Univerzitet u Banjoj Luci

Elektrotehnički fakultet

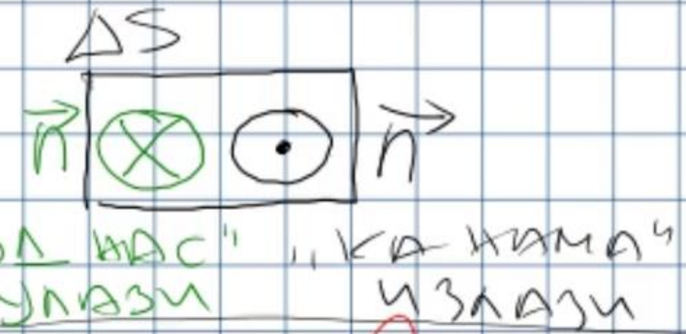
Osnovi elektrotehnike 1

Gausov zakon

Predavanje: 4. blok

ГАУСОВ ЗАКОН

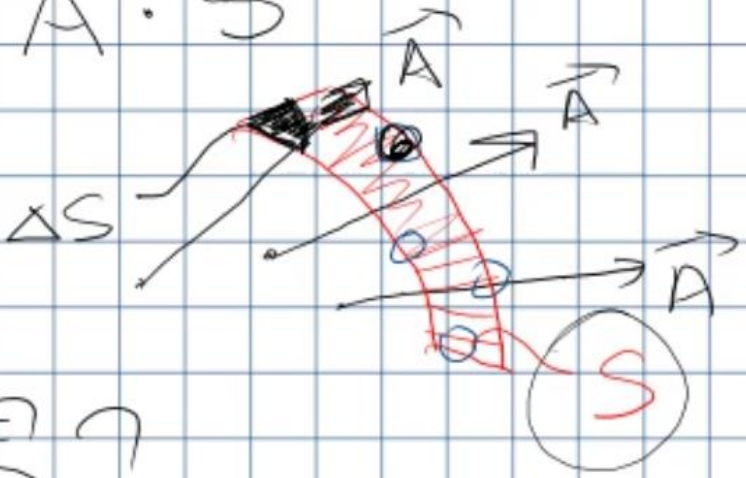
$\vec{E}$ и укупна вишка наел.



флукс вектора

$\vec{A}\cdot\vec{S}$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{S} = A\,S\,\cos\measuredangle(\vec{A},\vec{S})}$$



оријентисана површ

$\vec{A}\cdot\Delta\vec{S} \Rightarrow \Sigma \Rightarrow$ флукс

$\Delta\vec{S}$?

векторски елемент површи

$\Delta\vec{S} = \Delta S\cdot\vec{n}$

$\vec{n}$ - јединични вектор нормалан на ΔS

grč. *Fluxus*- onaj koji protiče

$$\Delta\Psi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{S} = E\cdot\Delta S\cdot\cos\sphericalangle(\vec{E},\Delta\vec{S}_n) \quad [Vm]$$

$$\frac{V}{m}\cdot m^2$$

Флукс је скаларна величина.

$$\Psi_E = \vec{E}_1\cdot\Delta\vec{S}_1 + \vec{E}_2\cdot\Delta\vec{S}_2 + \dots + \vec{E}_n\cdot\Delta\vec{S}_n = \sum_{k=1}^{n}\vec{E}_k\cdot\Delta\vec{S}_k$$

$$\boxed{\Delta S \to dS} \Longrightarrow \sum \longrightarrow \int$$

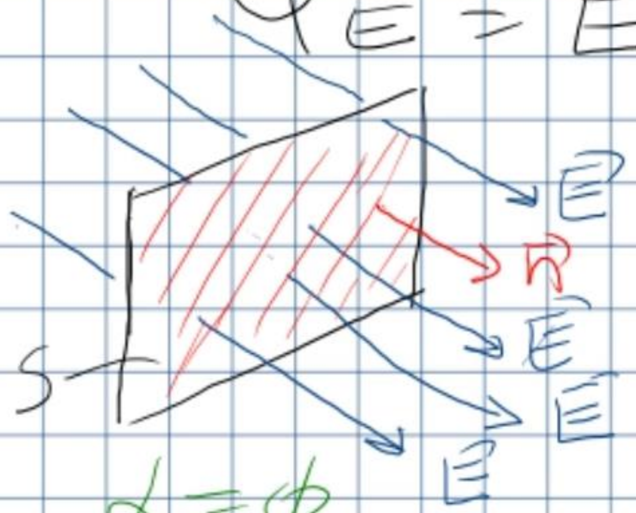
$$\Psi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S E\cdot dS\cdot\cos\sphericalangle(\vec{E},\vec{n}) = \int_S E\, dS\, \cos\alpha$$

$$\Psi_E = \int_S E\,dS\cos\alpha = E\cdot\cos\alpha\cdot\int_S dS = E\cdot S\cdot\cos\alpha$$

$\alpha = 0 \Rightarrow$ површ нормална на линије $\vec{E}$

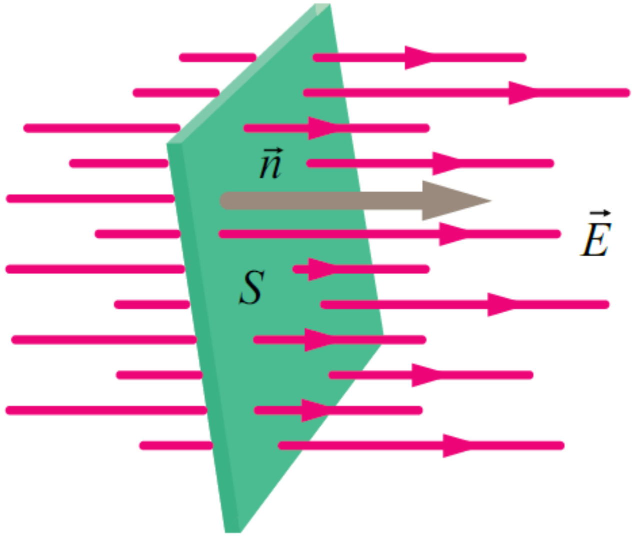
$\vec{E}$ и $\vec{n} \Rightarrow \cos\alpha = 1$

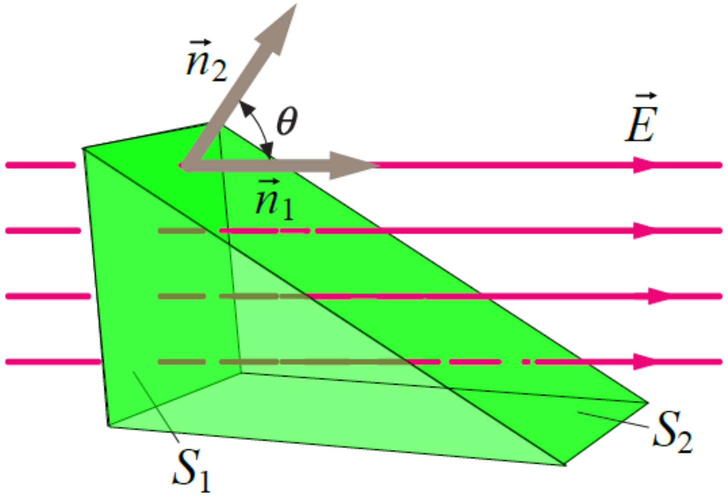
$$\Psi_E = E\cdot S$$



$\alpha = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad \vec{E} \perp \vec{n} \Rightarrow \Psi_E = 0$

