) *Neka je $\mathcal{F}$ σ−polje događaja. Dokazati:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{F}$
(iii) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Odgovor:

Da bismo dokazali (i), koristimo osobinu σ−polja događaja koja mora da vrijedi: $\Omega \in \mathcal{F}$, a iz nje slijedi da $\Omega^c \in \mathcal{F}$ (zbog osobine da ako $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$). Pošto je Ω^c zapravo prazan skup, odatle slijedi da $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Za dokaz pod (ii) koristimo ponovo osobine. Znamo da ako A i B pripadaju $\mathcal{F}$, tada i njihovi komplementi takođe pripadaju $\mathcal{F}$. $A \cap B$ možemo zapisati kao $(A^c \cup B^c)^c$, te pošto mora da važi i treća osobina σ–polja događaja ($(\forall i \in \mathbb{N})\ A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$) izraz unutar zagrade takođe pripada $\mathcal{F}$. Najzad, ako taj izraz pripada $\mathcal{F}$, tada i njegov komplement pripada $\mathcal{F}$, čime je tvrdnja dokazana.

Slično se radi i za A\B. Zapisaćemo A\B kao $A \cap B^c$. Dalji tok dokaza je isti, sa razlikom da umjesto B koristimo B^c.

Posljednja (iii) tvrdnja može se dokazati na sličan način kao za prethodna dva skupa, A i B, s tim da su u pitanju događaji i-te brojnosti. [1] U ovom slučaju koristi se činjenica da je $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i{}^c$.

(d) *Aksiome teorije vjerovatnoće.*

Odgovor:

Definišimo prvo funkciju vjerovatnoće. Neka je Ω prostor elementarnih događaja $\mathcal{F}$ i σ–polje događaja. Funkcija $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je vjerovatnoća ako vrijedi:

P_1: $P(A) \geq 0, (\forall A \in \mathcal{F})$,

P_2: $P(\Omega) = 1$,

P_3: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, za sve $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ takve da je $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Ove osobine se redom zovu nenegativnost, normiranost i σ–aditivnost. Broj P(A) predstavlja vjerovatnoću događaja A.

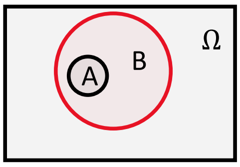
Napominjemo da osobine σ–polja događaja možemo uvrstiti u aksiome, tako da ih ukupno ima šest.

(e) *Formulisati i dokazati osnovne osobine vjerovatnoće.*

Odgovor:

Prva osobina koju navodimo i dokazujemo jeste aditivnost - $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Dokaz proističe iz osobine P_3. Pošto je poznato da je $A \cup B$ ekvivalentno A+B, te da je riječ o disjunktnim skupovima, direktno se izvodi navedena osobina.

Osobina monotonosti definiše se kao $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$. Dokaz se sastoji iz sljedećeg. Posmatrajmo šematski prikaz ove situacije.



Vidi se da je $B = A \cup (B \setminus A)$ i da je $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Dalje važi da je $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ (iz P_3). Kako je $P(B \setminus A)$ sigurno veće ili jednako od nula, važi i da je $P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

Ograničenost funkcije vjerovatnoće podrazumijeva da važi $0 \leq P(A) \leq 1$. Iz definicije funkcije vjerovatnoće važi da je $P(A) \geq 0$. Kako je $A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

[1] Pogledati De Morganove teoreme, npr. https://www.electronics-tutorials.ws/boolean/demorgan.html zarad razumijevanja, ne konkretne definicije. Za konkretnu definiciju pogledati u knjizi prof. Mitrovića.

Osobina vjerovatnoće suprotnog događaja definisana je na sljedeći način. Ako je A događaj čiju vjerovatnoću posmatramo, onda je vjerovatnoća događaja suprotnog događaju A jednaka $P(A^c) = 1 - P(A)$. Dokazaćemo osobinu znajući da je $A \cup A^c = \Omega$ i da je $A \cap A^c = \emptyset$. Ako saberemo vjerovatnoće $P(A \cup A^c) + P(A \cap A^c)$, dobijamo izraz $P(A) + P(A^c) = 1$.

Naredna koju navodimo jeste princip uključenosti-isključenosti, formulisan na sljedeći način $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1} p(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} p(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i \le j < k \le n} (A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$.

Posljednja osobina tiče se neprekidnosti vjerovatnoće, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.

2.

(a) *Definisati klasičnu i geometrijsku vjerovatnoću.*

Odgovor:

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, sa pridruženim vjerovatnoćama $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Posmatrajmo događaj $A \subseteq \Omega$, sa realizacijama $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{ik}\}$ i pridruženim vjerovatnoćama $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$. Ako za svako i= 1, …, n važi $p_i = \frac{1}{n}$, riječ je o Laplasovoj ili klasičnoj definiciji vjerovatnoće. U tom slučaju za vjerovatnoću događaja p(A) važi $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Neka je Ω skup u $\mathbb{R}^2$ čija je površina μ(Ω) pozitivna i konačna. Neka je $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega : A\ ima\ površinu\}$. Definišimo $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tako da je $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Na ovaj način definisanu vjerovatnoću nazivamo geometrijskom.

(b) *Jedno društvo od n osoba izmiješalo je svoje šešire i svako uzima nasumice po jedan šešir. Naći vjerovatnoću da nijedna osoba neće uzeti svoj šešir. Zatim naći graničnu vrijednost ove vjerovatnoće kada $n \to +\infty$.*

Odgovor:

Da bismo našli traženu vjerovatnoću, prvo ćemo naći vjerovatnoću događaja A – bar jedna osoba je izabrala svoj šešir, a potom njegovu vjerovatnoću oduzeti od 1 i na taj način dobiti traženu vjerovatnoću.

Označimo sa A_i - i-ta osoba je uzela svoj šešir, pri čemu $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Sada možemo događaj A zapisati kao $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Za računanje p(A) koristićemo formulu uključenosti-isključenosti. Računamo pojedinačne vjerovatnoće:

$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \dots P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$. Sada je

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1} \frac{1}{n} - \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

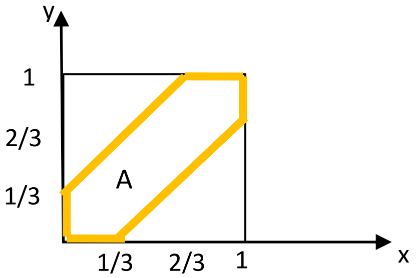
Ako se prisjetimo razvoja eksponencijalne funkcije, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$, onda je $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}$. Naš red je zapravo $1 - e^{-1}$, pa je p($(A^C) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. Konačno je vjerovatnoća događaja da nijedna osoba nije uzela svoj šešir $p(A^C) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$, za $n \to +\infty$.

(c) *Formulisati i riješiti "problem susreta".*

Odgovor:

Formulacija: Prijatelji se dogovore da se nađu između 12 i 13 časova na ugovorenom mjestu i da čekaju jedan drugoga 20 minuta. Kolika je vjerovatnoća da će doći do susreta?

