① СТЕПЕНИ РЕДОВИ

1.) Дефиниција степеног реда. Конвергенција. Особине.

Дефиниција: Нека је дат низ реалних бројева $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Под степеним редом подразумијевамо функционални ред облика:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (1)$$

општи члан реда је функција.

гдје је $x_0 \in \mathbb{R}$ центар степеног реда.

* степени ред је најједноставнији облик функ. реда

Бројеви $a_n, n\in\mathbb{N}_0$ се називају коефицијенти степеног реда. Домен степеног реда је скуп $D = \{x\in\mathbb{R} :$ ред $S(x)$ конвергира

Напомена: можемо посматрати ред

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ односно } x_0 = 0$$

У (1) можемо увести смјену $x - x_0 = t$, па добијамо

$$s(t+x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad g(t) = s(t+x_0)$$

Ако је домен $D_g = (-R, R)$ тада је $D_s = (x_0 - R, x_0 + R)$

Примјери:

① за $a_n = 1$, имамо степени ред:

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad D_{f_1} = (-1, 1)$$

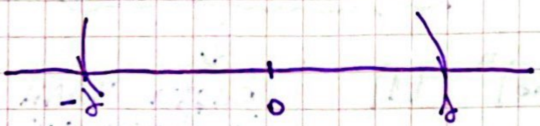
→ геометријски ред, конвергира ако је $x<1$

② за $a_n = \frac{1}{n!}$ $\quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad D_{f_2} = (-\infty, +\infty)$

③ За $a_n = \frac{n!}{3^n}$, $f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{3^n} \cdot x^n$, $D_{f_3} = \{0\}$

ТЕОРЕМА 1: Ако степени ред $\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{3^n} \cdot x^n}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ конвергира за неко $\delta \neq 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ тада ред апсолутно конвергира за свако x тако да је $|x| < |\delta|$.

Доказ:



→ интервал увијек мора бити симетричан

→ за све вриједности мање од δ мора да конвергира, за све веће не знамо (може да конвергира, а не мора)

Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n$ конвергира тада $\lim_{n\to\infty} a_n \delta^n = 0$. Даље закључујемо да је $|a_n \delta^n| < \underset{M}{m}$, односно ограничен, $m > 0$.

Тада за свако $|x| < |\delta|$ вриједи:

$$|a_n \delta^n| = \left|a_n \delta^n \frac{x^n}{\delta^n}\right| = \underbrace{|a^n \delta^n|}_{\leq m} \left|\frac{x}{\delta}\right|^n \leq m \left|\frac{x}{\delta}\right|^n$$

→ ограничили смо ред

Према томе за $|x| < |\delta|$:

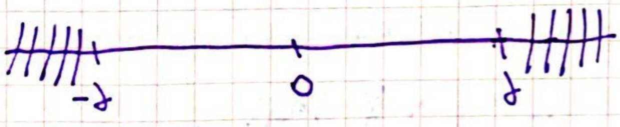
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{\delta}\right|^n,$$ пошто је $|x| < |\delta| \Rightarrow \left|\frac{x}{\delta}\right| < 1$

→ $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{\delta}\right|^n$ конвергира (геометријски ред)

Поредбени критеријум

Према томе $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ конвергира за $|x| < |\delta|$ □ Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2: Ако степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дивергира у тачки δ, $\delta \in \mathbb{R}$ тада овај ред дивергира за свако $|\delta|<|x|$.

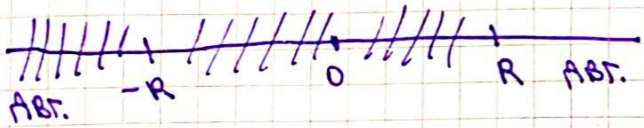


(унутар интервала не знамо)

Дефиниција (полупречник конвергенције степеног реда):

Полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дефинише се са $R = \sup\{|x|,\ |\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ конвергира$\}$

ТЕОРЕМА 3: Нека је R полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ тада степени ред апсолутно конвергира у свакој тачки интервала $(-R, R)$ док дивергира за свако x, које је $|x|>R$



Напомена: за $x=R$ односно $x=-R$ морамо посебно испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, односно $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$

R- спорна тачка

ТЕОРЕМА 4: (Коши-Адамаров став): полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дат је са $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

- Ако је $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, тада је $R=0$
- Ако је $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, тада је $R=\infty$

НАПОМЕНА 1: $\boxed{R = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$

НАПОМЕНА 2: НАЈЧЕШЋЕ ПОСТОЈИ ЛИМЕС. ПРЕМА ТОМЕ ПОСМАТРАМО.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{или} \quad R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

ЗАПРАВО ЈЕДНАКИ ЛИМЕСИ

Примјер: Одредити домен конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \cdot x^n$

Рјешење: $a_n = \frac{3^n}{n}$, $a_n > 0$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 3^n}{n\cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$$

Значи да ред конвергира $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \subseteq D \subseteq \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ → потребно одредити и радијус конвергенције

За $x = \frac{1}{3}$ имамо ред:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$ → дивергира

За $x = -\frac{1}{3}$ имамо ред:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ → конвергира на основу

Према томе $D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Особине:

ТЕОРЕМА 5: Нека је полупречник конвергенције степеног реда $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ тада вриједи:

1° интеграција члан по члан, $t\in(x_0-R, x_0+R)$

$$\int_{x_0}^{t} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{t} (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (t-x_0)^{n+1}$$

разликује се од почетног само по овоме

2° диференцирање члан по члан, $x\in(x_0-R, x_0+R)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n\,(x-x_0)^{n-1}$$

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots\,/' \Rightarrow a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots$$

2.) Тејлоров ред. Аналитичке функције. Тејлорови редови елементарних ф-ја.

Тејлоров ред:

Посматрамо степени ред:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n =$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \dots$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0)^1 + 12a_4(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x)}{2}$$

$$f'''(x) = 3!\, a_3 \quad , \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

Овим процесом можемо да закључимо да је $a_n = \frac{f^{(n)}\, x_0}{n!}$

Дефиниција (Тејлоров ред):

Нека је f дефинисана и бесконачно диференцијабилна ф-је на неком интервалу (x_0-h, x_0+h), $h>0$. Степени ред $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ називамо Тејлоров ред.

Тејлоров полином:

Напомена: Ако је $x_0 = 0$ тада овај ред називамо Маклоренов ред

$C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f(x)$ непрекидна функција $\}$

$C^1(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f'(x)$ непрекидна функција $\}$

$C^k(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f^{(k)}(x)$ непрекидна функција $\}$

$C^\infty(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f$ бесконачно диференцијабилна ф-ја $\}$

Основне елементарне функције су бесконачно диференцијабилне на сваком домену:

примјер: $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$; $x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$

$(x^2)' = 2x$ $\qquad (x^2)''' = 0$

$(x^2)'' = 2$ $\qquad (x^3)^{IV} = 0$

циљ редова: $p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$

$n \in \mathbb{N}, \; a_0, a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R}$

* ред је бесконачан полином *

$$p_\infty(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

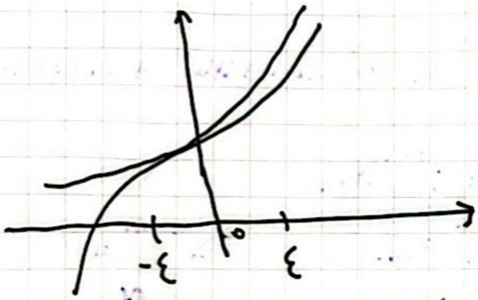
Да ли сваку ф-ју можемо да апроксимирамо полиномом? Не може

Ако је $f \in C^\infty$ онда можемо покушати апроксимацију помоћу Тејлоровог реда.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$e^x=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}_{\text{Тејлоров полином}}+\underbrace{R_m(f,x)}_{\text{остатак}}$$

Све што је m (коначан) већи број апроксимација је боља.
(у зависности колико нам треба децимала тачности бирамо m)



Примјер: Нека је дат $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Вриједи $f(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Може се израчунати да је $f^{(n)}(0)=0, \forall n\in\mathbb{N}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n=0$$ → апроксимација тачна само за ову тачку да ~~сам~~ смо доказали да нису све бесконачно диф. ф-је погодне апроксимирању јер нам није циљ да добијемо $D=\{0\}$ него неку околину.

Дефиниција (аналитичка функција):

Нека је $I\subseteq\mathbb{R}$ отворен скуп. За ф-ју $f: I\to\mathbb{R}$ кажемо да је аналитичка ф-ја ако $f\in C^{\infty}(I)$ и за свако $x_0\in I$ постоји околина $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ на којој ред $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ конвергира на ф-ју $f(x)$.

Све елементарне функције су аналитичке.

Тејлорови (Маклоренови) развоји елементарних ф-ја:

1.) $f(x) = e^x$, у околини тачке $x_0 = 0$

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$D = (-\infty, +\infty)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

за $x = 1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad e \approx 2{,}718281\dots$$

2.) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$

$f''(0) = 0$, $f'''(x) = -1$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

→ за сваку непарну функцију ће преживјети само непарни степени

$D = (-\infty, +\infty)$

3.) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$ → парна функција

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$D = (-\infty, +\infty)$

4.) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ → РАЦИОНАЛНА функција

$x_0 = 0$

Може се доказати да је $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$$D = (-1, 1)$$

Неки математичари су сматрали $\frac{1}{2} = \frac{1}{1-(-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ конвергира, а то није тачно.

5.) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots + \dots$$

6.) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$ → непарна ф-ја

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

7.) $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ → график

$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$D = (-\infty, +\infty)$$

② Диференцијалне једначине

3.) Увод. Теорема јединствености за диференцијалне једначине првог реда.

Диференцијалне једначине имају бројне примјене у природним, друштвеним и техничким наукама. Нажалост за само један мали број диф. једначина постоје аналитички поступци рјешавања.

Дефиниција:

Нека је F реална ф-ја са n+2 промјенљиве. Једначина
$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \ x \in (a,b)$ (ДЈ1.)
гдје је $y(x)$ непозната ф-ја (n пута диференцијабилна) назива се диференцијална једначина реда n.

Примјери:

1) Диференцијална једначина

$$y''(x) - 3(y'(x))^2 + x^4 - y'''(x) = 0$$

је реда $n=3$ (због трећег извода)

* x → варијабла
y → непозната

$$F(x, y(x), y'(x), y'', y''') = y''(x) - 3(y'(x))^2 + x^4 - y'''(x)$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^4 - 3x_3^2 + x_4 - x_5$$

2) Диференцијална једначина

$f''(x) - 1 = 0$, гдје је диф. јед. другог реда

$\underbrace{y(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2}_{\downarrow} \Rightarrow \underline{y''(x) = 1}$

ово је једно од рјешења диф. јед., али поред тога рјешење је и функција

$$\underbrace{y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2}_{\downarrow}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

опште рјешење у овом смислу

Дефиниција: Опште рјешење диф. јед. (ДЈ1) је ф-ја $y = y(x)$, $x \in (a,b)$ која је дефинисана помоћу једначине облика:

$$\Phi(x, y(x), C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \quad (ДЈ2)$$

гдје су $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ произвољне константе, тако да важе услови:

1) $y = y(x)$ је рјешење једначине (ДЈ1)

2) диференцијална једначина (ДЈ1) се може добити из једначине (ДЈ2)

Партикуларно рјешење је свако рјешење које се добија из општег рјешења за посебне вриједности константи.

(Нпр. $C_1 = 1$ или $C_2 = 2$)

Сингуларно рјешење је такво рјешење диф. јед. које се не може добити из општег рјешења (ни за један избор константи).

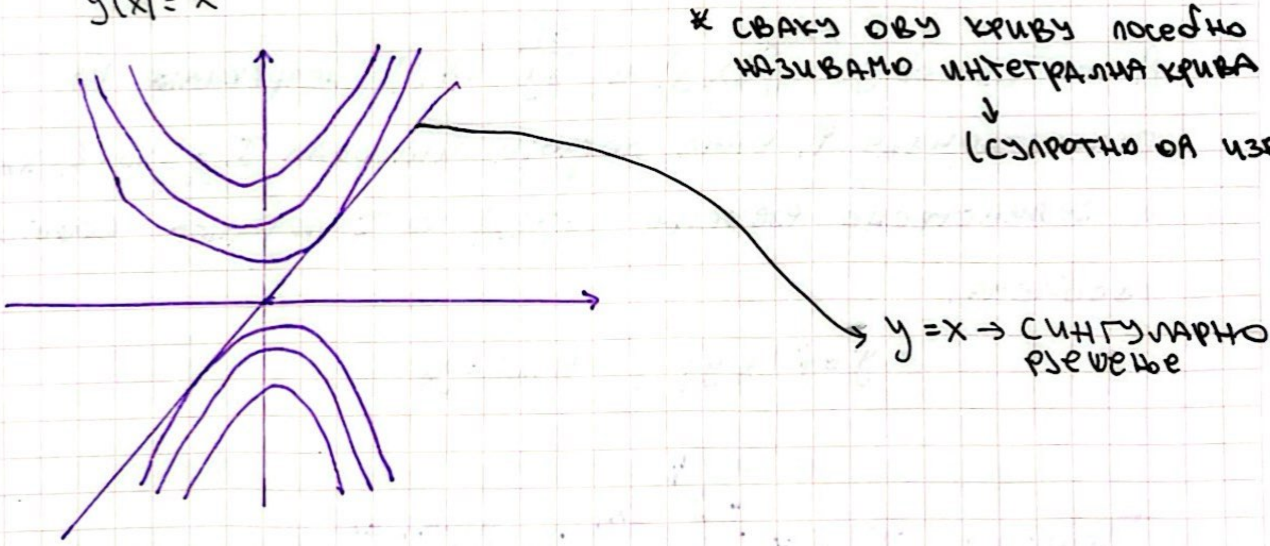
Интегрална крива - диференцијалне једначине је свако њено партикуларно рјешење посматрано као крива $y=y(x)$

Примјер: Диференцијална јед. $x((y'(x))^2+1)-2y(x)\cdot y'(x)=0$ има опште рјешење

$$y(x)=\frac{x^2}{2C}+\frac{C}{2},\quad C\in(-\infty,0)\cup(0,\infty) \rightarrow \text{опште рјешење}$$

Сингуларно рјешење:

$y(x)=x$



Понекад поред задане диф. јед. имаћемо и почетне услове:

$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1, \ldots, y^{(n)}(x_0)=y_n$

Партикуларно рјешење које задовољава почетне услове се назива Кошијево рјешење.

