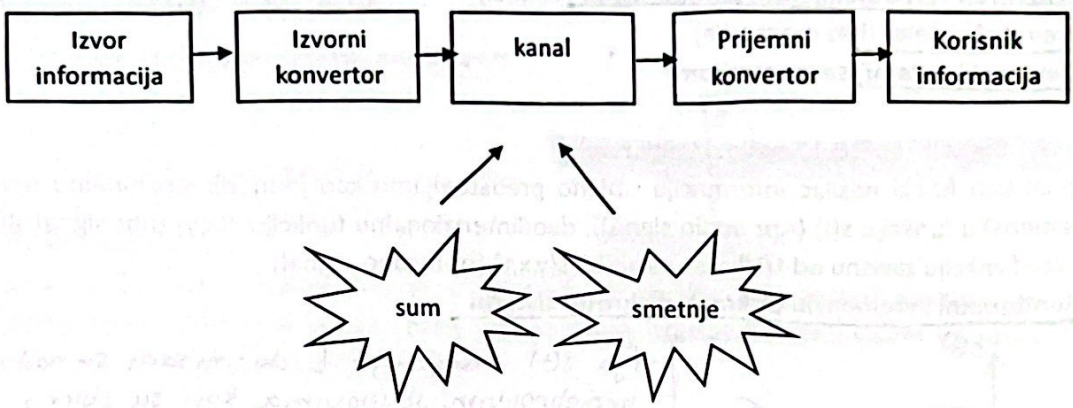
# Osnovi komunikacija i teorija informacija

*(pitanja za usmeni ispit)*

## 1. Model telekomunikacionog sistema tacka – tacka

Opsta blok sema komunikacionog sistema:




-**Izvor informacija** generise poruke(tekst, govor, muzika, slika) koje treba prenijeti korisniku da bismo informaciju prenijeli na daljinu posredstvom nekog telekomunikacionog sistema, neophodno je izvornu informaciju konvertovati u elektricni signal.

-**Izvorni konvertor** konvertuje izvornu informaciju u elektricni signal (ekvivalent)

-**Sistem prenosa/kanal** predstavlja sredinu kroz koju se signal prenosi od izvora do korisnika informacije

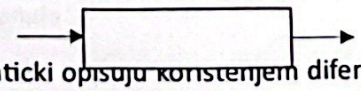
* dio veze namijenjen prenosu podataka
* prisutnost suma i smetnji uticu na oblik signala na prijemnoj strani

-**prijemni konvertor** primljeni elektricni signal konvertuje u oblik koji odgovara korisniku informacije.

## 2. Prenosni sistemi

Prenosni sistem moze da ima jedan ili vise ulaza

Model sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom



Sistemi se matematicki opisuju koristenjem diferencijalnih jednacina. Za sistem koji se moze opisati Linearnom diferencijalnom vazi:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots a_0 = b_m y^{(m)}(t) + b_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + b_0$$

***Nestacionarni sistem** - an i bn zavise od vremena

***Stacionaran sistem** – konstantni koeficijenti

Scanned with CamScanner

ako pobuda x(t) daje odziv y(t), onda pobuda x(t-$\tau$) obezbjedjuje odziv y(t-$\tau$) za sve vrijednosti x(t) i $\tau$>0

***Nelinearan sistem** – ne moze se opisati generalnim dif. jednacinama

***Linearan sistem** – vazi zakon superpozicije

y1(t) odziv sistema na pobudu x1(t)

y2(t) odziv za pobudu x2(t)

za lin. komb. pobuda x(t)=k1x1(t) + k2x2(t) odziv je: y(t)=k1y1(t) + k2y2(t)

***Sistemi sa koncentrisanim parametrima** (filtri, pojacavaci, ispravljaci)

***Sistemi sa raspodjedljenim parametrima** (vodovi)

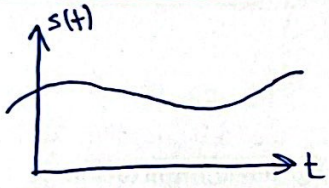
***Trenutni sistemi** (bez memorije)

***Dinamicki sistemi** (sa memorijom)

## 3. Signali kao fizicki nosioci informacija

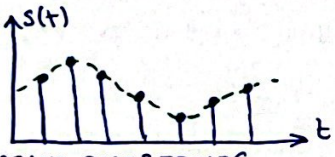
Signal kao fizicki nosilac informacija obicno predstavljamo kao jednodimenzionalnu realnu vremensku funkciju s(t) (npr audio signal), dvodimenzionalnu funkciju s(x,y) (npr signal slike) ili kao funkciju zavisnu od tri ili vise varijabli s(y,x,t) (npr video-signal)

***Kontinualni i vremenski diskretni diskretni sistemi**




VR. OBLIK KONTINUALNOG SIGNALA

- fja s(t) i argument t definisani su nad beskonačnim neprebrojivim skupovima koji su obično podskupovi $\mathbb{R}$

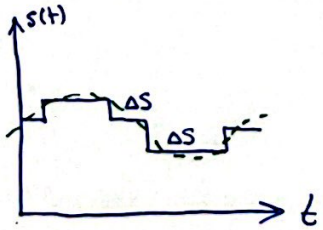



VR. OBLIK DISKRETNOG SIGNALA

- po svojim trenutnim amplitudama pripadaju beskonačnom prebrojivom skupu, a argument najviše prebrojivom skupu.

***Kvantovani (diskretni signali u amplitudskom domenu)**

-amplitude pripadaju konacnom(prebrojivom) skupu, a argument t pripada neprebrojivom skupu realnih brojeva

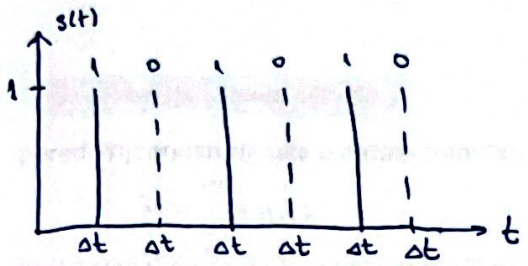



***Digitalni signali**

-izvrsena je diskretizacija u vremenskom i amplitudskom domenu, pa argument i fja pripadaju prebrojivim skupovima

-digitalni signal mozemo posmatrati kao vemensku sekvencu brojeva

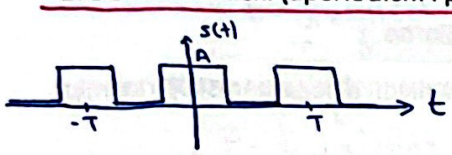
Scanned with CamScanner



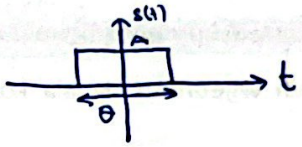

***Podjela signala**

1° (prema stepenu neodredjenosti)

**1. Deterministicki (aperiodicni i periodicni)**




PERIODIČNI




APERIODIČNI

-potpuno definisani u beskonacnom vr. Intervalu od – beskonacno do beskonacno
-zadaju se u vidu fje, te se vrijednost signala moze izracunati u bilo kojem trenutku -> ne prenose se kroz telekomunikacioni kanal.

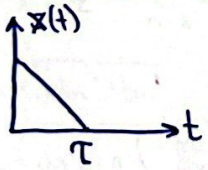
**2. Slucajni/stohasticki signali**
-ne mogu se definisati vremenskom fjom
-prenose se telekomunikacionim sistemom

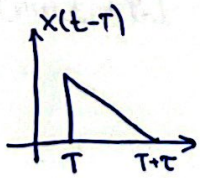
2° (prema frekvencijskom opsegu)

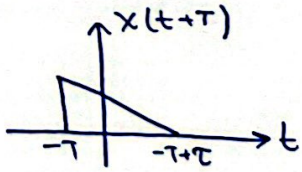
1. Niskofrekvenckijski
2. Visokofrekvencijski

**Korisne operacije**

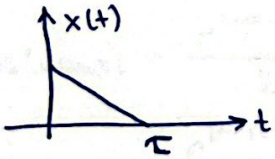
1. Pomjeranje signala



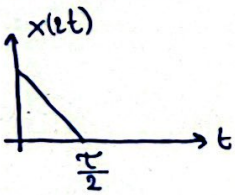




2. Skaliranje signala

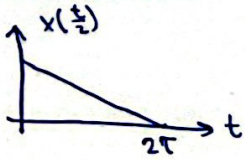



$x_a(t) = x(at)$ , $a > 0$

1) a>1 – suzavanje signala




2) a<1 – proširivanje signala

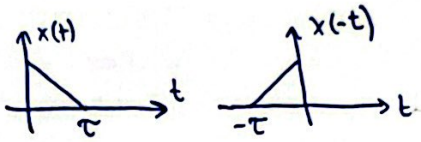



Scanned with CamScanner

## 3. Inverzija signala

-kao skaliranje za $\alpha = -1$

$x_1(t) = x(-t)$




## 4. Jedinice u obradi i prenosu signala u telekomunikacijama

-umjesto apsolutnih vrijednosti signala koriste se relativni nivoi u logaritamskoj razmjeri.

Razlozi:

1. velicine je moguce uporedjivati cak i ako se medjusobno mnogo razlikuju
2. mnozenje i dijeljenje -> sabiranje i oduzimanje
3. covjekova nula se ponasa po Veber-Fehnerovom zakonu (osjećaj je proporcionalan logaritmu nadraženja)

! umjesto vrijednosti koriste se nivoi napona, struje i snage

- NIVO NAPONA $n_u = 20\log \frac{U}{U_0}$ [dB$_V$] ; $U_0 = 0{,}775V$
- NIVO STRUJE $n_i = 20\log \frac{I}{I_0}$ ; $I_0 = 1{,}29mA$
- NIVO SNAGE $n_p = 10\log \frac{P}{P_0}$ ; $P_0 = 1mW$

Relativni odnos (pojacanje) [dB]

- $A_V = 20\log \frac{V_0}{V_i}$ [dB]
- $A_i = 20\log \frac{I_0}{I_i}$
- $A_p = 10\log \frac{P_0}{P_i}$

Scanned with CamScanner

## 5. Energija i snaga signala

-pored vrijednosti signala u datom trenutku treba nam i trajanje signala (povrsina ispod krive)

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$$

-posto signal moze da bude pozitivan ili negativan, najbolje rjesenje za nenegativnu povrsinu je izracunavanje povrsine pod fjom oblika $x^2(t)$

-Energija:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \rightarrow \text{za realne}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \rightarrow \text{za kompleksne}$$

-za periodicne signale definisemo srednju snagu

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt$$

-trenutna snaga za realne signale

$$P = \frac{1}{R}x^2(t)$$

## 6. Osnovni i izvedeni oblik Furijeovog reda

***OSNOVNI OBLIK**

- $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right)$
- $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$
- $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$

***IZVEDENI OBLIK**

- $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$
- $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- $\varphi_n = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$

## 7. Kompleksni oblik Furijeovog reda

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

Scanned with CamScanner

-Uvrstavanjem ovih izraza u osnovni oblik Furijeovog reda:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \quad / \cdot j$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} - jb_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}$$

$a_{-n} = a_n$

$b_{-n} = -b_n$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \underbrace{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot e^{jn\omega_0 t}}$$

- $\underbrace{F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)}$ , $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$
- $\underbrace{F_{-n} = F_n^*}$

- izraz za kompleksne koef. Furijeovog reda $F_n$

- $\underbrace{F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}$ , $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$
- $\underbrace{F_n = |F_n| \cdot e^{j\varphi_n}}$
- $\underbrace{|F_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ - amplitudski spektar fje $s(t)$ - PARNA
- $\underbrace{\varphi_n = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)}$ - fazni spektar fje $s(t)$ - NEPARNA

## 8. Parsevalova teorema za periodicne signale

-Ako je rijec o signalu napona ili struje, snaga periodicnog signala na jednoomskoj otpornosti je jednaka kvadratu efektivne vrijednosti. Efektivna vrijednost predstavlja kv. Korijen iz srednjekvadratne vrijednosti signala.

$$\underbrace{S_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt}}$$

-Zamijenimo s(t) Furijeovim redom u kompleksnom obliku

$$S_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot F_{-n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot F_n^* = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2}$$

Scanned with CamScanner

## 9. Korelacija periodicnih signala

-Korelacija dva signala je mjera njihove slicnosti u funkciji njihovog medjusobnog pomjeraja $\tau$

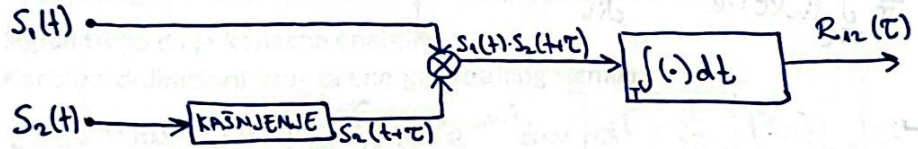
-Ako dva periodicna signala imaju isti period T, a medju njima postoji vremenski pomjeraj od $\tau$ sekundi onda je njihova medjurelacija:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\cdot s_2(t+\tau)\,dt \\ R_{21}(\tau) &= \frac{1}{T}\int s_2(t)\cdot s_1(t+\tau)\,dt \end{aligned}}$$

-U postupku korelacije obavljamo tri sukcesivne operacije

1. pomjeranje jednog od dva signala duz vremenske ose za $\tau$ sekundi
2. mnozenje pomjerenog signala sa drugim signalom istog perioda
3. usrednjavanje (integral) dobijenog proizvoda u okviru jednog perioda

Ilustracija racunanja:




Smjena $t+\tau=u \Rightarrow t=u-\tau$

Izraz za $R_{12}(T)$ (unakrsna korelaciona fja)

$$\boxed{R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2+\tau}^{T/2+\tau} s_1(u-\tau)\cdot s_2(u)\,du = R_{21}(-\tau)}$$

-Umjesto $S_2$ uvrstavamo izraz za Furijeov red u kompleksnom obliku:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\cdot s_2(t+\tau)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2}\, e^{jn\omega_0(t+\tau)}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2}\cdot e^{jn\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n2}\cdot \underbrace{F_{n1}^{*}}_{\text{konjugovano kompleksni spektar realnog signala}}\cdot e^{jn\omega_0\tau}$$

$$\boxed{S_{12}(n\omega_0) = F_{n1}^{*}\cdot F_{n2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_{12}(\tau)\cdot e^{-jn\omega_0\tau}\,dt}$$

-Unakrsna korelaciona fja $R_{12}(T)$ i spektar unakrsne snage $S_{12}(n\omega_0)=F_{n1}^{*}F_{n2}$ obrazuju Furijeov transformacionipar koji izrazava korelacionu teoremu za periodicne signale

-Ukoliko pretpostavimo da je $S_1(t)=S_2(t)=S(t)$ , dobijamo specijalan slucaj korelacije – AUTOKORELACIJA

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot s(t+\tau)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\cdot F_n^{*} e^{jn\omega_0\tau}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\cdot e^{jn\omega_0\tau}$$

Za $\tau=0 \Rightarrow R_{11}(0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$

$S_{11}(n\omega_0)=|F_n|^2$

↓

spektralna snaga n-tog harmonika periodičnog signala

Scanned with CamScanner

$$\left.\begin{aligned} \rho_{11}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{11}(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0\tau} \\ S_{11}(n\omega_0) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_{11}(\tau)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\, d\tau \end{aligned}\right\} \text{AUTOKORELACIONA TEOREMA}$$

Smjena: $\tau + t = u \Rightarrow R_{11}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot s(t+\tau)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2+\tau}^{T/2+\tau} s(u-\tau)s(u)\,du = R_{11}(-\tau)$

$\rho_{11}(\tau) = R_{11}(-\tau)$ - autokorelaciona fja je parna

## 10. Konvolucija periodicnih signala

-Za dva periodicna signala s1(t) i s2(t) koji imaju isti period, konvolucioni integral definisemo relacijom:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{12}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\cdot s_2(\tau - t)\,dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n1}\cdot F_{n2}\cdot e^{jn\omega_0\tau} \\ F_{n1}\cdot F_{n2} &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \rho_{12}(\tau)\cdot e^{-jn\omega_0\tau}\, d\tau \end{aligned}\right\} \text{Furijeova transf. par}$$

-TEOREMA O KONVOLUCIJI ZA PERIODIČNE SIGNALE

$\rho_{12}(\tau) = \rho_{21}(\tau)$

-redoslijed operacija nad signalima s1(t) i s2(t) nije vazan

## 11. Furijeova transformacija

-Aperiodicnu funkciju mozemo dobiti kao granicni slucaj periodicne fje, mada period tezi beskonacnosti

-Neka je s(t) periodican signal ciji je period T=2pi/$w_0$. Uvrsticemo izraz za koeficijente F. Reda (Fn) u izraz za Furijeov red s(t):

$$\left.\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\cdot e^{jn\omega_0 t} \\ F_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned}\right\} s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t}\int_{-T/2}^{T/2} s(\mu)\cdot e^{-jn\omega_0\mu}\, d\mu$$

-Ubacicemo $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}\cdot\omega_0 \int_{-T/2}^{T/2} s(\mu)\cdot e^{-jn\omega_0\mu}\, d\mu$$

-Sada period pustamo da neograniceno raste, pa imamo sledece aproksimacije:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

$\omega_0 \rightarrow d\omega$

$n\omega_0 \rightarrow \omega$

*APERIODICAN SIGNAL:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(\mu)\cdot e^{-j\omega\mu}\, d\mu$$

Scanned with CamScanner

Drugi oblik:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

Furyeov transformacioni par za aperiodični signal s(t)

-Uslov za postojanje Furijeove transformacije je apsolutna integrabilnost (signal je konacne energije)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt < \infty \quad \text{ili} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

$$F(\omega) = \underbrace{|F(\omega)|}_{\substack{\text{GUSTINA} \\ \text{AMPLITUDA(parna)}}}\, e^{-j\theta(\omega)} \rightarrow \text{GUSTINA FAZA(neparna)}$$

## 12. Parsevalova teorema za aperiodicne signale

-Signal treba da je konacne energije

-Koristeci definicioni izraz za energiju realnog signala:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\right] dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{j\omega t}\, dt\right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot F(-\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot F^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 df$$

-Srednja snaga aperiodicnog signala je 0, pa se posmatra ukupna energija:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 df = 2\int_{0}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 df$$

## 13. Korelacija aperiodicnih signala

-Za dva aperiodicna signala s1(t) i s2(t) korelaciona fja je definisana kao:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t+\tau)\, dt$$

-Neka s1(t) i s2(t) imaju odg. Furijeove transformacije $F_1(w)$ i $F_2(w)$.

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)\cdot e^{j\omega(t+\tau)}\, d\omega\right] dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)\, e^{j\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\cdot e^{j\omega t}\, dt\right] d\omega =$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(\omega)\, F_2\cdot e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$S_{12}(\omega) = F_1^*(\omega)\cdot F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau)\, e^{-j\omega t}\, d\tau$$

-Korelaciona fja $R_{12}(T)$ i spektralna gustina energije $S_{12}(w)$ predstavljaju Furijeov transformacioni par, koji predstavlja korelacionu teoremu za aperiodicne signale.

