1. Одредити спектар, амплитудски и фазни, периодичног сигнала $x(t)$ који је на интервалу једне периоде T дефинисан следећим изразом:

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_1\\ E, & t_1\le t\le t_1+\tau\\ 0, & t_1+\tau<t\le T\end{cases}$$

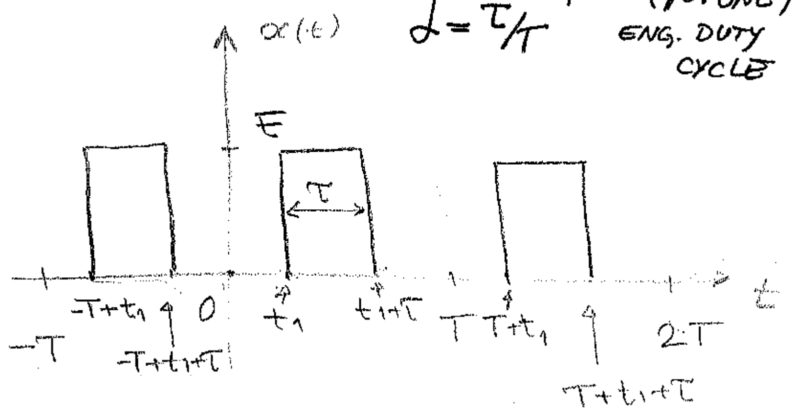
Графички представити амплитудски и фазни спектар овог сигнала када је:
однос трајања импулса τ и периоде сигнала T, $\frac{\tau}{T}=\frac{2}{7}$

Рјешење:

однос $\frac{\tau}{T}$ FAKTOR REŽIMA (POPUNE) ENG. DUTY CYCLE

$d=\tau/T$

- Временски облик сигнала $x(t)$



- Сигнал $x(t)$ је периодичан може се представити Фуријеовим редом ∇

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n e^{jn\omega_0 t}$$

X_n – комплексни спектар сигнала $x(t)$

$$X_n=|X_n|e^{j\theta_n},\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$|X_n|$ – амплитудски спектар

θ_n – фазни спектар

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow \omega_0=2\pi f$$

$$f=\frac{1}{T}$$

$$X_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$X_n=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+\tau}E e^{-jn\omega_0 t}dt=\left[\frac{E}{T}\frac{1}{n\omega_0}\int_{t_1}^{t_1+\tau}e^{-jn\omega_0 t}\,d(n\omega_0 t)\right]$$

$$=\frac{E}{T\cdot n\cdot\omega_0}\frac{1}{(-j)}e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{t_1}^{t_1+\tau}=\frac{E}{T\cdot n\cdot\omega_0}\cdot\left(-\frac{1}{j}\right)\left[e^{-jn\omega_0(t_1+\tau)}-e^{-jn\omega_0 t_1}\right]$$

$$* \quad \sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

Користећи овај идентитет

$$X_n = \frac{E}{T\cdot n\omega_0}\cdot\left(-\frac{1}{j}\right) e^{-jn\omega_0(t_1+\tau/2)}\left[e^{-jn\omega_0\tau/2} - e^{+jn\omega_0\tau/2}\right]$$

$$= \frac{E}{T\cdot n\omega_0}\cdot\frac{2}{2j}\left[e^{jn\omega_0\tau/2} - e^{-jn\omega_0\tau/2}\right]\cdot e^{-jn\omega_0(t_1+\tau/2)}$$

$$= \frac{E}{T\cdot n\omega_0}\cdot 2\cdot\sin(n\omega_0\tau/2)\, e^{-jn\omega_0(t_1+\tau/2)}$$

$$= \frac{E\cdot\tau}{T}\cdot\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}\, e^{-jn\omega_0(t_1+\tau/2)}$$

за неке вр. $n\omega_0$ +, за неке −

облик $\frac{\sin x}{x} = \mathrm{sinc}(x)$

$$|X_n| = \frac{E\cdot\tau}{T}\cdot\left|\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}\right|, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

$$\theta_n = -n\omega_0(t_1+\tau/2) + \Delta\theta_n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

уводимо да чувамо знак $\Delta\theta_n = 0, \pm\pi$

За периодичне сигнале амплитудски и фазни спектар су дискретне ф-је фреквенције.