Примјер: $y''(x)-1=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

Опште рјешење је $y(x)=\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$

$y(0)=0+C_1\cdot 0+C_2=1 \Rightarrow \boxed{C_2=1}$

$y'(x)=x+C_1$

$y'(0)=0+C_1=2 \Rightarrow \boxed{C_1=2}$ → Кошијево рјешење:

$y(x)=\frac{x^2}{2}+2x+1$

* ТЕОРЕМА ЈЕДИНСТВЕНОСТИ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ:

Нека је P правоугаоник у x-y равни:

$P=\{(x,y): a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$

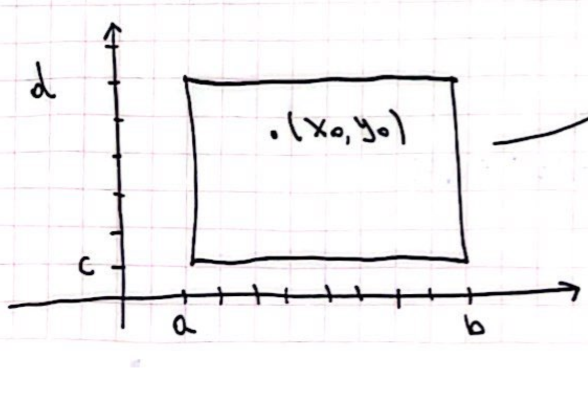
нека (x_0, y_0) припада унутрашњости правоугаоника.

Ако су об-је $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрекидне на правоугаонику P, онда постоји интервал $I=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ и јединствено рјешење $y=y(x)$ на I почетног Кошијевог проблема.

$$y'=f(x,y)\ ,\quad y(x_0)=y_0$$

Примјер: $y'(x)=\frac{-y^{\frac{1}{3}}(x)}{x}$, $y(-1)=0$

$f(x,y)=\frac{\sqrt[3]{y}}{x}$, $f'_y(x,y)=\frac{\frac{1}{3}}{x\sqrt[3]{y^2}}$



4.) Хомогена, линеарна и Бернулијева диференцијална једначина.

Диференцијалне једначине првог реда су облика

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

гдје је $F: D_3 \to \mathbb{R}$, $D_3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Често диференцијалну једначину првог реда можемо представити у експлицитном облику

$y'(x) = f(x,y)$ (ДЈ3)

при чему је $f: D_2 \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Можемо користити и други запис, тачније:

$y' = \frac{dy}{dx} \to$ диференцијал

$$f(x,y) = \frac{-f(x,y)}{Q(x,y)}$$

Сређивањем (ДЈ3) добијамо диф. јед. облика

~~$p(x,y) = -p(x,y)$~~

$$p(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

I Диференцијалне једначине са раздвојеним промјенљивим

Одређене су обликом

$$\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

$f: D_1 \to \mathbb{R}$

$g: E_1 \to \mathbb{R}$

II ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

ЈЕ ОДРЕЂЕНА У ЕКСПЛИЦИТНОМ ОБЛИКУ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (ХД1)

ЗА $f: D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}$

Можете записати

$$\frac{1}{x'} = f\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right)$$

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right)} = x', \quad g\left(\frac{x}{y}\right) = x', \quad x = x(y)$$

Хомогена диф. јед. се рјешава смјеном:

$$u(x) = \frac{y}{x}, \quad x\,u(x) = y(x) \;/'$$

$$y' = u(x) + x \cdot u'(x)$$

Добијамо из ХД1:

$$u(x) + x\,u'(x) = f(u)$$

→ своди се на диф. јед. са раздвојеним промјењивим

$$x \cdot u'(x) = f(u) - u$$

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\boxed{\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}}$$

Смјеном $u = \frac{y}{x}$ ХД1 сводимо на диф. јед са раздвојеним промјењивим

Уопштена хомогена једначина је: $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

→ РАЗЛИКУЈЕМО 2 СЛУЧАЈА

1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ уводи се смјена

$x = u + h$

$y = v + k$ гдје је $v = v(u)$ нова фја, а h и k су

рјешења система

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0 \end{aligned}}$$

На овај начин добијемо хомогену диф. јед.

2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \xRightarrow{\text{смјеном}}$ $u = a_1 x + b_1 y$ добијамо хомогену диф. јед.

III ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

је диференцијална једначина облика

$$y'(x) + p(x) y(x) = g(x) \quad (ЛДЈ)$$

при чему су функције $p(x); g(x): D_1 \to \mathbb{R}$ непрекидне функције на интервалу $D_1 \subseteq \mathbb{R}$

Ако је $g(x) = 0$ ово постаје ор. лин. јед. једначина са раздвојеним промјенљивима.

ТЕОРЕМА 1: Опште рјешење диф. једначине ЛДЈ је дато формулом:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int g(x) e^{\int p(x)dx} dx \right)$$

за неку реалну константу C

ДОКАЗ: РАЗЛИКУЈЕМО ДВА СЛУЧАЈА:

1) $g(x)=0$, ТАДА ИМАМО

$y' + p(x)y = 0$ → РАЗДВОЈЕНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ

$y' = -p(x)y$

$\frac{y'}{y} = -p(x)$

$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = -\int p(x)\,dx$

$\ln|y(x)| + C_1 = -\int p(x)\,dx$

$\ln|y(x)| = -\int p(x)\,dx + \ln|c|$

$\boxed{-C_1 = \ln|c|}$

$-C_1 \in \mathbb{R}$; $\ln x : (0,+\infty)$

$e^{\ln|y(x)|} = e^{-\int p(x)\,dx + \ln|c|}$

$|y(x)| = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot e^{\ln|c|}$

$\boxed{|y(x)| = |c| \cdot e^{-\int p(x)\,dx}}$

$y(x) = c \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$, $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

2) $Q(x) \neq 0$

$y'(x) + p(x)y = g(x)$

$y'(x)e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$

$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$ (ЛД2)

ИЗВОД ПРОИЗВОДА

Користимо $\left(\int p(x)dx\right)' = p(x)$

Када дијелимо интеграл на ЛДЈ:

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int g(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \quad \Big/ \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$\boxed{\int f'(x)\,dx = f(x) + c}$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int g(x) e^{\int p(x)dx} dx\right] \quad \square \text{ Q.E.D.}$$

IV БЕРНУЛИЈЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

$$y'(x) + p(x)y = g(x) \cdot y^{\delta} \quad (\text{БД1})$$

Гдје су $p(x), g(x)$ непрекидне на неком домену $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, те $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Ако је $\delta = 0$ онда имамо лин. диф. јед., ако је $\delta = 1$ онда имамо диф. јед. са раздвојеним коеф.

Своди се на лин. диф. јед.

ТЕОРЕМА 2: Смјеном $z = z(x) = y^{1-\delta}$ Бернулијеву диференцијалну једначину БД1 сводимо на линеарну диф. једначину облика:

$$z'(x) + (1-\delta)p(x)z(x) = (1-\delta)g(x)$$

Доказ: За $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ важи:

$$y' + p(x)y = g(x)y^{\delta} \quad / y^{-\delta}$$

$$y' \cdot y^{-\delta} + p(x) \cdot y^{1-\delta} = g(x)$$

смјена: $y^{1-\delta} = z(x) \quad /'$

$$z'(x) = (1-\delta)y^{1-\delta-1}(x) \cdot y'(x) = (1-\delta)y^{-\delta} \cdot y'(x)$$

$$\frac{z'(x)}{1-\delta} + p(x)z(x) = g(x)$$

$$z'(x) + (1-\delta)\,p(x)z(x) = (1-\delta)\cdot g(x) \quad \square \text{ Q.E.D.}$$

⑤ ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА. Метод варијације константи.

Дефиниција (Диф. јед. вишег реда)

Диференцијална једначина (1*)

$$y^{n}(x) + a_1(x)\,y^{n-1}(x) + \dots + a_{n-1}(x)\,y'(x) + a_n(x)\,y(x) = F(x)$$

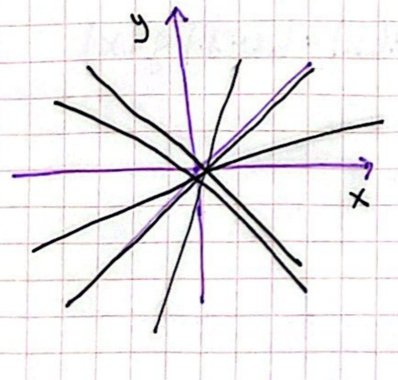
је линеарна диференцијална једначина n-тог реда.

Посматраћемо случај када ф-је $a_k(x), F(x) \in C[a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$ (непрекидне су функције). Ако је $F(x) \equiv 0$ на $[a,b]$ тада кажемо да је једначина (1*) хомогена диф. једначина, у супротном је нехомогена диференцијална једначина.

Напомена: Оператор $L: V \to V$ је линеаран ако вриједи да је

$$L(\delta y_1 + \beta y_2) = \delta L(y_1) + \beta L(y_2)$$

функција $a(x) = ax$ је линеарна функција, $a \in \mathbb{R}$



ф-је $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на неком домену $D \subseteq \mathbb{R}$ су линеарно зависне ако $y_1(x) = \delta y_2(x)$, $\delta \in \mathbb{R}$ у супротном су линеарно независне

I Штурм-Лиувилова диференцијална једначина

Линеарна диф. једначина (1*) за $n=2$ има облик

$$y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+g(x)y(x)=f(x),\quad x\in(a,b)\quad (\text{СЛ}1)$$

се назива Штурм-Лиувилова диф. једначина.

За $f(x)\equiv 0$ имамо хомогену линеарну диф. јед.

$$y''(x)+p(x)y'(x)+g(x)y(x)=0,\quad x\in(a,b)\quad (\text{СЛ}2)$$

Напомена: оператор $Ly: y''(x)+p(x)y'(x)+g(x)y(x)$ је линеаран оператор. Лако се провјери да вриједи

$$L(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 L(y_1)+\alpha_2 L(y_2),\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$$

ТЕОРЕМА 1: Ако су $y_1(x), y_2(x)$ рјешења диф. јед. (СЛ2) тада је $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ такође њено рјешење (посљедица линеарности)

Доказ: $$Ly:=y''(x)+p(x)y'+g(x)=0$$

Вриједи $L(y_1)=0,\ L(y_2)=0$

$$L(C_1y_1+C_2y_2)=C_1L(y_1)+C_2L(y_2)=0,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}\quad \text{Q.E.D.}$$

Дефиниција: Нека су $y_1(x), y_2(x)$ рјешења СЛ2, дефинишемо $W(y_1(x),y_2(x))=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$ коју називамо вронскијан (вронскијева ~~дет~~ детерминанта).

ТЕОРЕМА 2: Нека су $y_1(x)$, $y_2(x)$ рјешења диф. јед. СЛ2. Тада или је $W(y_1, y_2) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ и $y_1(x)$, $y_2(x)$ су линеарно независне функције или је $W(y_1, y_2) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ и функције $y_1(x)$, $y_2(x)$ су линеарно зависне.

Доказ: Пошто су y_1 и $y_2(x)$ рјешења тада је и $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ рјешење СЛ2:

Посматрамо

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) &= 0 \\ C_1 y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x) &= 0 \end{aligned}$$

систем има јединствено рјешење ако $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow y_1(x), y_2(x)$ су линеарно независни

$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Бесконачно много рјешења $C_1 = \lambda C_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, вриједи $y_1(x), y_2(x)$ су линеарно зависни

ТЕОРЕМА 3: Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независна рјешења диф. јед. СЛ2, тада је

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

њено опште рјешење

ТЕОРЕМА 4: Ако је $y_1(x)$ једно нетривијално партикуларно рјешење линеарне хомогене диф. јед. другог реда

$$y''(x) + p(x)y'(x) + y(x)g(x) = 0,$$ тада је

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int p(x)\,dx\right) dx$$

такође партикуларно рјешење, линеарно независно од $y_1(x)$.

* НЕХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФ. ЈЕД. ДРУГОГ РЕДА:

Посматрамо

$$y''(x) + p(x)y'(x) + g(x)y(x) = f(x) \quad \text{сл 1}, \quad f(x) \not\equiv 0,\ x \in (a,b)$$

$p(x), g(x), f(x) \in C(a,b) \rightarrow$ да би имали јединствено рјешење.

Придружена хомогена диф. јед. диференцијалној једначини сл1 је

$$y''(x) + p(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0 \quad (\text{сл }2)$$

$$Ly: y''(x) + p(x)y'(x) + y(x)g(x)$$

ХОМОГЕНО + ПАРТИКУЛАРНО = ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ

ТЕОРЕМА 5: Нека је $y_h(x)$ опште рјешење диф. јед. сл2 и нека је y_p једно партикуларно рјешење сл1, тада је $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ опште рјешење диф. јед. сл 1.

Доказ: $y_h(x) \rightarrow$ хомогено рјешење:

$$Ly_h(x) = y_h''(x) + p(x)y_h'(x) + g(x)y_h(x) = 0 \quad (1)$$

и $y_p(x)$ је партикуларно рјешење сл1:

$$Ly_p(x) := y_p''(x) + p(x)y_p'(x) + g(x)y_p(x) = f(x) \quad (2)$$

1+2

$$Ly_h(x) + Ly_p(x) = f(x)$$

$$\boxed{L(y_h(x) + y_p(x)) = f(x)}$$

МЕТОД ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ:

Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независна рјешења хомогене диф. јед. сл2. Тада је опште рјешење дато са $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ гдје су $C_1(x)$ и $C_2(x)$ функције које задовољавају систем:

$$\boxed{\begin{aligned} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}}$$

6 Линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима.