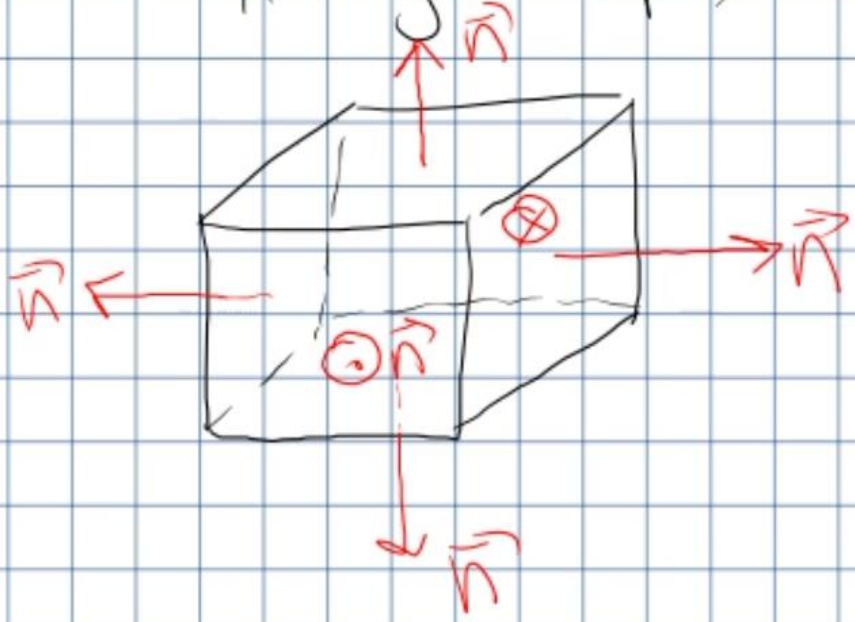

$\vec{n}$
$\vec{E}$
S

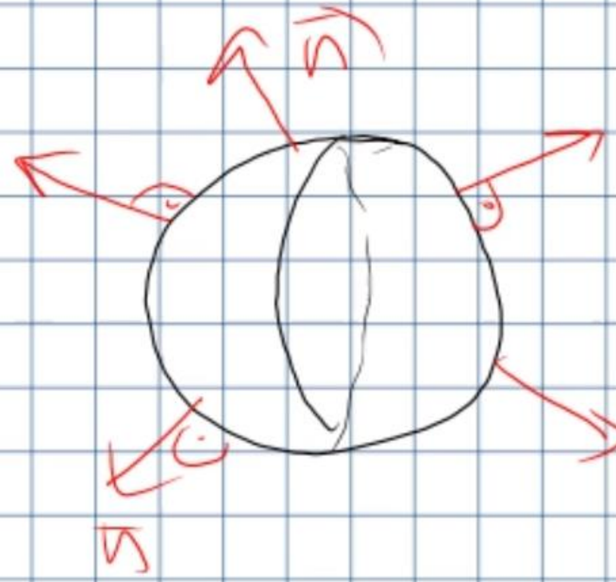

$\vec{n}_2$
θ
$\vec{E}$
$\vec{n}_1$
S_2
S_1

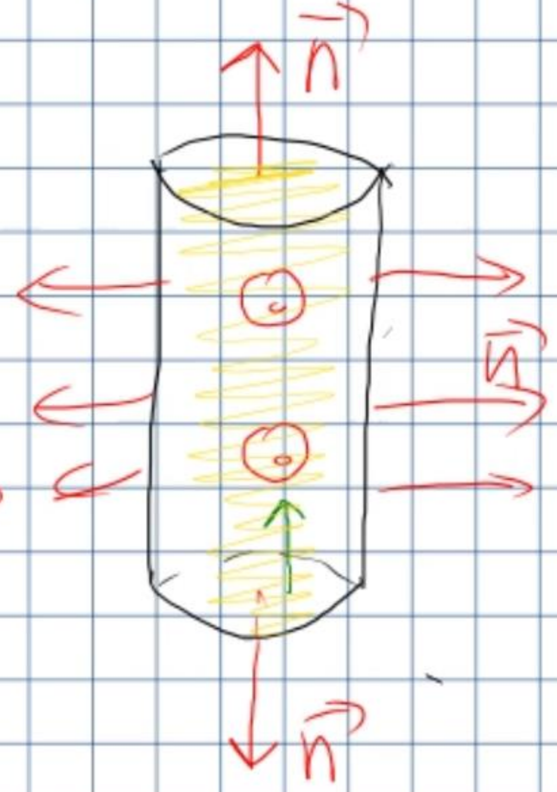
ако се ради о затвореној површини

$\vec{n}$ усмерена упоље

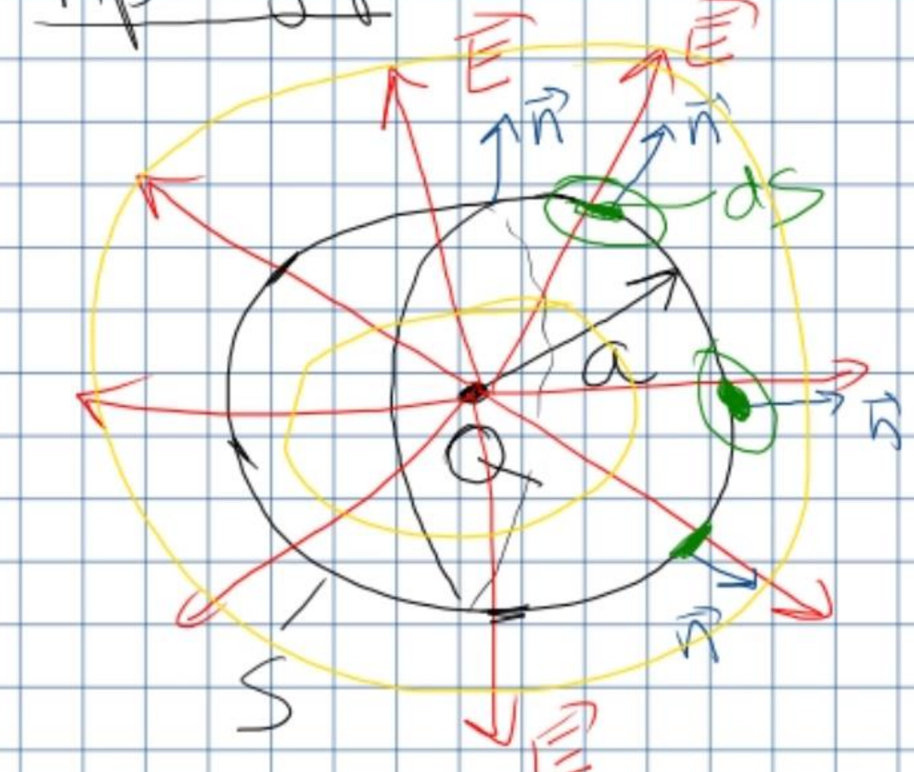
„од површи"







Примјер:



