$\boxed{\text{Петар Васић}}$, Братислав Иричанин, Мирко Јовановић,
Бранко Малешевић, Татјана Мацаревић, Бојана Михаиловић,
Зоран Радосављевић, Слободан Симић, Драгош Цветковић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ АЛГЕБРЕ

(први део)

пето издање

Академска мисао
Београд, 2004.

Петар Васић, Братислав Иричанин, Мирко Јовановић,
Бранко Малешевић, Татјана Мацаревић, Бојана Михаиловић,
Зоран Радосављевић, Слободан Симић, Драгош Цветковић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ АЛГЕБРЕ
(први део)

пето издање

Рецензенти
Др Ћемал Доличанин
Др Зоран Шами

Издавач
АКАДЕМСКА МИСАО
Бул. краља Александра 73, Београд

Штампа
Завод за ГТ ТМФ Београд

Тираж
300 примерака

ISBN 86-7466-122-X

Сва права задржавају аутори. Публикација у целости, нити иједан њен део, не сме бити репродукована, преведена или искоришћена у било којој форми, електронској или механичкој, укључујући фотокопирање, снимање или складиштење информација, без претходног одобрења и изричите писане сагласности аутора.

Свако евентуално кршење овог упозорења сматра се повредом ауторског права и подлеже законском санкционисању.

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

ТРЕЋЕМ ИЗДАЊУ

У трећем издању ове *Збирке* отклоњене су све примећене грешке, а на појединим местима извршене су мање модификације текста.

Аутори подсећају да је ово прво издање ове *Збирке* које се појављује после смрти проф. Петра М. Васића, дугогодишњег шефа Катедре за математику ЕТФ-а. Проф. Васић био је наш истакнути математичар и аутор великог броја математичких књига и његово велико искуство које је преносио на млађе сараднике извршило је знатан утицај на физиономију ове књиге.

Београд, новембра 1998. год.

Аутори

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

Под нешто измењеним насловом пред читаоцима је друго, знатно прерађено и допуњено издање књиге која се пре непуне две године појавила под насловом *"Збирка задатака из математике I - алгебра, I део"* у издању Електротехничког факултета у Београду. Чињеница да је тираж првог издања брзо распродат, као и да је у међувремену објављен и други део књиге (који обухвата задатке из линеарне алгебре и комбиноване задатке), охрабрила је *ауторе* у намери да припреме ново издање првог дела ове збирке задатака, и то тако што би се целокупан текст првог издања критички прегледао и прерадио и садржај допунио оним поглављима и задацима који су, по мишљењу корисника и самих *аутора*, недостајали у првом издању.

Због тога је написано ново, уводно поглавље, које садржи разноврсне задатке везане за оне области и појмове који представљају спону између елементарне математике и основних појмова више математике неопходних студенту прве године за несметано праћење наставе. Затим, уз поглавље о полиномима додат је посебан одељак о рационалним функцијама. Сва поглавља су проширена са више нових задатака, тако да је сада укупан број задатака 620, 185 више него у првом издању, а неким задацима из првог издања придодата су и решења. Комплетан текст пажљиво је прегледан и, да би био што јаснији, на појединим местима прерађен, а отклоњене су и све примећене грешке.

Ауторима претходног издања сада се прикључио и Б. Малешевић, асистент - приправник Катедре за примењену математику Електротехничког факултета у Београду. Као и код првог издања, редактор текста био је Зоран Радосављевић.

Рецензентима, проф. др Ћемалу Доличанину и доц. др Ђорђу Вукомановићу аутори дугују посебну захвалност за савете и подршку која је у оваквом послу увек драгоцена.

Аутори захваљују колеги С. Јешићу, дипл. математичару, на помоћи у коректури текста.

У техничкој припреми рукописа за штампу учествовали су Д. Пејаков, И. Тодоровић и А. Војичић, студенти Електротехничког факултетета, на чему им аутори изражавају своју захвалност. Завршну обраду текста извршио је Братислав Иричанин.

Захвалност *аутора* припада и издавачу, предузећу *"Гросккига"*, за успешну сарадњу у издавању ове књиге.

Београд, децембра 1994. год.

Аутори

ПРЕДГОВОР
ПРВОМ ИЗДАЊУ

Књига чији први део читалац има у рукама намењена је студентима I године Електротехничког факултета у Београду. Наиме, откако се настава математике на овом факултету изводи по новим наставним програмима, значајно измењеним у односу на раније програме, осећа се недостатак одговарајућих нових збирки задатака које би подигле квалитет наставе и студентима олакшале рад.

"Збирка задатака из математике I – алгебра" покрива програм предмета "Математика I" који се слуша у првом семестру студија. Њен I део обухвата део градива до поглавља "Линеарна алгебра", док је II део у потпуности посвећен линеарној алгебри. Обележавање поглавља у I делу кореспондира са уџбеником [11] (видети списак литературе), осим у случају поглавља 5 (Полиноми). Аутори су водили рачуна да књига чини целину са поменутим уџбеником и у сваком другом погледу (теоријски садржај на који се ослања, терминологија, ознаке) како би их читаоци користили паралелно на што једноставнији начин.

Пошто је ова збирка писана првенствено за потребе наставе, избор задатака и начин њихове презентације прилагођени су тој намени. Део задатака је решен, мање или више детаљно, потпуно или делимично, за један део дат је само резултат, а преостали задаци остављени су за самостално решавање, што значи да ће читалац моћи да прође кроз све фазе које су потребне за стицање потребног знања. Поред овога, збирка садржи и известан број тежих задатака, намењених првенствено посебно заинтересованим читаоцима, али је, с обзиром на основну намену, њихов избор био у другом плану.

Садржај ове збирке представља, пре свега, резултат искуства аутора у томе какви и како презентирани задаци омогућују студентима I године квалитетно и релативно брзо овладавање новим областима математике и навикавање на високошколски ниво излагања. Због тога ће читалац у њој наћи све оне задатке који се обично раде на часовима вежбања, али и највећи број задатака који су последњих година давани на писменим испитима. Задаци су врло разноврсног порекла које би било тешко прецизно евидентирати, а известан број задатака је оригиналан. На крају књиге наведена је главна литература на српском језику која се препоручује читаоцу за даље коришћење.

У писању ове збирке учествовали су сви наставници и сарадници Катедре за примењену математику Електротехничког факултета у Београду који изводе наставу из предмета "Математика I". Редакцију текста извршио је З. Радосављевић.

Рецензентима, проф. др Ћемалу Доличанину, проф. др Ивану Лацковићу и проф. др Милану Мерклеу аутори захваљују на корисним саветима и сугестијама. Свесни свих недостатака овог првог издања књиге, аутори ће са захвалношћу примити свако указивање на грешку или предлог за побољшање текста који би дошли од стране читалаца.

У техничкој припреми рукописа за штампу учествовали су са пуно воље и умешности студенти Електротехничког факултета Иван Тодоровић, Дарко Пејаков, Велибор Тинтор, Андреј Војичић, Јован Петровић и Јован Ружић, на чему им аутори срдачно захваљују. Завршну обраду текста извршио је Братислав Иричанин.

Посебну захвалност аутори дугују Електротехничком факултету у Београду и његовој Комисији за издавачку делатност, који су, и у садашњим неповољним условима, омогућили брзо издавање ове књиге.

Уколико ова збирка задатака допринесе подизању нивоа знања наших студената и олакша им припремање испита, аутори ће сматрати да њихов труд није био узалудан.

Београд, јануара 1993. год.

