UNIVERZITET U BANJOJ LUCI
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

MATEMATIKA 1
Auditorne vježbe
V sedmica

Algebarske strukture

1. Na skupu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definisana je operacija $*$ sa
$$x * y = xyk, \quad x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$
gdje je $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ data konstanta. Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, *)$.

2. U skupu racionalnih brojeva definisana je operacija $*$ sa
$$a * b = ma + nb,$$
gdje su m i n dati cijeli brojevi. Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{Q}, *)$.

3. Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$ ako je operacija $*$ definisana sa
$$(x, y) * (a, b) = (x, y \cdot b \cdot (a^2 - 3)).$$

Polinomi

1. Napisati polinom $P(x) = x^2 + 5x + 6$ po stepenima od $(x - 1)$.
2. Odrediti količnik i ostatak pri dijeljenju polinoma
   (a) $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$ sa $Q(x) = x^2 + 2$
   (b) $P(x) + x^5 - 5x^4 - x + 5$ sa $Q(x) = x + 1$.
3. Napisati polinom $P(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8$ po stepenima od $x + 1$,
4. Naći nule polinoma $P(x) = x^5 - 7x^4 + 17x^3 - 19x^2 + 16x - 12$.
5. Faktorisati polinom $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$.
6. Za koje vrijednosti realnih parametara a i b je polinom $P(x) = x^5 - 2x^4 - ax + b$ djeljiv polinomom $Q(x) = x^2 - 3x + 2$. Za tako određene a i b naći nule polinoma $P(x)$.
7. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ polinomom $x - 1$ je 3, a polinomom $x + 2$ je -3. Naći ostatak pri dijeljenju polinoma P polinomom $Q(x) = x^2 + x - 2$.
8. Odrediti realan normiran (moničan) polinom najmanjeg stepena tako da broj -1 bude dvostruki, a 2 i $1 - i$ jednostruki korijeni tog polinoma.
9. Neka je $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 5$. Izračunati $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, gdje su x_1, x_2, x_3 korijeni polinoma P.
10. Odrediti p tako da jedan korijen jednačine $x^3 - 7x + p = 0$ bude jednak dvostrukom korijenu te jednačine.
11. Odrediti vrijednost realnog parametra m tako da zbir dva korijena polinoma
$$P(x) = x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 16$$
bude jednak zbiru druga dva korijena

12. Dokazati da je za bilo koji prirodan broj n i realan broj $\alpha(\sin\alpha \neq 0)$ polinom

$$P_n(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

djeljiv polinomom $Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

13. Ako je $a = \varepsilon + \varepsilon^4$, $b = \varepsilon^2 + \varepsilon^3$, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, dokazati da je:

$$a + b = -1, ab = -1$$

i na osnovu toga izračunati $\cos\frac{2\pi}{5}$.

14. Naći sve uređene parove $(p, q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ takve da je polinom x^4+px^2+q djeljiv sa polinomom x^2+px+q.