-Autokorelaciona teorema:

Scanned with CamScanner

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 \cdot e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$S_{11}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11} \cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

· za $\tau = 0$

$$R_{11}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S_{11}(\omega)\,d\omega$$

## 14. Konvolucija aperiodicnih siganala

-Za dva aperiodicna signala s1(t) i s2(t) konvolucioni integral je definisan kao:

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(\tau - t)\,dt$$

-Uvrstavanjem odgovarajucih Furijeovih transformacija $F_1(w)$ i $F_2(w)$ dobijamo:

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{j\omega(\tau - t)}\, d\omega\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{j\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt\right] d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$\Rightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{12}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$\rho_{12}$ i $F_1(w)*F_2(w)$ cine Furijeov transformacioni par, sto cini teoremu o konvoluciji.

$$\rho_{12}(\tau) = \rho_{21}(\tau)$$

## 15. Osobine Furijeove transformacije

***LINEARNOST**

-Linearnoj kombinaciji signala u vremenskom domenu odgovara linearna kombinacija spektara u frekvencijskom domenu. Pretpostavimo da signal s1(t) ima spektar F1(w) i signal s2 ima spektar F2, onda vrijedi:

$$\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t) \longleftrightarrow \alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega) \quad , \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

***POMJERAJ U VREMENU**

-Pretpostavimo da signal s(t) ima spektar F(w), tada vrijedi ($t_0$ je pozitivna vremenska konstanta)

$$s(t - t_0) \longleftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

-Ako signal s(t) kasni u vremenu za $t_0$ sekundi, tj $s(t-t_0)$, tada je spektar novog signala modifikovan u odnosu na spektar signala s(t) za linearni fazni pomjeraj sa nagibom $-wt_0$

***SKALIRANJE**

-Pretpostavimo da signal s(t) ima spektar F(w), tada vrijedi (alfa – pozitivna konstanta):

$$s(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} \cdot F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad , a \in \mathbb{R}$$

Scanned with CamScanner

-Suzavanje ili prosirivanje u jednom domenu rezultuje suzavanju, odnosno prosirivanju u drugom domenu

***SIMETRIJA ILI DUALNOST**

-Ako postoji transforacioni par s(t) <-> F(w), tada vazi:

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi s(-\omega) \quad / \quad F(t) \longleftrightarrow s(-f)$$

***TRANSLACIJA SPEKTRA (MODULACIONA TEOREMA)**

-Pomjeracemo signal u vremenu sa kompleksnom eksponencijalnom fjom $e^{j\omega_0 t}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} \cdot e^{j\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = F(\omega-\omega_0) \qquad s(t)e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

-Mnozenje signala s(t) sa kompleksnom fjom dovodi do translacije spektra signala duz f-ose za $f_0$ udesno

$$s(t)\cos(\omega_0 t) = s(t)\,\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$s(t)\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$$

***TEOREMA O KONVOLUCIJI**

-Konvoluciji signala u vremenskom domenu odgovara mnozenje u frekvencijskom domenu

$$s_1(t) * s_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

-Konvolucija u frekvencijskom domenu odgovara mnozenju u vremenskom domenu

$$s_1(t) \cdot s_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

***DIFERENCIRANJE U VREMENSKOM DOMENU**

-Ako postoji transformacioni par s(t) <-> F(w), tada vazi:

$$\frac{ds(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$\frac{d^n s(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \qquad F(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n s(t)}{dt^n} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

***INTEGRACIJA U VREMENSKOM DOMENU**

-Integracija u vremenskom domenu odgovara dijeljenju u frekvencijskom domenu sa jw

$$\int_{-\infty}^{t} s(t)dt \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

-Ukoliko vremenska fja nema jednosmjernu (DC) komponentu, drugi clan na desnoj strani se ne pojavljuje

Scanned with CamScanner

# • Digitalizacija analognih signala

## 16. Prednosti i nedostaci digitalnih sistema

**Prednosti:**

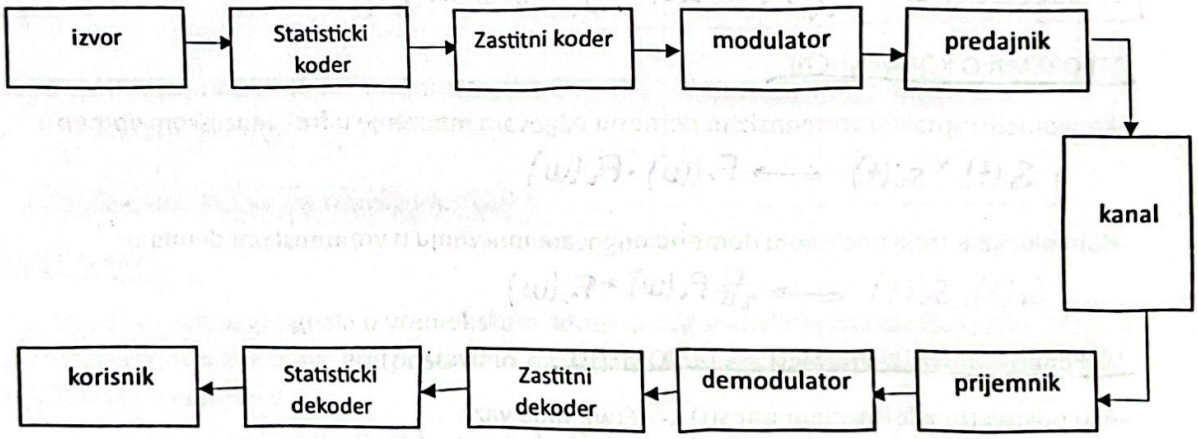
- bolja energetska efikasnost
- prilagodljiv hardver
- mogucnost multipleksiranja u visestrukom pristupu
- mogucnost kontrole gresaka (otkrivanje/ispravljanje)
- poboljsana bezbijednost
- napredni servisi i bolja interakcija sa korisnikom

**Nedostaci:**

- veca kompleksnost realizacije i potreba za sinhronizaciju
- potreba za obilnijom obradom signala
- pad performansi za losije uslove prenosa (digitalna litica)

## 17. Model digitalnog prenosnog sistema

-Osnovna blok sema digitalnog prenosnog sistema (prenos u jednom smjeru):




*IZVOR generise signal koji po prirodi moze biti kontinualni I diskretni

*STATISTICKI KODER – sluzi za kompresiju (uklanjanje suvisnosti) informacija u cilju predstavljanja signala sto manjim brojem bita. Postupci koji se koriste: Hafmanov, Senon-Fenoov...U okviru statistickog Kodera moze biti ukljuceno I skremblovnje koje popravlja statisticke osobine digitalnog signala.

*ZASTITNI KODER sluzi za dodavanje redundantnih (informaciono suvisnih) bita koji se koriste pri otkrivanju (detekcija) I ispravljanju (korekciji) gresaka nastalih pri prenosu zbog suma i smetnji

*MODULATOR sluzi da modulacijom translira spektar ulaznog signala iz OSNOVNOG u VISI frekvencijski opseg zbog niza pogodnosti pri prenosu.

Scanned with CamScanner

***PREDAJNIK** – predstavlja blok gdje se generise radio-frekvencijski signal odredjene snage i emituje u raspolozivi medijum. Medijum moze da bude posebno namijenjen i organizovan za prenos signala ili predstavlja neki prirodni resurs, pri cemu se vrlo cesto koristi rijec kanal.

***PRIJEMNIK** – sadrzi ulazni filtar sa malosumnim pojacavacem i obavlja konverziju na dalje u frekvencijskom domenu

***DEMODULATOR** – obavlja demodulisanje signala, tj vracanje u vremenski oblik koji je signal imao prije modulatora, a koji je svakako izoblicen. Do izoblicenja signala moze da dodje kako usljed deterministickih osobina kanala tako i usljed sumova i smetnji. Na izlazu treba da se pojavi niz bita koji je identican nizu na ulazu modulatora.

***ZASTITNI DEKODER** – vrsi otkrivanje i eventualno ispravljanje gresaka nastalih u toku prenosa. Ovaj proces je slozeniji od zastitnog kodera.

***STATISTICKI DEKODER** – u slucaju potrebe vrsi D/A konverziju signala. Zatim se taj signal moze prevesti u odgovarajucu neelektricnu velicinu.

## 18. Teorema odmjeravanja

-Predstavlja vezu izmedju vremenski kontinualnih i diskretnih signala.

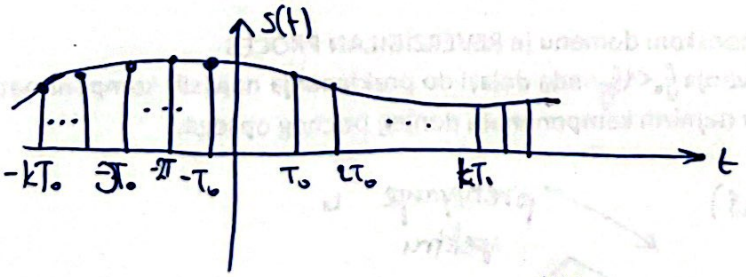
Teorema odmjeravanja (Senonova ili Koteljnikova teorema):

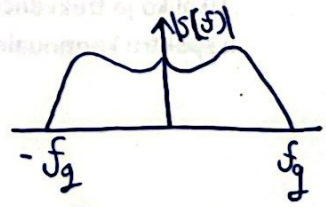
-Ako se kontinualan signal trenutno odmjerava u ekvidistantnim vremenskim intervalima ($T_0$) brzinom ($f_0$) koja je jednaka ili veca od dvostruke najvise frekvencije ($f_g$) u spektru datog kontinualnog signala, onda odmjerci sadrze cjelokupnu informaciju o odmjeravanom kontinualnom signalu.

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \leq \frac{1}{2f_g} \cdot \frac{\pi}{\omega_g}$$

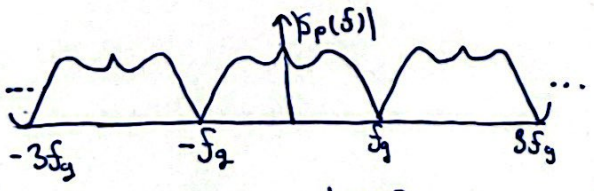
$$f_0 = \frac{1}{T} \geq 2f_g$$

$$S(f) = \int s(t) e^{-j2\pi f t} dt \begin{cases} \neq 0, & za\ |f| < f_g \\ = 0, & za\ |f| > f_g \end{cases}$$




-Inverzna Furyeova transf: $s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_g}^{\omega_g} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-f_g}^{f_g} S(f) e^{j2\pi f t} df$




$$S_p(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\frac{1}{2f_g}2\pi f} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\pi\frac{1}{2f_g}f} \Rightarrow S_p(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j\pi 2\pi T_0 f}$$

$$s(t) = \int_{-f_g}^{f_g} \left[\sum C_n e^{jn2\pi T_0 f}\right] e^{j2\pi f t} df$$

Scanned with CamScanner

## 19. Prirodno odmjeravanje

-Odmjeravanje kontinualnog signala odredjujemo njegovu vrijednost u tacno definisanim vremenskim intervalima.

-Ako je period odmjeravanja konstantan, rijec je o UNIFORMNOM ODMJERAVANJU

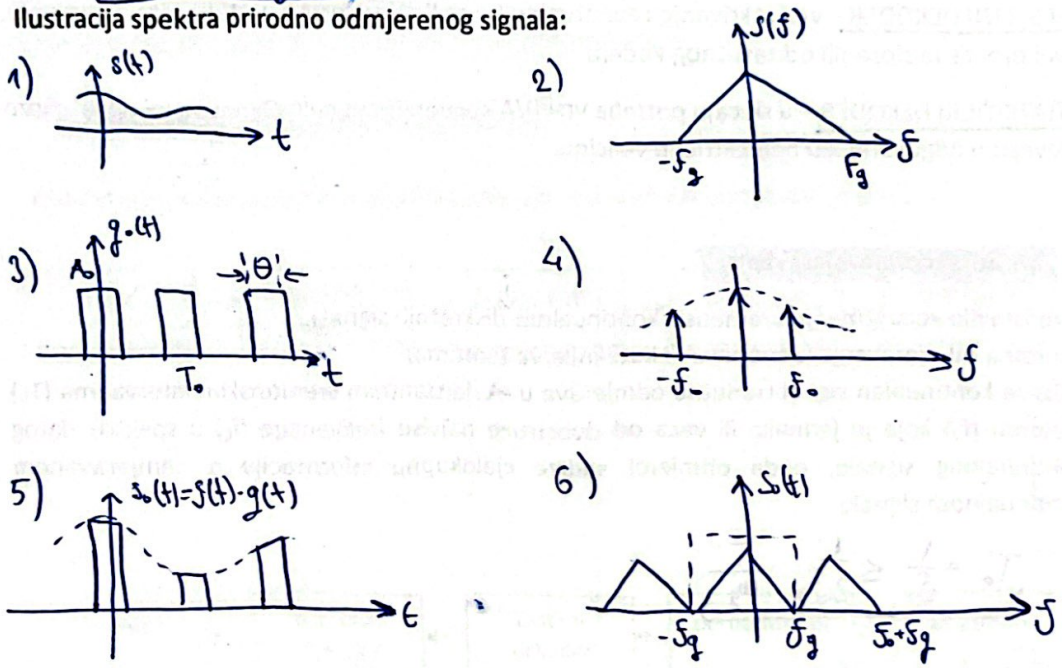
-U praksi je trajanje odmjeraka konstantno

-Postupak odmjeravanja je zapravo mnozenje u vremenskom domenu signala s(t) i funkcije odmjeravanja $g_0(t)$

-Fja odmjeravanja je povorka pravougaonih impulsa cija je ucestanost ponavljanja jednaka ucestanosti odmjeravanja $f_0=1/T_0$ kontinualnog signala s(t)

$$s(t)=s(t)g_0(t)$$

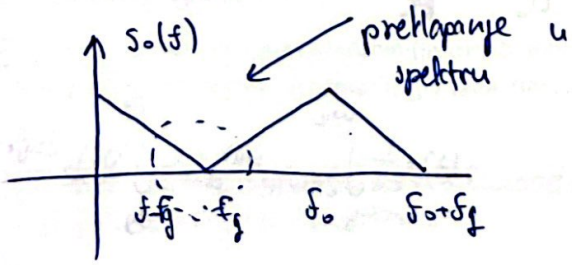
Ilustracija spektra prirodno odmjerenog signala:




-Dakle, iz odmjerenog signala $s_0(t)$ gdje je $f_0 \geq 2f_g$ moguce je izvrsiti korektnu rekonstrukciju kontinualnog signala s(t).

-Postupak odmjeravanja u vremenskom domenu je REVERZIBILAN PROCES

-Ukoliko je frekvencija odmjeravanja $f_0<2f_g$ onda dolazi do preklapanja najvisih komponenata u spektru kontinualnog signala i najnizih komponenata donjeg bocnog opsega.




Scanned with CamScanner

## 20. Kvantovanje signala

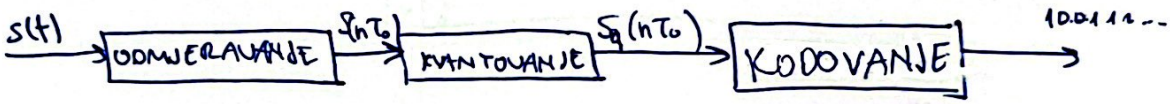
-U svim realnim telekomunikacionim sistemima postoje smetnje, a one mogu da maskiraju signale koji nose informacije.

-S druge strane, korisnik poruke raspolaze sa konacnom osjetljivoscu prijemnog signala, odnosno sa konacnom rezolucijom. Npr covjecje uho ne moze da razlikuje po jacini signale iste frekvencije ako je razlika nivoa tih signala manja od 1dB. Zbog toga, signale koji se medjusobno vrlo malo razlikuju, korisnik subjektivno dozivljava skoro identicno pa se postavlja pitanje: Da li je moguc korektan prenos i uz odredjene (prihvatljive) greske?

-S tim u vezi, postavlja se pitanje: Da li je neophodno vrsiti prenos svih amplitudskih stanja informacionog signala ili je dovoljno prenositi konacan skup tih stanja?

*KVANTOVANJE je postupak svodjenja neprebrojivog skupa amplitudskih stanja na konacan skup.

-Blok sema digitalizacije kontinualnih signala:




-Po definiciji, kvantovanje amplitude je proces transformacije amplitude uzorka $s(nT_0)$ informacionog signala s(t) u trenutku $t=nT_0$ u diskretnu amplitudu $S_q(nT_0)$ uzetih iz konacnog skupa mogucih amplituda.

-Za razliku od odmjeravanja koji je reverzibilan proces, gubitak informacija vezanih za proces kvantovanja je neizbjezan. Dakle, kvantovanje nije reverzibilan proces, jer nije moguce u potpunosti rekonstruisati odmjereni signal iz kvantovanog signala.

-Medjutim, zbog konacne osjetljivosti krajnjih korisnika informacija mozemo u odredjenom iznosu unositi gresku kvantovanja, a da to ne bude primjetno krajnjem korisniku.

-Na izlazu kvantizera je kvantovani signal $S_q(t)$ koji je kontinualan po vremenu i diskretan po trenutnim vrijednostima.

-Razlika kvantovanog i ulaznog signala daje signal greske kvantovanja: $\varepsilon_q(t) = S_q(t) - s(t)$

-Zavisno od koraka kvantizacije razlikujemo UNIFORMNO i NEUNIFORMNO KVANTOVANJE.

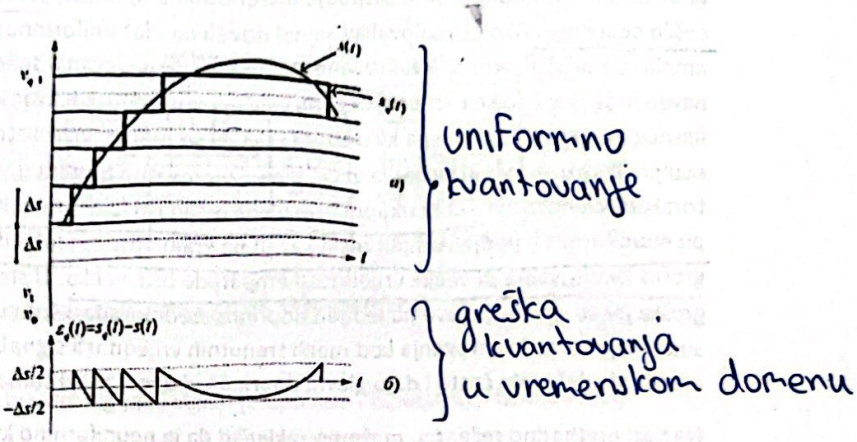
Scanned with CamScanner

OKITI Ispitna pitanja 2023/24

[21,30]

## 21. Srednja snaga greške kvantovanja

**Da bi u pogledu kvaliteta prenesenog kontinualnog signala (govora ili slike), digitalni prenos bio jednak ili bolji od analognog, mora se nivo šuma kvantovanja učiniti manjim od praga percepcije u centralnom nervnom sistemu korisnika informacije. S tim u vezi potrebno je analizirati kako veličine i raspodjele amplitudskih kvanta utiču na srednju snagu šuma kvantovanja i spektar šuma kvantovanja.**




Слика 4.11 – а) Илустрација униформног квантовања континуалног сигнала $s(t)$, б) приказ одговарајуће грешке квантовања у временском домену.

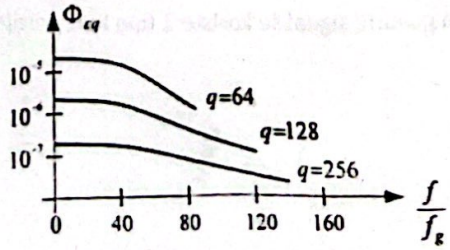
Pretpostavimo da je amplitudski opseg kvantizera uniformno podijeljen na kvante konstantne veličine $\Delta s$ i da imamo relativno velik broj kvantnih nivoa (q), odnosno, relativne male amplituske kvante ($\Delta s \ll |s|_{max}$), što znači da se radi o „finom" kvantovanju. U ovom slučaju signal greške u većem dijelu posmatranog intervala liči na niz pravih linija sa promjenljivim nagibom $\alpha$ u opsegu $(-\frac{1}{2}\Delta s, \frac{1}{2}\Delta s)$. U okolini ekstrema pobudnog signala greška kvantovanja nije testerastog oblika, međutim , pri dovoljno finom kvantovanju ekstremi su relativno rijetki, pa je dobra aproksimacija signala greške:

$$\varepsilon_q(t) = t \cdot tg\,\alpha\,; \quad t_1 = -\frac{\Delta s}{2tg\,\alpha} < t < \frac{\Delta s}{2tg\,\alpha} = t_2$$

Procjena srednjekvadratne vrijednosti greške je:

$$\overline{\varepsilon_Q^2(t)} = \frac{tg\,\alpha}{\Delta s}\int_{t_1}^{t_2}(t \cdot tg\,\alpha)^2 dt = \frac{\Delta s^2}{12}$$

Sa slike 4.11b se može uočiti da su presjeci signala greške kvantovanja mnogo gušći od presjeka ulaznog signala sa vremenskom osom, pa se može pretpostaviti da će spektar signala greške biti mnogo širi od pobudnog signala.




