(11) $$G = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} \; : \; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

1° zatvorenost

$(\forall a, b \in G) \quad a \cdot b \in G$

Neka je $a = \frac{1+2m_1}{1+2n_1}$ i $b = \frac{1+2m_2}{1+2n_2}$; $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$

Sada je

$$a \cdot b = \frac{(1+2m_1)\cdot(1+2m_2)}{(1+2n_1)\cdot(1+2n_2)} = \frac{1+2m_1+2m_2+4m_1m_2}{1+2n_1+2n_2+4n_1n_2}$$

$$= \frac{1+2(m_1+m_2+2m_1m_2)}{1+2(n_1+n_2+2n_1n_2)} \in G \quad \checkmark$$

2° komutativnost

$(\forall a, b \in G) \quad a \cdot b = b \cdot a$

Kako je $G \subset \mathbb{Q}$ i kako je množenje komutativna operacija, komutativnost vrijedi i na skupu G. ✓

3° asocijativnost

$(\forall a, b, c \in G) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Asocijativnost vrijedi u skupu $\mathbb{Q}$, pa je množenje asocijativna operacija i u $G \subset \mathbb{Q}$. ✓

4° neutralni element

$(\forall a \in G)(\exists e \in G) \quad a \cdot e = e \cdot a = a$

Kako komutativnost vrijedi, dovoljno je pronaći $e \in G$ tako da je

$$a \cdot e = a \quad \Rightarrow \quad e = 1$$

Kako je $1 = \frac{1+2\cdot 0}{1+2\cdot 0} \in G$, neutralni element je $e=1$

5° inverzni element

$$(\forall a \in G)(\exists b \in G) \qquad a \cdot b = b \cdot a = e$$

Neka je $a = \frac{1+2m}{1+2n}$, $m,n \in \mathbb{Z}$.

Imamo da je: $a \cdot b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1+2m}{1+2n}}$

pa je $b = \frac{1+2n}{1+2m} \in G$ inverzni element.

Dakle, $(G, \cdot)$ je Abelova grupa.

(12) $S = \{ f : f(x) = x + a;\ x, a \in \mathbb{R} \}$

1° zatvorenost

$(\forall f, g \in S) \quad f \circ g \in S$

Neka je f preslikavanje definisano sa $f(x) = x + a$ i neka je g preslikavanje definisano sa $g(x) = x + b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Sada je $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+b) = x + b + a$

Kako je $b + a \in \mathbb{R}$, $f \circ g \in S$, pa zatvorenost vrijedi. ✓

2° komutativnost

$(\forall f, g \in S) \quad f \circ g = g \circ f$

Neka je $f(x) = x + a$ i $g(x) = x + b$.

Sada je: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+b) = x + b + a$

i $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+a) = x + a + b$

Kako je $x + b + a = x + a + b$, komutativnost vrijedi. ✓

3° asocijativnost

$(\forall f, g, h \in S) \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Neka je $f(x) = x + a$, $g(x) = x + b$ i $h(x) = x + c$.

Imamo da je

$$((f\circ g)\circ h)(x) = (f\circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$
$$= f(g(x+c)) = f(x+c+b) = x+c+b+a$$

$$(f\circ(g\circ h))(x) = f\circ(g(h(x))) = f(g(h(x)))$$
$$= f(g(x+c)) = f(x+c+b) = x+c+b+a$$

pa asocijativnost vrijedi. ✓

4° neutralni element

$(\forall f\in S)(\exists e\in S)\quad f\circ e = e\circ f = f$

Neka je $f(x) = x+a$ i $e(x) = x+b$.

Kako komutativnost vrijedi, treba da pronađemo $e(x)$ tako da je: $f(e(x)) = f(x)$

$$\Leftrightarrow f(x+b) = x+a$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x}+b+\cancel{a} = \cancel{x}+\cancel{a} \Rightarrow b=0$$

Sada je $e(x)=x$ neutralni element.

5° inverzni element

$(\forall f\in S)(\exists i\in S)\quad f\circ i = i\circ f = e$

Neka je $f(x) = x+a$ i $i(x) = x+b$.

Zbog komutativnosti, treba da pronađemo $i(x)$ tako da je: $f(i(x)) = e(x)$

$$\Leftrightarrow f(x+b) = x$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x}+b+a = \cancel{x} \Rightarrow b=-a$$

Odavde dobijamo da je $i(x) = x-a$ inverzni element.

Dakle, $(S,\circ)$ je Abelova grupa.