Посматрамо диф. јед.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_{n-2} y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1 y' + a_0 y$$ → ХДЈ

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ → хомогена диф. јед. са константним коефицијентима

Посматрамо карактеристични полином

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (КЈ)$$

Примјер: $\lambda^2+\lambda-2=0$, $\lambda^2+2\lambda+1=0$, $\lambda^2+\lambda+2=0$

$\lambda_1=1, \lambda_2=-2$ $\quad \lambda_1=1, \lambda_2=1$ $\quad \lambda_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$

1.) Ако је λ_k проста реална нула (рјешење) једначине КЈ онда је одговарајуће партикуларно рјешење ХДЈ1 ф-ја $e^{\lambda_k x}$

2.) Ако је λ_j реална нула (рјешење) једначине КЈ реда m (понавља се више пута), тада су одговарајућа партикуларна рјешења ХДЈ 1 функције облика:

$$e^{\lambda_j x}, \ x e^{\lambda_j x}, \dots, x^{m-1} \cdot e^{\lambda_j x}$$

3.) Ако је $\lambda = \alpha + i\beta$ проста комплексна нула (рјешење) једначина КЈ онда су одговарајућа партикуларна рјешења ХДЈ1 функција облика:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \ e^{\alpha x}\sin\beta x$$

4.) Ако је $\lambda = \alpha \pm i\beta$ пар коњуговано комплексних нула реда m једначине КЈ, онда су одговарајућа партикуларна рјешења ХДЈ функције облика

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\dots,x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Опште рјешење добијамо као линеарна комбинација партикуларних рјешења примјеном правила (1-4)

Нехомогена линеарна диф. једначина са константним коеф.:

Посматрамо диференцијалну једначину:

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_1y'(x)+a_0y(x)=f(x) \quad (\text{НДЈ } 1)$$

$a_0, a_1, a_2,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$, $f(x)$ непрекидна: $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$

Придружена хомогена диф. јед. је

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_1y'(x)+a_0y(x)=0 \quad (\text{ХДЈ } 1)$$

Опште рјешење тражимо у облику

$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$, гдје је $y_h(x)$ рјешење ХДЈ 1,

а $y_p(x)$ једно партикуларно рјешење НДЈ 2

Рачунање партикуларног рјешења:

1. Метод варијације константи
2. Метод неодређених коефицијената се примјењује

када је ф-ја $f(x)$ облика:

a) $f(x)=e^{ax}\cdot P_m(x)$, $a\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$ степен полинома $P_m(x)$

онда тражимо партикуларно рјешење у облику

$y_p(x)=x^s e^{ax} Q_m(x)$ гдје је:

SEM$_{\text{Ь}}$ вишеструкоста рјешења a у карактеристичној:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (KJ)$$

Коефицијенте који су неодређени, полином $Q(x)$ одређујемо када $y_h(x)$ уврстимо у НРЈ1.

б) $f(x) = e^{ax}\left(P_{m_1}(x)\cos bx + P_{m_2}(x)\sin bx\right)$, $a,b \in \mathbb{R}$,

$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

Онда партикуларно рјешење тражимо у облику

$$y_p(x) = x^s e^{ax}\left(Q_m(x)\cos bx + R_n(x)\sin bx\right)$$

$$m = \max\{m_1, m_2\}$$

гдје је s вишеструкост нуле облика $z = a + bi$ у KJ.

7. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА.

Систем диф. једначина

$$x'(t) = f(x,y) \qquad Y = \begin{vmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$$
$$y'(t) = g(x,y)$$

$\Rightarrow$ примјер:

$x'(t) = y(t)$

$y'(t) = -x(t)$, $t \in \mathbb{R}$

називамо аутономни систем диф. јед.

Тачку (x_0, y_0) за коју вриједи

$f(x_0, y_0) = 0$ и $g(x_0, y_0) = 0$ називамо ТАЧКА ЕКВИЛИБРИЈУМА

Константна крива $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ је рјешење система

$$x'(t) = f(x,y)$$
$$y'(t) = g(x,y)$$

НАПОМЕНА: Аутономном систему

$x'(t) = f(x,y)$ можемо придружити

$y'(t) = g(x,y)$ векторско поље $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$

График векторског поља називамо ФАЗНИ ПОРТРЕТ аутономног система диф. једначина.

Крива $(x(t), y(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ која је рјешење система још називамо ТРАЈЕКТОРИЈА.

Диференцијална једначина другог реда облика

$y'' = f(y', y)$ можемо свести на аутономни систем

смјеном $y' = u$ па добијамо

~~$y'=a$~~

$y' = u$ → можемо да продужимо поље

$u' = f(u, y)$ диф. јед II реда и одредимо фазни портрет.

→ простор векторског поља → интегралне криве које су рјешење система

Хомогени системи линеарних диф. јед. са константним ~~промјенљивим~~ коефицијентима

Нека је дат систем линеарних диф. јед.

$$x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \qquad (1*)$$
$$y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t)$$

гдје су $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1,2$.

Систем $(1*)$ је аутономни систем диф. јед.

Други запис система $1*$ је у облику

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

често ћемо користити и запис:

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t), \quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ је матрица 2×2

Матрицу А можемо посматрати као пресликавање

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, λ скалар (реалан или комплексан број)

Дефиниција: Нека је дата матрица $A_{2\times 2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ако постоји вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ тако да вриједи

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ тада вектор $\vec{v}$ називамо сопственим вектором, а λ сопствена вриједност матрице А.

Поступак рачунања сопственог вектора и вриједности је:

1. Одредимо карактеристичан полином p_λ

$$p_2(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$p_2(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_0$

2. Одредимо λ_1, λ_2 нуле полинома $p_2(\lambda)$, односно ријешимо једначину $p_2(\lambda) = 0$.

3. За сопствену вриједност λ_1 одредимо сопствени вектор из једначине

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v_1} = 0$$

Одредимо бар једно рјешење $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v_2} = 0$$

У случају $\lambda_1 = \lambda_2$ може се десити да из система

$(A - \lambda I)\vec{v_1} = 0$ добијемо један или два солствена вектора

Метод за рјешавање система (1х):

Посматрамо систем $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

1. Одредимо солствене вриједности и солствене векторе матрице A:

2. Разликујемо случајеве:

(а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ постоје два сол. вектора: реалне и различите λ

$\vec{v}_1, \lambda_1$ и $\vec{v}_2, \lambda_1$

Рјешење система:

$$y(t) = C_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

б) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta i$

Одговарају им два солствена вектора $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$

Рјешење система:

$$\vec{y}(t) = C_1 \cdot Re(\vec{v_1} \cdot e^{\lambda_1 t}) + C_2 Im(\vec{v_1} e^{\lambda_1 t})$$

в) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$

1° да солственој вриједности λ_1 одговара један вектор $\vec{v}_1$.

Морамо наћи генерализован солствени вектор $\vec{v_2}^*$. Одредимо бар једно рјешење система $\boxed{(A - \lambda_1 I)\vec{v_2}^* = \vec{v_1}}$

Рјешење система:

$$\vec{y}(t) = C_1 \cdot \vec{V_1} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2(\vec{V_2^*} + t\vec{V_1}) \cdot e^{\lambda_1 t}$$

2° сопственој вриједности λ_1 одговарају два сопствена вектора $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$

Рјешење система:

$$\vec{y}(t) = C_1\vec{V_1} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{V_2}e^{\lambda_1 t}$$

НЕХОМОГЕНИ СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА:

Посматрамо систем диференцијалних једначина

$$y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + b_1(t)$$

$$y_2'(t) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + b_2(t)$$

$$\vec{y}'(t) = A \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

При чему је:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$$

Нека је $C_1\vec{y_1}(t) + C_2y_2(t)$ рјешење хомогеног система

$$y'(t) = Ay(t)$$

$$C_1\vec{y_1}(t) + C_2\vec{y_2}(t) = \begin{bmatrix} C_1y_{11}(t) + C_2y_{12}(t) \\ C_1y_{21}(t) + C_2y_{22}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \text{РЈЕШЕЊЕ ХОМ. СИС.}$$

Опште рјешење система НХ1 тражимо у облику

$\vec{y}(t) = C_1(t)\vec{y_1}(t) + C_2(t)\vec{y_2}(t)$, методом варијације

константи

$C_1'(t)$, $C_2'(t)$ одређујемо из система

$$C_1'(t)y_{11}(t) + C_2'(t)y_{12}(t) = b_1(t)$$
$$C_1'(t)y_{21}(t) + C_2'(t)y_{22}(t) = b_2(t)$$

3 ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

8. Дефиниција и примјер векторских простора. Векторски потпростори. Линеал.

Дефиниција: Нека је V непразан скуп, $\mathbb{F}$ поље и нека је $+$ бинарна операција која пресликава $V\times V$ у V, а $\cdot$ бинарна операција која пресликава $F\times V \to V$. Тада уређена четворка $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ је векторски простор над пољем $\mathbb{F}$ ако вриједи:

(V_1) $(V_1, +)$ је Абелова група

(V_2) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

(V_3) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$

(V_4) $(\alpha\cdot\beta)a = \alpha(\beta\cdot a)$

(V_5) $1\cdot a = a$

$\alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad a, b \in V$

За $\mathbb{F}$ најчешће узимамо поље реалних бројева или поље комплексних бројева.

Да се присјетимо, $(V, +)$ је Абелова група ако вриједи:

(S_1) $\forall x, y \in V \Rightarrow x+y \in V$

(S_2) $\forall x, y, z \in V \Rightarrow x+(y+z) = (x+y)+z$

(S_3) $x\cdot e = x$

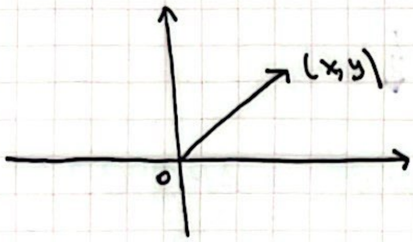
(S_4) $x\cdot i = e$

(S_5) $x+y = y+x$

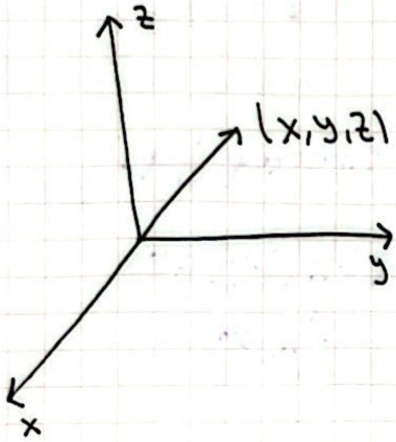
Scanned with CamScanner

Примјери векторских простора:

1. Векторски простор уређених n-торки $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ је одређен скупом вектора $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ и бинарним операцијама $+$ и $\cdot$



$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$



$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}^3\}$

2. Векторски простор матрице $m \times n$ је одређен са $\mathbb{R}^{m\times n} = (\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot)$, сабирањем, множењем и скупом

$$\mathbb{R}^{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Акко се покаже да за $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

3. Векторски простор непрекидних ф-ја $C[a,b]$,

$C[a,b] = (C[a,b], +, \cdot)$:

скуп $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ непрекидна на $[a,b]\}$

$f, g \in C[a,b] \Rightarrow f+g \in C[a,b]$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in [a,b] \Rightarrow \lambda \cdot f \in C[a,b]$

4. Векторски простор $L^p[a,b]$, простор интеграбилних ф-ја у односу на $+$ и $\cdot$, $p \geq 1$

$$L^p[a,b] = \left\{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

5. Скуп $W = \{ (x,y) \mid x \geq 0, \; y \geq 0 \}$

$(W, +, \cdot)$ није векторски простор $\lightning$

$\lambda \in \mathbb{R}, \; a \in W \Rightarrow \lambda \cdot a \in W$

$\lambda = -1, \; a = (x,y), \; x, y \geq 0$

$\lambda \cdot a = -1(x,y) = (-x, -y) \; \lightning$

6. Скуп $U = \{ (x,y) \mid x, y \geq 0 \}$

$(U, +, \cdot)$ није векторски простор јер:

$\lambda \in \mathbb{R}, \; a \in U, \; \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in U$

$xy \geq 0, \; \lambda^2 xy \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = (1,1) \in U \\ b = (-2,0) \in U \end{array}\right\} a+b = (1,1) + (-2,0) = (-1,1) \notin U$$

Векторски потпростор:

Да би смо установили да ли је неки подскуп U векторског простора V његов потпростор или не, нема потребе да провјеравамо да ли су испуњени услови (S_1)-(S_5) и услови $(M_6$-$M_{10})$ јер сљедећа теорема показује да није неопходно:

ТЕОРЕМА 1: Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{F}$ и нека је U један непразан подскуп од V. Скуп U је потпростор векторског простора V ако и само ако важи:

(i) скуп U је затворен у односу на операцију сабирања тј. за све $x, y \in U$ важи $x+y \in U$,

(ii) скуп U је затворен у односу на операцију множења скаларом из $\mathbb{F}$, тј за све $x \in U$ и све $\lambda \in \mathbb{F}$ ~~важи~~ $\lambda x \in$

Линеарна комбинација:

Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{F}$. Ако су $x_1, x_2, \dots, x_n$ неки вектори из V и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ неки скалари из $\mathbb{F}$, тада је и

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

неки вектор x из простора V. Тај вектор се назива линеарна комб. вектора $x_1, x_2, \dots, x_n$ са коеф. $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda$

Ако бисмо умјесто задатих скалара $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ узели неке друге скаларе $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ тада би линеарна

Scanned with CamScanner

комбинација вектора $x_1, x_2, \dots, x_n$ са коеф. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ дала други вектор y из простора V.

Линеал:

Скуп свих вектора из V који се могу добити као линеарне комбинације вектора $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тај скуп вектора из V назива се линеаран омотач (линеал) вектора $x_1, x_2, \dots, x_n$ и означава са $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или са спан $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Дакле:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F\}$$

Јасно је да је $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq L(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

ТЕОРЕМА 2: Ако су $x_1, x_2, \dots, x_n$ произвољни вектори из векторског простора V, тада је линеаран омотач $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ потпростора простора V.

9. Линеарна ~~зависност~~ независност, база и димензија. Теорема о збиру и пресјеку векторских простора.