Слика 4.12 – Спектрална густина снаге грешке квантовања.

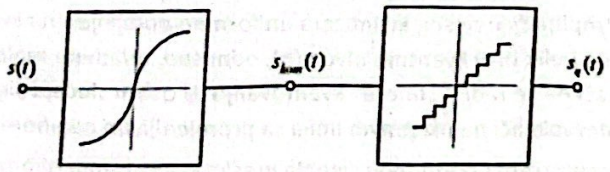
Scanned with CamScanner

Sa slike 4.12 uočavamo da je spektar signala greške kvanovanja širi i uniformniji ukoliko je veličina kvanta manja, odnosno broj kvantizacionih nivoa q veći. Stoga je kod realizacije tzv. „finog" kvantovanja, kada je q relativno veliko, odnosno $\Delta s$ relativno malo, greška kvantovanja bliska bijelom šumu, pa u tom slučaju grešku kvantovanja sa pravom nazivamo i šumom kvantovanja.

## 22. Neuniformno kvantovanje

Izbor kvantizera zavisi od funkcije raspodjele trenutnih amplituda informacionog signala. Ako bi trenutne vrijednosti pobudnog signala bile podjednako vjerovatne, tada bi uniformni kvantizer predstavljao optimalno rješenje. Međutim, većina realnih signala (govor, muzika, slika itd.) koji nose informaciju ima neuniformnu raspodjelu trenutnih amplituda, pri čemu se male vrijednosti amplitude češće pojavljuju. Ako bismo ovakav signal doveli na ulaz uniformnog kvantizera, male, češće amplitude bi bile „grubo" kvantovane što dovodi do povećanja snage šuma kvantovanja. Zbog navedenog, logično se nameće ideja da veličina amplitudskih kvanta treba da se mijenja unutar fiksnog amplitudskog opsega kvantizera tako da se manje, vjerovatnije amplitude, kvantuju „finije" (sa manjim korakom kvantizacije), a veće, manje vjerovatne amplitude, kvantuju „grublje" sa većim korakom kvantizacije. Da bi ukupni broj nivoa ostao isti kao kod uniformnog kvantizera istog opsega, pri neuniformnoj podjeli amplitudski kvanti na kraju opsega treba da budu relativno veliki, odnosno, greška kvantovanja za velike vrijednosti amplitude biće velika. U statističkom smislu nije značajna greška jer se rijetko dešava pa je njen doprinos srednjoj snazi šuma kvantovanja mali. Nasuprot tome, smanjenje šuma kvantovanja kod malih trenutnih vrijednosti signala je statistički značajno jer se male amplitude dešavaju često i daju glavni doprinos ukupnoj snazi šuma kvantovanja.

Na bazi prethodno rečenog, možemo zaključiti da je neuniformno kvantovanje ekvivalentno uniformnom kvantovanju prethodno komprimovanih trenutnih vrijednosti pobudnog signala (što je i prikazano na slici).




Слика 4.13 – Блок шема неуниформног квантизера.

Kompresija trenutnih vrijednosti u suštini predstavlja nelinearni pojačavač koji više pojačava male nego velike vrijednosti amplituda, u cilju postizanja uniformne raspodjele trenutnih vrijednosti amplituda ulaznog signala kvantizera.

Izbor zakona karakteristike kompresije je ključan za realizaciju neuniformnog kvantovanja. Postoje 2 kriterijuma za izbor zakona kompresije:

- Kriterijum konstantnosti odnosa signal-šum kvantovanja bez obzira na statističke osobine signala
- Kriterijum maksimizovanja odnosa signal-šum kvantovanja za jednu zadatu statistiku signala

Nažalost, nije moguće zadovoljiti oba kriterijuma istovremeno.

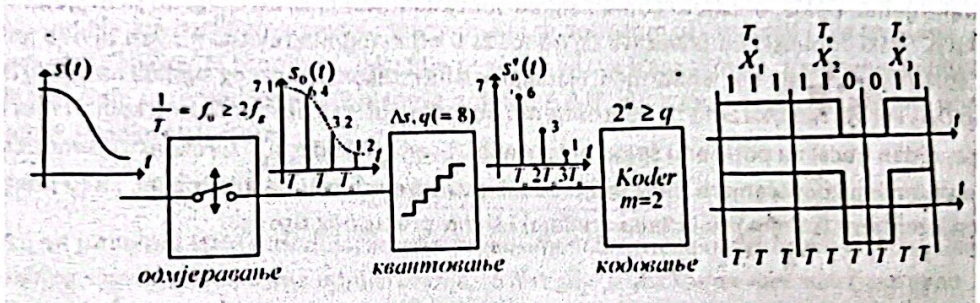
Za govorni signal se koriste 2 tipa kompresije: *μ kompresija* (SAD) i *A kompresija* (Evropa)

Scanned with CamScanner

## 23. Impulsna kodna modulacija

Impulsna kodna modulacija (PCM – Pulse Code Modulation) spada u grupu impulsnih modulacija jer modulisani signal ima diskretan talasni oblik. PCM obuhvata 3 operacije: odmjeravanje, kvantovanje i kodovanje.

Kod standardnog PCM kodera obično je izlazna vrijednost predstavljena binarnim kodom, pa odgovarajući analogno-digitalni (A/D) konvertor ima blok šemu kao na slici 4.15. Na slici 4.15 je takođe ilustrovan postupak PCM A/D konverzije za konkretnu vrijednost -> q=8, odakle slijedi n=3 (najmanji prirodan broj koji zadovoljava nejednakost $2^n \geq q$)



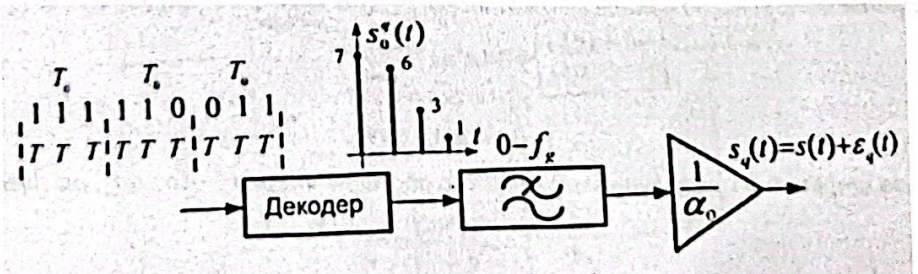

Слика 4.15 – Блок шема *A/D PCM* конвертора.

Izlazni PCM signal je prikazan kao binarni digitalni signal (unipolarni i bipolarni). *Postoje i drugi formati signala.*

Trajanje bita (bitski interval) kod izlaznog PCM signala iznosi: $T = \frac{T_0}{n} = \frac{1}{2f_g n}$, gdje je $T_0$ period odmjeravanja analognog signala.

Odgovarajuća bitska brzina je iznosi (pretpostavlja se da se odmjeravanje vrši Nikvistovom frekvencijom $2f_g$): $v_b = \frac{1}{T} = 2f_g n\ [\frac{bit}{s}]$

Blok šema odgovarajućeg digitalno-analognog (D/A) PCM konvertora prikazana je na slici 4.16. Pod pretpostavkom da je uspostavljena bitska i kanalska sinhronizacija, dekoder svakoj kodnoj riječi pridružuje određeni amplitudski kvantizacioni nivo.




Слика 4.16 – Блок шема *PCM D/A* конвертора.

Nakon niskofrekvencijskog (NF) filtriranja i pojačavanja dobijamo kontinualni signal $s_q(t)$, koji se u odnosu na kontinualni izvorni signal s(t) razlikuje za unesenu grešku kvantovanja $\varepsilon_q(t)$, tj.

$$s_q(t) = s(t) + \varepsilon_q(t).$$

Scanned with CamScanner

Objektivnu procjenu kvaliteta reprodukcije kontinualnog signala izražavamo pomoću odnosa signal-šum kvantovanja ili kraće $SNR_q$ (Signal to Noise Ratio – SNR) u obliku:

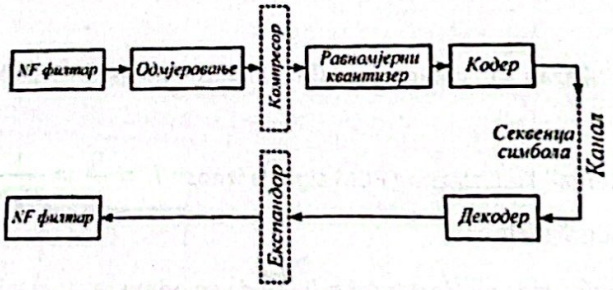
$$SNR_q[dB] = 10log\frac{P_s}{P_q}$$

Opšti izraz za decibelski odnos signal-šum kvantovanja iznosi:

$$SNR_q[dB] = 6n + c,$$

pri čemu je n dužina kodnih riječi u PCM koderu, a konstanta c zavisi od prirode posmatranog signala koji digitalizujemo. Dakle, decibelski odnos signal-šum kvantovanja raste linearno sa brojem bita po odmjerku n. Svaki dopunski bit povećava taj odnos za 6 dB. Izvedena relacija ne važi za n<5 jer tada spektar šuma kvantovanja nije uniforman. Nadalje, kvalitet rekonstruisanog signala nakon A/D, odnosno D/A konverzije možemo da kontrolišemo odgovarajućim izborom dužine kodnih riječi n, što ima neposredan uticaj na potrebnu širinu propusnog opsega. Takođe, $\overline{\varepsilon_q{}^2}$ u rekonstruisanom signalu može da se umanji i povećanjem frekvencije odmjeravanja u odnosu na minimalnu, ali to povećava hardverske zahtjeve (samim tim i cijenu uređaja) i širinu propusnog opsega.

Блок шема система са *PCM* је приказана на Слици 4.17.




Слика 4.17 – Функционалана блок шема система са импулсном кодном модулацијом.

*Primjer za računanje $SNR_q$: Signal koji pripada stacionarnom Gausovom procesu (srednje vrijednosti nula i varijanse $\sigma_s{}^2$). Funkcija gustine vjerovatnoće je $p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{\frac{s^2}{2\sigma_s{}^2}}$, gdje je $\sigma_s{}^2 = P_s$. Vrijedi:*

$$p(|s| < \sigma_s) = 0.683$$
$$p(|s| < 2\sigma_s) = 0.954$$
$$p(|s| < 3\sigma_s) = 0.997,$$

*što znači da amplitudski opseg kvantizera praktično obuhvata interval $(-4\sigma_s, 4\sigma_s)$ pa slijedi:*

$$\Delta s = \frac{4\sigma_s - (-4\sigma_s)}{q} = \frac{8\sigma_s}{q} = \frac{8\sigma_s}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$SNR_q[dB] = 10log\frac{P_s}{\Delta s^2/12} = 10\,log\frac{12\sigma_s^2}{\left(8\sigma_s/_{2^n}\right)^2} = 6n - 7.2\,.$$

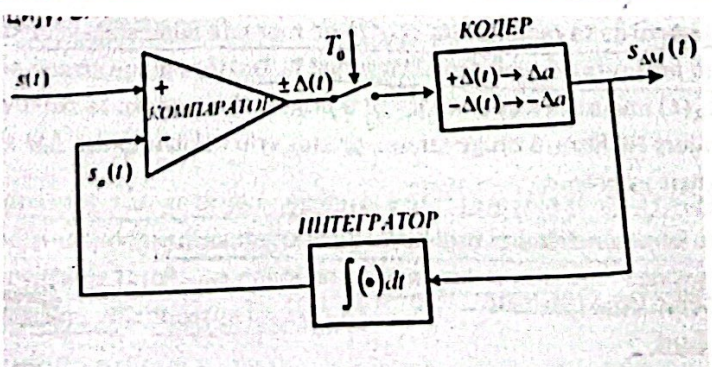
Scanned with CamScanner

## 24. Delta modulacija

Ako se svaki odmjerak kod impulsne kodne modulacije koduje sa dovoljno velikim brojem bita odnos signal-šum kvantovanja će biti dovoljno velik. Međutim, povećanje broja bita po odmjerku signala zahtijeva i veći propusni opseg kanala za prenos PCM signala. Zbog toga se nameće logično pitanje: „Da li je mogućeostvariti zadovoljavajući kvalitet digitalnog prenosa kontinualnog signala ako se svaki njegov odmjerak koduje samo jednim bitom ?". Odgovor na ovo pitanje su dali naučnici patentom delta modulacije ($\Delta M$). Osnovna ideja delta modulacije je prenos informacije o predznaku( „+" ili „-") nagiba signala, to jest informacije koja se može prenijeti samo jednim binarnim simbolom po odmjerku. Ordinarni postupak delta modulacije koji je bio predložen u patentu, pogodan je samo za onu klasu signala čija spektralna gustina snage opada sa porastom učestanosti i čija trenutna vrijednost nema skokovite promjene. Iako nije pogodna za sve klase signala, zbog svoje jednostavnosti i modifikacija koje su uslijedile poslije patenta ordinarne $\Delta M$, delta modulacija i danas ima primjenu u telekomunikacionim sistemima.

### Ordinarna delta modulacija

Za razliku od impulsne kodne modulacije gdje prenosimo informaciju o trenutnim vrijednostima kontinualnog signala u trenucima odmjeravanja, to jest gdje svaka kodna riječ sadrži potpunu informaciju o vrijednostim i preznaku odmjerka, kod ordinarne $\Delta M$ moduacije se prenosi samo informacija o predznaku razlike amplitude susjednih odmjeraka, odnoso kodnu riječ čini samo jedan bit koji nosi informaciju da li je razlika pozitivna ili negativna. Kada govorimo o kvalitetu prenosa signala trebamo imati na umu statistiku prenošenih signala. Na primjer, u signalu govora između dvije amplitude uzete u dva susjedna trenutka postoji izvjesna korelacija i ta korelacija je veća ukoliko je interval koji definiše ta dva trenutka kraći od normalne periode odmjeravanja. To znači da promjena jedne amplitude signala u odnosu na amplitudu u prethodnom intervalu odmjeravanja nije drastično velika i tada je za prenos podatka o toj promjeni potrebno manje kvantizacionih nivoa u odnosu na prenos podatka o samoj amplitudi, pa je potreban i manji broj bita u kodu. Najmanji broj bita u kodu je 1 i sa njim se može prenositi samo znak promjene amplitude u odnosu na vrijednost amplitude u prethodnom trenutku odmjeravanja. Nadalje, da bi prenošeni signal bio što vjerniji originalnom potrebno je uzimati odmjerke što češće jer korelacija između susjednih amplituda raste i promjene postaju manje. Odmjeravanje kod $\Delta M$ se vrši brzinom koja je veća od Nikvistove ($f_0 = 2f_g$), što rezultuje povećanju širine propusnog opsega u odnosu na impulsnu kodnu modulaciju.




Слика 4.18 – Блок шема делта модулатора.

Neka proizvoljni, frekvencijksi ograničen kontinualni signal s(t) djeluje na jedan ulaz amplituskog komparatora, dok je na drugom ulazu „aproksimativni" signal $s_a(t)$. Na osnovu komparacije ulaznog signala s(t) i signala dobijenog kolom povratne sprege $s_a(t)$ (integrator), komparator donosi odluku da li će na svom izlazu generisati pozitivnu ili negativnu amplitudsku razliku ($+\Delta$ ili $-\Delta$), to jest signal

Scanned with CamScanner

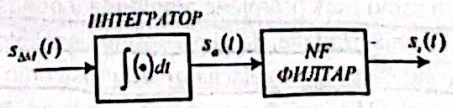
razlike $\Delta(t) = s(t) - s_a(t)$. Prekidačem se svakih $T_0$ sekundi odmjerava izlaz amplitudskog komparatora, a odmjereni signal pobuđuje koder. Ukoliko je signal razlike veći od nule ($\Delta(t) > 0$), koder će generisati pozitivan kvazi-Dirakov impuls površine $\Delta a$. U protivnom, za $\Delta(t) < 0$, izlaz kodera će generisati impuls površine $-\Delta a$. Ovi impulsi ujedno pobuđuju idealni integrator u kolu povratne sprege. Kvazi- Dirakovi impulsi stvaraju na izlazu integratora odskočni (Hevisajdov) signal amplitude $\pm\Delta a$, tako da aproksimativni signal $s_a(t)$ skokovito mijenja vrijednost za $\pm\Delta a$ zavisno od predznaka signala razlike. Dakle, u bilo kojem trenutku odmjeravanja $kT_0$, vrijednost aproksimativnog napona $s_a(t)$ biće uvećana ili umanjena za konstantu vrijednost $\Delta a$ u odnosu na Direkovi prethodni trenutak odmjeravanja $(k-1)T_0$, što možemo napisati u sljedećem obliku: $s_a(t + T_0) = s_a(t) \pm \Delta a$. Pri tom je predznak uz $\Delta a$ određen signum-funkcijom amplitudske razlike između kontinualnog ulaznog signala $s(t)$ i aproksimativnom signala $s_a(t)$ u trenutku odmjeravanja:

$$sign[\Delta(kT_0)] = sign[s(kT_0) - s_a(kT_0)], k = 0,1,2,...$$

Sada se signal na izlazu kodera $s_{\Delta M}(t)$, može predstaviti povorkom kvazi- Dirakovih impulsa površine $\Delta a$, koji se ponavljaju svakih $T_0$ sekudni, a polaritet im je određen funkcijom iz prethodnom izraza.

$$s_{\Delta M}(t) = \Delta a \sum_k sign[\Delta(kT_0)]\delta(t - kT_0), \quad k = 0,1,2,...$$

Analizom ovg signala može se zaključiti da on predstavlja stepeničastu aproksimaciju signala $s(t)$. Primjenik za delta-modulisani sginal je izuzetno jednostavan -> demodulator je sastoji od integratora i filtra propusnika niskih učestanosti. Signal $s_{\Delta M}(t)$ će na izlazu integratora u delta demodulatoru proizvesti isti onakav signal $s_a(t)$ koji je bio u povratnoj grani delta modulatora. Filtar propusnik niskih učestanosti (NF) služi za ublažavanje skokovitih promjena u demodulisanom signalu, tako da izlazni signal $s_i(t)$ predstavlja još bolju aproksimaciju poslatog signala.



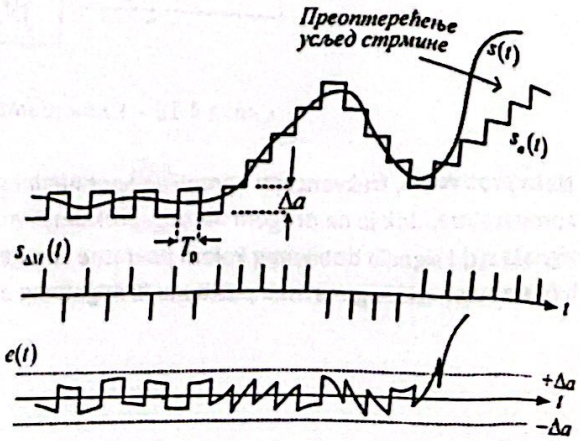

Слика 4.19 – Блок шема делта демодулатора.

Napomena: Izlazni signal delta modulatora $s_{\Delta M}(t)$ ne mora da bude sastavljen od vrlo uskih impulsa. Ti impulsi su obično prošireni na cijeli digitski interval $T_0$. Dakle, s jedne strane nije uopšte potrebno da aproksimacija $s_a(t)$ ima oblik stepenica jer se u prijemniku iaonako te skokovite promjene ublažavaju korišćenjem NF filtra. S druge strane, prenos vrlo uskih impulsa $\Delta M$ signala zahtijeva širok propusni opseg signala za prenos.

Dvije pojave koje su karakteristične za ordinarnu delta modulaciju:

- Preopterećenje usljed strmine
- granularni šum

Obje pojave nastaju usljed grešaka koje su svojstvene samom procesu kvantizacije.




Слика 4.20 – Карактеристични облици сигнала у систему преноса са $\Delta M$.

