

Formalne metode

u softverskom inženjerstvu

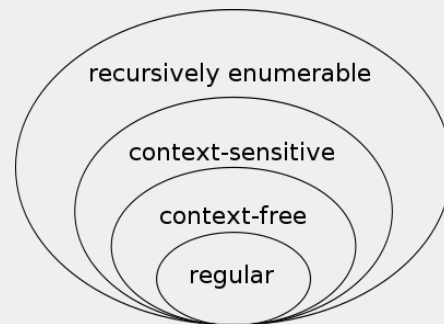
12 LBA, Tjuringova mašina

ETFBL 24-25

Dunja Vrbaški

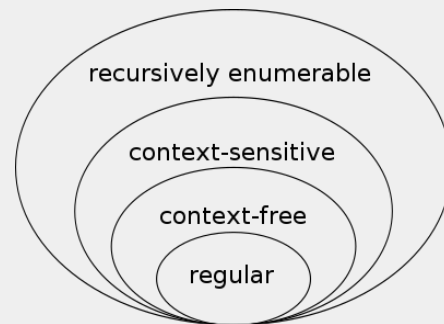
- regularna gramatika (regularni izrazi) generiše reči regularanog jezika
- konačni automat prepoznaje reči regularnog jezika
- CFG gramatika generiše reči CFG jezika
- potisni automat prepoznaje reči CFG jezika
- jednostavna memorija: stek, neograničeno
- čitanje sa ulaza: napred
- CSG gramatika generiše reči CSG jezika
- linearno ograničeni automat prepoznaje reči CSG jezika
- memorija: ograničena
- čitanje: u oba pravca
- pisanje

$a^n b^m$	RL
$a^n b^n$	CFL
$a^n b^n c^n$	CSL

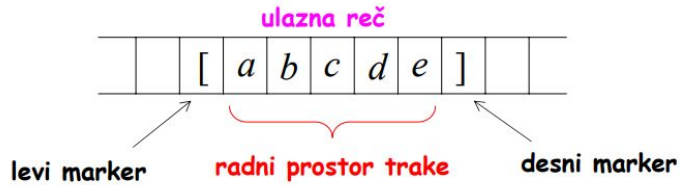


Linearno ograničeni automat

- konačni automat + ograničena memorija + čitanje + pisanje
- ← jednostavnija tjuringova mašina (linearno ograničena TM)



eng. Linear-bounded TM



- glava trake se kreće levo i desno
- čitanje i pisanje
- ograničen prostor (specijalni znaci) u kom je ulaz i vrši se izračunavanje
- linearno ograničen: linearna funkcija dužine ulaza

LBA za $a^n b^n c^n$

[a	a	a	b	b	b	c	c	c]
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

...

[A	a	a	B	b	b	C	c	c]
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

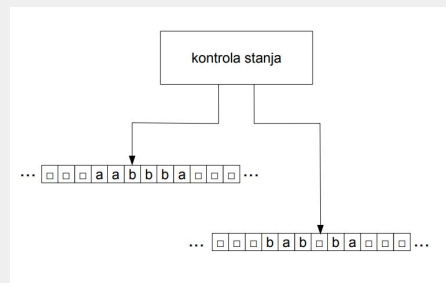
- pročitaj 'a', promeni u 'A'
 - traži desno prvo 'b' (čitaj 'a' sve do prvog 'b')
 - promeni 'b' u 'B'
 - traži desno prvo 'c'
 - promeni 'c' u 'C'
 - traži levo prvo 'a'
 - ponavljaj
-
- moraju ostati sva velika slova
 - za svaku akciju postoji odgovarajuće stanje

