TERMIN 10 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★★ K2 13.06.2022. ④ , K2 29.08.2022. ③

Zadatak 1.

a) Neka je funkcija $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[1,5]$ i neka je

$$f(1) = 2 \text{ i } f(5) = -4.$$

Da li postoji tačka $c \in (1,5)$ sa osobinom $f(c) = 1$?

b) Postoji li $x \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$\sin\left(4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1\right) = x^5?$$

Rješenje

Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ i ako je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$ ili je $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$, tada postoji tačka $c \in (a,b)$ takva da je

$$f(c) = 0. \tag{1}$$

a) Neka je

$$g(x) = f(x) - 1.$$

Kako je funkcija f neprekidna na segmentu $[1,5]$, isto vrijedi i za funkciju g. Iz uslova zadatka imamo da je sada

$$g(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ i } g(5) = f(5) - 1 = -4 - 1 = -5.$$

Koristeći teoremu (1) imamo da postoji $c \in (1,5)$ tako da je

$$g(c) = 0.$$

Kako je

$$g(c) = f(c) - 1,$$

zaključujemo da je

$$f(c) = g(c) + 1 = 0 + 1 = 1,$$

što znači da tačka $c \in (1,5)$ za koju vrijedi $f(c) = 1$ postoji.

b) Ako postoji $x \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\sin\left(4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1\right) = x^5, \tag{2}$$

onda postoji $x \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\sin\left(4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1\right) - x^5 = 0.$$

Neka je

$$f(x) = \sin\left(4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1\right) - x^5.$$

Tada je f neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.
Pošto vrijedi

$$f(0) = \sin(1) > 0$$

i

$$f(2) = \sin\left(4 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 + 1\right) - 2^5 = \sin(99) - 32 < 1 - 32 < 0$$

na osnovu teoreme (1) zaključujemo da postoji $x \in (0,2) \subset \mathbb{R}$ tako da je $f(x) = 0$, odnosno da vrijedi jednakost (2).

★★

Zadatak 2.
Ispitati da li funkcija

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$$

ima lokalni ekstrem na intervalu $[-2, 2]$. Prodiskutovati da li je rezultat u skladu sa Rolovom teoremom.

Rješenje

Za funkciju f vrijedi

$$f(-2) = f(2) = 0.$$

Međutim, funkcija f nije neprekidna na segmentu $[-2, 2]$ jer funkcija f ima prekid druge vrste u tački $x_0 = 0 \in [-2, 2]$ pa nije moguće primijeniti Rolovu teoremu i tvrditi da postoji $c \in (-2, 2)$ takva da je $f'(c) = 0$, odnosno da je $c \in (-2, 2)$ lokalni ekstrem.
Za ispitivanje lokalnih ekstrema ćemo pronaći prvi izvod funkcije f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x^2 - 4\right)' \cdot x - \left(x^2 - 4\right) \cdot x'}{x^2} \\ &= \frac{2x \cdot x - \left(x^2 - 4\right)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 4}{x^2}. \end{aligned}$$

Kako je $x^2 + 4 > 0$ i $x^2 > 0$, za svako $x \in D_f$, imamo da je $f'(x) > 0$ tj. $f(x)$ je monotono rastuća funkcija na kompletnom domenu i samim tim nema lokalne ekstreme na segmentu $[-2, 2]$.

★★

Zadatak 3.

a) Primjenom Tejlorove formule predstaviti polinom

$$P(x) = x^4$$

po stepenima $x - 1$.

b) Maklorenovim polinomom petog stepena aproksimirati funkciju

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Rješenje

Vrijedi:

a) Na osnovu Tejlorove formule, prikazujući polinom $P(x)$ kao funkciju $f(x)$ i znajući da njena aproksimacija odgovara polinomu četvrtog stepena, imamo da je

$$\begin{aligned} P(x) = x^4 &= a_4 \cdot (x-1)^4 + a_3 \cdot (x-1)^3 + a_2 \cdot (x-1)^2 + a_1 \cdot (x-1) + a_0 \\ &= \frac{P^{(4)}(1)}{4!} \cdot (x-1)^4 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 + \frac{P^{(2)}(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{P'(1)}{1!} \cdot (x-1) + P(1). \end{aligned} \tag{3}$$

