① СТЕПЕНИ РЕДОВИ

1) ДЕФИНИЦИЈА СТЕПЕНОГ РЕДА. КОНВЕРГЕНЦИЈА. ОСОБИНЕ.

<u>ДЕФИНИЦИЈА</u>: Нека је дат низ реалних бројева $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Под степеним редом подразумијевамо <u>функционални</u> ред облика:

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (1)$$

→ општи члан реда је функција.

*степени ред је најједноставнији облик функц. реда.

гдје је $x_0\in\mathbb{R}$ центар степеног реда. Бројеви $a_n, n\in\mathbb{N}_0$ се називају коефицијенти степеног реда. Домен степеног реда је скуп $D=\{x\in\mathbb{R}:\ \text{ред } s(x) \text{ конвергира}\}$

Напомена: можемо посматрати и ред:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ односно } x_0=0$$

У (1) можемо увести смјену $x-x_0=t$, па добијамо

$$s(t+x_0)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad g(t)=s(t+x_0)$$

Ако је домен $D_g=(-R,R)$ тада је $D_s=(x_0-R,x_0+R)$ → транслација домена

ПРИМЈЕРИ:

① за $a_n=1$, имамо степени ред:

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad D_{f_1}=(-1,1)$$

→ геометријски ред конвергира ако је $x<1$

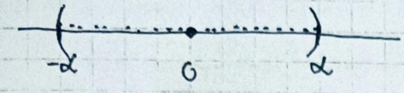
② за $a_n=\frac{1}{n!}$

$$f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad D_{f_2}=(-\infty,\infty)$$

③ за $a_n=\frac{n!}{3^n}$, $f_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}x^n$, $D_{f_3}=\{0\}$

ТЕОРЕМА: Ако степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ конвергира за неко $\alpha\neq 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ тада ред <u>апсолутно</u> конвергира за свако x тако да је $|x|<|\alpha|$.

доказ:



→ интервал увијек мора бити симетрич

→ за све вриједности мање од α мора да конвергира, за веће не знамо (може да конвергира, а и не мора)

Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$ конвергира тада $\lim_{n\to\infty} a_n \alpha^n = 0$. Даље закључујемо да је $|a_n \alpha^n| < M$, односно ограничен, $M > 0$. Тада за свако $|x| < |\alpha|$ вриједи:

Ако тежи ке 0, општи члан је ограничен

$$|a_n x^n| = \left|a_n \alpha^n \frac{x^n}{\alpha^n}\right| = \underbrace{|a_n \alpha^n|}_{\le m} \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n \le m \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$$

→ ограничили смо ред

Према томе за $|x| < |\alpha|$

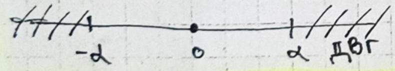
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \le M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n,$$ пошто је $|x| < |\alpha| \Rightarrow \left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$$ конвергира (геометријски ред)

ПОРЕДБЕНИ КРИТЕРИЈУМ

Према томе $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ конвергира за $|x| < |\alpha|$ □ Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2: Ако степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дивергира у тачки α, $\alpha \in \mathbb{R}$ тада овај ред дивергира за свако $|\alpha| < |x|$



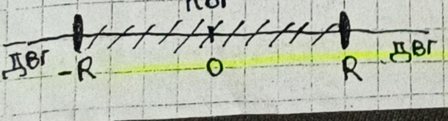
(унутар интервала не знамо)

дефиниција (полупречник конвергенције степеног реда):

Полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дефинише се са $R = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ конвергира} \}$

највећа реална горња границу (supremum)

ТЕОРЕМА 3: Нека је R полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ тада степени ред апсолутно конвергира у свакој тач интервала $(-R, R)$ док дивергира за свако x за које је $|x| > R$



напомена: за $x = R$ односно $x = -R$ морамо посебно испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, односно $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$

R - спорна тачка

ТЕОРЕМА 4: (Коши-Адамаров став): полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дат је са $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$:

ако је $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, тада је $R = 0$

ако је $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, тада је $R = \infty$

напомена 1: $R = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

напомена 2: најчешће постоји лимес према томе постављамо

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$$

заправо једнаки лимеси

примјер: Одредити домен конвергенције степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$$

рјешење: $a_n = \frac{3^n}{n}$, $a_n > 0$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^n}{n \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$$

Значи да ред конвергира $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \subseteq D \subseteq \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ ⇒ потребно одредити и радијус конвергенције

за $x = \frac{1}{3}$ имамо ред:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \text{дивергира}$$

за $x = -\frac{1}{3}$ имамо ред:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ → конвергира на основу

Лајбницовог критеријума

Према томе $D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

ОСОБИНЕ:

ТЕОРЕМА 5: Нека је $R>0$ полупречник конвергенције степеног реда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$ тада вриједи:

1° интеграција члан по члан, $t \in (x_0-R, x_0+R)$

$$\int_{x_0}^{t} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{t} (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (t-x_0)^{n+1}$$

разликује се од почетног само по овоме

2° диференцирање члан по члан, $x \in (x_0-R, x_0+R)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-x_0)^{n-1}$$

$$\cancel{a_0}^{0} + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 + \dots /' \Rightarrow a_1 + 2a_2 (x-x_0) + 3a_2 (x-x_0)^2 \dots$$

2. ТЕЈЛОРОВ РЕД. АНАЛИТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ. ТЕЈЛОРОВИ РЕДОВИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

Тејлоров ред:

Посматрамо степени ред:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n =$$

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-x_0)^1 + a_2 (x-x_0)^2 + \dots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x-x_0) + 3a_3 (x-x_0)^2 + 4a_4 (x-x_0)^3 + \dots$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 (x-x_0)^1 + 12a_4 (x-x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$f'''(x_0) = 3!\, a_3, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

Овим процесом можемо да закључимо да је

$$a_n = \frac{f^{(n)} x_0}{n!}$$

ДЕФИНИЦИЈА (ТЕЈЛОРОВ РЕД):

постоји бесконачно много извода у некој тачки x_0

Нека је f дефинисана и бесконачно диференцијабилна ф-ја на неком интервалу $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$. Степени ред

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

називамо ТЕЈЛОРОВ РЕД

ТЕЈЛОРОВ ПОЛИНОМ:

напомена: Ако је $x_0 = 0$ тада овај ред називамо МАКЛОРЕНОВ РЕД

ук

$C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f(x) \text{ непрекидна функција} \}$

$C^1(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f'(x) \text{ непрекидна функција} \}$

$C^k(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f^{(k)}(x) \text{ непрекидна функција} \}$

$C^\infty(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ бесконачно диференцијабилна ф-ја}$

Основне елементарне функције су бесконачно диференцијабилне на свом домену:

примјер: $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$, $x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$

$(x^2)' = 2x \qquad (x^2)''' = 0$

$(x^2)'' = 2 \qquad (x^2)^{IV} = 0 \ \ldots$

низ редова: $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$

$n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$

ред је као бесконачни полином

$$P_\infty(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n, \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Не може

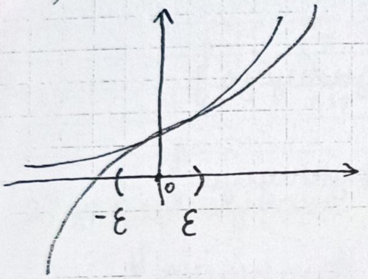
Да ли сваку функцију можемо да апроксимирамо полиномом?

Ако је $\boxed{f \in C^\infty}$ $\boxed{\text{онда можемо}}$ покушати апроксимацију помоћу Тејлоровог реда

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$e^x = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}}_{\text{Тејлоров полином}} + \underbrace{R_m(f, x)}_{\text{остатак}}$$

Све што је m (коначан) већи број апроксимација је боља. (у зависности колико нам треба децимала тачности бирамо m)



примјер: Нека је дата $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Није аналитичка, не можемо у некој околини да развијамо Тејлоров развој осим само у тачки 0

Вриједи $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Може се израчунати да је $f^{(n)}(0) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0$$

→ апроксимација тачна само за ову тачку па смо доказали да нису све бесконачно диф. ф.-је погодне апроксимирању јер нам није циљ да добијемо $D = \{0\}$ него неку околину

ДЕФИНИЦИЈА (АНАЛИТИЧКА ФУНКЦИЈА):

Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен скуп. За ф-ју $f: I \to \mathbb{R}$ кажемо да је аналитичка ф-ја ако $f \in C^\infty(I)$ и за свако $x_0 \in I$ постоји околина $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ на којој ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$ конвергира на ф-ју $f(x)$

Све елементарне функције су аналитичке.

ТЕЈЛОРОВИ (МАКЛАРЕНОВИ) РАЗВОЈИ НЕКИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА:

1) $f(x) = e^x$, у околини тачке $x_0 = 0$

$f^{(n)}(x) = e^x \quad , \quad f^{(n)}(0) = 1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ,$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad , \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$$D = (-\infty, \infty)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad , \quad x \in (-\infty, \infty)$$

за $x = 1$:

$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}} \qquad e \approx 2,718281\dots$$

2) $f(x) = \sin x \quad , \quad x_0 = 0$

$f(0) = 0 \quad , \quad f'(x) = (0)\,x \quad , \quad f'(0) = 1 \quad , \quad f''(x) = -\sin x \quad , \quad f'''(x) = -\cos$

$f''(0) = 0 \quad , \quad f'''(x) = -1$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

→ за сваку непарну функцију ће преживети само непарни степени

$$D = (-\infty, \infty)$$

3) $f(x) = \cos x \quad , \quad x_0 = 0$ → парна функција

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$D = (-\infty, \infty)$$

4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ → рационална функција

$x_0 = 0$

Може се доказати да је $f^{(n)}(0) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$$D = (-1, 1)$$

Неки математичари су сматрали $\frac{1}{2} = \frac{1}{1-(-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ конвергира

а то није тачно.

5) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + \dots$$

6) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$ → непарна функција

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} , \quad x \in [-1, 1]$$

7) $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ → ГРАФИК

$$sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$D = (-\infty, \infty)$$

(2.) ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

(3) УВОД. ТЕОРЕМА ЈЕДИНСТВЕНОСТИ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА.

Диференцијалне једначине имају бројне примјене у природним, друштвеним и техничким наукама. Нажалост, за само један мали број диф. једначина постоје аналитички поступци рјешавања.

– радимо само са аналитичким рјешењем

ДЕФИНИЦИЈА:

Нека је F реална функција са $n+2$ промјенљиве. Једначина

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in (a,b) \qquad (\text{ДЈ1.})$$

гдје је $y(x)$ непозната ф-ја (n пута диференцијабилна) назива се диференцијална једначина реда n.