Дефиниција (линеарна независност):

Нека је V векторски простор над пољем скалара $\mathbb{F}$. За векторе $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ кажемо да су линеарно независни ако из $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ слиједи $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Скуп $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ је линеарно зависан ако постоји бар један скалар $\lambda_j \neq 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$ тада ~~да~~

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

Теорема: Вектори $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ су линеарно зависни ако и само ако бар један од њих лин. комбинација преосталих вектора.

База и димензија

Дефиниција (Генератор)

Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{F}$. Скуп вектора $\{x_1, x_2, \dots x_n\} \subseteq V$ је генераторски скуп за векторски простор V ако важи

$$\mathrm{Lin}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = V$$

објашњење: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$\forall \vec{v} \in V, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + \lambda_n \vec{x_n}$

Дефиниција (база):

Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{F}$. Скуп вектора $E=\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\} \subseteq V$ је база простора V ако је E линеарно независан скуп који је уједино и генератор простора V.

Сваки простор има бесконачно много база.

Дефиниција (димензија):

Нека је скуп B база векторског простора V. Број елемената скупа B називамо димензија векторског простора.

Напомена: Ако је број елемената скупа B коначан, простор називамо коначнодимензионалан простор. У супротном имамо бесконачнодимензионалан простор.

$\dim(\mathbb{R}^n)=n$

$\dim(C[a,b])=\infty$

Теорема 2: $(V,+,\cdot)$ над $\mathbb{F}$, нека је $B=\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ база.

Сваки вектор из V се може изразити као лин. комб. вектора базе и зато пишемо да је $V=Lin(B)$.

Теорема 3: Нека је дат векторски простор $\mathbb{R}^n$. Ако су вектори $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ линеарно независни онда је скуп $B=\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ база простора $\mathbb{R}^n$.

Scanned with CamScanner

ТЕОРЕМА 4: (О ЗБИРУ И ПРЕСЈЕКУ В.П.)

Нека је $(V,+,\cdot)$ векторски простор над пољем $\mathbb{F}$, и нека су W_1, W_2 два векторска потпростора од V. Тада важи:

1. Скуп $W_1 \cap W_2 = \{\vec{z} \mid \vec{z} \in W_1 \wedge \vec{z} \in W_2\}$ је векторски простор.

2. Скуп $W_1 + W_2 = \{\vec{z} \mid \vec{z} = \vec{x} + \vec{y},\ \vec{x} \in W_1, \vec{y} \in W_2\}$ је векторски простор

3. Вриједи:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

НАПОМЕНА: Ако је $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ онда сума W_1 и W_2 се назива директна ~~збир~~ сума и означава са $W_1 \oplus W_2$

10. Дефиниција и примјер Еуклидских простора. Норма.

Дефиниција (скаларни производ):

Нека је дат векторски простор $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$. Билинеарну функцију $(\cdot,\cdot): V^2 \to \mathbb{F}$ → називамо скаларни производ ако важи:

(S_1): $\forall x, y, z \in V$, $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

(S_2): $\forall x, y \in V, \gamma \in \mathbb{F}$ $(\gamma x, y) = \gamma (x, y)$

(S_3): $\forall x, y \in V$, $(x, y) = \overline{(y, x)}$, ако је $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

(S_4): $\forall x \in V$, $(x, x) \geq 0$

(S_5): $\forall x \in V$, $(x, x) = 0 \iff x = \vec{0}$

Дефиниција: Векторски простор V над пољем $\mathbb{R}$ назива се **Еуклидов простор** ако постоји скаларни производ који дефинишемо на V, односно $(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$

Напомена: Уколико посматрамо V над пољем $\mathbb{C}$ и $(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{C}$, тада векторски простор зовемо унитарни.

Норму (интензитет) вектора $x \in V$ дефинишемо као $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ и кажемо да је норма индукована скаларним производом.

Међутим норма је „старија" од скаларног производа.

Векторски простор над којим је уведена норма назива се нормирани векторски простор.

Особине норме по дефиницији: $\|\cdot\| : V^2 \to \mathbb{R}$, $\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in F$

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

3. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$

4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ неједнакост троугла

I) Скаларни производ и норма на $\mathbb{R}^n$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ → интензитет вектора

$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

II) Скаларни производ и норма на K^n

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$

III) $C[a,b]$ - скуп непрекидних функција

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Scanned with CamScanner

11. Теорема Коши-Буњаковског. Геометрија Еуклидових простора. Питагорина теорема.

Теорема (Коши-Буњаковског):

Нека је V Еуклидов простор са скаларним производом $(\cdot,\cdot): V\times V \to \mathbb{R}$, тада за норму индуковану скаларним производом вриједи:

$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$

Доказ:

За $x, y \in V$ и $t \in \mathbb{R}$ вриједи:

$$0 \leq (x+ty)(x+ty) = (x,x) + t(x,y) + t(y,x) + t^2(y,y)$$

$$= \underbrace{(x,x) + 2t(x,y) + t^2(y,y)}_{p(t)}$$

$\|x\|^2 = (x,x)$

$$p(t) = t^2 \underbrace{\|y\|^2}_{a} + 2t\underbrace{(x,y)}_{b} + \underbrace{\|x\|^2}_{c} \geq 0$$

$p(t) > 0, \Rightarrow D < 0$

$D = b^2 - 4ac$

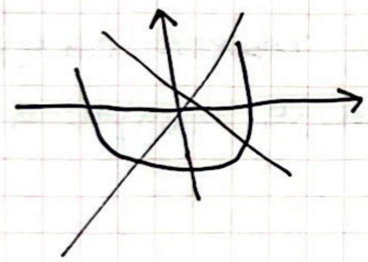
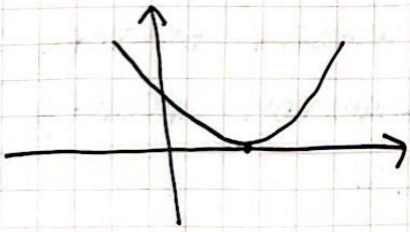
$$D = 4(x,y)^2 - 4\|y\|^2 \|x\|^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x,y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$|(x,y)| < \|x\| \|y\|$$

За једнакост су вектори колинеарни (линеарно зависни)

Scanned with CamScanner

$D=0 \quad b^2-4ac=0$

$4(x,y) - 4\|x\|^2 \|y\|^2 = 0$

$|(x,y)| = \|x\| \cdot \|y\| \quad \square$ Q.E.D.

ГЕОМЕТРИЈА ЕУКЛИДОВИХ ПРОСТОРА:

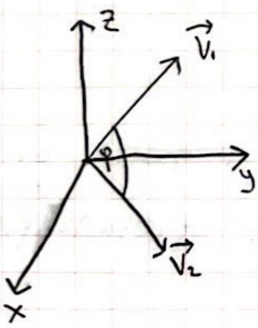
$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$

$$\boxed{\left| \frac{(x,y)}{\|x\| \|y\|} \right| \leq 1} \iff \boxed{-1 \leq \frac{(x,y)}{\|x\| \|y\|} \leq 1}$$

Дефиниција: Нека је V Еуклидов простор тада угао између два ненула вектора одређујемо као

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \|y\|}, \quad (x,y \neq 0)$$

Када посматрамо $V=\mathbb{R}^3$



$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 \ y_2^2 \ y_3^2}}}$$

Дефиниција: За ненула векторе x и y кажемо да су ортогонални у еуклидовом простору V ако је $(x,y)=0$ и означавамо са $x \perp y$.

Теорема (Питагорина Теорема):
Нека су x, y међусобно ортогонални вектори Еуклидовог простора, тада важи:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2 .$$

Доказ:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \square \text{QED.}$$

⑫ Ортонормиран скуп вектора. Грам-Шмитов поступак ортогонализације. Ортогонални комплемент.

Дефиниција1: Скуп вектора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Еуклидовог простора V је ортогоналан ако за свака два различита вектора x_i, x_j из скупа $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ вриједи да је $(x_i, x_j) = 0$, $i \neq j$

Такође, ако важи $\|x_i\| = 1$, $\forall i = 1,2,\dots,n$ тада за скуп вектора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ кажемо да је ортонормиран.

База (стандардног) простора $\mathbb{R}^3$ је ортонормирана.

Теорема 1: У Еуклидовом простору сваки ортогоналан скуп ненула вектора је линеарно независан.

Доказ: Нека је дат скуп $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ ортогоналних вектора. За $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$:

$$\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}+\dots+\lambda_n\vec{v_n} \quad (\text{ЕП}1)$$

$(\text{ЕП}1) \,/\, \cdot(\ ,v_j)$

$$\lambda_1\underbrace{\cancel{(\vec{v_1},\vec{v_j})}}_{0}+\lambda\underbrace{\cancel{(\vec{v_2},\vec{v_j})}}_{0}+\dots+\lambda_j(\vec{v_j},\vec{v_j})+\dots+\lambda_n\underbrace{(\vec{v_n},\vec{v_j})}_{0}=\vec{0}$$

$$\lambda_j\underbrace{(\vec{v_j},\vec{v_j})}_{\neq 0}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_j=0} \quad j=1,2,\dots,n$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$, скуп S је линеарно независан скуп □

Грам-Шмитов поступак ортогонализације:

Теорема 2: Нека је дат Еуклидов простор V над пољем $\mathbb{R}$. Ако је скуп вектора $\{\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a_n}\}$ линеарно независан скуп, тада формирамо скуп ортогоналних вектора на следећи начин:

$$\vec{b_1}=\vec{a_1}$$

$$\vec{b_2}=\vec{a_2}-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}\cdot\vec{b_1}$$

$$\vdots$$

$$\vec{b_n}=\vec{a_n}-\frac{(a_n,b_{n-1})}{(b_{n-1},b_{n-1})}\vec{b_{n-1}}-\dots-\frac{(a_n,b_1)}{(a_n,b_1)}\cdot\vec{b_1}$$

Тада је скуп вектора $\{\vec{b_1},\vec{b_2},\dots,\vec{b_n}\}$ ортогоналан,

Ортогонални комплемент:

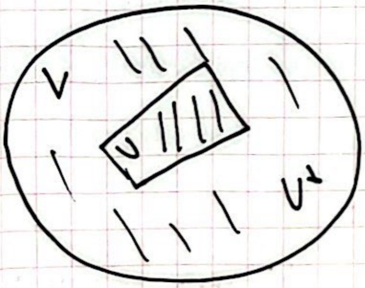
Нека је дат Еуклидов простор V над пољем $\mathbb{R}$. За непразан подскуп $S \subseteq V$ посматрамо скуп свих вектора из V који су ортогонални на сваки вектор из S:

$$S^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in S,\ (x,y)=0\}$$

Скуп $S^\perp$ називамо ортогонални комплемент од скупа S. $S^\perp$ је векторски потпростор од V без обзира да ли је сами S скуп или потпростор.

Теорема3: Ако је $U \subseteq V$ потпростор од Еуклидског простора тада је $U^\perp \subseteq V$ такође векторски потпростор и вриједи:

$$V = U + U^\perp, \quad U \cap U^\perp = \{0\}$$



$\vec{z} \in V,\ U \subseteq V$

$\exists x \in U,\ y \in U^\perp$

$\boxed{\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}}$ на јединствен начин

④ ЛИНЕАРНА ПРЕСЛИКАВАЊА И МАТРИЦЕ

13. Ранг матрице. Степенаста и редукована форма. Кронекер-Капелијева теорема.

Дефиниција (подматрица):

Подматрица је матрица добијена брисањем неких врста и(или) колона почетне матрице.

Дефиниција (ранг): Највећи ред несингуларних квадратних подматрица матрице $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ назива се ранг матрице A и означава са $\operatorname{rank} A$.

Нула матрица има ранг нула, $\operatorname{rank}[0] = 0$.

Примјер:

Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ има ранк 2, $\det A = 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$

~~Дефи~~

Дефиниција (елементарне трансформације):

За матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ елементарне трансформације су

1) замјена мјеста двије врсте или колоне
2) множење једне врсте (колоне) скаларом $\lambda \neq 0$
3) додавање елемената једне врсте (колоне), претходно помножен неким скаларом λ одговарајућим елементима друге врсте (колоне).

Теорема 1: Елементарне трансформације не мијењају ранг матрице.

Теорема 2: За матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ важи да је ранг $(A) =$ ранг (A^T)
$rank(A) = rank(A^T)$

СТЕПЕНАСТА форма

За матрицу $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ кажемо да има степенасту форму у односу на врсте ако она испуњава следеће услове:

1) свака нула врста матрице S налази се испод њених ненула-врста.
2) ако се први ненула елемент i-те врсте матрице S налази на позицији (i,j) тада сви елементи који се налазе на позицијама (k,l) гдје је $k > i$, $l \leq j$, једнаки нули.

Напомена: Први ненула елемент врсте се зове пивот. Број пивота степенасте форме је rank S.

Напомена: $A_{m \times n} \mid I_{m \times m}$

$$\downarrow \text{ел. трансф. врста} \Rightarrow \boxed{Q \cdot A = S}$$

$S_{m \times n} \mid Q_{m \times n}$

РЕДУКОВАНА СТЕПЕНАСТА ФОРМА

Уколико у степенасту форми матрице су испуњени следећи услови:

1° пивот је једнак јединици

2° сви елементи у колони изнад пивота (осим прве врсте) су једнаки нули, тада кажемо да матрица узима редуковану степенасту форму.

Теорема 3: Кронекер-Капелијева теорема

Систем:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

односно систем $Ax=b$ је сагласан акко $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, гдје је $A=[a_{ij}] \in M_{m,n}(F)$ матрица тог система и $B=[A|b] \in M_{m,n+1}(F)$ проширена матрица система.

Ако је $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, тада важи:

1° Ако је $r=n$, тада је дати систем одређен, тј. он има јединствено рјешење (случај 1);

2° Ако је $r<n$ тада је дати систем неодређен, тј. он има бесконачно много рјешења (случај ∞).

Теорема 3: Нека $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Систем $A\vec{x} = \vec{b}$ има бар једно рјешење акко $\vec{b} \in C(A)$.