Sa druge strane imamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 \\ P'(x) &= 4x^3 \;\Rightarrow\; P'(1) = 4 \\ P^{(2)}(x) &= 12x^2 \;\Rightarrow\; P^{(2)}(1) = 12 \\ P^{(3)}(x) &= 24x \;\Rightarrow\; P^{(3)}(1) = 24 \\ P^{(4)}(x) &= 24 \;\Rightarrow\; P^{(4)}(1) = 24. \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u izraz (3) imamo:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{24}{4!} \cdot (x-1)^4 + \frac{24}{3!} \cdot (x-1)^3 + \frac{12}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{4}{1!} \cdot (x-1) + 1 \\ &= (x-1)^4 + 4 \cdot (x-1)^3 + 6 \cdot (x-1)^2 + 4 \cdot (x-1) + 1. \end{aligned}$$

b) Kako je

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} = x \cdot \left(1+x^2\right)^{-1},$$

na osnovu formule

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{-1}{k} \left(x^2\right)^k + o\left(\left(x^2\right)^n\right) \\ &= x \cdot \left(\binom{-1}{0} \cdot \left(x^2\right)^0 + \binom{-1}{1} \cdot \left(x^2\right)^1 + \binom{-1}{2} \cdot \left(x^2\right)^2 + o(x^4) \right) \\ &= x \cdot \left(1 + (-1) \cdot x^2 + \frac{(-1) \cdot (-1-1)}{2!} \cdot x^4 + o(x^4) \right) \\ &= x \cdot \left(1 - x^2 + x^4 + o(x^4)\right) \\ &= x - x^3 + x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Zadatak 4.

a) Naći lokalne ekstreme i prevojne tačke funkcije

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x.$$

b) Naći lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Rješenje

a) Kako je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x + 4 \\ &= x^2 - 5x + 4 \\ &= (x-1) \cdot (x-4) \end{aligned}$$

imamo da je

	1	4	
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

.

Odavde imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) \nearrow &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \\ f(x) \searrow &\Leftrightarrow \quad x \in (1, 4), \end{aligned}$$

pa je tačka $L_{max}\big(1, f(1)\big)$ lokalni maksimum, dok je tačka $L_{min}\big(4, f(4)\big)$ lokalni minimum.
Kako je

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{2 - 15 + 24}{6} = \frac{11}{6}$$

i

$$f(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{5}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = \frac{64}{3} - \frac{80}{2} + 16 = \frac{64 - 120 + 48}{3} = -\frac{8}{3},$$

lokalni ekstremi funkcije $f(x)$ su

$$L_{max}\left(1, \frac{11}{6}\right) \text{ i } L_{min}\left(4, -\frac{8}{3}\right).$$

Kako je

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(x^2 - 5x + 4\right)' \\ &= 2x - 5. \end{aligned}$$

imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) \text{ konkavna } &\Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \\ f(x) \text{ konveksna } &\Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \end{aligned}$$

pa je prevojna tačka $P\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$. Pošto je

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{125}{8} - \frac{5}{2} \cdot \frac{25}{4} + 10 = \frac{125 - 375 + 240}{24} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12},$$

prevojna tačka je

$$P\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{12}\right).$$

b) Kako je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x' \cdot (1+x^2) - x \cdot \left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 - 2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{(1-x) \cdot (1+x)}{\left(1+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

imamo da je

		-1		1	
$1-x$	$+$		$+$	$\bullet$	$-$
$1+x$	$-$	$\bullet$	$+$		$+$
$\left(1+x^2\right)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

.

Odavde imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) \searrow &\Leftrightarrow \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ f(x) \nearrow &\Leftrightarrow \ x \in (-1, 1)\,, \end{aligned}$$

pa je tačka $L_{min}\left(-1, f(-1)\right)$ lokalni minimum, dok je tačka $L_{max}\left(1, f(1)\right)$ lokalni maksimum.
Kako je

$$f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

i

$$f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2},$$

lokalni ekstremi funkcije $f(x)$ su

$$L_{min}\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \text{ i } L_{max}\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

★★

Zadatak 5.
Za funkciju
$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
odrediti

a) asimptote,

b) intervale monotonosti.

Rješenje

Kako je funkcija $g(x) = \operatorname{arctg} x$ definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, domen funkcije $f(x)$ je skup svih vrijednosti x za koje je $h(x) = \frac{x}{x+1}$ definisano. Dakle,
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.$$

a) 1. *vertikalna asimptota*
Kako je
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nearrow +\infty} = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nearrow -\infty} = -\frac{\pi}{2}$$
funkcija nema vertikalnu asimptotu.

2. *horizontalna asimptota*
Kako je
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\right)}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\right)}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$
funkcija ima horizontalnu asimptotu
$$y = \frac{\pi}{4}.$$

3. *kosa asimptota*
Kako funkcija f ima i lijevu i desnu horizontalnu asimptotu, ona ne može da ima ni lijevu ni desnu kosu asimptotu.

b) Vrijedi
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)' \\
&= \frac{1}{\frac{(x+1)^2+x^2}{(x+1)^2}}\cdot\frac{x'\cdot(x+1)-x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} \\
&= \frac{\cancel{(x+1)^2}}{(x+1)^2+x^2}\cdot\frac{x+1-x}{\cancel{(x+1)^2}} \\
&= \frac{1}{(x+1)^2+x^2}.
\end{aligned}$$

Kako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in D_f$, zaključujemo da je funkcija monotono rastuća na cijelom domenu, tj.
$$f(x) \nearrow \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)\,.$$

Zadatak 6.
Dokazati nejednakost
$$\operatorname{arctg}(x+y) \le y + \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Rješenje

Posmatrajmo funkciju
$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$
na intervalu $[x_0, x_0+y_0]$, $y_0 > 0$, i ispitajmo da li ona ispunjava uslove Lagranžove teoreme.