примјери:

* $x \rightarrow$ варијабла
$y \rightarrow$ непозната

1) диференцијална једначина

$$y''(x) - 3(y'(x))^2 + x^4 - y'''(x) = 0$$

је реда $n = 3$ (због трећег извода).

$$F(x, \overset{y(x)}{y}, y'(x), y'', y''') = y''(x) - 3(y'(x))^2 + x^4 - y'''(x)$$

$$\boxed{F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^4 - 3x_3^2 + x_4 - x_5}$$

2) диференцијална једначина

$$f''(x) - 1 = 0$$, гдје је диф. јед. другог реда

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}x^2} \Rightarrow \boxed{y''(x) = 1}$$

ово је једно од рјешења диф. јед, али поред тога рјешење је и функција:

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

опште рјешење у овом случају

ДЕФИНИЦИЈА: Опште рјешење диф. јед (ДЈ1) је ф-ја $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ која је дефинисана помоћу једначине облика:

$$\Phi(x, y(x), c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \qquad (ДЈ2)$$

гдје су $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ произвољне константе, тако да важе услови:

1) $y = y(x)$ је рјешење једначине (ДЈ1)
2) диференцијална једначина (ДЈ1) се може добити из једначине (ДЈ2)

ПАРТИКУЛАРНО РЈЕШЕЊЕ је свако рјешење које се добија из општег рјешења за посебне вриједности константи. (нпр. $c_1 = 1$ или $c_2 = 2$)

СИНГУЛАРНО РЈЕШЕЊЕ је такво рјешење диф. једначине које се не може добити из општег рјешења (ни за један избор константи)

ИНТЕГРАЛНА КРИВА диференцијалне једначине је свако њено партикуларно или сингуларно рјешење посматрано као крива $y = y(x)$

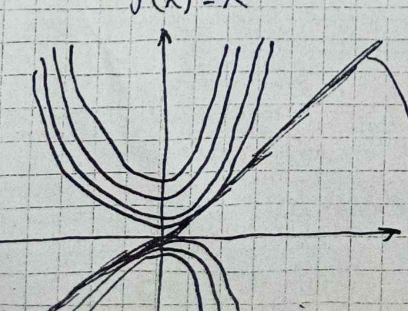
Примјер: Диференцијална јед. $x((y'(x^2)) + 1) - 2y(x) \cdot y'(x) = 0$

има опште рјешење

$$y(x) = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}, \quad c \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow \text{ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ}$$

сингуларно рјешење:

$$y(x) = x$$



* сваку ову криву посебно називамо интегрална крива

↳ (супротно од извода)

$y = x \rightarrow$ СИНГУЛАРНО РЈЕШЕЊЕ

Понекад поред задане диф. јед. имаћемо и почетне услове:

$$y(x_0)=y_0\,,\quad y'(x_0)=y\,,\ \dots,\ y^{(n)}(x_0)=y_n$$

Партикуларно рјешење које задовољава почетне услове се назива КОШИЈЕВО РЈЕШЕЊЕ.

примјер: $y''(x)-1=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

Опште рјешење је $y(x)=\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$.

$$y(0)=0+C_1\cdot 0+C_2=1 \Rightarrow \boxed{C_2=1}$$

$$y'(x)=x+C_1$$

$$y'(0)=0+C_1=2 \Rightarrow \boxed{C_1=2}$$

односи се на рјешење

КОШИЈЕВО РЈЕШЕЊЕ:

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+2x+1$$

ТЕОРЕМА ЈЕДИНСТВЕНОСТИ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Нека је P правоугаоник у x-y равни:

$$P=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

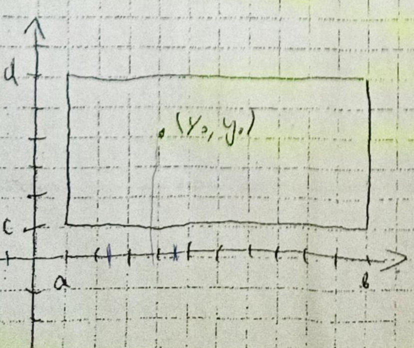
нека (x_0,y_0) припада унутрашњости правоугаоника.

Ако су ф-је $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрекидне на правоугаонику P, онда постоји интервал $I=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ и јединствено рјешење $y=y(x)$ на I почетног Кошијевог проблема.

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

примјер. $y'(x)=\frac{-y^{1/3}(x)}{x}$, $y(-1)=0$

$$f(x,y)=\frac{\sqrt[3]{y}}{x},\qquad f'_y(x,y)=\frac{1/3}{x\sqrt[3]{y^2}}$$



4) ХОМОГЕНА, ЛИНЕАРНА И БЕРНУЛИЈЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

Диференцијалне једначине првог реда су облика

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

где је $F: D_3 \to \mathbb{R}$, $D_3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Често диференцијалну једначину првог реда можемо представити у експлицитном облику:

$$\boxed{y'(x) = f(x,y)} \quad (\text{ДЈ}3)$$

при чему је $f: D_2 \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Можемо користити и други запис, тачније:

$$y' = \frac{dy}{dx} \to \text{ДИФЕРЕНЦИЈАЛ}$$

$$f(x,y) = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Сређивањем (ДЈ3) добијамо диференцијалну једначину облика

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

I Диференцијалне једначине са раздвојеним промјенљивим

Одређене су обликом

$$\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \qquad \begin{matrix} f: D_1 \to \mathbb{R} \\ g: E_1 \to \mathbb{R} \end{matrix}$$

Из задње једначине диф. јед. сводимо на интеграцију

$$\boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx}$$

II ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

је одређена у експлицитном облику $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (ХД1)

За $f: D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}$

Можете записати

$$\frac{1}{x'} = f\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right) \qquad \frac{1}{x'} = f\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$$

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right)} = x' \quad , \quad g\left(\frac{x}{y}\right) = x' \quad , \quad x = x(y)$$

Хомогена диференцијална јед. се рјешава смјеном:

$$u(x) = \frac{y}{x} \quad , \quad x u(x) = y(x) \quad /'$$

$$y' = u(x) + x \cdot u'(x)$$

Добијамо из ХД1:

$$u(x) + x u'(x) = f(u)$$

$$x u'(x) = f(u) - u$$

$$x \frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\boxed{\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}}$$

→ своди се на диф. јед са раздвојеним промјенљивим

Смјеном $u = \frac{y}{x}$ ХД1 сводимо на диф. јед. са раздвојеним промјенљивим

Уопштена хомогена једначина је: $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$

→ разликујемо два случаја:

1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ уводи се смјена

$x = u + h$

$y = v + k$ гдје је $v = v(u)$ нагона функција, а h и k су рјешења система

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$$
$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$$

На овај начин добијемо хомогену диф. јед

2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

смјена $\Rightarrow u = a_1 x + b_1 y$ добијамо хомогену диф. јед.

III ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

је диференцијална јед. облика

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \qquad (ЛД1)$$

при чему су функције $p(x), g(x): D_1 \to \mathbb{R}$ непрекидне функције на интервалу $D_1 \subseteq \mathbb{R}$

Ако је $g(x) = 0$ ово постаје од лин. једначине једначина са раздвојеним промјенљивим.

ТЕОРЕМА: Опште рјешење диференцијалне једначине ЛД1 је дато формулом

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

за неку реалну константу c

доказ: Разликујемо два случаја:

1) $g(x) \equiv 0$, тада имамо:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad \to \text{раздвојене коефицијенти}$$

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{y'}{y} = -p(x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y(x)| + c_1 = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y(x)| = -\int p(x)dx + \ln|c| \qquad , \boxed{-c_1 = \ln|c|}$$

$$-c_1 \in \mathbb{R} \; : \; \ln x : (0, \infty) \to$$

$$e^{\ln|y(x)|} = e^{-\int p(x)dx + \ln|c|}$$

$$|y(x)| = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^{\ln|c|}$$

$$\boxed{|y(x)| = |c| \cdot e^{-\int p(x)dx}}$$

$$y(x) = c \cdot e^{-\int p(x)dx} \qquad , \; c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2) $Q(x) \not\equiv 0$

$$y'(x) + p(x)y = g(x) \quad / \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$y'(x)e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}\, y = g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(y e^{\int p(x)dx}\right)' = g(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \qquad (\text{ЛД2})$$

извод производа

Користимо зато $\left(\int p(x)dx\right)' = p(x)$

Када дјелујемо интегралом на ЛД2:

$$y\cdot e^{\int p(x)dx} = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c \quad / \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x)+c}$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$ □ Q.E.D.

IV БЕРНУЛИЈЕВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

$$y'(x) + p(x)y = g(x)\cdot y^{\alpha} \qquad (\text{БД1})$$

гдје су $p(x)$, $g(x)$ непрекидне на неком домену $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, те $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Ако је $\alpha=0$ онда имамо лин. диф. јед., ако је $\alpha=1$ онда имамо диф. јед. са раздвојеним коефицијентима. Своди се на лин. диф. јед.

ТЕОРЕМА: Смјеном $z = z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ Бернулијеву диференцијалну једначину БД1 сводимо на линеарну диференцијалну

R једначину облика:

$$z'(x) + (1-\alpha)p(x)z(x) = (1-\alpha)g(x)$$

доказ:

$z = y^{1-\alpha}$

За $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ важи:

$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\, y'$

$$y' + p(x)y = g(x)y^{\alpha} \quad / \cdot y^{-\alpha}$$

$$y'\cdot y^{-\alpha} + p(x)\cdot y^{1-\alpha} = g(x)$$

СМЈЕНА: $y^{1-\alpha} = z(x) \quad /'$

$$z'(x) = (1-\alpha)\, y^{1-\alpha-1}(x)\cdot y'(x) = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}\cdot y'(x)$$

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} + p(x)z(x) = g(x)$$

$$\boxed{z'(x) + (1-\alpha)\,p(x)\,z(x) = (1-\alpha)\,g(x)}$$ Q.E.D.

5) ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА. МЕТОД ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ.

написати за n-ред

ДЕФИНИЦИЈА (ДИФ. ЈЕД. ВИШЕГ РЕДА):

Диференцијална једначина

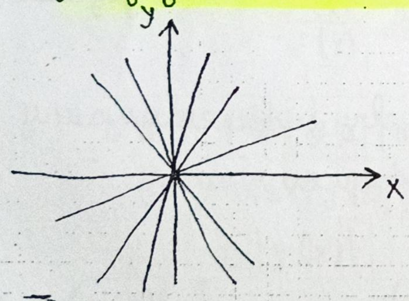
$$y^{(n)}(x) + a_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\,y'(x) + a_n(x)\,y(x) = F(x) \qquad (1*)$$

је линеарна диференцијална једначина n-тог реда.

Посматраћемо случај када функције $a_k(x), F(x) \in C[a,b]$, $k = 1, 2, \ldots n$ (непрекидне су функције). Ако је $F(x) \equiv 0$ на $[a,b]$ тада кажемо да је једначина $(1*)$ хомогена диф. једначина, у супротном је нехомогена диференцијална једначина.

напомена: Оператор $L: V \to V$ је линеаран ако вриједи да је $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$.

Функција $a(x) = ax$ је линеарна функција, $a \in \mathbb{R}$



Функције $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на неком датом $D \subseteq \mathbb{R}$ су линеарно зависне ако $y_1(x) = \alpha y_2(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ у супротнам су линеарно независне

I) Штурм-Лиувилова диференцијална једначина

Линеарна диференцијална једначина $(1*)$ за $n=2$ има облик

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + g(x)\,y(x) = f(x), \quad x \in (a,b) \qquad (СЛ1)$$

се назива Штурм-Лиувилова диф. једначина

За $f(x) \equiv 0$ имамо хомогену линеарну диф. јед:

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + g(x)\,y(x) = 0, \quad x \in (a,b) \qquad (СЛ2)$$

напомена: оператор $Ly: y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)$ је линеаран оператор. Лако се провјери да вриједи

$$L(\alpha y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 L(y_1)+\alpha_2 L(y_2), \quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$$

ТЕОРЕМА: Ако су $y_1(x)$, $y_2(x)$ рјешења диф. једначине (СЛ2) тада је $y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$ такође њено рјешење (посљедица линеарности)

доказ:

$$Ly := y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$$

Вриједи $L(y_1)=0$, $L(y_2)=0$

$$L(c_1 y_1+c_2 y_2)=c_1 L(y_1)+c_2 L(y_2)=0 \quad ,c_1, c_2\in\mathbb{R}$$

Q.E.D.

ДЕФИНИЦИЈА: Нека су $y_1(x), y_2(x)$ рјешења СЛ2, дефинишемо

$$W(y_1(x), y_2(x))=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$$ коју називамо

ВРОНСКИЈАН (ВРОНСКИЈЕВА ДЕТЕРМИНАНТА).

ТЕОРЕМА: Нека су $y_1(x)$, $y_2(x)$ рјешења диф. јед. СЛ2. Тада или је $W(y_1,y_2)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$ и $y_1(x), y_2(x)$ су линеарно независни функције или је $W(y_1,y_2)=0$ $\forall x\in(a,b)$ и функције $y_1(x)$, $y_2(x)$ су линеарно зависне.

доказ: Пошто су y_1 и $y_2(x)$ рјешења тада је и $c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$ рјешење СЛ2.