$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

$$\Psi_E = \oint_S E \cdot dS \cdot \underbrace{\cancel{\cos\measuredangle(\vec{E}, d\vec{S})}}_{0}$$

$$\Psi_E = \oint_S E\, dS$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$\Psi_E = E \oint_S dS = E \cdot S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot 4\pi a^2$$

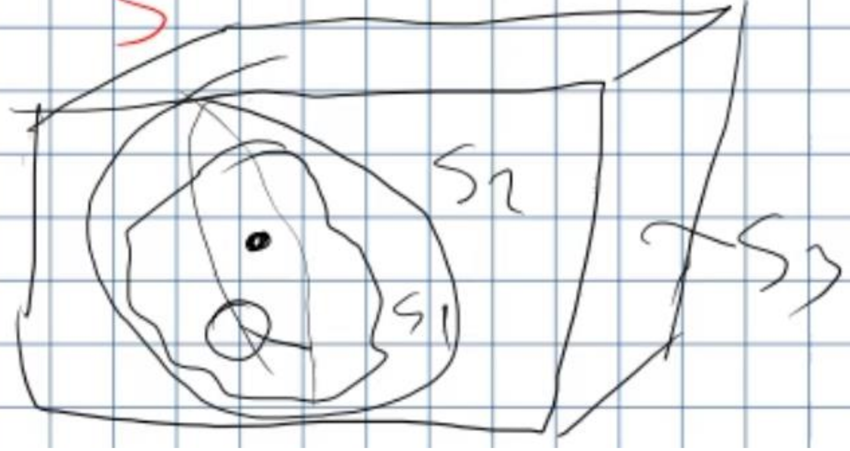
$$\boxed{\Psi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Не зависи од конфигурације облика!

Флукс вектора $\vec{E}$ тачкастог наел. Q исти је кроз произвољну затворену површ која обухвата наел. Q:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{ако } S \text{ обухвата } Q$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{ако } S \text{ не обухвата } Q$$



$$\Psi_{S1} = \Psi_{S2} = \Psi_{S3} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Psi_{S4} = 0$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n)\,d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 d\vec{S} + \ldots + \oint_S \vec{E}_n d\vec{S} = \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + \Psi_n$$

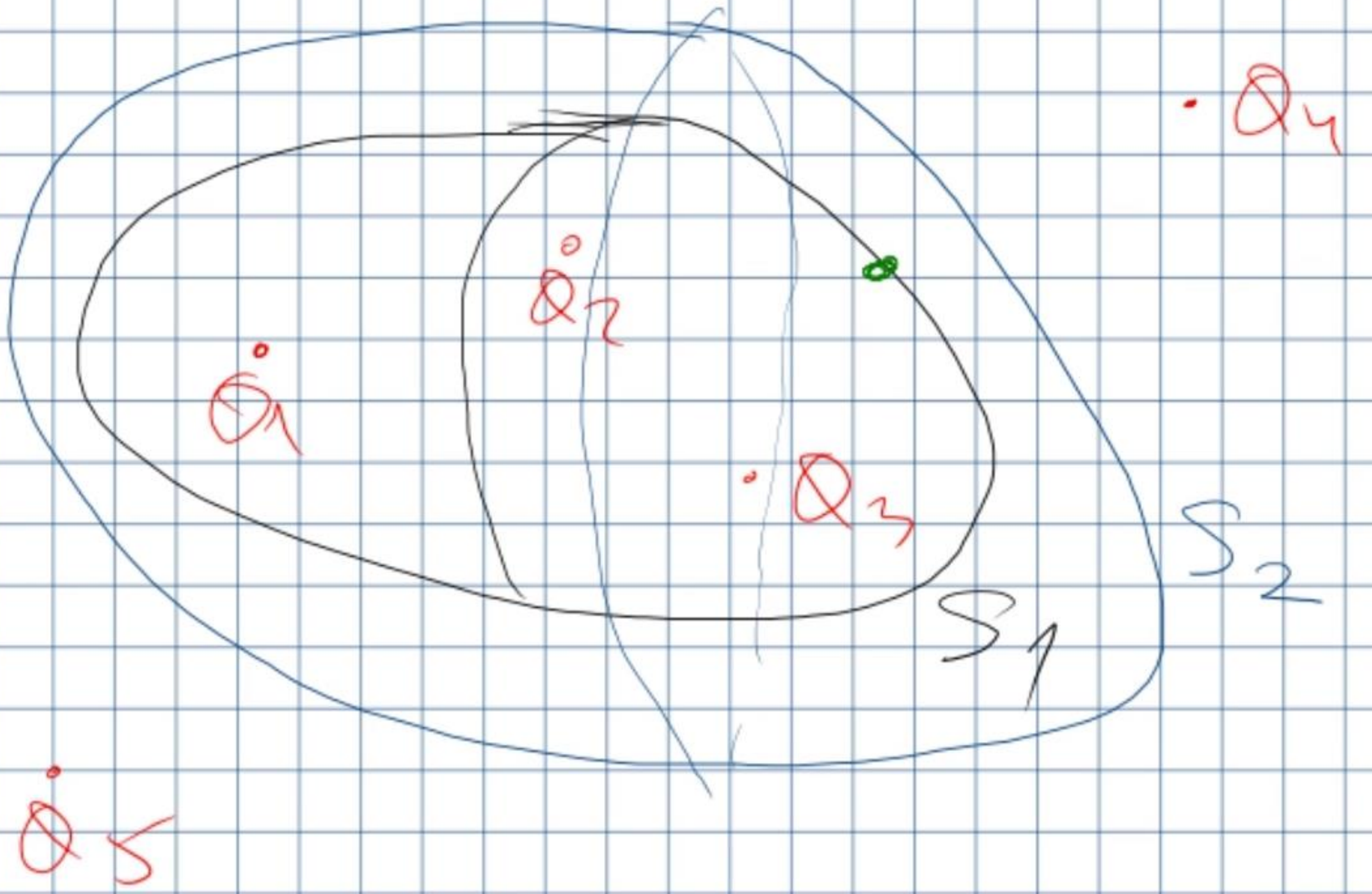
$$= \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0} + \ldots + \frac{Q_n}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{uS}}{\varepsilon_0}}$$

→ укупна количина наел. у S

Q_{uS} – алгебарска сума

$Q > 0$ или $Q < 0$



$$\Psi_{E\,\text{kroz}\,S1} = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{\varepsilon_0}$$

$$\Psi_{E\,\text{kroz}\,S2} = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{\varepsilon_0}$$

Primjer: U svim tačkama unutar neke zapremine v vektor jacine električnog polja je jednak nuli.