Уводи се појам анвелопе спектра сигнала!

замјењујемо дискретне вр. фреквенције $n\omega_0$ континуалном промјенљивом ω → sinc f-ја

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{E\cdot\tau}{T}\left|\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right|$$

Максимална вриједност анвелопе је на фреквенцији $\omega = 0$

$$X_0 = \lim_{\omega\to 0}\mathcal{L}(\omega) = \frac{E\cdot\tau}{T}$$

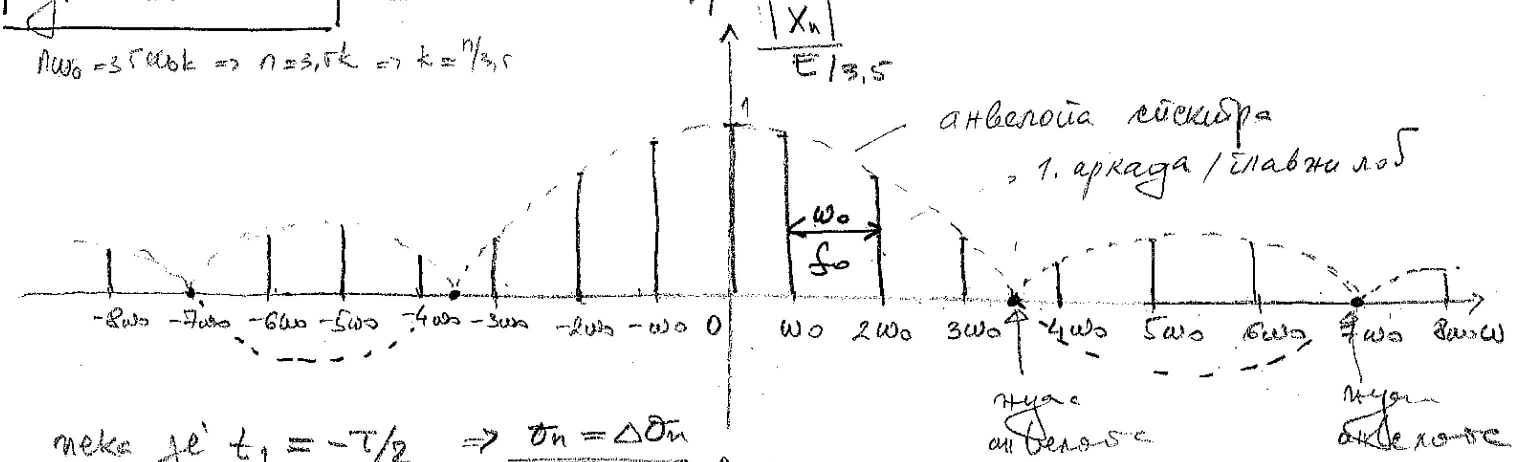
нуле анвелопе јављају се на фреквенцијама на којима је $\sin(\omega\tau/2) = 0,\ \omega\neq 0 \Rightarrow \omega\tau/2 = k\pi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{\tau}k}$, $k = \pm1, \pm2, \dots$