Посматрамо

$$c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)=0$$
$$c_1 y_1'(x)+c_2 y_2'(x)=0$$

систем има јединствено рјешење ако $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0$

$\Rightarrow c_1=c_2=0 \Rightarrow y_1(x), y_2(x)$ су линеарно независни

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = \alpha c_2, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

бесконачно много рјешења, вриједи $y_1(x), y_2(x)$ су линеарно зависни

ТЕОРЕМА: Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независна рјешења диф. јед СЛ2, тада је

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

њено опште рјешење

ТЕОРЕМА: Ако је $y_1(x)$ једно нетривијално партикуларно рјешење линеарне хомогене диф. јед. другог реда

$$y''(x) + p(x)y'(x) + y(x)q(x) = 0$$, тада је

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int p(x)\,dx\right) dx$$

такође партикуларно рјешење, линеарно независно од $y_1(x)$.

НЕХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФ. ЈЕД ДРУГОГ РЕДА:

Посматрамо

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad \text{СЛ1}, \quad f(x) \not\equiv 0, \ x \in (a,b)$$

$p(x), q(x), f(x) \in C(a,b)$ → да би имали јединствено рјешење

Придружена хомогена диф. јед. диференцијалној једначини СЛ1 је

оператор од y

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad (\text{СЛ2})$$

$$Ly: \ y''(x) + p(x)y'(x) + y(x)q(x)$$

ХОМОГЕНО + ПАРТИКУЛАРНО = ОПШТЕ РЈЕШЕЊЕ

ТЕОРЕМА: Нека је $y_h(x)$ опште рјешење диф. јед СЛ2 и нека је y_p једно партикуларно рјешење СЛ1. тада је

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ опште рјешење диф. јед СЛ1.

доказ: $y_h(x)$ → хомогено рјешење:

$$Ly_h(x) = y_h''(x) + p(x)y_h'(x) + q(x)y_h(x) = 0$$

и $y_p(x)$ је партикуларно рјешење СЛЛ:

$$Ly_p(x) := y_p''(x) + p(x)\, y_p'(x) + q(x)\, y_p(x) = f(x) \quad (+)$$

оде убацујем (+) у нулу $\Rightarrow$ $L y_n(x) + L y_p(x) = f(x)$

$$\boxed{L\left(y_n(x) + y_p(x)\right) = f(x)}$$

МЕТОД ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ:

Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независна рјешења хомогене диф. јед СЛ2. Тада је опште рјешење дато са

$y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$ гдје су $c_1(x)$ и $c_2(x)$ функције које задовољавају систем:

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0$$
$$c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = f(x)$$

→ метод варијације

⑥ ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

Посматрамо диф. јед

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}\, y^{(n-2)}(x) + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{ХДЈ1}$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ → ХОМОГЕНА ДИФ. ЈЕД СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

Посматрамо карактеристични полином

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (\text{КЈ})$$

ПРИМЈЕР: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $\quad \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$, $\quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1$, $\quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

1) Ако је λ_k проста реална нула (рјешење) једначине КЈ онда је одговарајуће партикуларно рјешење ХДЈ1 функција $e^{\lambda_k x}$

2) Ако је λ_j реална нула (рјешење) једначине КЈ реда m (понавља се више пута), тада су одговарајућа партикуларна рјешења ХДЈ1 функције облика

$e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j k}, x^2 e^{\lambda_j x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_j x}$

3) Ако је $\lambda = \alpha + i\beta$ проста комплексна нула (рјешење) једначине КЈ одна су одговарајућа партикуларна рјешења ХДЈ1 функције облика:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \ , \ e^{\alpha x} \sin \beta x$$

4) Ако је ~~пар~~ $\lambda = \alpha \pm i\beta$ пар конјуговано комплексних нула реда m једначине КЈ, онда су одговарајућа партикуларна рјешења ХДЈ1 функције облика

$$e^{\alpha x} \cos\beta x, xe^{\alpha x} \cos\beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x} \sin\beta x, \ xe^{\alpha x} \sin\beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin\beta x$$

Опште рјешење добијамо као линеарна комбинација партикуларних рјешења примјеном правила (1 – 4)

НЕХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА:

Посматрамо диференцијалну једначину:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad \text{(НДЈ1)}$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \in \mathbb{R}$, $f(x)$ непрекидна : $f(x): (a, b) \to \mathbb{R}$

Придружена хомогена диф. јед. је

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad \text{(ХДЈ1)}$$

Опште рјешење тражимо у облику

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, гдје је $y_h(x)$ рјешење ХДЈ1, а $y_p(x)$ једно партикуларно рјешење НДЈ1.

рачунање партикуларног рјешења

1. МЕТОД ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ:

2. МЕТОД НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА се примјењује када је функција $f(x)$ облика:

(a) $f(x) = e^{ax} \cdot P_m(x)$, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ степен полинома $P_m(x)$

онда тражимо партикуларно рјешење у облику

$y_p(x) = x^s e^{ax} Q_m(x)$ гдје је:

$s \in \mathbb{N}_0$ вишеструкост рјешења a (λ) у карактеристичној једначини:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (KJ)$$

Коефицијенте који су неодређени, полинома $Q_m(x)$ одређујемо када $y_p(x)$ уврстимо у НДЈЛ.

(б) $f(x) = e^{ax}\left(P_{m_1}(x)\cos bx + P_{m_2}(x)\sin bx\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

Онда партикуларно рјешење тражимо у облику

$$y_p(x) = x^s e^{ax}\left(Q_m(x)\cos bx + R_n(x)\sin bx\right)$$

$$m = \max\{m_1, m_2\},$$

гдје је s вишеструкост нуле облика $z = a + bi$ у KJ

7 СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

Систем диф. једначина

$$x'(t) = f(x, y)$$
$$y'(t) = g(x, y)$$

$Y = \begin{vmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$

=> ПРИМЈЕР:

$x'(t) = y(t)$

$y'(t) = -x(t)$, $t \in \mathbb{R}$

називамо АУТОНОМНИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Тачку (x_0, y_0) за коју вриједи

$f(x_0, y_0) = 0$ и $g(x_0, y_0) = 0$ називамо ТАЧКА ЕКВИЛИБРИЈУМА.

Константна крива $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ је рјешење система

$$x'(t) = f(x, y)$$
$$y'(t) = g(x, y)$$

$x(0) = 1$

$y(0) = 0$

напомена: Аутономном систему

$$x'(t) = f(x, y)$$
$$y'(t) = g(x, y)$$

можемо придружити векторско поље $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$

„График" векторског поља називамо ФАЗНИ ПОРТРЕТ аутономног система диф. једначина.

Крива $(x(t), y(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ која је рјешење система још називамо ТРАЈЕКТОРИЈА.

Диференцијалну јед другог реда облика

$$y'' = f(y', y)$$ можемо свести на аутономни систем смјеном $y' = u$, па добијамо

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= f(u, y) \end{aligned}$$

→ можемо да придружимо поље диф. јед. II реда и да одредимо фазни портрет.

⇒ПРОТОК ВЕКТОРСКОГ ПОЉА → интегралне криве које су рјешење система

ХОМОГЕНИ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИХ ДИФ. ЈЕД СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИ.

Нека је дат систем линеарних диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_{11} x(t) + a_{12} y(t) \\ y'(t) &= a_{21} x(t) + a_{22} y(t) \end{aligned} \qquad (1X)$$

гдје су $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$.

Системом 1X је аутономни систем диф. јед.

Други запис система 1X је у облику

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$ често ћемо користити и запис:

$$\vec{y}\,'(t) = A \vec{y}(t), \quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ је матрица 2x2

Матрицу A можемо посматрати као пресликавање

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

~~ДЕФИНИЦИЈА: Ако постоји вектор $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$ тако да за матрицу $A_{2x2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вриједи $A \cdot \vec{V} = \lambda \cdot \vec{V}$, за неко λ (скалар)~~

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, λ скалар (реалан или комплексан број

ДЕФИНИЦИЈА: Нека је дата матрица $A_{2\times 2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ако постоји вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ тако да вриједи

$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$, за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ тада вектор $\vec{v}$ називамо сопственим вектором, а λ сопствена вриједност матрице A.

Поступак рачунања сопственог вектора и вриједности је:

1. одредимо карактеристични полином P_λ

$$P_2(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{P_2(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_0}$$

$x = 2y$

2. одредимо λ_1, λ_2, нуле полинома $P_2(\lambda)$, односно ријешимо једначину $P_2(\lambda) = 0$

3. за сопствену вриједност λ_1 одредимо сопствени вектор из једначине

$\lambda \boxed{= 7}$ 5

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = 0$$

Одредимо бар једно рјешење ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = 0$$

У случају $\lambda_1 = \lambda_2$ може се десити да из система

$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$ добијемо један или два сопствена вектора

Метод за рјешавање система (1x):

Посматрамо систем $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

1. Одредимо сопствене вриједности и сопствене векторе матрице A:

2. Разликујемо случајеве: → реалне и различите λ

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, постоје два соп. вектора:

$\vec{v}_1, \lambda_1$ и $\vec{v}_2, \lambda_2$

рјешење система:

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{V}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{V}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$\alpha + \beta i$

$c_1 \begin{bmatrix} \alpha+\beta i \\ \alpha_2+\beta i \end{bmatrix} e^{\lambda t}$

$c_1 Re[\vec{V}_1] e^{\lambda t} + c_2 [Im \vec{V}_1 \cdot e^{\lambda t}]$

(б) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\qquad \lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta i$

Одговарају им два сопствена вектора $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$

Рјешење система: $\alpha + \beta i$

$$\vec{y}(t) = c_1 Re(\vec{V}_1 \cdot e^{\lambda_1 t}) + c_2 Im(\vec{V}_1 e^{\lambda_1 t})$$

i

(в) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$

1° да сопственој вриједности λ_1 одговара један вектор $\vec{V}_1$. Морамо наћи генерализовани сопствени вектор $\vec{V}_2^*$. Одредимо бар једно рјешење система

$$\boxed{(A - \lambda_1 I)\, \vec{V}_2^* = \vec{V}_1}$$

Рјешење система:

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{V}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 (\vec{V}_2^* + t\vec{V}_1) e^{\lambda_1 t}$$

2° сопственој вриједности λ_1 одговарају два сопствена вектора $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$

Рјешење система:

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{V}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{V}_2 e^{\lambda_1 t}$$

НЕХОМОГЕНИ СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА:

Посматрамо систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + b_2(t) \end{aligned} \qquad (НХ1)$$

$$\vec{y}\,'(t) = A \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

при чему је:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$$

Нека је $c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 y_2(t)$ решење хомогеног система

$$y'(t) = A\, y(t)$$

$$c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} c_1 y_{11}(t) + c_2 y_{12}(t) \\ c_1 y_{21}(t) + c_2 y_{22}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \text{решење хом. сис.}$$

Опште решење система НХ1 тражимо у облику

$\vec{y}(t) = c_1(t)\, \vec{y}_1(t) + c_2(t)\, \vec{y}_2(t)$, методом варијације константи

$c_1'(t)$, $c_2'(t)$ одређујемо из система

$$c_1'(t)\, y_{11}(t) + c_2'(t)\, y_{12}(t) = b_1(t)$$

$$c_1'(t)\, y_{21}(t) + c_2'(t)\, y_{22}(t) = b_2(t)$$

③ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

⑧ ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЈЕР ВЕКТОРСКИХ ПРОСТОРА. ВЕКТОРСКИ ПОТПРОСТОРИ. ЛИНЕАЛ.

ДЕФИНИЦИЈА: Нека је V непразан скуп, $\mathbb{F}$ поље и нека је $+$ бинарна операција која пресликава $V \times V$ у V, а $\cdot$ бинарна операција која пресликава $F \times V \to V$. Тада уређена четворка $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ је векторски простор над пољем $\mathbb{F}$ ако вриједи

(V_1) $(V, +)$ је Абелова група

(V_2) $\alpha \cdot (a+b) = \alpha a + \alpha b$

(V_3) $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a$

(V_4) $(\alpha \cdot \beta) a = \alpha (\beta \cdot a)$

(V_5) $1 \cdot a = a$

$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $a, b \in V$

За $\mathbb{F}$ најчешће узимамо поље реалних бројева или поље комплексних бројева.