Аутори

ОСНОВНЕ ОЗНАКЕ

$\{\ \dots\ \}$	скуп
$\mathbb{N}$	скуп природних бројева
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, \dots\}$
P	скуп простих бројева
$\mathbb{Z}$	скуп целих бројева
$\mathbb{Q}$	скуп рационалних бројева
$\mathbb{I}$	скуп ирационалних бројева
$\mathbb{R}$	скуп реалних бројева
$\mathbb{C}$	скуп комплексних бројева
$\mathbb{Q}^+, \mathbb{I}^+, \mathbb{R}^+$	скупови позитивних рационалних, ирационалних, реалних бројева
$(a,b), (a,b], [a,b]$	отворен, полуотворен, затворен интервал
$\emptyset$	празан скуп
$\mathcal{P}(A)$	партитивни скуп скупа A
$(x_1, x_2, \dots x_n)$	уређена n-торка
$A \times B$	Descartes-ов производ
A^n	$A \times A \times \dots \times A$
$\in$	елемент скупа
$\notin$	није елемент скупа
$\subset$	подскуп скупа
$\not\subset$	није подскуп скупа
$\|A\|$	број елемената скупа
card A	кардинални број, број елемената скупа
$\cup$	унија скупова
$\cap$	пресек скупова
$\setminus$	разлика скупова
$\triangle$	симетрична разлика скупова

A', $\overline{A}$, $C(A)$	комплемент скупа
$\tau(\dots)$	вредност истинитости
$\top, \bot$ (или 1, 0)	тачно, нетачно
$\wedge$	конјункција ("кеп" у Boole-овој алгебри)
$\vee$	дисјункција ("кап" у Boole-овој алгебри)
$\neg$, $\overline{}$	негација (комплемент у Boole-овој алгебри)
$\Rightarrow$	импликација
$\Leftrightarrow$	еквиваленција
$\veebar$	ексклузивна дисјункција
$\uparrow$	Sheffer-ова операција
$\downarrow$	Łukasziewicz-ева операција
$\models$	таутологија, последица
СДНФ (СКНФ)	савршена дисјунктивна (конјунктивна) нормална форма
$\forall$	универзални квантификатор (за свако)
$\exists$	егзистенцијални квантификатор (постоји)
$\exists_1$	постоји тачно једно
$f : X \mapsto Y$	пресликавање X у Y
Y^X	скуп свих пресликавања скупа X у скуп Y
$\min\{\dots\}$, $\min A$	најмањи од
$\max\{\dots\}$, $\max A$	највећи од
NZD	највећи заједнички делилац
NZS	најмањи заједнички садржалац
$[x]$	целобројни део броја
$\{x\}$	разломљени део броја
$+_n$, $\cdot_n$	сабирање и множење по модулу n
$\mid$	дели
$\nmid$	не дели
$x \equiv y \pmod n$	$n \mid (x-y)$
$n!$ (факторијел)	$n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$
$(2n)!!$ (парни факторијел)	$2n\cdot(2n-2)\cdots 2$
$(2n-1)!!$ (непарни факторијел)	$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1$
V_n^k ($\overline{V}_n^k$)	број варијација (са понављањем) од n елемената класе k

C_n^k ($\overline{C}_n^k$)	број комбинација (са понављањем) од n елемената класе k
P_n	број пермутација без понављања од n елемената
$\overline{P}_n^{(n_1,\dots n_k)}$	број пермутација са понављањем, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$
$\overline{G}$	комплемент графа
$GF(n)$	коначно поље од n елемената
$\mathcal{Re}\{z\}$	реални део комплексног броја z
$\mathcal{Im}\{z\}$	имагинарни део комплексног броја z
$\lvert z \rvert$	модуо комплексног броја z
$\overline{z}$	конјуговано z
$r \operatorname{cis} \varphi$	$r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
$P'(x), P''(x), \dots P^{(k)}(x)$	први, други, ... k-ти извод полиномске функције (скраћено - полинома) $P(x)$

ГЛАВА 0.

УВОД

ЕЛЕМЕНТАРНИ ЗАДАЦИ

1. Ако су a и b реални бројеви, доказати неједнакости

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |a+b| \le |a| + |b|.$$

2. Доказати да за позитивне реални бројеве a и b важе неједнакости:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Решење: Свака од ових неједнакости еквивалентна је са неједнакошћу $(a-b)^2 \ge 0$ која је очигледно тачна. Приметимо да знак једнакости важи само у случају једнакости бројева a и b.

Напомена: Наведене неједнакости указују на поредак између хармонијске, геометријске, аритметичке и квадратне средине два позитивна реална броја. Видети и зад. 69.

3. Доказати да за реалне бројеве a и b важи неједнакост

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$$

ако је $ab > 0$.

4. Доказати неједнакост

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$$

за позитивне реалне бројеве a, b и c.

Решење: Претпоставимо да између бројева a, b и c важи следећи поредак: $a \le b \le c$. Тада важи $\frac{b}{a} \ge 1$ и $\frac{c}{b} \ge 1$; самим тим, на основу

$$\left(\frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{c}{b} - 1\right) \ge 0$$

добијамо неједнакост

$$\frac{c}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} - 1.$$

Ако њу саберемо са неједнакостима $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ и $\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2$ из претходног задатка, добијамо тражену неједнакост:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 2 + 2 - 1 = 3.$$

Ако између бројева a, b и c важи неки други поредак, доказ је аналоган претходном.

5. Доказати неједнакост

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$$

ако за бројеве реалне a, b и c важи једнакост $a + b + c = 1$.

6. Ако су a^2, b^2 и c^2 узастопни чланови неке аритметичке прогресије и притом није $a^2 = b^2 = c^2$, доказати да су и $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ и $\frac{1}{a+b}$ такође узастопни чланови неке аритметичке прогресије.

Решење: Ако су a^2, b^2 и c^2 узастопни чланови неке аритметичке прогресије, онда је

$$c^2 - a^2 = 2\,(b^2 - a^2) = 2\,(c^2 - b^2),$$

или

$$(c - a)(c + a) = 2(b - a)(b + a) = 2(c - b)(c + b).$$

Дељењем са $(a + b)(b + c)(a + c)$ добијамо

$$\frac{c-a}{(a+b)(b+c)} = 2\,\frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = 2\,\frac{c-b}{(a+b)(a+c)},$$

или

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} = 2 \cdot \left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c}\right) = 2\left(\frac{1}{b+a} - \frac{1}{c+a}\right).$$

7. Доказати неједнакости:

а) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2;$

б) $\log_6 7 > \log_7 8.$

Решење: а) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2.$

8. Одредити све вредности реалног параметра a за које су оба решења квадратне једначине

$$x^2 - 4x - \log_{1/2} a = 0$$

реална и позитивна.

Решење: Параметар $a > 0$ одређујемо из услова да корени квадратне једначине постоје као реални бројеви, тј.

$$D = 16 + 4\log_{1/2} a > 0,$$

и из услова да су корени позитивни бројеви, тј. из Viète-ових веза за квадратну једначину

$$x_1 + x_2 = 4 > 0$$

и

$$x_1 x_2 = -\log_{1/2} a > 0.$$

Одатле закључујемо да $a \in (1, 16)$.

