* Развој периодичног сигнала $x(t)$ у Фуријеов ред

услов $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt < \infty$ ← мора да постоји / важи

или $\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < \infty$

1° Основни облик

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – основна угаона (кружна) ~~фреквенција~~ учестаност

T – периода сигнала

n – редни број хармоника

a_n, b_n – коефицијенти Фуријеовог реда / Фуријеови коеф.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot \cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2° Изведени облик

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ – амплитуда n-тог хармоника

$\theta_n = \mathrm{arctg}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$ – фаза n-тог хармоника

3° Комплексни облик – најчешћи облик !

Полази се од основног облика и користе идентитети

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) \longrightarrow \text{у } 1°$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t}$$

$a_n = a_{-n}$

$b_n = -b_{-n}$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$ → инв. Фуријеов трансф. комплексног облика

$$\underline{X_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

X_n - Фуријеов комплексни спектар

У стварности немамо негативне фреквенције, а ово је само математичка интерпретација услед комплексног рачуна.

* у израз за X_n уврстимо a_n и b_n, па добијамо

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$ израз за комплексни спектар сигнала $x(t)$

$$\boxed{X_n = |X_n| e^{j\theta_n}}$$

$|X_n|$ - амплитудски спектар → парна ф-ја

θ_n - фазни спектар → непарна ф-ја

!!

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\hat{X_n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

Фуријеов трансформ. пар

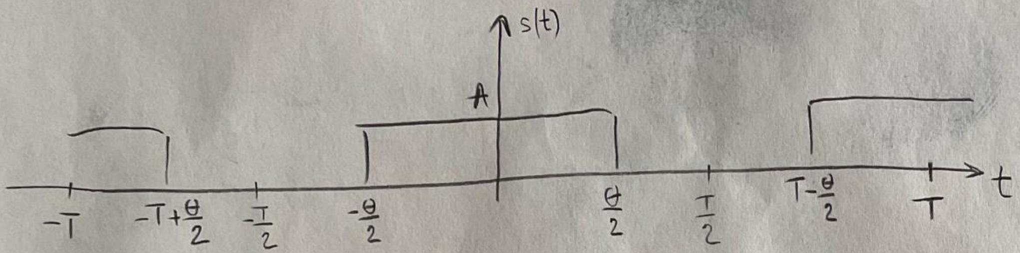
упоредимо 2° и 3° облик

$$|X_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \Rightarrow |X_n| = \frac{1}{2} C_n$$ → разлика реалног и комплексног спектра

$$\theta_n =$$

компоненте у компл. спектру имају 2x мању амплитуду, што је последица негативних фрекв. Снага се дијели између позитивних и негативних фрекв.

1. Извршити спектралну анализу поворке правоугаоних импулса са слике.



$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \frac{\theta}{2} \\ 0, & \frac{\theta}{2} < |t| < T - \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$s(t) = s(t+nT) \quad , n = \pm 1, \pm 2 \dots$$

$T = T_0$ - основна периода сигнала

1°

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T s(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} A\cos(n\omega_0 t) = \frac{2A}{T}\cdot\frac{1}{n\omega_0}\cdot\sin(n\omega_0 t)\Big|_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{2A}{T}\cdot\frac{1}{n\omega_0}\cdot\left[\sin\left(n\omega_0\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(-n\omega_0\frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{4A}{T}\cdot\frac{1}{n\omega_0}\cdot\sin\left(n\omega_0\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \frac{4A}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{n\cdot 2\pi}\cdot\sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\theta}{\cancel{2}}\right) = \frac{2A}{n\pi}\cdot\sin\left(n\pi\frac{\theta}{T}\right)$$

$\boxed{\alpha = \frac{\theta}{T}}$ - фактор (режима) попуне

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [rad/s]$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi}\cdot\sin(n\pi\alpha)\cdot\frac{\alpha}{\alpha}\boxed{= 2A\alpha\cdot\frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha}}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T s(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} A\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt = -\frac{2A}{T}\cdot\frac{1}{n\omega_0}\cdot\cos(n\omega_0 t)\Big|_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} = -\frac{2A}{T}\frac{1}{n\omega_0}\left(\cos n\omega_0\frac{\theta}{2} - \cos\left(-n\omega_0\frac{\theta}{2}\right)\right) =$$

$$= 0$$

$$s(t) = A\alpha + \sum_{n=1}^{+\infty} 2A\alpha\cdot\frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha}\cdot\cos(n\omega_0 t)$$