Scanned with CamScanner

Na kranjem desnom dijelu slike 4.20 može se zapaziti da signal aproksimacije $s_a(t)$ ne prati promjene signala $s(t)$. To nastaje zbog toga što je strmina krive $s(t)$ suviše velika u odnosu na strminu kojom aproksimacija $s_a(t)$ može skokovito da raste. Ova pojava naziva se *preopterećenje usljed strmine*. Naravno, do nje može doći i u silaznom dijelu krive $s(t)$. Delta modulator nikad ne može da bude preopterećen suviše velikim intenzitetom signala, ali suviše velika strmina krive $s(t)$ dovodi do izobličenja prenošenog signala. Da ne bismo imali izobličenje usljed strmine treba da važi sljedeći uslov: $|s(t+T_0)-s(t)| \leq \Delta a$

Dijeljenjem prethodne relacije sa $T_0 = \frac{1}{f_0}$ dobija se:

$$\left|\frac{s(t+T_0)-s(t)}{T_0}\right| \leq \frac{\Delta a}{T_0} = f_0 \Delta a.$$

Пошто је:

$$\left|\frac{s(t+T_0)-s(t)}{T_0}\right| \leq \left|\frac{ds(t)}{dt}\right|_{max},$$

довољан услов да не дође до преоптерећења усљед стрмине гласи:

$$\left|\frac{ds(t)}{dt}\right|_{max} \leq f_0 \Delta a.$$

Dakle, da bi se izbjeglo preopterećenje usljed strmine potrebno je uzeti veću frekvenciju odmjeravanja $f_0$i povećati korak kvantizacije $\Delta a$. Ako prethodni uslov primijenimo na prenos sinusoidalnog tona $s(t) = A_m cos\omega_m t$, onda za uslov da ne dođe do preopterećenja strminom dobijamo: $A_m \leq \frac{\Delta a}{2\pi} \frac{f_0}{f_m}$ i odavde slijedi da je ordinarna delta modulacija pogodna samo za signal neuniformnog, duž ose opadajućeg spektra, kakav ima govorni signal i zato možemo reći da je delta modulacija predodređena za prenos govornog signala.

Druga pojava karakteristična za delta modulaciju je *granularni šum* i on potiče od greške koja se čini u samom postupku kvantizacije i onda kada nema preopterećenja usljed strmine. Ova greška na izlazu iz integratora u prijemniku iznosi: $e(t) = s(t) - s_a(t)$. Dakle, to je razlika između originalnog signala i njegove aproksimacije $s_a(t)$ (na slici 4.20 je prikazan opšti izgled signala greške $e(t)$). Po svojoj prirodi to je slučajan proces. Kada u delta modulatoru ne postoji preopterećenje usljed strmine, onda za grešku $e(t)$ važi: $|e(t)| \leq \Delta a$. Greška na izlazu NF filtra ispoljava se kao granularni šum. Odnos snage signala i granularnog šuma iznosi:

$$\rho_{s/G} = 3\frac{\overline{s^2(t)}}{(\Delta a)^2}\frac{f_o}{B}$$

Pri tom je B širina propusnog opsega prijemnog filtra, a $\overline{s^2(t)}$ srednja snaga signala. Povećanjem koraka kvantizacije $\Delta a$ smanjujemo preopterećenje usljed strmine, ali istovremeno smanjujemo odnos $\rho_{s/G}$. Dakle, povećanje koraka $\Delta a$ povoljno utiče na jednu pojavu, a nepovoljno na drugu, pa je poželjno odrediti optimalnu vrijednost za korak $\Delta a$.

## 25. Linijski signali

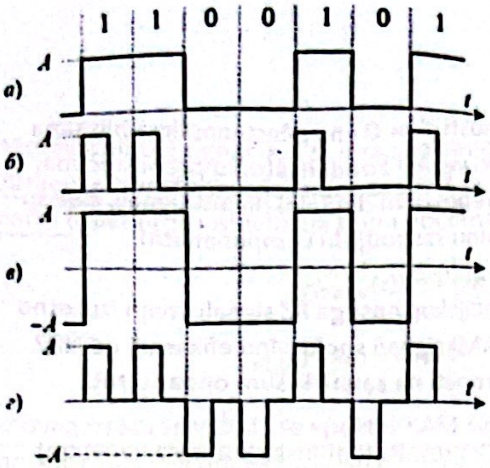
Signali su fizički nosioci informacija i u digitalnom prenosu informacije koje se prenose su diskretne i najčešće već kodovane u binarnom obliku, odnosno predstavljene nizom „nula" i „jedinica" (visokih i niskih logičkih stanja). Ovako zapisane informacije možemo lako da predstavimo pomoću binarnih signala, a tip signala možemo da odaberemo u zavisnosti od raspoloživog kanala za prenos. Mi ćemo posmatrati vremenski dijagram binarnih signala kada na raspolaganju stoji kanal tipa niskopropusnog

Scanned with CamScanner

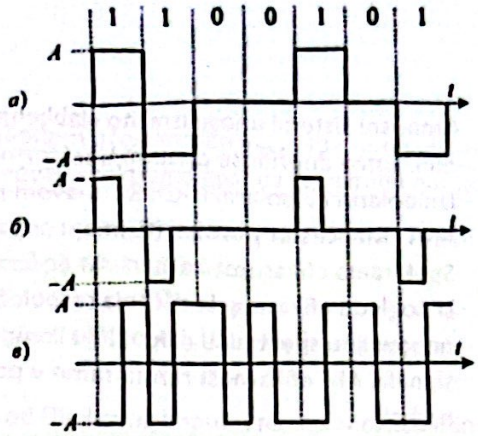
filtra i u tom slučaju zapravo vršimo prenos u osnovnom (prirodnom) opsegu. Postoji više oblika u kojima se javljaju binarni signali, a neki najvažniji su:

- Unipolarni binarni signal bez povratka na nulu (NRZ – Non Return to Zero)
  Ovom tipu signala odgovaraju dva električna stanja -> logičkoj „jedinici" odgovara naponski nivo +A, dok je logička „nula" predstavljena nultim potencijalom. Unipolarni NRZ signal sadrži jednosmjernu (DC) komponentu. Kod unipolarnog NRZ signala ne dolazi ni do kakbih tranzicija neponskih nivoa ako se u dva ili više uzastopnih intervala prenosi isti binarni simbol i ova osobina predstavlja nedostatak unipolarnog NRZ signala jer prijemnik čiji bi rad bio sinhronizovan na sam signal može lako da izgubi sinhronizaciju kad se pojavi duži niz jedinica ili nula u prijemnom signalu.
- Unipolarni signal sa povratkom na nulu (RZ – Return to Zero)
  Logička „1" je predstavljena naposnkim nivoom +A u prvoj polovini bitskog intervala, a u drugoj polovini istog intervala nivo se vraća na nulu. Logička „0" je predstavljena nultim nivoom u cijelom bitskom intervalu. U ovom slučaju smanjena je DC komponenta u odnosu na NRZ signal, a zbog povratka na nulu olakšano je postizanje bitske sinhronizacije. Takođe nedostatak je smanjnje otpornosti na kanalni šum u odnosu na NRZ kanal.
- Bipolarni binarni signal bez povratka na nuli (bipolarni NRZ)
  Logičkoj „jedinici" odgovara naponski nivo A, dok logičkoj „nuli" odgovara naponski nivo -A. Ako su vjerovatnoće pojave binarnih simbola iste (P(0)=P(1)), signal nema DC komponentu. Ovaj oblik signala je otporan na šum, ali po pitanju sinhronizacije ima isti nedostatak kao i unipolarni NRZ signal
- Bipolarni signal sa povratkom na nulu (bipolarni RZ)
  Logička „jedinica" se prenosi isto kao kod unipolarnog RZ signala, dok logičkoj „0" odgovara stanje -A u prvoj polovini bitskog intervala, a nula u drugoj polovini intervala. Bipolarni RZ signal u sebi sadrži informaciju o takt-signalu, što u velikoj mjeri olakšava bitsku sinhronizaciju u prijemniku. Ako je niz logičkih nula i jedinica balansiran (P(0)=P(1)), srednja vrijednost signala iznosi nula.
- Alternativno bipolarni linijski kod (AMI – Alternating Mark Inversion)
  Ovaj kod spada u troninovske kodove sa simetričnim nultim simbolima. AMI kod se dobija tako da binarna nula ostaje ternarna nula, a binarne jedinice originalnog binarnog niza naizmjenično (alternativno) se predstavljaju sa $\pm A$. Dakle, svakoj sljedećoj jedinici u binarnom nizu obrnut je polaritet u odnosu na prethodnu. Ovakav signal može da bude i sa povratkom na nulu. Dobre strane ovog signala su odsustvo DC komponente i mogućnost za sinhronizaciju prijemnika. Naime, ispravljanjem negativnih impulsa u ovom signalu i puštanjem kroz odgovarajući filtar, može da se dobije izražena sinusoidalna komponenta pogodna za bitsku sinhronizaciju. Međutim problemi mogu da nastanu u slučaju pojave dužeg niza nula u prijemnom nizu i ovaj problem je moguće riješiti modifikacijom AMI signala na način da se veći broj uzastopnih simbola „0" mijenja odgovarajućim kodnim dodatkom. Ovako modifikovani AMI poznat je pod nazivom BnZS (Binary n Zero Substitution) gdje je n broj uzastopnih simbola „0" koji se zamjenjuju kodnim dodatkom. BnZS imaju nešto veću vjerovatnoću greške od AMI.
- Mančester linijski kod
  Formira se tako da se originalna binarna jedinica prenosi kao pozitivna (ili negativna) tranzicija na sredini digitskog intervala, a originalna binarna nula kao negativna (ili pozitivna) tranzicija na sredini digitskog intervala. Kada se jave dva ista uzastopna bita (11 ili 00), onda se uvodi dodatna tranzicija na granici bitskih intervala između njih.

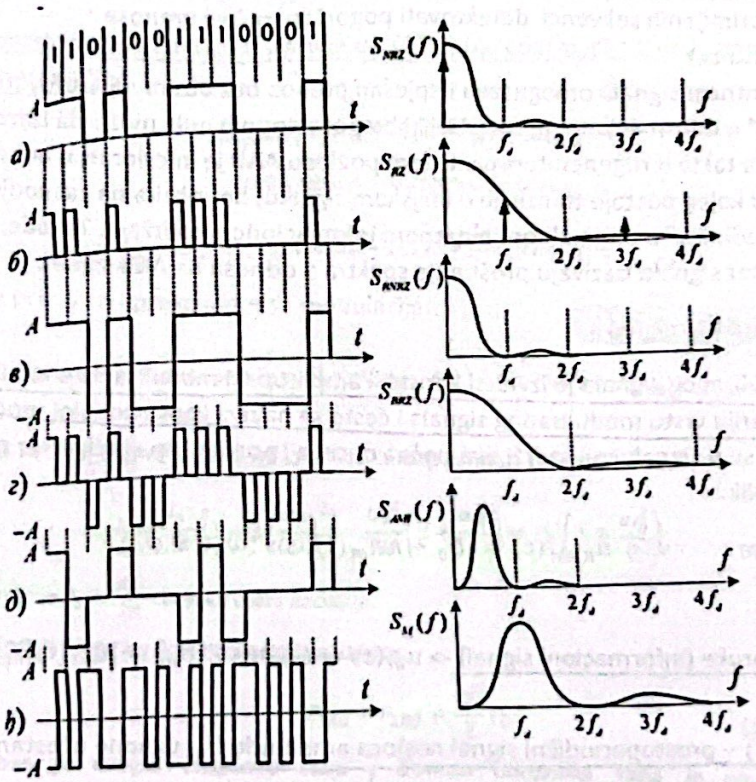
Scanned with CamScanner




Слика 5.1– а) Униполарни *NRZ*, б) униполарни *RZ*, в) биполарни *NRZ* и г) биполарни *RZ* сигнал.




Слика 5.2 – а) *AMI NRZ* код, б) *AMI RZ* код и в) *Манчестер* код.




**Digitalni signal prije slanja u prenosni medijum treba na pogodan način uobličiti u cilju uspješnijeg prenosa i kriterijumi koje bi dobro uobličen signal trebao da zadovolji su:**

1. **Mogućnost ekstrakcije takta (digitska, odnosno bitska sinhronizacija) u regenaratorima**
   **Ekstrakcija digitalnog takta predstavlja osnovu za sinhronizaciju digitalnog sistema i obično se obavlja na bazi prijemnog digitalnog informacionog signala. Taj postupak je jednostavan ako digitalni signal već sadrži diskretnu komponentu na frekvenciji $f_d = {}^{1}/_{T_d}$, što u realnim uslovima često nije zadovoljeno pa se pribjegava nizu nelinearnih i linearnih obrada prijemnog signala u cilju ispravljanja spektralne komponente na frekvenciji $f_d = {}^{1}/_{T_d}$ u regeneratoru.**
2. **Povoljna raspodjela spektra**

Scanned with CamScanner

Prenosni sistemi unose izrazito slabljenje na učestanosti $f = 0$ i na učestanostima bliskima nuli. Tome doprinose prisutni transformatori i serijski vezani kondenzatori u prenosnicima. Unipolarni i bipolarni NRZ i RZ u ovom pogledu su nepovoljni digitalni linijski signali, dok su AMI i Mančester povoljni (tj. imaju povoljnu spektralnu raspodjelu komponenata)

3. Spektralna efikasnost i otpornost na kanalski šum

   U pogledu efikasnog korišćenja raspoloživog frekvencijskog opsega RZ signali imaju izuzetno nepovoljnu spektralnu raspodjelu komponenata, a AMI signali spektralno efikasniji od NRZ signala. Ako efikasnost razmatramo u pogledu otpornosti na kanalski šum onda su NRZ najbolji.

4. Mogućnost detekcije i eventualne korekcije kanalskih grešaka (daljinska kontrola kvaliteta)

   Ovakve mogućnosti pružaju kodovi sa ugrađenom redudansom (memorijom) kao što su AMI kod i Mančester kod. Kod unipolarnih i bipolarnih signala ovakve mogućnosti ne postoje jer su kod njih sve sekvence dozvoljene (nezavisno od njihove dužine) pa se na prijemu ne mogu analizom primljenih sekvenci detektovati pogoršani uslovi prenosa

5. Transparentnost

   Transparentnost signala omogućava uspješan prenos bez obzira na vjerovatnoću pojave „nula" i „jedinica" u informacionoj poruci. Veliki broj uzastopnih nula može da izazove nepouzdan rad ekstraktora takta u regeneratorima. U tom pogledu AMI je inferioran u odnosu na Mančester signal, kod kojeg postoje tranzicije u linijskom signalu, bez obzira na raspodjelu vjerovatnoća „nula" i „jedinica" u originalnom binarnom infomacionom sadržaju. Takođe, prisutne tranzicije u Mančester signalu izazivaju proširenje spektra u odnosu na AMI signal.

## 26. Konvencionalni AM signal

Prvi prenos modulisanog signala je izvršen koristeći amplitudski modulisan signal. Dakle, ovaj signal predstavlja najstariju vrstu modulisanog signala i često se naziva konvecionalni modulisan signal ili KAM signal. Radi se o signalukoji sadrži dva bočna opsega i nosilac. Analitički izraz za konvencionalni AM signal ima oblik:

$$u_{KAM}(t) = |U_0 + ku_m(t)|\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

gdje su:

$u_m(t)$ – signal poruke (informacioni signal) -> $u_m(t) = U_m m(t)$; $U_m = |u_m(t)|_{max}$ , pri čemu je $m(t) \leq 1$

$U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ – prostoperiodični signal nosioca amplitude $U_0$, ugaone učestanosti $\omega_0$ i početne faze $\varphi_0$

$k$ – konstanta koja odražava osjetljivost modulatora

Pretpostavljajući nultu početnu fazu nosioca i uvrštavanjem izraza za $u_m(t)$ dobijamo:

$$u_{KAM}(t) = U_0\left[1 + \frac{kU_m}{U_0}m(t)\right]\cos\omega_0 t = U_0[1 + m_0 m(t)]\cos\omega_0 t$$

Pri tome je $m_0 = \frac{kU_m}{U_0}$ indeks modulacije, odnosno maksimalna relativna promjena amplitude modulisanog signala (naziva se još i *stepen modulacije* ili *dubina modulacije* i izražava se u procentima). %

Scanned with CamScanner

Ako modulišući signal $u_m(t)$ ima spektar ograničen ugaonom učestanošću $\omega_m$, tada se računanjem Furijeove transformacije izraza za KAM signal sobija njegova spektralna gustina amplituda na sljedeći način (opet pretpostavljenja nulta početna faza):

$$\mathcal{F}(u_{KAM}(t)) = U_{KAM}(j\omega) = \mathcal{F}(U_0 \cos\omega_0 t) + \mathcal{F}(k u_m(t) \cos\omega_0 t) =$$

$$\pi U_0 \delta(\omega - \omega_0) + \pi U_0 \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} k U_m [j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} k U_m [j(\omega + \omega_0)]$$

Iz ovog izraza se vidi da se spektar KAM signala sastoji od Dirakovog impulsa na ugaonoj učestanosti nosioca $\omega_0$ i dva bočna opsega, nižeg i višeg, međusobno simetrična u odnosu na ugaonu učestanost nosioca. Oblik krive spektralnih gustina amplituda svakog od bočnih opsega identičan je obliku spektralne gustine amplituda modulišećeg signala. Svaki bočni opseg sadrži signal poruke,a potreban frekvencijski opseg za prenos KAM signala je dvostruko veći od širine spektra modulišećeg signala $f_m$.

Pretpostavljajući prostoperiodični signal poruke $u_m(t) = U_m \cos(\omega_0 t)$ i $k = 1$, signal se može predstaviti na sljedeći način:

$$u_{KAM}(t) = (U_0 + U_m \cos\omega_m t)\cos\omega_0 t$$

$$= U_0 \cos\omega_0 t + U_m \cos\omega_m t \cos\omega_0 t$$

$$= U_0 \cos\omega_0 t + \frac{1}{2} U_m \cos(\omega_0 - \omega_m) t + \frac{1}{2} U_m \cos(\omega_0 + \omega_m) t$$

Ovaj izraz se može prikazati i preko indeksa modulacije:

$$u_{KAM}(t) = U_0 \cos\omega_0 t + \frac{1}{2} m_0 U_0 \cos(\omega_0 - \omega_m) t + \frac{1}{2} m_0 U_0 \cos(\omega_0 + \omega_m)$$

Srednja snaga koju bi ovaj signal razvio na otporniku otpornosti R iznosi:

$$P = \frac{U_0^2}{2R}\left[1 + 2\left(\frac{m_0}{2}\right)^2\right] = \frac{U_0^2}{2R}\left(1 + \frac{m_0^2}{2}\right) = P_0\left(1 + \frac{m_0^2}{2}\right). \qquad (6.7)$$

где је $P_0 = \frac{U_0^2}{2R}$ средња снага носиоца.

Средња снага у бочним опсезима износи:

$$P_{1BO} + P_{2BO} = \frac{m_0^2}{2} P_0. \qquad (6.8)$$

Како је порука садржана само у бочним опсезима тада је степен искоришћења снаге дат са:

$$\eta = \frac{P_{1BO} + P_{2BO}}{P} = \frac{m_0^2}{2 + m_0^2}. \qquad (6.9)$$

Iz ovoga izaraza se vidi da je stepen iskorištenja najveći kada je stepen modulacije $m_0 = 1$. Prema prethodnom izrazu 1/3 predajne snage će biti iskorišćena na prenos korisnog signala, a preostali udio (2/3) odlazi na nosilac (što predstavlja gubitak). Znači maksimalno teorijsko iskorišćenje sistema sa KAM signalom je 33,33%, dok je u praksi ono čak i manje.