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{us}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{us} = \varepsilon_0 \oint_S \cancel{\vec{E}}^{\,0}\,d\vec{S}$$

Unutar površi S (koja obuhvata sve tačke zapremine v) ili nema naelektrisanja ili jednak broj pozitivnog i negativnog naelektrisanja.

$$Q_{us} = 0 \quad \text{jer je } \vec{E} = 0$$

Možda možemo pomisliti da onda unutar površi S, u jednom njenom dijelu može postojati višak pozitivnih naelektrisanja, a na drugom isto toliko negativnih naelektrisanja. Međutim, nekom novom površi S možemo obuhvatiti samo jedan deo zapremine v i za njega takođe mora važiti gornja relacija. **Prema tome, unutar tijela u kom je E=0 ne moze biti viška naelektrisanja u bilo kojoj tacki.**

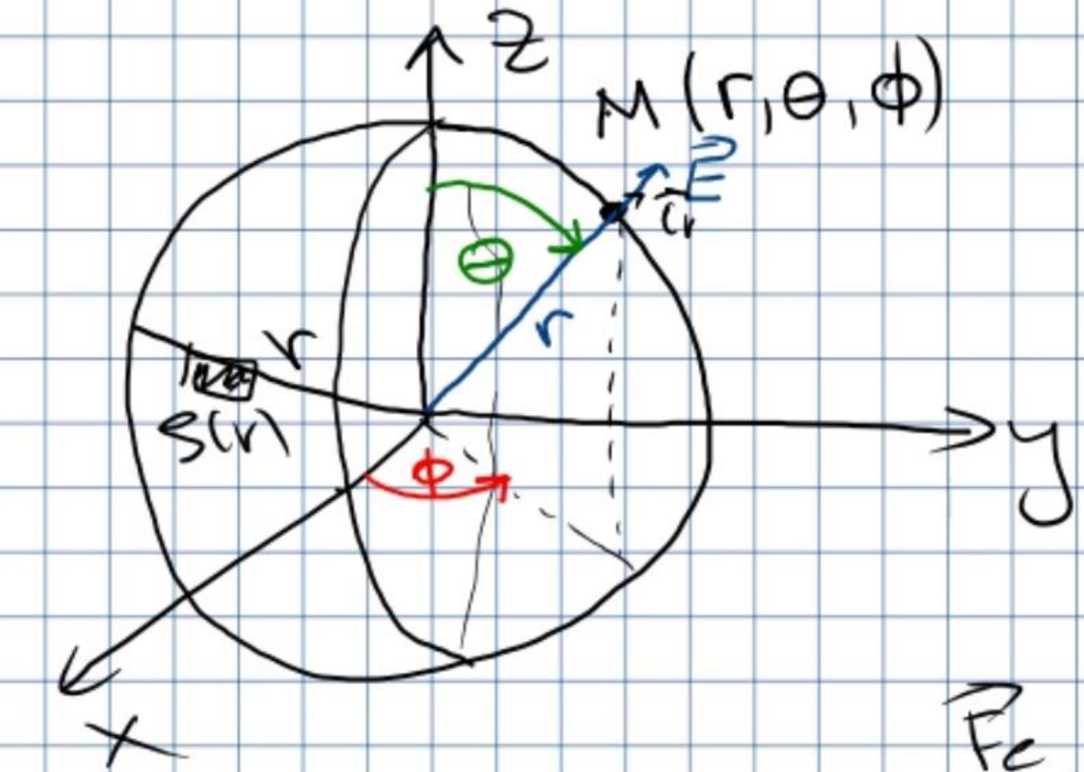
ОДРЕЂИВАЊЕ ЕЛ. ПОЉА ПОМОЋУ ГАУСОВОГ ЗАКОНА

1. расподјела наел. зависи само од одстојања од једне тачке (r-координата у СКС)
2. расподјела наел. зависи само од одстојања од једне праве (r-координата у ЦКС)
3. расподјела наел. зависи само од одстојања од једне равни (било која координата у ДКС)

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{US}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E}$$