Prvo ćemo usvojiti [0,1] umjesto [12,13], pa je 20 minuta jednako $\frac{1}{3}$. Skup elementarnih događaja je $\Omega = \{(x, y) | x, y \in [0,1]\}$, a događaja A – prijatelji će se sresti je $A = \left\{(x, y) \in \Omega \middle| |x - y| < \frac{1}{3}\right\}$. Ovu vjerovatnoću možemo izračunati pomoću definicije geometrijske vjerovatnoće.



Slika 1. Geometrijska vjerovatnoća

(grafički prikaz)

Površina žutog dijela jednaka je $\frac{5}{9}$. Kako je $p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$,

tako $p(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)} = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9}$.

3.

(a) *Definisati pojam uslovne vjerovatnoće i nezavisnost događaja u parovima i cjelini.*

Odgovor:

Posmatrajmo prostor elementarnih događaja Ω i neka je ostvaren događaj A. Ako se događaj B desi pod uslovom ili pod uticajem događaja A, tada je vjerovatnoća događaja B definisana kao uslovna vjerovatnoća i data je formulom $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, pri čemu P(A)≥0.

Događaji A i B su nezavisni ako vrijedi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Događaji $A_1, A_2, \dots, A_n$ su nezavisni u parovima ako vrijedi $P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), i \neq j$, a nezavisni u cjelini ako vrijedi $P(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdots P(A_{ik})$, za sve izbore $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

(b) *Pokazati primjerom da nezavisnost u parovima ne povlači nezavisnost u cjelini.*

Odgovor:

Posmatrajmo prostor elementarnih događaja $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, te događaje A = {1, 2}, B = {2, 3}, C = {2, 4}. P(A) = P(B) = P(C) = $\frac{1}{2}$, P(AB) = P(BC) = P(AC) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (jer je $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{2\}$). Da bi događaji bili nezavisni u cjelini potrebno je da važi P(ABC) = P(A) ·P(B) ·P(C). Za naš primjer je P(ABC) = $\frac{1}{4}$ (jer je $A \cap B \cap C = \{2\}$), dok je P(A)·P(B) ·P(C) = $\frac{1}{8}$, čime smo pokazali da nezavisnost u parovima ne povlači nezavisnost u cjelini na primjeru.

(c) *Ako su događaji A i B nezavisni, pokazati da su takvi i A i B^C , A^C i B i A^C i B^C .*

Odgovor:

Polazimo od toga da su A i B nezavisni. Pošto ta tvrdnja vrijedi, onda je P($A \cap B$)=P(A)·P(B). Dalje znamo da je $B \subseteq \Omega$, pa možemo B zapisati kao $B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^C) = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$. Sada je P(B) = P$(B \cap A) + P(B \cap A^C) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$. Ako iz ovog izraza izrazimo $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ i raspišemo izraz sa desne strane, $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)\big(1 - P(A)\big)$. Izraz sa desne strane je jednak P(B) P(A^C), pa smo dokazali da važi $P(A^C \cap B) =$ P(B) P(A^C), odnosno nezavisnost ova dva događaja.

Slično radimo i za ostale događaje. Da bismo dokazali da su A i B^Cnezavisni, radimo doslovno isti postupak, samo sada A izražavamo kao B:

$A \subseteq \Omega \ \Rightarrow A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^C) = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$, pa je P(A) = P$(B \cap A) + P(B^C \cap A)$. Iz ovoga je $P(B^C \cap A) = P(A) - P(B)\,P(A) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A)P(B^C)$.

Prvi način: Iz osobina znamo da je $(AUB)^C = A^C \cap B^C$, pa je P($A^C \cap B^C$) = P($(AUB)^C$). Dalje, znamo da je $(AUB)^C = 1 - (AUB)$. Iz formule uključenosti-isključenosti važi da je P(AUB)=P(A) + P(B) - P(A ∩ B). Kada uvrstimo dobijamo:

P($A^C \cap B^C$) $= 1 -$ [P(A) + P(B) − P(A ∩ B)] $= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B) = [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] = [1 - P(A)][(1 - P(B)] = P(A^C)\,P(B^C)$.

Drugi način: Koristimo prethodno dokazane parove nezavisnih događaja. Zapišimo A^Ckao $A^C = A^C B + A^C B^C \Rightarrow P(A^C B^C) = P(A^C) - P(A^C B) = P(A^C) - P(A^C)P(B) = P(A^C)[1 - P(B)] =$
$= P(A^C)P(B^C)$.

(d) *Ako su $A_1, \dots, A_n$ nezavisni (u cjelini) pokazati da vrijedi*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\big(1 - p(A_i)\big)$$

Odgovor:

Za dokaz koristimo teoremu koja tvrdi da ako su $A_1, \dots, A_n$ nezavisni u cjelini (parovima), onda su i $A_1^C, \dots, A_n^C$ nezavisni u cjelini (parovima).

Sada možemo dokazati traženo. Zapisaćemo traženi izraz na malo drugačiji način, a potom iskoristiti osobine i dosadašnje teoreme:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C = 1 - P\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C = 1 - \prod_{i=1}^{n}\big(A_i^C\big) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\big(1 - p(A_i)\big).$$

(e) *Ako je $\mathcal{F}$ σ−polje događaja, P vjerovatnoća i P(H) > 0 dokazati da je funkcija $P(\cdot|H) : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ vjerovatnoća.*

Odgovor:

Dokazaćemo da je definisana funkcija vjerovatnoća ispitujući osobine koje svaka funkcija vjerovatnoće mora da zadovoljava.

Prvo ispitujemo nenegativnost. Prema definiciji, $P(A|H) = \frac{P(A\cap H)}{P(H)}$, što je sigurno ≥ 0.
Dalje nas zanima vrijedi li normiranost. Pošto je $P(\Omega|H) = \frac{P(\Omega\cap H)}{P(H)} = \frac{P(H)}{P(H)} = 1$, funkcija zadovoljava i ovu osobinu.
Posljednje ispitujemo σ- aditivnost ($P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$). Za našu funkciju je $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| H_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\cap H\right)}{P(H)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap H\right)}{P(H)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{P(A_i|H)}{P(H)} = \sum_{i=1}^{+\infty} p(A_i|H)$. Pošto funkcija zadovoljava sve tri osobine, riječ je o funkciji vjerovatnoće.

4.

(a) *Definisati potpun sistem događaja. Formulisati i dokazati formulu potpune vjerovatnoće.*

Odgovor:

Neka su poznati događaji $H_1, H_2, \cdots H_n \subset \Omega$. Ako ovi događaji ispunjavaju uslove $H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$ i $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, nazivamo ih potpunim sistemom događaja (hipotezama).

Neka su $H_1, H_2, \cdots H_n \subset \Omega$ hipoteze i $A \subset \Omega$. Tada je $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$, što nazivamo formulom potpune vjerovatnoće. Dokaz je relativno jednostavan. Znamo da važi $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)$. Kada računamo vjerovatnoću ovako zapisanog događaja A, slijedi $P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$.