Да се присјетимо, $(V, +)$ је Абелова група ако вриједи:

(S_1) $\forall x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$

(S_2) $\forall x, y, z \in V \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z$

(S_3) $x \cdot e = x$

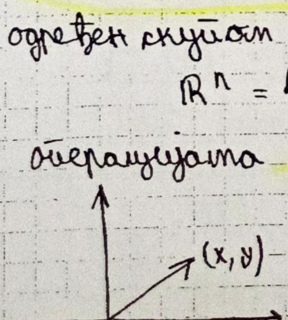
(S_4) $x \cdot i = e$

(S_5) $x + y = y + x$

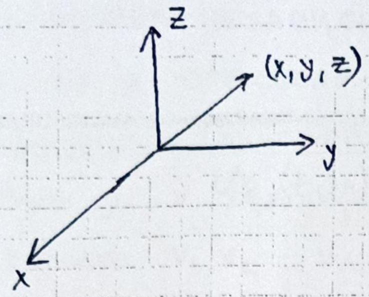
ПРИМЈЕР ВЕКТОРСКИХ ПРОСТОРА:

1. векторски простор уређених n-торки $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ је одређен скупом вектора:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2 \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$ и бинарним операцијама $+$ и $\cdot$.



$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$

2. Векторски простор матрица $m \times n$ је одређен са $\mathbb{R}^{m\times n} = (\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot)$, сабирањем, множењем и скупом $\mathbb{R}^{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \right\} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}$

Ако је покаже да $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha \cdot A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

3. Векторски простор непрекидних функција $C[a,b]$, $C[a,b] = (C[a,b], +, \cdot)$:

скуп $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\} \mid f$ непрекидна на $[a,b]\}$

$f, g \in C[a,b] \Rightarrow f + g \in C[a,b]$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in [a,b] \Rightarrow \alpha \cdot f \in C[a,b]$

4. Векторски простор $L^p[a,b]$, простор интеграбилних функција у односу на $+$ и $\cdot$, $p \geq 1$

$$L^p[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$$

5. Скуп $W = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$

$(W, +, \cdot)$ НИЈЕ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР $\lightning$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in W \Rightarrow \alpha \cdot a \in W$

$\alpha = -1$, $a = (x,y)$, $x, y \geq 0$

$\alpha \cdot a = -1(x,y) = (-x,-y)$ $\lightning$

6. Скуп $U = \{(x,y) \mid xy \geq 0\}$

$(U, +, \cdot)$ није векторски простор јер:

$\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in U$, $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y) \in U$

$xy \geq 0$, $\alpha^2 xy \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = (1,1) \in U \\ b = (-2,0) \in U \end{array}\right\} a+b = (1,1)+(-2,0) = (-1,1) \notin U$$

ВЕКТОРСКИ ПОДПРОСТОР

ДЕФИНИЦИЈА: Нека је $V = (V,+,\cdot)$ векторски простор над пољем скалара $\mathbb{F}$. Тада се непразан подскуп W скупа V назива потпростор простора V ако је он векторски простор у односу на операције $+$ и $\cdot$.

Из дефиниције слиједи да је W потпростор простора V ако $\forall x,y \in W$ и $\alpha \in \mathbb{F}$ вриједи $x+y \in W$, $\alpha x \in W$
вектори

ДЕФИНИЦИЈА (ЛИНЕАРНА КОНБИНАЦИЈА):

Нека је V векторски простор над пољем скалара $\mathbb{F}$. За $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}$ вектор

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ представља линеарну комбинацију вектора $v_1, v_2 \dots v_n$.

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ тада линеарну комбинацију називамо тривијална

ДЕФИНИЦИЈА (ЛИНЕАЛ):

Скуп свих линеарних комбинација вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ векторског простора V над пољем $\mathbb{F}$ у ознаци

$$Lin(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}) = \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

називамо линеал вектора $v_1, v_2, \dots, v_n$.

ТЕОРЕМА: Нека $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, V је векторски простор. Тада $Lin(\{v_1, v_2, \dots, v_n\})$ одређује векторски подпростор од V.

9 ЛИНЕАРНА НЕЗАВИСНОСТ, БАЗА И ДИМЕНЗИЈА. ТЕОРЕМА О ЗБИРУ И ПРЕСЈЕКУ ВЕКТОРСКИХ ПОТПРОСТОРА.

ДЕФИНИЦИЈА (ЛИНЕАРНА НЕЗАВИСНОСТ):

Нека је V векторски простор над пољем скалара $\mathbb{F}$. За векторе $v_1, v_2 \dots v_n \in V$ кажемо да су линеарно независни ако из $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_2 = \vec{0}$ слиједи

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Скуп $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ је линеарно зависан ако постоји бар један скалар $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$ тако да

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$$

ТЕОРЕМА: Вектори $v_1, v_2 .. v_n \in V$ су линеарно зависни ако и само ако бар један од њих је лин. комбинација преосталих вектора.

БАЗА И ДИМЕНЗИЈА

ДЕФИНИЦИЈА (ГЕНЕРАТОР) Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{F}$. Скуп вектора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$ је генераторски скуп за векторски простор V ако важи

$$\mathrm{Lin}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = V$$

објашњење: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$\forall \vec{v} \in V$, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{x_1} + \alpha_2 \vec{x_2} + \dots + \alpha_n \vec{x_n}$$

ДЕФИНИЦИЈА (БАЗА): Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{F}$. Скуп вектора $E = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}\} \subseteq V$ је база простора V ако је E линеарно независан скуп који је уједно и генератор простора V.

Сваки простор има бесконачно много база.

ДЕФИНИЦИЈА (ДИМЕНЗИЈА):

Нека је скуп B база векторског простора V. Број елемената скупа B називамо димензија векторског простора.

напомена: Ако је број елемената скупа B коначан, простор називамо коначнодимензионалан простор. У супротном имамо бесконачно димензионалан простор.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$\dim(C[a,b]) = \infty$$

ТЕОРЕМА: $(V,+,\cdot)$ над $\mathbb{F}$, нека је $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ база. Сваки вектор из V се може изразити као линеарна комбинација вектора базе и зато пишемо да је

$$V = \mathrm{Lin}(B).$$

ТЕОРЕМА:

Нека је дат векторски простор $\mathbb{R}^n$. Ако су вектори $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n\}$ линеарно независни онда је скуп $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ база простора $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА (О ЗБИРУ И ПРЕСЈЕКУ В.П):

Нека је $(V,+,\cdot)$ векторски простор над пољем $\mathbb{F}$, и нека су W_1, W_2 два векторска подпростора од V. Тада важи:

1. Скуп $W_1 \cap W_2 = \{\vec{z} \mid \vec{z} \in W_1 \land \vec{z} \in W_2\}$ је векторски простор
2. Скуп $W_1 + W_2 = \{\vec{z} \mid \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} \in W_1, \vec{y} \in W_2\}$ је векторски простор
3. Вриједи:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

напомена: ако је $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ онда сума W_1 и W_2 се назива директна сума и означава са

$$W_1 \oplus W_2$$

(10) ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЈЕР ЕУКЛИДСКИХ ПРОСТОРА. НОРМА.

ДЕФИНИЦИЈА (СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД):

Нека је дат векторски простор $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$. Билинеарну функцију $(\cdot\,,\cdot\,) : V^2 \to \mathbb{F})$ називамо скаларни производ ако важи:

(S1): $\forall x, y, z \in V \;,\; (x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

(S2): $\forall x, y \in V,\ \alpha \in \mathbb{F} \;,\; (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$

(S3): $\forall x, y \in V \;,\; (x, y) = \overline{(y, x)}$, ако је $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

(S4): $\forall x \in V \;,\; (x, x) \geq 0$

(S5): $\forall x \in V \;,\; (x, x) = 0 \iff x = \vec{0}$

ДЕФИНИЦИЈА:

Векторски простор V над пољем $\mathbb{R}$ назива се Еуклидов простор ако постоји скаларни производ који дефинишемо на V, односно $(\cdot\,,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

напомена: уколико посматрамо V над пољем $\mathbb{C}$ и $(\cdot\,,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$, тада векторски простор зовемо унитарни.

→ НОРМУ (интензитет) вектора $x \in V$ дефинишемо као $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ и кажемо да је норма индукована скаларним производом.

Међутим, норма је „старија" од скаларног производа.
Векторски простор на коме је уведена норма називамо нормираним векторским простором.

Особине норме по дефиницији: $\|\cdot\| : V^2 \to \mathbb{R}$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \iff x = 0_V$

3) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ неједнакост троугла

I) скаларни производ и норма на $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2 \dots y_n)$$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ → интензитет вектора

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

II) скаларни производ и норма на $\mathbb{C}^n$

$$\vec{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2 \dots y_n)$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

III) $C[a,b]$ - скуп непрекидних функција

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\,dx$$

11 ТЕОРЕМА КОШИ-БУЊАКОВСКОГ. ГЕОМЕТРИЈА ЕУКЛИДОВИХ ПРОСТОРА. ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА.

ТЕОРЕМА (КОШИ-БУЊАКОВСКИ):

Нека је V Еуклидов простор са скаларним производом $(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$, тада за норму индуковану скаларним производом вриједи:

$$|(x,y)| \le \|x\| \, \|y\|$$

доказ:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \quad x \in V$$

За $x, y \in V$ и $t \in \mathbb{R}$ вриједи:

$$0 \le (x+ty)(x+ty) = (x,x) + t(x,y) + t(y,x) + t^2(y,y)$$

$$= \underbrace{(x,x) + 2t(x,y) + t^2(y,y)}_{P(t)}$$

$$\|x\|^2 = (x,x)$$

$$p(t) = t^2 \underbrace{\|y\|^2}_{a} + 2t \underbrace{(x, y)}_{b} + \underbrace{\|x\|^2}_{c} \geq 0$$

$$p(t) > 0 \quad , \Rightarrow \quad D < 0$$

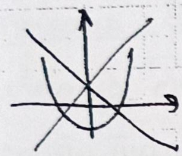
$$D = b^2 - 4ac$$

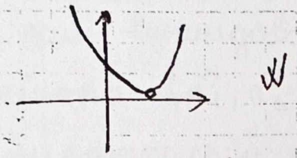
$$D = 4(x, y)^2 - 4\|y\|^2 \|x\|^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x, y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$\boxed{|(x, y)| < \|x\| \|y\|}$$

за једнакост су вектори колинеарни (линеарно зависни)





$$D = 0 \qquad b^2 - 4ac = 0$$

$$4(x, y) - 4\|x\|^2 \|y\|^2 = 0$$

$$\boxed{|(x, y)| = \|x\| \|y\|}$$

□ Q.E.D.

ГЕОМЕТРИЈА ЕУКЛИДОВИХ ПРОСТОРА:

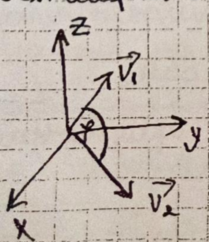
$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

$$\boxed{\left| \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \right| \leq 1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \leq 1}$$

ДЕФИНИЦИЈА: Нека је V Еуклидов простор тада угао између два ненула вектора одређујемо као

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \quad , (x, y \neq 0)$$

Када посматрамо $V = \mathbb{R}^3$



$$\boxed{\cos \varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}}$$

ДЕФИНИЦИЈА: За ненула векторе x и y кажемо да су ортогонални у еуклидовом простору V ако је ако је $(x, y) = 0$ и означавамо са $x \perp y$.

ДЕФИНИЦИЈА: За два вектора x и y кажемо да су паралелни (колинеарни) вектори ако су линеарно зависни и означавамо $x \parallel y$.

ТЕОРЕМА (ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА):

Нека су x, y међусобно ортогонални вектори Еуклидовог простора, тада важи:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

доказ:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + \underbrace{(x,y)}_{0} + \underbrace{(y,x)}_{0} + (y,y)$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{QED.}$$

12 ОРТОНОРМИРАН СКУП ВЕКТОРА. ГРАМ-ШМИТОВ ПОСТУПАК ОРТОГОНАЛИЗАЦИЈЕ. ОРТОГОНАЛНИ КОМПЛЕМЕНТ.