Tjuringova mašina

→ konačni automat + neograničena memorija + čitanje + pisanje

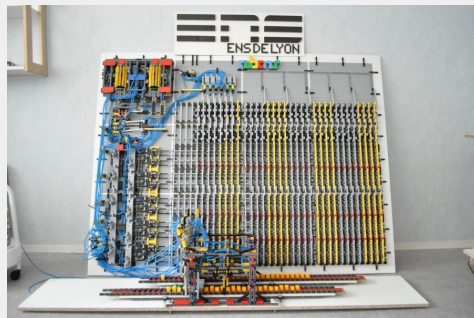
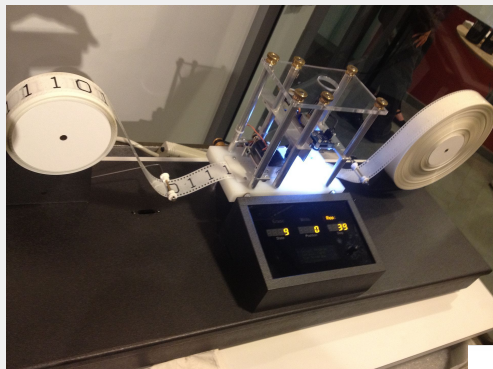
TM:

- jedna ili više neograničenih traka - memorija
- svaka traka ima svoj alfabet i uključen je i prazan simbol
- svaka traka ima odgovarajuću glavu
- pokazuje na jednu ćeliju trake
- na tom mestu se čita ili piše
- automat

