1. a) Дефинисати простор елементарних догађаја и случајан догађај. Навести бар 2 примјера простора елементарних догађаја и случајних догађаја.

Скуп Ω свих могућих исхода неког опита назива се простор елементарних догађаја.
Случајан догађај (догађај) је било који подскуп скупа Ω
Немогућ догађај означавамо са $\emptyset$, а Ω је сигуран дог

Примјер 1: Баца се коцка и региструје се број који је пао на горњој страни. Нека је A догађај који означава да је пао паран број. Тада је
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ и $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ гдје је ω_k - пао је број k.
Примјер 2: Новчић се баца 4 пута и региструје се колик је укупно пута пало писмо. Нека је A догађај: број писама је једнак броју грбова. Тада је
$\Omega = \{GGGG, GGGP, \ldots, PPPP\}$. Број елемената скупа Ω је $2^4 = 16$. Догађај $A = \{GGPP, GPGP, GPPG, PGGP, PGPG, PPGG\}$ и има 6 елемената.

1. б) Дефинисати σ-поље догађаја. Навести два примјера σ-поља догађаја.

Нека је Ω простор елементарних догађаја и $P(\Omega)$ фамилија свих подскупова од Ω. Скуп $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ називамо σ-поље догађаја ако вриједи:

(F1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(F2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(F3) $(\forall i \in \mathbb{N})\, A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$

Примјер 1: Нека је Ω произвољан скуп и $\mathcal{F}=\{\emptyset, \Omega\}$. Тада је $\mathcal{F}$ σ-поље догађаја

Примјер 2: Нека је $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$, фамилија $\mathcal{F}=\{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1,\omega_2\}\}$ је σ-поље догађаја.

1.c) Нека је $\mathcal{F}$ σ-поље догађаја. Доказати:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A\cap B,\ A\setminus B \in \mathcal{F}$

(3) $A_i \in \mathcal{F},\ i\in\mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$

(1) из $(F_1) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F} \overset{(F_2)}{\Rightarrow} \Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A, B \in \mathcal{F} \overset{(F_2)}{\Rightarrow} A^c, B^c \in \mathcal{F} \overset{(F_2)}{\Rightarrow} A^c \cup B^c \in \mathcal{F} \overset{(F_2)}{\Rightarrow} (A^c\cup B^c)^c = A\cap B \in \mathcal{F}$

$A, B \in \mathcal{F} \overset{(F_2)}{\Rightarrow} A, B^c \in \mathcal{F} \overset{(2)}{\Rightarrow} A\cap B^c = A\setminus B \in \mathcal{F}$

(3) $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c$

1.d) Аксиоме теорије вјероватноће

Нека је Ω простор елементарних догађаја и $\mathcal{F}$ σ-поље догађаја. Ф-ја $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ је вјероватноћа ако важи:

1. $P(A) \geq 0,\ (\forall A\in\mathcal{F})$ - ненегативност
2. $P(\Omega)=1$ - нормираност
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ за $\forall A_i \in \mathcal{F}$ и $i\in\mathbb{N}$ такве да $A_i\cap A_j=\emptyset,\ i\neq j$ - σ-адитивност

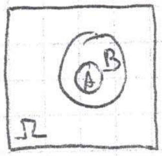
1.e) Формулисати и доказати основне особине вјероватноће

1) Адитивност $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

ако $A\cap B=\emptyset \Rightarrow A\cup B = A+B$ па

$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, $A_i\cap A_j \neq \emptyset$ $i\neq j$ посљедица (P_3)

2) Монотоност , $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



$B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

из (P_3) $\quad P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A)$

3) Ограниченост $\quad 0 \leq P(A) \leq 1$

$\underbrace{0 \leq P(A)}_{(P_1)} \leq 1$

$A \subseteq \Omega \overset{2)}{\Rightarrow} P(A) \leq P(\Omega) \overset{(P_2)}{=} 1$

4) Вјероватноћа супротног догађаја $P(A^c) = 1 - P(A)$

$A \cup A^c = \Omega \qquad A \cap A^c = \emptyset$

$P(A) + P(A^c) = 1$

5) Вјероватноћа уније два догађаја

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$1) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$P(B) = P(A \cup B) + P(B \setminus A)$

$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6) Принцип укључности-искључности

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \quad + (-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

7) Непрекидност вјероватноће

- Ако је низ догађаја $\{A_n\}$ монотоно неопадајући тј $A_n \subseteq A_{n+1}$ онда вриједи

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

- Ако је низ догађаја $\{A_n\}$ монотоно нерастући тј $A_{n+1} \subseteq A_n$ онда вриједи

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

2.a) Дефинисати класичну и геометријску вјероватноћу.

Коначан простор вјероватноћа: Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ такво да $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ф-ја $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$P(A)=\sum_{i\in I} p_i, \quad I=\{j : \omega_j \in A\},$$

је вјероватноћа.

Ако је $p_i=\frac{1}{n}$, $i=1,\dots,n$ кажемо да се ради о класичној или Лапласовој дефиницији вјероватноће.

Геометријска дефиниција вјероватноће: Нека је Ω скуп у $\mathbb{R}^2$ чија је површина $\mu(\Omega)$ позитивна и коначна. Нека је

$$\mathcal{F}=\{A\subseteq\Omega : A \text{ има површину}\}.$$

Дефинишемо $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ тако да је

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Ф-ја P је вјероватноћа.

2.b) Једно друштво од n особа измијешало је своје шешире и свако узима насумице по један шешир. Наћи вјероватноћу да ниједна особа неће узети свој шешир. Затим наћи граничну вриједност ове вјероватноће када $n\to+\infty$.