За $\frac{\tau}{T} = \frac{2}{7} = \frac{1}{3,5}$

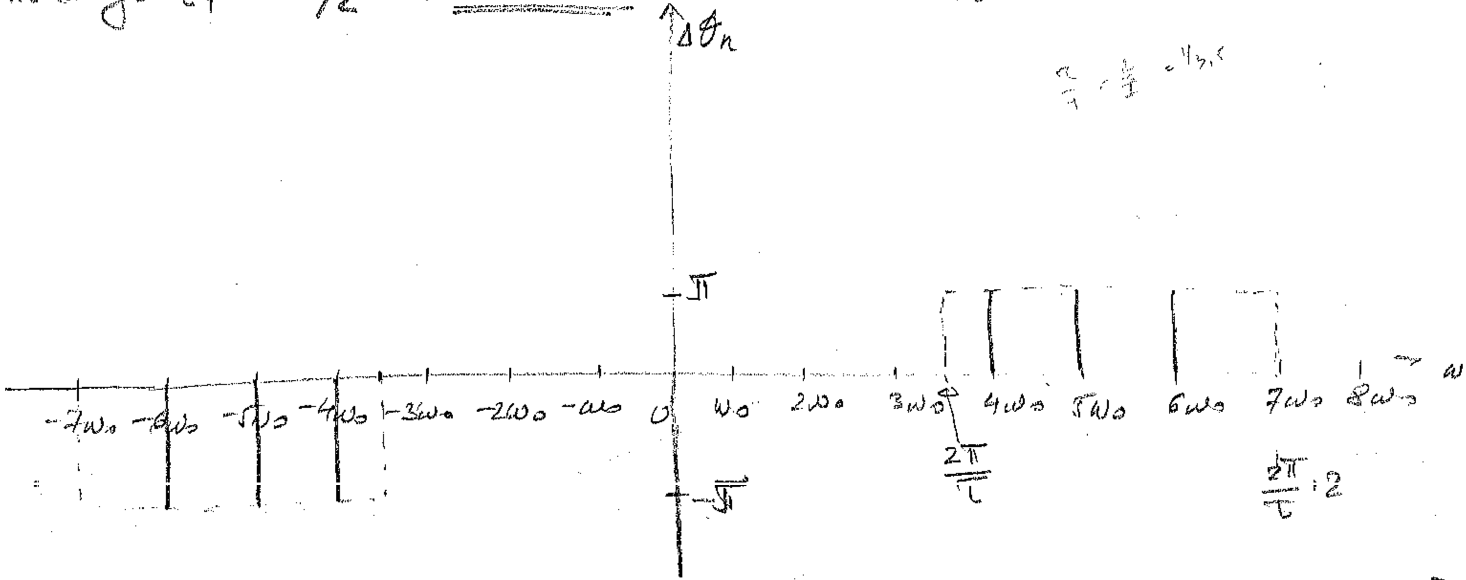
$\boxed{\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{k}{\tau}}$ $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ обрнуто проп. τ

$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{\tau} k}$ нуле анв. $= \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\tau} \cdot k = \frac{\omega_0}{\tau / T} \cdot k = 3,5\omega_0 \cdot k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$n\omega_0 = 3,5\omega_0 k \Rightarrow n = 3,5k \Rightarrow k = n/3,5$



нека је $t_1 = -\tau/2 \Rightarrow \underline{\theta_n = \Delta\theta_n}$



* Шта се догађа са нулама анвелопе када τ и T мијењамо?

τ фиксно а T расте

$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \cdot k$, нуле су на истим мјестима. Али?

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $T \uparrow \Rightarrow \omega_0 \downarrow$

смањило се растојање између компоненти дј. спектар је постао гушћи.