ДЕФИНИЦИЈА: Скуп вектора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Еуклидовог простора V је ортогоналан ако за свака два различита вектора x_i, x_j из скупа $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ вриједи да је

$$(x_i, x_j) = 0 \quad , i \neq j$$

Такође, ако важи $\|x_i\| = 1$, $\forall i = 1, 2, \dots n$ тада за скуп вектора $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ кажемо да је ортонормиран.

База (стандардн) простора $\mathbb{R}^3$ је ортонормирана.

ТЕОРЕМА: У Еуклидовом простору сваки ортогоналан скуп ненула вектора је линеарно независан

доказ: Нека је дат скуп $S = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ ортогоналних вектора. За $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_n \vec{v_n} = 0 \qquad (\text{ЕП1})$$

$(\text{ЕП1}) \,/\, \cdot\, (\quad , \vec{v_j})$

$$\alpha_1 \cancel{(\vec{v_1}, \vec{v_j})}^{0} + \alpha_2 \cancel{(\vec{v_2}, \vec{v_j})}^{0} + \dots + \alpha_j \cancel{(\vec{v_j}, \vec{v_j})}^{0} + \dots + \alpha_n \underbrace{(\vec{v_n}, \vec{v_j})}_{0} = \vec{0}$$

$$\alpha_j \underbrace{(\vec{v_j}, \vec{v_j})}_{\neq 0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha_j = 0} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, скуп S је линеарно независан скуп $\square$

ГРАМ-ШМИТОВ ПОСТУПАК ОРТОГОНАЛИЗАЦИЈЕ:

ТЕОРЕМА: Нека је дат Еуклидов простор V над пољем $\mathbb{R}$. Ако је скуп вектора $\{\vec{a_1}, \vec{a_2} \dots \vec{a_n}\}$ линеарно независан скуп, тада формирамо скуп ортогоналних вектора на следећи начин

$$\vec{b_1} = \vec{a_1}$$

$$\vec{b_2} = \vec{a_2} - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \vec{b_1}$$

$$\vec{b_3} = \vec{a_3} - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} \vec{b_2} - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} \vec{b_1}$$

$$\vdots$$

$$\vec{b_n} = \vec{a_n} - \frac{(a_n, b_{n-1})}{(b_{n-1}, b_{n-1})} \vec{b_{n-1}} - \dots - \frac{(a_n, b_1)}{(b_1, b_1)} \vec{b_1}$$

Тада је скуп вектора $\{\vec{b_1}, \vec{b_2} \dots \vec{b_n}\}$ ортогоналан.

ОРТОГОНАЛНИ КОМПЛЕМЕНТ:

Нека је дат Еуклидов простор V над пољем $\mathbb{R}$. За непразан подскуп $S \subseteq V$ посматрамо скуп свих вектора из V који су ортогонални на сваки вектор из S:

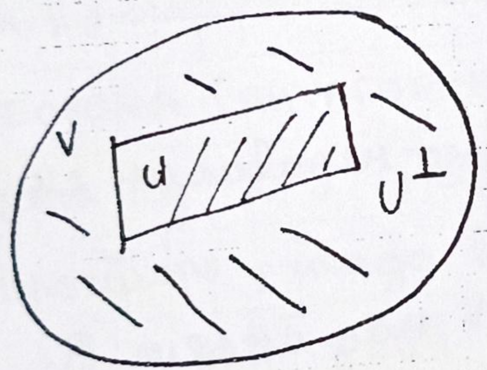
$$S^{\perp} = \{x \in V \mid \forall y \in S, (x, y) = 0\}$$

Скуп $S^{\perp}$ називамо ортогонални комплемент од скупа S. $S^{\perp}$ је векторски потпростор од V без обзира да ли је S скуп или потпростор.

ТЕОРЕМА:

Ако је $U \subseteq V$ векторски потпростор од Еуклидовог простора V тада је $U^{\perp} \subseteq V$ такође векторски потпростор и вриједи:

$$V = U + U^{\perp} \quad , \quad U \cap U^{\perp} = \{0\}$$



$\vec{z} \in V \ , \ U \subseteq V$

$\exists x \in U \ , \ y \in U^{\perp}$

$\boxed{\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}}$ на јединствен начин

(4) ЛИНЕАРНА ПРЕСЛИКАВАЊА И МАТРИЦЕ

(13) РАНГ МАТРИЦЕ. СТЕПЕНАСТА И РЕДУКОВАНА ФОРМА. КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА ТЕОРЕМА.

РАНГ МАТРИЦЕ

ДЕФИНИЦИЈА (ПОДМАТРИЦА):
Подматрица је матрица добијена брисањем неких врста и (или) колона почетне матрице

ДЕФИНИЦИЈА (РАНГ): Највећи ред несингуларних квадратних подматрица матрице $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ назива се ранг матрице A и означава са $\operatorname{rank} A$.

Нула матрица има ранг нула, $\operatorname{rank}[0] = 0$

ПРИМЈЕР:

Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ има ранг 2., $\det A = 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$

ДЕФИНИЦИЈА (ЕЛЕМЕНТАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ):

За матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ елементарне трансформације су

1) замјена мјеста две врсте или колоне
2) множење једне врсте (колоне) скаларом $\alpha \neq 0$
3) додавање елемената једне врсте (колоне), претходно помножене неким скаларом α одговарајућим елементима друге врсте (колоне)

ТЕОРЕМА: Елементарне трансформације не мијењају ранг матрице

ТЕОРЕМА: За матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ важи да је ранг (A) = ранг (A^T)

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$

СТЕПЕНАСТА ФОРМА

За матрицу $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ кажемо да има степенасту форму у односу на врсте ако она испуњава сљедеће услове:

1) свака нула врста матрице S налази се испод њених ненула-врста

2) ако се први ненула елемент i-те врсте матрице S налази на позицији (i,j) тада сви елементи који се налазе на позицијама (k,l) где је $k>i$, $l\leq j$. једнаки нули

напомена: први ненула елемент врсте се зове пивот.

Број пивота степенасте форме је $\operatorname{rank} S$.

напомена:
$$\begin{array}{c} A_{m\times n} \mid I_{m\times m} \\ \downarrow \text{ел. трансф. врста} \\ S_{m\times n} \mid Q_{m\times n} \end{array} \Rightarrow \boxed{Q\cdot A = S}$$

РЕДУКОВАНА СТЕПЕНАСТА ФОРМА:

Уколико у степенастој форми матрице су испуњени следећи услови:

1° пивот је једнак јединици

2° сви елементи у колони изнад пивота (осим прве врсте) су једнаки нули,

тада кажемо да матрица узима редуковану степенасту форму.

КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА ТЕОРЕМА: Нека је $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^{m\times 1}$, систем $A\vec{x}=\vec{b}$ је сагласан ако и само ако $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}([A\mid b])$, при чему је матрица $[A\mid b]$ матрица када матрици A додамо колону $\vec{b}$.

(14) ФУНДАМЕНТАЛНИ ПОТПРОСТОРИ МАТРИЦА.

Посматрамо матрицу $A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$. Можемо

посматрати као пресликавање $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\vec{x} = \vec{y} \in \mathbb{R}^2$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^2$

Посматрамо стандардне базе $\{e_1, e_2, e_3\} \in \mathbb{R}^3$, $\{f_1, f_2\} \in \mathbb{R}^2$,

$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, $f_1 = (1,0)$, $f_2 = (0,1)$

$\boxed{c_k = A \cdot e_k}$ колоне матрице A $\quad A = [c_1 \mid c_2 \mid c_3]$

$\boxed{v_k = A^T \cdot f_k}$ $\quad A = [\cancel{\quad}]$ $\quad \boxed{v_k^T = f_k^T \cdot A}$

$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

Нека је дата матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, посматрамо пресликавање $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Колоне матрице A ћемо означити са c_k, $c_k = A \cdot e_k$, $e_k \in \mathbb{R}^n$, а врсте означавамо са $v_k = A^T \cdot f_k$, $f_k \in \mathbb{R}^m$. Пишемо још

$A = [c_1 \mid c_2 \dots \mid c_n]$ или $A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

ДЕФИНИЦИЈА: (ФУНДАМЕНТАЛНИ ПОДПРОСТОРИ):

Нека је дата матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, за пресликавање $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дефинишемо четири подпростора:

1) ПРОСТОР КОЛОНА МАТРИЦЕ A:

$$C(A) = \mathrm{Lin}\{\vec{c_1}, \vec{c_2}, \dots, \vec{c_n}\}, \quad C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

2) ПРОСТОР ВРСТА МАТРИЦЕ A:

$$C(A^T) = R(A) = \mathrm{Lin}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}\}$$

3) НУЛА ПРОСТОР МАТРИЦЕ A:

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}, \quad N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

4) лијеви нула простор матрице A:

$$N(A^T) = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T \vec{y} = \vec{0} \}, \quad N(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$$

Лако се покаже да је $N(A)$ векторски потпростор од $\mathbb{R}^n$,

а) $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in N(A)$, $\Rightarrow A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$,

$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in N(A)$

б) $\vec{x} \in N(A)$, $A \cdot \alpha\vec{x} = \alpha A\vec{x}$, $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha\vec{x} \in N(A)$

Ако $y \in N(A^T) \Rightarrow A^T y = \vec{0} \Leftrightarrow y^T \cdot A = \vec{0}$

користими: $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^T y)^T = y^T A$

<u>ТЕОРЕМА (ФУНДАМЕНТАЛНА ТЕОРЕМА ЛИНЕАРНЕ АЛГЕБРЕ, I ДИО):</u>

Нека је A матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ матрица ранга r, тада:

1) $\dim C(A) = \dim R(A) = r$
2) $\dim N(A) = n - r$
3) $\dim N(A^T) = m - r$.

* исти број линеарно независних врста и колона

<u>ТЕОРЕМА (ФТЛА, други дио):</u>

Нека је $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ матрица, тада вриједи:

1) $N(A)$ је ортогоналан на простор $R(A)$,
   и вриди: $\dim N(A) + \dim R(A) = n$
2) $N(A^T)$ је ортогоналан на $C(A)$
   и вриједи: $\dim(N(A^T)) + \dim C(A) = m$

<u>доказ (први дио)</u>: Нека $\vec{x} \in N(A)$, тада $A\vec{x} = \vec{0}$, односно

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \vec{x}_{n \times 1} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{v}_n \cdot \vec{x} \end{bmatrix}, \quad \boxed{\vec{v}_k \cdot \vec{x} = \vec{0}, \ \forall k = 1, 2, \dots n}$$

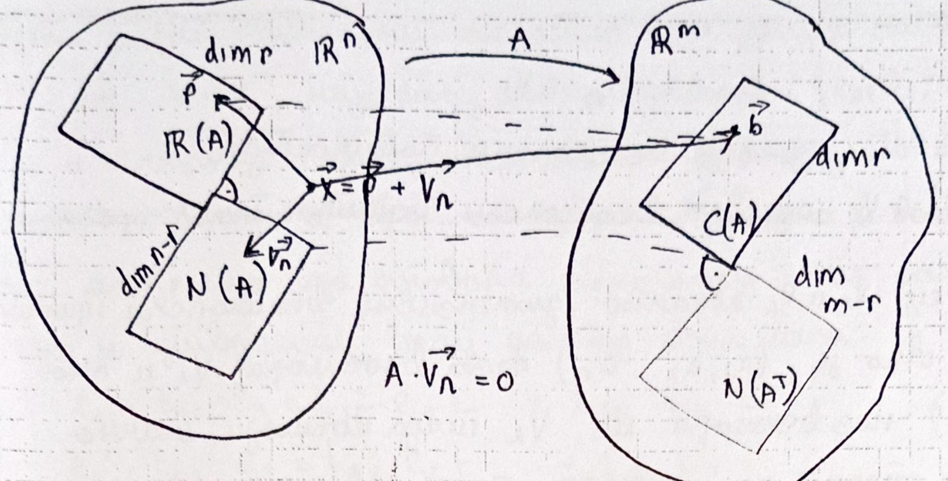
ортогоналан на простор

$R(A) = Lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, $\vec{x} \in N(A)$, ~~$\vec{x} \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$~~

$\boxed{\vec{v}_k \cdot \vec{x} = \vec{0}}$ → сваки елемент из

$$\boxed{N(A) = (R(A))^{\perp} \quad , \quad N(A) \cap R(A) = \{0\}} \quad Q.E.D.$$

Шира слика, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$



ТЕОРЕМА: Нека $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Систем $A\vec{x} = \vec{b}$ има бар једно рјешење акко $\vec{b} \in C(A)$.