9. Решити у скупу $\mathbb{R}$ неједначину

$$x^4 - 10x^2 + 9 < 0.$$

Решење: Дата неједначина еквивалентна је са

$$x^4 - 10x^2 + 25 < 16,$$

односно

$$(x^2 - 5)^2 < 16.$$

Имајући у виду да се реални квадратни корен позитивног броја a^2 дефинише као $\sqrt{a^2} = |a|$, тј. као позитиван број чији је квадрат једнак a^2, видимо да ћемо, ако ову унарну операцију применимо на обе стране неједнакости, добити нову еквивалентну неједначину

$$|x^2 - 5| < 4,$$

која је, међутим, еквивалентна са

$$-4 < x^2 - 5 < 4.$$

Решавањем последњих неједначина добијамо:

$$x^2 - 5 > -4$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 > 1$$
$$\Leftrightarrow \quad |x| > 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x < -1 \text{ или } x > 1,$$

односно

$$x^2 - 5 < 4$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 < 9$$
$$\Leftrightarrow \quad |x| < 3$$
$$\Leftrightarrow \quad -3 < x < 3.$$

Према томе, решење полазне неједначине чини унија интервала одређених са $-3 < x < -1$ и $1 < x < 3$.

10. У скупу реалних бројева решити једначину:

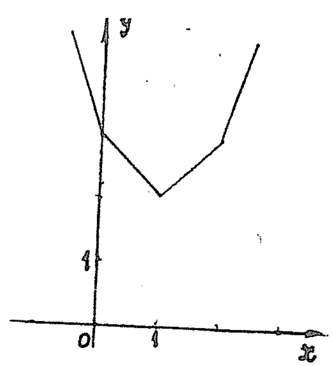
$$|x| + |x-1| + |x-2| = a$$

за разне вредности реалног парамстра a.

Решење: У зависности од вредности x дата једначина постаје:

$$-x + 1 - x + 2 - x = 3 - 3x = a, \quad x \le 0;$$
$$x + 1 - x + 2 - x = 3 - x = a, \quad 0 < x \le 1;$$
$$x + x - 1 + 2 - x = x + 1 = a, \quad 1 < x \le 2;$$
$$x + x - 1 + x - 2 = 3x - 3 = a, \quad 2 < x.$$

График ове криве скициран је на слици, са које се види да за:



$a < 2$ нема решења;

$a = 2$ постоји једно решење $x = 1$;

$2 < a < 3$ постоје два решења $x = 3 - a$, $x = a - 1$;

$a = 3$ постоје два решења $x = 0$, $x = 2$;

$a > 3$ постоје два решења $x = 1 - \frac{a}{3}$, $x = 1 + \frac{a}{3}$.

11. Решити једначину

$$2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - a},$$

где је a реалан параметар.

Решење: Двоструким квадрирањем полазну ирационалну једначину трансформишемо у квадратну једначину

$$8(2 - a)x^2 = (4 - a)^2.$$

Одатле видимо да је $a < 2$. Из полазне једначине закључујемо да је $x = 2\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - a} \ge 0$, па самим тим експлицитно налазимо

$$x = \frac{4 - a}{2\sqrt{2(2-a)}}.$$

Заменом добијене вредности x у полазну једначину закључујемо да добијена вредност јесте решење ако и само ако се полазна једначина после замене своди на једначину

$$|3a - 4| + 2|a| = 4 - a.$$

Због тога разликујемо следеће случајеве.

(*i*) $a < 0$: на основу $|3a - 4| = -(3a - 4)$ и $2|a| = -2a$ претходна једнакост своди се на контрадикцију $-4a = 0$;

(*ii*) $a \in [0, \frac{4}{3}]$: на основу $|3a - 4| = -(3a - 4)$ и $2|a| = 2a$ једнакост се своди на идентитет $4 - a = 4 - a$;

(*iii*) $a \in (\frac{4}{3}, 2)$: на основу $|3a - 4| = 3a - 4$ и $2|a| = 2a$ једнакост се своди на контрадикцију $6a = 8$.

Према томе, полазна једначина има решење

$$x = \frac{4 - a}{2\sqrt{2(2-a)}} \quad \text{за} \quad 0 \le a \le \frac{4}{3}.$$

12. Решити једначину:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}} = x,$$

узимајући притом да свих n поткорених израза јесу позитивни.

Резултат: $x = 3$.

13. Решити једначину:

$$(x+4)3^{1-|x-1|} - x = (x+1)|3^x-1| + 3^{x+1} + 1.$$

Решење: Разликујемо следеће случајеве:

(*i*) $x < 0$: на основу $x-1<0$ и $3^x-1<0$ полазна једначина своди се на једначину
$$(2x+2)(3^x-1)=0,$$
па добијамо решење $x=-1$;

(*ii*) $0 \le x < 1$: на основу $x-1<0$ и $3^x-1\ge 0$ једначина се своди на идентитет
$$(x+4)\,3^x \equiv (x+4)\,3^x,$$
чија је тачност ограничена само условом $x \in [0,1)$;

(*iii*) $x \ge 1$: на основу $x-1\ge 0$ и $3^x-1\ge 0$ једначина се своди на
$$(x+4)(9\cdot 3^{-x}-3^x)=0,$$
па добијамо решење $x=1$.

Значи, полазна једначина има решења $x=-1$ или $x\in[0,1]$.

14. Решити једначину:

$$\sin(\pi\cdot\log x) + \cos(\pi\cdot\log x) = 1.$$

Решење: Уводећи смену $t=\pi\cdot\log x$ претходну једначину сводимо на тригонометријску једначину $\sin t+\cos t=1$, чијим решавањем налазимо решења полазне једначине: $x=10^{2k}$ или $x=10^{\frac{4k+1}{2}}$, где $k\in\mathbb{Z}$.

СКУПОВИ И РЕЛАЦИЈЕ

15. Од којих се елемената састоје следећи подскупови скупа природних бројева:

а) $A = \{x\in\mathbb{N} : 2 \mid x\}$;

б) $B = \{x\in\mathbb{N} : 2 \nmid x\}$;

в) $C = \{x\in\mathbb{N} : 2\nmid x \wedge 3\nmid x \wedge x\ge 5\}$.

Резултат: а) $A=\{2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots\}$,

б) $B=\{1,3,5,7,\ldots,2n-1,\ldots\}$,

в) $C=\{5,7,11,13,17,19,23,25,\ldots\}$.

16. Доказати да скуп простих бројева $\mathbb{P}$ није коначан.

Решење: Претпоставимо супротно, тј. да је скуп простих бројева $\mathbb{P}$ коначан. У том случају запишимо експлицитно скуп простих бројева $\mathbb{P}=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$. Посматрајмо следећи број:
$$q=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n+1.$$
На основу чињенице да је број q већи од сваког од бројева $p_i\in\mathbb{P}$ закључујемо да број q није елемент тог скупа, тј. да је сложен. С друге стране, за претходно одређен број q важи да при дељењу сваким од бројева $p_i\in\mathbb{P}$ добијамо остатак 1. То зна-

чи да је број q дељив само самим собом и јединицом, тј. прост број. Свођењем на контрадикцију закључујемо да скуп $\mathbb{P}$ није коначан.

17. За скупове $A = \{x : x = 6k \pm 1, k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \mathbb{P}$ доказати да комплемент

$$C = C_A(B) = A \setminus B = \{25, 35, 49, \ldots\}$$

јесте бесконачан скуп.

Решење: Посматрајмо бројеве $6k + 5$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ из скупа A. Тада, бирајући $k_j = 5j$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ добијамо бесконачно много сложених бројева

$$m_j = 6k_j + 5 = 6\cdot(5j) + 5 = 5\cdot(6j+1)$$

који припадају скупу A. Самим тим у скупу A поред бесконачног низа простих бројева постоји и комплементарни бесконачни низ сложених бројева, што је и требало доказати.

