

Formalne metode

u softverskom inženjerstvu

12 LBA, Tjuringova mašina

ETFBL 24-25

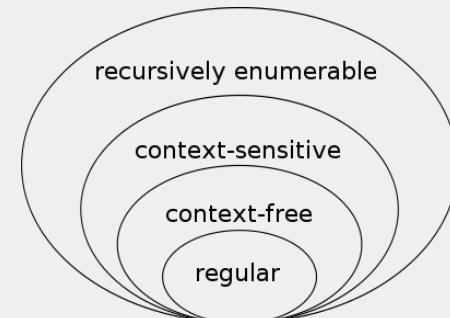
Dunja Vrbaški

- regularna gramatika (regularni izrazi) generiše reči regularanog jezika
- konačni automat prepoznaje reči regularnog jezika

- CFG gramatika generiše reči CFG jezika
- potisni automat prepoznaje reči CFG jezika
- jednostavna memorija: stek, neograničeno
- čitanje sa ulaza: napred

- CSG gramatika generiše reči CSG jezika
- linearno ograničeni automat prepoznaje reči CSG jezika
- memorija: ograničena
- čitanje: u oba pravca
- pisanje

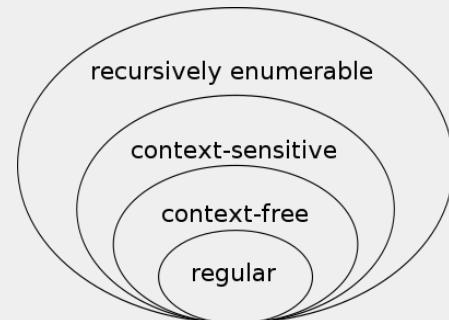
$a^n b^m$	RL
$a^n b^n$	CFL
$a^n b^n c^n$	CSL

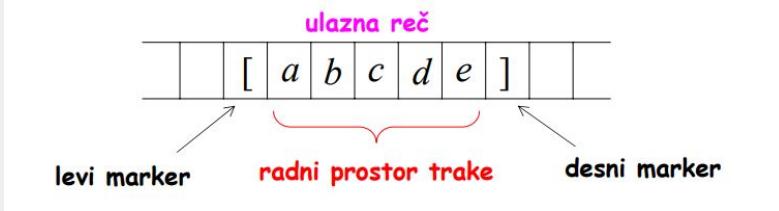


Linearno ograničeni automat

→ konačni automat + ograničena memorija + čitanje + pisanje
← jednostavnija tjuringova mašina (linearno ograničena TM)

eng. *Linear-bounded TM*





- glava trake se kreće levo i desno
- čitanje i pisanje
- ograničen prostor (specijalni znaci) u kom je ulaz i vrši se izračunavanje
- linearno ograničen: linearna funkcija dužine ulaza

LBA za $a^n b^n c^n$

[a	a	a	b	b	b	c	c	c]
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

...

[A	a	a	B	b	b	C	c	c]
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

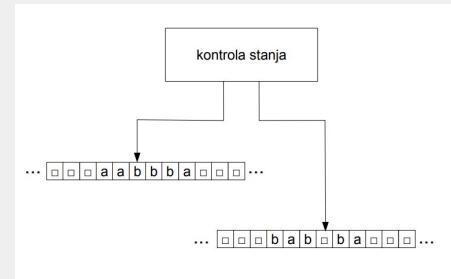
- pročitaj 'a', promeni u 'A'
 - traži desno prvo 'b' (čitaj 'a' sve do prvog 'b')
 - promeni 'b' u 'B'
 - traži desno prvo 'c'
 - promeni 'c' u 'C'
 - traži levo prvo 'a'
 - ponavlja
-
- moraju ostati sva velika slova
 - za svaku akciju postoji odgovarajuće stanje

Tjuringova mašina

→ konačni automat + neograničena memorija + čitanje + pisanje

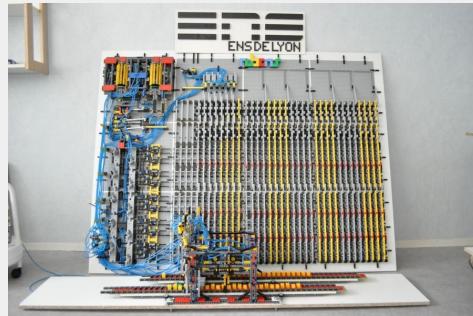
TM:

