

MATEMATIKA 1
Auditorne vježbe
IV sedmica

Relacije

1. Dat je skup $X = \{-1, 1, -i, i\}$ i u njemu relacija ρ sa

$$a\rho b \Leftrightarrow a^2 = b^2, \quad a, b \in X.$$

Ispitati da li je ρ relacija ekvivalencije pa ako jeste odrediti klase ekvivalencije svih elemenata iz skupa X .

2. U skupu \mathbb{R} definisana je relacija ρ sa

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) x\rho y \Leftrightarrow x^2y - x = y^2x - y.$$

Ispitati da li je ρ relacija ekvivalencije na skupu \mathbb{R} . Ako jeste odrediti klasu ekvivalencije elemenata 0, 1, 2.

3. Na skupu \mathbb{C} data je relacija ρ na sljedeći način

$$z_1\rho z_2 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z_1) - (\operatorname{Re}(z_1))^2 + 1) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z_2) - (\operatorname{Re}(z_2))^2 + 1).$$

Ispitati da li je ρ relacija ekvivalencije, pa ako jeste odrediti količnički skup i klasu elementa $z_0 = 0$, gdje je

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

4. Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ data je relacija ρ definisana sa

$$(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow (a - c, b - d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Ispitati da li je ρ relacija ekvivalencije i ako jeste odrediti klase ekvivalencije kojima pripadaju elementi $(0, 0)$ i $(-\frac{1}{3}, 1)$.

5. Dati su skupovi

$$A = \{z : z = ai, a \in \mathbb{R}\} \quad B = \{z : z = ai, a \in \mathbb{R}^+\}$$

i relacija ρ definisana sa

$$z_1\rho z_2 \Leftrightarrow |z_1| \leq |z_2|$$

Ispitati da li je ρ relacija totalnog poretka

- (a) u skupu A
(b) u skupu B.

Zadaci za samostalan rad

1. U skupu $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ definisana je relacija ρ sa

$$(\forall t, m \in S) \quad t\rho m \Leftrightarrow 2tm \geq t + m.$$

Ispitati osobine relacije ρ . Ukoliko je data relacija relacija ekvivalencije naći sve klase.

2. U skupu $X = \{z : z = ai, a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ je definisana relacija

$$z_1 \rho z_2 \Leftrightarrow z_1 z_2 < 0, z_1, z_2 \in X.$$

Dokazati da je to relacija ekvivalencije i odrediti C_i, C_{-i} .

3. Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ data je relacija \prec definisana sa

$$(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) \prec (c, d) \Leftrightarrow a \geq c \wedge b \mid d.$$

Pokazati da je \prec relacija poretka.

4. (**) Neka je $S = \{7n + 3 : n \in \mathbb{N}_0\} = \{3, 10, 17, \dots\}$ i ϱ relacija na skupu S definisana na sljedeći način:

$$\text{za } x, y \in S \quad (x, y) \in \varrho \Leftrightarrow 3 \mid (5x + y).$$

Pokazati da je ϱ relacija ekvivalencije i odrediti sve klase ekvivalencije u odnosu na datu relaciju.