A - догађај да бар 1 лице стави свој шешир на главу

A_i - i-то лице је ставило свој шешир на своју главу, $i=1,2,\dots,n$.

n лица може расподијелити n шешира на $n!$ начина
ако је i-то лице ставило свој шешир на своју главу преосталих $n-1$ лица може распоредити преостали $n-1$ шешира на $(n-1)!$ начина

$$\Rightarrow P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad 1 \le i < j \le n$$

$$\vdots$$

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-2)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \to 1 - \frac{1}{e}$$ када $n \to +\infty$

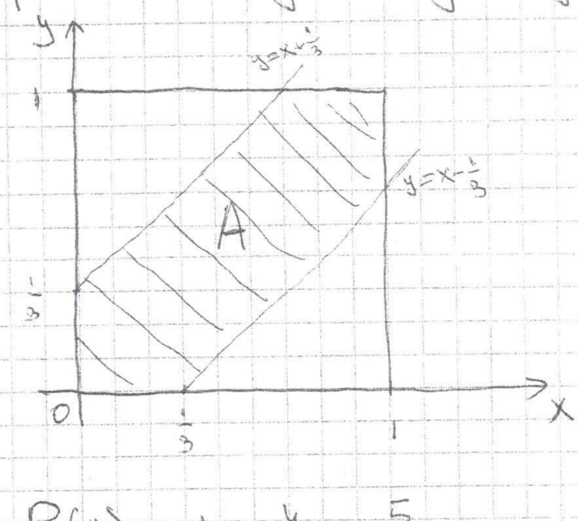
2.c) Формулисати и ријешити „проблем сусрета"

Пријатељи се договоре да се нађу између 12 и 13 часова на уговореном мјесту и да чекају једно друго 20 min. Колика је вјероватноћа да ће доћи до сусрета?

A - догађај да ће доћи до сусрета

$[12, 13] \to [0, 1]$

20 min $\to \frac{1}{3}$



$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 1]\}$$

$$|x - y| < \frac{1}{3}$$

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : |x - y| < \frac{1}{3}\right\}$$

$$-\frac{1}{3} < x - y < \frac{1}{3}$$

$$x - \frac{1}{3} < y < x + \frac{1}{3}$$

$$P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

3.a) Дефинисати појам условне вјероватноће и независност догађаја у паровима и цјелини.

Нека је дат простор Ω елементарних догађаја и нека се остварио догађај A. Ако се сада тражи вјероватноћа догађаја B онда је простор елементарних догађаја сужен на A. На тај начин долазимо до појма условне вјероватноће.
Нека је дат простор Ω елементарних догађаја и вјероватноћа P. Условна вјероватноћа догађаја B у односу на догађај A такав да је $P(A)>0$ је

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

=> теорема: Нека су дати догађаји $A_1, A_2, \dots, A_n$ тада вриједи

$$P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$$

Догађаји A и B су независни ако вриједи

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Догађаји $A_1, A_2, \dots, A_n$ су независни у паровима ако вриједи $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$, $i\neq j$
а независни у цјелости ако вриједи

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) - P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$ за све изборе $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}\subseteq\{1,2,\dots,n\}$

Ако су независни у цјелости => и у паровима.
Обрнуто не вриједи.

(3.б) Показати примјером да независност у паровима не повлачи независност у цјелини.

Нека су дати догађаји $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{2,4\}$ и простор елементарних догађаја $\Omega=\{1,2,3,4\}$. Тада је

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{1}{4} \quad P(A)\cdot P(B)=\dots=$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$$

(3.ц) Ако су A и B независни показати да су такви и A и B^c, A^c и B, A^c и B^c

1) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$B\subseteq\Omega$

$B=B\cap\Omega=B\cap(A\cup A^c)=(B\cap A)\cup(B\cap A^c)$

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$

$P(A^c\cap B)=P(B)-P(A)\cdot P(B)$

$=P(B)\cdot(1-P(A))=P(A^c)\cdot P(B)$

2)

из 1) $A\Leftrightarrow B$, $B\Leftrightarrow A$ $\Rightarrow$ A^c и B незвсни

3) $(A,B)\xrightarrow{1)}(A^c,B)\xrightarrow{2)}(A^c,B)$

(3.d) Ако су $A_1,\dots,A_n$ независни (у цјелини) показати да вриједи

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

3.б) Ако је $\mathcal{F}$ σ-поље догађаја, P вјероватнoћа и $P(H)>0$ доказати да је ф-ја $P(\cdot|H): \mathcal{F} \to [0,+\infty)$ вјероватноћ

(P_1) ненегативност

$$P(A|H) = \frac{P(A\cap H)}{P(H)} \geq 0$$

(P_2) нормираност

$$P(\Omega|H) = \frac{P(\Omega\cap H)}{P(H)} = \frac{P(H)}{P(H)} = 1$$

(P_3) σ-адитивност

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Big| H\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)\cap H\right)}{P(H)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i\cap H)\right)}{P(H)}$$

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i\cap H)}{P(H)} = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i|H)$$

4.а) Дефинисати потпуни систем догађаја. Формулисати и доказати формулу потпуне вјероватноће.

Догађаји $H_1, H_2, \dots, H_n \subset \Omega$, за које вриједи

1) $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

2) $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$,

зову се хипотезе (потпун систем догађаја)

Формула потпуне вјероватноће:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

Доказ:

$A \subseteq \Omega$

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i)$$

деф. условне вјеравтноће: $P(A|H_i) = \dfrac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)}$

$$P(A \cap H_i) = P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

4.6) Формулисати и доказати Бајесову формулу.

Нека су $H_1, H_2, \dots, H_n \subset \Omega$ хипотезе и $A \subset \Omega$ такав да је $P(A) \neq 0$. Тада је

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$

Доказ:

$$P(H_j|A) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(A)}$$

$$P(A|H_j) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(H_j)}$$

$$P(A \cap H_j) = P(A)\cdot P(H_j \mid A)$$

$$P(A \cap H_j) = P(H_j)\cdot P(A \mid H_j)$$

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \mid H_j)\cdot P(H_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_j)\,P(H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)P(H_i)}$$

1.c) При производњи истог производа, 3 машине типа А, 5 типа В и 2 типа С производе редом 5%, 3%, 1% неисправних производа. Случајно се бира 1 производ.

i) Колика је вјероватноћа да је неисправан?

ii) Ако је изабрани производ неисправан, колика је вјероватноћа да је произведен на машини типа В?