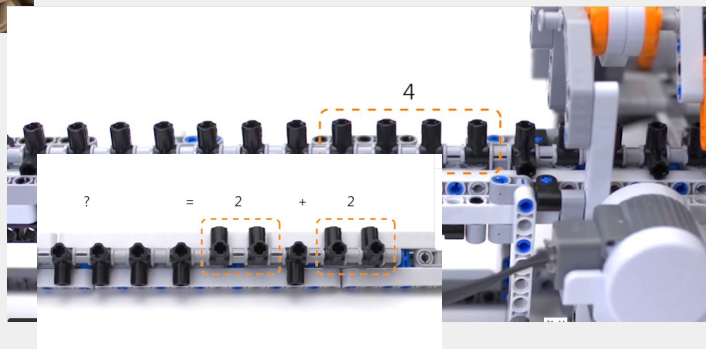


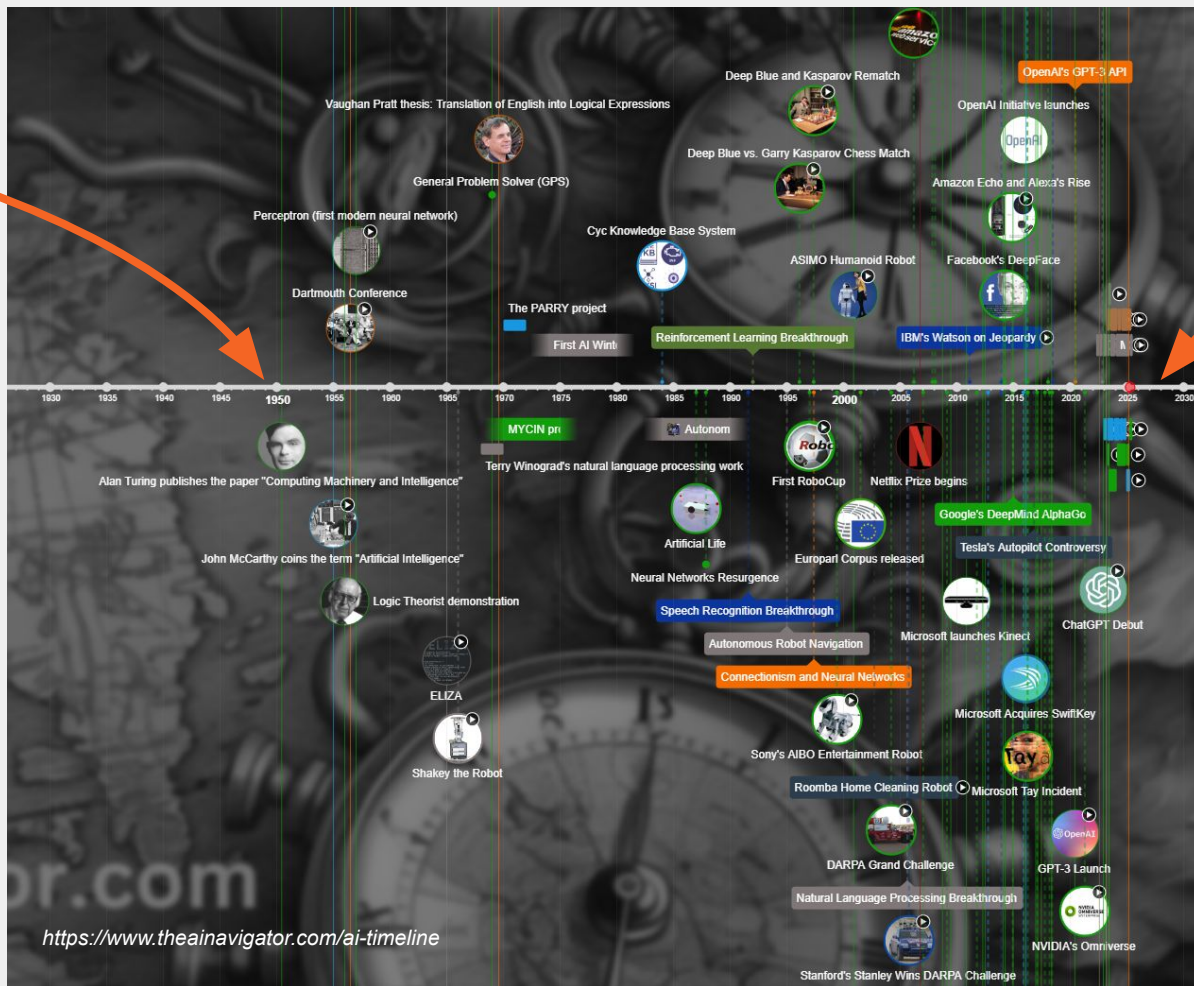
Svaka efektivno izračunljiva funkcija može biti izračunata i preko TM.

algoritam \rightarrow TM



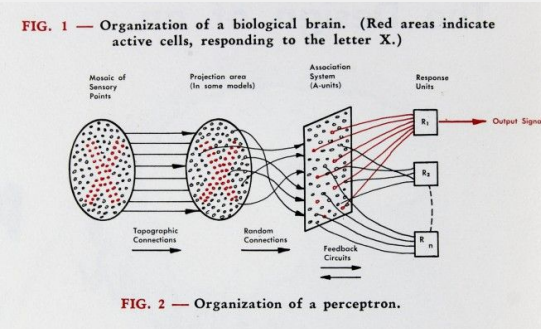
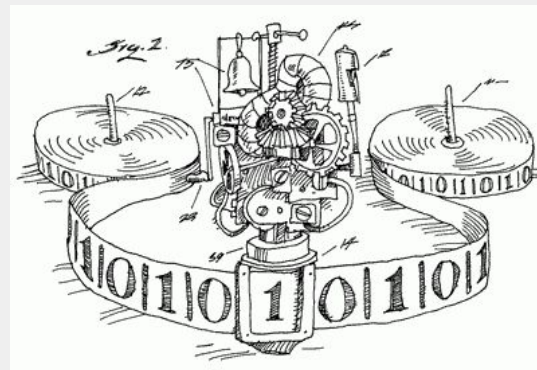
Wikipedia TM
YouTube TM Minecraft
Vimeo TM Lego





Demistifikacija

- Tjuring - šta sve možemo da izračunamo (i zašto imamo kripto)
- Koji problemi su odlučivi?
- Čomski - prirodni → formalni jezici
- biologija → računar perceptron



The Design of an Intelligent Automaton, Rosenblatt, 1958.