18. Ако је $A \setminus B$ разлика скупова A и B, доказати да је

$$A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B.$$

19. За подскупове A и B скупа $\mathbb{N}$ формирајмо скуп

$$C = A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Доказати да за сваки подскуп D скупа природних бројева $\mathbb{N}$ постоје подскупови A и B скупа $\mathbb{N}$ такви да је за скуп $C = A + B$ испуњено:

$$C \subset D \quad \text{или} \quad C \cap D = \varnothing.$$

Решење: Уколико постоји паран број $2k$ у скупу D, довољно је изабрати $A = B = \{k\}$. Тада је $C = \{2k\} \subset D$. Ако не постоји паран број у скупу D, довољно је изабрати $A = B = \{1\}$. Тада је за скуп $C = \{2\}$ тачно да је $C \cap D = \varnothing$.

20. Да ли међу скуповима

$$\varnothing,\ \{0\},\ \{\varnothing\},\ \{0\} \setminus \varnothing$$

има једнаких?

21. За сваки природан број n наћи n-точлани скуп Ξ_n који испуњава услов да, ако x и y припадају скупу Ξ_n, тада је или $x \in y$, или $x = y$, или $y \in x$.

Решење: Приметимо да за празан скуп $\varnothing$ (скуп без елемената) важи $\varnothing \neq \{\varnothing\}$. Самим тим тражени низ скупова Ξ_n рекурзивно одређујемо са:

$$\Xi_n = \Xi_{n-1} \cup \{\Xi_{n-1}\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$\Xi_0 = \varnothing \quad (n = 0).$$

Скупови Ξ_n од n елемената имају особину да садрже као елементе редом скупове $\Xi_0, \Xi_1, \ldots, \Xi_{n-1}$, тј. важи

$$\Xi_n = \{\Xi_0, \Xi_1, \ldots, \Xi_{n-1}\}.$$

Самим тим за свако $x, y \in \Xi_n$ важи: или $x \in y$, или $x = y$, или $y \in x$.

Напомена: Скуп Ξ_n означавамо са n и називамо га *нумералом*.

22. Одредити $\mathcal{P}^k(\varnothing)$ за $k = 1, 2, 3$.

Решење:
$$\mathcal{P}^1(\varnothing) = \mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\};$$
$$\mathcal{P}^2(\varnothing) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\};$$
$$\mathcal{P}^3(\varnothing) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^2(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

23. Навести примере скупова који имају следеће особине:

а) сваки елемент скупа X је истовремено и подскуп скупа X;

б) сваки пар елемената скупа A_n (n је број елемената скупа A_n) испуњава услов да је један од њих елемент другог.

Резултат: а) $X = \{\varnothing\},\ \mathcal{P}(X),\ \mathcal{P}^2(X),\ \ldots$

б) $A_2 = \{a, \{a\}\}$, $A_3 = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$,

$A_4 = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$ ...

24. Нека је $\varnothing$ празан скуп и нека је $X = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Ако је $Y = \mathcal{P}(X)$ партитивни скуп скупа X, одредити број елемената скупа $Z = X \cup Y$.

<u>Резултат:</u> Скуп Z је четвороелементан.

25. Доказати да за произвољне елементе a, b, c и d важи:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \text{ ако и само ако } a = c \wedge b = d.$$

<u>Решење:</u> Ако је $a = c$ и $b = d$, дата једнакост очигледно важи. Претпоставимо да је тачна скуповна једнакост

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}. \qquad (1)$$

Тада, ако је $\{a\} = \{c\}$, односно $\{a\} = \{c, d\}$, директно закључујемо да је $a = c$, а одатле $b = d$. Исти закључак важи и уколико је $\{a, b\} = \{c\}$. Размотримо случај $\{a, b\} = \{c, d\}$; тада разликујемо два подслучаја. Прво, уколико је $a = b$ или $c = d$, тада се тврђење своди на један од претходних случајева. Друго, уколико је $a \neq b$ и $c \neq d$, на основу скуповне једнакости (1), случај $a = d$ и $b = c$ директно доводи до контрадикције. Према томе, мора бити $a = c$ и $b = d$.

<u>Напомена:</u> На основу претходне еквиваленције имамо могућност да појам уређеног пара (a, b) дефинишемо скуповно са $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

26. Конструисати бинарну релацију која је

а) симетрична, транзитивна и нерефлексивна;

б) антисиметрична, транзитивна и нерефлексивна.

<u>Резултат:</u> Примери одговарајућих бинарних релација ρ трочланог скупа $S = \{a, b, c\}$ дати су Cayley-јевим таблицама релација:

а)

ρ	a	b	c
a	$\perp$	$\perp$	$\perp$
b	$\perp$	$\top$	$\top$
c	$\perp$	$\top$	$\top$

б)

ρ	a	b	c
a	$\perp$	$\top$	$\top$
b	$\perp$	$\perp$	$\top$
c	$\perp$	$\perp$	$\perp$

<u>Напомена:</u> а) Бинарна релација ρ скупа S која је симетрична и транзитивна јесте и рефлексивна ако и само ако за сваки елемент $y \in S$ постоји елемент $x \in S$ такав да је $x\rho y$. У том случају тачна је импликација: $x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x\rho x$.

б) Приметимо да бинарна релација ρ има за модел бројну релацију $<$ и притом је $a < b < c$.

27. Конструисати бинарну релацију која је

а) рефлексивна, симетрична и нетранзитивна;

б) рефлексивна, антисиметрична и нетранзитивна.

<u>Решење:</u> Конструисаћемо одговарајуће примере бинарних релација ρ за скуп $\mathbb{R}$.

а) $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ јесте тражена релација.

Рефлексивност директно важи:

$$(x, x) \in \rho \Leftrightarrow |x - x| \leq 1.$$

Такође важи и симетричност:

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow |x - y| \leq 1 \Rightarrow |y - x| \leq 1 \Leftrightarrow (x, y) \in \rho.$$

Међутим, на основу чињенице да $(2, 1) \in \rho$ и $(1, 0) \in \rho$ не повлачи $(2,0) \in \rho$, закључујемо да је ρ нетранзитивна релација.

б) $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq x^2\} \subset \mathbb{R}^2$ јесте релација са траженим особинама.

Рефлексивност директно важи:

$$(x, x) \in \rho \Leftrightarrow x \leq x \leq x^2;$$

такође важи и антисиметричност:

$$(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Leftrightarrow x \leq y \leq x^2 \wedge y \leq x \leq y^2 \Rightarrow x = y;$$

међутим, како $(2, 3) \in \rho$ и $(3, 5) \in \rho$ не повлачи $(2, 5) \in \rho$, закључујемо да је ρ нетранзитивна релација.

28. У скупу $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ дефинисана је релација ρ на следећи начин
$$(a, b)\,\rho\,(c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$
Доказати да је ρ релација еквиваленције.

29. У скупу $X = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ дефинисана је релација ρ на следећи начин:
$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow x^2 = y^2 \ (x, y \in X).$$
Доказати да је ρ релација еквиваленције и одредити њене класе еквиваленције.

30. У скупу реалних функција једне независно променљиве дефинисана је релација ρ на следећи начин:
$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow \big(x(t) = y(t) \text{ осим за коначно много вредности } t\big).$$
Доказати да је ρ релација еквиваленције.

31. Нека је дат подскуп A скупа целих бројева $\mathbb{Z}$ и нека је на њему одређена релација ρ на следећи начин:
$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{k} \Leftrightarrow k \mid x - y,$$
где је k природан број. Доказати да је ρ релација еквиваленције и одредити класе еквиваленције.

