(1)

Kako je $\cos^4 n \leqslant 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ KVG za svako $\alpha > 1$, zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ KVG, pa takođe i početni red KVG.

(2) Na osnovu Dalamberovog kriterijuma imamo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3 + (n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{n^3+n}{2^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n + 1)}{2^{n+1} \cdot (n^3 + n)} \right|$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Kako je $L < 1$, početni red KVG.

③ Kako je $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ red sa pozitivnim članovima, primjenom Košijevog kriterijuma dobijamo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\frac{1}{(\ln n)^{\cancel{n}}}}$$

$$= 0,$$

pa početni red KVG, jer je $L<1$.

④ Neka je $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. Kako je:

$$f'(x) = \frac{\left(e^{-\sqrt{x}}\right)' \sqrt{x} - \left(e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{x}$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}\right)\cdot \cancel{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\overset{<0}{-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{x}}}\overset{>0}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}{\underset{>0}{x}},$$

$f(x)$ je neprekidna, pozitivna i monotono opadajuća funkcija za $x\in[1,\infty)$ pa je na osnovu integralnog kriterijuma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \sim \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Kako je

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad = \begin{cases} t=\sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{cases}$$

$$= \int_1^\infty e^{-t}\cdot 2dt$$

$$= -2e^{-t}\Big|_1^\infty$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-2e^{-t}\right) + 2e^{-1}$$

$$= \frac{2}{e},$$

pa početni red KVG.

(5) Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+a^n} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & a\in(0,1) \\ \frac{1}{4}, & a=1 \\ 0, & a\in(1,+\infty) \end{cases}$$

red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+a^n}$ DVG za $a\in(0,1]$ jer opsti član ne teži u 0 u tom slučaju.

Za $a>1$, primjenom Dalamberovog kriterijuma dobijamo:

Скенирано помоћу ЦамСцаннер-а

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{3+a^{n+1}}}{\frac{1}{3+a^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a^n+3}{a^{n+1}+3} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{a^n}\left(1+\frac{3}{a^n}\right)}{a^{\cancel{n}+1}\cdot\left(1+\frac{3}{a^{n+1}}\right)} \right|$$

$$= \frac{1}{a} < 1 \text{, za } a>1,$$

pa početni red KVG za $a>1$.

⑥ Na osnovu Dalamberovog kriterijuma dobijamo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{n^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right| = e,$$

pa kako je $L = e > 1$, početni red DVG.

⑦ Ispitajmo apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right|$$

Kako je: $n \in [1, \infty) \Rightarrow$

$$\sqrt{n} \in [1, \infty) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \in (0, 1] \Rightarrow$$

$$tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0 \quad , \forall n \in [1, \infty)$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Kako je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \to 1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$$

na osnovu poredbenog kriterijuma dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \to DVG$$

pa početni red apsolutno DVG.

Ispitajmo uslovnu konvergenciju početnog brojnog reda. Na osnovu Lajbnicovog kriterijuma dobijamo:

1° $\lim\limits_{n\to\infty} tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$ ✓

2° $tg\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Neka je $f(x) = tg\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Kako je

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}\right) < 0 \quad , \forall x \in [1, \infty)$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ je monotono opadajuća funkcija pa je

$$tg\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < tg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \checkmark$$

Dakle, početni red uslovno KVG.

8 Kako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n\cdot(3+(-1)^n)} = \cancel{\frac{1+(-1)^1}{1\cdot(3+(-1)^1)}} + \frac{1+(-1)^2}{2\cdot(3+(-1)^2)} + \cancel{\frac{1+(-1)^3}{3\cdot(3+(-1)^3)}} +$$

$$\frac{1+(-1)^4}{4\cdot(3+(-1)^4)} + \cancel{\frac{1+(-1)^5}{5\cdot(3+(-1)^5)}} + \frac{1+(-1)^6}{6\cdot(3+(-1)^6)} + \dots$$

$$= \frac{2}{2\cdot 4} + \frac{2}{4\cdot 4} + \frac{2}{6\cdot 4} + \dots$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$$

Na osnovu poredbenog kriterijuma imamo da je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{4n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$$

pa je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DVG

Kako je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{4n} \right|$, početni red i apsolutno DVG.

9 Kako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{3}\right) + \dots$$

$$= \left(\cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+1}\right) + \left(\cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+1}\right) + \dots$$

$$< 1$$

niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ je ograničen

Sa druge strane, niz $a_n = \frac{1}{n}$ je monotono opadajući i $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ pa je na osnovu Dirihleovog kriterijuma red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{n} \quad \text{KVG.}$$

(10) Kako je

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2 + \ln^2 n}{n^2 \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2},$$

na osnovu Lajbnicovog kriterijuma imamo $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ KVG jer je

$1^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ i

$2^\circ \quad \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}$, za $n \in [2, \infty)$.

Sa druge strane, kako je $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ pozitivna, neprekidna i monotono nerastuća funkcija na $x \in [2, \infty)$, jer je:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{n} \cdot n^2 - \ln n \cdot 2n}{n^4} = \frac{n(1 - 2\ln n)}{n^3} < 0, (\forall n \in [2, \infty))$$

na osnovu integralnog kriterijuma dobijamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \sim \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

Rješavanjem integrala

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & v = -\frac{1}{x} \\ du = \frac{dx}{x} & dv = \frac{dx}{x^2} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{\ln x}{x}\Big|_2^\infty + \int_2^\infty \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_2^\infty$$

$$\underset{L.P.}{=} -\lim_{b\to\infty}\cancelto{0}{\frac{\frac{1}{b}}{1}} + \frac{\ln 2}{2} - \lim_{b\to\infty}\cancelto{0}{\frac{1}{b}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\ln 2 + 1}{2}$$

zaključujemo da red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ takođe KVG.

Kako je početni red suma dva konvergentna reda, zaključujemo da i početni red takođe KVG.