=> развој парне ф-је представља косинусни ред

$$\underline{F_n} = A\alpha\cdot\frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha}\boxed{= A\alpha\cdot \mathrm{sinc}(n\alpha)}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_T s(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} A\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{A}{T}\cdot\frac{-1}{jn\omega_0}\cdot e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} =$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} &= \cos x\\ \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j} &= \sin x\end{aligned}}$$

$$= \frac{-A}{jn\omega_0 T}\left(e^{-jn\omega_0\frac{\theta}{2}} - e^{jn\omega_0\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{A}{jn\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T}\left(e^{jn\omega_0\frac{\theta}{2}} - e^{-jn\omega_0\frac{\theta}{2}}\right) =$$

$$= \frac{A}{n\pi}\cdot\sin\left(n\omega_0\frac{\theta}{2}\right) = \frac{A}{n\pi}\cdot\sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\theta}{2}\right) = \frac{A}{n\pi}\cdot\sin(n\pi\alpha)\Big|\cdot\frac{\alpha}{\alpha} =$$

$$= A\alpha\cdot\frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} \boxed{= A\alpha\cdot\mathrm{sinc}(n\alpha)} \qquad \boxed{\mathrm{sinc}(0) = 1!}$$

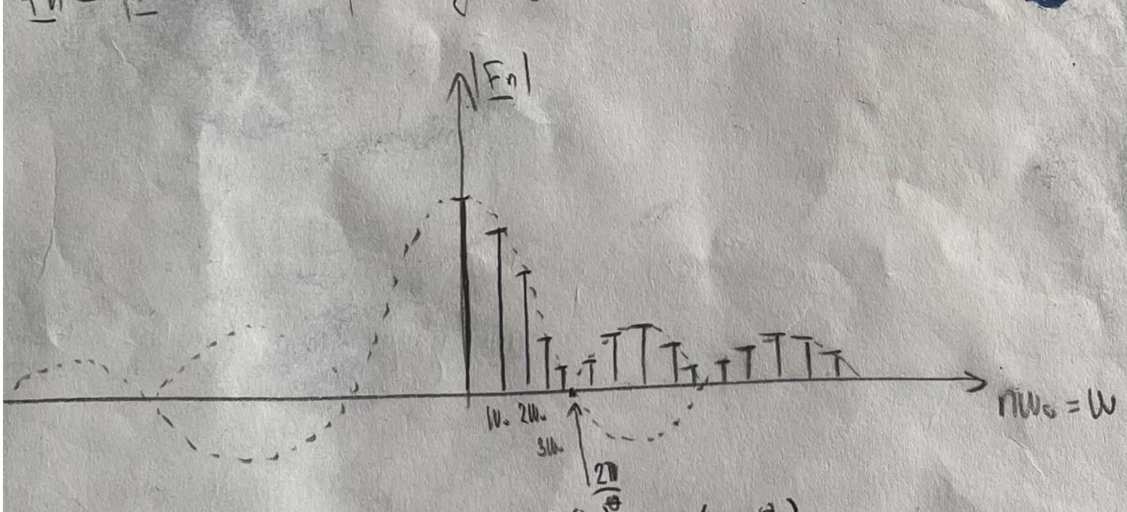
$$|F_n| = |A\alpha\cdot\mathrm{sinc}(n\alpha)|$$

$$\underline{F_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \Rightarrow |\underline{F_n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\arg\{\underline{F_n}\} = \mathrm{arctg}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$\arg\{\underline{F_{-n}}\} = -\arg\{\underline{F_n}\} \Rightarrow$ непарна ф-ја учестаности

$\underline{F_n} = |\underline{F_n}|\cdot e^{j\theta_n}$, $\theta_n = \arg\{\underline{F_n}\}$ $\qquad |F_n| = f(n\omega_0)$



$$\sin(n\pi\alpha) = \sin\left(n\pi\frac{\theta}{T}\right) = \sin\left(n\omega_0\frac{\theta}{2}\right) = 0 \qquad \omega = \frac{2\pi}{\theta}\cdot k$$

$$n\omega_0\frac{\theta}{2} = \pm k\pi \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{\theta}\cdot k$$