доказ: $A\vec{x} = \vec{b} \iff [\vec{c_1} | \vec{c_2} | \dots | \vec{c_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{b}$

$x\vec{c_1} + x_2 \cdot \vec{c_2} + x_3 \vec{c_3} + \dots + x_n \vec{c_n} = \vec{b}$ ~~ако~~ је могуће

ако и само ако $\vec{b} \in Lin\{\vec{c_1}, \vec{c_2}, \dots \vec{c_n}\} = C(A)$

15 ЛИНЕАРНА ПРЕСЛИКАВАЊА. ЈЕЗГРО И СЛИКА. ТЕОРЕМА О ОДРЕЂЕНОСТИ ЛИНЕАРНОГ ОПЕРАТОРА

Нека је дато поље $\mathbb{F}$ и нека су V_1 и V_2 векторски простори над пољем $\mathbb{F}$. Пресликавање $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ такво да $\forall x, y \in V_1$, $\alpha \in \mathbb{F}$ вриједи:

1) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ → АДИТИВНОСТ
2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x)$ → ХОМОГЕНОСТ

$\Big\} \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}(x) + \beta \mathcal{A}(y)$

се назива линеарно пресликавање

За линеарни оператор $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ формирамо два скупа:

1) језгро линеарног оператора
$\ker(\mathcal{A}) = \{x \in V_1 \mid \mathcal{A}(x) = 0\} \subseteq V_1$

2) слика линеарног оператора
$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{y \in V_2 \mid (\exists x \in V_1), y = \mathcal{A}(x)\} \subseteq V_2$

За векторске просторе V_1, V_2 над пољем $\mathbb{F}$ и линеарни оператор $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ важи:

1) $\mathcal{A}(0_{V_1}) = 0_{V_2}$, $0_{V_1} \in V$, $0_{V_2} \in V_2$
2) $\ker(\mathcal{A}) \subseteq V_1$ одређује векторски потпростор
3) $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \subseteq V_2$ одређује векторски потпростор

ТЕОРЕМА: Нека су V_1 и V_2 коначно димензиони векторски простори над пољем $\mathbb{F}$. Ако је $(a_1, a_2 \dots a_n)$ база простора V_1 и ако је $(b_1, b_2 \dots b_n)$ низ вектора из V_2 тада постоји тачно један линеарни оператор $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$, тако да вриједи:

$$\mathcal{A}(a_k) = b_k \quad , \; k = 1, 2, \dots n$$

16 МАТРИЦА ПРЕЛАСКА. МАТРИЦА ЛИНЕАРНОГ ОПЕРАТОРА. АЛГОРИТАМ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ МАТРИЦЕ ЛИНЕАРНОГ ОПЕРАТОРА.

Нека су V_1 и V_2 векторски простори над пољем $\mathbb{F}$. Нека су $B_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ база V_1, $B_2 = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ база V_2.
За дати линеарни оператор $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ посматрамо слике базних вектора V_1: $\mathcal{A}(b_k) = d_k$, $k = 1, 2, \dots n$. Тада постоје скалари $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ такви да вриједи:

$$\mathcal{A}(b_1) = d_1 = \alpha_{11} \cdot c_1 + \alpha_{12} \cdot c_2 + \dots + \alpha_{1m} \cdot c_m$$
$$\mathcal{A}(b_2) = \alpha_2 = \alpha_{21} \cdot c_1 + \alpha_{22} \cdot c_2 + \dots + \alpha_{2m} \cdot c_m$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}(b_n) = \alpha_n = \alpha_{n1} \cdot c_1 + \alpha_{n2} \cdot c_2 + \dots + \alpha_{nm} \cdot c_m$$

Матрица A:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

се назива матрица линеарног пресликавања $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ у односу на базе B_1 и B_2

$\operatorname{Im}(A) \Leftrightarrow C(A)$ $\qquad$ $\ker(A) \Leftrightarrow N(A)$

$\operatorname{Im}(A^T) \Leftrightarrow R(A)$ $\qquad$ $\ker A^T \Leftrightarrow N(A^T)$

Нека је дат линеарни оператор који дјелује на простору V, $A: V \to V$, чију базу чине вектори $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Нека је A матрица која одговара овом оператору по бази B. Ако постоји база $B' = \{e_1', e_2', e_3', \dots, e_n'\}$ и ако је матрица A' матрица која одговара оператору A по бази B', потребно је утврдити везу између ових база.

$$e_1' = t_{11} \cdot e_1 + t_{12} \cdot e_2 + \dots + t_{1n} \cdot e_n$$
$$e_2' = t_{21} \cdot e_1 + t_{22} \cdot e_2 + \dots + t_{2n} \cdot e_n$$
$$\vdots$$
$$e_n' = t_{n1} \cdot e_1 + t_{n2} \cdot e_2 + \dots + t_{n} \cdot e_n$$

Веза између ових база је описана матрицом

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & & t_{mn} \end{bmatrix}$$

чије су колоне компоненте вектора нове базе приказаних помоћу вектора старе базе.

Дјеловање оператора A на вектору x може се описати множењем са матрицом A: $A \cdot x = y$. Слично за базу B', описује се дјеловање оператора $A'x' = y'$

17 СОПСТВЕНА ВРИЈЕДНОСТ И СОПСТВЕНИ ВЕКТОР. КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПОЛИНОМ. СОПСТВЕНИ ПОТПРОСТОР.

Нека је дата квадратна матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$. За број $\lambda \in \mathbb{R}$ кажемо да је сопствена вриједности матрице A ако постоји ненула вектор $\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такав да вриједи $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$. Такав вектор $\vec{v}$ називамо сопствени вектор. Сваки уређени пар $(\lambda, \vec{v})$ који чине сопствена вриједности и сопствени вектор назива се сопствени пар. Скуп свих сопствених вриједности назива се спектар матрице A и означава се са $\delta(A)$

$$\delta(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\},\ A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}\}$$

За матрицу $A \in M_n(\mathbb{F})$ дефинишемо карактеристични полином

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Број $\lambda \in \mathbb{C}$ је сопствена вриједности матрице акко је λ нула сопственог полинома.

$A\vec{v_1} = \lambda \vec{v_1}$

$A\vec{v_2} = \lambda \vec{v_2}$

$A(\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2}) = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$

$$\lambda \in \delta(A) \iff \overset{\lambda}{\cancel{x}} \cdot \vec{v} \neq 0$$

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \iff (A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$p_A(\lambda) \neq 0$$

Ако је λ нула карактеристичног полинома $p_A(\lambda)$ вишеструкости k тада кажемо да је λ сопствена вриједности матрице A која је алгебарска вишеструкости k. Ако је λ једина сопствена вриједности матрице A тада је свако нетривијално рјешење хомогеног система $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ сопствени вектор матрице који одговара сопственој вриједности λ.

Скуп S_λ је скуп свих сопствених вектора матрице A који одговарају сопственој вриједности λ. Тада $S_\lambda \cup \{\vec{0}\} = N(A - \lambda I)$ и називамо га сопствени потпростор матрице A који одговара λ. Димензија овог простора $\dim N(A - \lambda I)$ назива се геометријска вишеструкости.

18 ТЕОРЕМА О СОПСТВЕНИМ КАРАКТЕРИСТИКАМА МАТРИЦЕ $p(A)$. ЛЕМА О ЛИНЕАРНОЈ НЕЗАВИСНОСТИ СОПСТВЕНИХ ВЕКТОРА.

Ако је $p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, произвољан полином и неко $A \in M_n(\mathbb{C})$ тада је:

$$p(A) = a_k \cdot A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$ такође

квадратна матрица. Установићемо везу између A и $p(A)$:

ТЕОРЕМА: Нека је ~~$p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots$~~ $p \in C_k(z)$ произвољан полином и $A \in M_n(\mathbb{C})$ произвољна матрица. Ако је $(\lambda, \vec{x})$ сопствени пар матрице A, тада је $(p(\lambda), \vec{x})$ сопствени пар матрице $p(A)$.

доказ: Нека је $p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + a_1 z + a_0$. Тада је

$$p(A)\vec{x} = (a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I)\vec{x}$$
$$= a_k A^k \vec{x} + a_{k-1} A^{k-1} \vec{x} + \dots + a_1 A\vec{x} + a_0 \vec{x}$$

Знамо да је $(\lambda, \vec{x})$ сопствени пар од A, тј. $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ па вриједи и да је $A^j \vec{x} = A^{j-1} A\vec{x} = A^{j-1} \lambda \vec{x} = \lambda A^{j-1} \vec{x}$, наставим процес $A^j \vec{x} = \lambda^j \vec{x}$

Закључујемо да је $(\lambda^j, \vec{x})$ сопствени пар за A^j. Имајући у виду ове релације добијамо да је:

$$p(A)\vec{x} = a_k \lambda^k \vec{x} + a_{k-1} \lambda^{k-1} \vec{x} + \dots + a_1 \lambda \vec{x} + a_0 \vec{x}$$, односно

вриједи да је:

$$\boxed{P(A)\vec{x} = (a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0)\vec{x}}$$

што значи да је $P(\lambda)$ сопствена вриједност за матрицу $p(A)$. □

ТЕОРЕМА: Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ је сингуларна) акко је 0 њена сопствена вриједност.

доказ: $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, $\lambda = 0$

$A\vec{x} = 0$ → хомогени систем има нетривијална рјешења акко $\det A = 0$ (сингуларна) $\Rightarrow 0 \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists \vec{x} \neq 0$
$\Rightarrow A\vec{x} = 0\vec{x}$

$0 \in \delta(A) \Leftrightarrow \exists \vec{x} \neq 0, \ A\vec{x} = 0\vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x}, \ A\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$ □

<u>последица</u>: матрица је регуларна акко $0 \notin \delta(A)$.

<u>ТЕОРЕМА</u>: Ако је $(\lambda, \vec{v})$ сопствени пар инвертибилне матрице A, тада је $(\lambda^{-1}, \vec{v})$ сопствени пар матрице A^{-1}.

<u>доказ</u>: Нека је $(\lambda, \vec{v})$ сопствени пар матрице A, тј. $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$. Пошто је A инвертибилна, $\exists A^{-1}$

$$\Rightarrow A^{-1} A \cdot \vec{v} = A^{-1} \lambda \vec{v}$$

$$\Rightarrow I \cdot \vec{v} = \lambda A^{-1} \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \lambda A^{-1} \vec{v} \quad /:\lambda, \ \lambda \neq 0$$ јер је инвертибилна

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} \vec{v} = A^{-1} \vec{v}}$$ □

Ако је $\delta(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k\}$, $\lambda_j \notin \delta(A)$

$\delta(A^{-1}) = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1} \dots \lambda_k^{-1}\}$

<u>ЛЕМА</u>: Сопствени вектори матрице $A \in M_n(K)$ који одговарају различитим сопственим вриједностима су линеарно независни.

<u>доказ</u>: Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ различите сопствене вриједности матрице A и нека су $x_1, x_2, \dots, x_k$ одговарајући сопствени вектори.

Претпоставимо супротно, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ линеарно зависни вектори. Постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ који нису сви једнаки нули (бар два скалара су различита од нуле).