- jedna ili više neograničenih traka - memorija
- svaka traka ima svoj alfabet i uključen je i prazan simbol
- svaka traka ima odgovarajuću glavu
- pokazuje na jednu ćeliju trake
- na tom mestu se čita ili piše
- automat

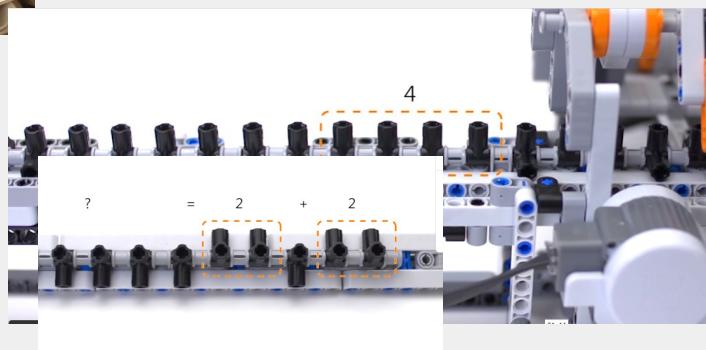


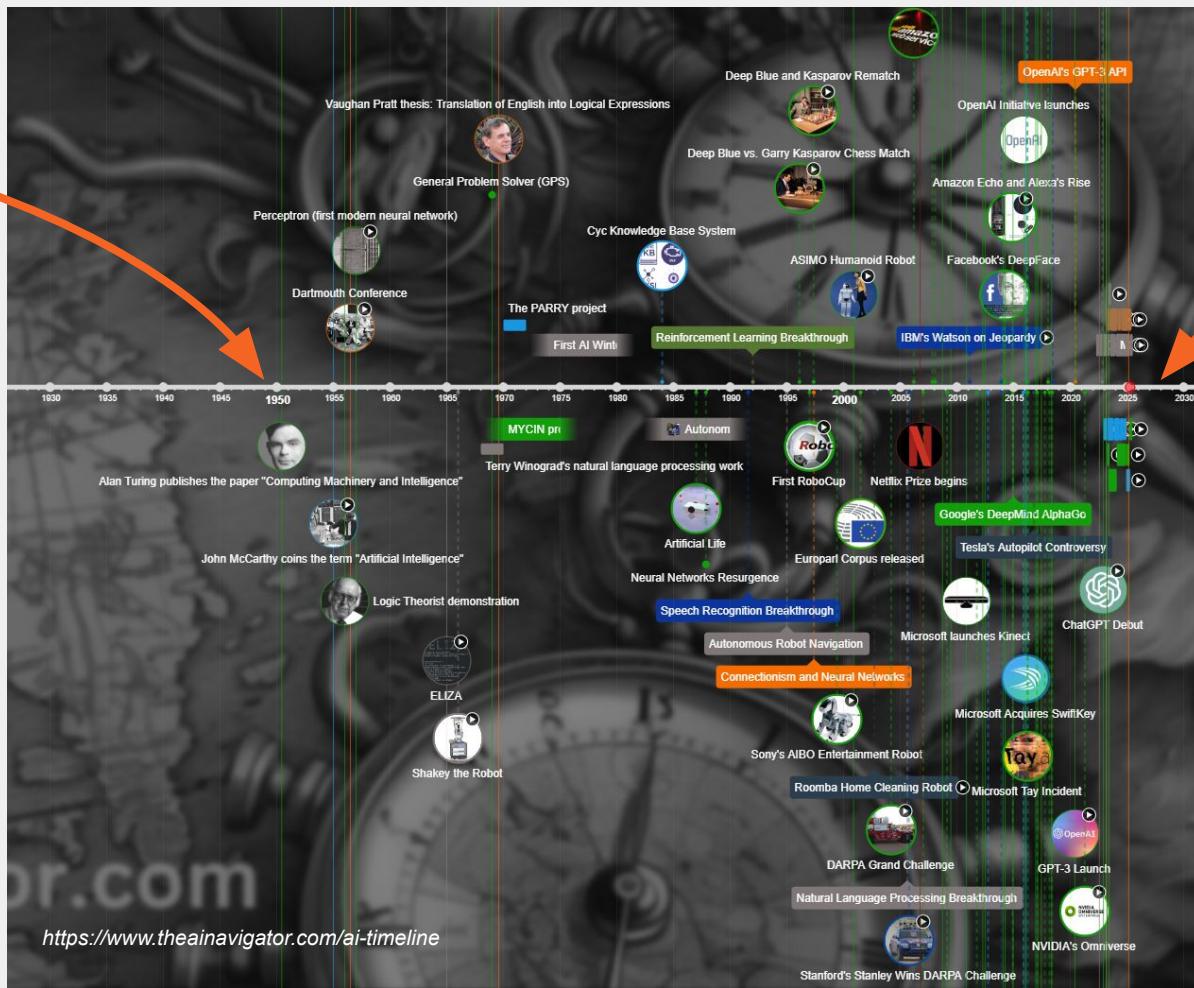
Svaka efektivno izračunljiva funkcija može biti izračunata i preko TM.