## 27. AM signal sa jednim bočnim opsegom

Postoji nekoliko načina izrade modulatora za dobijanje AM signala sa jednim bočnim opsegom:

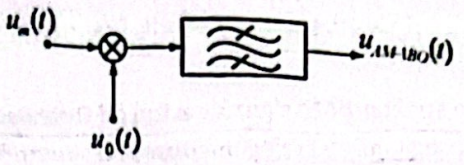
- Modulator sa filtrom za izdvajanje bočnog opsega
- Modulator sa višestrukom modulacijom

Scanned with CamScanner

- Modulator sa dobijanje AM-1BO signala metodom faznog pomjeraja

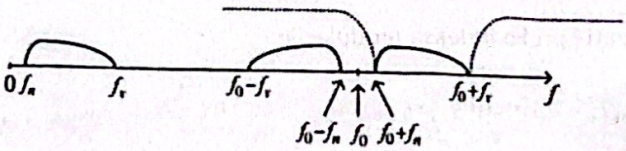
### *Modulator sa filtrom za izdvajanje bočnog opsega*

AM-1BO se može realizovati korišćenjem balansnog modulatora na čijem se izlazu postavlja filtar, propusnik opsega koji će propustiti izabrani bočni opseg, a sve ostale komponente u spektru potisnuti.




Слика 6.1. – Принципијелна шема модулатора са излазним филтром.

Pretpostavimo da spektar modulišućeg signala zauzima opseg od $f_n$do $f_v$ i neka je frekvencija nosioca $f_0$. Tada, ako bi se htio propustiti viši bočni opseg, filtrom treba propustiti komponente koje se nalaze u opsegu od $f_0 + f_n$ do $f_0 + f_v$. Problem koji se ovdje javlja kod realizacije filtra je taj što bi filtar trebalo da ima takvu karakteristiku slabljenja da ona maksimalno oslabi niži bočni opseg. Ukoli je najniža komponenta u spektru modulišućeg signala $f_n = 0$, slijedi da bi korišćeni filtar trebalo da ima karakteristiku slabljenja koja ima jako strm prelaz sa maksimalne na minimalnu vrijednost, što značajno povećava kompleksnost realizacije filtra.

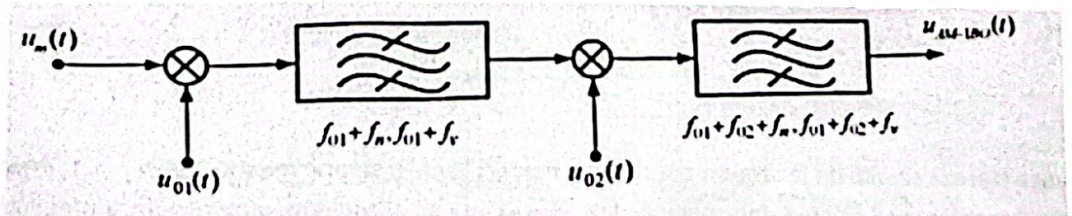



Слика 6.2. – Принципијелни приказ издвајања вишег бочног опсега филтром пропусником опсега.

### *Modulator sa višestrukom modulacijom*

Problem realizacije filtra, koji i pri visokim vrijednostima frekvencije nosioca ima krivu selektivnosti takvu da dovoljno potisne nepoželjne komponente, realizuje se korišćenjem postupka višestruke modulacije. Ova modulacija se može realizovati pomoću balansnih modulatora i filtara za izdvajanje odgovarajućih bočnih opsega.

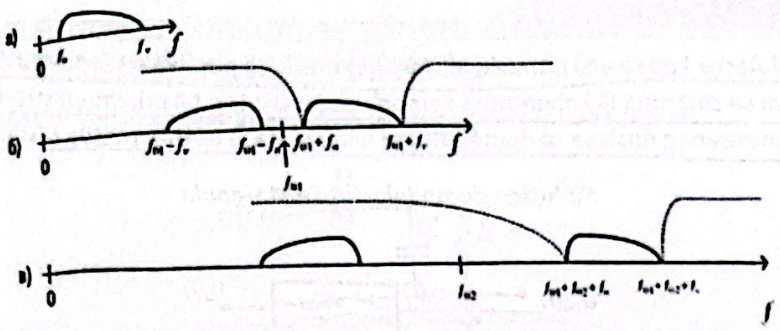
Sa $u_{01}(t)$ i $u_{02}(t)$ označeni su nosioci na frekvencijama $f_{01}$ i $f_{02}$, respektivno.




Слика 6.3 – Принципијелна шема модулатора са вишеструком модулацијом.

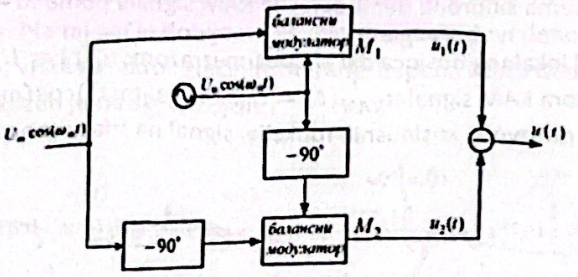
U prvom koraku se vrši translacija na neku nižu noseću frekvenciju $f_{01}$ u okviru koje je moguće uspješno izdvojiti jedan bočni opseg. Sada se sa ovako izdvojenim signalom čiji se spektar nalazi u opsegu $(f_{01} + f_n,\ f_{01} + f_v)$, vrši modulacija sa drugim nosiocem $u_{02}(t)$ frekvencije $f_{02}$. Ovim je postignuto da je opseg u kome karakteristika slabljenja filtra treba izvršiti prelaz sa maksimalne na minimalnu vrijednost određen sa $2(f_{01} + f_n)$, što je znatno šire od $2f_n$.

Scanned with CamScanner



Слика 6.4 – Поступак добијања АМ-1БО поступком вишеструке модулације и спектралне густине амплитуда а) модулишућег сигнала, б) сигнала на излазу првог и в) другог филтра пропусника опсега.

## *Modulator za dobijanje AM-1BO signala metodom faznog pomjeraja*




Слика 6.5. – Модулатор за добијање једног бочног опсега методом фазног помјераја.

Modulator se sastoji od dva identična balansna modulatora (množača), koji su na slici označeni sa $M_1$ i $M_2$. Modulišući signal oblika $u_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$ se dovodi na ulaz modulatora $M_1$ direktno, dok se modulišući signal na ulaz modulatora $M_2$ dovodi preko kola koje unosi fazni pomjeraj od -90°. Nosilac $u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ se dovodi direktno na modulator $M_1$, a fazno pomjeren za -90° na modulator $M_2$.

Pod pretpostavkom da je $k$ konstanta množača i da je $U_0 = 1$, na izlazu balansnih modulatora $M_1$ i $M_2$ dobijaju se sljedeći signali:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(t) &= kU_m \cos\omega_m t \cdot \cos\omega_0 t, \\ u_2(t) &= kU_m \sin\omega_m t \cdot \sin\omega_0 t. \end{aligned}}$$

Sabiranjem ovih izaraza dobija se AM-1BO sa donjim bočnim opsegom:

$$u_{AM-1BO}(t) = u_1(t) + u_2(t) = kU_m \cos(\omega_0 - \omega_m)t.$$

Oduzimanjem ovih izraza (slučaj prikazan na blok-šemi sa slike 6.15) dobija se AM-1BO signal sa gornjim bočnim opsegom.

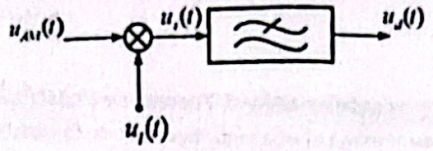
Realizacija modulatora AM-1BO signala na ovaj način ne zahtijeva upotrebu filtra, pa su i problemi vezani za realizaciju filtra u ovom slučaju eliminisani. Takođe, ovdje ne postoje ograničenja vezana za najnižu komponentu u spektru modulišućeg signala. Međutim, ovdje se javlja problem koji je vezan za konstrukciju kola koje treba da unse fazni pomjeraj od -90° podjednako na cijelim opsegu učestanosti.

Scanned with CamScanner

## 28. Demodulacija KAM signala

Postupak demodulacije koji se vrši pomoću lokalno generisanog pomoćnog signala iz lokalnog generatora naziva se sinhrona ili koherentna demodulacija. Ukoliko na prijemnoj strani nije potreban signal lokalno generisanog nosioca za demodulaciju kažemo da je nekoherentna (asinhrona).

### *Sinhrona demodulacija KAM signala*




Слика 6.6. – Принципијелна шема демодулације КАМ сигнала

Na slici 6.6 se nalazi blok-šema sinhrone demodulacije KAM signala pomoću množača i NF filtra.

Pretpostavimo da je signal lokalnog nosioca dat sljedećim izrazom: $u_l(t) = U_l\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Ako je signal na ulazu demodulatora KAM signal $u_{KAM}(t) = U_0(1 + m_0\mathrm{m(t)})\cos(\omega_0 t)$, onda je na osnovu formule za transformaciju proizvoda kosinusnih funkcija, signal na izlazu množača:

$$u_i(t) = \frac{1}{2}U_0U_l cos\varphi + \frac{1}{2}U_0U_l cos(2\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m_0U_0U_l m(t) cos\varphi + \\ + \frac{1}{2}m_0U_0U_l m(t) cos(2\omega_0 t + \varphi)$$

Prvi član u zbiru predstavlja jednosmjernu komponentu pa to u spektralnom domenu predstavlja Dirakovu funkciju na nultoj učestanosti. Drugi član predstavlja drugi harmonik lokalnog nosioca, a u spektru ova komponenta je lokalizovana u vidu Dirakove funkcije na dvostrukoj frekvenciji lokalnog nosioca. Treći član je signal srazmjeran modulišućem signalu, u osnovnom opsegu. Četvrti član je modulisan signal na dvostrukoj frekvenciji nosioca. Dakle, uz pretpostavku da je spektar modulišućeg signala ograničen frekvencijom $f_m$, tada iz uslova da ne dođe do preklapanja spektralnih komponenata sa modulišućim signalom $2f_0 - f_m \geq f_m$ slijedi $f_0 \geq f_m$. Prema tome, jednosmjerna komponenta se može odstanitit (npr. sprežnim kondenzatorom), a treći član (korisni dio) se može izdvojiti niskofrekvencijskim filtrom. Tada se dobija sljedeći signal na izlazu NF filtra:

$$u_d(t) = \left(\frac{1}{2}m_0U_0U_l cos\varphi\right)m(t).$$

Pošto konstanta proporcionalnosti zavisi direktno od faznog stava između nosilaca u predajniku i prijemnku, potrebno je da signal nosioca na predaji i lokalno generisani nosilac na prijemu imaju isti frekvenciju i nultu razdešenost faze ($\varphi = 0$).

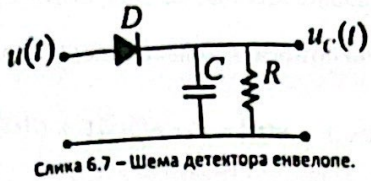
### *Asinhrona demodulacija KAM signala*

Kod asinhrone demodulacije nije potrebno generisanje signala lokalno generisanog nosioca na prijemu. Najjednostavniji asinhroni demodulator KAM signala je detektor anvelope. Kod KAM signala anvelopa nosi korisnu informaciju, odnosno signal poruke. Detektor anvelope je kolo koje na svom izlazu daje signal srazmjeran anvelopi ulaznog signala, za razliku od produktnog demodulatora gdje se

Scanned with CamScanner

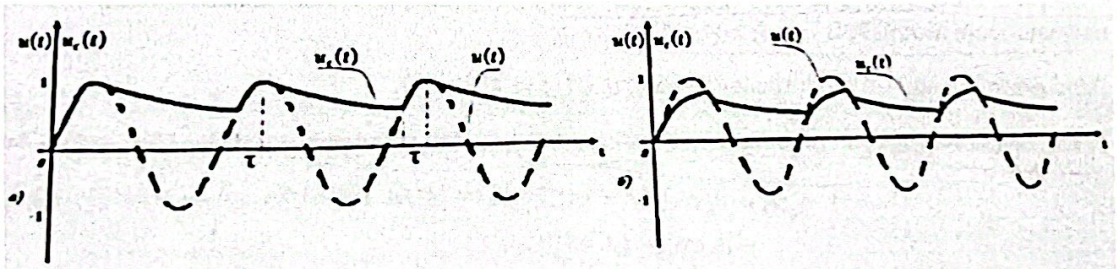
uz pomoć lokalno generisanog nosioca rekonstruiše modulišući signal. U prvom slučaju radi se o detekciji, a u drugom o demodulaciji modulišućeg signala.

Detektor anvelope se koristi za ekstrakciju modulišućeg signala iz KAM signala.




Слика 6.7 – Шема детектора енвелопе.

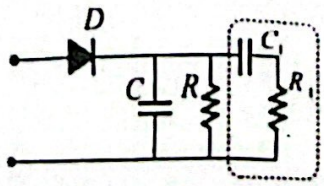
Pretpostavimo da je indeks modulacije manji od 1 (nema premodulacije) i da je amplituda ulaznog napona dovoljno velika tako da je dioda u provodnom ili neprovodnom stanju. U periodu vremena kada dioda provodi, kondenzator C se brzo napuni i napon na njegovim krajevima dostiže maksimalnu vrijednost ulaznog napona. Kada dioda ne provodi, kondenzator C se prazni preko otpornika R. Talasni oblik napona $u_c(t)$ zavisi od vremenske konstante RC. Što je ona veća, to $u_c(t)$ bliži maksimalnoj vrijednosti napona $u(t)$. Na taj način dobijamo anvelopu signala dovedenog na detektor anvelope, pa se zato ovo kolo naziva i vršni detektor. Način formiranja napona izlazu detektora anvelope za ulazni sinusoidalan napon prikazan je na sljedećoj slici:




Слика 6.8 – Синусоидалан напон на улазу у детектор анвелопе $u(t)$ и напон на кондензатору $u_c(t)$ у случају да: а) диода је идеална, б) диода није идеална.

Na isti način se vrši i detekcija KAM signala, samo su u tom slučaju amplitude ulaznog napona promjenljive. Pri tome treba obratiti pažnju na pravilan izbor elemenata kola, tj. odgovarajuće RC konstante da se ne bi dogodilo da napon na izlazu detektora ne prati anvelopu ulaznog KAM signala. Vrijednost RC vremenske konstante koja obezbjeđuje da ne dolazi do pojave tzv. dijagonalnog odsijecanja: $RC = \frac{1}{\sqrt{\omega_0 \omega_m}}$.

Signal na izlazu detektora anvelope sadrži DC komponentu koja se odstranjuje sprežnim kondenzatorom u visokofrekvencijskom VF filtru.




Слика 6.9 – Детектор анвелопе са VF филтром

## 29. Ugaona modulacija

Osnovne prednosti ugaono modulisanog signala u odnosu na amplitudski modulisani signal:

Scanned with CamScanner

- Amplituda ugaono modulisanog signala je konstanta pa prijemnik ignoriše promjene amplitude. Na taj način se postiže manja osjetljivost na šumove (koji su često aditivnog karaktera)
- Mnogo je lakše napraviti sistem za reprodukciju zvuka visoke tačnosti, što znači da se reprodukovani signal minimalno razlikuje od onog originalno poslanog

Pod pretpostavkom da je amplituda nosioca $U_0$, ugaono modulisani signal se može opisati sljedećim izrazom:

$$u_0(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos[\Phi(t)] \qquad (6.18)$$

$f_0$- frekvencija nosioca, $\varphi(t)$ – trenutna devijacija faze nosioca, $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ - ugao ili trenutna faza nosioca $u_0(t)$.

Diferenciranjem faze dobijamo učestanost: $\frac{d}{dt}[\Phi(t)] = \omega_0 + \frac{d}{dt}[\varphi(t)] = \omega_0 + \delta\omega_i = 2\pi f_0 + 2\pi\delta f_i$

Pri tom $\frac{d}{dt}[\varphi(t)]$ predtsvlja trenutnu devijaciju ugaone učestanosti nosioca, a $\delta f_i$ trenutnu devijaciju frekvencije nosioca.

Neka je modulišući signal oblika $u_m(t) = U_m m(t)$, pri čemu je $U_m = |u_m(t)|_{max}$, a $m(t)$ je normalizovani modulišući signal, $m(t) \leq 1$.

Ugao nosioca zavisi od modulišućeg signala, tj. $\varphi(t) = f[u_m(t)]$

Dakle, opšti oblik ugaono modulisanog signala je dat sljedećim izrazom:

$$u_0(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos\{2\pi f_0 t + \varphi(t)\} = \\ = U_0 \cos\{2\pi f_0 t + f[(u_m(t)]\}.$$

Za razliku od amplitudske modulacije ugaona modulacija predstavlja nelinearan procem kojim se vrši eksponencijalna transformacija modulišućeg signala u nosilac. U zavinosti kakav je analitički oblik funkcije $\varphi(t) = \delta\Phi_i(t) = f[(u_m(t)]$, može se prepoznati da li je riječ o faznoj ili frekvencijskoj modulaciji.

Ako je trenutna devijacija faze $\varphi(t) = \delta\Phi_i(t)$ direktno proporcionalna modulišućem signalu radi se o faznoj modulaciji.

$$\varphi(t) = \delta\Phi_i(t) = k_\varphi u_m(t) = k_\varphi U_m m(t) = \Delta\Phi_0 m(t).$$

$k_\varphi$- konstanta proporcionalni, $\Delta\Phi_0 = k_\varphi U_m = |\varphi(t)|_{max} = |\delta\Phi_i(t)|_{max}$ – maksimalna devijacija faze ili samo devijacija faze

Konačno, fazno modulisani signal može se predstaviti izrazom

$$u_{PM}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + k_\varphi u_m(t)] = U_0 \cos[\omega_0 t + \Delta\Phi_0 m(t)]$$

gdje je $\omega_0 t + \Delta\Phi_0 m(t) = \Phi_{i,PM}$ trenutna faza nosioca fazno modulisanog signala.

Scanned with CamScanner

**Ukoliko je trenutna devijacija učestanosti direktno srazmjerna modulišućem signalu, tada je riječ o frekvencijski modulisanom signalu**

$$\delta f_i = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}[\varphi(t)] = k_f u_m(t) = k_f U_m m(t) = \Delta f_0 m(t)$$

$k_f$- konstanta proporcionalni, $\Delta f_0 = k_f U_m = |\varphi(t)|_{max} = |\delta f_i(t)|_{max}$ – maksimalna devijacija učestanosti nosioca ili samo devijacija učestanosti

Trenutna faza nosioca frekvencijski modulisanog signala opisana je sljedećim izrazom ($k_\omega = 2\pi k_f$, $\Delta\omega_0$ devijacija ugaone učestanosti):

$$\Phi_{i,FM} = \int [\omega_0 + k_\omega u_m(t)]\,dt = \omega_0 t + k_\omega U_m \int m(t)dt$$
$$= \omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t)dt$$

Konačno, frekvencijski modulisani signal može se prestaviti sljedećim izrazom:

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos\left[\omega_0 t + k_\omega \int u_m(t)dt\right] = U_0 \cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t)dt\right]$$

Napomena: Na osnovu opšteg izraza za ugaono modulisani signal (6.18) nije moguće zaključiti da li se radi o fazno ili frekvencijski modulisanom signalu.

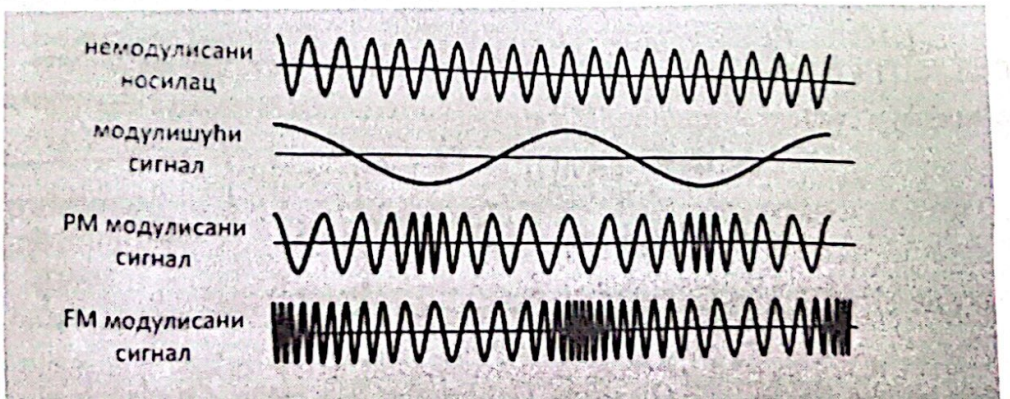
*Primjer: Modulišući signal je* $u_m = U_m cos\,(\omega_m t)$

*Fazna modulacija:* $u_{PM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\varphi U_m \cos\omega_m t)$.