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = \vec{0} \quad (L1)$$

$$A(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \alpha_2 A\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k A\vec{x}_k$$
$$= \alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k \vec{x}_k$$

Помножимо једнакину $L1$ са матрицом A и добијамо

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0} \quad (L2)$$

Помножимо L1 са λ_n, затим посматрамо $L_2 - L_1$:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)\vec{x_2} + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\vec{x}_{k-1} = \vec{0}$$

Пошто су $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ различите вриједности закључујемо да су $x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, \vec{x}_{k-1}$ линеарно зависни. Понављајући поступак добићемо да су $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x}_{k-2}$ линеарно зависни. Поновимо поступак довољан број пута добићемо да је вектор $\vec{x_1}$ линеарно зависан сам са собом, а ово је контрадикција

□. ?

(19) СЛИЧНОСТ МАТРИЦА И СОПСТВЕНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ. СПЕКТРАЛНА ДЕКОМПОЗИЦИЈА МАТРИЦЕ.

Квадратне матрице $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ су сличне, у ознаци $A \sim B$, ако постоји регуларна матрица P тако да је $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Да би матрице биле сличне морају имати исте сопствене вриједности и исти број сопствених вектора. Сличне матрице имају исти оператор.

доказ: Нека су A и B сличне матрице

$$B = P^{-1}AP.$$

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P|$$

$$= \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$$

Дијагоналну матрицу означавамо са $D = \mathrm{diag}(a_1, a_2 \dots a_n)$

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

$$P_D(\lambda) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) \dots (d_n - \lambda)$$

$$\lambda_1 = d_1, \quad \lambda_2 = d_2, \quad \dots \quad \lambda_n = d_n$$

Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ се може дијагонализовати акко има n линеарно независних сопствених вектора.

$$S = [x_1 | x_2 | \dots | x_n]$$

$$\mathrm{rank}\, S = n, \quad \det S \neq 0$$

$$S^{-1} A S = S^{-1} \cdot A \cdot [\vec{x_1} | \vec{x_2} | \dots | \vec{x_n}]$$

$$= S^{-1} [A\vec{x_1} | A\vec{x_2} | \dots | A\vec{x_n}]$$

$$= S^{-1} [\vec{x_1} | \vec{x_2} | \dots | \vec{x_n}] \cdot \lambda \qquad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda$$

$$S \,/\, S^{-1} A S = D \qquad S = [\vec{s_1} | \vec{s_2} | \dots | \vec{s_n}]$$

$$\boxed{AS = SD}$$

$$A [\vec{s_1} | \vec{s_2} | \dots | \vec{s_n}] = [\vec{s_1} | \vec{s_2} | \dots | \vec{s_n}] D$$

$$[A\vec{s_1} | A\vec{s_2} | \dots | A\vec{s_n}] = [d_1 \vec{s_1} | d_2 \vec{s_2} | \dots | d_n \vec{s_n}]$$

$$\Rightarrow \boxed{A \cdot \vec{s_k} = d_k \cdot \vec{s_k}} \qquad \boxed{k = 1, 2, \dots, n}$$

$\vec{s_1}, \vec{s_2}, \dots, \vec{s_n} \rightarrow$ сопствени вектори матрице A

$d_1, d_2, \dots, d_n \rightarrow$ сопствене вриједности

Ако матрица има n линеарно независних вектора $\vec{x_1}, \vec{x_2} \dots \vec{x_n}$ онда је можемо разложити у спектралну декомпозицију:

$$\boxed{A = S \cdot \lambda \cdot S^{-1}}$$

$S \rightarrow$ сопствени вектори по колонама

$$\boxed{A^n = S \cdot \lambda^n \cdot S^{-1}}$$

Када не можемо да разложимо матрицу у спектралну декомпозицију тада користимо Жорданову декомпозицију:

$$\boxed{A = H \cdot J \cdot H^{-1}}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_n \end{bmatrix} \sim \text{састављено од Жордановиx}$$

20 КЕЈЛИ-ХАМИЛТОНОВА ТЕОРЕМА. ПРИМЈЕР

Нека је A квадратна матрица реда n и нека је карактеристични полином матрице A:

$$P_n(A) = \det(A - \lambda I) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 n + \alpha_0$$

тада вриједи

$$P_n(A) = \sum_{k=0}^{n} d_k \cdot A^k = \vec{0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$, A^4 - линеарне комбинације A^2, A, I

$$P_3(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28$$

ТЕОРЕМА $\Rightarrow$ $-A^3 + 12A^2 - 39A + 28I = 0$

$$A^3 = 12A^2 - 39A + 28I$$

$$A^4 = 12A^3 - 39A^2 + 28A$$

$$A^4 = 12\left(12A^3 - 39A + 28I\right) + 39A^2 + 28A$$

$$A^4 = 105A^2 - 440A + 336I$$

$\vec{x}_n$

⑥ ЕЛЕМЕНТИ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

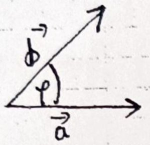
㉑ СКАЛАРНИ, ВЕКТОРСКИ И МЈЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД:

Скаларни производ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ је:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$



$\varphi=\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални $(a\perp b)$ тада је $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Особине скаларног производа:

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$
4. $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}(\alpha\vec{b})$, $\alpha\in\mathbb{R}$
5. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|<|\vec{a}||\vec{b}|$

За скаларни производ вектора стандардне базе
$\vec{i}=\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{j}=\vec{e_2}=(0,1,0)$, $\vec{k}=\vec{e_3}=(0,0,1)$ вриједи

$\vec{i}\vec{i}=1$, $\vec{j}\vec{j}=1$, $\vec{k}\vec{k}=1$

$\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД:

Векторски производ вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ у ознаци $\vec{a}\times\vec{b}$ је одређен на сљедећи начин:

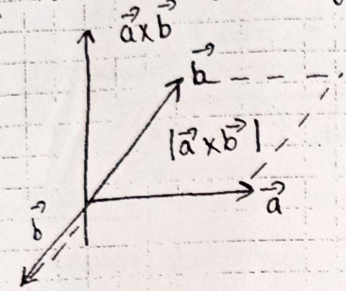
1)
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

2) интензитет вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ је:

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

3) правац вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ је нормалан на раван одређену са векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4) смјер вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ је такав да вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ чине триједар десне оријентације:



Површина паралелограма одређена са $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је $P = |\vec{a}\times\vec{b}|$. Ако је $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, тада су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни, односно $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Особине векторског производа:

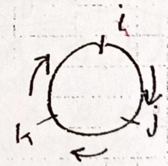
1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
2. $\vec{a}\times\vec{a} = 0$
3. $\alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$
4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$
5. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

Векторски производ вектора стандардне базе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$i\times i = j$, $j\times j = j$, $k\times k = j$

$i\times j = k$, $j\times k = i$, $k\times i = j$

$k\times j = i$, $i\times k = -j$, $j\times i = -k$



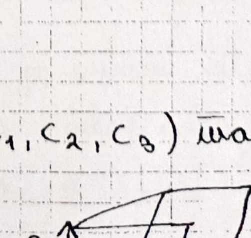
МЈЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА:

Скаларни производ векторског производа $\vec{a}\times\vec{b}$ са вектором $\vec{c}$ се назива мјешовити производ вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

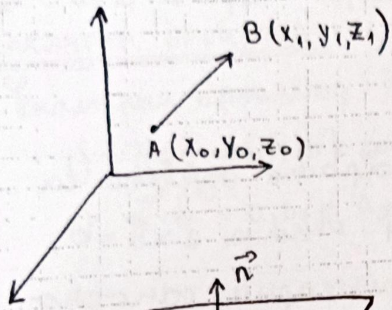
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ тада је

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



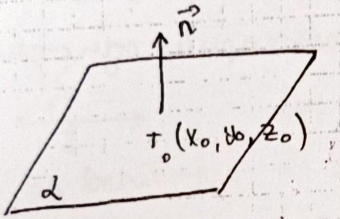
(22) ПРАВА И РАВАН. ОДНОС ПРАВЕ И РАВНИ. УДАЉЕНОСТ РАВНИ (ПРАВЕ) ОД ТАЧКЕ.



ако су дате тачке A и B

$$\vec{AB} = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$



једначина равни: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ $\quad \vec{n}=(A,B,C)$

$$Ax+By+Cz\underbrace{-Ax_0-By_0-Cz_0}_{-D}=0$$

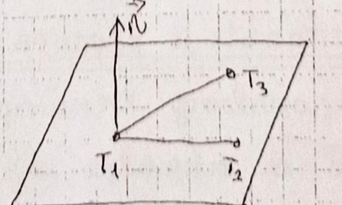
општи облик једначине равни: $Ax+By+Cz+D=0$

→ако је $D=0$ раван пролази кроз координатни почетак

Раван се може задати и у параметарском облику:

$r(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta,A\alpha+B\beta+E)$, $A,B,E\in\mathbb{R}$. Раван може бити одређена и са три неколинеарне тачке $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $M_3(x_3,y_3,z_3)$ у том случају једначина равни гласи:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



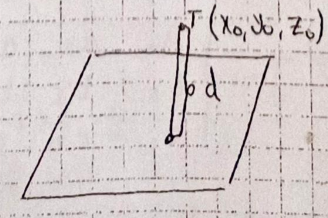
$n=\vec{T_1T_2}\times\vec{T_1T_3}$

$T_1=(x,y,z)$

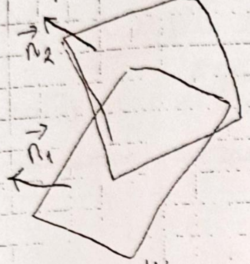
удаљености тачке од равни:

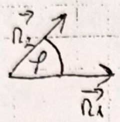
Нека је дата раван α: $Ax+By+Cz+D=0$ и тачка $T(x_0,y_0,z_0)$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



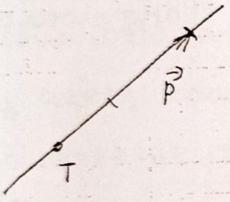
УГАО ИЗМЕЂУ ДВИЈЕ РАВНИ: Нека су дате двије равни $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, Вектори нормале су $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$





$$\varphi=\arccos\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

ПРАВА: Нека је дата тачка $T(x_0,y_0,z_0)$ која припада правој p и вектор правца $\vec{p}=(m,n,l)$



општи облик једначине праве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$$

при чему је дозвољено $\frac{0}{0}$

Параметарски облик праве је

$$r(t)=(mt+x_0,\ nt+y_0,\ lz+z_0),\quad t\in\mathbb{R}$$

Права може бити задана као пресјек двије равни

$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D=0$

$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D=0$

Рјешење система је параметарски облик праве

Угао између двије праве је одређен са векторима правца.