Доказ:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow [C_1 | C_2 | \dots | C_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{b}$$

$$x_1 \vec{C_1} + x_2 \vec{C_2} + \dots + x_n \vec{C_n} = \vec{b}$$

ово је могуће акко

$b \in Lin\{\vec{C_1}, \vec{C_2}, \dots, \vec{C_n}\} = C(A)$

Ако вриједи услов и колоне линеарно независне има јединствено рјешење. Ако су зависне ∞.

14) Фундаментални потпростори матрица.

Посматрамо матрицу $A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$.

Можемо посматрати као пресликавање $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\vec{x} = \vec{y} \in \mathbb{R}^2$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}^2}$

Посматрамо стандардне базе $\{e_1, e_2, e_3\} \in \mathbb{R}^3$, $\{f_1, f_2\} \in \mathbb{R}^2$,

$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, $f_1 = (1,0)$, $f_2 = (0,1)$

$\boxed{C_k = A \cdot e_k}$ колоне матрице A $\quad A = [C_1 | C_2 | C_3]$

$\boxed{V_k = A^T \cdot f_k}$

$A = \begin{bmatrix} V_1 \\ \hline V_2 \end{bmatrix}$ $\quad \boxed{V_k = f_k^T \cdot A}$

Нека је дата матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, посматрамо пресликавање $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Колоне матрице A ћемо означити са C_k, $C_k = A \cdot e_k$, $e_k \in \mathbb{R}^n$, а врсте означавамо са $V_k = A^T \cdot f_k$, $f_k \in \mathbb{R}^m$.

Пишемо још $A = [C_1 | C_2 \ldots | C_n]$ или $A = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$

Дефиниција (фундаментални потпростор):

Нека је дата матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, за пресликавање $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дефинишемо 4 потпростора

1) Простор колона матрице

$$C(A) = Lin\{\vec{C_1}, \vec{C_2}, \ldots, \vec{C_n}\}, \ C(A) \subseteq \mathbb{R}^m$$

2) ПРОСТОР ВРСТА МАТРИЦЕ А:

$$C(A^T) = \mathbb{R}(A) = Lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}, \quad C(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$$

3) НУЛА ПРОСТОР МАТРИЦЕ А

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^T\vec{y} = \vec{0}\}, \quad N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

4) ЛИЈЕВА НУЛА ПРОСТОР МАТРИЦЕ А:

$$N(A^T) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T\vec{y} = \vec{0}\} \quad N(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$$

ОВО СУ ФУНДАМЕНТАЛНИ ПОТПРОСТОРИ

ОВО СУ ФУНДАМЕНТАЛНИ ПОДПРОСТОРИ

Лако се покаже да је N(A) векторски ~~п~~ потпростори од $\mathbb{R}^n$

а) $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in N(A) \Rightarrow A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in N(A)$

б) $\vec{x} \in N(A) \Rightarrow A \cdot \lambda\vec{x} = \lambda A\vec{x}$ $\quad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda x \in N(A)$

Ако $y \in N(A^T) \Rightarrow \underbrace{A^T \cdot y = \vec{0} \Leftrightarrow y^T \cdot A = \vec{0}}_{\text{збир овога је лијеви потпростор}}$

користили смо $(AB)^T = B^T A^T, \quad (A^T y)^T = y^T A$

ТЕОРЕМА 1 (Фундаментална теорема линеарне алгебре I дио)

Нека је $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ матрица ранга r тада:

1) $\dim C(A) = \dim R(A) = r$
2) $\dim N(A) = n-r$
3) $\dim N(A^T) = m-r$

* исти број линеарно независних врста и колона

ТЕОРЕМА 2 (ФТЛА II дио):

Нека је $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ матрица, тада вриједи:

1) $N(A)$ је ортогоналан на простор $R(A)$ и вриједи:

$$\boxed{\dim N(A) + \dim R(A) = n}$$

2) $N(A^T)$ је ортогоналан на $C(A)$ и вриједи:

$$\boxed{\dim (N(A^T)) + \dim C(A) = m}$$

ДОКАЗ (I дио) Неко $\vec{x} \in N(A)$, тада $A\vec{x} = \vec{0}$, односно $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \vec{X}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \vec{V_1}\vec{X} \\ \vec{V_2}\vec{X} \\ \vdots \\ \vec{V_n}\vec{X} \end{bmatrix} = \vec{0}$

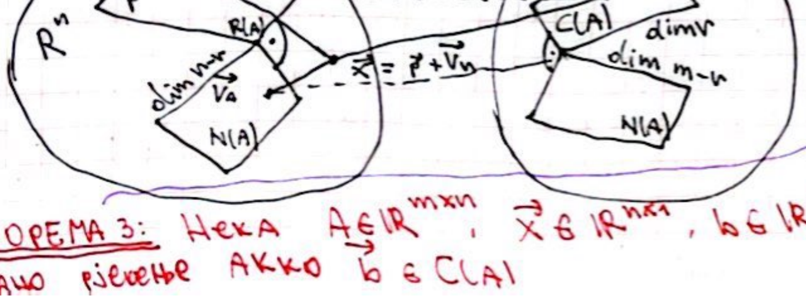
$\boxed{\vec{V_k} \cdot \vec{x} = \vec{0}}$ $k = 1, 2, \dots, n$

→ ортогоналан на простор

$R(A) = Lin\{\vec{V_1}, \vec{V_2}, \dots, \vec{V_n}\}$ $\vec{X} \in N(A)$

$N(A) = (R(A))^{\perp}$, $N(A) \cap R(A) = \{\vec{0}\}$

Шира слика $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$



ДОКАЗ:

$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow [C_1|C_2|..|C_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{b}$

$x_1\vec{C_1} + x_2\vec{C_2} + \dots + x_n\vec{C_n} = \vec{b}$

ово је могуће акко $b \in Lin\{\vec{C_1}, \vec{C_2}, \dots, \vec{C_n}\} = C(A)$

Ако вриједи услов и колоне линеарно независне има јединствено рјешење, ако су зависне ∞.

ТЕОРЕМА 3: Нека $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Систем $A\vec{x} = \vec{b}$ има гарантирано рјешење акко $\vec{b} \in C(A)$

15. ЛИНЕАРНА ПРЕСЛИКАВАЊА. ЈЕЗГРО И СЛИКА. ТЕОРЕМА О ОДРЕЂЕНОСТИ ЛИНЕАРНОГ ОПЕРАТОРА.

Нека је дато поље $\mathbb{F}$ и нека су V_1 и V_2 векторски простори над пољем $\mathbb{F}$. Пресликавање $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ такво да $\forall x, y \in V_1$, $\lambda \in \mathbb{F}$ вриједи:

1.) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) \longrightarrow$ адитивност
2.) $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) \longrightarrow$ хомогеност

$\left.\begin{array}{l} \text{адитивност} \\ \text{хомогеност} \end{array}\right\} \mathcal{A}(\lambda x + \beta y) = \lambda \mathcal{A}(x) + \beta \mathcal{A}(y)$

се назива линеарно пресликавање.

За линеарни оператор $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ формирамо два скупа:

1) језгро линеарног оператора

$$\ker(\mathcal{A}) = \{x \in V_1 \mid \mathcal{A}(x) = 0\} \subseteq V_1$$

2) слика линеарног оператора

$$\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \{y \in V_2 \mid (\exists x \in V_1),\ y = \mathcal{A}(x)\} \subseteq V_2$$

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ одговара матрици $\mathbb{R}^{m \times n}$
$\operatorname{Im} \mathcal{A} \Leftrightarrow C(A)$
$\ker \mathcal{A} \Leftrightarrow N(A)$
$\operatorname{Im} \mathcal{A}^T \Leftrightarrow C(A^T)$
$\ker \mathcal{A}^T \Leftrightarrow N(A^T)$
$\mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow A^{-1}$
$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ одговара $A_{n \times n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

За векторске просторе V_1 и V_2 над пољем $\mathbb{F}$ и линеарни оператор $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ важи:

1) $\mathcal{A}(0_{V_1}) = 0_{V_2}$, $0_{V_1} \in V_1$, $0_{V_2} \in V_2$

2) $\ker(\mathcal{A}) \subseteq V_1$ одређује векторски потпростор

3) $\operatorname{Im}(\mathcal{A}) \subseteq V_2$ одређује векторски потпростор

Теорема 1: Нека су V_1 и V_2 коначно димензиони векторски простор над пољем $\mathbb{F}$. Ако је $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ база простора V_1 и ако је $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ низ вектора из V_2, тада постоји тачно један линеарни оператор $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$, тако да вриједи: $\mathcal{A}(a_k) = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ако знамо у шта се слика база → знамо линеарни оператор

16. МАТРИЦА ПРЕЛАСКА. МАТРИЦА ЛИНЕАРНОГ ОПЕРАТОРА. АЛГОРИТАМ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ МАТРИЦЕ ЛИНЕАРНОГ ОПЕРАТОРА.

Пресликавање $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

$\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y})$ НАЗИВАМО ЛИНЕАРНИ ОПЕРАТОР

Нека су V_1, V_2 коначно димензиони простори над пољем $\mathbb{F}$, такви да је $B_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ база за V_1, и $B_2 = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ база за V_2. За линеарни оператор $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ посматрамо

$\mathcal{A}(b_k) = d_k$, $k = 1, 2, \dots, n$

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathcal{A} \longleftrightarrow A$

$\boxed{A_{m \times n}}$

Тада постоји скалари $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ такви да

$$\mathcal{A}(b_1) = d_1 = \alpha_{11} c_1 + \alpha_{12} c_2 + \dots + \alpha_{1m} c_m$$
$$\mathcal{A}(b_2) = d_2 = \alpha_{21} c_1 + \alpha_{22} c_2 + \dots + \alpha_{2m} c_m$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}(b_n) = d_n = \alpha_{n1} c_1 + \alpha_{n2} c_2 + \dots + \alpha_{nm} c_m$$

Матрица:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

се назива матрица линеарног ~~оператора~~ пресликавања.

Scanned with CamScanner

Матрица преласка

Посматрамо стандардну базу $B = \{\overset{e_1}{(1,0,0)}, \overset{e_2}{(0,1,0)}, \overset{e_3}{(0,0,1)}\}$ и

$B_F = \{\overset{f_1}{(0,1,1)}, \overset{f_2}{(1,0,1)}, (1,1,0)\}$. Посматрамо вектор $\vec{v} = (1,2,3) \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = (1,2,3) = 1\cdot\vec{e_1} + 2\cdot\vec{e_2} + 3\cdot\vec{e_3}$

Вектор $(1,2,3)_F$ нам представља $(1,2,3)_F = 1f_1 + 2f_2 + 3f_3 = (5,4,3)$

у станд. бази

$$F = [f_1 | f_2 | f_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1,2,3)_F = F \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Матрица F је матрица преласка са B_F на станд. базу B.

$$\begin{tikzcd} B_F \arrow[r, bend left, "F"] & B \arrow[l, bend left, "F^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Занима нас $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ у координатама базе B_F.

Посматрамо $F \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = F^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{B = F \cdot B_F}$ → са нестандардне на стандардну

$\boxed{B_F = F^{-1} \cdot B}$ → са стандардне на нестандардну

F^{-1} је матрица преласка са B на B_F.

Када тражимо матрицу преласка са нестандардне B_F на нест. B_G формирамо матрицу G и F тако што базне векторе ставимо у колоне одг. матрице.

$$B_G \xrightarrow{G} B$$

$F \cdot \underbrace{\vec{x}_F}_{\text{вектор из } B_F} = G \cdot \vec{x}_G$ → вектор из B_G

Ако је дат x_G у бази G, тада је $x_F = F^{-1}G \cdot x_G$

Матрица преласка $B_G \xrightarrow{F^{-1}G} B_F \Rightarrow \boxed{B_F = F^{-1} \cdot G \cdot B_G}$

Scanned with CamScanner

Алгоритам за одређивање матрице линеарног оператора

* Питање: Како одредити матрицу линеарног оператора $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, B_G база $\mathbb{R}^n$ (није стандардна), B_F база $\mathbb{R}^m$ (није стандардна) у односу на базе B_G и B_F.

* Одговор: Знамо одредити матрицу A у односу на стандардне базе B_m, B_n

- формирамо матрице G и F чије су колоне одг. базни вектори B_G и B_F.

- Користећи знање о матрици преласка довољно је да ријешимо матричну једначину $A \cdot G = F \cdot A_{GF}$

A - матрица лин. оператора у односу на станд. базе G, F - „базне" матрице B_G и B_F

A_{GF} - матрица линеарног оператора у односу на B_G и B_F

$$\boxed{A_{GF} = F^{-1} \cdot A \cdot G}$$

17. Солствена вриједност и солствени вектор. Карактеристични полином. Солствени потпростор.

Нека је дата квадратна матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$. За број $\lambda \in \mathbb{R}$ кажемо да је солствена вриједност матрице A ако постоји ненула вектор $\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такав да вриједи $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$. Такав вектор $\vec{v}$ називамо солствени вектор. Сваки уређен пар $(\lambda, \vec{v})$ који чине солствена вриједност и солствени вектор назива се солствени пар. Скуп свих солствених вриједности назива се спектар матрице A и означава се са $\sigma(A)$.

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\},\ A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \}$$

За матрицу $A \in M_n(\mathbb{F})$ дефинишемо карактеристични полином

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

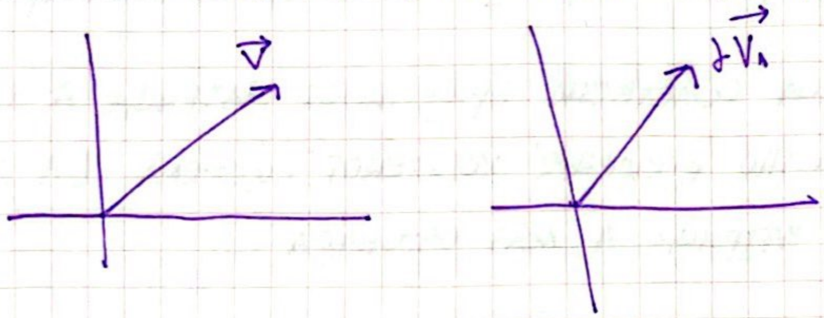
Број $\lambda \in \mathbb{C}$ је солствена вриједност матрице акко је λ нула солственог полинома

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \cdot \vec{v} \neq 0$$
$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I) \cdot \vec{v} = 0$$
$$p_A(\lambda) \neq 0$$

Ако је λ нула карактеристичног полинома $p_A(\lambda)$ вишеструкости k тада кажемо да је λ солствена вриједност матрице A чија је алгебарска вишеструкост k. Ако је λ једна солствена вриједност матрице A тада је свако нетривијално рјешење хомогеног система $(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ солствени вектор матрице

Ако је $\vec{v}$ сопствени вектор матрице A за сопствене вриједности $\lambda \in \mathbb{F}$ тада $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, вриједи за $\alpha \in \mathbb{F}$

$$A(\alpha\vec{v}) = \alpha A\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{v}),$$ односно $\alpha\vec{v}$ је вектор



Шта више може се десити да једној сопственој вриједности одговара више линеарно независних сопствених вектора

$$A\vec{v_1} = \lambda\vec{v_1} \qquad A\vec{v_2} = \lambda\vec{v_2} \qquad A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

Било која линеарна комбинација ова два вектора је такође сопствени вектор.