H_A - производ произведен на машини типа А

H_B - -II- B

H_C - -II- C

D - изабран је неисправан производ

i) $P(D) = P(H_A)\cdot P(D \mid H_A) + P(H_B)\cdot P(D \mid H_B) + P(H_C)\cdot P(D \mid H_C)$

$P(H_A) = \frac{3}{10} \quad P(H_B) = \frac{5}{10} \quad P(H_C) = \frac{2}{10}$

$P(D \mid H_A) = \frac{5}{100} \quad P(D \mid H_B) = \frac{3}{100} \quad P(D \mid H_C) = \frac{1}{100}$

$P(D) = \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{100} + \frac{5}{100}\cdot\frac{3}{100} + \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{100} = \frac{32}{1000}$

ii)

$$P(H_B \mid D) = \frac{P(D \mid H_B)\cdot P(H_B)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{\cancel{100}}\cdot\frac{5}{\cancel{10}}}{\frac{32}{\cancel{1000}}} = \frac{15}{32}$$

5. a) Дефинисати Бернулијеву шему и релативну учесталост. Одредити највјероватнији број појављивања догађаја у Бернулијевој шеми.

Нека је Ω простор елементарних догађаја и $A \subseteq \Omega$. За низ опита у којима је вјероватноћа реализације догађаја иста и независна од осталих опита кажемо да чини Бернулијеву шему. Са S_n означавамо број реализација догађаја A у Бернулијевој шеми. Број $\frac{S_n}{n}$ се назива релативна учестаност (фреквенција) догађаја A у n поновљених опита.
Вјероватноћа $P(S_n=k)$, тј. да ће после n опита догађај A наступити тачно k пута се рачуна као:

$$P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \quad q=1-p, \quad p\in(0,1)$$

и p - вјероватноћа догађаја A.

$n_0 \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

$P(S_n=n_0)=\max\{P(S_n=k) : k\in\{0,1,2,\ldots,n\}\}$

$P(S_n=n_0) \geq P(S_n=n_0-1)$

$P(S_n=n_0) \geq P(S_n=n_0+1)$

$$\binom{n}{n_0}p^{n_0}(1-p)^{n-n_0} \geq \binom{n}{n_0-1}p^{n_0-1}(1-p)^{n-n_0+1}$$

$$\binom{n}{n_0}p^{n_0}(1-p)^{n-n_0} \geq \binom{n}{n_0+1}p^{n_0+1}(1-p)^{n-n_0-1}$$

$$\frac{n!}{n_0!\,(n-n_0)!}\,p^{n_0}(1-p)^{n-n_0} \geq \frac{n!}{(n_0-1)!\,(n-n_0+1)!}\,p^{n_0-1}(1-p)^{n-n_0+1}$$

$$\frac{p}{n_0} \geq \frac{1-p}{n-n_0+1}$$

$$pn - \cancel{pn_0} + p \geq n_0 - \cancel{n_0 p}$$

$$\boxed{n_0 \leq np + p}$$

$$\frac{1-p}{n-n_0} \geq \frac{p}{n_0+1}$$

$$n_0 + 1 - \cancel{n_0 p} - p \geq np - \cancel{n_0 p}$$

$$\boxed{n_0 \geq np + p - 1}$$

$$np + p - 1 \leq n_0 \leq np + p$$

1) $np + p \in \mathbb{N}$

$n_0 \in \{np + p - 1, np + p\}$

2) $np + p \notin \mathbb{N}$

$n_0 = \lfloor np + p \rfloor$

Број n_0 је највјероватнији број појављивања догађаја.

(5.6) Формулисати и доказати теорему о Пуасоновој апроксимацији. Познато је да у одређеној књизи од 500 стр. постоји 500 штампарских грешака случајно распоређених. Колика је вјероватноћа да на случајно одабраној страници књиге нема мање од 3 грешке.

За $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ нека је $P(A) = \frac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$ и нека λ не зависи од n. Тада за $\forall\, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ вриједи

$$\lim_{n \to +\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Доказ:

$$P(S_n=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k}}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$$

$$\lim_{n\to+\infty}P(S_n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Примјер:

$n=500 \quad p=\frac{1}{500}$

$\lambda=n\cdot p=1 \quad np<10$ ✓

$$P(S_{500}\geq 3)=1-P(P_{500}<3)$$

$$P(S_n=k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\,,\quad \lambda=1$$

$$P(S_{500}\geq 3)=1-e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2}\right)=1-\frac{5}{2e}\approx 0{,}08$$

5.9) Формулисати локалну и интегралну Муавр-Лапласа теорему. Вјероватноћа производње неисправног производа је 0,02. Наћи вјероватноћу да у серији од 2500 производа број неисправних буде између 36 и 57.

$\left.\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$

Локална Муавр-Лапласова теорема

Нека је $p \in (0,1)$ вјероватноћа догађаја у сваком од n независних опита и нека постоје $a, b \in \mathbb{R}$ такви да

$\left.1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1$

$$a \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le b \quad \text{за } \forall k, n \in \mathbb{N},\ k \in \{0,1,\dots,n\},$$
$$q = 1-p$$

Тада вриједи

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P(S_n = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} = 1$$

Интегрална Муавр-Лапласова теорема

При условима претходне теореме вриједи

$$P(a \le S_n \le b) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \quad n \to +\infty$$

$$x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}} \qquad x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$$

Функција нормалне расподјеле: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Примјер:

$p = 0{,}02 \qquad n = 2500$

$$P(36 \leq S_{2500} \leq 57)$$

$np = 0{,}02 \cdot 2500 = 50 \qquad q = 1 - p = 0{,}98$

$npq = 0{,}98 \cdot 50 = 49$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{36 - 50}{7} = -2$$

$$x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{57 - 50}{7} = 1$$

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(1) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(2) = 0{,}8185$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(1) = 0{,}8413 \\ \Phi(2) = 0{,}9772 \end{array}\right\} \text{из таблице}$$

6. а) Дефинисати појам случајне промјенљиве и навести примјер дискретне и примјер непрекидне случајне промјенљиве.