(i) Funkcija $f(x)$ je neprekidna na $\mathbb{R}$ pa je neprekidna i na segmentu $[x_0, x_0+y_0] \subset \mathbb{R}$, $y_0 > 0$.

(ii) Kako je
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
funkcija f ima izvod na $\mathbb{R}$ pa ima izvod i na intervalu $(x_0, x_0+y_0) \subset \mathbb{R}$, $y_0 > 0$.

Sada, na osnovu Lagranžove teoreme znamo da postoji $c \in (x_0, x_0+y_0)$ takvo da je
$$\begin{aligned} & f(x_0+y_0) - f(x_0) = f'(c) \cdot \big((x_0+y_0) - x_0\big) \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{arctg}(x_0+y_0) - \operatorname{arctg} x_0 = \frac{1}{1+c^2} \cdot y_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Kako je $c^2 \ge 0$, imamo da je $1+c^2 \ge 1$ pa je $\dfrac{1}{1+c^2} \le 1$ te uvrštavanjem u jednakost (4) dobijamo
$$\begin{aligned} & \operatorname{arctg}(x_0+y_0) - \operatorname{arctg} x_0 = \frac{1}{1+c^2} \cdot y_0 \le y_0 \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{arctg}(x_0+y_0) - \operatorname{arctg} x_0 \le y_0 \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{arctg}(x_0+y_0) \le y_0 + \operatorname{arctg} x_0, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

★ ★ ★ ★

Zadatak 7.

Izračunati graničnu vrijednost

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin x\right)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Rješenje

Koristeći poznate aproksimacije funkcija Maklorenovim polinomom:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^n)
\end{aligned}$$

sada imamo da je

$$\begin{aligned}
\sin\left(\sin x\right) &= \sin\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)\\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^5}{5!}+o(x^5)\\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\cancelto{o(x^5)}{3\cdot\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\cdot\frac{x^5}{120}}+\cancelto{o(x^5)}{3\cdot\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\cdot\left(\frac{x^5}{120}\right)^2}+\cancelto{o(x^5)}{\left(\frac{x^5}{120}\right)^3}}{6}+\frac{x^5+o(x^5)}{120}+o(x^5)\\
&= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3-3\cdot x^2\cdot\frac{x^3}{6}+\cancelto{o(x^5)}{3\cdot x\cdot\left(\frac{x^3}{6}\right)^2}-\cancelto{o(x^5)}{\left(\frac{x^3}{6}\right)^3}}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\\
&= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\\
&= x-\frac{x^3+x^3}{6}+\frac{x^5+10x^5+x^5}{120}+o(x^5)\\
&= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1-x^2} &= \left(1+\left(-x^2\right)\right)^{\frac{1}{3}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{3}}{k}\left(-x^2\right)^k+o(\left(-x^2\right)^n)\\
&= \binom{\frac{1}{3}}{0}\cdot\left(-x^2\right)^0+\binom{\frac{1}{3}}{1}\cdot\left(-x^2\right)^1+\binom{\frac{1}{3}}{2}\cdot\left(-x^2\right)^2+\cancelto{o(x^5)}{\binom{\frac{1}{3}}{3}\cdot\left(-x^2\right)^3}+\cancelto{o(x^6)}{o\left(\left(-x^2\right)^3\right)}\\
&= 1-\frac{1}{3}\cdot x^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot x^4+o(x^5)\\
&= 1-\frac{x^2}{3}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\cdot x^4+o(x^5)\\
&= 1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}+o(x^5).
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin x\right)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5)-x\cdot\left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}+o(x^5)\right)}{x^5}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{\frac{x^3}{3}}+\frac{x^5}{10}+o(x^5)-\cancel{x}+\cancel{\frac{x^3}{3}}+\frac{x^5}{9}+o(x^6)}{x^5}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^5}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right)+\cancelto{0}{o(x^5)}}{\cancel{x^5}}\\
&= \frac{1}{10}+\frac{1}{9}\\
&= \frac{9+10}{90}\\
&= \frac{19}{90}.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

Rješenje

1. *Domen*
   Da bi funkcija f bila definisana, potrebno je da vrijedi

$$1-x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1,1]\,,$$

   pa je domen funkcije $D_f : x \in [-1,1]$.