сферну, цилиндричну и равну симетрију

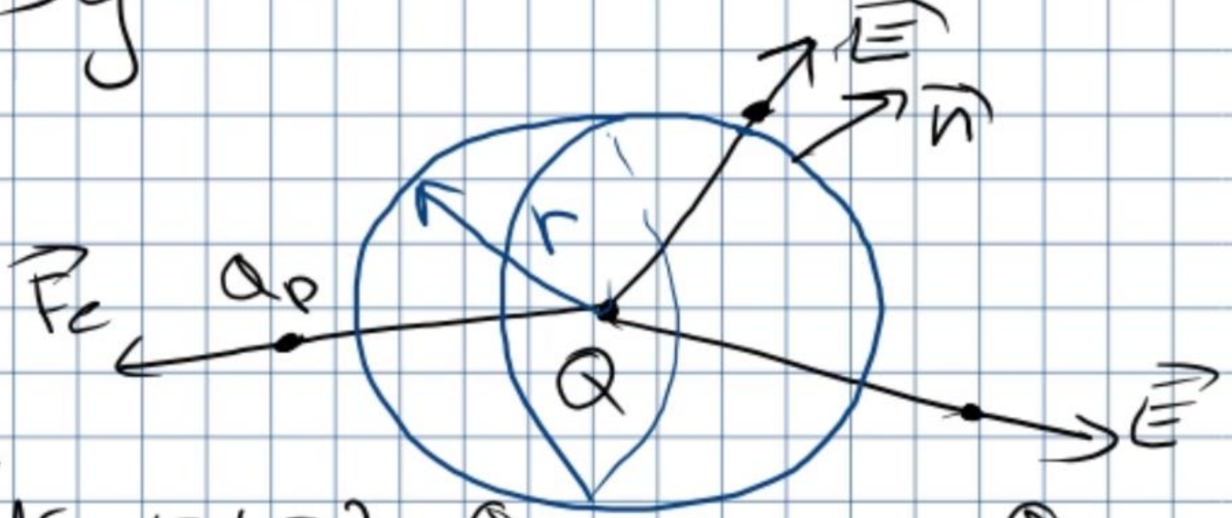
СФЕРНА СИМЕТРИЈА



$\rho(r)$

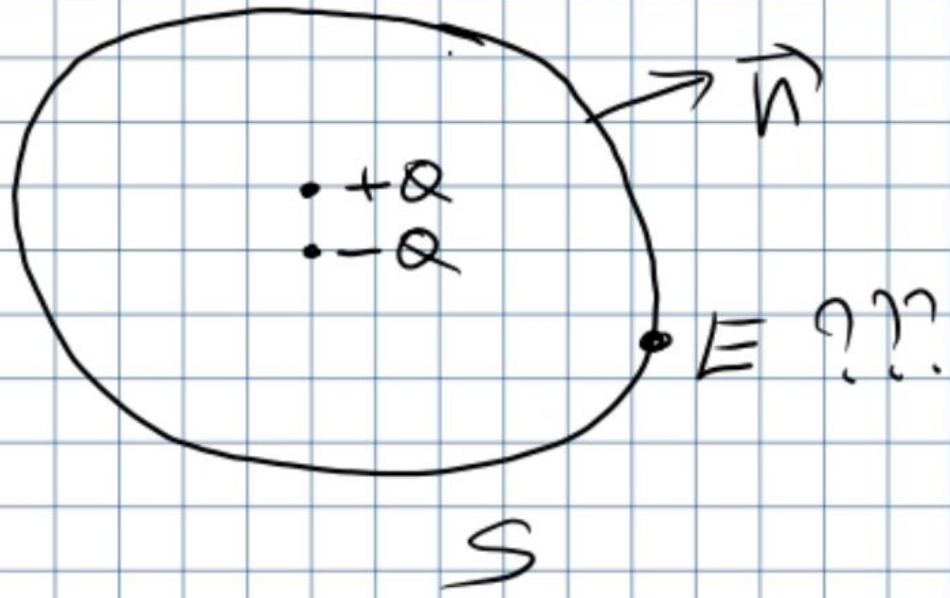
$\vec{E} = E_r \cdot \vec{i}_r$

$E_r = E_r(r)$



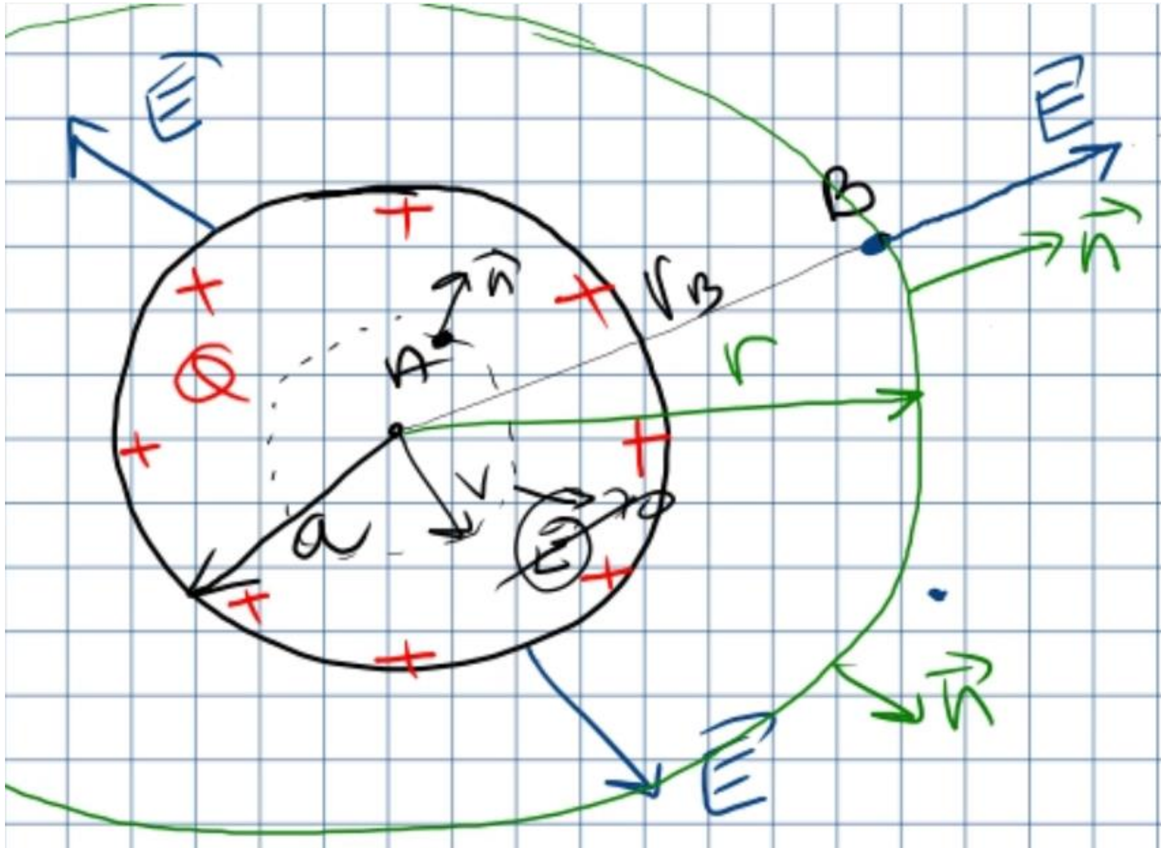
$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \oint_S E\,dS = E\cdot\oint_S dS = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- електростатичний диполь



$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{ис}}{\varepsilon_0} = \frac{+Q-Q}{\varepsilon_0} = \varnothing$$

$$\Psi_E = \varnothing$$



$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{US}}{\varepsilon_0}$$

$r > a$

$$\oint_S E\,dS = E\oint_S dS = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r < a$

$$\oint_S E\,dS = E\oint_S dS = \frac{Q_{US} \to 0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

$$V_B = \int_B^{+\infty} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{r_B}^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \ldots = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$ изван сфере $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$V_A = \int_A^{+\infty} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_A^{a} \vec{E}\,d\vec{l} \to 0 + \int_a^{+\infty} \vec{E}\,d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$ унутар сфере

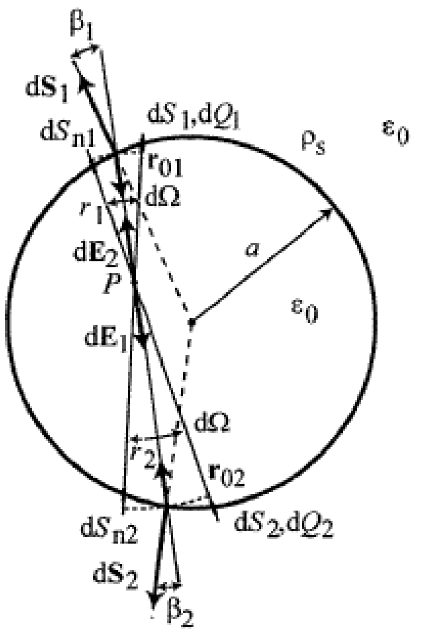
****31.** Сфера полупречника a равномерно је наелектрисана наелектрисањем површинске густине ρ_s и налази се у ваздуху далеко од других тела. Показати да у сфери нема електричног поља.

Решење

На слици 31.1 је приказана произвољна тачка P у сфери и два елементарна конуса (са врхом у тачки P) око тетиве која пролази кроз тачку P. Ови конуси на сфери исецају елементарне површи dS_1, односно dS_2, са наелектрисањима dQ_1, односно dQ_2. У тачки P, вектори електричних поља ових наелектрисања су

$$\mathbf{dE}_1 = \frac{dQ_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\mathbf{r}_{01} = \frac{\rho_s\, dS_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\mathbf{r}_{01} \text{ и} \quad (31.1)$$

$$\mathbf{dE}_2 = \frac{dQ_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\mathbf{r}_{02} = \frac{\rho_s\, dS_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\mathbf{r}_{02}. \quad (31.2)$$



Слика 31.1.

За оба елементарна конуса просторни угао $d\Omega$ је исти (слика 31.1), па је:

$$d\Omega = \frac{dS_{n1}}{r_1^2} = -\frac{\mathbf{dS}_1\cdot\mathbf{r}_{01}}{r_1^2} = \frac{dS_1\cos\beta_1}{r_1^2} = \frac{dS_{n2}}{r_2^2} = \frac{dS_2\cos\beta_2}{r_2^2} = -\frac{\mathbf{dS}_2\cdot\mathbf{r}_{02}}{r_2^2}, \quad (31.3)$$

$$\mathbf{dE}_1 = \frac{\rho_s\, d\Omega}{4\pi\varepsilon_0\cos\beta_1}\mathbf{r}_{01} \text{ и} \quad (31.4)$$

$$\mathbf{dE}_2 = \frac{\rho_s\, d\Omega}{4\pi\varepsilon_0\cos\beta_2}\mathbf{r}_{02}. \quad (31.5)$$