Посматрамо векторе правца $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ и угао је

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|}\right)$$

(23) МАТРИЦЕ ТРАНСФОРМАЦИЈА У ПРОСТОРУ. МАТРИЦА СКАЛИРАЊА. СИМЕТРИЧНЕ МАТРИЦЕ И ОСОБИНЕ

Матрице трансформације најчешће одређујемо на три начина

1) посматрамо линеарно пресликавање $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{A}(e_k) = A \cdot e_k, \quad e_k \text{ - стандардна база}$$

матрицу A добијамо као колоне слике:

$$A = [\, \mathcal{A}(e_1) \mid \mathcal{A}(e_2) \mid \dots \mid \mathcal{A}(e_n) \,]$$

2) одредимо сопствене вриједности и векторе те ~~њиве~~ затим искористимо сопствену декомпозицију (ако постоји)

$$A = S \cdot \lambda \cdot S^{-1}$$

3) одредимо пресликавање једне базе $\{f_1, f_2, f_3\}$

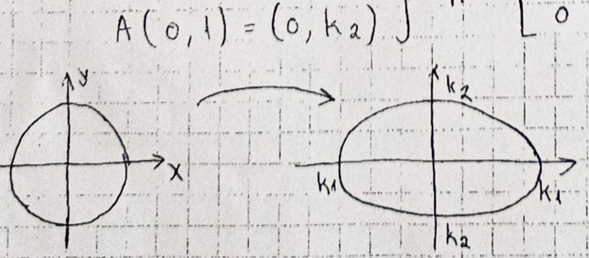
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}(f_1) &= d_1 \\ \mathcal{A}(f_2) &= d_2 \\ \mathcal{A}(f_3) &= d_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} B &= [f_1 \mid f_2 \mid f_3] \\ C &= [d_1 \mid d_2 \mid d_3] \end{aligned}$$

$$A = (B^{-1} \cdot C)$$

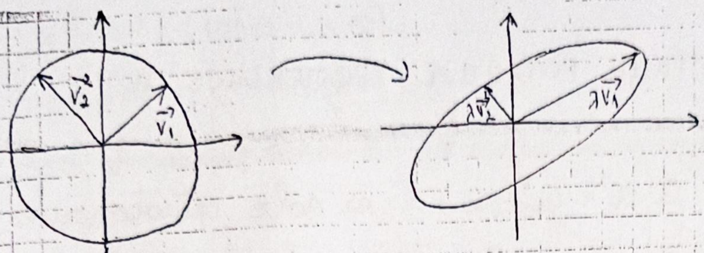
МАТРИЦА СКАЛИРАЊА за коефицијент $k_1 \neq y$ у односу на x-осу, $k_2 > 0$ у односу на y-осу је:

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

доказ: $\left.\begin{aligned} A(1,0) &= (k_1, 0) \\ A(0,1) &= (0, k_2) \end{aligned}\right\} A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$

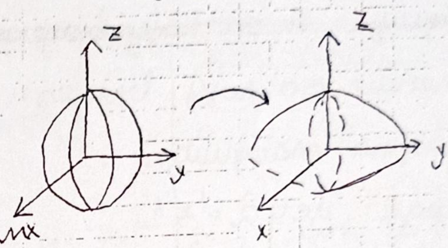


Матрица скалирања у односу на векторе $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ за скале λ_1 и λ_2 је ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) симетрична матрица за сопствене вриједности λ_1 и λ_2 и сопствене векторе $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$.



матрица скалирања у односу на x, y и z осу је

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad ; \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$$



Симетрична матрица са позитивним сопственим вриједностима λ_1, λ_2 и λ_3 је матрица скалирања у смјеру сопствених вектора $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$.

СИМЕТРИЧНЕ МАТРИЦЕ:

Матрица A је симетрична ако вриједи $A = A^T$.

ТЕОРЕМА: Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ симетрична тада постоје ортогоналне матрице $Q \in M_n(\mathbb{R})$ и дијагонална матрица $\lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \ \lambda_n) \in M_n(\mathbb{R})$, такве да вриједи $A = Q \ \lambda \cdot Q^T$, колоне матрице Q чине сопствени вектори матрице A. Симетричне матрице врше скалирање (са дозвољеном рефлексијом) у смјеру сопствених вектора који су ортогонални. Сваку матрицу можемо да разложимо у производ три матрице: U, V (ортогонални) и Σ (дијагонална

$$A = U \cdot \Sigma \ V^T \quad \text{(SVD декомпозиција)}$$

(24) ОРТОГОНАЛНЕ МАТРИЦЕ. МАТРИЦА РОТАЦИЈЕ, РЕФЛЕКСИЈЕ И РОТОРЕФЛЕКСИЈЕ.

Матрица Q за коју вриједи $Q Q^T = Q^T \cdot Q = I$ се зове ортогонална матрица (подразумијевамо да су елементи реалне вриједности).

Матрица Q ~~за коју вриједи Q Q~~ која садржи комплексне елементе за коју вриједи $Q \cdot Q^* = Q^* \cdot Q = I$, $Q^* = \bar{Q}^T$ називамо унитарна матрица.

Вриједи: $\det Q = \pm 1$

$$Q \cdot Q^T = I$$
$$\det(Q \cdot Q^T) = \det I$$
$$\det(Q) \cdot \det(Q^T) = 1$$
$$\det^2(Q) = 1$$
$$\det(Q) = \pm 1$$

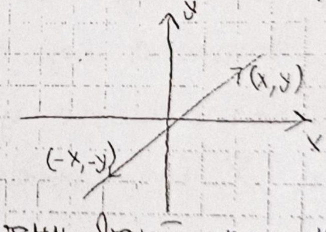
Код ортогоналне матрице све колоне су међусобно ортогоналне

$$Q = [q_1 | q_2 | q_3 | \dots | q_n]$$

Вриједи $q_i^T \cdot q_j = 0$ за $i \neq j$ и $q_k^T \cdot q_k = 1$, вектори су међусобно ортогонални.

Ако је λ сопствена вриједност ортогоналне матрице, тада вриједи $|\lambda| = 1$.

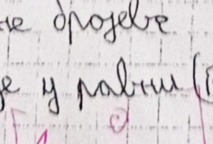
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



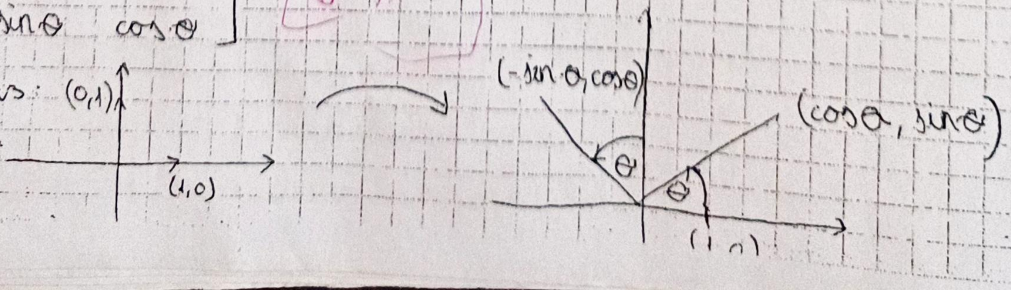
Ако $\theta \neq 0$ и $\theta \neq \pi$ тада сви сопствени вектори, као и сопствене вриједности ортогоналне матрице су комплексни (садрже имагинарне бројеве

Матрица ротације у равни ($\mathbb{R}^2$) за угао θ је матрица

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



доказ:



$A(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$A(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

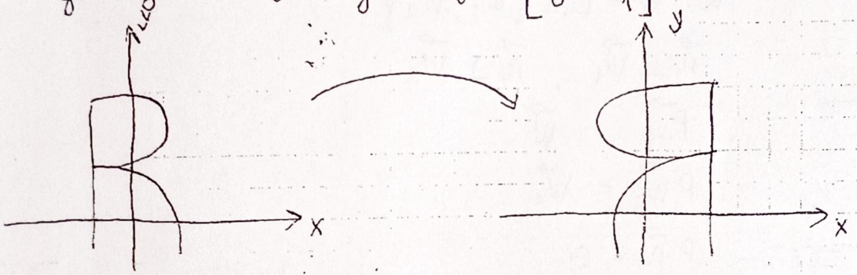
Ако посматрамо $\mathbb{R}^3$ (ротација у односу на):

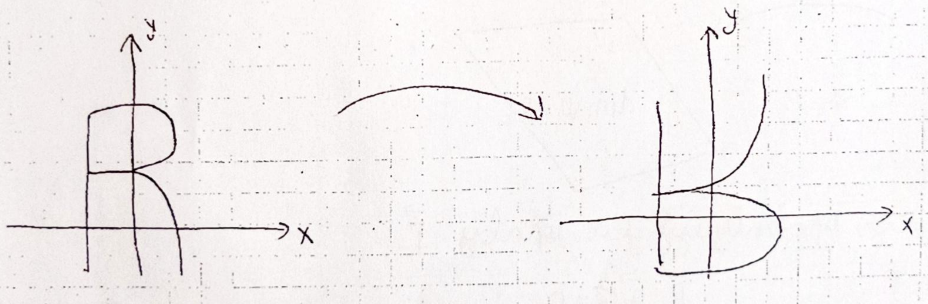
X-осу: Y-осу: Z-осу:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

МАТРИЦА РЕФЛЕКСИЈЕ у односу на X-осу је $S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, док је

у односу на y-осу $S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$





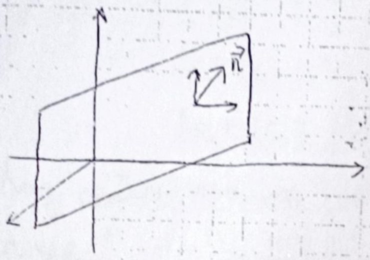
25 МАТРИЦА ПРОЈЕКЦИЈЕ НА ПРАВУ, РАВАН И ХИПЕРРАВАН

Матрица P је матрица пројекције ако вриједи $P = P^T = P^2$

доказ:

$$\left.\begin{aligned} &P\vec{v} = \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{x} + \vec{y} \\ &P^2 v = P\vec{x} = \vec{x} \end{aligned}\right\} P$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Im}(P) \perp \ker(P) \\ &P\vec{y} = 0 \\ &\vec{y} \perp \operatorname{Im}(P) \\ &C(A) \perp N(A^T) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &A = A^T \\ &P = P^T \end{aligned}$$



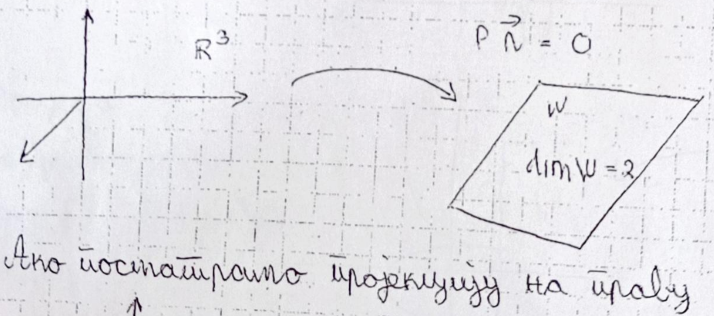
$\alpha: W = \mathrm{Lin}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$

$\vec{n} \perp \vec{w}_1, \quad \vec{n} \perp \vec{w}_2$

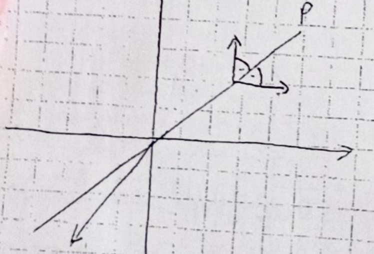
$P\vec{w}_1 = \vec{w}_1$

$P\vec{w}_2 = \vec{w}_2$

$P\vec{n} = 0$



Ако посматрамо пројекцију на праву $\vec{p}$



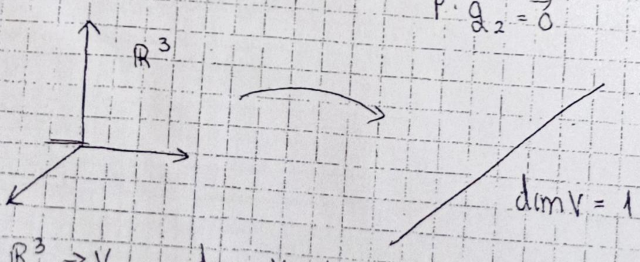
$\vec{p} \cdot \vec{g}_1 = 0$

$p \cdot \vec{g}_2 = 0$

$P \cdot \vec{p} = \vec{p}$

$P \cdot \vec{g}_1 = \vec{0}$

$P \cdot \vec{g}_2 = \vec{0}$



$P: \mathbb{R}^3 \to V$, $\dim V = 1$

$V = \mathrm{Lin}\{\vec{v}_1\}$

P - матрица пројекције са $\mathbb{R}^3$ на праву одређену вектором $\vec{v}$

$$\operatorname{Im}(P) = C(P)$$

$$\dim(\operatorname{Im}(P)) = 1, \quad \dim C(P) = 1$$

$$P = [\alpha\vec{v} \mid \beta\vec{v} \mid \gamma\vec{v}]$$

Уколико је матрица Q ортогонална и вриједи да је $\det Q = -1$ тада може бити један од слиједећа два случаја:

1) Q - матрица рефлексије

2) Q - матрица роторефлексије