2. *Specijalna svojstva*

   (a) *Parnost/neparnost*
   Kako je

$$f(-x) = (-x)\cdot\sqrt{1-(-x)^2} = -x\cdot\sqrt{1-x^2} = -f(x),$$

   funkcija f je neparna.

   (b) *Periodičnost*
   Kako funkcija f nije kompozicija trigonometrijskih funkcija, ona je aperiodična.

3. *Nule i znak funkcije*
   Za nule funkcije f imamo da je

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x\sqrt{1-x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \ \vee \ x = -1 \ \vee \ x = 1. \end{aligned}$$

   Kako je $\sqrt{1-x^2} \geq 0$, znak funkcije f zavisi isključivo od znaka x. Stoga imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x > 0 \\ f(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x < 0. \end{aligned}$$

4. *Asimptote*

   (a) *Vertikalna asimptota*
   Kako funkcija f nema kritičnih tačaka koje su isključene iz domena, nemamo vertikalnih asimptota.

   (b) *Horizontalna asimptota*
   Kako je domen funkcije f ograničen na $[-1,1]$, nema smisla tražiti graničnu vrijednost kada x teži ka $\pm\infty$, pa funkcija nema ni horizontalnu asimptotu.

   (c) *Kosa asimptota*
   Slično kao i kod horizontalne asimptote, zaključujemo da funkcija nema ni kosu asimptotu.

5. *Monotonost i lokalni ekstremi*
   Imamo da je

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)' \\ &= \sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(1-x^2\right)' \\ &= \sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x) \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-2\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-2\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

   odakle dobijamo tabelu pomoću koje određujemo znak funkcije f:

	-1 $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$	$-$	$-$	$-$
$x-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	$-$	$+$
$x+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

.

Odavde imamo da je

$$f(x)\searrow \;\Leftrightarrow\; x\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$$
$$f(x)\nearrow \;\Leftrightarrow\; x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

pa je tačka $L_{min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ lokalni minimum, dok je tačka $L_{max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ lokalni maksimum.
Kako je

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

i, zbog neparnosti funkcije f,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

lokalni ekstremi funkcije $f(x)$ su

$$L_{min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)\ \text{i}\ L_{max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

6. *Konveksnost/konkavnost i prevojne tačke*
   Imamo da je

$$\begin{aligned}
f''(x)&=\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)'\\
&=\frac{\left(1-2x^2\right)'\cdot\sqrt{1-x^2}-\left(1-2x^2\right)\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2}\\
&=\frac{-4x\cdot\sqrt{1-x^2}-\left(1-2x^2\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x)}{1-x^2}\\
&=\frac{\frac{-4x\cdot\left(1-x^2\right)+x\cdot\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\\
&=\frac{-4x+4x^3+x-2x^3}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{x\cdot\left(2x^2-3\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Kako je $x\in[-1,1]$, imamo da je $x^2\leq 1$ pa je $2x^2-3\leq -1$ odnosno $2x^2-3<0$, za svako $x\in D_f$. Sada je

	-1	0	1
x	$-$	$\bullet$	$+$
$2x^2-3$	$-$		$-$
$\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

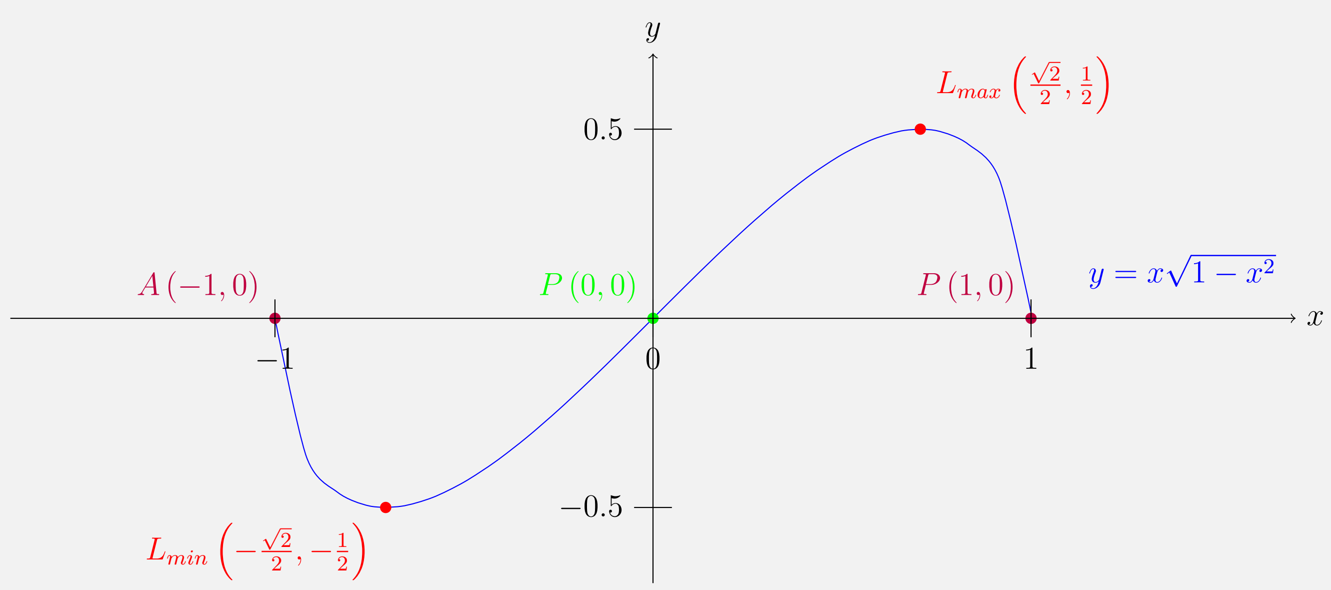
.