*Frekvencijska modulacija:*

$$u_{FM}(t) = U_0 cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega_0 \int cos\,\omega_m t\,dt\right] =$$
$$= U_0 cos\left[\omega_0 t + \frac{\Delta\omega_0}{\omega_m} cos\left(\omega_m t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

*Maksimalna devijacija kružne učestanosti nosioca:* $\Delta\omega_0 = k_\omega U_m$




Слика 6.10 – Таласни облици немодулисаног носиоца, модулишућег сигнала, фазно и фреквенцијски модулисаног сигнала.

Scanned with CamScanner

## 30. Veza između frekvencijske i fazne modulacije

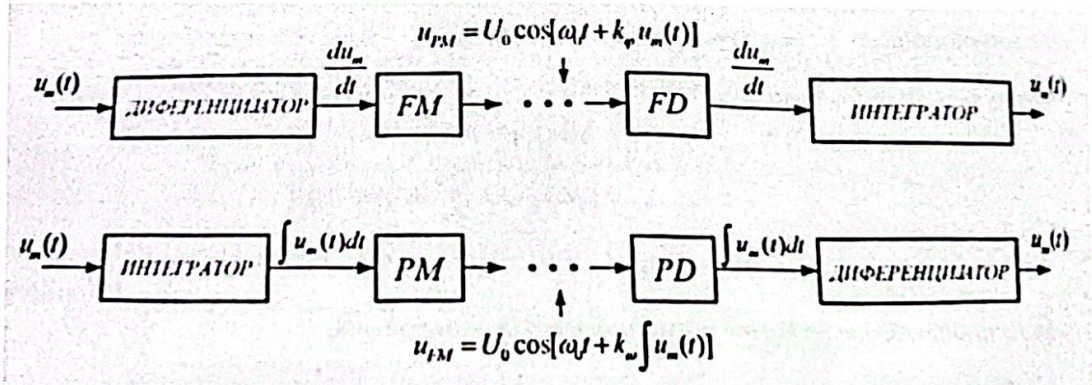
Sklop u kome se obavlja fazna modulacija naziva se fazni modulator. Prostoperiodični nosilac u koji se utiskuje signal koji sadrži poruku (modulišući signal) mijenja se tako da je trenutna faza nosioca srazmjerna modulišućem signalu.

Sklop koji vrši frekvencijsku modulaciju naziva se frekvencijski modulator. Kod frekvencijski modulisanog signala nosilac se mijenja na način da je trenutna faza srazmjerna integralu modulišućeg signala.

Dakle, ako se modulišući signal $u_m(t)$ diferencira prije slanja na frekvencijski modulator dobija se da je trenutna devijacija faze proporcionalna integralu diferenciranog modulišućeg signala. Drugim riječima, proporcionalna je modulišućem signalu ($\int u_m'(t)dt = u_m(t)$). Stoga, ako se prije FM modulatora doda diferencijator , takav sklop će da se ponaša kao fazni modulator. Slično, ako se prije PM modulatora doda integrator, takav sklop će se ponašati kao FM modulator. FM demodulator sa integratorom se ponaša kao PM demodulator, ako se na PM demodulator doda diferencijator dobija se FM demodulator. Ove veze se kraće i čitljivije mogu zapisati na sljedeći način:

1. PM modulator = diferencijator + FM modulator
2. PM demodulator = FM demodulator + integrator
3. FM modulator = integrator + PM modulator
4. FM demodulator = PM demodulator + diferencijator

Dakle, moguće je sistemom koji je namijenjen za prenos signala postupkom PM dodavanjem integratora na predajnu stranu i diferencijatora na prijemnu prenositi signal postupkom FM. Slično, dodavanjem diferencijatora na predaji i integratora na prijemu kod sistema za prenos postupkom FM dobija se sistem za prenos postupkom PM.




Слика 6.11 – Систем за пренос PM сигнала кроз систем са фреквенцијском модулацијом и систем за пренос FM сигнала кроз систем са фазном модулацијом.

Scanned with CamScanner

## 31. Средња снага и спектар угаоно модулисаног сигнала.

Угаоно модулисани сигнал у општем случају је

$$u(t) = U_0 cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)]$$

Тренутна снага на једноомској отпорности износи

$$p(t) = u^2(t) = U^2 \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)]\right\}$$

Ако се модулишућа функција $\varphi(t)$ представи као сума простопериодичних компонената, средњеквадратна вриједност другог сабирка је једнака нули. Тада је средња снага угаоно модулисаног сигнала једнака средњој снази немодулисаног носиоца:

$$\boxed{P = \overline{u^2(t)} = \frac{U_0^2}{2}}$$

Угаона модулација је нелинеаран процес. Уколико се за модулишући сигнал изабере простопериодични тест тон, као резултат фазне или фреквенцијске модулације, добија се бесконачно много фреквенцијских компоненти у спектру модулисаног сигнала. Већина бочних фреквенцијских компоненти има веома мале амплитуде које се могу занемарити. Развој угаоно модулисаног сигнала се постиже разлагањем у Беселове функције прве врсте. Да би се нека спектрална компонента сматрала значајном, конвенција је да носи више од 1% снаге немодулисаног носиоца. Ширина спектра угаоно модулисаног сигнала која обухвата значајне компоненте износи:

$$\boxed{B = 2f_m(m+1)}$$

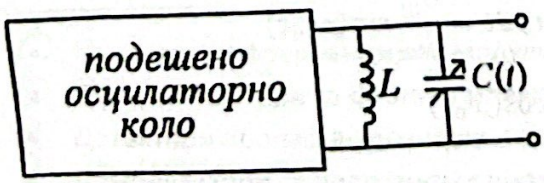
При чему је $m = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_m}$ индекс модулације.

## 32. Модулација FM сигнала.

Генерисање фреквенцијски модулисаног сигнала може се остварити на два начина:

- Директним методама
- Индиректним методама

Директна промјена постиже се промјеном неких од параметара осцилатора.




$$C(t) = C_0 - km(t)$$

$$\left|\frac{k}{C_0} m(t)\right| << 1$$

На слици је приказана шема FM модулатора са LC осцилаторним колом код којег се промјена учестаности постиже промјеном капацитивности подешеног осцилаторног кола. Нпр. код кондензаторског микрофона промјеном звучног притиска мијења се



Scanned with CamScanner

растојање између плоча, а самим тим и капацитивност. Ако претпоставимо да се промјена одвија по линеарном закону, угаона учестаност осцилаторног кола износи

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}} = \frac{1}{\sqrt{L(C_0 - km(t))}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{C_0} m(t)}}$$

С обзиром на то да вриједи развој у Маклоренов ред

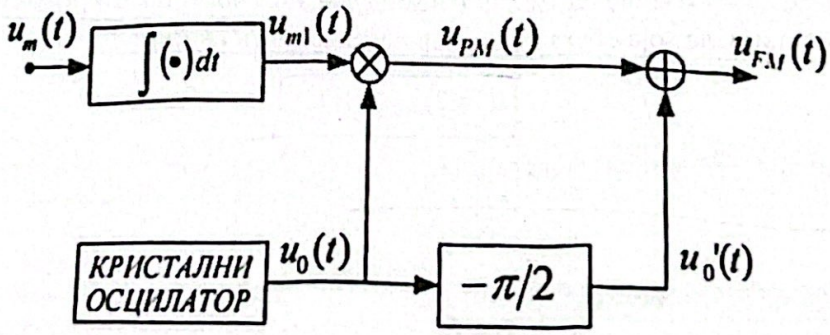
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2}, \text{за } x \ll 1$$

слиједи да је угаона учестаност

$$\omega_i \approx \omega_c \left(1 + \frac{k}{2C_0} m(t)\right) \approx \omega_c + k_\omega m(t)$$

При томе је $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ и $k_\omega = \frac{k\omega_c}{2C_0}$. Дакле, тренутна фреквенција се директно, по линеарној зависности мијења под утицајем модулишућег сигнала.

Код индиректних метода фреквенција носиоца се мијења индиректно, под утицајем модулишућег сигнала. Примјер директне FM модулизације је Армстронгов модулатор.




Претпоставимо да је модулишући сигнал тест тон угаоне учестаности $\omega_m$.

$$u_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$$

Из блок шеме слиједе изрази за сигнале на излазима појединих склопова кола.

$$u_{m1}(t) = \int U_m \cos(\omega_m t)\, dt = \frac{U_m}{\omega_m} \sin(\omega_m t)$$

$$u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$u_{PM}(t) = \frac{U_m U_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \cos(\omega_0 t)$$

$$u_0(t) = U_0 \sin(\omega_0 t)$$



Scanned with CamScanner

ОКИТИ

$$u_{FM}(t) = u_0(t) + u_{PM}(t) = U_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{U_m U_0}{\omega_m} \sin(\omega_m t)\cos(\omega_0 t)$$

$$A\sin(x) + B\cos(x) = C\sin(x+\varphi)$$
$$= C\sin(x)\cos\varphi + C\cos(x)\sin\varphi$$
$$A = C\cos\varphi$$
$$B = C\sin\varphi$$
$$A^2 + B^2 = C^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = C^2$$
$$\frac{B}{A} = tg\varphi$$
$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\varphi = arctg\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$u_{FM}(t) = U_0 \sqrt{1 + \left(\frac{U_m}{\omega_m}\right)^2 \sin^2(\omega_m t)} \sin\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right)$$

$$\varphi(t) = arctg\left(\frac{U_m}{\omega_m}\sin(\omega_m t)\right)$$

Узимајући у обзир да је $arctg(x) \approx x$ (за мало $x$), уз занемаривање другог сабирка под коријеном, добијамо коначно:

$$u_{FM}(t) \cong U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{U_m}{\omega_m}\sin(\omega_m t)\right) =$$
$$= U_0 \sin\left(\omega_0 t + \int u_m(t)dt\right).$$

## 33. Демодулација FM сигнала.

Демодулација се обавља у склопу који се назива демодулатор, чија је улога издвајање сигнала поруке из модулисаног сигнала. Кола за детекцију FM сигнала могу се сврстати у неколико група:

- Конвертори фреквенцијски модулисаних сигнала у амплитудски модулисане
- Дискриминатори са фазним мрежама
- Детектори проласка кроз нулу
- Демодулатори са повратном спрегом

Сви склопови који обављају функцију диференцирања у временском домену могу се користити као **конвертори FM у AM** сигнале. Нека је дат FM сигнал:



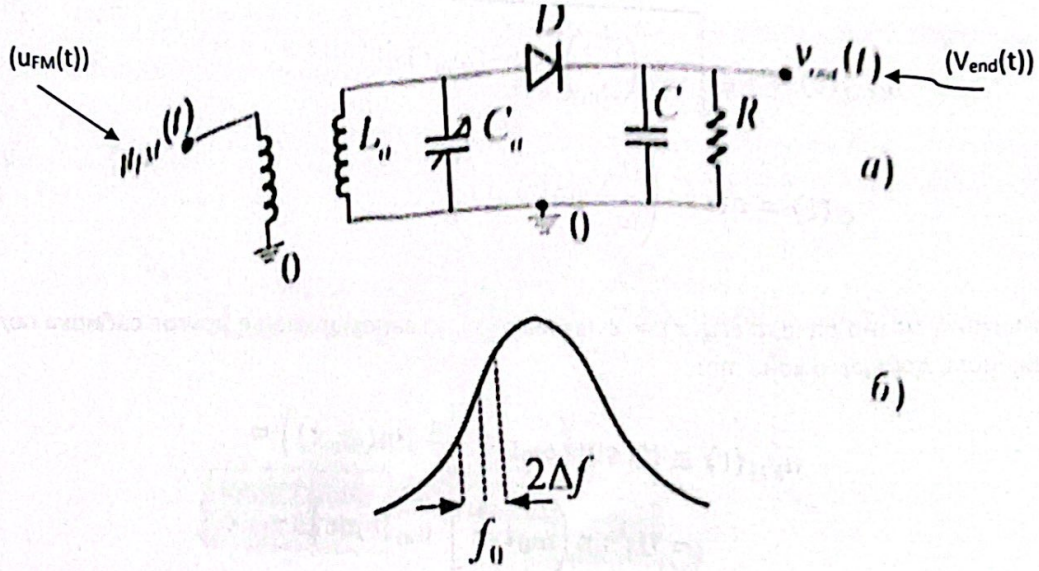
Scanned with CamScanner

$$u_{FM}(t) = U_0 cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t)dt\right]$$

При томе је $\Delta\omega_0 = k_\omega U_m$ максимална девијација кружне учестаности носиоца, а $u_m(t) = U_m m(t)$ модулишући сигнал. Ако на улаз диференцијатора доведемо овај сигнал, на излазу добијамо сљедећи сигнал:

$$u_{FM\to AM}(t) = U_0[\omega_0 + k_\omega u_m(t)]cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t)dt + \frac{\pi}{2}\right].$$

Добијени сигнал модулисан је амплитудски и фреквенцијски. Најједноставнија реализација детекције FM сигнала, приказана је на следећој слици. Диференцирање сигнала обавља паралелно осцилаторно коло у линеарном дијелу фреквенцијске карактеристике.




**Дискриминатори са фазним мрежама** користе склопове са линераном фазном карактеристиком. Идеја на којој се они заснивају је апроксимација диференцирања у временском домену:

$$\frac{d[\varphi(t)]}{dt} \approx \frac{1}{\tau}[\varphi(t) - \varphi(t-\tau)].$$

За фреквенцијски модулисан сигнал имамо:

$$\frac{d[\varphi(t)]}{dt} = k_\omega u_m(t).$$

Узимајући у обзир претходне релације, добијамо:

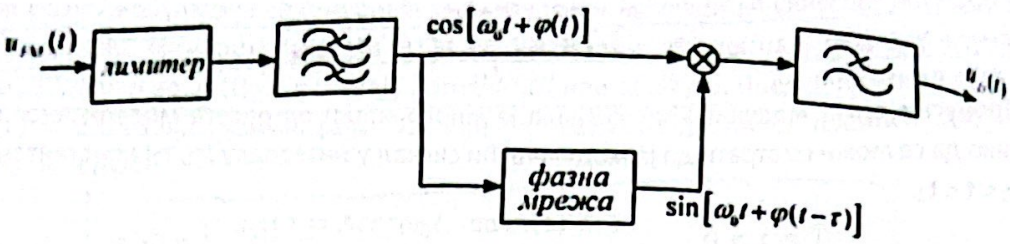
$$\varphi(t) - \varphi(t-\tau) \approx \tau\varphi'(t) = k_\omega \tau\, u_m(t).$$



Scanned with CamScanner

ОКИТИ

На слици је приказана шема квадратурног демодулатора.




Ако претпоставимо јединичну амплитуду FM сигнала, на излазу множења се добија:

$$\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \cdot \sin[\omega_0 t + \varphi(t-\tau)]$$

Трансформацијом производа у збир, на улазу нискофреквенцијског филтра је сигнал:

$$\frac{1}{2}\{sin[2\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi(t-\tau)] - sin[\varphi(t) - \varphi(t-\tau)]\}$$

Узимајући у обзир да је за $|\varphi(t) - \varphi(t-\tau)| \ll \pi$:

$$sin[\varphi(t) - \varphi(t-\tau)] \approx \varphi(t) - \varphi(t-\tau),$$

Имамо да је на излазу кола сигнал:

$$u_D(t) \approx k_D k_\omega \tau\, u_m(t).$$

Размотрићемо још демодулаторе FM сигнала са детекцијом проласка кроз нулу. Нека је дат FM сигнал:

$$u_{FM}(t) = U_0 cos[\theta(t)], \qquad \theta(t) = \omega_0 t + k_\omega \int_{-\infty}^{t} u_m(\tau) d\tau,$$

И нека $t_1$ и $t_2$, ($t_2 > t_1$) представљају тренутке 2 узастопна проласка кроз нулу, као на слици

Слика 6.16 – Временски дијаграм FM сигнала.

$$u_{FM}(t_2) = u_{FM}(t_1) = 0.$$

С обзиром на то да је разлика тренутних фаза 2 сусједна проласка кроз нулу π, имамо:



Scanned with CamScanner

ОКИТИ

$$\theta(t_2)-\theta(t_1)=\pi=\omega_0 t_2+k_\omega\int_{-\infty}^{t_2}u_m(\tau)d\tau-\left[\omega_0 t_1+k_\omega\int_{-\infty}^{t_1}u_m(\tau)d\tau\right]$$

$$\omega_0(t_2-t_1)+k_\omega\int_{t_1}^{t_2}u_m(\tau)d\tau=\pi$$

Пропусни опсег модулишућег сигнала је много мањи од опсега модулисаног сигнала, тако да се може сматрати да је модулишући сигнал у интервалу ($t_1$, $t_2$) константан за неко $t_1 < t < t_2$.

$$\omega_0\Delta t+k_\omega u_m(t)\Delta t=\pi$$

Одавде слиједи да је:

$$k_\omega u_m(t)=\frac{\pi}{\Delta t}-\omega_0.$$

## 34. Бинарна амплитудска модулација.

Бинарна амплитудска модулација представља најједноставнији поступак за транслацију спектра дигиталног сигнала из физичког (основног) у виши фреквенцијски опсег, код које је амплитуда носећег континуалног таласа сразмјерна модулишућем сигналу. Ову модулацију можемо математички представити на сљедећи начин:

$$\boxed{s(t)=m(t)c(t),}$$

гдје је *m(t)* модулишући дигитални сигнал, а *c(t)* синусоидални носилац. Дакле, практична реализација модулатора BASK сигнала је прилично једноставна и своди се на множење модулационог сигнала са сигналом таласа носиоца. За униполарни сигнал без повратка на нулу важи m(t)=1, у случају логичке "1", односно m(t)=0 у случају логичке "0". Овај тип модулације представља специјалан случај *ASK* сигнала и у литератури је познат и под називом *OOK (On-Off Keying)*. Трајање једног бита износи $T_b$ секунди, и називамо га битски интервал. Бинарни *ASK* сигнал можемо изразити на сљедећи начин:

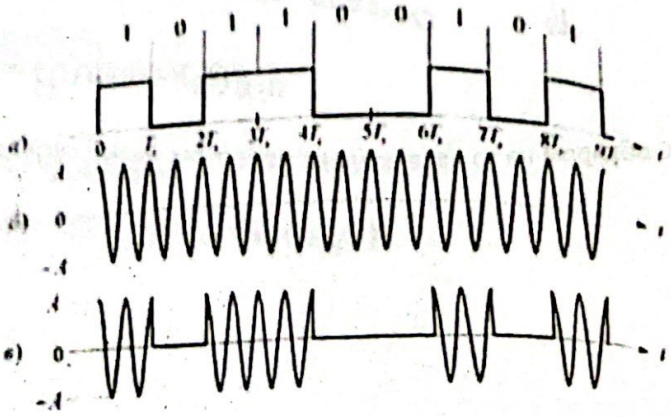
$$\boxed{s(t)=\begin{cases}s_1(t)=A\cos\omega_0 t, & za\ m(t)=1\\ s_2(t)=0, & za\ m(t)=0\end{cases}}$$

Дакле, уколико преносимо бинарну нулу не емитујемо носећи талас; а при преносу бинарне јединице емитујемо синусоидални талас $A\cos(\omega_0 t)$

а) модулишући сигнал

б) сигнал носиоца

в) модулисани сигнал




Scanned with CamScanner

## 35. Бинарна фазна модулација

Бинарна фазна модулација се генерише амплитудском моулацином синусног носиоца са биполарним NRZ сигналом ($m(t) = \pm 1$). За биполарни NRZ сигнал, m(t)=1 у случају логичке "1", односно, m(t)=-1 у случају логичке "0" или обрнуто. Предајни сигнал $s(t) = m(t)c(t) = \pm A cos\omega_0 t$, узима фазу "0" или "π" зависно да ли се преноси логичка јединица или нула.