Решење: Непосредно проверавамо да релација ρ испуњава услове:

(*i*) рефлексивност: за свако $x \in A$ важи:
$$x\rho x \Leftrightarrow x \equiv x \pmod{k} \Leftrightarrow k \mid x - x;$$

(*ii*) симетричност: за све $x, y \in A$ важи:
$$x\rho y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{k} \Leftrightarrow k \mid x - y \Rightarrow k \mid y - x \Leftrightarrow y \equiv x \pmod{k};$$

(*iii*) транзитивност: за све $x, y, z \in A$ важи:
$$x\rho y \wedge y\rho z \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{k} \wedge y \equiv z \pmod{k} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k \mid x - y \wedge k \mid y - z \Rightarrow k \mid x - y + y - z \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k \mid x - z \Leftrightarrow x \equiv z \pmod{k} \Leftrightarrow x\rho z.$$

Према томе, релација ρ јесте релација еквиваленције.

Класе еквиваленције су скупови
$$C_i = \{n \in \mathbb{Z} : n \equiv i \pmod{k}\},\ i \in \{0, 1, \dots, k-1\}.$$
Притом очигледно важи:
$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{k-1} C_i \quad \text{и} \quad (\forall i \neq j)\ C_i \cap C_j = \varnothing.$$
Наиме, скуп скупова C_i $(i \in \{0, 1, \dots, k-1\})$ представља тзв. *партицију* - разбијање скупа $\mathbb{Z}$. Тај скуп означавамо са
$$\mathbb{Z}/\rho = \{C_0, C_1, \dots, C_{k-1}\}$$
и називамо *количничким скупом* скупа $\mathbb{Z}$ у односу на релацију ρ.

32. Нека је у скупу $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ релација ρ одређена са:
$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{3}.$$
Одредити класе еквиваленције.

Решење: Приметимо најпре да за релацију конгруенције по модулу 3 имамо следеће записе елемената скупа A:

$1 = 0\cdot 3 + 1$, $\quad 2 = 0\cdot 3 + 2$, $\quad 3 = 1\cdot 3 + 0$,

$4 = 1\cdot 3 + 1$, $\quad 5 = 1\cdot 3 + 2$, $\quad 6 = 2\cdot 3 + 0$,

$7 = 2\cdot 3 + 1$, $\quad 8 = 2\cdot 3 + 2$, $\quad 9 = 3\cdot 3 + 0$.

На тај начин можемо да формирамо Cayley-јеву таблицу релације ρ и на следећи начин:

ρ	3	6	9	1	4	7	2	5	8
3	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
6	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
9	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
1	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
4	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
7	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
2	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
5	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
8	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤

Према претходном задатку ρ је релација еквиваленције, а на основу "разбијања" претходне таблице директно добијамо класе еквиваленције: $\{3,6,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$. На основу тога, количнички скуп дат је са:

$$A/\rho = \{\{3,6,9\},\{1,4,7\},\{2,5,8\}\}.$$

33. Нека је дат подскуп A скупа $\mathbb{Z}$ и нека је у њему дефинисана релација ρ са:

$$x\rho y \Leftrightarrow x \mid y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\, y = k\cdot x.$$

Испитати да ли је ρ релација парцијалног уређења на скуповима

а) $A = \mathbb{N}$;

б) $A = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Решење: а) Непосредно проверавамо да релација ρ на скупу $A = \mathbb{N}$ испуњава услове:

(*i*) рефлексивност: за свако $x \in A$ важи:

$$x\rho x \Leftrightarrow x \mid x;$$

(*ii*) антисиметричност: за све $x, y \in A$ важи следећа импликација:

$$x\rho y \wedge y\rho x \Leftrightarrow x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y.$$

(*iii*) транзитивност: за све $x, y, z \in A$ важи следећа импликација:

$$x\rho y \wedge y\rho z \Leftrightarrow x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z \Leftrightarrow x\rho z.$$

Према томе, релација ρ јесте релација парцијалног уређења.

б) За скуп $A = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ релација ρ није релација парцијалног уређења јер не важи антисиметричност. Нпр. чињенице $a \mid -a$ и $-a \mid a$ немају за последицу $a = -a$.

34. Нека је у скупу $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ дефинисана релација ρ са

$$x\rho y \Leftrightarrow x \mid y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\, y = k\cdot x.$$

Доказати да је ρ релација парцијалног уређења и одредити максималне ланце које она генерише у скупу A.

Решење: На основу претходног задатка релација ρ јесте релација парцијалног уређења. Максималне ланце одређујемо као оне n-торке $(a_1, \dots, a_n)$ елемената скупа A чији су сви елементи (координате) у релацији парцијалног уређења ρ у наведеном редоследу, тј. $(\forall i \le j)$ $a_i \rho a_j$, и то са највећим (максималним) бројем елемената. Конкретно, на основу Cayley-јеве таблице за релацију ρ добијамо следећа три максимална ланца:

$$\lambda_1 = (1,2,4),\ \lambda_2 = (1,2,6),\ \lambda_3 = (1,3,6).$$

35. Нека је бинарна релација ρ скупа $A = \{a, b, c, d\}$ дата Cayley-јевом таблицом:

ρ	a	b	c	d
a	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
b	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
c	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
d	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Доказати да је ρ релација парцијалног уређења и одредити одговарајуће максималне ланце.

Решење: Непосредно проверавамо да је релација ρ рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Једини максимални ланац јесте ланац $\lambda = (a, b, d)$ дужине три.

36. Доказати: ако за бинарну релацију ρ у скупу S важи:

i $(\forall a \in S)\ a\rho a$;

ii $(\forall a_1, a_2 \in S)\ \neg(a_1 \rho a_2 \wedge a_2 \rho a_1 \wedge \neg(a_1 = a_2))$;

iii $(\forall a_1, a_2, a_3 \in S)\ \neg(a_1 \rho a_2 \wedge a_2 \rho a_3 \wedge a_3 \rho a_1 \wedge \neg(a_1 = a_2 = a_3))$;

iv $(\forall a_1, a_2 \in S)\ a_1 \rho a_2 \vee a_2 \rho a_1$,

онда је ρ релација потпуног уређења скупа S.

37. Доказати да је квадрат сваког непарног природног броја број облика $8k+1$, где је k природан број.

Решење: Сваки непаран природан број је облика $2n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$, па је његов квадрат облика $4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$. Даље, од произвољна два узастопна природна броја n и $n+1$ тачно један је дељив са 2, па је квадрат непарног броја облика $8k+1$.

38. Доказати да међу било којих пет природних бројева постоје два чији је збир дељив бројем 7.

Решење: Претпоставимо да постоји пет природних бројева таквих да збир ма која два од њих није дељив бројем 7. Тада тих пет бројева при дељењу бројем 7 могу имати остатке 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Поделимо те бројеве у четири групе тако да у првој групи буду они са остатком 0, у другој групи они са остатком 1 и 6, у трећој групи они са остатком 2 и 5, а у четвртој групи бројеви са остатком 3 и 4. Пошто смо изабрали пет бројева, постоји бар једна група из које су изабрана два броја. Због чињенице да важи

$$0+0 \equiv 0 \pmod 7,\quad 1+6 \equiv 0 \pmod 7,$$
$$2+5 \equiv 0 \pmod 7,\quad 3+4 \equiv 0 \pmod 7,$$

закључујемо да је збир бројева у тој групи дељив са 7. Тиме је тврђење доказано.

39. Ако је остатак при дељењу неког природног броја са 9 један од бројева 2, 3, 5, 6 или 8, доказати да тај природан број није потпун квадрат.