algoritam → TM



Wikipedia TM
YouTube TM Minecraft
Vimeo TM Lego





Demistifikacija

- Tjuring - šta sve možemo da izračunamo (i zašto imamo kripto)
- Koji problemi su odlučivi?
- Čomski - prirodni → formalni jezici
- biologija → računar
perceptron



STUDIES about the creation of machines having the ability to learn have been made in many fields, but until recently little work has been done in the realm of science fiction. Yet we are now about a dozen years away from the time when the first machine will be able to learn. This is due to the remarkable progress in the field of perception, recognizing, and identifying by sensory means.

Development of this machine has stemmed from a need to solve a number of problems in the field of automation which involve human capacities and intelligence. The most important of these problems is the question of how to simulate in man-made machines the ability to learn. This is a scientific challenge of our time, and it is one that must be met if we are to make progress in the field of automation.

We have some excellent descriptions of the phenomena involved in learning. For example, the work of Tolman and his associates has provided us with a great deal of knowledge about events in the nervous system and the principles by which the functioning of the nervous system is controlled by the environment. We also know something about the principles by which the functioning of the nervous system is controlled by the environment. We believe that this scientific problem is about to yield to our theoretical investigations for three reasons:

Review Notes Report
In July, 1957, Project PARA (Perceiving and Reasoning Automaton) was started at Cornell Aeronautical Laboratory. The project had been in progress for over a year at Cornell Aeronomics Laboratory, and was originally known as Project of Neural Research. The progress had been concentrated primarily with the application of probability theory to

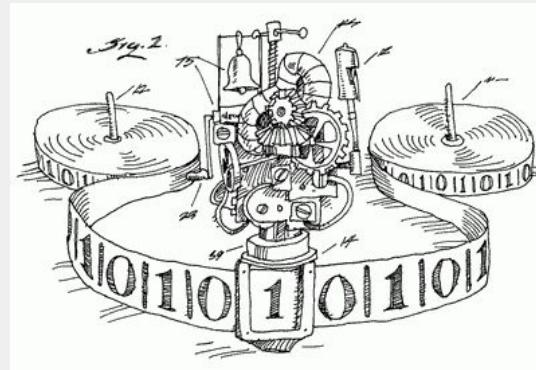


FIG. 1 — Organization of a biological brain. (Red areas indicate active cells, responding to the letter X.)

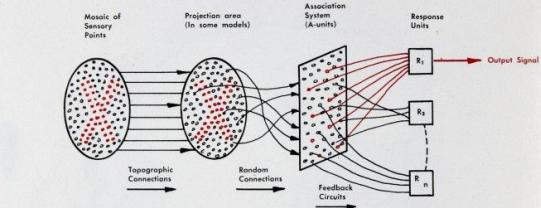


FIG. 2 — Organization of a perceptron.

The Design of an Intelligent Automaton, Rosenblatt, 1958.

