TERMIN 4 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★

Zadatak 1.
Jedna nula polinoma

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

je $x_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$. Druga nula polinoma $P(x)$ je $x_2 = 0$. Odrediti vrijednosti realnih koeficijenata a, b i c.

Rješenje

Iz uslova zadatka imamo da je jedna nula polinoma $P(x)$

$$x_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

Kako je nula polinoma i $\overline{x_1}$, te kako je nula polinoma iz uslova zadatka $x_2 = 0$, zaključujemo da su nule polinoma:

$$x_1 = 1 + i\sqrt{3},\ \ x_2 = 0 \text{ i } x_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Dalje zadatak možemo uraditi na više načina.

Prvi način:
Kako je

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
&= \left(x - \left(1 + i\sqrt{3}\right)\right) \cdot (x - 0) \cdot \left(x - \left(1 - i\sqrt{3}\right)\right) \\
&= x\left(x^2 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)x - \left(1 - i\sqrt{3}\right)x + \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right) \\
&= x \cdot \left(x^2 - x - \cancel{i\sqrt{3}x} - x + \cancel{i\sqrt{3}x} + 1 - 3i^2\right) \\
&= x \cdot \left(x^2 - 2x + 4\right) \\
&= x^3 - 2x^2 + 4x.
\end{aligned}$$

Odavde je

$$a = -2,\ \ b = 4 \text{ i } c = 0.$$

Drugi način:
Iz Vijetovih fomula imamo:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= b \\
x_1x_2x_3 &= -c
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
1 + \cancel{i\sqrt{3}} + 0 + 1 - \cancel{i\sqrt{3}} &= -a \\
\cancel{(1 + i\sqrt{3}) \cdot 0} + (1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3}) + \cancel{0 \cdot (1 - i\sqrt{3})} &= b \\
\cancel{(1 + i\sqrt{3}) \cdot 0 \cdot (1 - i\sqrt{3})} &= -c.
\end{aligned}$$

Odavde je

$$a = -2,\ \ b = 4 \text{ i } c = 0.$$

★

Zadatak 2.
Odrediti realni polinom $P(x)$ najnižeg stepena ako je poznato da ima dvostruku nulu $x_1 = i$ i važi $P(0) = 2023$.

Rješenje

Iz uslova zadatka znamo da je $x_1 = x_2 = i$. Kako kompleksne nule dolaze u paru, znamo da $P(x)$ ima još dvije nule $x_3 = x_4 = -i$.
Pošto je polinom $P(x)$ najnižeg stepena, zaključujemo da je u pitanju polinom četvrtog stepena, pa je

$$\begin{aligned} P(x) &= A \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ &= A \cdot (x - i)(x - i)\big(x - (-i)\big)\big(x - (-i)\big) \\ &= A \cdot (x - i)(x + i)(x - i)(x + i) \\ &= A \cdot \left(x^2 - i^2\right)^2 \\ &= A \cdot \left(x^2 + 1\right)^2 \\ &= A \cdot \left(x^4 + 2x^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Kako je $P(0) = 2023$ imamo da je

$$A \cdot \left(0^4 + 2 \cdot 0^2 + 1\right) = 2023 \quad \Leftrightarrow \quad A = 2023.$$

Sada je

$$P(x) = 2023 \cdot \left(x^4 + 2x^2 + 1\right).$$

★★

Zadatak 3.
Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da proizvod dvije nule polinoma

$$P(x) = x^3 + ax^2 - 11x + 5$$

bude jednak -1, a zatim predstaviti $P(x)$ u faktorisanom obliku.