(b) *Formulisati i dokazati Bayesovu formulu.*

Odgovor:

Neka su $H_1, H_2, \cdots H_n \subset \Omega$ hipoteze i $A \subset \Omega$ takav da je $P(A) \neq 0$. Tada je

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)},$$ pri čemu su $P(H_i)$ apriorne, a $P(H_i|A)$ aposteiorne vjerovatnoće.

Dokaz: Iz $P(A|H_j) = \frac{P(A\cap H_j)}{P(H_j)}$ ćemo izraziti $P(A \cap H_j) = P(A|H_j)P(H_j)$. Prema formuli je $P(A|H_j) = \frac{P(H_j\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{P(A)}$.

(c) *Pri proizvodnji istog proizvoda, 3 mašine tipa A, 5 tipa B i 2 tipa C proizvode redom 5%, 3%, 1% neispravnih proizvoda. Slučajno se bira jedan proizvod.*
(i) Kolika je vjerovatnoća da je neispravan ?
(ii) Ako je izabrani proizvod neispravan, kolika je vjerovatnoća da je proizveden na mašini tipa B?

Odgovor:

Formirajmo prvo potpuni sistem događaja. Neka su $H_A - proizvod\, je\, proizveden\, na\, mašini\, A$, H_B i H_C analogno. Pojedine vjerovatnoće su $\mathrm{p}(H_A) = \frac{3}{10}$, $\mathrm{p}(H_B) = \frac{5}{10}$ i $\mathrm{p}(H_C) = \frac{2}{10}$.

Za prvi (i) slučaj potrebne su nam i uslovne vjerovatnoće. Neka je D – događaj da je izabrani proizvod neispravan. Redom je $\mathrm{p}(D|H_A) = 0.05, \mathrm{p}(D|H_B) = 0.03, \mathrm{p}(D|H_C) = 0.01$. Sada je P(D) = $\frac{3}{10}\frac{5}{100} + \frac{5}{10}\frac{3}{100} + \frac{2}{10}\frac{1}{100} = \frac{32}{1000} = 0.032$.

U drugom slučaju koristimo Bajesovu formulu. Računamo $\mathrm{p}(H_B|D) = \frac{p(D|H_B)\cdot p(H_B)}{p(D)} = \frac{15}{32}$.

5.

(a) *Definisati Bernulijevu šemu i relativnu učestalost. Odrediti najvjerovatniji broj pojavljivanja događaja u Bernulijevoj šemi.*

Odgovor:

Neka je Ω prostor elementarnih događaja i A ⊆ Ω. Za niz eksperimenata u kojima je vjerovatnoća realizacije događaja ista i nezavisna od ostalih eksperimenata kažemo da čini Bernulijevu šemu. Relativnu učestalost definišemo kao $\frac{S_n}{n}$, pri čemu je n broj ponavljanja, a S_n broj realizacija događaja.

Vjerovatnoća da će se neki događaj realizovati k puta ($k \leq n$) nakon n ponavljanja data je kao

$$p(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Potrebno je da odredimo najvjerovatniji broj pojavljivanja događaja. Dakle, treba da postoji k_0, tako da važi $p(S_n = k_0) = max\big(p(S_n = k)\big)$, $k_0 = 0, 1, 2, \dots, n$. Razmatramo moguće slučajeve. Prvi je ako važi $p(S_n = k_0) \geq p(S_n = k_0 - 1)$, a drugi ako je $p(S_n = k_0) \geq p(S_n = k_0 + 1)$. Sada ćemo uvrstiti vjerovatnoće za sve slučajeve.

$$\binom{n}{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq \binom{n}{k_0 - 1} p^{k_0} q^{n-(k_0-1)}$$

$$\binom{n}{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq \binom{n}{k_0 + 1} p^{k_0} q^{n-(k_0+1)}$$

Nakon sređivanja (samo se razviju binomni koeficijenti po osnovnoj formuli i skrate isti članovi), izrazi izgledaju ovako

$$\frac{1}{k_0} p \geq (1-p) \frac{1}{n - k_0 + 1}$$

$$\frac{1}{n-k_0}(1-p) \leq \frac{1}{k_0+1}p$$

Sada sređujemo izraze, pomnožimo da se riješimo razlomaka itd, da bismo izveli uslove po k_0. Dobija se
$k_0 \leq np + p \ \wedge k_0 \geq np + p - 1$, pa konačno važi da $k_0 \in [np + p - 1, np + p]$. Za slučaj da *np* nije cijeli broj, uzima se donji cijeli broj od $np+p$, a inače jedna od graničnih vrijednosti iz segmenta.

(b) *Formulisati i dokazati teoremu o Puasonovoj aproksimaciji. Poznato je da u određenoj knjizi od 500 stranica postoji 500 štamparskih grešaka slučajno raspodijeljenih. Kolika je vjerovatnoća da na slučajno odabranoj stranici knjige nema manje od tri greške ?*

Odgovor:

Neka je $P(A) = \frac{\lambda}{n}$, pri čemu je $\lambda > 0$ i ne zavisi od n. Tada za svaki $k = 0,1,\dots,n$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \ .$$

Dokaz radimo tako što uvrštavamo pretpostavljenu vjerovatnoću u Bernulijevu šemu.

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

ako zapišemo kao $P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n!}{(n-k)!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\frac{1}{n^k}$. Sada posmatramo izraz

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{n!}{(n-k)!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\frac{1}{n^k}\\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^k(n-k)!}\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{-k}\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^n\\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\boxed{\frac{n!}{n^k(n-k)!}\left(\frac{n}{n-\lambda}\right)^k}}_{1}\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Vjerovatnoća da je na nekoj od stranica štamparska greška je p = $\frac{1}{500}$. Parametar $\lambda = np = \frac{1}{500}500 = 1$. Prema zadatku potrebno je naći P($S_n \geq 3$), što je ekvivalentno izrazu 1 – P($S_n \leq 2$).

Kada se iskoristi Puasonova aproksimacija, dobija se izraz $1 - \sum_{i=0}^{2}\frac{1}{i!}e^{-1} = 1 - 2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} \approx$
≈ 0.080301.

(c) *Formulisati lokalnu i integralnu Mauvr-Laplasovu teoremu. Vjerovatnoća proizvodnje neispravnog proizvoda je 0.002. Naći vjerovatnoću da u seriji od 2500 proizvoda broj neispravnih bude između 36 i 57.*[2]

[2] Iz nekog razloga dosta kolega koji su odgovarali na pitanja ovdje dodaju i dokaz, ali nigdje se ne traži u pitanju sam dokaz. U ostalim pitanjima je striktno naglašeno „formulisati i dokazati" i sl (npr. isto pitanje pod b).