pa je

$$f(x)\ \text{konkavna}\ \Leftrightarrow\ x\in(0,1)$$
$$f(x)\ \text{konveksna}\ \Leftrightarrow\ x\in(-1,0)\,.$$

Prevojna tačka je $P(0,0)$.

7. *Grafik*



★★★★

Zadatak 9.

Ispitati tok i skicirati grafik funkcije

$$f(x) = e^{\frac{x}{1-x^2}}.$$

Rješenje

1. *Domen*

   Da bi funkcija f bila definisana, potrebno je da vrijedi

   $$1 - x^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1,$$

   pa je domen funkcije $D_f : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. *Specijalna svojstva*

   (a) *Parnost/neparnost*

   Kako je

   $$f(-x) = e^{\frac{-x}{1-(-x)^2}} = e^{-\frac{x}{1-x^2}} \neq \pm f(x),$$

   funkcija f nije ni parna ni neparna.

   (b) *Periodičnost*

   Kako funkcija f nije kompozicija trigonometrijskih funkcija, ona je aperiodična.

3. *Nule i znak funkcije*

   Kako je $e^{g(x)} > 0$ za svako $x \in D_g$, gdje je g proizvoljna funkcija, funkcija f je pozitivna na cijelom domenu te stoga funkcija nema nula.

4. *Asimptote*

   (a) *Vertikalna asimptota*

   Vrijedi

   $$\begin{aligned}
   \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} e^{\frac{x}{1-x^2} \to +\infty} = +\infty \\
   \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} e^{\frac{x}{1-x^2} \to -\infty} = 0 \\
   \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{x}{1-x^2} \to +\infty} = +\infty \\
   \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{x}{1-x^2} \to -\infty} = 0.
   \end{aligned}$$

   Stoga, prave $x = -1$ i $x = 1$ su lijeve vertikalne asimptote.

   (b) *Horizontalna asimptota*

   Vrijedi

   $$\begin{aligned}
   \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{1-x^2} \to 0^+} = 1^+ \\
   \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{1-x^2} \to 0^-} = 1^-.
   \end{aligned}$$

   Dakle, prava $y = 1$ je i lijeva i desna horizontalna asimptota.

   (c) *Kosa asimptota*

   Kako funkcija f ima i lijevu i desnu horizontalnu asimptotu, ona nema kosu asimptotu.

5. *Monotonost i lokalni ekstremi*

   Imamo da je

   $$\begin{aligned}
   f'(x) &= e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' \\
   &= e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{x' \cdot \left(1-x^2\right) - x \cdot \left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} \\
   &= e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{1 - x^2 + 2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \\
   &= e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{1 + x^2}{\left(1-x^2\right)^2}.
   \end{aligned}$$

   Kako je $e^{\frac{x}{1-x^2}} > 0$, $1 + x^2 > 0$ i $\left(1-x^2\right)^2 > 0$ za svako $x \in D_f$, zaključujemo da je $f'(x) > 0$ za svako $x \in D_f$, pa je f monotono rastuća funkcija na cijelom domenu. Takođe, funkcija f nema lokalne ekstreme.