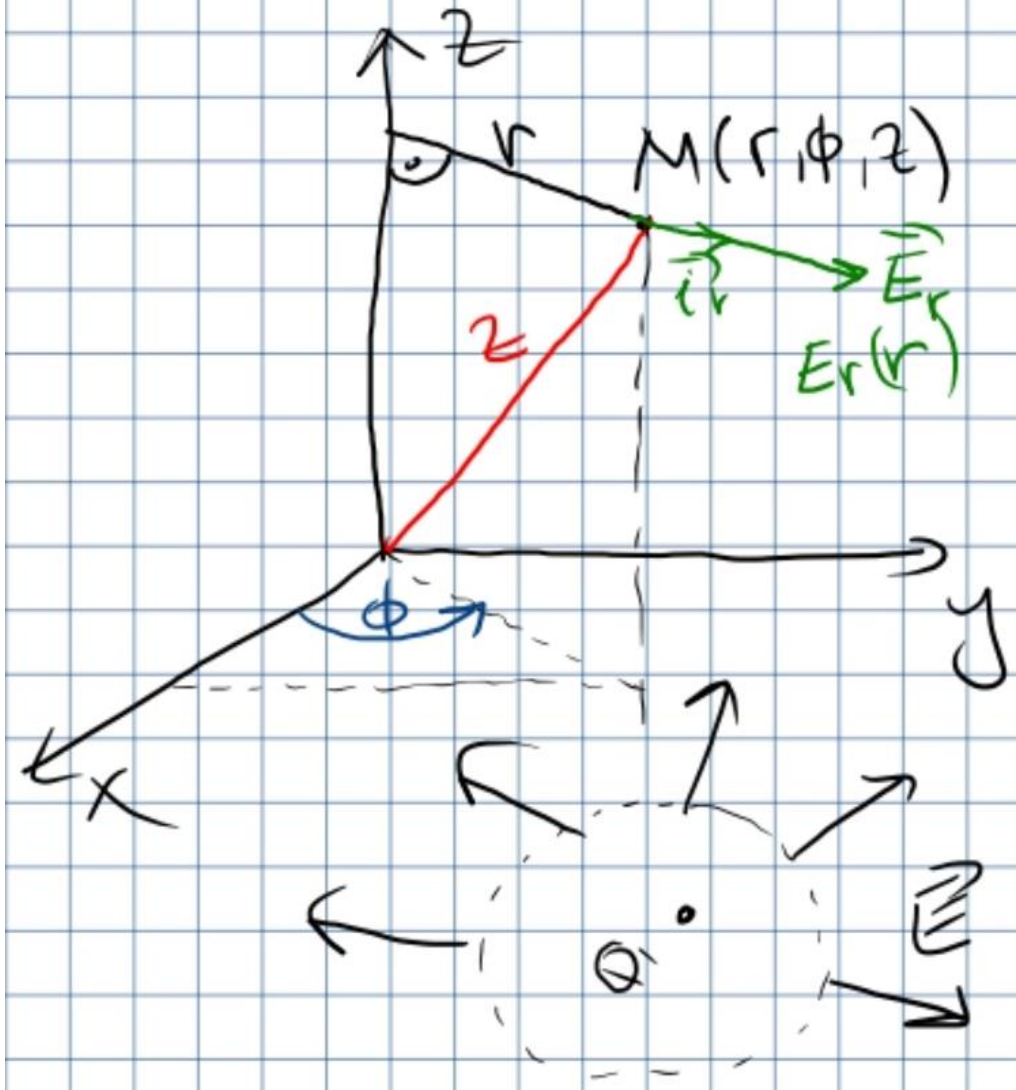
Сада је у тачки P, имајући у виду да је $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ код сфере и $\mathbf{r}_{01} = -\mathbf{r}_{02}$,

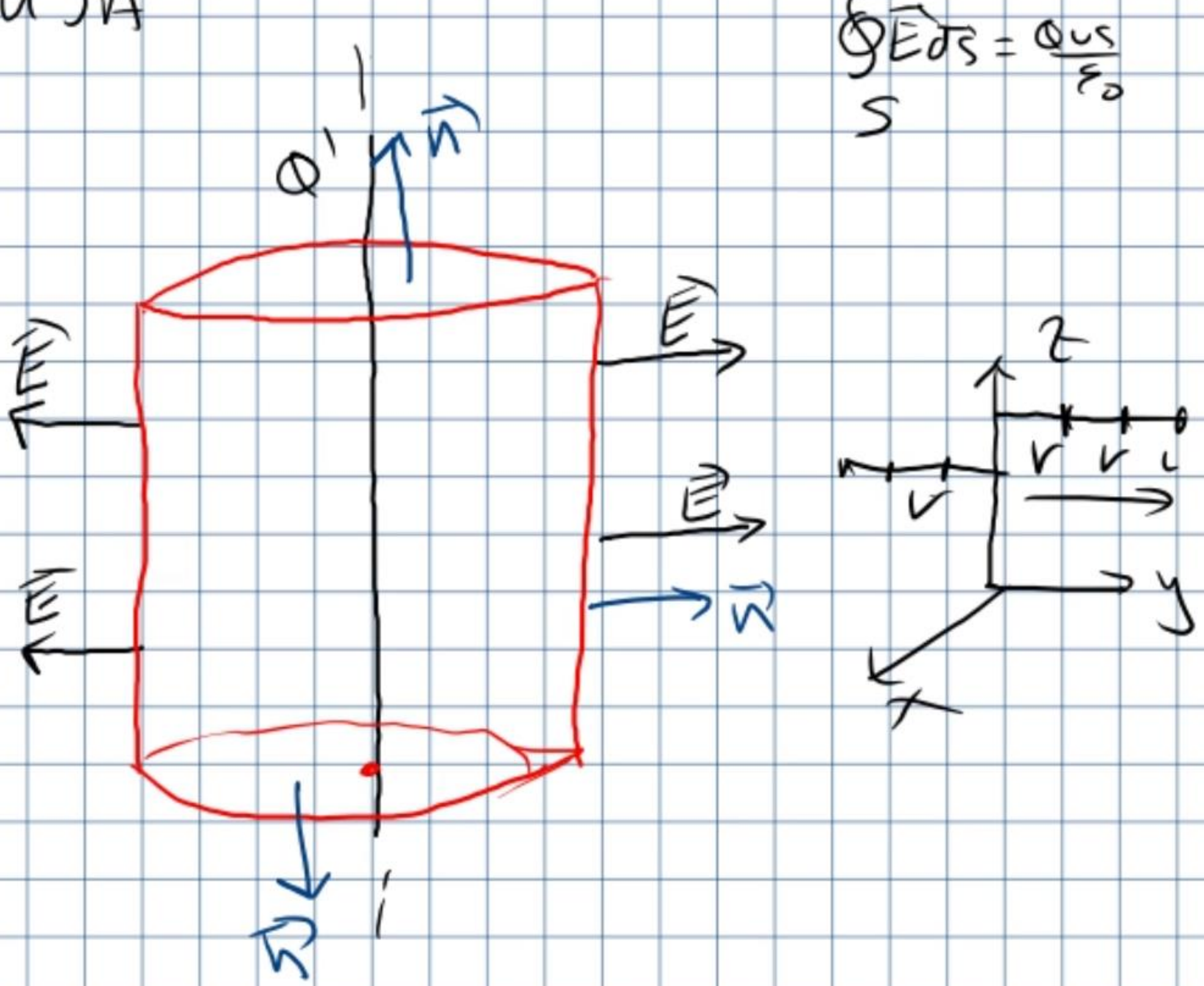
$$\mathbf{dE} = \mathbf{dE}_1 + \mathbf{dE}_2 = \frac{\rho_s\, d\Omega}{4\pi\varepsilon_0\cos\beta}(\mathbf{r}_{01} + \mathbf{r}_{02}) = 0. \quad (31.6)$$

Примењујући овакав поступак за све парове конуса који полазе из тачке P, закључујемо да је електростатичко поље у свим тачкама у сфери једнако нули.