Odgovor:

Lokalna Muavr -Laplasova teorema: Neka je $p \in (0, 1)$ vjerovatnoća događaja u svakom od n nezavisnih eksperimenata i neka postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq b, za\ sve\ k, n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, n\ i\ q = 1-p.$$

Tada vrijedi $\lim_{n\to+\infty} \frac{p(S_n=k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} = 1.$

Integralna Muavr-Laplasova teorema: Pri uslovima prethodne teoreme vrijedi

$$P(a \leq S_n \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, n \to +\infty.$$

Iz zadatka je p = 0.002, q = 1 – p = 0.998, n = 2500, pa je np = 5, a = 36 i b = 57. [3] Dalje je

$P\left(\frac{36-50}{\sqrt{49}} \leq S_n{}^* \leq \frac{57-50}{\sqrt{49}}\right) = P\left(\frac{-14}{7} \leq S_n{}^* \leq \frac{57-50}{7}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - 1 + \Phi(2) = 0.8413 - 1 + 0.9772 = 0.8185.$

6.

(a) *Definisati pojam slučajne promjenljive i navesti primjer diskretne i primjer neprekidne slučajne promjenljive.*

Odgovor:

Neka je Ω prostor elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ –polje događaja na Ω. Za funkciju

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$, za sve $x \in \mathbb{R}$, kažemo da je slučajna promjenljiva.

Kao diskretnu slučajnu promjenljivu možemo uzeti primjer dva bacanja novčića i vjerovatnoću da je palo pismo. Tada je $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Za slučajnu promjenljivu neprekidnog tipa uzećemo primjer visine učenika petog razreda u Republici Srpskoj. Takođe, normalna raspodjela može da posluži kao primjer.

(b) *Definisati funkciju raspodjele slučajne promjenljive, navesti i dokazati njene osnovne osobine.*

Odgovor:

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promjenljiva. Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa

[3] U profesorovoj knjizi je 2500·0.002 = 50, a zapravo je rezultat 5, pa se formula integralne Muavr-Laplasove teoreme ne bi mogla iskoristiti. Zbog toga ću prilagoditi i reći da je p = 0.02 ;).

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\},$$

naziva se funkcija raspodjele slučajne promjenljive X. Navodimo i dokazujemo njene osobine.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

Ova osobina slijedi iz prve aksiome teorije vjerovatnoće (pošto je $F(x) = P(X < x)$, sigurno je $F(x)$ iz segmenta $[0, 1]$)

2. F je monotono neopadajuća funkcija.

Dokaz: Neka su data dva događaja, A i B, tako da važi $A \subseteq B$ i $A = \{\omega \in \Omega, x(\omega) < x_1\}$, $B = \{\omega \in \Omega, x(\omega) < x_2\}$. Znamo da samim tim važi i $p(A) \leq p(B)$, odnosno $P(x < x_1) \leq P(x < x_2)$, što dokazuje i $F(x_1) \leq F(x_2)$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Dokaz:

$F(-\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} F(-t) = \lim\limits_{t \to +\infty} P(x < -t)$[4] $= P(\bigcap_{t=1}^{\infty} x \leq -t) = P(\emptyset) = 0.$

$F(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = P(\bigcup_{t=1}^{\infty} x < t) = P(\Omega) = 1.$

4. $\lim\limits_{t \to x-0} F(t) = F(x)$, $\lim\limits_{t \to x+0} F(t) = F(x) + P(X = x)$.

5. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$,

$P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = a)$,

$P(a \leq X \leq b) = F(b) + P(X = b) - F(a)$,

$P(a < X \leq b) = F(b) + P(X = b) - F(a) - P(X = a)$.

Dokaz:

Znamo da ako je $X < b$, onda je sigurno $X \geq b$ disjunktno prethodnom izrazu. Prema tome, važi da je

$(a \leq X < b) \cup (X \geq b) = X \geq a$. U domenu vjerovatnoće onda važi sljedeće:

$P(a \leq X < b) + P(X \geq b) = P(X \geq a) \Rightarrow P(a \leq X < b) + 1 - P(X < b) = 1 - P(X < a)$, a odatle slijedi

$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a)$.

Drugi izraz, $(a < X < b)$ možemo dobiti ako zapišemo $(a \leq X < b) = (X = a) \cup (a < X < b)$. Dalje je

$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) - P(X = a) = F(b) - F(a) - P(X = a)$.

Na sličan način se rade i preostala dva:

---

[4] $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$

P(a ≤ X ≤ b) = P(a ≤ X < b) + P(X = b) = F(b) – F(a) + P(X = b);

P(a < X ≤ b) = P(a < X < b) + P(X = b) = F(b) – F(a) – P(X = a) + P(X = b).

(c) *Navesti osnovne raspodjele.*

Odgovor:

Osnovne raspodjele su :

Binomna raspodjela, F(x) = P(X < x) = $\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{k<n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & 0 < x \leq n. \\ 1, & x > n \end{cases}$

Puasonova raspodjela, P(X = k) = $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, a F(X) = $\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & x > 0 \end{cases}$.

Geometrijska raspodjela, P(X = k) = $p(1-p)^{k-1}$, F(X) = $\begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \sum_{k<x} p(1-p)^{k-1}, & x > 1 \end{cases}$.

Hipergeometrijska raspodjela, P(X = k) = $\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$, k = 0, …, r, F(X) = $\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \sum_{k<x} \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, & 0 < x < r. \\ 1, x \geq r \end{cases}$

Postoje i Bernulijeva, negativna binomna, uniformna, eksponencijalna, normalna, gama, beta itd. raspodjela, a njihove funkcije raspodjela budu zapisane u tablicama.

7.

(a) *Definisati višedimenzionalnu slučajnu promjenljivu.*

Odgovor:

Funkcija $X = [X_1, \dots, X_n]^T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je n – dimenzionalna (višedimenzionalna) slučajna promjenljiva ako je za svako k, k = 1, 2, …, n funkcija X_k slučajna promjenljiva.

(b) *Zakon raspodjele vjerovatnoća slučajnog vektora i marginalni zakoni raspodjela.*

Odgovor:

Zakon raspodjele vjerovatnoća slučajnog vektora Z dat je funkcijom P : Z(Ω) → ℝ, to jest vjerovatnoćama $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i \in I, j \in J$.

Neka je dat vektor Z = $[X, Y]^T$. Zakoni raspodjele za X i Y nazivaju se marginalni zakoni raspodjela, pri čemu je {X =x_i } = $\cup_{j \in J}${X $= x_i$,Y $= y_j$}, pa su $p_i = P(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij}$ i $q_j = P(\text{Y} = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij}$. Dakle, X: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix}$, Y: $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots \end{pmatrix}$.

(c) *Definisati funkciju raspodjele slučajnog vektora i navesti njene osnovne osobine.*

Odgovor:

Funkcija raspodjele slučajnog vektora (X, Y) je funkcija F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data sa

F(x, y) = P(X < x, Y < y).

Osnovne osobine su:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$, za sve x, y $\in \mathbb{R}$.

2. F je neopadajuća po svakoj promjenljivoj,

3. F je neprekidna s lijeve strane po svakoj promjenljivoj,

4. $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$, $\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$.

(d) *Uslovne raspodjele diskretnih slučajnih promjenljivih.*

Odgovor:

Pretpostavimo da su X i Y diskretne slučajne promjenljive. Tada je $p(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}, analogno\ q(y_j|x_i) = P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(\ Y=y_j,\ X=x_i)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$.