6. *Konveksnost/konkavnost i prevojne tačke*

   Imamo da je

   $$f''(x) = \left(e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{1 + x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\right)'$$

$$= \left(e^{\frac{x}{1-x^2}}\right)' \cdot \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} + e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \left(\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\right)'$$

$$= e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \cdot \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} + e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{\left(1+x^2\right)' \cdot \left(1-x^2\right)^2 - \left(1+x^2\right) \cdot \left(\left(1-x^2\right)^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^4}$$

$$= e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1-x^2\right)^4} + e^{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{2x \cdot \left(1-x^2\right)^2 - \left(1+x^2\right) \cdot 2 \cdot \left(1-x^2\right) \cdot \left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^4}$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)^4} \cdot \left[1 + 2x^2 + x^4 + 2x \cdot \left(1 - 2x^2 + x^4\right) - 2 \cdot \left(1 - x^4\right) \cdot (-2x)\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)^4} \cdot \left[1 + 2x^2 + x^4 + 2x - 4x^3 + 2x^5 + 4x - 4x^5\right]$$

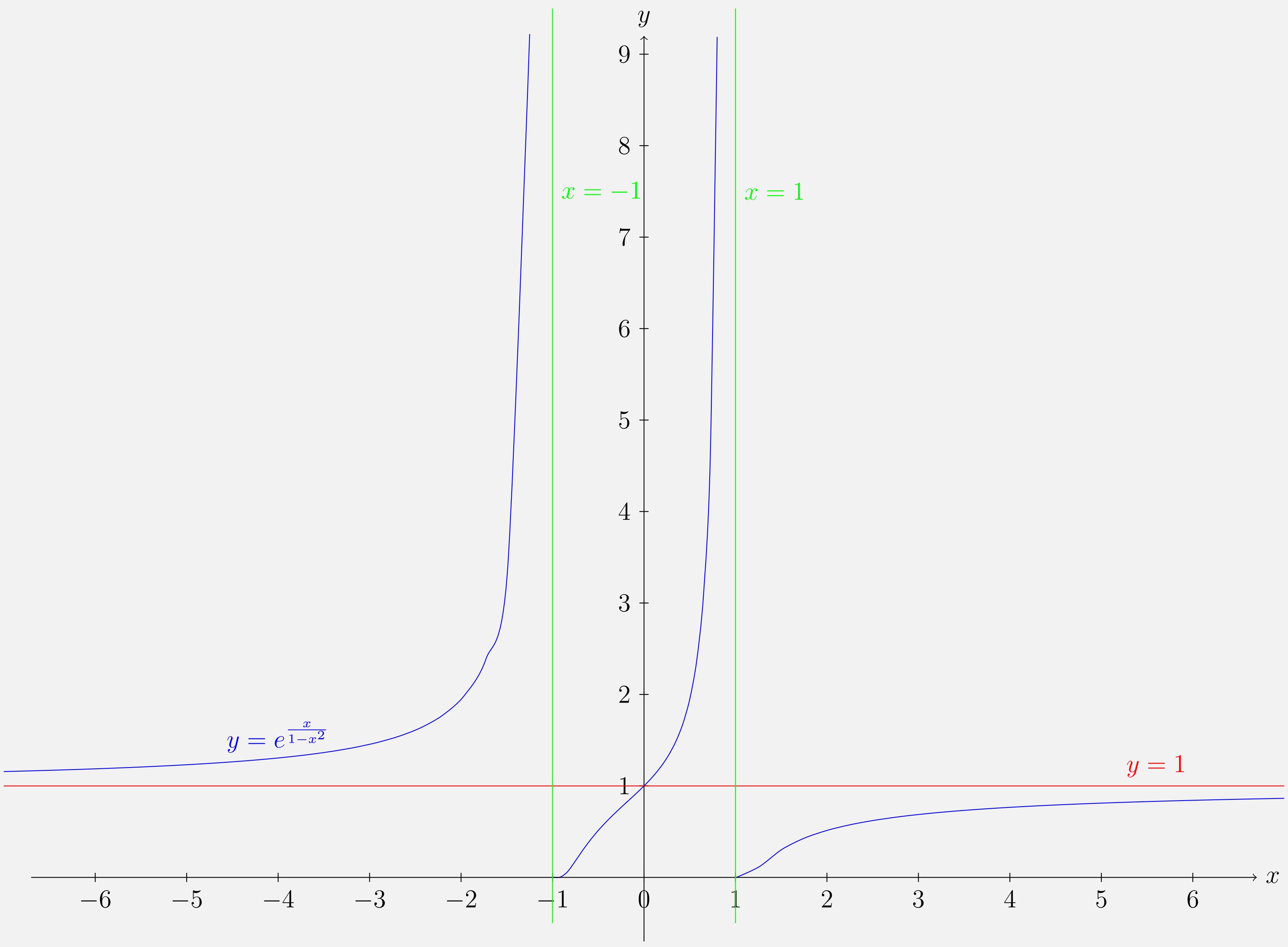
$$= \frac{e^{\frac{x}{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)^4} \cdot \left[-2x^5 + x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x + 1\right].$$

Znak i nule drugog izvoda zavise od znaka i nula polinoma

$$P(x) = -2x^5 + x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x + 1.$$

Nule polinoma P nije moguće odrediti egzaktno, jer one nisu racionalne. Moguće ih je odrediti samo numerički (približno), a taj dio gradiva se ne obrađuje u okviru ovog kursa i ne očekuje se da se to zna. Zbog toga, na grafiku nećemo označiti prevojne tačke i ne očekuje se precizno skiciranje konveksnosti/konkavnosti funkcije.