Дефиниција: За матрицу A дефинишемо карактеристичан полином:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Теорема1: Број $\lambda \in \mathbb{C}$ је сопствена вриједност матрице A, акко је то нула његовог полинома.

Доказ: $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists \vec{v} \neq 0$

$$A\cdot\vec{v} = \lambda\cdot\vec{v} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\cdot\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow p_A(\lambda)=0$$

Дефиниција: Ако је λ нула карактеристичног полинома $P_A(\lambda)$ вишеструкости k тада знамо да је λ сопствена вриједност матрице A која је алгебарска вишеструкост k.

Ако је λ једина сопствена вриједност матрице A тада је свако нетривијално рјешење хомогеног система $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$ сопствени вектор матрице A која одговара λ.

Означавамо са S_λ скуп свих сопствених вектора матрице A који одговарају сопственој вриједности λ

Тада $S_\lambda \cup \{0\} = N(A-\lambda I)$ и називамо га сопствени потпростор матрице A, који одговара λ.

Димензију овог простора $\dim(N(A-\lambda I))$ називамо геометријска вишеструкост сопствене вриједности λ.

Scanned with CamScanner

Димензију овог простора $\dim(N(A-\lambda I))$ називамо геометријска вишеструкост сопствене вриједности λ.

Теорема 2: Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ је сингуларна акко је нула њена сопствена вриједност.

Доказ: $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$ за $\lambda=0$

$A\vec{x}=\vec{0}$ - хомоген систем, има нетривијална рјешења акко је $\det A=0$ (сингуларно)

$0\in\sigma(A) \Leftrightarrow \exists x\neq 0,\ A\vec{x}=0\vec{x} \Leftrightarrow \exists x,\ A\vec{x}=0 \Leftrightarrow \det A=0$

Посљедица: Матрица је регуларна акко $0\notin\sigma(A)$.

Теорема 3: Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сопствене вр. матрице $A_{n\times n}$. Означимо са $tr(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ траг матрице A и са $\det A$ детерминанту.
ада вриједи да је $trA=\sum \lambda_k$ и $\det A=\prod \lambda_k$.

(18) Теорема о сопственим карактеристикама матрице $p(A)$, лема о линеарној независности сопствених вектора.

Ако је $p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$ произвољан полином и нека квадратна матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ тада је

$$p(A) = a_k \cdot A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

такође квадратна матрица. Успоставићемо везу између A и $p(A)$.

Теорема 1: Нека је $p \in \mathbb{C}_k(z)$ произвољан полином и $A \in M_n(\mathbb{C})$ произвољна матрица. Ако је $(p(\lambda), \vec{x})$ сопствени пар матрице $p(A)$.

Доказ: Нека је $(\lambda, \vec{x})$ сопствени пар од A, тј. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ па вриједи и да је $A^j \vec{x} = A^{j-1} \cdot A\vec{x} = A^{j-1} \lambda \vec{x} = \lambda A^{j-1} \cdot \vec{x}$, настављамо процес $A^j \vec{x} = \lambda^j \vec{x}$

Закључујемо да је $(\lambda^j, \vec{x})$ сопствени пар за A^j. Имајући у виду ове релације добијамо да је:

$$p(A) \cdot \vec{x} = a_k \lambda^k \cdot \vec{x} + a_{k-1} \lambda^{k-1} \vec{x} + \dots + a_1 \lambda \vec{x} + a_0 \vec{x},$$ односно

вриједи да је:

$$p(A) \cdot \vec{x} = (a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) \vec{x},$$

што значи да је $p(\lambda)$ сопствена вриједност за матрицу $p(A)$.

Теорема 3: Ако је $(\lambda, \vec{v})$ сопствени пар инвертибилне матрице A, тада је (λ^{-1}, v) сопствени пар матрице A^{-1}.

Доказ: Нека је $(\lambda, \vec{v})$ сопствени пар матрице A, тј. $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$. Пошто је A инвертибилан, $\exists A^{-1}$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \vec{v} = A^{-1} \lambda \vec{v}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \vec{v} = \lambda A^{-1} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \lambda A^{-1} \cdot \vec{v} \quad | : \lambda, \ \lambda \neq 0$$

јер је инвертибилан

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{v}} \quad \square$$

Ако је $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_j \notin \sigma(A)$

$$\sigma(A^{-1}) = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1} \dots \lambda_n^{-1}\}$$

Лема: Сопствени вектори матрице $A \in M_n(\mathbb{C})$ који одговарају различитим сопственим вриједностима су линеарно независан.

Доказ: Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ различите сопствене вриједности матрице A и нека су $x_1, x_2, \dots, x_k$ одговарајући сопствени вектори.

Претпоставимо супротно, $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_k}$ линеарно зависни вектори.
Постоје скалари $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ који нису сви једнаки нули.
(бар два скалара су различити од нуле).

$$\gamma_1 \vec{x_1} + \gamma_2 \vec{x_2} + \dots + \gamma_k \vec{x_k} = \vec{0} \qquad (L1)$$

$$A(\gamma_1 \vec{x_1} + \gamma_2 \vec{x_2} + \dots + \gamma_k \vec{x_k}) = \gamma_1 A \vec{x_1} + \gamma_2 A \vec{x_2} + \dots + \gamma_k A \vec{x_k}$$
$$= \gamma_1 \lambda_1 \vec{x_1} + \gamma_2 \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + \gamma_k \lambda_k \vec{x_k}$$

Помножимо једначину L_1 са матрицом A и добијамо

$$\gamma_1 \lambda_1 \vec{x_1} + \gamma_2 \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + \gamma_k \lambda_k \vec{x_k} = \vec{0} \qquad (L2)$$

Помножимо L_1 са λ_k, затим посматрамо $L_2 - L_1$:

$$\gamma_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \vec{x_1} + \gamma_2 (\lambda_2 - \lambda_k) \vec{x_2} + \dots + \gamma_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \vec{x_{k-1}} = \vec{0}$$

Пошто су $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ различите вриједности закључујемо да су $x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}$ линеарно зависни. Понављајући поступак добићемо да су $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_{k-2}}$ линеарно зависни.
Поновимо поступак довољан број пута, добићемо да је вектор $\vec{x_1}$ линеарно завистан сам са собом, а ово је контрадикција. $\square$

Scanned with CamScanner

(19) Сличност матрица и сопствене карактеристике. Спектрална декомпозиција матрице.

Квадратне матрице $A, B \in M_n(F)$ су сличне, у ознаци $A \sim B$, ако постоји регуларна матрица P тако да је $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
Да би матрице биле сличне морају имати исте сопствене вриједности и исти број сопствених вектора.
Сличне матрице имају исти оператор.

Доказ: Нека су A и B сличне матрице

$$B = P^{-1}AP$$

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| =$$
$$= \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \det(P) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$$

Дијагоналну матрицу означавамо са $D = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

$$p_D(\lambda) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) \dots (a_n - \lambda)$$
$$\lambda_1 = a_1, \ \lambda_2 = a_2 \ \dots \ \lambda_n = a_n$$

Матрица $A \in M_n(F)$ се може дијагонализовати ако има n линеарно независних сопствених вектора.

$$S = [X_1 | X_2 | \dots | X_n]$$
$$\operatorname{rank} S = n, \ \det S \neq 0$$

Scanned with CamScanner

$$S^{-1}AS = S^{-1}\cdot A\cdot[\vec{x}_1 | \vec{x}_2 | \dots | \vec{x}_n]$$

$$= S^{-1}[A\vec{x}_1 | A\vec{x}_2 | \dots | A\vec{x}_n]$$

$$= S^{-1}[\vec{x}_1 | \vec{x}_2 | \dots | \vec{x}_n]\cdot\Lambda \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \Lambda$$

$S \mid S^{-1}AS = D \qquad S = [\vec{S}_1 | \vec{S}_2 | \dots \vec{S}_n]$

$$\boxed{AS = SD}$$

$$A = [\vec{S}_1 | \vec{S}_2 | \dots | \vec{S}_n] = [\vec{S}_1 | \vec{S}_2 | \dots | \vec{S}_n]D$$

$$[A\vec{S}_1 | A\vec{S}_2 | \dots | A\vec{S}_n] = [d_1\vec{S}_1 | d_2\vec{S}_2 | \dots | d_n\vec{S}_n]$$

$$\Rightarrow \boxed{A\cdot\vec{S}_k = d_k\cdot\vec{S}_k} \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

$\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_n \rightarrow$ сопствени вектори матрице A

$d_1, d_2, \dots, d_n \rightarrow$ сопствене вриједности

Ако матрица има n линеарно независних вектора $x_1, x_2 \dots x_n$ онда је можемо разложити у спектралну декомпозицију

$$\boxed{A = S\cdot\Lambda\cdot S^{-1}}$$

S → сопствени вектори по колонама

$$\boxed{A^n = S\cdot\Lambda^n\cdot S^{-1}}$$

Када не можемо да разложимо матрицу у спектралну декомпозицију тада користимо декомпозицију $A = M\cdot J\cdot M^{-1}$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots \; J_n \end{bmatrix} \sim \text{САСТАВЉЕНО ОД ЖОРДАНОВИХ}$$

Scanned with CamScanner

(20) Кejл- ХАМИЛТОНОВА ТЕОРЕМА. ПРИМЈЕР.

Нека је A квадратна матрица реда n и нека је карактеристичан полином матрице A:

$$P_n(A) = \det(A - \lambda I) = d_n \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1 n + d_0$$

тада вриједи $P_n(A) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot A^k = \vec{0}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^4 \text{- линеарне комбинације } A^2, A, I$$

$$P_3(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28$$

ТЕОРЕМА $\Longrightarrow$

$$-A^3 + 12A^2 - 39A + 28I = 0$$

$$A^3 = 12A^2 - 39A + 28I$$

$$A^4 = 12(12A^3 - 39A + 28I) + 39A^2 + 28A$$

$$A^4 = 105A^2 - 440A + 336I$$

⑥ ЕЛЕМЕНТИ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

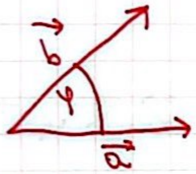
21 СКАЛАРНИ, ВЕКТОРСКИ И МЈЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА.

Скаларни производ:

Скаларни производ $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ је:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$



$\varphi=\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални $(a\perp b)$ тада је $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Особине скаларног производа:

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$
4. $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}(\lambda\vec{b})$, $\lambda\in\mathbb{R}$
5. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|<|\vec{a}||\vec{b}|$

За скаларни производ вектора стандардне базе $\vec{i}=\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{j}=e_2=(0,1,0)$ и $\vec{k}=\vec{e_3}=(0,0,1)$ вриједи

$\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$

$\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

Векторски производ:

Векторски производ вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ у ознаци $\vec{a}\times\vec{b}$ је одређен на слиједећи начин:

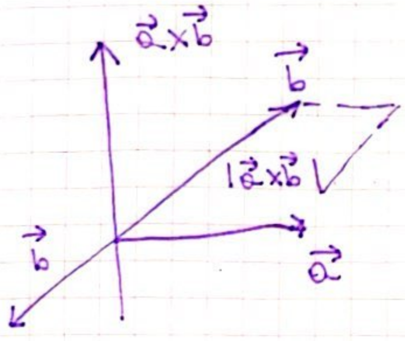
1) $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

2) интензитет вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ је

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

3) правац вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ је такав да вектори $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ чине триједар десне орјентације:

4) смјер вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ је такав да вектори $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ чине триједар десне орјентације:



Површина паралелограма одређена са $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је $P=|\vec{a}\times\vec{b}|$. Ако је $\vec{a}\times\vec{b}=0$, тада су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни, односно $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Особине векторског производа:

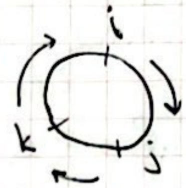
1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
3. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
5. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Векторски производ вектора стандардне базе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$i \times i = j,\quad j \times j = j,\quad k \times k = j$

$i \times j = k,\quad j \times k = i,\quad k \times i = j$

$k \times j = i,\quad i \times k = -j,\quad j \times i = -k$



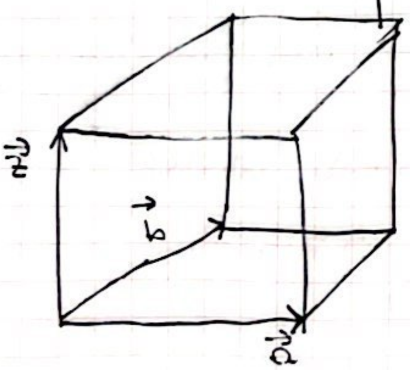
Мјешовити производ вектора:

Скаларни производ векторског производа $\vec{a} \times \vec{b}$ са вектором $\vec{c}$ се назива мјешовити производ вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

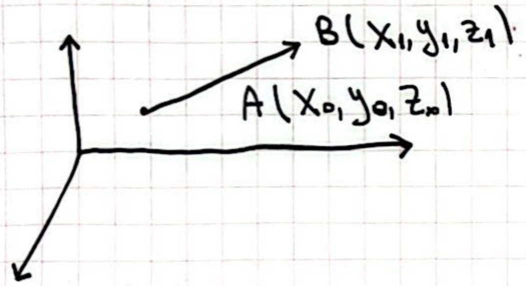
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ тада је

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



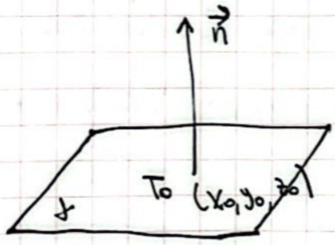
22) Права и раван. Однос праве и равни. Удаљеност равни (праве) од тачке.