(e) *Funkcije (transformacije) slučajnih promjenljivih, obrazložiti diskretan i neprekidan slučaj.*

Odgovor:

Neka je X = $(X_1, \dots, X_n)$ višedimenzionalna slučajna promjenljiva i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data funkcija. Tada je funkcija Y : $\Omega \to \mathbb{R}$ data sa Y = g $\circ$ X slučajna promjenljiva.

Neka je data (diskretna) slučajna promjenljiva X sa zakonom raspodjele X: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix}$ i funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tada je $P(Y = g(x_i)) = \sum_{j \in I_i} P(X = x_j), I_i = \{j : g(x_i) = g(x_j)\}$.

Ako je X neprekidna slučajna promjenljiva sa funkcijom raspodjele vjerovatnoća $F_X(x)$, tada za a funkciju raspodjele vjerovatnoća $F_Y(y)$ slučajne promjenljive Y imamo

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = P(X \in g^{-1}(-\infty, y))$$

Odatle je $F_Y(y) = \int_{g^{-1}(-\infty,y)} f_X(t)dt$, gdje je f_X gustina slučajne promjenljive X.

(f) *X i Y su nezavisne slučajne promjenljive sa Poasonovom raspodjelom P(λ). Naći raspodjelu slučajne promjenljive X|X + Y = m.*

Odgovor:

$P\{X = k|X + Y = m\} = \frac{P\{X=k,X+Y=m\}}{p\{X+Y=m\}}, k = 0, 1, \dots, m$. Sada je P{X = k, X + Y = m} =

= P{X = k, Y = m − k}. Slučajne promjenljive X i Y su nezavisne, pa je

P{X = k, X + Y = m} = P{X = k}P{Y = m − k} = $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{(m-k)}}{(m-k)!}e^{-\lambda} = \binom{m}{k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-2\lambda}$.

P{X + Y = m} = $\sum_{i=0}^{m} P\{X = i, Y = m - i\} = \sum_{i=0}^{m} P\{X = i\}P\{Y = m - i\} =$

$$= \sum_{i=0}^{m}\left(\binom{m}{i}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-2\lambda}\right) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{m}\left(\binom{m}{i}\right) = \frac{(2\lambda)^m}{m!}e^{-2\lambda}.$$

Konačno je $P\{X = k|X + Y = m\} = \frac{\binom{m}{k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-2\lambda}}{\frac{(2\lambda)^m}{m!}e^{-2\lambda}} = \frac{1}{2^m}\binom{m}{k}$, pa X|X + Y = m ima binomnu raspodjelu $\mathcal{B}\left(m, \frac{1}{2}\right)$.

8.

(a) *Definisati matematičko očekivanje slučajne promjenljive. (Diskretna i neprekidna slučajna promjenljiva). Navesti i dokazati osnovne osobine matematičkog očekivanja.*

Odgovor:

Neka je X: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}$ - diskretna slučajna promjenljiva X i njen zakon raspodjele. Matematičko očekivanje slučajne promjenljive X je broj

$$E(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n$$

ako je dati red apsolutno konvergentan.

Za slučajnu promjenljivu neprekidnog tipa, sa gustinom raspodjele f, matematičko očekivanje je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

ako je dati integral apsolutno konvergentan.

Osobine matematičkog očekivanja:

1. Neka je $c \in \mathbb{R}$ tada je $E(c) = c$.

Dokaz:

Neka je $x = c$, tada je $p\{\omega \in \Omega: \mathrm{x}(\omega) = c\} = 1$, pa je $E(x) = c \cdot p(x = c) = c \cdot 1 = c$.

2. $E(cX) = cE(X)$, $c \in \mathbb{R}$.

Dokaz:

Dokazaćemo da osobina važi i za diskretne i za neprekidne slučajne promjenljive.

$$E(cx) = \sum_{n=1}^{+\infty} cx_n p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n = cE(x) - diskretne\ slučajne\ promjenljive$$

$$E(cx) = \int_{-\infty}^{+\infty} cx\, f(x)\, dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = cE(x) - neprekidne\ slučajne\ promjenljive$$

3. Ako su X i Y slučajne promjenljive, tada je $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Dokaz:

Neka je $p(X, Y) = p_{nk}$. Raspisaćemo početni izraz:

$$E(X+Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (X_n + Y_k)\, p_{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (X_n p_{nk} + Y_k p_{nk}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (X_n p_{nk}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (Y_k p_{nk})$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \sum_{k=1}^{+\infty} p_{nk} + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_k \sum_{k=1}^{+\infty} p_{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n\, p_n + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_k\, p_k = E(X) + E(Y)$$

4. Ako su X i Y nezavisne slučajne promjenljive, tada je $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Dokaz:

Na sličan način dokazujemo i ovu osobinu. Neka je $p(X, Y) = p_{nk}$ i ponovo raspisujemo izraz:

$$E(XY) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (X_n Y_k)\, p_{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (X_n Y_k p_{nk}) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n p_n \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k p_k = E(X)E(Y)$$

(b) *Pokazati primjerom da ne postoji matematičko očekivanje za svaku slučajnu promjenljivu.*

Odgovor:

Neka je gustina raspodjele [5]slučajne promjenljive X data kao $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}$. Kako je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = +\infty - divergira$$

matematičko očekivanje ne postoji u ovom slučaju.

(c) *Izračunati matematička očekivanja za binomnu i ravnomjernu raspodjelu.*

Odgovor:

Neka je $\mathcal{B}(n,p)$ binomna raspodjela sa parametrima n i p. Računamo matematičko očekivanje znajući da je $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, n \in \mathbb{N}, k = 0,1,\dots,n, p \in (0,1)$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= np \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$
$$= np(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

Neka je $\mathcal{U}(a,b)$ ravnomjerna raspodjela sa parametrima a i b. $f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] - tablice.$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a}\, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

9.

(a) *Definisati varijansu, navesti osnovne osobine varijanse.*

Odgovor:

Varijansa (disperzija) slučajne promjenljive X je $Var(X)\ ili\ D^2(X) = E(X - E(X))^2$.

Osnovne osobine varijanse su:

1. $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$,

[5] Poznata kao Košijeva raspodjela.

2. $Var(X) \geq 0,$

3. $ako\ je\ c \in \mathbb{R},\ \ onda\ je\ Var(c) = 0,$

4. $Var(cX) = c^2 Var(X),$

5. $ako\ su\ X\ i\ Y\ nezavisne\ slučajne\ promjenljive, onda\ je\ Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$

(b) *Izračunati varijanse za normalnu i Puasonovu raspodjelu.*

Odgovor:

Računamo prvo varijansu za normalnu raspodjelu. Iz tablica je $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x\epsilon\mathbb{R}.$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \begin{Bmatrix} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ dt\sigma = dx \end{Bmatrix}^{6} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt^{\,7} + \mu\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[0 + \mu\sigma\sqrt{2\pi} \right] = \mu.$$

$$E^2(X) = \mu^2$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \begin{Bmatrix} t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ dt\sigma = dx \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dx = \cdots = \sigma^2 + \mu^2$$

Konačno je varijansa $Var(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$

Sada računamo varijansu za Puasonovu raspodjelu. P(X = k) = $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0.$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda + \lambda^2$$

Konačno je $Var(X) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$

[6] Granice integrala ostaju iste.
[7] Rješenja integrala potražiti u dodatku.