(13) $$G = \{ x \in \mathbb{R} : \ -1 < x < 1 \},$$

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}$$

1° zatvorenost

$$(\forall a,b \in G) \quad a*b \in G$$

Kako je $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$ jer su $a,b \in \mathbb{R}$, dovoljno je dokazati da vrijedi:

$$-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{a+b}{1+ab} \ \wedge \ \frac{a+b}{1+ab} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{1+ab} + 1 > 0 \quad \wedge \quad \frac{a+b}{1+ab} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b+1+ab}{1+ab} > 0 \quad \wedge \quad \frac{a+b-1-ab}{1+ab} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+1+b(a+1)}{1+ab} > 0 \quad \wedge \quad \frac{a-1-b(a-1)}{1+ab} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a+1)(b+1)}{1+ab} > 0 \quad \wedge \quad \frac{(a-1)\cdot(1-b)}{1+ab} < 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+a)(1+b)}{1+ab} > 0 \quad \wedge \quad \frac{(1-a)(1-b)}{1+ab} > 0$$

Kako je $a \in (-1,1)$ i $b \in (-1,1)$ imamo da je $(1+a) > 0$, $(1+b) > 0$, $(1-a) > 0$, $(1-b) > 0$, $(1+ab) > 0$ pa obje prethodne nejednakosti vrijede.

2° komutativnost

$(\forall a,b \in G) \quad a*b = b*a$

Kako je $a*b = \dfrac{a+b}{1+ab} = \dfrac{b+a}{1+ba} = b*a$,
komutativnost vrijedi. ✓

3° asocijativnost

$(\forall a,b,c \in G) \quad (a*b)*c = a*(b*c)$

Vrijedi:

$$(a*b)*c = \frac{a+b}{1+ab} * c$$

$$= \frac{\frac{a+b}{1+ab}+c}{1+\frac{a+b}{1+ab}\cdot c}$$

$$= \frac{\frac{a+b+c+abc}{\cancel{1+ab}}}{\frac{1+ab+ac+bc}{\cancel{1+ab}}}$$

$$= \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

$$= \frac{\frac{a+b+c+abc}{1+bc}}{\frac{1+ab+ac+bc}{1+bc}}$$

$$= \frac{\frac{a(1+bc)+b+c}{1+bc}}{\frac{1+bc+a(b+c)}{1+bc}}$$

$$= \frac{a+\frac{b+c}{1+bc}}{1+a\cdot\frac{b+c}{1+bc}} = \frac{a+(b*c)}{1+a\cdot(b*c)} = a*(b*c)$$

✓

4° neutralni element

$(\exists! e \in G)(\forall a \in G) \quad a * e = e * a = a$

Zbog komutativnosti, dovoljno je pronaći $e \in G$ takvo da je

$$a * e = a \iff \frac{a+e}{1+ae} = a \iff \frac{a+e}{1+ae} - a = 0$$

$$\iff \frac{a+e-a(1+ae)}{1+ae} = 0 \iff \cancel{a} + e - \cancel{a} - a^2 e = 0$$

$$\iff e(1-a^2) = 0 \Rightarrow e = 0 \in (-1,1)$$

Dakle, neutralni element je $e = 0$.

5° inverzni element

$(\forall a \in G)(\exists b \in G) \quad a * b = b * a = e$

Zbog komutativnosti, dovoljno je pronaći $b \in G$ takvo da je

$$a * b = e \iff \frac{a+b}{1+ab} = 0 \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow b = -a$$

Dakle, inverzni element elementu a je $b = -a$.

Algebarska struktura $(G, *)$ je Abelova grupa.

(14) $S = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

Koristeći eksponencijalni oblik kompleksnog broja, uz pretpostavku da je argument tog broja z jednak φ, imamo:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = e^{i\varphi}.$$

1° zatvorenost

$(\forall z_1, z_2 \in S) \quad z_1 \cdot z_2 \in S$

Neka je $z_1 = e^{i\varphi_1}$, $z_2 = e^{i\varphi_2}$; sada je

$$z_1 \cdot z_2 = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = 1 \Rightarrow z_1 z_2 \in S \checkmark$$

2° komutativnost

$(\forall z_1, z_2 \in S) \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Nasljeđujemo iz osobine komutativnosti množenja kompleksnih brojeva. ✓

3° asocijativnost

$(\forall z_1, z_2, z_3 \in S) \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Nasljeđujemo iz osobine asocijativnosti množenja kompleksnih brojeva. ✓

4° neutralni element

$(\forall z \in S)(\exists!\, e \in S) \quad z \cdot e = e \cdot z = z$

Zbog komutativnosti, dovoljno je pronaći e tako da je

$$z \cdot e = z \Rightarrow e = 1 = e^{i0} \in S.$$

Neutralni element je $e = 1$.

5° inverzni element

$(\forall z \in S)(\exists u \in S) \quad z \cdot u = u \cdot z = e$

Zbog komutativnosti, dovoljno je pronaći u tako da je

$z \cdot u = e \Rightarrow \quad u = \frac{e}{z} = \frac{1}{z}$

Neka je $z = e^{i\varphi}$. Tada je $u = \frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$,

odakle je $|u| = 1$ pa $u \in S$.

Dakle, za odabrano $z \in S$, inverzni element je

$u = \frac{1}{z}$.

Algebarska struktura $(S, \cdot)$ je Abelova grupa.