Rješenje

Neka su x_1, x_2 i x_3 nule polinoma $P(x)$ i neka je, iz uslova zadatka, $x_1x_2 = -1$.
Iz Vijetovih formula:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -11 \\ x_1x_2x_3 &= -5. \end{aligned}$$

Iz treće jednačine imamo da je $-1 \cdot x_3 = -5$ odakle je $x_3 = 5$ pa uvrštavanjem u prve dvije jednačine dobijamo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5 &= -a \\ -1 + 5x_1 + 5x_2 &= -11 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -5 - a \\ 5\left(x_1 + x_2\right) &= -10. \end{aligned}$$

Izvrštavanjem $x_1 + x_2$ iz prve jednačine u drugu dobijamo

$$5 \cdot (-5 - a) = -10 \quad \Rightarrow \quad -5 - a = -2 \quad \Rightarrow \quad a = -3.$$

Sada imamo da za nule x_1 i x_2 polinoma $P(x)$ vrijedi

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -2. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x_2 = -2 - x_1$ u prvu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot (-2 - x_1) = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x_1 - x_1^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1^2 + 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ako je $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, tada je $x_2 = -1 - \sqrt{2}$ i obrnutno. Stoga, nule polinoma $P(x)$ su:

$$x_1 = -1 + \sqrt{2}, \;\; x_2 = -1 - \sqrt{2} \text{ i } x_3 = 5,$$

pa se polinom $P(x)$ u faktorisanom obliku zapisuje kao

$$P(x) = \left(x - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(-1 - \sqrt{2}\right)\right)(x - 5)\,.$$

★★

Zadatak 4.
Odrediti monični polinom trećeg stepena $P(x)$ tako da bude djeljiv sa $x+i$, a pri dijeljenju sa $x+2$ daje ostatak 10.

Rješenje

Kako je $P(x)$ djeljiv sa $x+i = x-(-i)$, zaključujemo da je $x_1 = -i$ nula polinoma $P(x)$. Stoga, druga nula polinoma $P(x)$ je $x_2 = i$.
Pošto je $P(x)$ moničan polinom trećeg stepena i kako je poznato da su $x_1 = -i$ i $x_2 = i$ njegove nule, polinom $P(x)$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+i)(x-i)(x+c) \\ &= (x^2+1)(x+c). \end{aligned}$$

Kako polinom $P(x)$ pri dijeljenju sa $x+2$ daje ostatak 10, na osnovu Bezuovog stava znamo da je $P(-2) = 10$, pa je

$$\begin{aligned} & \left((-2)^2+1\right)\cdot(-2+c) = 10 \\ \Leftrightarrow \quad & 5\cdot(c-2) = 10 \\ \Leftrightarrow \quad & c-2 = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & c = 4. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+1)(x+4) \\ &= x^3+4x^2+x+4. \end{aligned}$$

★★

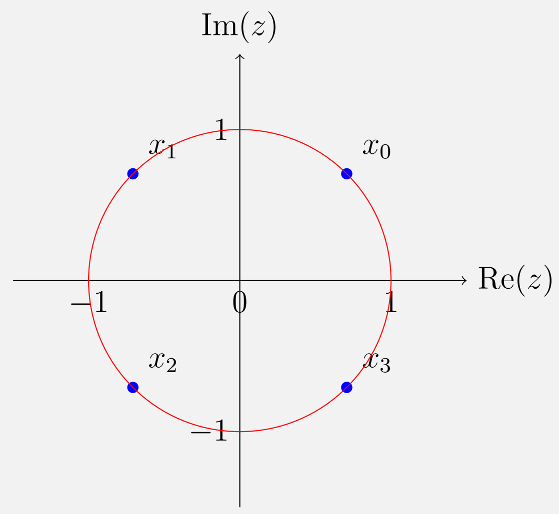
Zadatak 5.
Naći realne faktore polinoma $P(x)=x^4+1$.

Rješenje

Prvi način:
Kako je $P(x)=x^4+1>0,\ (\forall x\in\mathbb{R})$, zaključujemo da polinom $P(x)$ ima dva para konjugovano - kompleksnih nula.

$$\begin{aligned}
& x^4+1=0\\
\Leftrightarrow\quad & x^4=-1\\
\Leftrightarrow\quad & x=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}\\
\Leftrightarrow\quad & x=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\ \ k\in\{0,1,2,3\}\\
\Leftrightarrow\quad & x_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
& x_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
& x_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
& x_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.
\end{aligned}$$

Dakle, nule polinoma $P(x)$ su x_0, x_1, x_2 i x_3.