Tjuringova mašina

$$M = (\Sigma, \Gamma, Q, \sigma, q, q_{accept}, q_{reject})$$

- Σ - alfabet ulaznih simbola koji ne sadrži prazan simbol
- Γ - alfabet trake koji sadrži prazan simbol
- Q - skup stanja
- σ - funkcija prelaza, $\sigma: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$
- q - inicijalno stanje
- q_{accept} - stanje prihvatanja
- q_{reject} - stanje odbacivanja

Korak izračunavanja

$$ra_1a_2...a_k \rightarrow r'a_1'a_2'...a_k'x_1x_2...x_k$$

- stanje je r , svaka glava pokazuje na neku ćeliju na odgovarajućoj traci
- čitaju se simboli na trakama $(a_1, a_2, a_3...a_k)$
- prelazi se u novo stanje r'
- piše se na trakama $(a_1', a_2', ...a_k')$
- svaka glava se pomera ili ne $(x_1, x_2, ...x_k)$

Ako je za svaku kombinaciju trenutnog stanja i trenutnih simbola na trakama jednoznačno određen sledeći korak radi se o determinističkoj mašini.

Zaustavljanje

- ulazi u stanje prihvatanja ili odbacivanja
- ne ulazi ni u jedno od ova dva stanja

(to znači da...)

Za ovako definisanu mašinu:

Mašina M prihvata neku reč ako se izvršavanje završi u stanju prihvatanja.
(obratiti pažnju)

Mašina M prihvata jezik ako prihvata sve reči tog jezika; $L(M)$

Jezici koje prihvata neka \mathcal{M} se zovu: **rekurzivno nabrojivi jezici**
(eng. recursively enumerable)

Konstruisati TM koja proverava 3. simbol, ako je 0 onda prihvata, a ako nije, TM se beskonačno izvršava.

$M = (\{p, q, r, s, t\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, p, B, \{s\})$