Решење: Сваки природан број можемо представити у једном од облика: $9k$, $9k\pm1$, $9k\pm2$, $9k\pm3$ или $9k\pm4$. Потражимо њихове квадрате:

$$(9k)^2 = 9(9k^2)+0,$$
$$(9k\pm1)^2 = 9(9k^2\pm 2k)+1,$$
$$(9k\pm2)^2 = 9(9k^2\pm 4k)+4,$$
$$(9k\pm3)^2 = 9(9k^2\pm 6k+1)+0,$$
$$(9k\pm4)^2 = 9(9k^2\pm 8k+1)+7.$$

Закључујемо да квадрат природног броја при дељењу са 9 може да има као остатак само један од бројева 0, 1, 4 или 7. Одатле следује тврђење.

40. Доказати да се сваки прост број $p>3$ може представити у облику $6k\pm1$.

Решење: Представимо прост број p у облику $p=6k+r$ где је $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Тада на основу одговарајућег представљања

$$p = 6k+0 = 6(k),$$
$$p = 6k+1 = 6k+1,$$
$$p = 6k+2 = 2(3k+1),$$
$$p = 6k+3 = 3(2k+1),$$
$$p = 6k+4 = 2(3k+2),$$
$$p = 6k+5 = 6(k+1)-1,$$

закључујемо да тврђење важи.

41. Доказати да се за сваки прост број $p>3$ број $4p^2+1$ може да представи као збир три квадрата природних бројева.

Решење: На основу претходног задатка прост број p можемо да представимо у облику $p=6k\pm1$. Сада је

$$4p^2+1 = 4(6k\pm1)^2+1 = 4(36k^2\pm 12k+1)+1 =$$
$$= 144k^2\pm 48k+5 = (64k^2\pm 32k+4)+(64k^2\pm 16k+1)+16k^2 =$$
$$= (8k\pm2)^2+(8k\pm1)^2+(4k)^2,$$

па тврђење важи.

42. Нека је p прост број. Доказати:

а) ако је број $11p-7$ прост, тада је број $11p+7$ сложен;

б) ако је број $5p^2-2$ прост, тада су бројеви $5p^2-4$ и $5p^2+2$ сложени;

в) ако је број $22p^2+13$ прост, тада су бројеви $2p^2+1$ и $2p^2+11$ прости.

43. Нека је $k \in \mathbb{N}$. У скупу $\mathbb{Z}$ целих бројева доказати:

а) ако важи $a \equiv b \pmod{k}$ и $c \equiv d \pmod{k}$, тада

(*i*) $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{k}$,

(*ii*) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{k}$,

(*iii*) $a^n \equiv b^n \pmod{k} \quad (n \in \mathbb{N})$;

б) ако важи $a \equiv b \pmod{k}$, тада

(*i*) за сваки делилац d броја k важи и релација

$$a \equiv b \pmod{d},$$

(*ii*) за сваки делилац d бројева a и b такав са су бројеви d и k узајамно прости важи релација

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{k},$$

(*iii*) највећи заједнички делилац бројева a и k једнак је највећем заједничком делиоцу бројева b и k.

44. Наћи остатке при дељењу:

а) 3^{100} са 13,

б) $10!$ са 11,

в) 13^{2n} са 7.

Решење: а) На основу чињенице да је $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ закључујемо да је $(3^3)^{33} \equiv 1^{33} \pmod{13}$, односно $3^{99} \equiv 1 \pmod{13}$.

Одатле је $3^{100} \equiv 3 \pmod{13}$, тј. остатак при дељењу 3^{100} са 13 јесте 3.

б) Имајући у виду следеће чињенице:

$$5! = 120 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 5! \equiv 10 \pmod{11},\ 6 \equiv -5 \pmod{11},$$

$$7 \equiv -4 \pmod{11},\ 8 \equiv -3 \pmod{11},\ 9 \equiv -2 \pmod{11} \text{ и } 10 \equiv -1 \pmod{11},$$

добијамо да је

$$10! \equiv (-1)^6 \cdot 5! \pmod{11} \Rightarrow 10! \equiv 10 \pmod{11},$$

тј. остатак при дељењу $10!$ са 11 једнак је 10.

в) Како је $13 \equiv -1 \pmod{7}$, биће и $(13)^{2n} \equiv (-1)^{2n} \pmod{7}$. Одатле добијамо да је $13^{2n} \equiv 1 \pmod{7}$, тј. остатак при дељењу 13^{2n} са 7 јесте 1.

45. Наћи остатак при дељењу:

а) 5^{20} са 24,

б) $2^{60}+7^{30}$ са 13,

в) $37^{n+2}+16^{n+1}+23^n$ са 7.

Резултат: а) 1, б) 0, в) 0.

46. Познато је да важе следеће конгруенције:

$$a^{100} \equiv 2 \pmod{73}, \quad a^{101} \equiv 69 \pmod{73}.$$

Наћи остатак при дељењу броја a бројем 73.

Решење: На основу конгруенције $a^{100} \equiv 2 \pmod{73}$ закључујемо да је

$$a^{101} \equiv 2a \pmod{73}.$$

Сада на основу претпоставке важи

$$a^{101} \equiv 69 \pmod{73}.$$

На основу претходног важи и следећа конгруенција:

$$2a \equiv 69 \pmod{73}.$$

То значи да $73k = 2a - 69$ за неки цео број k, па добијамо једнакост $2(a-71) = 73(k-1)$, која је у скупу целих бројева могућна уколико је $a = 71$ и $k = 1$. Дакле $a \equiv 71 \pmod{73}$, па је остатак при дељењу броја a бројем 73 једнак 71.

47. Дати су природни бројеви $a = 899$ и $b = 493$. Наћи највећи заједнички делилац $d = \mathrm{NZD}(a,b)$ бројева a и b. Одредити целе бројеве p и q такве да важи

$$p \cdot a + q \cdot b = d.$$

Решење: Према Еуклидовом алгоритму дељења важи:

$$\begin{aligned}
899 &= a = b \cdot q_1 + r_1 = 493 \cdot 1 + 406 && (0 < r_1 = 406 < b);\\
493 &= b = r_1 \cdot q_2 + r_2 = 406 \cdot 1 + 87 && (0 < r_2 = 87 < r_1);\\
406 &= r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 = 87 \cdot 4 + 58 && (0 < r_3 = 58 < r_2);\\
87 &= r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4 = 58 \cdot 1 + 29 && (0 < r_4 = 29 < r_3);\\
58 &= r_3 = r_4 \cdot q_5 + r_5 = 29 \cdot 2 + 0 && (r_5 = 0).
\end{aligned}$$

Полазећи од претпоследње једначине:

$$\begin{aligned}
29 &= r_4 = r_2 - r_3 \cdot q_4 = r_2 - (r_1 - r_2 \cdot q_3) \cdot q_4 =\\
&= -q_4 \cdot r_1 + (1 + q_3 \cdot q_4) \cdot r_2 = -q_4 \cdot r_1 + (1 + q_3 \cdot q_4) \cdot (b - r_1 \cdot q_2) =\\
&= \dots = p \cdot a + q \cdot b = (-6) \cdot a + (11) \cdot b
\end{aligned}$$

добијамо тражене целе бројеве $p = -6$ и $q = 11$ такве да је $d = 29 = p \cdot a + q \cdot b$ највећи заједнички делилац.

Напомена: Природни бројеви a и b, на основу Еуклидовог алгоритма, узајамно су прости ако и само ако постоје цели бројеви p и q такви да је $d = 1 = p \cdot a + q \cdot b$.