Ако су $\overset{\text{дате}}{\text{тачке}}$ $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$ тада је

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{AB} &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2}\end{aligned}}$$

Посматрамо раван α, $T \in \alpha$, знамо вектор нормале n



једначина равни:

$$\boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0}$$

$\vec{n} = (A, B, C)$

$$Ax + By + Cz \underbrace{- Ax_0 - By_0 - Cz_0}_{-D} = 0$$

Општи облик једначине равни $Ax + By + Cz + D = 0$.

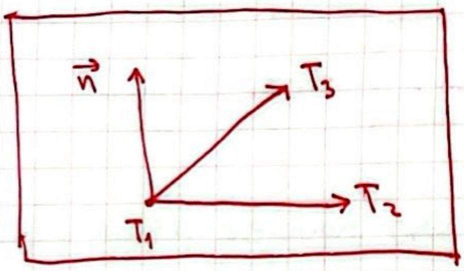
Ако је $D = 0 \Rightarrow$ раван пролази кроз координатни почетак.

- Раван се може задати у параметарском облику

$$\boxed{r(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta, A\alpha + B\beta + E)} \quad A, B, E \in \mathbb{R}$$

Раван може бити одређен и са 3 неколинеарне тачке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_3(x_3, y_3, z_3)$. У том случају једначина равни гласи:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

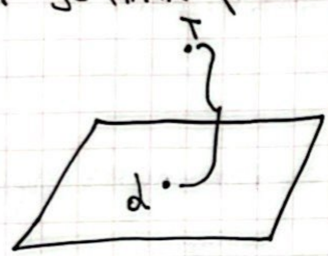


$$\vec{n} = \overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3}$$

$$T_1 = (x, y, z)$$

- Удаљеност тачке од равни

Нека је дата раван $\gamma: Ax + By + Cz + D = 0$ и $T(x_0, y_0, z_0)$



$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

- Угао између двије равни

Нека су дате 2 равни: $\gamma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

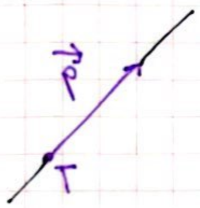
$\gamma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Вектори нормала су: $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$

$\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{\vec{n_1}\,\vec{n_2}}{|n_1||n_2|}}$$

Нека је дата тачка $T(x_0, y_0, z_0)$ која припада правој p и вектор правца $\vec{p} = (m, n, l)$



Општи облик једначине праве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}$$

Параметарски облик праве је:

$$\boxed{r(t) = (mt + x_0,\ nt + y_0,\ lt + z_0)} \quad t \in \mathbb{R}$$

Права може бити задана као пресјек двије равни

$$\gamma_1:\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\gamma_2:\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

рјешење система је ПАРАМЕТАРСКИ облик праве.

Угао између двије праве је одређен са векторима правца.
Посматрано вектор правца $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$ и угао.

$$\boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{p_1} \cdot \vec{p_2}}{|p_1||p_2|}\right)}$$

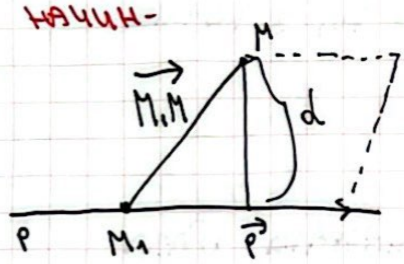
Удаљеност тачке од праве:

$$\boxed{p:\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}}$$

I начин - Нађемо праву g која пролази кроз тачку M и сијече права p под углом од $90°$. Нађемо пресјек правих p и g, тј. $p \cap g$.

Одредимо удаљеност између M и T

II начин -



$\vec{p} = (m, n, l)$

$M_1 \in p$

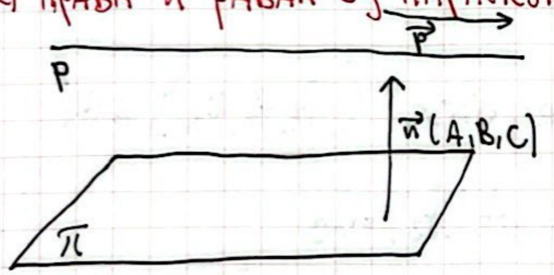
$\overrightarrow{MM_1} = ?$

$|\overrightarrow{M_1M} \times \vec{p}|$

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{M_1M} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}}$$

Однос праве и равни:

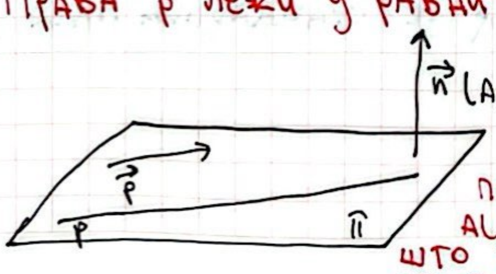
а) права и раван су паралелни



Овдје су вектори $\vec{p} = (l, m, n)$ и $\vec{n}(A,B,C)$ међусобно нормални, па је:

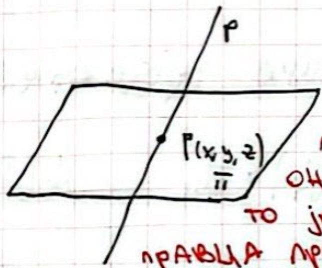
$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{p} = 0 \rightarrow Al + Bm + Cn = 0}$$

б) Права p лежи у равни π



Овдје мора да важе 2 услова:
прво да код паралелности буде
$Al + Bm + Cn = 0$, а онда да је $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$
што значи да тачка која припада правој
припада и равни.

в) права продире раван



Ако права p продире раван π онда је $Al + Bm + Cn \neq 0$ то јест вектори правца праве и вектор нормалности равни нису међусобно нормални.

Scanned with CamScanner

23. МАТРИЦЕ ТРАНСФОРМАЦИЈА У ПРОСТОРУ. МАТРИЦА СКАЛИРАЊА. СИМЕТРИЧНЕ МАТРИЦЕ И ОСОБИНЕ.

Посматрамо линеарна пресликавања $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $\mathcal{B}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Као што знамо њима одговарају матрице $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Матрице трансформација одређујемо на 3 начина

① Посматрамо $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\mathcal{A}(e_k) = Ae_k$, e_k стандардна база

Матрицу A добијемо колоне слика

$$A = [\,\mathcal{A}(e_1) \mid \mathcal{A}(e_2) \mid \mathcal{A}(e_3)\,]$$

② Одредимо сопствене вриједности и векторе те затим искористимо сопствену декомпозицију (ако постоји)

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

③ Одредимо пројектовање једне базе $\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\mathcal{A}(f_1) = d_1 \quad \mathcal{A}(f_2) = d_2 \quad \mathcal{A}(f_3) = d_3$

Одређујемо матрицу $B = \begin{bmatrix} f_1 \\ \hline f_2 \\ \hline f_3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} d_1 \\ \hline d_2 \\ \hline d_3 \end{bmatrix}$, $A = (B^{-1}C)^T$

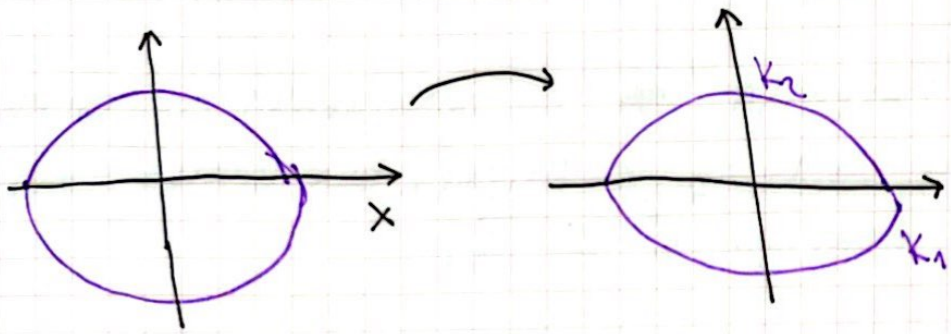
има инверз јер је стандардна база.

Матрица скалирања

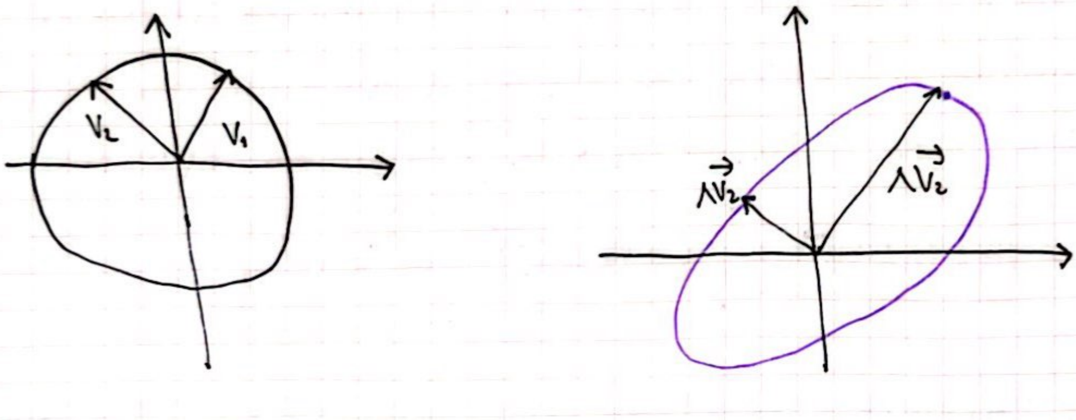
Матрица скалирања за коефицијент k, $k>0$ у односу на x осу и $k_2>0$ у односу на y осу.

$$A=\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Доказ: $\left.\begin{array}{l} A(1,0)=(k_1,0) \\ A(0,1)=(0,k_2) \end{array}\right\} A=\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$

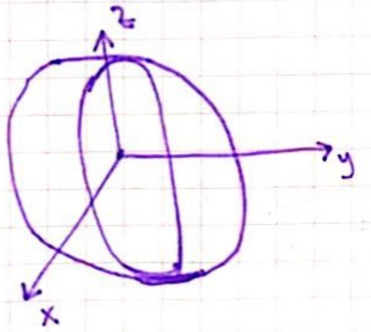


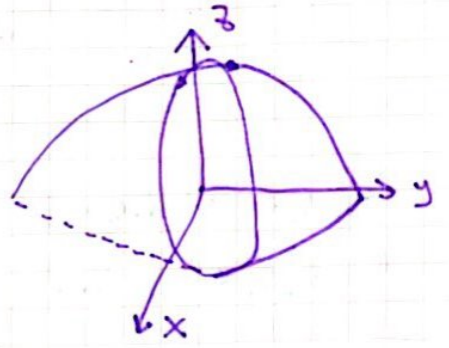
Напомена: Матрица у односу на векторе $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ за скале $\lambda_1>0$ и $\lambda_2>0$ је симетрична матрица са сопственим вриједностима λ_1 и λ_2 и сопственим векторима $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.



Матрица скалирања у односу на x,y,z осу

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} \qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$$





Симетрична матрица са позитивним сопственим вриједностима $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ је матрица скалирања у смјеру сопствених вектора $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$.

Симетрична матрица увијек има реалне сопствене вриједности.

Симетрична матрица

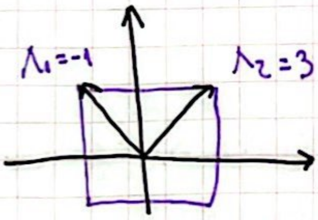
Матрица A је симетрична ако вриједи $A=A^T$.

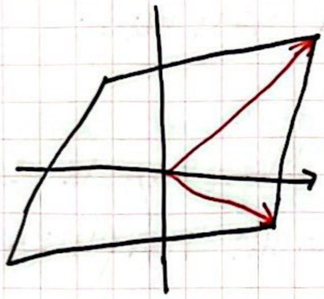
Теорема 1: Ако је $A\in M_n(\mathbb{R})$ симетрична тада постоји ортогонална матрица $Q\in M_n(\mathbb{R})$ и дијагонална матрица $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in M_n(\mathbb{R})$ тако да вриједи

$$\boxed{A=Q\Lambda Q^T} \quad \boxed{A=Q\Lambda Q^{-1}} \quad \boxed{Q^{-1}=Q^T}$$

Колоне матрице Q чине сопствени вектори матрице A.

Симетрична матрица врши скалирање (са дозвољеном рефлексијом) у смјеру сопствених вектора који су уједно ортогонални.





Овакву матрицу можемо да разложимо у производ три матрице U,V (ортогоналне) и Σ (дијагонална)

$$A = U \Sigma V^T$$ (SVD декомпозиција)

24 Ортогоналне матрице. Матрица ротације, рефлексије и матрица roторефлексије.

Ортогонална матрица:

Дефиниција: Матрица Q за коју вриједи да је $Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q = I$ се зове ортогонална матрица (њени елементи су реалне вриједности).

Матрица Q која садржи комплексне елементе за коју вриједи да је $Q \cdot Q^* = Q^* \cdot Q = I$, $Q^* = Q^T$ називамо унитарна матрица.