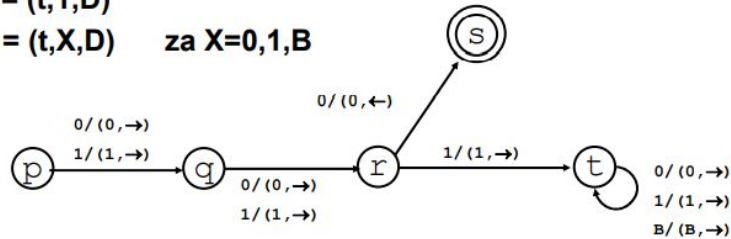
$\delta(p, X) = (q, X, D)$ za $X=0, 1$

$\delta(q, X) = (r, X, D)$ za $X=0, 1$

$\delta(r, 0) = (s, 0, L)$

$\delta(r, 1) = (t, 1, D)$

$\delta(t, X) = (t, X, D)$ za $X=0, 1, B$

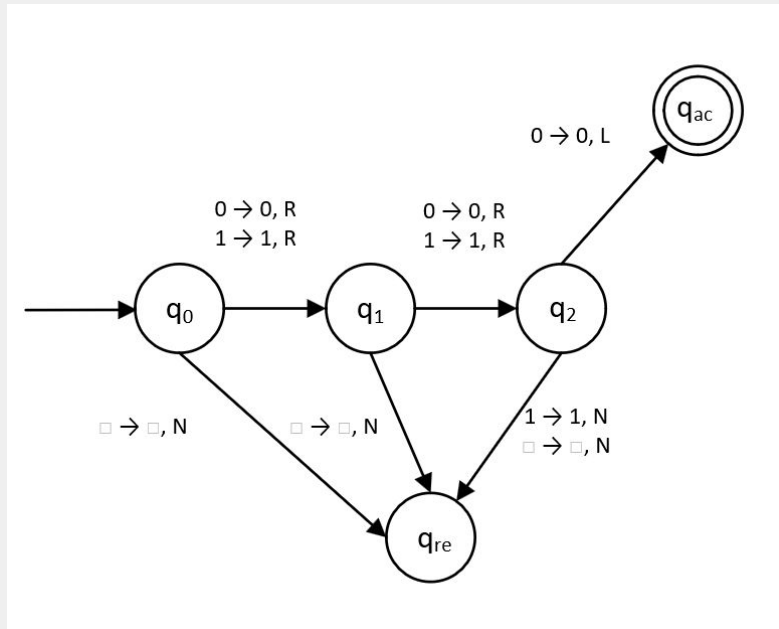


$L(M) = (0+1)(0+1)0(0+1)^*$

regularan jezik

TM koja prihvata reči nad alfabetom $\{0, 1\}$ čiji je treći karakter 0.

$(0|1)(0|1)0(0|1)^*$



$q_0 0 \rightarrow q_1 0R$

$q_0 1 \rightarrow q_1 1R$

$q_0 \square \rightarrow q_{\text{reject}}$

$q_1 0 \rightarrow q_2 0R$

$q_1 1 \rightarrow q_2 1R$

$q_1 \square \rightarrow q_{\text{reject}}$

$q_2 0 \rightarrow q_{\text{accept}}$

$q_2 1 \rightarrow q_{\text{reject}}$

$q_2 \square \rightarrow q_{\text{reject}}$

regularan jezik

TM koja prihvata palindorme nad alfabetom {a, b}

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

Kontekstno slobodan jezik

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

Ideja:

- pročitaj slovo, markiraj da je pročitano
- idi skroz desno "do kraja", do poslednje neobrađenog slova
- proveriti da li je isti kao pročitani
 - ako jeste - nastavi dalje (test: 2. i (n-1), 3. i (n-2),...)
 - ako se obrade sve sa trake - ACCEPT
 - ako nije - REJECT

Kako uraditi test?

Različita rešenja

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

početna konfiguracija: na traci su zapisani simboli iz riječi, glava je pozicionirana na krajnji lijevi simbol

moгуća stanja:

- **q0** – početno stanje,
- **qa** – na levoj strani reči je pronađen simbol a, glava se pozicionira na krajnji desni simbol,
- **qb** – na levoj strani riječi je pronađen simbol b, glava se pozicionira na krajnji desni simbol,
- **q'a** – glava je pozicionirana na krajnji desni simbol, mašina testira da li je on jednak a,
- **q'b** – glava je pozicionirana na krajnji desni simbol, mašina testira da li je on jednak b,
- **qL** – test je prošao, glava se pozicionira na krajnji lijevi simbol

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

početna konfiguracija: na traci su zapisani simboli iz riječi, glava je pozicionirana na krajnji lijevi simbol

moгуća stanja:

- **q0** – početno stanje,
- **qa** – na levoj strani reči je pronađen simbol a, glava se pozicionira na krajnji desni simbol,
- **qb** – na levoj strani riječi je pronađen simbol b, glava se pozicionira na krajnji desni simbol,
- **q'a** – glava je pozicionirana na krajnji desni simbol, mašina testira da li je on jednak a,
- **q'b** – glava je pozicionirana na krajnji desni simbol, mašina testira da li je on jednak b,
- **qL** – test je prošao, glava se pozicionira na krajnji levi simbol

$$q_0a \rightarrow q_a \square R$$

$$q_0b \rightarrow q_b \square R$$

$$q_0 \square \rightarrow q_{\text{accept}}$$

$$q_aa \rightarrow q_aaR$$

$$q_ab \rightarrow q_abR$$

$$q_a \square \rightarrow q'_a \square L$$

$$q_ba \rightarrow q_baR$$

$$q_bb \rightarrow q_bbR$$

$$q_b \square \rightarrow q'_b \square L$$

$$q'_aa \rightarrow q_L \square L$$

$$q'_ab \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q'_a \square \rightarrow q_{\text{accept}}$$

$$q'_ba \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q'_bb \rightarrow q_L \square L$$

$$q'_b \square \rightarrow q_{\text{accept}}$$

$$q_La \rightarrow q_LaL$$

$$q_Lb \rightarrow q_LbL$$

$$q_L \square \rightarrow q_0 \square R$$

Realizacija pojedinih algoritama je jednostavnija korišćenjem mašina sa više traka

Tjuringove mašine sa više traka nisu moćnije od mašina sa jednom trakom.