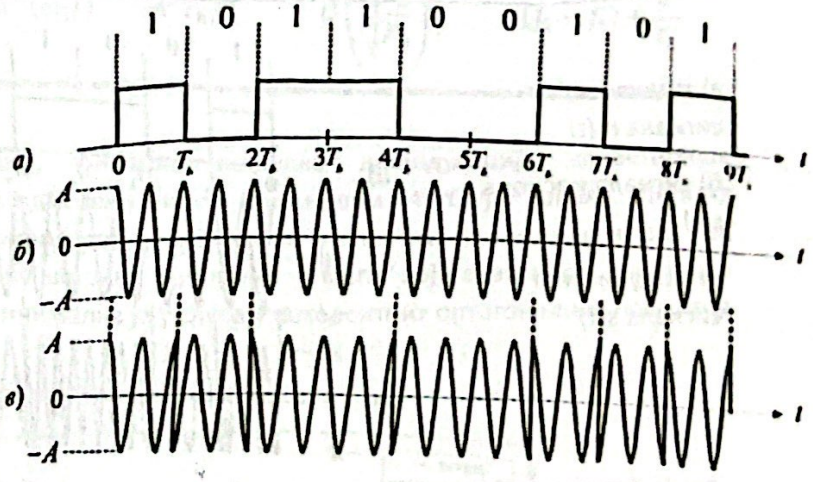
$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) = A cos\omega_0 t, & \text{за } m(t) = 1 \\ s_2(t) = -A cos\omega_0 t, & \text{за } m(t) = -1 \end{cases} \qquad 0 < t \leq T_b$$

Дакле, уколико преносимо бинарну нулу, емитујемо носећи талас, чија је почетна фаза π ($A cos(\omega_0 t + \pi) = -A cos(\omega_0 t)$), а при преносу бинарне јединице емитујемо синусоидални талас нулте почетне фазе ($A cos\omega_0 t$). На слици су приказани таласни облици:

а) модулишућег сигнала

б) сигнала носиоца

в) модулисаног сигнала




Фреквенција сигнала носиоца се бира тако да буде цјелобројан број периода у току трајања једног бита, односно $f_0 = n/T_b$, $n$ цјелобројан. Наравно, и овдје је задовољено да је $f_0 \gg 1/T_b$.

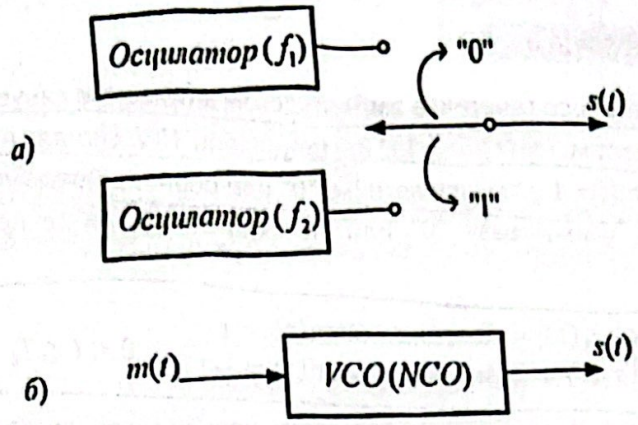
## 36. Бинарна фреквенцијска модулација

*BFSK* сигнал се може генерисати на 2 различита начина. Један начин је тастовање предајног сигнала између 2 различита осцилатора, као што је приказано на слици. У овом случају имамо скоковит прелаз са једне на другу фреквенцију, односно, скоковоту промјену фазе предајног сигнала. Овај тип *FSK* сигнала можемо изразити на сљедећи начин:

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) = A cos(\omega_1 t + \varphi), & \text{за бинарну "0"} \\ s_2(t) = A cos(\omega_2 t), & \text{за бинарну "1"} \end{cases} \qquad 0 < t \leq T_b$$



Scanned with CamScanner

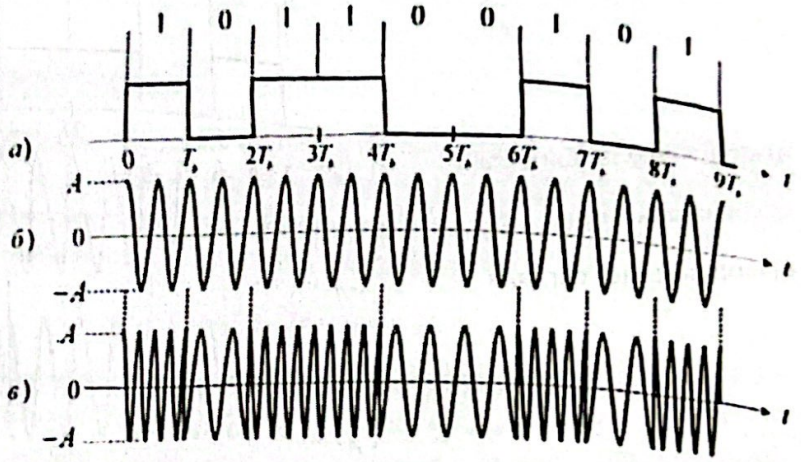



Дакле, када преносимо бинарну нулу емитујемо сигнал фреквенције $f_1$, а за бинарну јединицу емитујемо сигнал фреквенције $f_2$. Други, чешћи начин генерисања *FSK* сигнала је коришћење напонски контролисаног осцилатора (VCO) или нумерички контролисаног осцилатора (NCO). На слици су приказани таласни облици:

а) модулишућег сигнала *m(t)*

б) сигнала носиоца *c(t)*

в) модулисаног сигнала *s(t)*




Двије фреквенције сигнала носилаца бирамо тако да буду цјелобројни умношци $1/T_b$, а фреквенције $f_1$ и $f_2$ треба да буду ортогоналне.

## 37. Поређење основних бинарних модулационих поступака.

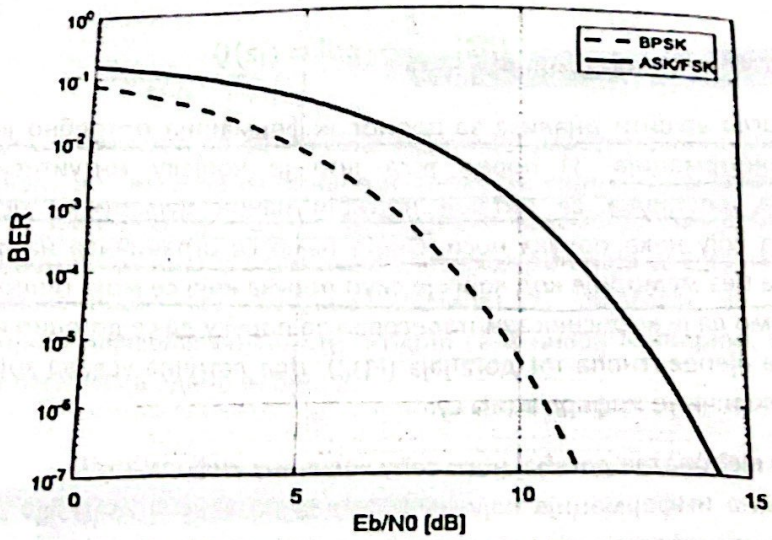
Да бисмо могли извршити поређење различитих модулационих поступака, неопходно је вјероватноћу грешке изразити преко средње енергије по биту, $E_b$. Упоредни приказ основних величина за бинарне модулационе поступке је приказан у табели. Из табеле се види да је по питању вјероватноће грешке *BPSK* за 3dB ефикаснија од *BFSK* и *BASK*. То значи да је за исту вриједност *BER*-а код *BPSK* модулационог поступка потребна два пута мања средња енергија по биту у односу на *BFSK* и *BASK*. Треба нагласити да је недостатак *BPSK* пријемника повећана сложеност у односу на *BFSK* и *BASK*, код којих постоји могућност некохерентне демодулације. Код *BFSK* и *BASK* кохерентни системи дају боље перформансе, али су комплекснији од некохерентних поступака. Сложенија реализација кохерентних система је посљедица генерисања синфазног локалног носиоца на



Scanned with CamScanner

| | $s_0(t)$ $(0 < t \leq T)$ | $s_1(t)$ $(0 < t \leq T)$ | $E_b$ | BER ($P_e$) | Ширина пропусног опсега |
|---|---|---|---|---|---|
| ASK | 0 | $A\cos(\omega_c t)$ | $A^2T_b/4$ | $Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$ | $\frac{2}{T_b}$ |
| PSK | $A\cos(\omega_c t)$ | $-A\cos(\omega_c t)$ | $A^2T_b/2$ | $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ | $\frac{2}{T_b}$ |
| FSK | $A\cos(\omega_1 t)$ | $A\cos(\omega_2 t)$ | $A^2T_b/2$ | $Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$ | $(f_2 - f_1) + \frac{2}{T_b}$ |

пријемној страни. Генерално, бинарне поступке демодулације карактерише једноставност и отпорност на адитивни бијели Гаусов шум (*AWGN*) у каналу. Ширина пропусног опсега је узета по критеријуму прве нуле у спектру. Као што се види, *FSK* модулација има већу потребну ширину пропусног опсега, која зависи од растојања између фреквенција $f_2$ и $f_1$ и минимална је у случају кохерентних ортогоналних носилаца када је $f_2 - f_1 = \frac{1}{2T_b}$.






Scanned with CamScanner

## 38. Појам информације.

И поред тога што се неријетко поистовјећују, битно је правити разлику између помова податка и информације. Нпр. број 9 је само податак и као такав нема посебно значење. Међутим, исказ "Сада је 9 часова." представља информацију јер је податку додијељено неко значење. Значи, информација се састоји од податка и значења које му је додијељено. То можемо видјети и из информационе хијерархије са слике:

Двије дефиниције у вези са појмом информације које су широко прихваћене су:

1. Информација је сазнање пренијето кроз простор/вријеме.
2. Сигнал је физички носилац информације.

Алтернативне дефиниције информације су:

- Информација представља поруку коју је прималац прихватио и разумио.
- Информација представља статистички податак – чињеницу на основу које је могуће донијети закључак.
- Информација представља знање прикупљено студирањем, искуством или подучавањем.
- Информација представља могућност закључивања узрока посматрањем посљедице (ватра -> дим).

## 39. Мјера количине информација.

Да би се могла вршити анализа за пренос информација потребно је увести мјеру за количину информација. И поред тога што је човјеку интуитивно познат појам информација, поставља се питање на који начин нумерички исказати количину информација коју нека порука носи. Овдје ћемо се ограничити на дискретне изворе информација без меморије код којих је скуп порука које се могу генерисати пребројив. Претпоставимо да је корисник заинтересован за поруку да се догодио неки догађај ($s_i$) и да је позната вјероватноћа тог догађаја ($P(s_i)$). Два логична услова која намеће бројно исказивање количине информација су:

1. Мање вјероватан догађај носи већу количину информација.
2. Количина информација коју пружају два независна догађаја једнака је збиру количина информација коју пружају догађаји појединачно.

С обзиром на то да се вјероватноћа здруженог догађаја за независне догађаје добија као производ појединачних вјероватноћа, а имајући у виду да логаритамска функција



Scanned with CamScanner

пресликава производ у збир, за задовољење оба постављена услова је дефинисана количина информација дата изразом:

$$Q(s_i) = log\frac{1}{P(s_i)} = -log[P(s_i)]$$

Адитивност количина информација независних порука се може показати сљедећим изразом:

$$Q(s_i, s_j) = log\frac{1}{P(s_i, s_j)} = log\frac{1}{P(s_i)P(s_j)}$$

$$= log\frac{1}{P(s_i)} + log\frac{1}{P(s_j)} = Q(s_i) + Q(s_j).$$

База логаритма се може произвољно узети и утиче само на јединицу мјере. Хартли је предложио декадски логаритам, тако да се може писати:

$$Q(s_i) = log_{10}\frac{1}{P(s_i)}[hartley].$$

Ако се узима база природног логаритма добија се скраћеница *nat.*

$$Q(s_i) = ln\frac{1}{P(s_i)}[nat].$$

Коначно, ако се узме логаритам по бази 2 добијамо:

$$Q(s_i) = log_2\frac{1}{P(s_i)}[Sh].$$

Умјесто јединице *шенон* користи се и назив јединице *информациони бит*. Ако извор информација генерише симболе из бинарног алфабета који су подједнако вјероватни ($P(s_1) = P(s_2) = 0.5$), имамо $Q(s_1) = Q(s_2) = 1[Sh]$. Значи кажемо да смо добили количину информација од једног шенона ако само сазнали исход догађаја са 2 једнако вјероватна исхода (нпр. глава-писмо код бацања новчића). С обзиром на то да се у телекомуникацијама најчешће појављују сигнали са 2 нивоа (бинарни), разумљиво је зашто је за базу логаритма одабран број 2.

## 40. Ентропија дискретног извора без меморије.

Дат је дискретан извор без меморије S са листом симбола $\{S_1, S_2,...,S_q\}$ и одговарајућим скупом вјероватноћа $P(s_i)$, $i=1,2,...,q$. Претпоставља се да емитовање симбола представља потпун систем хипотеза, тј. $\sum_{i=1}^{q} P(s_i) = 1$. Средња количина информација (односно математичко очекивање) коју емитује извор по једном симболу износи:



Scanned with CamScanner

$$H(S) = E[Q(s_i)] = \overline{Q(s_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} P(s_i) log_2 \frac{1}{P(s_i)} = -\sum_{i=1}^{q} P(s_i) log_2 P(s_i) \left[\frac{Sh}{simb}\right]$$

По аналогији са ентропијом идеалног гаса у термодинамици, гдје ентропија представља мјеру неуређености система, Шенон је за просјечну количину информација такође увео појам ентропија. При том, у теорији информација ентропија представља мјеру неизвјесности (неопредијељености) примаоца шта ће извор емитовати.

## 41. Разлози увођења кодовања.

Три су основна разлога зашто вршимо кодовање:

1. Кодовање ради компресије података – циљ овог начина кодовања је избацивање сувишности (редундансе) јер готово сваки извор информација има одређени "вишак" информација. Овај вид кодовања се назива статистичко (ентропијско) кодовање. Неки од примјера овог начина кодовања су *Шенон-Фаноов* поступак, *Хафменов* поступак, *Лампел-Зипов* поступак, аритметичко кодовање итд.
2. Кодовање у циљу квалитетнијег преноса усљед дјеловања шума или сметњи у каналу – задатак овог начина кодовања је додавање сувишних (редундантних) бита у улазну информацију како би се на пријему могла извршити контрола квалитета преноса, односно откривање (детекција) и евентуално исправљање (корекција) грешака насталих током преноса. Ово кодовање се назива заштитно (каналско) кодовање. Неки од примјера су код са провјером на парност, код са понављањем поруке, *Хемингов* код, *Рид-Соломонов* код итд.
3. Кодовање ради тајности – циљ овог начина кодовања је да информације буду доступне само ауторизованим корисницима. Овај начин кодовања се назива и шифровање, а један од најстаријих видова је тзв. *Цезарово* шифровање (слово А у шифрованом тексту се мијења словом D, B се мијења словом E итд).

## 42. Сардинас-Патерсонов критеријум

Потребан и довољан услов да би код био једнозначно декодив дали су Сардинас и Патерсон. Поступак утврђивања се своди на креирање таблице следећим поступком:

- Прву и другу колону таблице формирају изворна кодна листа и одговарајуће кодне ријечи, респективно. Листа кодних ријечи у другој колони се назива "нулта сегментна класа" (***seg 0***).
- У сљедећој колони се формира прва сегментна класа (***seg 1***) која садржи суфиксе кодних ријечи које за префикс имају кодну ријеч мање дужине. Значи, испитујемо у ***seg 0*** да ли је нека кодна ријеч префикс неке друге кодне ријечи.



Scanned with CamScanner

- Затим се формира друга сегментна класа, па трећа, итд. Као опште правило се узима *i*-та сегментна класа (***seg i***) садржи суфиксе кодних ријечи из ***seg 0*** којима је префикс кодна ријеч из ***seg i-1***, а такође од суфикса из кодних ријечи из ***seg i-1*** којима је префикс нека ријеч из ***seg 0***.

Потребан и довољан услов једнозначне декодибилности је да се у вишим сегментним класама не појављују ријечи из нулте сегментне класе. Кашњење при декодовању ($l_d$) је дато изразом:

$$\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil l_{min} < l_d \leq \left\lceil \frac{d+1}{2} \right\rceil l_{max}$$

При том је $d$ редни број прве празне сегментне класе, а $l_{min}$ и $l_{max}$ минимална и максимакна дужина кодне ријечи из ***seg 0***. Угласте заграде $\lceil x \rceil$ означавају најмањи цијели број који није мањи од $x$.

## 43. Крафтова неједнакост.

Крафтова неједнакост даје потребан и довољан услов да би тренутни (префиксни) код са кодним ријечима дате дужине постојао. Нека је дат извор информација $S$ са листом симбола $\{S_1, S_2, \ldots, S_q\}$ и нека је кодна листа димензије r. У случају бинарног кодовања кодна листа {0, 1} је димензије 2. Нека је дужина кодне ријечи $X_i$ која одговара симболу $s_i$ једнака $l_i$. Потребан и довољан услов за постојање тренутног кода са кодним ријечима дужине $l_1, l_2, \ldots, l_q$ је да буде задовољена следећа (Крафтова) неједнакост:

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leq 1$$

Битно је нагласити да Крафтова неједнакост даје одговор на питање да ли постоји тренутан код са задатим дужинама кодних ријечи, али не и како конструисати код.

Нпр. код {1, 00, 10} није тренутан иако задовољава Крафтову неједнакост.

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} = 1$$

Крафтова неједнакост каже да постоји тренутан бинарни код са дужинама кодних ријечи 1, 2 и 2 (и заиста то је код).

## 44. Прва Шенонова теорема.

Шенон је у свом раду из 1948. године дао одговор на суштинско питање из статистичког кодовања, односно колико износи фундаментално ограничење у погледу компресије података. Теорема се још среће под називом "Теорема о кодовању без шумова".

Шенонова теорема о кодовању без шумова – Дио I



Scanned with CamScanner

Нека је дат дискретни извор информације без меморије S са ентропијом *H(S)*. За било који бинарни префиксни код датог извора средња дужина кодних ријечи је већа или једнака од ентропије извора, односно:

$$\bar{L} \geq H(S)$$

Теорема даје једну границу средње дужине кодних ријечи. Поставља се питање да ли има још ограничења. Јасно је да овај израз постаје високо вредновan ако покажемо да је та граница уједно и најбоља могућа. Шенон је у поменутом раду конструисао код који, иако није у општем случају компактан, довољно се добро приближава доњој граници. Идеја се своди на избор дужине кодне ријечи $l_i$ тако да вриједи $l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil$. При том $\lceil x \rceil$ означава најмањи цијели број који није мањи од $x$, односно, вриједи $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$. Прво се поставља питање да ли код са предложеним дужинама постоји. Одговор је потврдан што слиједи из Крафтове неједнакости. По дефиницији функције $\lceil x \rceil$ слиједи да је:

$$l_i \geq log_2 \frac{1}{p_i}$$

$$\sum_i 2^{-l_i} \leq \sum_i 2^{\log_2 p_i} = \sum_i p_i = 1$$

Сада одредимо колико је овај код добар у погледу средње дужине кодних ријечи. По дефиницији функције $\lceil x \rceil$ слиједи да је:

$$l_i < log_2 \frac{1}{p_i} + 1$$

Ако обе стране једнакости помножимо са $p_i$ и сумирамо по $i$ добијамо:

$$\sum_i p_i l_i < \sum_i p_i \, log_2 \frac{1}{p_i} + \sum_i p_i$$

$$\bar{L} < H(S) + 1$$

Из посљедње релације се види да је средња дужина кодних ријечи *Шенон-Фаноовог* кода удаљена највише за 1 од ентропије извора. То значи да је овај код прилично добар, поготово за веће вриједности ентропије. Међутим, за мање вриједности ентропије може се пронаћи бољи код (са мањом средњом дужином кодних ријечи). Проведена анализа нам омогућава да формулишемо други дио теореме.