10.

(a) *Navesti i dokazati nejednakost Markova i nejednakost Čebiševa.*

Odgovor:

Nejednakost Markova. Neka je X nenegativna slučajna promjenljiva. Ako postoji $E(X^k), k\epsilon\mathbb{N}$, tada je

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X^k)}{\epsilon^k}, za\ svako\ \epsilon > 0.$$

Dokaz:

Neka je X diskretna slučajna promjenljiva čiji je zakon raspodjele X: $\begin{pmatrix} x_1 & \dots\ x_n & \dots \\ p_1 & \dots\ p_n & \dots \end{pmatrix}$, tako da je $x_i \geq 0$. Formiramo dva skupa $I_1 = \{i = 1, 2, \dots : x_i \geq \epsilon\}, I_2 = \mathbb{N} \setminus I_1$. Sada je

$$E(X^k) = \sum_{i\epsilon\mathbb{N}} {x_i}^k p_i = \sum_{i\epsilon I_1} {x_i}^k p_i + \sum_{i\epsilon I_2} {x_i}^k p_i \geq \sum_{i\epsilon I_1} {x_i}^k p_i \geq \sum_{i\epsilon I_1} \epsilon^k p_i = \epsilon^k \sum_{i\epsilon I_1} p_i = \epsilon^k P(X \geq \epsilon).$$

Iz ovoga slijedi da je $P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X^k)}{\epsilon^k}$.

Nejednakost Čebiševa. Ako postoji Var(X), tada je $P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$.

Dokaz. Uvrstićemo parametre u nejednakost Markova:

$$X \to |X - E(X)|, k = 2. Znamo\ da\ je\ Var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2. Sada\ je$$

$$P(\,|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{E(X^2)}{\epsilon^2} = \frac{E\left(\big(X - E(X)\big)^2\right)}{\epsilon^2} = \frac{Var(X)}{\epsilon^2}.$$

(b) *Formulisati i dokazati Bernulijev zakon velikih brojeva.*

Odgovor:

Neka je $\epsilon > 0$ i $S_n : B(n, p)$, tada je $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1$.

Dokaz[8]. Koristimo nejednakost Čebiševa. $E(S_n) = np, Var(S_n) = np(1-p)$.

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) = P(|S_n - np| < n\epsilon) = P(|S_n - E(S_n)| < n\epsilon) = 1 - P(|S_n - E(S_n)| \geq n\epsilon)$$
$$\geq 1 - \frac{Var(S_n)}{n^2\epsilon^2} = 1 - \frac{np(1-p)}{n^2\epsilon^2} = 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Uočimo sada da važi $1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) \leq 1$. Znajući da je $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} = 1 - 0 = 1$, slijedi da je i $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1$.

[8] Moguće je izvesti dokaz i preko drugog oblika Bernulijevog zakona velikih brojeva.

(c) *Formulisati centralnu graničnu teoremu.*

Odgovor:

Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa istom raspodjelom, za koje je $E(X_n) = m, Var(X_n) = \sigma^2$, za svaki n ∈ ℕ. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n^* < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\, , gdje\ je\ Y_n^* = \frac{X_1 + \cdots + X_n - mn}{\sigma\sqrt{n}}.$$

11.

(a) *Osnovni pojmovi statistike. (Populacija, uzorak, obilježje statistika, najčešće statistike.)*

Odgovor:

Skup Ω elemenata ω naziva se populacija ili generalni skup. Za svaki ω ∈ Ω posmatra se neka numerička karakteristika X(ω) koja se naziva obilježje. Obilježje na jednom dijelu populacije nazivamo uzorak. Nama je od interesa prost slučajan uzorak, koji podrazumijeva da su slučajne promjenljive (koje su obilježje) nezavisne i sa istom raspodjelom.

Neka je X obilježje, $(X_1, \dots, X_n)$ prost uzorak i funkcija $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Slučajna promjenljiva $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ naziva se statistika. Najčešće korištene statistike su:

1. Aritmetička sredina uzorka, $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2. Varijansa (disperzija) uzorka, $\overline{S_n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$

3. Standardno odstupanje uzorka, $\overline{S_n} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2}$.

(b) *Ocjene parametara. Metod maksimalne vjerodstojnosti. (Primjeri za geometrijsku i normalnu raspodjelu.)*

Odgovor:

Neka je dato obilježje X sa raspodjelom koja zavisi od jednog parametra θ. Neka je Θ skup kome pripada θ. Na taj način imamo familiju raspodjela $\{F(x, \theta): \theta \in \Theta\}$. Zadatak je da se na osnovu uzorka $(X_1, \dots, X_n)$ odredi vrijednost parametra θ, odnosno raspodjela $F(x, \theta)$ za X. Zatim se bira statistika $U = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ takva da se za ocjenu nepoznatog parametra θ uzima realizovana vrijednost $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Statistika U zove se ocjena.

Funkcija vjerodostojnosti $L(x_1, \dots, x_n;\ \theta)$ obilježja X sa funkcijom raspodjele $F(x, \theta)$ je

$$L(x_1, \dots, x_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta) - X\ diskretnog\ tipa,$$

$$L(x_1, \dots, x_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) - X\ neprekidnog\ tipa.$$

Neka je $\theta = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vrijednost parametra kojom se postiže maksimum za $L(x_1, \dots, x_n;\ \theta)$ pri fiksiranim $x_1, x_2, \dots, x_n$. Statistika $\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je ocjena maksimalne vjerodostojnosti parametra θ.

Geometrijska raspodjela:

P(X = k) = $p(1-p)^{k-1}$

$$L(x_1, \dots, x_n;\ p) = p(1-p)^{x_1-1} \cdot p(1-p)^{x_2-1} \cdot \dots \cdot p(1-p)^{x_n-1} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n},$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} (x_i - n) \ln(1-p) + n \ln p \,|\, \frac{\partial lnL}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial lnL}{\partial p} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i) - n \right) \frac{-1}{1-p} + n \frac{1}{p}$$

Kada se izjednači sa nulom, dobija se izraz

$$\frac{-p \sum_{i=1}^{n} (x_i) + np + n - np}{(1-p)p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} (x_i)}.$$

Normalna raspodjela:

Postupak je isti, samo sa drugačijim parametrima. Krajnji izraz [9]jeste

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.$$

(c) *Linearna regresija. Sistem normalnih jednačina.*

Odgovor:

Pretpostavimo da se u procesu ekperimenta registruju vrijednosti veličina X i Y . Ako se eksperiment ponovi n puta, onda se kao rezultat registruje n parova brojeva $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Neka je moguće usvojiti linearnu vezu tipa $Y = aX + b$. Često je sistem od n linearnih jednačina naizgled bez rješenja (iz čega se nameće zaključak da ne važi usvojena pretpostavka). Međutim, dalji postupak se sastoji da se pri određivanju konstanti a i b teži ka minimiziranju ukupne greške, pri čemu se koriste određena pravila i na taj način se dolazi do rješenja.