Teorema

Neka je $k \geq 1$ celi broj. Tjuringova mašina M sa k traka se može konvertovati u Tjuringovu mašinu N sa jednom trakom.

Ideja dokaza

Dovoljno je posmatrati postupak konstruisanja ekvivalentne Tjuringove mašine M sa 2 trake. Za bilo koju reč $w \in \Sigma^*$ moraju važiti sledeće tvrdnje:

- mašina N prihvata riječ w ako i samo ako mašina M prihvata riječ w ,
- mašina N ne prihvata riječ w ako i samo ako mašina M ne prihvata riječ w
- mašina N ne završava svoje izračunavanje za riječ w (ne dolazi u konačno stanje prihvatanja ili odbacivanja) ako i samo ako mašina M ne završava svoje izračunavanje za riječ w

Definiše se novi alfabet za mašinu N:

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{x' \mid x \in \Gamma\} \cup \{\#\}$$

(Γ je alfabet mašine M, dodaju se novi x' i specijalni simbol #)

Nova mašina N simulira funkcionisanje stare na sedeći način:

- simboli sa svake trake su smješteni na jedinoj traci nove mašine
- nakon posljednjeg simbola trake n , a prije prvog simbola trake $n+1$, na traku se dodaje simbol #
- 'vrednosti simuliraju pozicije glava na ostalim trakama mašine
- na mestu na kojem glava upisuje simbol, umjesto njegove vrednosti y se upisuje y' , a prethodna vrednost označena sa ' se menja standardnom vrijednošću,
- uvode se dodatna stanja

TM sa dve trake koja prihvata palindorme nad alfabetom {a, b}

...		a	a	b	a	a	b	a	a		...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

...	□	a	a	b	a	a	b	a	a	□	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

...	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

početna konfiguracija: na traci su zapisani simboli iz riječi, glava je pozicionirana na krajnji levi simbol

moguća stanja:

- q_0 – početno stanje i prepisivanje simbola na drugu traku,
- q_c – povratak jedne od glava na početak,
- q_r – proveravanje je toku

$$q_0 a \square \rightarrow q_0 aaRR$$

$$q_0 b \square \rightarrow q_0 bbRR$$

$$q_0 \square \square \rightarrow q_c \square \square LN$$

$$q_c a \square \rightarrow q_c a \square LN$$

$$q_c b \square \rightarrow q_c b \square LN$$

$$q_c \square \square \rightarrow q_r \square \square RL$$

$$q_r aa \rightarrow q_r aa RL$$



$$q_r bb \rightarrow q_r bb RL$$



$$q_r ab \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_r ba \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_r \square \square \rightarrow q_{\text{accept}}$$

TM koja prihvata reči oblika $a^n b^n c^n$, $n > 0$



...		a	a	a	b	b	b	c	c	c		...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

...		a	a	a	b	b	b	c	c	c		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

Ideja:
jedna traka

1. proveriti da li je ispravan format:
prvo nekoliko simbola a, pa nekoliko simbola b, pa nekoliko simbola c
2. proveriti kardinalnost, da li ih ima isto