Нека је Ω простор елементарних догађаја и $\mathcal{F}$ σ-поље догађаја на Ω. За ф-ју $X: \Omega \to \mathbb{R}$ за коју вриједи

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}, \text{ за све } x \in \mathbb{R},$$

кажемо да је случајна промјенљива (величина)

Догађај $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ краће означавамо са $\{X < x\}$.

Примјер дискретне: Новчић се баца 2 пута. Простор елементарних догађаја је $\Omega = \{ПП, ПГ, ГП, ГГ\}$

Нека је вјероватноћа сваког елементарног догађаја $\frac{1}{4}$. Нека је X број понављања писма у 2 бацања новчића. Вриједи:

$$X(ПП) = 2, \quad X(ПГ) = X(ГП) = 1, \quad X(ГГ) = 0$$

Примјер непрекидне: Нека је X случајна промјенљива која може да узима произвољне вриједности из сегмента $[0,1]$, тако да

$$P(X \in [a,b]) = b-a \quad за \ \forall a,b \in [0,1], \ a \leq b$$

(6.б) Дефинисати функцију расподјеле случајне промјенљиве, навести и доказати њене основне особине.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вјероватноће и $X: \Omega \to \mathbb{R}$ случајна промјенљива. Како вриједи

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}, \quad за \ \forall x \in \mathbb{R},$$

дефинисана је вјероватноћа

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}).$$

Ф-ја $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$$

назива се функција расподјеле случајне промјенљиве.

Основне особине функције расподјеле:

(1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ за $\forall x \in \mathbb{R}$

(2) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ - монотоно неопадајућа ф-ја

(3) $\lim\limits_{t \to x^-} F_X(t) = F_X(x)$ - непрекидна с лијева

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(5) $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

Доказ особина:

(1) $F_X(x) = P(X < x) \in [0,1]$

(2) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x_2\}$

$\Rightarrow P(X < x_1) < P(X < x_2)$

$F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

(3) $\{x_n\}$ $x_n \leq x_{n+1}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

$A_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x_n\}$

$A_n \subseteq A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq$

$P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$

$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \{X < x_n\} = (X < x)$

$P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P(X < x) = F_X(x)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(X < x_n) = \lim\limits_{t \to x^-} P(X < x) = \lim\limits_{t \to x^-} P(X < t)$

$\Rightarrow F_X(x) = \lim\limits_{t \to x^-} F_X(t)$

(4) $x_n = n$ $\qquad x_n = -n$

$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

(5) $(X < b) = (X < a) \cup (a \leq X < b)$

$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b)$

$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

(6.c) Навести основне расподјеле.

(1) Биномна $X: Bin(n; p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

(2) Пуасонова $X: P(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(3) Геометријска

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad p \in (0,1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(4) Равномјерна $X: \mathcal{U}(a,b)$, $a < b$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

(5) Експоненцијална $X: \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(б) Нормална $X : \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

7. а) Дефинисати вишедимензионалну случајну промјенљиву

ф-ја $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ је n-димензионална случајна промјенљива ако је за $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ X_i случајна промјенљива.

Ако су $X_1, \dots, X_n$ дискретног (непрекидног) типа онд. је X дискретног (непрекидног) типа.

Ако је $n = 2$ ради се о случајном вектору

$$Z = (X, Y) \qquad Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

7. б) Закон расподјеле вјероватноћа случајног вектора и маргинални закони расподјела.

Закон расподјеле вјероватноћа случајног вектора $Z = (X, Y)$

$X(\Omega) = \{x_i : i \in I\}$

$Y(\Omega) = \{y_j : j \in J\}$

$Z(\Omega) = \{(x_i, y_j) : i \in I, j \in J\}$

дат је ф-јом

$$P : Z(\Omega) \to \mathbb{R}$$

тј. вјероватноћама

$$p_{ij} = P(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = (x_i, y_j)\}), \; i \in I, \; j \in J$$

ши

$$p_{ij} = P(Z=(x_i,y_j))$$

То обично представљамо помоћу табеле

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

Како је $\Omega = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}\{Z=(x_i,y_j)\}$ вриједи

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} = 1$$

Ако је познат закон расподјеле вјероватноћа случајног вектора $Z=(X,Y)$, тада можемо одредити законе расподјела вјероватноћа случајних промјенљивих X и Y. То су маргинални закони расподјела вјероватноћа.

Како је $\{X=x_i\} = \bigcup_{j\in J}(Z=(x_i,y_j))$

имамо

$$p_i = P(X=x_i) = \sum_{j\in J} p_{ij}$$

аналогно добијамо

$$q_j = P(Y=y_j) = \sum_{i\in I} p_{ij}$$

Дакле, вриједи

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix}$$

и

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots \end{pmatrix}$$

7.c) Дефинисати ф-ју расподјеле случајног вектора и навести њене основне особине.

Функција расподјеле случајног вектора $Z = (X, Y)$, $Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$, је функција $F_Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$F_Z(x,y) = P(X < x, Y < y) \quad , \ x,y \in \mathbb{R}$$

Основне особине ф-је расподјеле:

(1) $0 \leq F(x,y) \leq 1$ за $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$

(2) F је неопадајућа по свакој промјенљивој

$x \mapsto F(x,y)$, $y \mapsto F(x,y)$

монотоно неопадајући

(3) F је непрекидна с лијеве стране по свакој промј.