Tjuringova mašina

$$M = (\Sigma, \Gamma, Q, \sigma, q, q_{accept}, q_{reject})$$

- Σ - alfabet ulaznih simbola koji ne sadrži prazan simbol
- Γ - alfabet trake koji sadrži prazan simbol
- Q - skup stanja
- σ - funkcija prelaza, $\sigma: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$
- q - inicijalno stanje
- q_{accept} - stanje prihvatanja
- q_{reject} - stanje odbacivanja

Korak izračunavanja

$$ra_1a_2\dots a_k \rightarrow r'a'_1a'_2\dots a'_kx_1x_2\dots x_k$$

- stanje je r , svaka glava pokazuje na neku ćeliju na odgovarajućoj traci
- čitaju se simboli na trakama ($a_1, a_2, a_3\dots a_k$)
- prelazi se u novo stanje r'
- piše se na trakama ($a'_1, a'_2, \dots a'_k$)
- svaka glava se pomera ili ne ($x_1, x_2, \dots x_k$)

Ako je za svaku kombinaciju trenutnog stanja i trenutnih simbola na trakama jednoznačno određen sledeći korak radi se o determinističkoj mašini.

Zaustavljanje

- ulazi u stanje prihvatanja ili odbacivanja
- ne ulazi ni u jedno od ova dva stanja
(to znači da...)

Za ovako definisanu mašinu:

Mašina M prihvata neku reč ako se izvršavanje završi u stanju prihvatanja.
(obratiti pažnju)

Mašina M prihvata jezik ako prihvata sve reči tog jezika; $L(M)$

Jezici koje prihvata neka TM se zovu: **rekurzivno nabrojivi jezici**
(eng. recursively enumerable)

Konstruisati TM koja proverava 3. simbol, ako je 0 onda prihvata, a ako nije, TM se beskonačno izvršava.

$$M = (\{p, q, r, s, t\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, ps, p, B, \{s\})$$

$$ps(p, X) = (q, X, D) \quad \text{za } X=0, 1$$

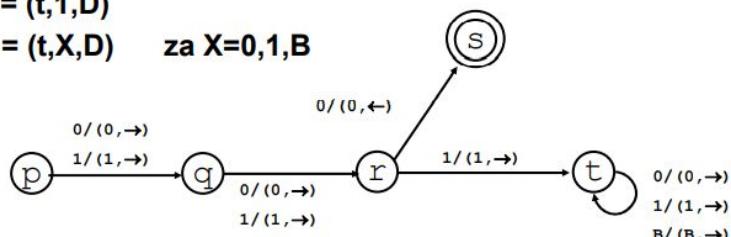
$$ps(q, X) = (r, X, D) \quad \text{za } X=0, 1$$

$$ps(r, 0) = (s, 0, L)$$

$$ps(r, 1) = (t, 1, D)$$

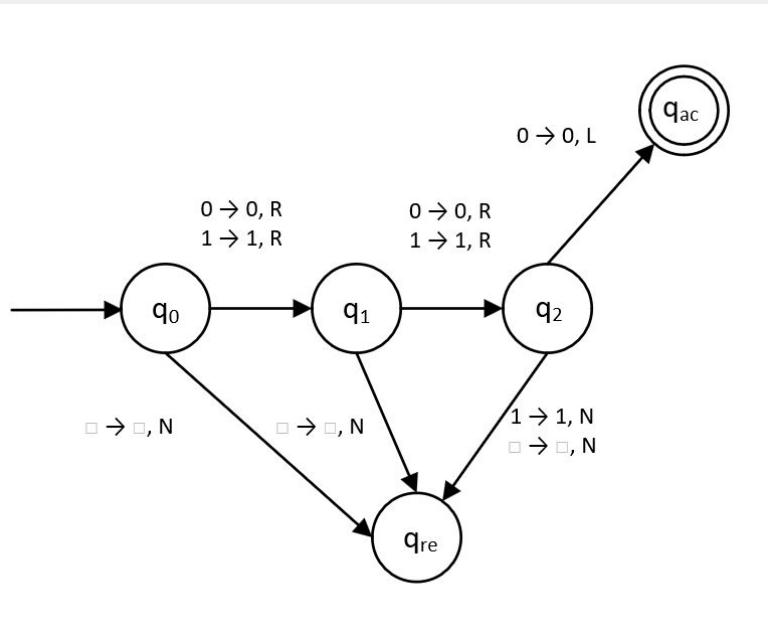
$$ps(t, X) = (t, X, D) \quad \text{za } X=0, 1, B$$

$$L(M) = (0+1)(0+1)0(0+1)^*$$



TM koja prihvata reči nad alfabetom $\{0, 1\}$ čiji je treći karakter 0.