48. Доказати да се разломак $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ не може скратити ни за један природан број n.

Решење: Будући да постоје цели бројеви $p = 3$ и $q = -2$ такви да важи једнакост

$$d = 1 = p\,(14n + 3) + q(21n + 4),$$

на основу Еуклидовог алгоритма природни бројеви $21n + 4$ и $14n + 3$ узајамно су прости за сваки природан број n, што је и требало доказати.

49. За које се природне бројеве n разломак $\dfrac{n^2 + 2}{n^2 + n}$ не може скратити?

Решење: Применом Еуклидовог алгоритма:

$$n^2 + n = (n^2 + 2) \cdot 1 + (n - 2),$$
$$n^2 + 2 = (n - 2) \cdot (n + 2) + 6,$$

закључујемо да је заједнички делилац бројиоца и имениоца уједно и заједнички делилац бројева $n - 2$ и 6. Одатле и закључак да су тражени бројеви n облика $6k + 1$ и $6k + 3$, јер је само за њих $n - 2 \equiv \pm 1 \pmod 6$, тј. $n - 2$ и 6 су узајамно прости бројеви.

50. Дати су природни бројеви n и m. Одредити колико има природних бројева p таквих да је $p \le m$ и $n \mid p$.

Решење: Задатак решавамо употребљавајући функцију *цео део*. Наиме, за сваки реалан број x означимо са $[x]$ највећи цео број који није већи од x, тзв. *цео* (или целобројни) *део* x. Тако је, нпр. $[3] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$. Такође дефинишимо и функцију *разломљени део* једнакошћу $\{x\} = x - [x]$. Тако је нпр. $\{3\} = 0$, $\{\pi\} = 0.14\dots$, $\{-\pi\} = 0.85\dots$. Очигледно важи основна неједнакост

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Бројеви дељиви са n јесу бројеви n, $2n$, $3n$, ... Уколико са k означимо број свих природних бројева мањих или једнаких m који су дељиви са n, важи неједнакост $kn \le m < (k + 1)n$; посматрајући је у облику $k \le \dfrac{m}{n} < k + 1$, закључујемо да је $k = \left[\dfrac{m}{n}\right]$.

51. Доказати да је

$$[a + b] \ge [a] + [b]$$

за било које реалне бројеве a и b.

Решење: За било које реалне бројеве a и b је $a = [a] + \{a\}$, $b = [b] + \{b\}$. Сабирањем се добија да је $a + b = [a] + [b] + \{a\} + \{b\}$, па је $[a+b] = [[a] + [b] + \{a\} + \{b\}] = [a] + [b] + [\{a\} + \{b\}] \geq [a] + [b]$, што је и требало доказати.

52. Доказати да за реалне бројеве x и y важи:

а) $[x + m] = [x] + m$ ако је m цео број;

б) $[x] + [-x] + 1 = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x \text{ цео број,} \\ 0, & \text{у супротном;} \end{cases}$

в) $[x - y] \leq [x] - [y] \leq [x - y] + 1$;

г) $[x]\cdot[y] \leq [x\cdot y] \leq [x]\cdot[y] + [x] + [y]$;

д) $\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{m}\right]$ ако је m цео број.

МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

53. Доказати да за реалне бројеве a и b и природан број n важи Newton-ов биномни образац:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + b^n .$$

Решење: За биномне коефицијенте непосредно проверавамо:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1},$$

где је $k < n$. Сада, на основу претходне једнакости, Newton-ов биномни образац доказујемо директно применом математичке индукције.

За $n = 1$ је

$$(a+b)^1 = a + b.$$

Претпоставимо да важи $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$ за произвољно, али фиксно $m \in \mathbb{N}$. У том случају је:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m (a+b) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \cdot (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} =$$

$$= \binom{m}{0} a^{m+1} + \sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) a^{m+1-i} b^i + \binom{m}{m} b^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} a^{m+1-i} b^i .$$

Према томе, тврђење важи за сваки природан број n.

54. Ако је број p прост, доказати да $p \mid n^p - n$ за било који природан број n.

Решење: За $n = 1$ тврђење важи јер је нула дељива сваким природним бројем.

Претпоставимо да $p \mid n^p - n$ за произвољан, али фиксиран број $n \in \mathbb{N}$. Сада је

$$(n+1)^p - (n+1) = n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \ldots + 1 - n - 1 = n^p - n + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^{p-k}.$$

Видимо да су сви биномни коефицијенти $\binom{p}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, дељиви са p: наиме, како је p прост број и

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!},$$

при чему је $\binom{p}{k}$, у ствари, природан број, фактор p, у бројиоцу, није дељив ниједним фактором броја $k!$. Пошто, осим тога, $p \mid n^p - n$ по индуктивној претпоставци, то значи да $p \mid (n+1)^p - (n+1)$, па тврђење важи за произвољан број $n \in \mathbb{N}$.

55. Доказати следеће идентитете за природне бројеве:

а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$;

б) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\cdot\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$;

в) $\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \dots + n^2\binom{n}{n} = n\cdot(n+1)\cdot 2^n$;

г) $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

56. Доказати идентитет

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} - 2.$$

57. Доказати да за реални број $a \ge 0$ и природан број n важи Bernoulli-јева неједнакост

$$(1+a)^n \ge 1 + na.$$

Решење 1: Неједнакост директно доказујемо математичком индукцијом.

За $n = 1$ је $(1+a)^1 = 1 + 1\cdot a$.

Претпоставимо да важи $(1+a)^m \ge 1 + m\cdot a$ за произвољно $m \in \mathbb{N}$.

Под уведеном претпоставком биће

$$(1+a)^{m+1} = (1+a)^m(1+a) \ge (1+ma)(1+a) =$$
$$= 1 + ma + a + ma^2 \ge 1 + (m+1)\cdot a.$$

Решење 2: Директно на основу Newton-овог биномног обрасца важи:

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \ge 1 + n\cdot a.$$

58. Доказати да је

$$[nx] \ge n[x],$$

при чему је x реалан, а n природан број.

Решење: За $n = 1$ очигледно је $[x] \ge [x]$. Нека је за неко $n = k$ тачно да је $[kx] \ge k[x]$. Тада је

$$[(k+1)x] = [kx + x] \ge [kx] + [x] \ge k[x] + [x] \ge (k+1)[x],$$

што значи да тврђење важи и за $n = k + 1$.

Из претходног, на основу принципа математичке индукције следује да је дата неједнакост испуњена за било које $n \in \mathbb{N}$.

59. Доказати да важе неједнакости:

а) $2^n > n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$,

б) $2^n > n^2$ $(n = 5, 6, \dots)$.

Решење: а) Према Bernoulli-јевој неједнакости добијамо

$$2^n = (1+1)^n \ge 1 + n\cdot 1 > n.$$

б) За $n = 5$ је $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Како је $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2\cdot n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, јер је $n^2 > 2n + 1$ за свако $n > 2$, то је дата неједнакост заиста задовољена.

60. Доказати да је

$$3^n > n^4$$

за $n = 8, 9, 10, \dots$

Решење: Доказаћемо најпре помоћну неједнакост

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^4 < 3$$

за $k = 8, 9, 10, \dots$. Наведена неједнакост према Newton-овом биномном обрасцу еквивалентна је неједнакости

$$\left(\frac{4}{k} + \frac{6}{k^2}\right) + \left(\frac{4}{k^3} + \frac{1}{k^4}\right) < 2$$

која је тачна за $k \ge 8$. Надаље тврђење доказујемо применом принципа математичке индукције.

За $n = 8$ заиста је $3^8 > 8^4$.