$x \mapsto F(x,y)$, $y \mapsto F(x,y)$

непрекидна с лијева

(4) $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0 \qquad \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1$

(5) $P(a_1 \le X < a_2, b_1 \le Y < b_2) = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2)$
$- F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$

7.d) Условне расподјеле дискретних случајних промјенљивих.

Полазећи од ф-ле $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$,

$P(A) > 0$.

Нека су X, Y дискретне случајне промјенљиве. Тада је

$$P(x_i | y_j) = P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}$$

Слично је

$$q(y_j | x_i) = P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

7.e) Функције (трансформације) случајних промјенљивих образложити дискретан и непрекидан случај.

Нека је $X = (X_1, \dots, X_n)$ вишедимензионална случајна промјенљива и $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дата ф-ја.
Тада је ф-ја $Y: \Omega \to \mathbb{R}$
дата са $Y = g \circ X$ случајна промјенљива.

Дискретан случај.

Нека је дата случајна пром. X са законом расподјеле

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix}$$

и ф-ја $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(X(\Omega)) = \{ g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_i) \}$$

Одредимо закон расподјеле случајне промјенљиве $Y = g \circ X$. Вриједи

$$P(Y = g(x_i)) = \sum_{j \in I_i} \underbrace{P(X = x_j)}_{= p_j} ,$$

$$I_i = \{ j : g(x_i) = g(x_j) \}$$

Непрекидан случај.

Нека је X непрекидна случајна промјенљива са функцијом расподјеле вјероватноћа $F_X(x)$. Тада за ф-ју расподјеле вјероватноћа $F_Y(y)$ случајне промјенљиве Y имамо

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) =$$
$$= P(X \in g^{-1}(-\infty, y))$$

7.f) X и Y су независне случајне промјенљиве са Поасоновом расподјелом $P(\lambda)$. Наћи расподјелу случајне промјенљиве $X \mid X + Y = m$.

$$P(X=k) = P(Y=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X=k \mid X+Y=m) = \frac{P(X=k, X+Y=m)}{P(X+Y=m)} = \frac{P(X=k, Y=m-k)}{P(X+Y=m)}$$

$$= \frac{P(X=k)\,P(Y=m-k)}{\sum_{i=0}^{m} P(X=i)\,P(Y=m-i)} = \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m-i}}{(m-i)!} e^{-\lambda}} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{\lambda^m}}{k!\,(m-k)!}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{\cancel{\lambda^m}}{i!\,(m-i)!}} = \frac{\frac{1}{k!\,(m-k)!}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!\,(m-i)!}} = \frac{\frac{m!}{k!\,(m-k)!}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!\,(m-i)!}} =$$

$$= \frac{\binom{m}{k}}{\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}} = \frac{1}{2^m} \binom{m}{k}$$

Биномна вјероватноћа $B(m, p)$

$$P(X=k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$X \mid X+Y=m \; : \; B\left(m; \frac{1}{2}\right)$$

8. а) Дефинисати математичко очекивање случајне промјенљиве (дискретна и непрекидна случајна промјенљива.) Навести и доказати основне особине математичког очекивања.

Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ и $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}$

Означимо са $A_i = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$

Ако је $|A_i| = n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ имамо $p_i = \frac{n_i}{n}$ па за средњу вриједност $\frac{X(\omega_1) + X(\omega_2) + \dots + X(\omega_n)}{n}$ случајне промјенљиве X вриједи

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

Деф.

(1) Нека је X дискретна случајна промјенљива чији је закон расподјеле вјероватноћа дат са

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

Математичко очекивање случајне промјенљиве X је број

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n ,$$

под условом да је дати ред апсолутно конвергентан тј. $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| p_n < +\infty$

(2) Нека је X непрекидна случајна промјенљива са густином расподјеле f_X, тада се математичко очекивање дефинише са

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx ,$$

под условом да је интеграл апсолутно конвергентан тј. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\, dx < +\infty$

Основне особине:

(1) $E(c)=c$, $c\in\mathbb{R}$

(2) $E(cX)=c\,E(X)$, $c\in\mathbb{R}$, X - случајна пром.

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, X и Y - случајне пром.

(4) $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$, X и Y - независне случајне пром

Доказ особина:

(1) $c:\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$, $E(c)=c\cdot 1=c$

(2) $X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$

$$E(cX)=\sum_{n=1}^{+\infty} c\cdot x_n\cdot p_n = c\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n = c\,E(X)$$

(3) $p(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$

$$E(X+Y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}(x_i+y_j)\,p_{ij}=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}+\sum_i\sum_j y_j p_{ij}$$

$$=\sum_i x_i\sum_j p_{ij}+\sum_j\sum_i y_j p_{ij}=\sum_i x_i p_i+\sum_j y_j\sum_i p_{ij}$$

$$=E(X)+\sum_j y_j q_j = E(X)+E(Y)$$

(4) X, Y независне

$p_{ij}=p_i\cdot q_j$

$$E(X\cdot Y)=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij}=\sum_i\sum_j \underline{x_i}\,\underline{\underline{y_j}}\,\underline{p_i}\cdot\underline{\underline{q_j}}=$$

$$=\sum_i x_i p_i\sum_j y_j q_j = E(Y)\cdot\sum_i x_i p_i = E(Y)\cdot E(X)$$

8. б) Показати примјером да не постоји математичко очекивање за сваку случајну промјенљиву.

Кошијева расподјела: $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow$ не постоји математичко очекивање

8. ц) Израчунати математичка очекивања за биномну и равномјерну расподјелу.