7. *Grafik*



Zadatak 10.
Ispitati tok i skicirati grafik funkcije

$$f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}.$$

Rješenje

1. *Domen*
   Da bi funkcija f bila definisana, potrebno je da vrijedi

$$\begin{aligned} & x > 0 \ \wedge \ 1 - \ln x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x > 0 \ \wedge \ x \neq e \end{aligned}$$

   pa je domen funkcije $D_f : x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$.

2. *Specijalna svojstva*

   (a) *Parnost/neparnost*
   Kako domen funkcije f nije simetričan u odnosu na $x = 0$, funkcija nije ni parna ni neparna.

   (b) *Periodičnost*
   Kako funkcija f nije kompozicija trigonometrijskih funkcija, ona je aperiodična.

3. *Nule i znak funkcije*
   Za nule funkcije f imamo da je

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x}{1 - \ln x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0. \end{aligned}$$

   Međutim, kako $x = 0$ ne pripada domenu funkcije f, funkcija f nema realnih nula.
   Za znak funkcije f koristimo tabelu:

	0	e $\quad +\infty$
x	$+$	$+$
$1 - \ln x$	$+$	$-$
$f(x)$	$+$	$-$

.

   Odavde imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (0, e) \\ f(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (e, +\infty). \end{aligned}$$

4. *Asimptote*

   (a) *Vertikalna asimptota*
   Vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 - \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}} = 0 \\ \lim_{x \to e^-} f(x) &= \lim_{x \to e^-} \frac{x}{1 - \underbrace{\ln x}_{\to 1^-}} = +\infty \\ \lim_{x \to e^+} f(x) &= \lim_{x \to e^+} \frac{x}{1 - \underbrace{\ln x}_{\to 1^+}} = -\infty. \end{aligned}$$

   Dakle, prava $x = e$ je i lijeva i desna vertikalna asimptota funkcije f.

   (b) *Horizontalna asimptota*
   Kako je domen funkcije f ograničen na $(0, e) \cup (e, +\infty)$, nema smisla tražiti graničnu vrijednost kada x teži ka $-\infty$, pa funkcija nema lijevu horizontalnu asimptotu. Za desnu horizontalnu asimptotu ispitujemo graničnu vrijednost

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 - \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(1 - \ln x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty.$$

   Dakle, funkcija f nema horizontalnu asimptotu.

   (c) *Kosa asimptota*
   Slično kao i kod horizontalne asimptote, zaključujemo da funkcija nema lijevu kosu asimptotu. Za desnu kosu asimptotu prvo računamo graničnu vrijednost

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{1 - \ln x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \underbrace{\ln x}_{\to +\infty}} = 0.$$

   Dakle, funkcija f nema ni kosu asimptotu.

5. *Monotonost i lokalni ekstremi*
Imamo da je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x' \cdot (1-\ln x) - x \cdot (1-\ln x)'}{(1-\ln x)^2} \\ &= \frac{1-\ln x - x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)}{(1-\ln x)^2} \\ &= \frac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2}. \end{aligned}$$

Posmatrajmo tablicu

	0 $\quad e$	$\quad e^2$	$+\infty$
$2-\ln x$	$+$	$+$ $\bullet$	$-$
$(1-\ln x)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

.

Odavde imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) \nearrow &\Leftrightarrow \quad x \in (0,e) \cup \left(e, e^2\right) \\ f(x) \searrow &\Leftrightarrow \quad x \in \left(e^2, +\infty\right), \end{aligned}$$

pa je tačka $L_{max}\left(e^2, f\left(e^2\right)\right)$ lokalni maksimum.
Kako je

$$f\left(e^2\right) = \frac{e^2}{1-\ln\left(e^2\right)} = \frac{e^2}{1-2\ln e} = -e^2,$$

lokalni maksimum funkcije je $L_{max}\left(e^2, -e^2\right)$.