$(0|1)(0|1)0(0|1)^*$



$$\begin{aligned} q_0 0 &\rightarrow q_1 0 R \\ q_0 1 &\rightarrow q_1 1 R \\ q_0 \square &\rightarrow q_{reject} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 0 &\rightarrow q_2 0 R \\ q_1 1 &\rightarrow q_2 1 R \\ q_1 \square &\rightarrow q_{reject} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 0 &\rightarrow q_{accept} \\ q_2 1 &\rightarrow q_{reject} \\ q_2 \square &\rightarrow q_{reject} \end{aligned}$$

TM koja prihvata palindorme nad alfabetom {a, b}

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

Ideja:

- pročitaj slovo, markiraj da je pročitano
- idi skroz desno "do kraja", do poslednje neobrađenog slova
- proveri da li je isti kao pročitani
 - ako jeste - nastavi dalje (test: 2. i (n-1), 3. i (n-2),...)
 - ako se obrade sve sa trake - ACCEPT
 - ako nije - REJECT

Kako uraditi test?

Različita rešenja

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

početna konfiguracija: na traci su zapisani simboli iz riječi, glava je pozicionirana na krajnji lijevi simbol

moguća stanja:

- **q0** – početno stanje,
- **qa** – na levoj strani reči je pronađen simbol a, glava se pozicionira na krajnji desni simbol,
- **qb** – na levoj strani riječi je pronađen simbol b, glava se pozicionira na krajnji desni simbol,
- **q'a** – glava je pozicionirana na krajnji desni simbol, mašina testira da li je on jednak a,
- **q'b** – glava je pozicionirana na krajnji desni simbol, mašina testira da li je on jednak b,
- **qL** – test je prošao, glava se pozicionira na krajnji lijevi simbol

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

početna konfiguracija: na traci su zapisani simboli iz riječi, glava je pozicionirana na krajnji lijevi simbol

moguća stanja:

- **q0** - početno stanje,
- **qa** - na levoj strani reči je pronađen simbol a, glava se pozicionira na krajnji desni simbol,
- **qb** - na levoj strani riječi je pronađen simbol b, glava se pozicionira na krajnji desni simbol,
- **q'a** - glava je pozicionirana na krajnji desni simbol, mašina testira da li je on jednak a,
- **q'b** - glava je pozicionirana na krajnji desni simbol, mašina testira da li je on jednak b,
- **qL** - test je prošao, glava se pozicionira na krajnji levi simbol

$$q_0 a \rightarrow q_a \square R$$

$$q_0 b \rightarrow q_b \square R$$

$$q_0 \square \rightarrow q_{\text{accept}}$$

$$q'_a a \rightarrow q_L \square L$$

$$q'_a b \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q'_a \square \rightarrow q_{\text{accept}}$$

$$q_a a \rightarrow q_a a R$$

$$q_a b \rightarrow q_a b R$$

$$q_a \square \rightarrow q'_a \square L$$

$$q'_b a \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q'_b b \rightarrow q_L \square L$$

$$q'_b \square \rightarrow q_{\text{accept}}$$

$$q_b a \rightarrow q_b a L$$

$$q_b b \rightarrow q_b b L$$

$$q_b \square \rightarrow q'_b \square L$$

$$q_L a \rightarrow q_L a L$$

$$q_L b \rightarrow q_L b L$$

$$q_L \square \rightarrow q_0 \square R$$

Realizacija pojedinih algoritama je jednostavnija korišćenjem mašina sa više traka
Tjuringove mašine sa više traka nisu moćnije od mašina sa jednom trakom.