Биномна расподјела $X: Bin(n;p)$

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} =$$

$$= np (p + 1 - p)^{n-1} = np$$

Равномјерна расподјела $X: U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} =$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

9. а) Дефинисати варијансу, навести основне особине варијан

Варијанса (дисперзија) случајне промјенљиве X је

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

Користи се и ознака $D^2(X) = E(X - E(X))^2$

Број $\sqrt{Var(X)}$ се назива стандардна девијација

Основне особине:

(1) $Var(c) = 0, \quad c \in \mathbb{R}$

(2) $Var(X) \geq 0$

(3) $Var(X + c) = Var(X), \quad c \in \mathbb{R}$

(4) $Var(c \cdot X) = c^2 Var(X), \quad c \in \mathbb{R}$

(5) ако су X и Y независне случајне промјенљиве онда је $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

(6) $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

9. б) Израчунати варијансе за нормалну и Пусонову расподјелу.

- нормална

$$X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \mu$$

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} : \mathcal{N}(0;1) \qquad f_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$E(X^*) = 0$$

$$E(X^{*2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{matrix} x = u & x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = dv \\ dx = du & v = -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{-x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$Var(X^*) = E(X^{*2}) - E^2(X^*) = 1 - 0 = 1$

$1 = Var(X^*) = Var\left(\frac{X-\mu}{\delta}\right) = Var\left(\frac{X}{\delta} - \frac{\mu}{\delta}\right) = Var\left(\frac{X}{\delta}\right) =$

$= \frac{1}{\delta^2} Var(X) \Rightarrow Var(X) = \delta^2$

- Пусонова

$X : P(\lambda), \quad \lambda > 0$

$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

$E(X) = \lambda$

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{= e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} =$

$= \lambda^2 + \lambda$

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

10. а) Навести и доказати неједнакост Маркова и неједнакост Чебишева.

- Неједнакост Маркова

Нека је X ненегативна случајна промјенљива. Ако постоји $E(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$ тада је

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X^k)}{\varepsilon^k} \quad \text{за } \forall \varepsilon > 0.$$

Доказ:

(1) X непрекидног типа са густином f_X

$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,dx \geq \int_{0}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon^k f_X(x)\,dx$

$$= \varepsilon^k \int_{\varepsilon} f_X(x)\,dx = \varepsilon^k P(X \geq \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad E(X^k) \geq \varepsilon^k P(X \geq \varepsilon)$$

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X^k)}{\varepsilon^k}$$

(2) X дискретног типа

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix} \qquad x_i \geq 0,\ i \in \mathbb{N}$$

$$E(X^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^k p_n$$

$I_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \geq \varepsilon \}$

$I_2 = \mathbb{N} \setminus I_1$

$I_1 \cap I_2 = \emptyset \quad I_1 \cup I_2 = \mathbb{N}$

$$E(X^k) = \sum_{n \in I_1 \cup I_2} x_n^k p_n = \sum_{n \in I_1} x_n^k p_n + \underbrace{\sum_{n \in I_2} x_n^k p_n}_{\geq 0}$$

$$\geq \sum_{n \in I_1} x_n^k p_n \geq \sum_{n \in I_1} \varepsilon^k p_n = \varepsilon^k \sum_{n \in I_1} p_n = \varepsilon^k P(X \geq \varepsilon)$$

$$\Rightarrow E(X^k) \geq \varepsilon^k P(X \geq \varepsilon) \Rightarrow \frac{E(X^k)}{\varepsilon^k} \geq P(X \geq \varepsilon)$$

- Неједнакост Чебишева

Ако постоји $Var(X)$ тада је $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$, $\varepsilon > 0$

Доказ: у неједнакост Маркова убацимо $k=2$ и умјесто X убацимо $|X - E(X)|$

$$E(X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$$

$$Var(X) \geq \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

(10. b) Формулисати и доказати Бернулијев закон великих бројева.

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1 \quad , \quad \varepsilon>0 \text{ и } S_n : B(n,p)$$

Доказ:

$$E(S_n)=np \qquad Var(S_n)=np(1-p)$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=P\left(|S_n-np|<n\varepsilon\right)=1-P\left(|S_n-np|\geq n\varepsilon\right)$$

$$=1-P\left(|S_n-E(S_n)|\geq n\varepsilon\right)\geq 1-\frac{Var(S_n)}{n^2\varepsilon^2}=1-\frac{\cancel{n}p(1-p)}{n^{\cancel{2}}\varepsilon^2}\leq$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\leq 1$$

Одавде на основу теореме о 2 полицајца слиједи

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

(10. c) Формулисати централну граничну теорему.

Нека је (X_n) низ независних случајних промјенљивих $X_1, X_2, \dots, X_n$ са истом расподјелом, за које је $E(X_n)=\mu$, $Var(X_n)=\delta^2$ за $\forall n\in\mathbb{N}$. Тада вриједи

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n^* < x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad , \quad \text{гдје је}$$

$$Y^*=\frac{X_1+X_2+\dots+X_n-n\mu}{\delta\sqrt{n}}$$

(11. a) Основни појмови статистике. (Популација, узорак, обиљежје статистике, најчешће статистике)

Скуп Ω елемената ω назива се популација

За $\forall \omega \in \Omega$ посматра се нека нумеричка карактеристика $X(\omega)$ која се назива обиљежје.

Узорак (A) је дио популације (Ω) $A \subseteq \Omega$

Најчешће статистике:

1) Аритметичка средина $\overline{X_n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

2) Дисперзија $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{X_n})^2$

3) Стандардна девијација $S_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{X_n})^2}$

11.б) Оцјене параметара. Метод максималне вјеродостојности. (Примјери за геометријску и нормалну расподјелу)

Метод максималне вјеродостојности

ф-ја вјеродостојности $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ обиљежја X са ф-јом расподјеле $F(x,\theta)$ је

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i \in \theta) \quad \text{за } X$$

дискретног типа, са расподјелом вјероватноћа $p(x,\theta)$

Ако је X непрекидног типа са ф-јом густине расподјеле $f(x;\theta)$ тада је

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

Нека је $\theta = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вриједност параметра којом се постиже максимум за $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ при фиксираним $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Статистика

$\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ је оцјена максималне вјеродостојности параметра θ.