6. *Konveksnost/konkavnost i prevojne tačke*
Imamo da je

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2}\right)' \\ &= \frac{(2-\ln x)' \cdot (1-\ln x)^2 - (2-\ln x) \cdot \left((1-\ln x)^2\right)'}{(1-\ln x)^4} \\ &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot (1-\ln x)^2 - (2-\ln x) \cdot 2 \cdot (1-\ln x) \cdot (1-\ln x)'}{(1-\ln x)^4} \\ &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot (1-\ln x)^2 + \frac{1}{x} \cdot (2-\ln x) \cdot (1-\ln x)}{(1-\ln x)^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot (1-\ln x) \cdot \left[-(1-\ln x) + 2 - \ln x\right]}{(1-\ln x)^4} \\ &= \frac{1}{x \cdot (1-\ln x)^3}. \end{aligned}$$

Iz tablice

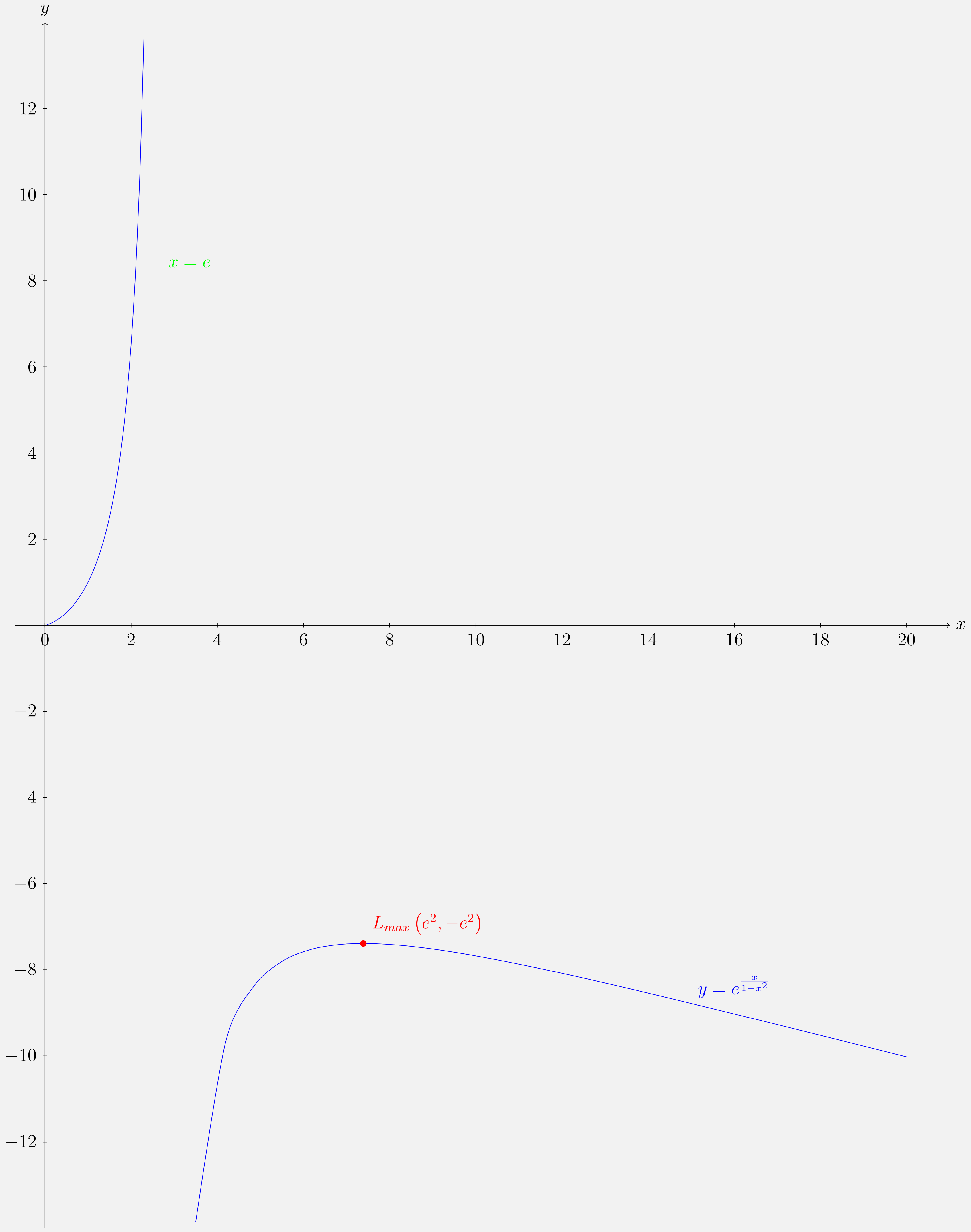
	0 $\quad e$	$+\infty$
x	$+$	$+$
$(1-\ln x)^3$	$+$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

imamo da je

$$\begin{aligned} f(x) \text{ konveksna} &\Leftrightarrow \quad x \in (0,e) \\ f(x) \text{ konveksna} &\Leftrightarrow \quad x \in (e, +\infty). \end{aligned}$$

Funkcija f nema prevojnu tačku jer nije definisana za $x = e$.

7. *Grafik*



y
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
x
−2
−4
−6
−8
−10
−12
$x = e$
$L_{max}\left(e^2, -e^2\right)$
$y = e^{\frac{x}{1-x^2}}$