Sada je jasno da se polinom $P(x)$ može faktorisati kao proizvod kompleksnih faktora:

$$P(x)=\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right).$$

Primijetimo da vrijedi $x_0=\overline{x_3}$ i $x_1=\overline{x_2}$ pa se polinom $P(x)$ može faktorisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
P(x)&=\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\\
&=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right),
\end{aligned}$$

što jesu realni faktori polinoma $P(x)$.

Drugi način:
Primijetimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
P(x)&=x^4+1\\
&=x^4+2x^2+1-2x^2\\
&=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2\\
&=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).
\end{aligned}$$

Zadatak 6.
Naći sve uređene parove $(p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ takve da je polinom $x^4 + px^2 + q$ djeljiv sa polinomom $x^2 + px + q$.

Rješenje

Nakon dijeljenja polinoma $P(x) = x^4 + px^2 + q$ polinomom $Q(x) = x^2 + px + q$ dobijamo:

$$x^4 + px^2 + q = \left(x^2 + px + q\right) \cdot \left(x^2 - px + \left(p^2 + p - q\right)\right) + \Big(p\left(2q - p - p^2\right)x + q - q\left(p^2 + p - q\right)\Big).$$

Pošto je polinom $P(x)$ djeljiv polinomom $Q(x)$, ostatak pri dijeljenju

$$R(x) = p\left(2q - p - p^2\right)x - q\left(p^2 + p - q - 1\right)$$

mora biti jednak 0 za svako x pa zaključujemo:

$$p\left(2q - p - p^2\right) = 0 \tag{1}$$
$$q\left(p^2 + p - q - 1\right) = 0. \tag{2}$$

Iz jednačine (2) imamo dvije mogućnosti.

1. slučaj: $q = 0$
Uvrštavanjem u jednačinu (1) dobijamo

$$\begin{aligned} & p\left(-p - p^2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & p^2(1 + p) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & p = 0 \ \vee \ p = -1. \end{aligned}$$

Dakle, u ovom slučaju imamo dva rješenja: $(p,q) = (0,0)$ i $(p,q) = (-1,0)$.

2. slučaj: $p^2 + p - q - 1 = 0 \ \Rightarrow \ q = p^2 + p - 1$
Uvrštavanjem u jednačinu (1) dobijamo

$$\begin{aligned} & p\left(2 \cdot (p^2 + p - 1) - p - p^2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & p\left(p^2 + p - 2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & p(p+2)(p-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & p = 0 \ \vee \ p = -2 \ \vee \ p = 1. \end{aligned}$$

Za $p = 0$ dobijamo $q = -1$.
Za $p = -2$ dobijamo $q = 1$.
Za $p = 1$ dobijamo $q = 1$.
Dakle, u ovom slučaju imamo tri rješenja: $(p,q) = (0,-1)$, $(p,q) = (-2,1)$ i $(p,q) = (1,1)$.

Dakle, uređeni parovi (p,q) koji zadovoljavaju početni uslov su:

$$(p,q) = \left\{(-2,1), (-1,0), (0,-1), (0,0), (1,1)\right\}.$$

Zadatak 7.
Data je jednačina
$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0.$$
Riješiti datu jednačinu ako se zna da ona ima jedan kompleksan korijen čiji je realni dio jednak imaginarnom dijelu.

Rješenje

Neka je $x_1 = a + ai$ kompleksno rješenje koje zadovoljava uslov da su mu realni i imaginarni dijelovi jednaki.
Tada je takođe $x_2 = a - ai$ rješenje jednačine, pa je polinom

$$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

djeljiv polinomom

$$\begin{aligned} Q(x) &= \big(x - (a + ai)\big)\big(x - (a - ai)\big) \\ &= x^2 - (a + ai)\,x - (a - ai)\,x + (a + ai)(a - ai) \\ &= x^2 - 2ax + 2a^2. \end{aligned}$$

Nakon dijeljenja polinoma $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ polinomom $Q(x) = x^2 - 2ax + 2a^2$ dobijamo:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = \left(x^2 - 2ax + 2a^2\right) \cdot \Big(x^2 + (2a + 1)\,x + \left(2a^2 + 2a + 2\right)\Big) + \Big(\left(2a^2 + 4a + 2\right)x - 4\left(a^4 + a^3 + a^2 - 1\right)\Big).$$