Pravilo 1: Konstante a i b određujemo iz uslova da izraz

$$S = \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k| = \sum_{k=1}^{n} |y_k - (ax_k + b)| - bude\ minimalne\ vrijednosti.$$

Pravilo 2 ili metod najmanjih kvadrata: Konstante a i b određujemo iz uslova da izraz

[9] Kompletan postupak izložen je u dodatku.

$$S = \sum_{k=1}^{n} {\varepsilon_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2 - bude\ minimalne\ vrijednosti.$$

Konačni izrazi [10] za određivanje konstanti su poznati kao sistem normalnih jednačina:

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k + bn = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$a\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

(d) *Mjerenjem su dobijene sljedeće vrijednosti*

x_k	1	2	3	4
y_k	3	5	7	9

Odrediti koeficijente a i b tako da prava y = ax + b najbolje odgovara mjerenjima u smislu metode najmanjih kvadrata. Prognozirati koja će vrijednost odgovarati za x = 5.

Odgovor:

Sistem normalnih jednačina za dati primjer je

$$10a + 4b = 24\ \wedge 30a + 10b = 70\ jer\ je \sum_{k=1}^{4} x_k = 10, \sum_{k=1}^{4} y_k = 24, \sum_{k=1}^{4} {x_k}^2 = 30\ i\ \sum_{k=1}^{4} x_k y_k = 70.$$

odakle je rješenje $a = 2\ i\ b = 1\ \Rightarrow y = 2x + 1, pa\ je\ za\ x = 5\ y = 11$.

12.

(a) *Interpolacija funkcije polinomima. Pokazati da za* $n + 1$ *čvor* $(x_k, f_k), k = 0, 1, \dots, n$ *postoji jedinstven polinom* $P_n(x)$ *stepena n takav da je* $P_n(x_k) = f_k, k = 0, 1, \dots, n.$

Odgovor:

Interpolacija funkcije podrazumijeva da neku funkciju, neka je ona *f*, aproksimiramo (uslovno rečeno) jednostavnijom funkcijom g, koja je pogodnija za izračunavanje, vodeći računa o ocjeni pogreške koja se unosi interpolacijom. Polinomi su veoma zahvalne funkcije za proračune i uopšteno za rad sa njima. Zamislimo slučaj da nam je poznata neka serija podataka koji, u suštini, predstavljaju tačke neke nepoznate funkcije. Zanima nas kako funkcija izgleda van tih tačaka, pa ćemo odgovarajućim polinomom aproksimirati nepoznatu funkciju.

Pokažimo da navedeno vrijedi na zadanom primjeru.

---

[10] Urade se izvodi po a i po b i izjednače sa nulom.

Neka je funkcija f zadata sa n+1 čvorova $(x_k, f_k), k = 0, 1, \dots, n$. Tada postoji jedinstven polinom $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^1 + a_n$, takav da je $P_n(x_k) = f_k$. Dobijamo sistem

$$a_0 {x_0}^n + a_1 {x_0}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} {x_0}^1 + a_n = f_0$$

$$a_0 {x_1}^n + a_1 {x_1}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} {x_1}^1 + a_n = f_1$$

.

.

.

$$a_0 {x_n}^n + a_1 {x_n}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} {x_n}^1 + a_n = f_n$$

što se može zapisati i u matričnom obliku:

$\begin{bmatrix} {x_0}^n\, {x_0}^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_n}^n {x_n}^{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$, pa je uslov da $det\left(\begin{bmatrix} {x_0}^n\, {x_0}^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_n}^n {x_n}^{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0$ ispunjen, pošto je u pitanju Vandermondova determinanta i sistem ima jedinstveno rješenje.

(b) *Lagranžov interpolacioni polinom.*

Odgovor:

Neka je f funkcija zadata u tačkama $x_0, x_1, \dots, x_n$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ vrijednostima $f_0, f_1, \dots, f_n$ i (n+1) puta diferencijabilna. Posmatrajmo funkcije (proizvode)

$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \wedge \Pi_{n+1}(x_i)' = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_n)$.

Zatim neka je $p_i(x) = \frac{1}{x - x_i} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_{n+1}(x_i)'}$, odakle primjećujemo da je $p_i(x_k) = 1$ za i = k, a 0 za i $\neq$ k. Dakle, polinom

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f_i = L_n(x), P_n(x_k) = f_k - interpolacioni\ polinom\ funkcije\ f$.

Polimom $L_n(x)$ naziva se Lagranžov interpolacioni polinom.

13.

(a) *Definisati grešku interpolacije.*

Odgovor:

Greška interpolacije je oblika $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, gdje su f – funkcija (😉) i $P_n(x)$ – - interpolacioni polinom.

(b) *Ako je f n+1 puta diferencijabilna funkcija dati procjenu za* $|R_n(x)|$. *Objasniti šta je* M_{n+1} *i* $\Pi_{n+1}(x)$.

Odgovor:

Prvo ćemo definisati $M_{n+1} i\ \Pi_{n+1}(x)$. M_{n+1} je definisano kao

$$\underset{[a,b]}{M_{n+1}} = max|f^{n+1}(t)|, gdje\ je\ a = min\{x, x_0\}, b = max\{x, x_n\}.$$

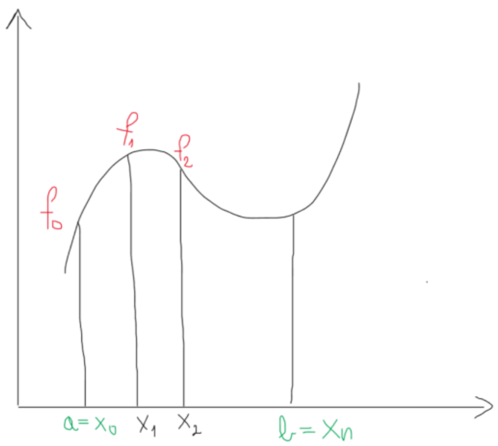
$\Pi_{n+1}(x)$ smo maloprije definisali, $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Sada možemo dati procjenu za funkciju koja je tražena:

$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|$.

14.

(a) *Opšte trapezno pravilo.*

Odgovor:



Slika 2. Grafički prikaz uz 14. (a) pitanje

Neka je funkcija sa Slike 2. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i (x_k, f_k) čvorovi. Definisaćemo i tačke $x_{i+1} = x_i + h, i = 0, 1, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}$. Opšte trapezno pravilo formulisano je kao

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx =$$
$$= \frac{f_0 + f_1}{2} h + \frac{f_1 + f_2}{2} h + \cdots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} h = \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + \cdots . + f_{n-1}) + f_n].$$

(b) *Ocjena greške kod opšteg trapeznog pravila.*

Odgovor:

Koristimo ranije definisanu formulu za ocjenu greške, s tim da je n+1 sada 2.