Teorema

Neka je $k \geq 1$ celi broj. Tjuringova mašina M sa k traka se može konvertovati u Tjuringovu mašinu N sa jednom trakom.

Ideja dokaza

Dovoljno je posmatrati postupak konstruisanja ekvivalentne Tjuringove mašine M sa 2 trake. Za bilo koju reč $w \in \Sigma^*$ moraju važiti sledeće tvrdnje:

- mašina N prihvata riječ w ako i samo ako mašina M prihvata riječ w,
- mašina N ne prihvata riječ w ako i samo ako mašina M ne prihvata riječ w
- mašina N ne završava svoje izračunavanje za riječ w (ne dolazi u konačno stanje prihvatanja ili odbacivanja) ako i samo ako mašina M ne završava svoje izračunavanje za riječ w

Definiše se novi alfabet za mašinu N:

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{x' \mid x \in \Gamma\} \cup \{\#\}$$

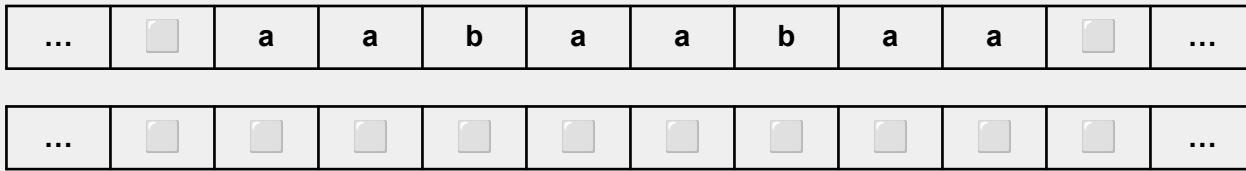
(Γ je alfabet mašine M, dodaju se novi x' i specijalni simbol #)

Nova mašina N simulira funkcionisanje stare na sedeći način:

- simboli sa svake trake su smješteni na jedinoj traci nove mašine
- nakon posljednjeg simbola trake n, a prije prvog simbola trake n+1, na traku se dodaje simbol #
- ' vrednosti simuliraju pozicije glava na ostalim trakama mašine
- na mestu na kojem glava upisuje simbol, umjesto njegove vrednosti y se upisuje y', a prethodna vrednost označena sa ' se menja standardnom vrijednošću,
- uvode se dodatna stanja

TM sa dve trake koja prihvata palindorme nad alfabetom {a, b}





početna konfiguracija: na traci su zapisani simboli iz riječi, glava je pozicionirana na krajnji levi simbol

moguća stanja:

- q_0 – početno stanje i prepisivanje simbola na drugu traku,
- q_c – povratak jedne od glava na početak,
- q_r – proveravanje je toku

$$\begin{array}{ll}
 q_0 a \square \rightarrow q_0 aa RR & q_r aa \rightarrow q_r aa RL \\
 q_0 b \square \rightarrow q_0 bb RR & q_r bb \rightarrow q_r bb RL \\
 q_0 \square \square \rightarrow q_c \square \square LN & q_r ab \rightarrow q_{\text{reject}} \\
 & q_r ba \rightarrow q_{\text{reject}} \\
 q_c a \square \rightarrow q_c a \square LN & q_r \square \square \rightarrow q_{\text{accept}} \\
 q_c b \square \rightarrow q_c b \square LN & \\
 q_c \square \square \rightarrow q_r \square \square RL &
 \end{array}$$

TM koja prihvata reči oblika $a^n b^n c^n$, $n > 0$



...		a	a	a	b	b	b	c	c	c		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

Ideja:
jedna traka

1. proveriti da li je ispravan format:
prvo nekoliko simbola a, pa nekoliko simbola b, pa nekoliko simbola c
2. proveriti kardinalnost, da li ih ima isto