Pošto je polinom $P(x)$ djeljiv polinomom $Q(x)$, ostatak pri dijeljenju

$$R(x) = \left(2a^2 + 4a + 2\right)x - 4\left(a^4 + a^3 + a^2 - 1\right)$$

mora biti jednak 0 za svako x pa zaključujemo:

$$2a^2 + 4a + 2 = 0 \tag{3}$$
$$4\left(a^4 + a^3 + a^2 - 1\right) = 0. \tag{4}$$

Iz jednačine (3) imamo:

$$\begin{aligned} & 2a^2 + 4a + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\,(a + 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a = -1. \end{aligned}$$

Kako $a = -1$ zadovoljava jednačinu (4), zaključujemo da su dva rješenja početne jednačine $x_1 = -1 - i$ odnosno $x_2 = -1 + i$.
Kako je sada
$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = \left(x^2 - 2ax + 2a^2\right) \cdot \Big(x^2 + (2a + 1)\,x + \left(2a^2 + 2a + 2\right)\Big)$$
odnosno kako je
$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = \left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot \left(x^2 - x + 2\right)$$
zaključujemo da su preostala dva rješenja početne jednačine ujedno i rješenja jednačine

$$x^2 - x + 2 = 0.$$

Iz prethodne jednačine dobijamo
$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$
pa su sva rješenja početne jednačine:
$$x_1 = -1 - i,\;\; x_2 = -1 + i,\;\; x_3 = \frac{1 - \sqrt{7}i}{2} \text{ i } x_4 = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2}.$$

★★★★

Zadatak 8.
Ako korijeni jednačine sa realnim koeficijentima

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \ \ (a \neq 0)$$

obrazuju geometrijsku progresiju, dokazati da je $ac^3 = db^3$.

Rješenje

Neka su korijeni jednačine x_1, x_2 i x_3. Kako prethodni korijeni obrazuju geometrijsku progresiju, znamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} x_2 &= qx_1 \\ x_3 &= qx_2 = q^2x_1. \end{aligned}$$

Iz Vijetovih formula znamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x_1 + qx_1 + q^2x_1 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot qx_1 + x_1 \cdot q^2x_1 + qx_1 \cdot q^2x_1 &= \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot qx_1 \cdot q^2x_1 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

tj.

$$x_1 \cdot \left(1 + q + q^2\right) = -\frac{b}{a} \tag{5}$$

$$qx_1 \cdot x_1 \cdot \left(1 + q + q^2\right) = \frac{c}{a} \tag{6}$$

$$(qx_1)^3 = -\frac{d}{a}. \tag{7}$$

Iz jednačine (7) imamo da je $qx_1 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ pa uz uvrštavanje jednačine (5) u jednačinu (6) dobijamo:

$$\sqrt[3]{-\frac{d}{a}} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{c}{a}$$

odakle je, nakon kubiranja

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{d}{a}\right) \cdot \left(-\frac{b^3}{a^3}\right) = \frac{c^3}{a^3} \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{db^3}{a^4} = \frac{c^3}{a^3} \\ \Leftrightarrow \quad &db^3 = ac^3, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

★★★★

Zadatak 9.
Dokazati da je polinom

$$P(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}, \quad (m, n, p \in \mathbb{N})$$

djeljiv sa polinomom

$$Q(x) = x^2 + x + 1.$$

Rješenje

Polinom $P(x)$ je djeljiv polinomom $Q(x)$ ako i samo ako su nule polinoma $Q(x)$ ujedno i nule polinoma $P(x)$.
Odredimo nule polinoma $Q(x)$:

$$\begin{aligned} & x^2 + x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \end{aligned}$$