Zbirka, zadatak br. 31 (stranice 25 i 26)

ЦИЛИНДРИЧНА СИМЕТРИЈА





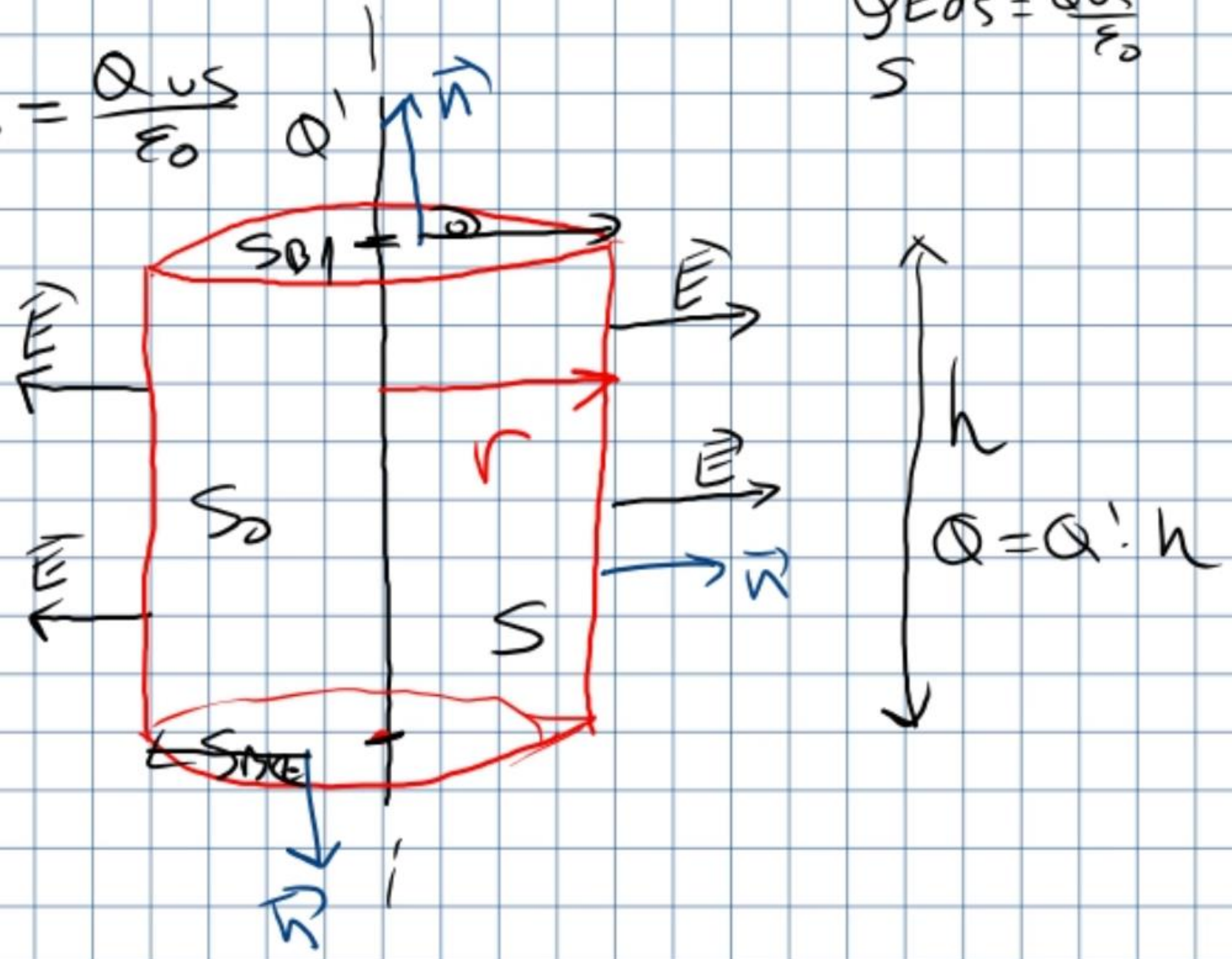
ЦИЛИНДРИЧНА СИМЕТРИЈА

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \cancel{\int_{S_{B1}} \vec{E}\,d\vec{S}} + \cancel{\int_{S_{B2}} \vec{E}\,d\vec{S}} + \int_{S_0} \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{us}}{\varepsilon_0}$$

$$E \int_{S_0} dS = \frac{Q_{us}}{\varepsilon_0}$$

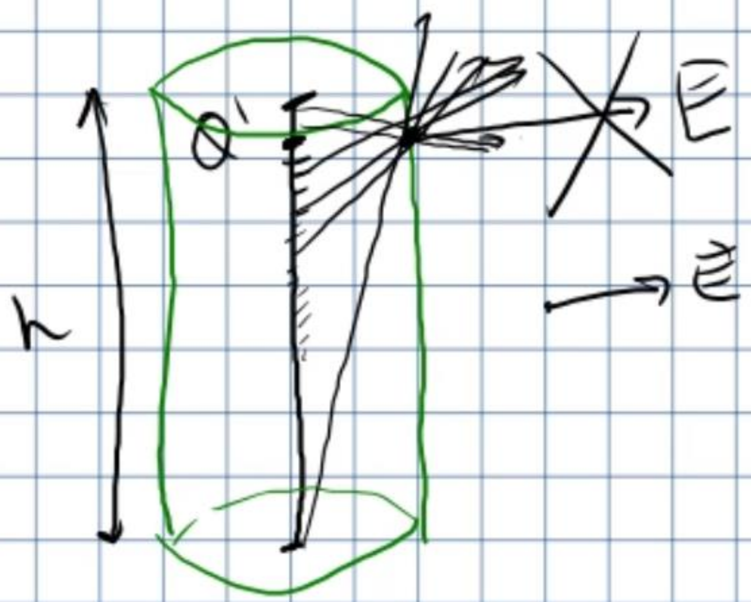
$$E \cdot 2r\pi \cdot h = \frac{Q' \cdot h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{us}}{\varepsilon_0}$$