Примјер:

1) Геометријска расподјела

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \ , \quad p \in (0,1)$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i - 1} \cdot p$$

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; p) = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - 1) \ln(1-p) + \ln p \right]$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; p)}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{x_i - 1}{1-p} + \frac{1}{p} \right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - 1}{p-1} + \frac{1}{p} \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p(x_i - 1) + p - 1 \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (p x_i - 1) = 0 \qquad p \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0$$

$$p = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X_n}}$$

2) Нормална расподјела $X : N(\mu; \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{\sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

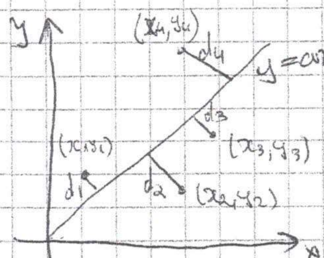
$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X_n}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X_n})^2 = S_n^2$$

11. c) Линеарна регресија. Систем нормалних једначина

Нека се у процесу експеримента региструју вриједности величина X и Y. Ако се експеримент понови n пута добија се n парова (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Претпоставимо да се зависност између X и Y може описати са $Y = aX + b$. Потребно је одредити a и b.



$$d_i = |y_i - ax_i - b|$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|$$

I правило $\quad \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b| \to \min$

II правило $\quad S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 \to \min$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$(1) \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -2\,(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$(2) \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(1) и (2) чине систем нормалних једначина

11. d) Мјерењем су добијене сљедеће вриједности

x_i	1	2	3	4
y_i	3	5	7	9

Одредити коеф. a и b тако да права $y = ax + b$ најбоље одговара мјерењу у смислу методе најмањих квадрата. Прогнозирати која ће вриједност одговарати за $x = 5$.

$\sum x_i = 10 \qquad \sum y_i = 24 \qquad \sum x_i y_i = 3 + 10 + 21 + 36 = 70$

$\sum x_i^2 = 30$

$$a\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{4} x_i + b \cdot 4 = \sum_{i=1}^{4} y_i$$

$30a + 10b = 70 \;/:10$

$10a + 4b = 24 \;/:2$

$3a + b = 7 \;/\cdot(-2)$

$5a + 2b = 12$

$\boxed{a = 2}$

$\boxed{b = 1}$

$y = 2x + 1$

$\boxed{y(5) = 11}$

(12. а) Интерполација функције полиномима. Показати да за $n+1$ чвор (x_i, f_i), $i=0,1,\dots,n$ постоји јединствен полином $P_n(x)$ степена n такав да је $P_n(x_i) = f_i$, $i=0,1,\dots,n$

Нека је ф-ја f задата у $n+1$ чворова (x_i, f_i), $i=0,1,\dots,n$. Тада постоји јединствен полином облика

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

такав да је $P_n(x_i) = f_i$

Доказ:

Из $P_n(x_i) = f_i \Rightarrow$

$$a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = f_0$$
$$a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n = f_1$$
$$\vdots$$
$$a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n = f_n$$

тј.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}}_{B}$$

$$A \cdot X = B$$

Како је $\det A = \prod_{n \geq i > j \geq 0} (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow$ постоје јединствени $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ такви да

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0,1,\dots,n$$

12.б) Лагранжов интерполациони полином.

Нека је ф-ја f задата у тачкама $x_0, x_1, \dots, x_n$ са вредностима $f_0, f_1, \dots, f_n$ при чему је $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. И ф-ја је $n+1$ пута диференцијабилна.

Посматрајмо функцију

$$P_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})\cdots(x_i-x_n)}$$

Уочавамо да је

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i P_i(x)$$ при чему $L_n(x_i) = f_i,\ i=0,1,\dots,n$

$\Rightarrow$ $L_n(x)$ је Лагранжов интерполациони полином

13. а) Дефинисати грешку интерполације

Грешка интерполације је дефинисана изразом

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

13. б) Ако је f $n+1$ пута диференцијабилна ф-ја дати процјену за $|R_n(x)|$. Објаснити шта је M_{n+1} и $\Pi_{n+1}(x)$.

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\Pi_{n+1}(x)|$$

гдје је $M_{n+1} = \max_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$ гдје је $a = \min\{x, x_0\}$

$b = \max\{x, x_n\}$

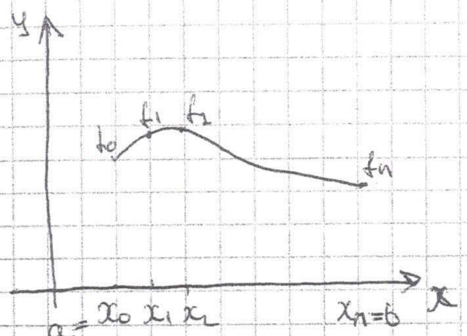
и

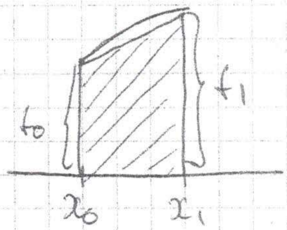
$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

14. а) Опште трапезно правило

Нека су $x_0, x_1, \ldots, x_n$ еквидистантни чворови такви да $x_0 = a$ и $x_n = b$.

Дата је ф-ја $f: [a,b] \to R$ и која је интеграбилна.





$x_1 - x_0 = h$

$$P_1 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

$$P_2 = \frac{h}{2}(f_1 + f_2)$$

$$\vdots$$

$$P_n = \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[(f_0+f_1)+(f_1+f_2)+\cdots+(f_{n-1}+f_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + 2(f_1+f_2+\cdots+f_{n-1}) + f_n\right]$$ - трапезно правило

14. б) Оцјена грешке код општег трапезног правила.