1

...		a	a	a	b	b	b	c	c	c		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

$$q_0 \square \rightarrow q^{\text{accept}}$$

$$q_0 a \rightarrow q_a aR$$

$$q_0 b \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_0 c \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_b \square \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_b a \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_b b \rightarrow q_b bR$$

$$q_b c \rightarrow q_c cR$$

$$q_r a \rightarrow q_r aL$$

$$q_r b \rightarrow q_r bL$$

$$q_r c \rightarrow q_r cL$$

$$q_r \square \rightarrow q'_0 \square R$$

$$q_r d \rightarrow q_r dL$$

$$q_a \square \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_a a \rightarrow q_a aR$$

$$q_a b \rightarrow q_b bR$$

$$q_a c \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_c a \rightarrow q_{\text{reject}}$$





$$q_c b \rightarrow q_{\text{reject}}$$

$$q_c c \rightarrow q_c cR$$

$$q_c \square \rightarrow q_r \square L$$

- za brojanje uvodimo novi simbol d
- sledeći slajd

2

...		a	a	a	b	b	b	c	c	c		...
...		d	a	a	d	b	b	d	c	c		...



nisu dve trake, samo ilustracija promene

$$\begin{aligned} q'_0 \square &\rightarrow q_{\text{accept}} \\ q'_0 a &\rightarrow q'_a dR \\ q'_0 b &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_0 c &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_0 d &\rightarrow q'_0 dR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_b \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_b b &\rightarrow q'_b bR \\ q'_b c &\rightarrow q_r dL \\ q'_b d &\rightarrow q'_b dR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_a \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_a a &\rightarrow q'_a aR \\ q'_a b &\rightarrow q'_b dR \\ q'_a d &\rightarrow q'_a dR \end{aligned}$$

TM koja prihvata reči oblika $a^m b^n c^{(n+m)}$, $n, m \geq 0$

...		a	a	a	b	b	c	c	c	c	c		...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

...		a	a	a	b	b	c	c	c	c	c		...
-----	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	-----

1. proveriti da li je ispravan format: prvo nekoliko simbola a, pa nekoliko simbola b, pa nekoliko simbola c.
Obratiti pažnju, ne mora biti nijedno a i nijedno b
2. proveriti kardinalnost

$$\begin{aligned} q_0 \square &\rightarrow q_{\text{accept}} \\ q_0 a &\rightarrow q_a aR \\ q_0 b &\rightarrow q_b bR \\ q_0 c &\rightarrow q_{\text{reject}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_b \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_b a &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_b b &\rightarrow q_b bR \\ q_b c &\rightarrow q_c cR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_L a &\rightarrow q_L aL \\ q_L b &\rightarrow q_L bL \\ q_L c &\rightarrow q_L cL \\ q_L \square &\rightarrow q'_0 \square R \\ q_L d &\rightarrow q_L dL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_a \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_a a &\rightarrow q_a aR \\ q_a b &\rightarrow q_b bR \\ q_a c &\rightarrow q_c cR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_c a &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_c b &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q_c c &\rightarrow q_c cR \\ q_c \square &\rightarrow q_L \square L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_0 \square &\rightarrow q_{\text{accept}} \\ q'_0 a &\rightarrow q'_a aN \\ q'_0 b &\rightarrow q'_b bN \\ q'_0 c &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_0 d &\rightarrow q'_0 dR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_a \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_a a &\rightarrow q'_c dR \\ q'_b b &\rightarrow q'_c dR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_c \square &\rightarrow q_{\text{reject}} \\ q'_c a &\rightarrow q'_c aR \\ q'_c b &\rightarrow q'_c bR \\ q'_c c &\rightarrow q_r dL \\ q'_c d &\rightarrow q'_c dR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_r \square &\rightarrow q'_0 \square R \\ q_r a &\rightarrow q_r aL \\ q_r b &\rightarrow q_r bL \\ q_r d &\rightarrow q_r dL \end{aligned}$$

Zadatak

Realizovati TM sa tri trake koji realizuje množenje prirodnih brojeva.

ulaz: brojevi predstavljeni jedinicama: 1111_111