ЦИЛИНДАРИЧНА СИМЕТРИЈА

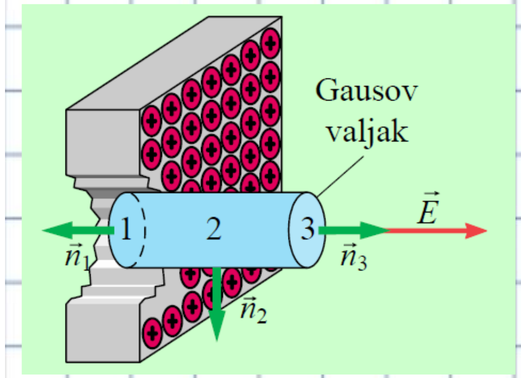


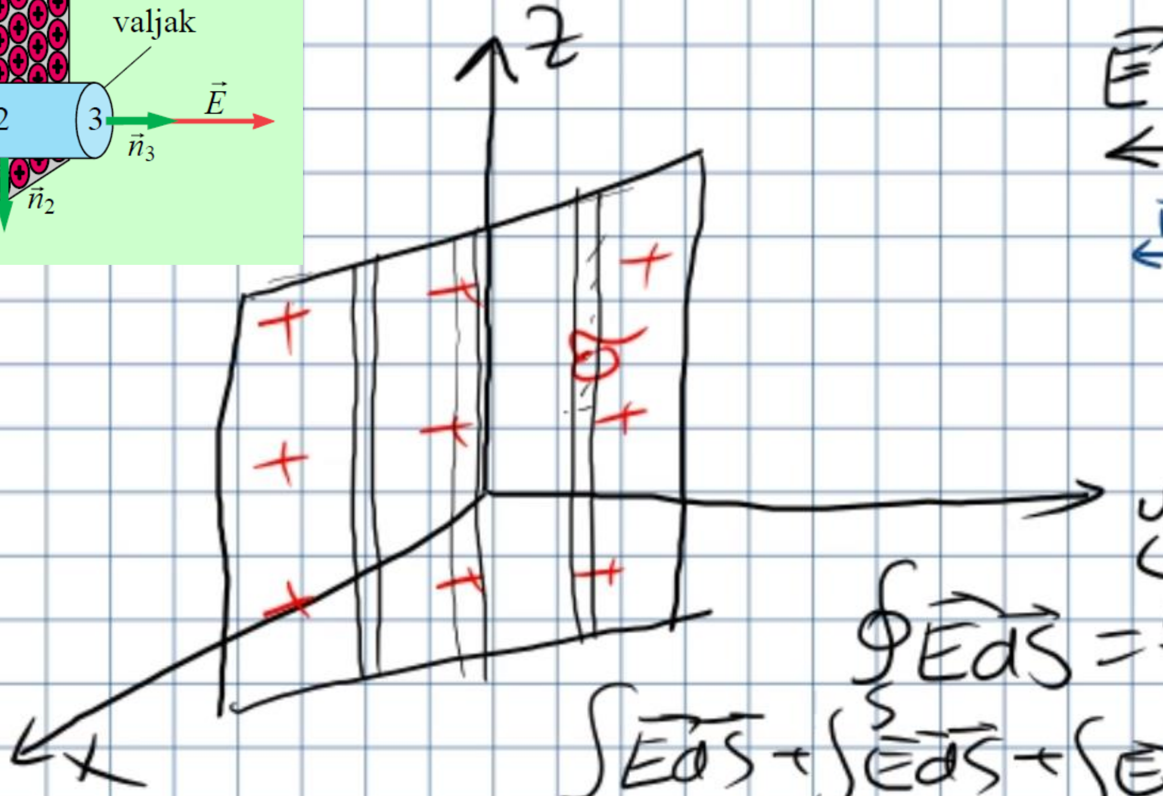
$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{u}}{\varepsilon_0} = \frac{Q' \cdot h}{\varepsilon_0} = \Psi_E$$

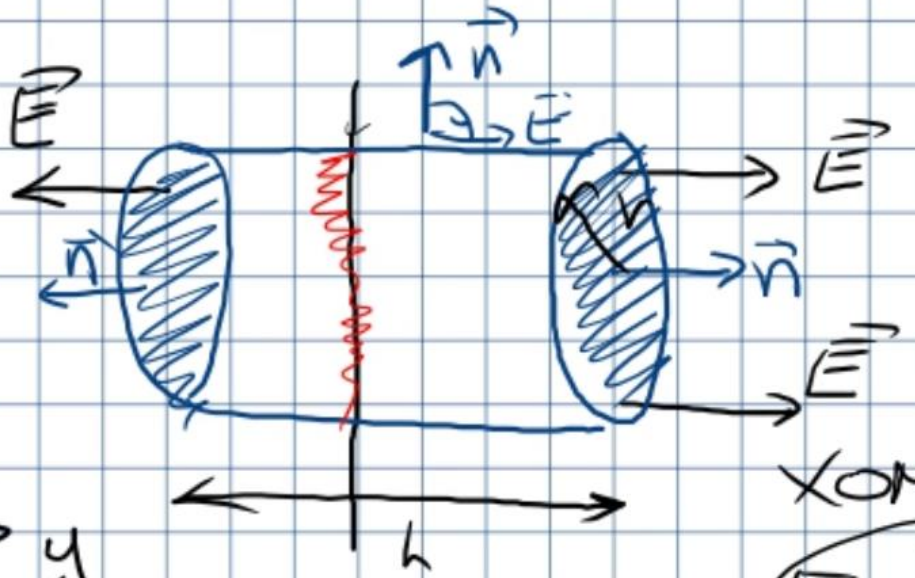
$$E = ?$$

РАВНА СИМЕТРИЈА

наелектрисана раван σ







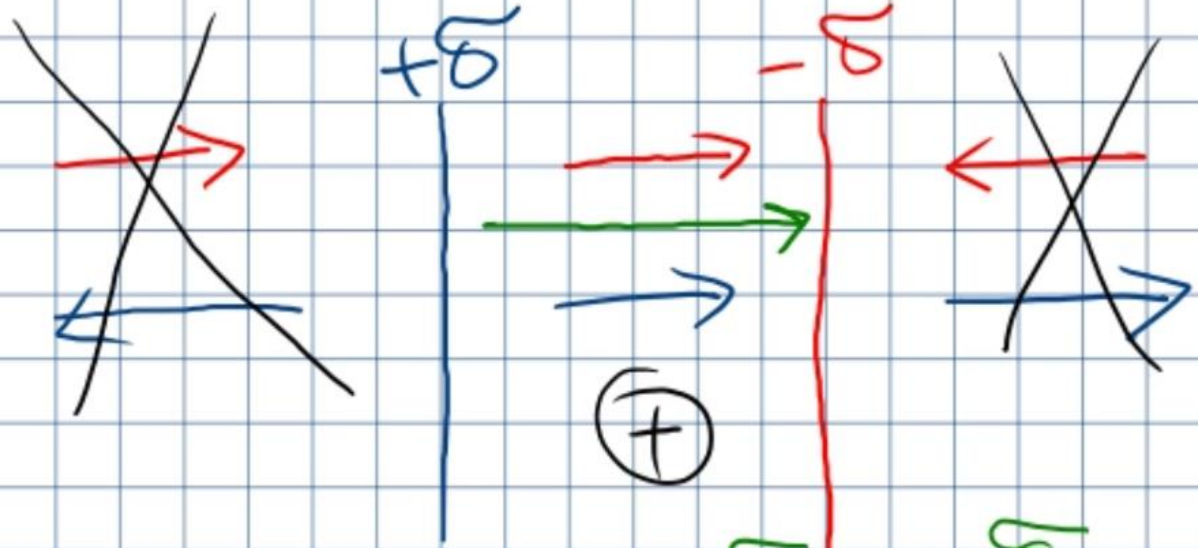
хомогено

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{us}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S_B}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{S_B} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_B} \vec{E}d\vec{S} + \int_{S_o} \vec{E}d\vec{S} = 2E\cancel{S_B} = \frac{\sigma \cancel{S_B}}{\varepsilon_0}$$

РАВНА СИМЕТРИЈА



$$E = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$