Користимо $|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Pi_{n+1}(x)|$

$n=1$, $|R_1(x)| = \frac{M_2}{2}|\Pi_2(x)|$

$$\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = \left| \begin{array}{l} x-x_0=th \\ x-x_1=x-x_0-(x_1-x_0)=th-h=h(t-1) \end{array}\right|$$

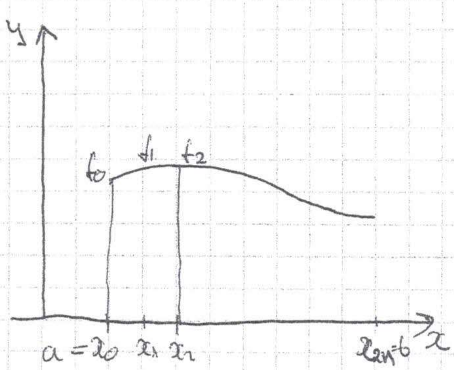
$$=\int_0^1 th(t-1)h\cdot h\,dt = h^3\int_0^1 t(t-1)\,dt = h^3\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1-\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{h^3}{6}$$

$$|R(x)| \le n\,\frac{h^3 M_2}{12} \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

$$|R(x)| \le (b-a)\,\frac{M h^2}{12}$$

15. а) Опште Симпсоново правило



посматрамо полином кроз (x_0,f_0), (x_1,f_1), (x_2,f_2) на $[x_0,x_2]$

$$f(x)\approx f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=$$

$$\le\left| \begin{array}{ll} x-x_0=th & dx=h\,dt \\ x-x_1=x-x_0-(x_1-x_0)= & \\ \quad =th-h=h(t-1) & \end{array}\right| =$$

$$x-x_2=x-x_0-(x_2-x_0)=$$
$$=th-2h=h(t-2)$$

$$x_0-x_1=-h \qquad x_0-x_2=-2h \qquad x_1-x_2=h$$

$$=\int_0^2\left[f_0\frac{h(t-1)h(t-2)}{-h\cdot(-2h)}+f_1\frac{th(t-2)h}{h(-h)}+f_2\frac{th(t-1)h}{2hh}\right]h\,dt=$$

$$= h\int_0^2 \left[f_0 \frac{t^2-3t+2}{2} - f_1(t^2-2t) + f_2\frac{t^2-t}{2}\right] dt$$

$$= h\left[f_0\left(\frac{\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t}{2}\right)\Big|_0^2 - f_1\left(\frac{t^3}{3}-t^2\right)\Big|_0^2 + f_2\left(\frac{\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}}{2}\right)\Big|_0^2\right] =$$

$$= h\left[\frac{f_0}{3}+\frac{4f_1}{3}+\frac{f_2}{3}\right] = \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+f_2\right]$$

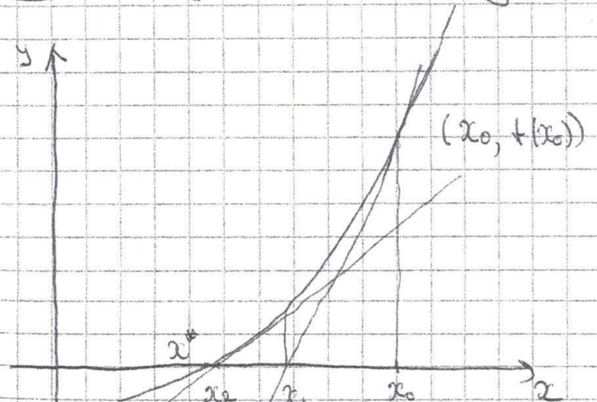
$$\int_0^{x_{2n}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[(f_0+4f_1+f_2)+(f_2+4f_3+f_4)+\dots+(f_{2n-2}+4f_{2n-1}+$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f_0+4(f_1+f_3+\dots+f_{2n-1})+2(f_2+f_4+\dots+f_{2n-2})+f_{2n}$$

15.б) Оцјена грешке код општег Симпсоновог правила

$$|R(x)| \le (b-a)\frac{M_4 h^4}{180}$$

16.а) Њутнова метода тангенте.



за $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

треба одредити приближно

$x^* \in [a,b]$ такво да

$$f(x^*)=0$$

$$f'(x)\cdot f''(x)>0$$

Тангента на криву f у тачки $(x_0, f(x_0))$ је

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad , \quad y=0$$

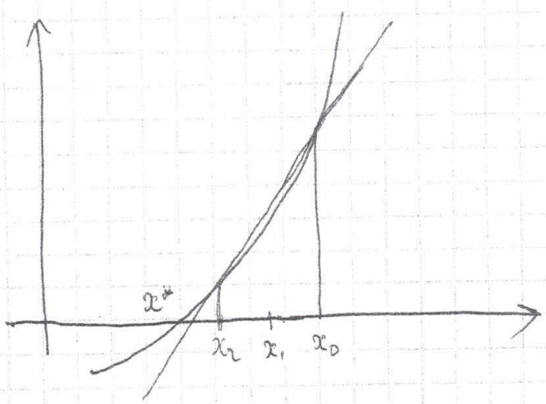
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

16. б) Дати процјену за $|x_n - x^*|$, при чему је низ $\{x_n\}$ добијен Њутновом методом тангенте, а $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq \varepsilon,$$ ε - тачност са којом треба наћи рјешење

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

17. а) Метода сјечице.



Како је $f'(x_n) \approx \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Замјеном у Њутнову методу добијамо методу сјечице

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})\, f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

17. б) Процјена грешке код методе сјечице

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1 \varepsilon}{M_1 m_1}$$

$$M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \qquad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|,$$

гдје је ε унапријед задана грешка