...		a	a	a	b	b	b	c	c	c		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

$$q_0 \square \rightarrow q^{\text{accept}}$$

$$q_0 a \rightarrow q_a a R$$

$$q_0 b \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_0 c \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_a \square \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_a a \rightarrow q_a a R$$

$$q_a b \rightarrow q_b b R$$

$$q_a c \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_b \square \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_b a \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_b b \rightarrow q_b b R$$

$$q_b c \rightarrow q_c c R$$

$$q_c a \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_c b \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_c c \rightarrow q_c c R$$

$$q_c \square \rightarrow q_r \square L$$

$$q_r a \rightarrow q_r a L$$

$$q_r b \rightarrow q_r b L$$

$$q_r c \rightarrow q_r c L$$

$$q_r \square \rightarrow q'_0 \square R$$

$$q_r d \rightarrow q_r d L$$

- za brojanje uvodimo novi simbol d
- sledeći slajd

2

...		a	a	a	b	b	b	c	c	c		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

...		d	a	a	d	b	b	d	c	c		...
-----	--	----------	---	---	----------	---	---	----------	---	---	--	-----

nisu dve trake, samo ilustracija promene

$$q'_0 \square \rightarrow q_{\text{accept}}$$

$$q'_0 a \rightarrow q'_a dR$$

$$q'_0 b \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q'_0 c \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q'_0 d \rightarrow q'_0 dR$$

$$q'_b \square \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q'_b b \rightarrow q'_b bR$$

$$q'_b c \rightarrow q_r dL$$

$$q'_b d \rightarrow q'_b dR$$

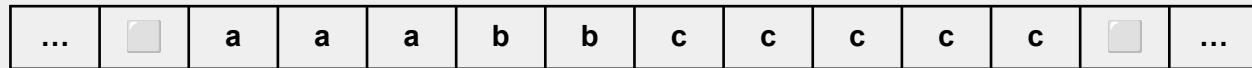
$$q'_a \square \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q'_a a \rightarrow q'_a aR$$

$$q'_a b \rightarrow q'_b dR$$

$$q'_a d \rightarrow q'_a dR$$

TM koja prihvata reči oblika $a^m b^n c^{(n+m)}$, $n, m \geq 0$



...			a	a	a	b	b	c	c	c	c	c	...
-----	--	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

1. proveriti da li je ispravan format: prvo nekoliko simbola a, pa nekoliko simbola b, pa nekoliko simbola c.
Obratiti pažnju, ne mora biti nijedno a i nijedno b
2. proveriti kardinalnost

$$\begin{aligned} q_0 \square &\rightarrow q_{\text{accept}} \\ q_0 a &\rightarrow q_a aR \\ q_0 b &\rightarrow q_b bR \\ q_0 c &\rightarrow q_{\text{reject}} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} q_b \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_b a &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_b b &\rightarrow q_b bR \\ q_b c &\rightarrow q_c cR \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} q_L a &\rightarrow q_L aL \\ q_L b &\rightarrow q_L bL \\ q_L c &\rightarrow q_L cL \\ q_L \square &\rightarrow q'_0 \square R \\ q_L d &\rightarrow q_L dL \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} q_a \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_a a &\rightarrow q_a aR \\ q_a b &\rightarrow q_b bR \\ q_a c &\rightarrow q_c cR \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} q_c a &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_c b &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_c c &\rightarrow q_c cR \\ q_c \square &\rightarrow q_L \square L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_0 \square &\rightarrow q_{\text{accept}} \\ q'_0 a &\rightarrow q'_a aN \\ q'_0 b &\rightarrow q'_b bN \\ q'_0 c &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_0 d &\rightarrow q'_0 dR \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} q'_a \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_a a &\rightarrow q'_c dR \\ q'_b b &\rightarrow q'_c dR \\ q'_c c &\rightarrow q_r dL \\ q'_c d &\rightarrow q'_c dR \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} q'_c \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_c a &\rightarrow q'_c aR \\ q'_c b &\rightarrow q'_c bR \\ q'_c c &\rightarrow q_r dL \\ q'_c d &\rightarrow q'_c dR \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} q_r \square &\rightarrow q'_0 \square R \\ q_r a &\rightarrow q_r aL \\ q_r b &\rightarrow q_r bL \\ q_r d &\rightarrow q_r dL \end{aligned}$$

Zadatak

Realizovati TM sa tri trake koji realizuje množenje prirodnih brojeva.

ulaz: brojevi predstavljeni jedinicama: 1111_111