Шенонова теорема о кодовању без шумова – Дио II

За било који дискретни извор информација без меморије S са ентропијом *H(S)* постоји бинарни префиксни код са средњом дужином кодних ријечи $\bar{L} < H(S) + 1$. Да би се могло квантитативно одредити колико се средња дужина кодних ријечи конструисаног кода приближава ентропији извора, дефинишемо ефикасност кода помоћу релације:



Scanned with CamScanner

$$\eta = \frac{H(S)}{\bar{L}} \cdot 100\,[\%]$$ efikasnost koda

Редунданса (сувишност) кода је такође мјера квалитета статистичког кодовања. То је у ствари комплемент ефикасности до јединице.

$$R = \frac{\bar{L} - H(S)}{\bar{L}} \cdot 100 = 100 - \eta\,[\%]$$

Прва Шенонова теорема даје увид у ограничења статистичког кодовања у погледу перформанси али не даје поступак како за дати извор информација конструисати компактан код.

## 45. Хафменов поступак

За разлику од *Шенон-Фаноове* методе, *Хафменов* поступак у потпуности води до компактног кода. Може се једноставно програмски реализовати и не захтијева испитивање више варијанти. Има велику примјену у компресији слике и видеа. Опет ћемо се ограничити на случај бинарног кодовања без губитка општости. Поступак се темељи на двије основне теореме:

1. У оптималном коду, симболи са већим вјероватноћама имају кодне ријечи мање дужине од оних са мањим вјероватноћама.
2. У оптималном коду, два симбола са намјањим вјероватноћама имају кодне ријечи исте дужине.

Новина коју је Хафмен увео је конструкција бинарног стабла од листова према коријену, за разлику од Фаноовоф поступка.

Нека је дат извор $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_q\}$ код којег су вјероватноће појављивања $P_i (i=1, 2, \ldots, q)$. Алгоритам се може описати сљедећим корацима:

1. Симболи се поређају по нерастућим вриједностима. Ако симболи имају исте вјероватноће, њихов распоред при уређивању није важан.
2. Два најмање вјероватна симбола се замијењују једним еквивалентним симболом, чија је вјероватноћа једнака збиру вјероватноћа симбола које он замјењује. На тај начин је извор $S$ са $q$ симбола сведен на извор $S_1$ са $q$-1 симболом. Симболи се поново поредају по нерастућим вјероватноћама, јер новоформирани симбол не мора имати најмању вјероватноћу.
3. Врши се редукција извора $S_1$ на исти начин (групишу се 2 најмање вјероватна симбола) и формира се извор $S_2$ са $q$-2 симбола. Процес се понавља док се не добију само 2 симбола.

Кодовање се врши тако што се почиње од редукованог извора са 2 симбола и једном се додијели бит 0, а другом 1. Затим се иде корак уназад и врши растављање еквивалентног



Scanned with CamScanner

симбола. При сваком растављању се на одговарајуће мјесто додаје 0 или 1, док се не дође на првобитни извор *S*.

## 46. Лемпел-Зивово кодовање.

И поред тога што *Хафменов* поступак води до конструисања компактног кода, постоји неколико озбиљних недостатака при практичној реализацији.

- Извор информација се третира као извор без меморије.
- Потребно је познавање вјероватноће симбола.
- Поступак је осјетљив на губитак синхронизације (кодне ријечи су у општем случају промјенљиве дужине).
- Поступак је осјетљив на грешке при преносу (каналске грешке).

Наведени проблеми су довели до идеје универзалног кода. То је код који врши компресију секвенци података без априорног познавања статистичких особина. *Лемпел-Зивов (LZ)* поступак кодовања је врста универзалног кодовања код којег не постоји експлицитни модел. Поред тога што је једноставнији за програмску реализацију од *Хафменовог* алгоритма, кодне ријечи су фиксне дужине што је погодно у случају синхроног преноса.

Основне идеје LZ кодовања ће бити објашњене на примјеру бинарног извора, иако исти принципи вриједе и за димензију алфабета већу од 2. Основна идеја се заснива на томе да се "улазна секвенца дијели (рашчлањује) на најкраће сегменте који се још нису појавили у претходно примљеном дијелу секвенце". Кодер и декодер имају меморисане сегменте који су се претходно појавили, тако да се при појави новог сегмента шаље само адреса претходно меморисаног сегмента и нови бит (или симбол), или његова адреса која је на почетку дефинисана. Такође, новопристигли сегмент, за један бит дужи, добија своју адресу.

## 47. Модел дискретног канала без меморије.

Пренос информација може да буде из једне тачке у другу (нпр. од једног до другог мобилног телефона у мобилној телекомуникационој мрежи) или кроз вријеме када се информација меморише у једном, а ишчитава у другом, будућем, тренутку. У оба случаја се сусрећемо са појмом поузданог преноса информација. Шум у каналу може дјеловати на један од следећих начина:

1. У условима изузетно великог шума није могуће обавити поуздан пренос информација (добро је познат ефекат "пролома облака" у сателитској телевизији.)
2. Ниво шума је такав да се информације могу преносити тако да реконструисани сигнал на пријему буде прихватљивог квалитета.
3. Шум у каналу утиче на тај начин да реконструисани сигнал у пријемнику није прихватљивог квалитета, али се примјеном заштитног кодовања вјероватноћа грешке може учинити по вољи малом. Основна идеја заштитног кодовања је



Scanned with CamScanner

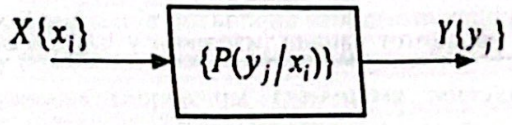
додавање редундансе, односно сувишних бита, тако да и поред грешака у каналу постоји довољно информација да се реконструише послата порука са задатим нивоом грешке.

Неки примјери комуникационог сигнала су:

- модем -> телефонска линија -> модем,
- сателит -> етер (RF таласи) -> Земља,
- ћелија родитеља -> ћелија дјетета,
- меморија рачунара -> диск рачунара -> меморија рачунара итд.

Дискретни канал без меморије се може описати са:

i. листом улазних симбола $X=\{x_i\}$, $i=1, 2, \ldots, r$
ii. листом излазних симбола $Y = \{y_j\}$, $j=1, 2, \ldots, s$
iii. скупом условних вјероватноћа $\{P(y_j|x_i)\}$ $i=1, 2, \ldots, r$ и $j=1, 2, \ldots, s$.




У општем случају број излазних симбола не мора да буде једнак броју улазних симбола. Претпоставља се да је канал стациониран, односно да му се карактеристике не мијењају у току времена. Нека је $p_{ij} \triangleq P(y_j|x_i)$. Скуп условних вјероватноћа се може приказати у форми каналске матрице:

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} p_{12} & & p_{1s} \\ p_{21} p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots \quad \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{r1} p_{r2} & & p_{rs} \end{bmatrix}$$

При том, индекс $i$ показује редни број врсте, а $j$ редни број колоне. Очигледно је да матрица $P$ треба да буде стохастичка, односно да сума елемената сваке врсте буде једнака јединици.

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1, \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,r\}$$

С обзиром на то да се у дигиталним телекомуникацијама преносе симболи из бинарног алфабета, дискретни канал са најмањим бројем симбола на улазу и излазу је бинарни канал. Матрица бинарног канала је:

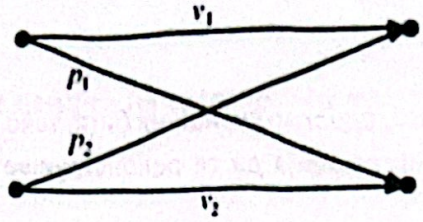
$$P_{BC} = \begin{bmatrix} v_1 & p_1 \\ p_2 & v_2 \end{bmatrix}.$$

Као што је речено, $v_1 + p_1 = v_2 + p_2 = 1$. Граф који одговара бинарном каналу је приказан на слици:



Scanned with CamScanner

ОКИТИ




Посебан случај бинарног канала је канал код којег је вјероватноћа преласка из 0 у 1 једнака вјероватноћи преласка из 1 у 0 ($p_1 = p_2 = p$). Такав канал је окарактерисан са само једним параметром $p$ (јер је $v_1 = v_2 = 1-p$) и назива се бинарни симетрични канал. Код таквог канала вјероватноћа грешке $P_\varepsilon$ не зависи од вјероватноће појављивања улазних симбола.

$$P_\varepsilon = P(0)\cdot P(1|0) + P(1)\cdot P(0|1) = p\cdot\big(P(0)+P(1)\big) = p$$

## 48. Капацитет канала.

Шенон је показао да капацитет канала (изражен у b/s) са бијелим Гаусовим шумом зависи од:

- средње снаге сигнала $P_{sr}[W]$,
- спектралне густине снаге шума $N_0[W/Hz]$, и
- ширине пропусног опсега $B[Hz]$.

Израз за капацитет канала је дат изразом:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P_{sr}}{BN_0}\right)$$

Уводећи смјену $P_{sr} = R_b E_b$, гдје је бинарни проток канала $R_b[bit/s]$, а $E_b$ енергија по биту $[Ws/b]$, релацију можемо изразити као:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{B}\right)$$

Даље, постоји минимална вриједност односа $E_b/N_0$, при којој је могућ пренос са произвољно малом вјероватноћом грешке за канал са неограниченим пропусним опсегом ($B \to \infty$), што се добија примјеном Лопиталовог правила:

$$\frac{C}{R_b} = \frac{E_b}{N_0}\frac{1}{ln2} > 1.$$

Из услова да је капацитет канала већи од бинарног протока,

$$C = \lim_{B\to\infty} B\log_2\left(1+\frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{B}\right) = \frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{ln2}.$$

слиједи:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{log_2 e} = ln2 = 0.693\ (-1.6\ \text{dB}).$$ Šenonova granica

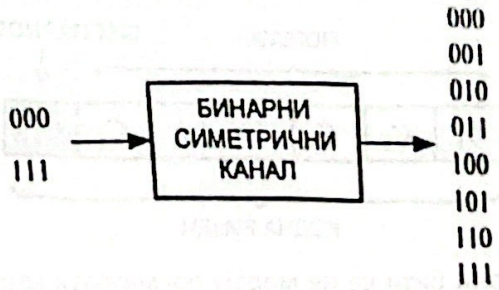


Scanned with CamScanner

Вриједност добијена у претходном изразу се назива Шенонова граница и представља теоријску минималну вриједност односа сигнал-шум по биту $(E_b/N_0)$ при којој се може обављати пренос са произвољно малом вјероватноћом грешке. Смањивање вјеровантоће грешке се може остварити избором модулационог поступка и избором заштитног кодовања. Најчешће се при пројектовању анализира допринос здруживања оба поступка. II Шеноновом теоремом доказано је да је могућ пренос информација са произвољно малом вјероватноћом грешке све док је битска брзина мања од капацитета сигнала $R_b \leq C$. За битске брзине $R_b > C$ ниједан модулациони поступак не обезбјеђује произвољно малу вјероватноћу грешке. Другим ријечима, могућ је поуздан пренос кроз непоуздан канал, све док је битска брзина мања од капацитета канала. Шенонов рад је показао да вриједности $P_{sr}$, $N_0$ и $B$ ограничавају брзину преноса, а не вјероватноће грешке. Друга Шенонова теорема даје одговр на питање колико износи фундаментално ограничење брзине преноса у телекомуникационом каналу. Обе Шенонове теореме разматрају ограничења брзине преноса, али не дају одговор како и на који начин те крајње домете постићи. Због тога је послије Шенонових радова из 1948. развијена посебна грана Теорије информација посвећена каналском кодовању. За нешто више од пола вијека научници су развили сложене алгоритме заштитног кодовања који су се по перформансама приближили теоријским границама постављеним у Шеноновим радовима. Неки од тих заштитнох кодова су *LDPC, Турбо* и *Рид-Соломонови* кодови.

## 49. Код са понављањем.

Најелементарнији начин заштитног кодовања који се своди на вишеструко понављање једног симбочла. На примјер, нека се један бит понавља 3 пута. Тада је за двије послате поруке **111** и **000**, због грешака у каналу, могуће на пријемној страни добити 8 различитих порука, као што је приказано на слици:




Логично се намеће доношење одлуке на бази већинске логике. На овај начин смо извршили детектовање и корекцију једноструких грешки, те смањили укупну вјероватноћу грешке. Такође, јасно је да ћемо за двоструке и троструке грешке у датим низовима 111 и 000 имати погрешно декодовану поруку. Међутим, вјероватноћа грешке на пријему је мања него код преноса без понављања. Претпоставимо да је канал без меморије, па су грешке статистички независне. На примјер, нека је вјероватноћа грешке по симболу (биту) $p=10^{-2}$, и одлуку доносимо већинском логиком "два од три"'. Односно, када се приме комбинације с мањим бројем јединица може се сматрати да је емитована кодна ријеч 000 (порука 0), а када се прими порука са већим бројем јединица, одлучује



Scanned with CamScanner

се да је емитована кодна ријеч 111 (порука 1). Овај поступак декодовања је директна примјена правила метода максималне вјеродостојности. Грешке ће бити погрешно интерпретиране, тј. неће бити откривене, уколико се при преносу посматране кодне ријечи сва три бита погрешно пренесу или да буду погрешна било која два бита у кодној ријечи од три бита, што даје уједно и вјероватноћу неоткривене грешке:

$$P_e = \binom{3}{3} p^3 + \binom{3}{2} p^2 (1-p) \approx 3p^2 = 3 \cdot 10^{-4}$$

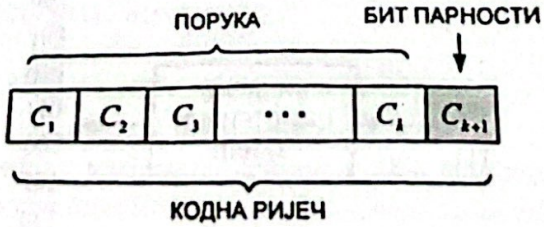
У општем случају, за понављање поруке непаран број пута $n = 2n_0 + 1$, при чему $n_0 \in N$, вјероватноћа неоткривене грешке износи:

$$P_e = \sum_{k=n_0+1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

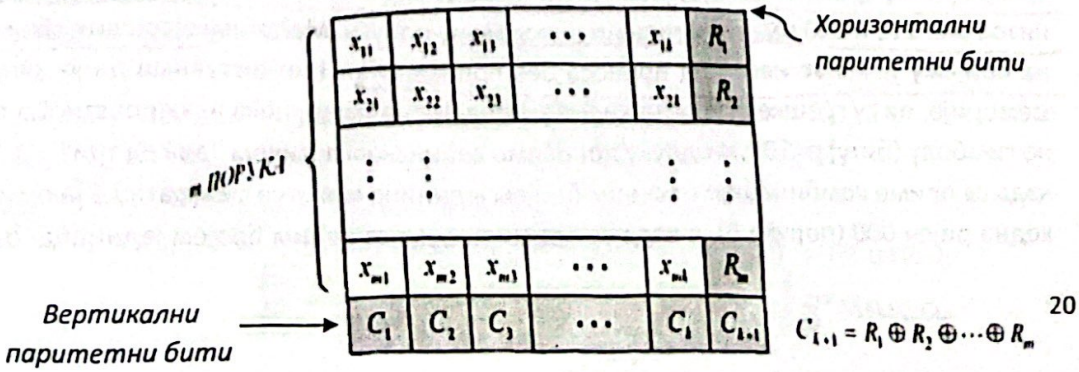
Нажалост, поред смањења вјероватноће грешке долази до смањења брзине преноса информација, јер се сада за пренос количине информација, за код са понављањем од 1 шенона, умјесто једног користе три бита. Односно, при непромјењивом протоку информација мора се повећати битска брзина у каналу. Ово може да утиче на пропусни опсег и повећање снаге шума на улазу у пријемник.

## 50. Код са провјером на парност.

Код ових врста кодова се једноставно на $k$ информационих бита дода само један контролни бит ($n=k+1$) провјере на парност, тако да укупан број јединица у кодној ријечи дужине $n$ буде паран. Овим кодом се може открити непаран број грешака настао током преноса кодне ријечи. Међутим, паран број грешака у истом блоку је немогуће открити на овај начин, јер је и након тога укупан број јединица у блоку паран. У овом случају кодни количник је $R = \frac{n-1}{n}$.




Међутим, информациони бити се не морају посматрати као једнодимензионални низ. Информациони бити се могу сортирати у матричну форму (дводимензионално), па се у овом случају провјера на парност може обавити по врстама и колонама, како је приказано на слици:






Scanned with CamScanner

Ако се у структури дводимензионалног кода са слике деси само једна грешка на блоку информационих бита, тада ће одговарајуће провјере на парност по врсти и колони тачно одредити позицију погрешног бита, па се грешка може исправити. У случају да се догоди више грешака, једнозначно одређивање њихове позиције је могуће само у случају да не припадају истим врстама и истим колонама. Надаље, примјењујући исту логику можемо говорити о кубним, то јест о кодовима са провјерама у три па и више димензија. Овакви кодови ће имати све већи кодни количник. Недостатак ових кодова представља временско кашњење, јер се на предаји мора сачекати формирање цијелог вишедимензионалног блока, а на пријему да се прикупи цијели блок да би се могао започети процес декодовања. Ако се користе кодови који служе само за откривање грешака, тада пријемник повратним каналом шаље захтјев предајнику за поновним емитовањем порешно примљене кодне ријечи. Наравно, недостатак овог приступа је потреба за повратним каналом и повећање укупног кашњења при декодовању.

## 51. Хемингов код.

У неким ситуацијама нема могућности за понављање погрешно пренесених дијелова поруке. Да би се могле исправљати грешке у примљеној поруци, идеја је да се умјесто једног уведе више контролних бита – контрола парности за неке подскупове бита у поруци. Наравно, претпоставља се да су све контроле парности линеарно независне. Хеминг је приказао фамилију кодова за откривање двоструких и исправљање једноструких грешака. Синдром, добијен као резултат провјера на парност извршених на пријему, у бинарној нотацији показује на позицију погрешног бита. Хеминг најприје одређује број различитих вриједности синдрома и закључује да број провјера *n-k* треба да задовољава израз:

$$\boxed{2^{n-k} \geq n+1,}$$

јер постоји *n* позиција у кодној ријечи гдје би се могла десити грешка, као и случај када до грешке није ни дошло. Контролни бити не подлијежу провјери на парност и у принципу могли би се додати на крај кодне ријечи. Један информациони бит се може наћи у више провјера на парност. Пошто је Хеминг пошао од идеје да бинарно прочитана вриједност синдрома треба да покаже позицију погрешног бита, то позиције контролних бита у кодној ријечи треба да буду $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-k-1}$. Другим ријечима, свака група бита почиње са бројем степена 2, на примјер 1, 2, 4, 8, итд. Ови бројеви су такође позиције паритетних бита. Хемингов код се може користити за кодну ријеч произвољне дужине. Сваки бит провјере успоставља непарну парност са групом бита податка. Одређену провјеру на парност треба узети по свим оним позицијама чији запис у бинарном систему садржи "1" на том мјесту. На примјер, прва провјера би обухватила све непарне позиције чији је најнижи бит једнак јединици. Дакле, једну провјеру на парност треба узети по свим позицијама које на посљедњем мјесту у свом бинарном запису имају јединицу. Пошто ће на позицији један ($2^0$=1) стајати први контролни бит, провјера на парност која одређује тај контролни бит ће бити на позицијама 3, 5, 7, итд. Сљедећу провјеру треба узети по свим позицијама које имају једницу на претпосљедњем мјесту у



Scanned with CamScanner

бинарном запису (3, 6, 7, 10, 11, ....), а одговарајући контролни бит се уписује на позицију $2^1$=2. Користећи табелу са записом бројева од 0 до 15 у бинарној форми, лако се долази до позиција провјере на парност за одговарајући контролни бит (у овом случају 4 контролна бита). Тако, контролни бит на позицији $2^2$=4 ће обухватити бите на позицијама (5, 6, 7, 12, 13, 14 и 15).

| Позиција | Бинарни запис | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Scanned with CamScanner