(15) $(a,b) * (c,d) = (a+c,\ (-1)^c b + d)$

1° zatvorenost

$(\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2) \quad (a,b) * (c,d) \in \mathbb{Z}^2$

Kako je $a+c \in \mathbb{Z}$ i $(-1)^c b + d \in \mathbb{Z}$, zatvorenost vrijedi

2° komutativnost.

Neka je $(a,b) = (1,1)$ i $(c,d) = (2,2)$.

Tada je:

$(a,b) * (c,d) = (1,1) * (2,2) = (3,\ (-1)^2 \cdot 1 + 2) = (3,3)$

$(c,d) * (a,b) = (2,2) * (1,1) = (3,\ (-1)^1 \cdot 2 + 1) = (3,-1)$

Ovim smo pronašli kontra primjer i pokazali da komutativnost ne vrijedi.

3° asocijativnost

$$(\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}^2) \ ((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (a,b) * ((c,d) * (e,f))$$

Sa jedne strane imamo da je:

$$\begin{aligned} ((a,b) * (c,d)) * (e,f) &= (a+c,\ (-1)^c b + d) * (e,f) \\ &= (a+c+e,\ (-1)^e \cdot ((-1)^c \cdot b + d) + f) \\ &= (a+c+e,\ (-1)^{c+e} b + (-1)^e d + f) \end{aligned}$$

Sa druge strane imamo da je

$$\begin{aligned} (a,b) * ((c,d) * (e,f)) &= (a,b) * (c+e,\ (-1)^e d + f) \\ &= (a+c+e,\ (-1)^{c+e} \cdot b + (-1)^e d + f), \end{aligned}$$

pa asocijativnost jasno vrijedi.

4° neutralni element

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)(\exists! (e_1,e_2) \in \mathbb{Z}^2) \quad (a,b) * (e_1,e_2) = (e_1,e_2) * (a,b) = (a,b)$$

Kako komutativnost ne vrijedi, moramo odvojeno da tražimo desni i lijevi neutralni element:

$$(a,b) * (e_1,e_2) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow (a+e_1, (-1)^{e_1} b + e_2) = (a,b) \Rightarrow$$

$$a + e_1 = a \Rightarrow e_1 = 0$$

$$\frac{(-1)^{e_1} b + e_2 = b}{(-1)^0 \cdot b + e_2 = b} \Rightarrow b + e_2 = b \Rightarrow e_2 = 0$$

Dakle, desni neutralni element je $(e_1,e_2) = (0,0)$.

$$(e_1,e_2) * (a,b) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow (e_1 + a, (-1)^a \cdot e_2 + b) = (a,b) \Rightarrow$$

$$e_1 + \cancel{a} = \cancel{a} \Rightarrow e_1 = 0$$

$$\underline{(-1)^a \cdot e_2 + \cancel{b} = \cancel{b}} \Rightarrow (-1)^a \cdot e_2 = 0 \Rightarrow e_2 = 0$$

Dakle, lijevi inverzni element je $(e_1,e_2) = (0,0)$.

Pošto su lijevi i desni neutralni element jednaki, algebarska struktura ima jedinstven neutralni element i on je $(e_1,e_2) = (0,0)$.

5° inverzni element

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)(\exists (i_1,i_2) \in \mathbb{Z}^2) \quad (a,b) * (i_1,i_2) = (i_1,i_2) * (a,b) = (e_1,e_2)$$

Kako komutativnost ne vrijedi, moramo odvojeno da tražimo desni i lijevi inverzni element.

$$(a,b) * (i_1,i_2) = (e_1,e_2)$$

$$\Leftrightarrow (a+i_1, (-1)^{i_1} b + i_2) = (\theta,\theta) \Rightarrow$$

$$a + i_1 = \theta \Rightarrow i_1 = -a$$

$$(-1)^{i_1} b + i_2 = \theta \Rightarrow i_2 = -(-1)^{i_1} b = (-1)\cdot(-1)^{-a} b = (-1)^{1-a} b$$

Dakle, desni inverzni element je $(i_1,i_2) = (-a, (-1)^{1-a} b)$.

$$(i_1,i_2) * (a,b) = (e_1,e_2)$$

$$\Leftrightarrow (i_1+a, (-1)^a i_2 + b) = (\theta,\theta) \Rightarrow$$

$$i_1 + a = \theta \Rightarrow i_1 = -a$$

$$(-1)^a \cdot i_2 + b = \theta \Rightarrow i_2 = \frac{-b}{(-1)^a} = (-1)\cdot(-1)^{-a}\cdot b = (-1)^{1-a} b$$

Dakle, lijevi inverzni element je $(i_1,i_2) = (-a, (-1)^{1-a} b)$.

Pošto su lijevi i desni inverzni element jednaki, algebarska struktura ima jedinstven inverzni element i on je za proizvoljno $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ jednak $(i_1,i_2) = (-a, (-1)^{1-a} b)$.

Dakle $(\mathbb{Z}^2, *)$ je grupa.