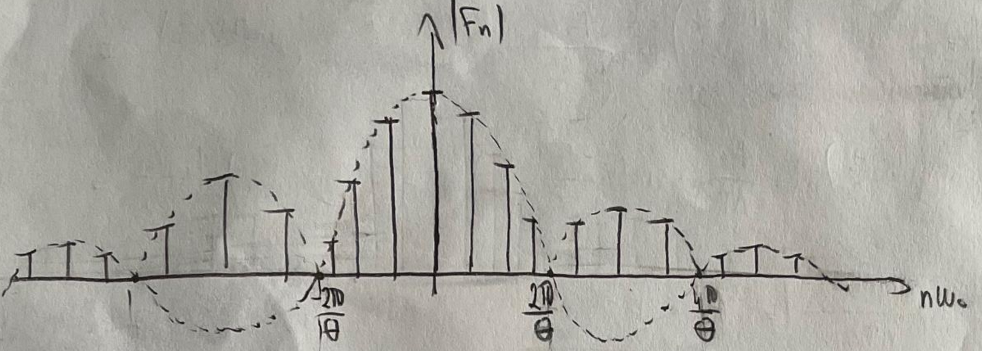
$k = 1$ (прва нула) $\Rightarrow \boxed{n\omega_0 = \frac{2\pi}{\theta}}$ $\qquad \boxed{\Rightarrow \omega = \omega_0\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot k}$

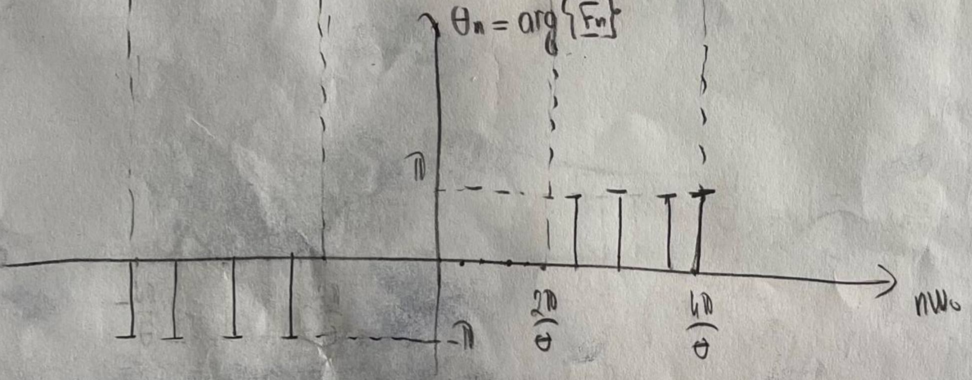
$$n 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{\theta} \Rightarrow \boxed{n f_0 = \frac{1}{\theta}}$$

број дискретних компоненти до прве нуле у спектру: $\frac{\frac{1}{\theta}}{f_0} = \frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{T}} \boxed{= \frac{T}{\theta} = \frac{1}{\alpha}}$

$\theta = 2s$
$T = 8s$ $\Rightarrow L = \frac{\theta}{T} = \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \frac{1}{L} = 4$

$(n\omega_0) = \omega = \omega_0 \cdot \frac{1}{L} \cdot k = 4\omega_0 \cdot k$





$-\frac{2\pi}{\theta} < n\omega_0 < \frac{2\pi}{\theta}$, $F_n = |F_n| \Rightarrow \theta_n = 0$

$\frac{2\pi}{\theta} < n\omega_0 < \frac{4\pi}{\theta}$, $F_n = -|F_n| = |F_n| e^{\pm j\pi} \Rightarrow \theta_n = \pm\pi$

$|F_n| = 0$, можемо усвојити било коју вриједност за θ_n јер

$F_n = |F_n| e^{j\theta_n} = 0 \cdot e^{j\theta_n} = 0$; често се узима $\theta_n = 0$ или $\theta_n = \pm\pi$, али увијек мора да важи $\underline{\underline{\theta_{-n} = -\theta_n}}$

$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2$ – код пер. сигнала говоримо о средњој снази јер је енергија временски бесконачних сигнала бесконачна

$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} s^2(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{\theta}{2}} A^2\,dt = \frac{2A^2}{T}\cdot\frac{\theta}{2} = \frac{A^2\theta}{T} = \boxed{= \frac{1}{4} = 0,25\,[V^2]}$

$\begin{pmatrix} A = 1 \\ L = \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$P' = |F_0|^2 + 2|F_1|^2 + 2|F_2|^2 + 2|F_3|^2 + 2|F_4|^2$

$|F_1| = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$

$|F_4| = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$

$|F_2| = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right)}{2\pi \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi}$

$|F_3| = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\pi} = \frac{\sqrt{2}}{6\pi}$

$P' = \frac{1}{4}^2 + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{6\pi}\right)^2 =$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} = \frac{1}{16} + \frac{29}{18\pi^2}\ [V^2]$

$= 0,22\,[V^2]$
$0,22574\,[V^2]$

$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{0,22}{0,25} \cong 90\%$