$|R_n(x| = \frac{M_2}{2!}|(x-x_0)(x-x_1)|$

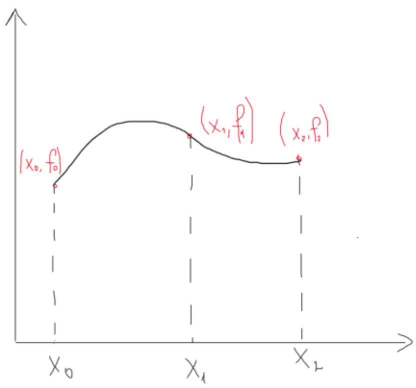
$$R_1(x) = \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1} |(x-x_0)(x-x_1)| = \begin{Bmatrix} x-x_0 = th \\ dx = hdt \end{Bmatrix} = \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1} th(t-1)hhdt$$

$$= \frac{M_2h^3}{2}\int_0^1 (t^3-t^2)dt = \frac{M_2h^3}{12} \Rightarrow R = n\frac{M_2h^3}{12}.$$

15.

(a) *Opšte Simpsonovo pravilo.*

Odgovor:



Slika 3. Grafički prikaz uz pitanje 15. (a)

Simpsonovo pravilo dobija se uvrštavanjem n = 2 u Njutn-Kotesove formule[11].

$$C_0^2 = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{f(t-1)(t-2)}{t}dt = \frac{1}{4}\int_0^2 (t^2-3t+2)dt = \frac{1}{6} = C_2^2, C_1^2 = \frac{2}{3}, pa\ kako\ je\ b-a = 2h$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2h\left(\frac{1}{6}f_0 + \frac{2}{3}f_1 + \frac{1}{6}f_2\right) + R_1 = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + R_1.$$

Ako je dato *2n + 1* čvorova, i to $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$, dijeljenjem na integrale gornjeg tipa dobijamo Opšte Simpsonovo pravilo:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n-2}) + f_{2n}].$$

[11] „Numerička matematika“ – Glava 3 (na Učionici)

(b) *Ocjena greške kod opšteg Simpsonovog pravila.*

Odgovor:

Uvrštavanjem za jedan segment (trećeg stepena[12]), dobija se da je R=0, što je nemoguće. To zapravo znači da je formula tačna i za polinom trećeg stepena, pa je greška četvrtog reda. Izračunaćemo za jedan segment:

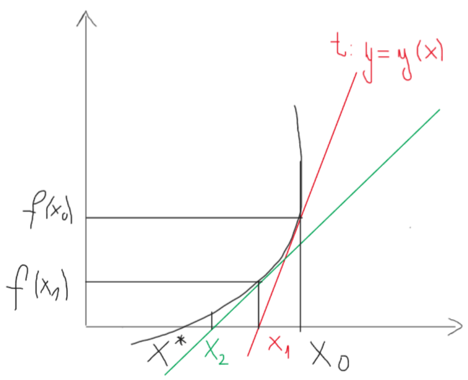
$$R_1 = \frac{M_4}{24}\left|\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)\,dx\right| = \frac{M_4h^5}{90} \Rightarrow R = \frac{M_4h^4(b-a)}{180}, jer\ je\ 2h = b-a.$$

16.

(a) *Njutnova metoda tangente.*

Odgovor:

Ako je potrebno riješiti jednačinu $f(x) = 0$, uzmimo za početnu vrijednost rješenja tačku x_0. U tački $(x_0, f(x_0))$ postavimo tangentu $t: y(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.



Slika 4. Grafički prikaz uz pitanje 16. (a)

Ako je x_1 približno rješenje tako da je $y(x_1) = 0$, iz jednačine tangente se dobija da je

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, u\ daljim\ iteracijama\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Početna vrijednost $x_0 \in \{a, b\}$ i to ona za koju je $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

(b) *Dati procjenu za* $|x_n - x^*|$, *pri čemu je niz* $\{x_n\}$ *dobijen Njutnovom metodom tangente, a* $x^* = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Odgovor:

[12] $R_1 = \frac{M_3}{3!}\left|\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,dx\right| = \frac{M_3}{3!}h^4\int_0^2(t^3-3t^2+2)dt$

Na osnovu Tejlorove formule, u okolini tačke x_{n-1} imamo da je

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = \underbrace{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}_{0} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2,$$
$$\xi \in \{x_n, x_{n-1}\}$$

Dakle, $f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2$, odnosno $f(x_n) \leq \frac{1}{2} M_2 |x_n - x_{n-1}|^2$. Znamo da važi

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \Rightarrow |x_n - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|^2, pri\ čemu\ 0 < m_1 < \min_{x \in [a,b]} |f'(x)| < \infty.$$

Ako je potrebno naći rješenje sa tačnošću ε, tada mora da vrijedi

$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \varepsilon, pa\ je\ |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}}.$$

17.

(a) *Metoda sječice.*

Odgovor:

Metoda sječice dobija se iz Njutnovog metoda i to ako kažemo da je

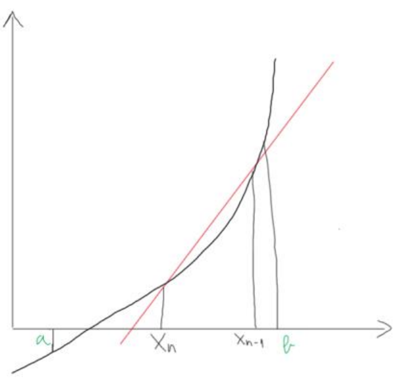
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Konkretno,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Greška ε je unaprijed zadana i to:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1 \varepsilon}{M_1 - m_1}.$$



Slika 5. Grafički prikaz uz pitanje 17. (a)

Za početnu tačku x_0 najčešće uzimamo a ili b, pri čemu postoje dva slučaja:

1. Ako za $x \in [a, b]$ važi $f'(x_0)f''(x_0) > 0$, tada je $x_0 = a$ i metod se može modifikovati

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

2. Ako za $x \in [a, b]$ važi $f'(x_0)f''(x_0) < 0$, tada je $x_0 = b$ i metod se može modifikovati

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}.$$

(b) *Procjena greške kod metode sječice.*

Odgovor:

Kada smo definisali metodu sječice, rekli smo da je greška unaprijed zadana i to

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1 \varepsilon}{M_1 - m_1}.$$

Dodatak:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left| \begin{array}{l} u = -\frac{t^2}{2} \;/\;' \\ du = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} t\, dt \\ du = -t\, dt \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} -du \cdot e^{u} = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u} du = -e^{u} =$$

$$= -e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} (-e^{-\frac{t^2}{2}}) = -\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}} = 0 , \quad \lim_{t \to \pm\infty} -(e^{-\frac{t^2}{2}}) = -\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}} = 0$$

$$X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (x_k-\mu)^2} \quad / \ln$$

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k-\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} x_k - \mu = 0 , \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{k=1}^{n} (x_k-\mu)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k-\mu)^2$$