T фиксно, а τ расте

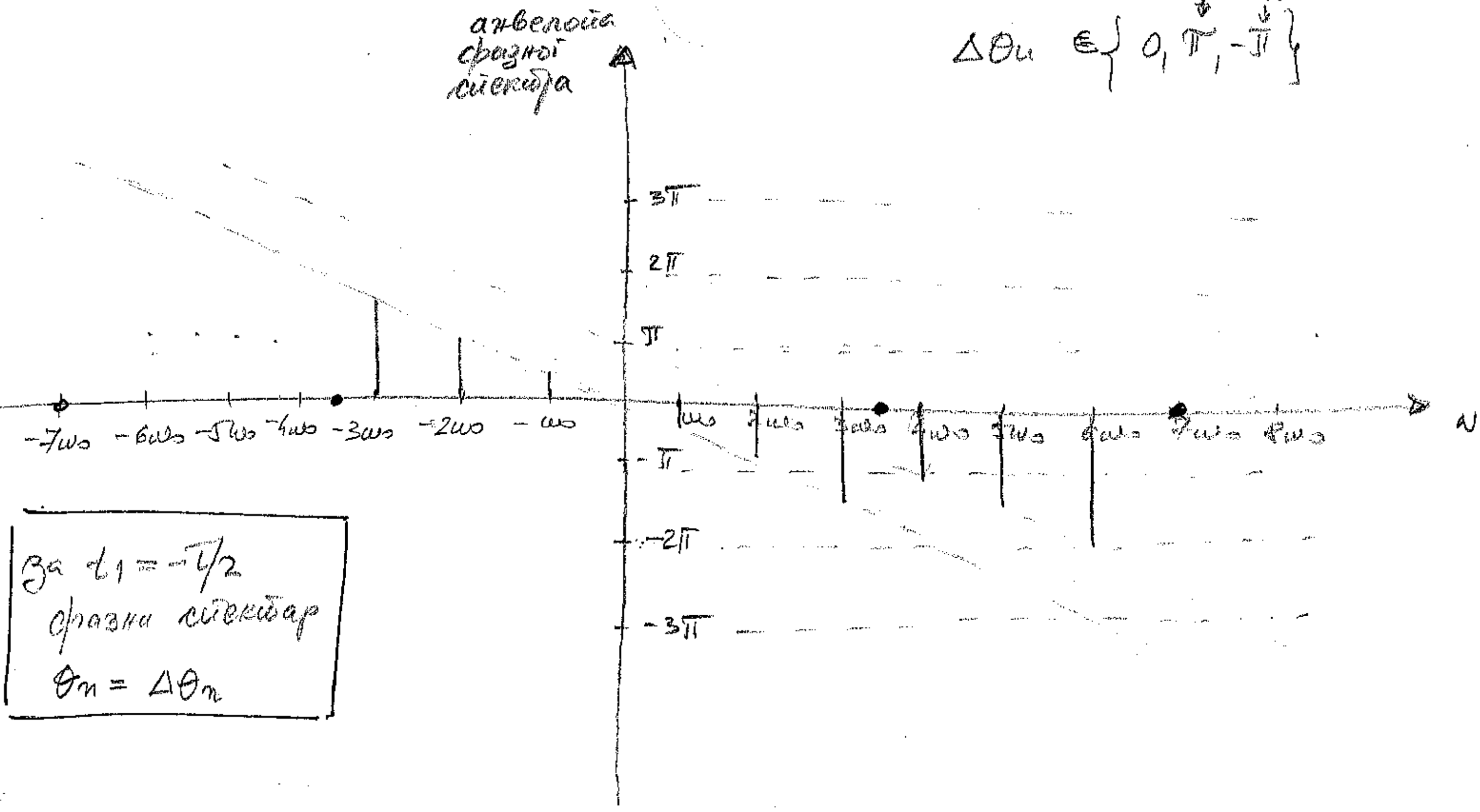
$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \cdot k \Rightarrow \omega$ се смањује

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ непромјењено. растојање између хармоника се не мијења.

$$\theta_n = -n\omega_0\left(t_1+\tau/2\right) + \Delta\theta_n$$

$$n\omega_0 \to \omega \quad \Rightarrow \quad \beta(\omega) = -\omega\underbrace{\left(t_1+\tau/2\right)}_{\text{коеф. правца}} + \Delta\theta$$

$$\Delta\theta_n \in \{0, \pi, -\pi\} \qquad n\in N, \ -n$$



За $t_1 = -\tau/2$ фазни спектар $\theta_n = \Delta\theta_n$

Parsevalova teorema: Дефинишемо ефективну вр. сигнала $x(t)$

$$x(t)_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2\,dt} \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}, \quad X_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$\left[x(t)_{ef}\right]^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}\,dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{jn\omega_0 t}}_{X_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot X_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \quad * \quad \frac{a_n^2+b_n^2}{4}, \ n = -\infty, +\infty$$

Претпоставка:

$x(t)$ напон на 1Ω,

Дакле износ средња снага сложеног периодичног сигнала једнака суми ср. снага свих његових хармоника?

Снага сигнала: $\overline{x^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+\tau} E^2\,dt = \frac{E^2}{T}\cdot(t_1+\tau-t_1) = \frac{E^2\cdot\tau}{T}$

$$\overline{x^2(t)} = \alpha \cdot E^2$$