Neka je

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{i} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = e^{i\frac{4\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Potrebno je dokazati da vrijedi $P(x_1) = 0$ i $P(x_2) = 0$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3m} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3n+1} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3p+2} \\ &= e^{i\frac{2\pi}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}m} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}n} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}p} \\ &= \left(e^{i2\pi}\right)^m + e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot \left(e^{i2\pi}\right)^n + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \left(e^{i2\pi}\right)^p \\ &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \\ &= x_1^2 + x_1 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Slično pokazujemo da vrijedi:

$$\begin{aligned} P(x_2) &= \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{3m} + \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{3n+1} + \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{3p+2} \\ &= e^{i\frac{4\pi}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}m} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{4\pi}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}n} + \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2 \cdot e^{i\frac{4\pi}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}p} \\ &= \left(e^{i4\pi}\right)^m + e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot \left(e^{i4\pi}\right)^n + \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2 \left(e^{i4\pi}\right)^p \\ &= 1 + e^{i\frac{4\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2 \\ &= x_2^2 + x_2 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

U prethodnim izrazima smo koristili da je

$$\begin{aligned} e^{i2\pi} &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \quad \text{i} \\ e^{i4\pi} &= \cos 4\pi + i \sin 4\pi = 1. \end{aligned}$$

te da su x_1 i x_2 nule polinoma $Q(x)$, tj. da vrijedi

$$Q(x_1) = Q(x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_1 + 1 = 0 \quad \wedge \quad x_2^2 + x_2 + 1 = 0.$$

Ovim je dokaz završen.

Zadatak 10.
Dokazati da je za bilo koji prirodan broj n i realan broj α, $\sin\alpha \neq 0$ polinom

$$P_n(x) = x^n \sin\alpha - x\sin(n\alpha) + \sin\big((n-1)\alpha\big)$$

djeljiv polinomom

$$Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1.$$

Rješenje

Polinom $P(x)$ je djeljiv polinomom $Q(x)$ ako i samo ako su nule polinoma $Q(x)$ ujedno i nule polinoma $P(x)$.
Odredimo nule polinoma $Q(x)$:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2\cos\alpha \cdot x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & x_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \frac{2\cos\alpha \pm 2\sqrt{-\sin^2\alpha}}{2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha. \end{aligned}$$

Neka je

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} \\ x_2 &= \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Potrebno je dokazati da vrijedi $P_n(x_1) = 0$ i $P_n(x_2) = 0$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} P_n(x_1) &= \left(e^{i\alpha}\right)^n \sin\alpha - e^{i\alpha}\sin(n\alpha) + \sin\big((n-1)\alpha\big) \\ &= e^{in\alpha}\sin\alpha - (\cos\alpha + i\sin\alpha)\sin(n\alpha) + \sin\big((n-1)\alpha\big) \\ &= \big(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\big)\sin\alpha - \cos\alpha\sin(n\alpha) - i\sin(n\alpha)\sin\alpha + \sin\big((n-1)\alpha\big) \\ &= \cos(n\alpha)\sin\alpha + \cancel{i\sin(n\alpha)\sin\alpha} - \sin(n\alpha)\cos\alpha - \cancel{i\sin(n\alpha)\sin\alpha} + \sin(n\alpha - \alpha) \\ &= \cos(n\alpha)\sin\alpha - \sin(n\alpha)\cos\alpha + \sin(n\alpha)\cos\alpha - \cos(n\alpha)\sin\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

Slično pokazujemo da vrijedi:

$$\begin{aligned} P_n(x_2) &= \left(e^{-i\alpha}\right)^n \sin\alpha - e^{-i\alpha}\sin(n\alpha) + \sin\big((n-1)\alpha\big) \\ &= e^{-in\alpha}\sin\alpha - \big(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\big)\sin(n\alpha) + \sin\big((n-1)\alpha\big) \\ &= \big(\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)\big)\sin\alpha - (\cos\alpha - i\sin\alpha)\sin(n\alpha) + \sin\big((n-1)\alpha\big) \\ &= \cos(n\alpha)\sin\alpha - \cancel{i\sin(n\alpha)\sin\alpha} - \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cancel{i\sin(n\alpha)\sin\alpha} + \sin(n\alpha - \alpha) \\ &= \cos(n\alpha)\sin\alpha - \sin(n\alpha)\cos\alpha + \sin(n\alpha)\cos\alpha - \cos(n\alpha)\sin\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

U prethodnim izrazima smo koristili formulu za sinus razlike dvaju uglova:

$$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Ovim je dokaz završen.