Детерминанта ортогоналне матрице мора бити ±1

Вриједи: $\det(Q) = \pm 1$

$Q \cdot Q^T = I$

~~det(Q)~~

$\det(Q) \cdot \det(Q^T) = 1$

$\det(Q)^2 = 1$

Код ортогоналне матрице све колоне су међусобно ортогоналне

$Q = [g_1 | g_2 | g_3 \dots | g_n]$

Вриједи $g_i^T \cdot g_j = 0$ за $i \neq j$

$g_k^T \cdot g_k = 1$

Ако је λ сопствена вриједност ортогоналне матрице Q тада вриједи $|\lambda|=1$

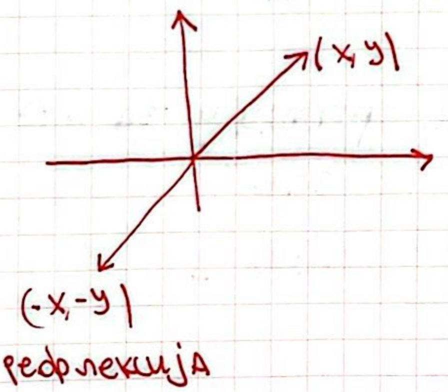
~~Ротација једа сопствена вриједност ортогоналне матрице Q~~
~~тада~~

Ротација за нула угао је јединична матрица

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad -I=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$ такође рефлексија

Ако је $\theta \neq 0$ $\theta \neq \pi$ тада сопствени вектори као и сопствене вриједности ортогоналне матрице су комплексни (садржи имагинарне бројеве).

Комплексни вектор ради ротацију

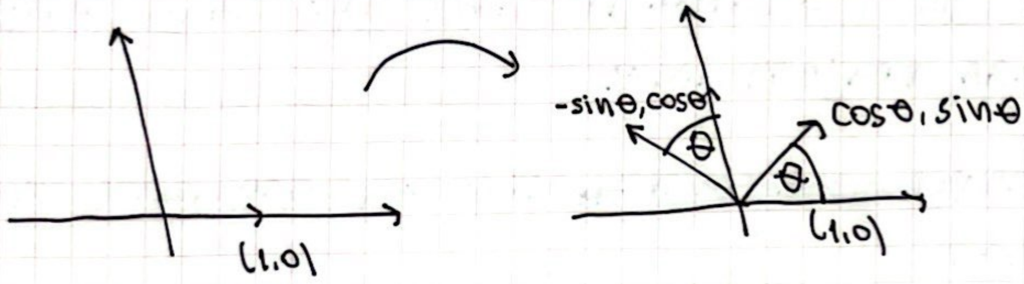


Матрица ротација

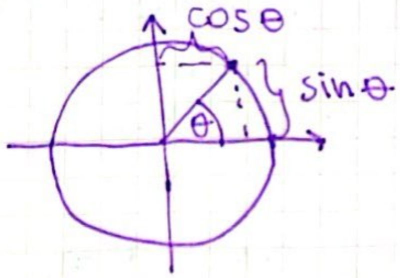
Матрица ротације у $\mathbb{R}^2$ за угао θ је матрица A

$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Доказ:



$$\begin{cases} A(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta) \\ A(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta) \end{cases}$$



Посматрамо матрицу ротације за θ

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Инверзна матрица нам даје ротацију за $-\theta$

$$R^{-1} = R^{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Матрица ротације у $\mathbb{R}^3$ у односу на x, y, z

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Напомена: Нека је $\mathbb{R}$ матрица ротације, тада вриједи

а) $\mathbb{R}$ је ортогонална матрица $\mathbb{R}^T \cdot R = \mathbb{R}^T \cdot R = I$

б) $\det(\mathbb{R}) = 1$

Ако је Q ортогонална матрица тако да је $\det Q = 1$ тада је Q матрица ротације.

Уколико је матрица Q ортогонална и вриједи да је $\det Q = -1$, тада може бити:

1) Q је матрица рефлексије

2) Q је матрица роторефлексије

$$S_z = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$$ - рефлексија у односу на z

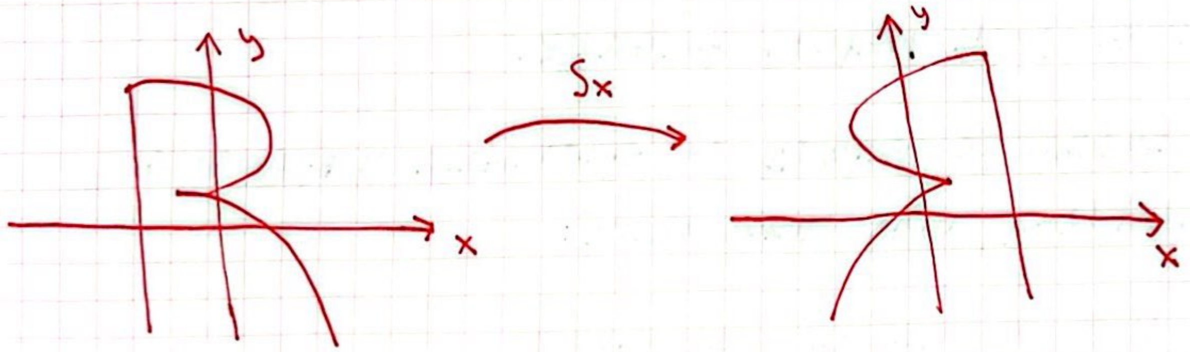
$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

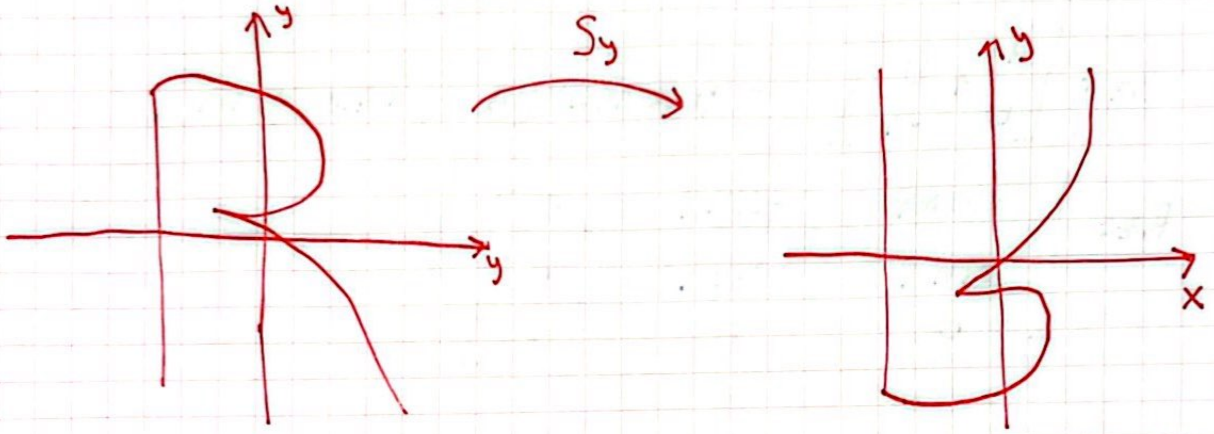
$S_z R_z$ - роторефлексија

- Матрица рефлексије

Матрица рефлексије у односу на x и y осу ($\mathbb{R}^2$)

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$





Некада матрица скалирања може да буде и матрица рефлексије.

Матрица рефлексије у односу на x, y, z осу је ($\mathbb{R}^3$)

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

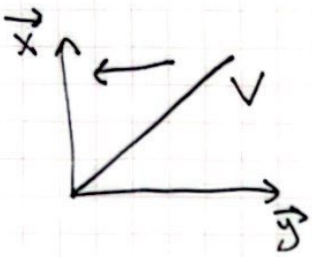
Сопствене вриједности су ± 1

25 Матрица пројекције на праву, раван и ~~хиперраван~~ хиперраван.

Теорема: Матрица P је матрица пројекције акко вриједи да је $P = P^T = P^2$.

Доказ: Ако је P матрица пројекције

$$\left.\begin{array}{l} P\vec{v} = \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{x} + \vec{y} \\ P^2\vec{v} = P\vec{x} = \vec{x} \end{array}\right\} \boxed{P^2 = P}$$



Може се примјетити да је

$\text{Im}(P) \perp \text{Ker}(P)$

$P\vec{y} = 0$

$\vec{y} \perp \text{Im}P$

вриједи да је $C(A) \perp N(A^T)$

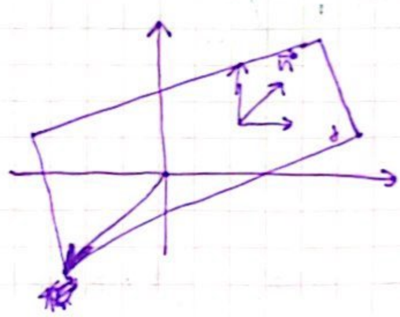
$\Rightarrow A = A^T$

x - припада слици

y - припада језгру

$\boxed{P = P^T}$

- У простору можемо имати матрицу пројекције P у односу на праву и раван



L: $W = \text{Lin}\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$

$\vec{n} \perp \vec{w_1}, \ \vec{n} \perp \vec{w_2}$

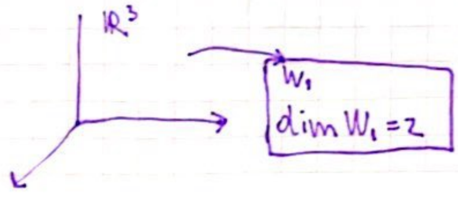
Одредити ортогоналну пројекцију на раван

$P\vec{w_1} = \vec{w_1}, \quad P\vec{w_2} = \vec{w_2}$

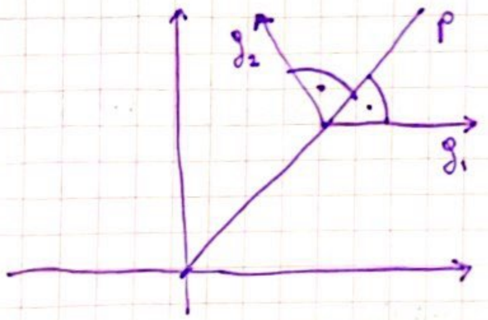
$P\vec{n} = \vec{0}$

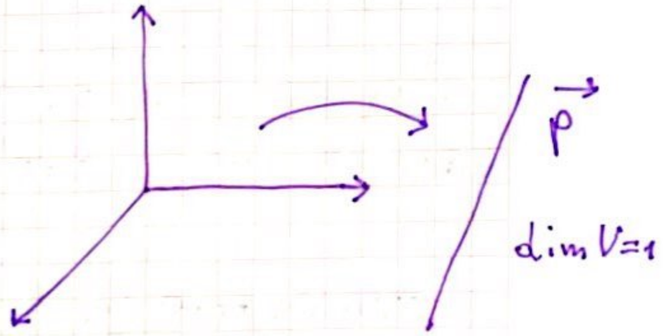
$\Updownarrow$

$P\vec{n} = 0\vec{n}$ - НУЛА мора бити сопствена вриједност



- Ако посматрамо пројекцију у односу на праву $\vec{p}$





Када праву $\vec{p}$ можемо 2 вектора одредити

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}\cdot\vec{g_1} &= 0 \\ \vec{p}\cdot\vec{g_2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} P\cdot\vec{p} &= \vec{p} \\ P\cdot\vec{g_1} &= 0 \\ P\cdot\vec{g_2} &= 0 \end{aligned}$$

Ако се пресликава слика у праву $\Rightarrow$ слика је права

$P: \mathbb{R}^3 \to V \qquad \dim V = 1$

$V = \mathrm{Lin}\{\vec{V}\}$

- P је матрица пројекције са $\mathbb{R}^3$ на праву одређену вектором $\vec{V}$.

$\mathrm{Im}(P) = C(P) \qquad P = [\alpha\vec{V}, \beta\vec{V}, \gamma\vec{V}]$

$\dim(\mathrm{Im}(P)) = 1$

$\dim(P) = 1$

Ако је матрица P пројекција на праву ($P: \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Lin}\{\vec{n}\}$) онда је $(I-P): \mathbb{R}^3 \to W$ (пројекција на раван)

$W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^3$

Алгоритам за одређивање матрице пројекције простора $\mathbb{R}^n$ на праву са вектором $\vec{v}$

$P: \mathbb{R}^n \to V \qquad V = \text{Lin}\{\vec{v}\}, \ \dim V = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ P = g \cdot g^T \end{array}\right\} \ (I - P): \mathbb{R}^n \to V^\perp$$

Описаћемо алгоритам за $P: \mathbb{R}^3 \to W \quad \dim(W) = 2$

Дат је простор $W = \text{Lin}\{w_1, w_2, w_3\}$, раван

1. Одредити ортонормирану базу простора W $ONB(W) = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$

$|g_k| = 1 \qquad k = 1, 2$

$g_1 \cdot g_2 = 0$

2. Матрицу пројекције $P: \mathbb{R}^3 \to W$ одређен као

$$P = [\vec{g}_1 \,|\, \vec{g}_2] \cdot [\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2]^T$$

Тако можемо одредити пројекцију

$$\boxed{P: \mathbb{R}^n \to W, \ \dim W = k, \ k < n}$$

одаберемо ортогоналну базу $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$

$$P = [\vec{g}_1 | \vec{g}_2 | \dots | \vec{g}_k] \cdot [\vec{g}_1 | \vec{g}_2 | \dots | \vec{g}_k]^T$$

Доказ: Доказаћемо за $k=2$

$$p=[\vec{g}_1, \vec{g}_2]\cdot[\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2]^T, \quad \begin{aligned}\vec{g}_1\cdot\vec{g}_2&=0\\ \vec{g}_1\cdot\vec{g}_2&=1\\ \vec{g}_2\cdot\vec{g}_1&=1\end{aligned}$$

$$p^T=\left([\vec{g}_1|\vec{g}_2]\cdot[\vec{g}_1|\vec{g}_2]^T\right)^T=$$

$$=\left([\vec{g}_1|\vec{g}_2]^T\right)^T\cdot[\vec{g}_1|\vec{g}_2]^T=$$

$$=[\vec{g}_1|\vec{g}_2]\cdot[\vec{g}_1|\vec{g}_2]^T=p$$

$$p^T=p$$

$$p^2=p\cdot p=[\vec{g}_1|\vec{g}_2]\cdot[\vec{g}_1|\vec{g}_2]^T\cdot[\vec{g}_1|\vec{g}_2]\cdot[\vec{g}_1|\vec{g}_2]$$

$$p^2=[\vec{g}_1|\vec{g}_2]\cdot[\vec{g}_1|\vec{g}_2]^T=p \qquad \square$$