Нека важи $3^m > m^4$ за произвољно фиксно $m \in \mathbb{N}$. Сада је

$$3^{m+1} = 3^m \cdot 3 > m^4 \cdot 3 > m^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^4 = (m+1)^4,$$

тј. ако је $3^m > m^4$, онда је и $3^{m+1} > (m+1)^4$. Тиме смо доказали да тврђење важи за сваки природан број n.

Напомена: Може се доказати да за реалне бројеве $a, b > 1$ и $r > 0$ постоји природан број n_0 такав да за свако $n \geq n_0$ важи:

$$\log_a n < n^r < b^n < n! < n^n.$$

61. Доказати да

$$64 \mid 3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13,$$

где је n произвољан природан број.

Решење: За $n = 1$ имамо да $64 \mid 320$, тј. тврђење важи.

Уведимо ознаку

$$T(n) = 3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13$$

и претпоставимо да $64 \mid T(n)$ за произвољно изабрано n. Сада је

$$T(n+1) = 3^{4n+5} + 10 \cdot 3^{2n+2} - 13 = 81 \cdot 3^{4n+1} + 10 \cdot 9 \cdot 3^{2n} - 13 =$$
$$= 81 \cdot T(n) - 72 \cdot 10 \cdot 3^{2n} + 80 \cdot 13 = 81 \cdot T(n) - 80(9 \cdot 3^{2n} - 13).$$

Први сабирак у добијеном изразу дељив је са 64 по индуктивној претпоставци, а други садржи фактор 16. Према томе, ако докажемо да $4 \mid 9 \cdot 3^{2n} - 13$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то ће значити да $64 \mid T(n+1)$.

Заиста, за $n = 1$ имамо $4 \mid 68$. Претпостављајући тачност тврђења за неко фиксно n, после трансформације

$$9 \cdot 3^{2n+2} - 13 = 9 \cdot (9 \cdot 3^{2n} - 13) + 8 \cdot 13,$$

закључујемо да је оно испуњено и за следећи број $n + 1$, тј. да увек важи $4 \mid 9 \cdot 3^{2n} - 13$. Према томе, $64 \mid T(n+1)$. Тиме смо доказали да је за произвољно $n \in \mathbb{N}$ израз означен са $T(n)$ дељив са 64.

62. Доказати да је

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad (x_i > -1)$$

за све реалне бројеве истог знака.

Решење: За $n = 1$ очигледно је $1 + x_1 \geq 1 + x_1$.

Нека је за неко $n = k$ тачно да је $\prod_{i=1}^{k} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Нека је $x_{k+1} > -1$. Тада је $1 + x_{k+1} > 0$, па је $\prod_{i=1}^{k+1} (1 + x_i) = (1 + x_{k+1}) \cdot$

$$\cdot \prod_{i=1}^{k} (1 + x_i) \geq (1 + x_{k+1})\left(1 + \sum_{i=1}^{k} x_i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} x_{k+1} x_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} x_i,$$

што значи да тврђење важи и за $n = k + 1$.

На основу принципа математичке индукције следује да је дата неједнакост испуњена за било које $n \in \mathbb{N}$.

Напомена: Доказана неједнакост представља уопштену Bernoulli-јеву неједнакост.

63. Нека је

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}},$$

где се под знаком корена појављује n двојки. Доказати да је

$$a_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Решење: Једнакост доказујемо математичком индукцијом.

Заиста је $a_1 = \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$.

Нека важи: $a_m = 2 \cos \frac{\pi}{2^{m+1}}$ за неки изабрани природан број $n = m$.

Тада је

$$a_{m+1} = \sqrt{2 + a_m} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{m+1}}} =$$
$$= \sqrt{2 + 2\left(2 \cos^2 \frac{\pi}{2^{m+2}} - 1\right)} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{m+2}},$$

што значи да тврђење важи и за наредни број $n = m + 1$. Тиме смо доказали да дата једнакост важи ако је n произвољан природан број.

64. Доказати да за сваки природан број n важе следеће једнакости:

а) $$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

б) $$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

где је $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решење: а) Тврђење доказујемо математичком индукцијом.

За $n = 1$ једнакост важи.

Претпоставимо да је за произвољно изабрано $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{m} \sin kx = \frac{\sin\frac{mx}{2}\cdot\sin\frac{(m+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Имајући у виду уведену претпоставку, имамо

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sin kx = \sum_{k=1}^{m} \sin kx + \sin(m+1)x = \frac{\sin\frac{mx}{2}\cdot\sin\frac{(m+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(m+1)x =$$

$$= \sin\frac{(m+1)x}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{mx}{2} + 2\cdot\cos\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) =$$

$$= \sin\frac{(m+1)x}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{mx}{2} + \sin\frac{(m+2)x}{2} - \sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{(m+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

б) Уколико уведемо ознаку $S(x) = \sum_{k=1}^{m} \cos kx$, тада на основу познатог тригонометријског идентитета

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

добијамо директно

$$\sin\frac{x}{2}\cdot S(x) = \sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(-\sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}\right).$$

Према томе, за $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, важи једнакост

$$S(x) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

65. Доказати да за сваки број $n \in \mathbb{N}$ важи следећа једнакост:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

где је $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2^n} \mid n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Упутство: Тврђење може да се докаже математичком индукцијом, или директно, коришћењем тригонометријског идентитета

$$\frac{1}{\sin 2^k x} = \operatorname{ctg} 2^{k-1}x - \operatorname{ctg} 2^k x$$

за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

66. Низ реалних бројева (a_n) дефинисан је рекурентном формулом

$$a_n = (\alpha + \beta)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-2}$$

и почетним условима

$$a_1 = \alpha + \beta,\ a_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta).$$

Доказати да је општи члан низа изражен формулом

$$a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

Решење: Доказ изводимо математичком индукцијом. Имајући у виду дату рекурентну формулу, претпоставимо да тврђење важи за два изабрана узастопна природна броја, рецимо $n-1$ и n, тј.

да је

$$a_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

$$a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

У том случају рекурентна формула даје

$$a_{n+1} = (\alpha + \beta)a_n - \alpha\beta \cdot a_{n-1} =$$

$$= (\alpha + \beta)\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \alpha\beta\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta},$$

што значи да је тврђење испуњено и за следећи број $n+1$. Остаје још да се провери тачност тврђења за онолико почетних бројева колико је најмање потребно за употребљени индуктивни корак, тј. за две почетне вредности броја n. И заиста, за $n = 1$ и $n = 2$ добијамо управо дате изразе за a_1 и a_2. Према томе, доказали смо математичком индукцијом да формула за општи члан низа важи за било које $n \in \mathbb{N}$.

67. Доказати неједнакост

$$p!(2q)! \le 2^{2q} q!(p+q)!,$$

где су $p, q \in \mathbb{N}_0$.

Решење: Употребићемо математичку индукцију по q. Претпоставимо зато да је p произвољан број из задатог скупа и применимо следеће разматрање.

За $q = 0$ имамо да је $p! \le p!$ (јер је по дефиницији $0! = 1$), тј. тврђење важи.

Изаберимо сада произвољно q и претпоставимо да дата неједнакост важи за тако изабрано q и било које p. У том случају је

$$p!(2(q+1))! = p!(2q)!(2q+1)(2q+2)$$

и, због индуктивне претпоставке

$$p!(2(q+1))! \le 2^{2q} \cdot q!(p+q)!(2q+1)(2q+2) \le$$

$$\le 2^{2q} \cdot q!(p+q)!(2q+2p+2)(2q+2) =$$

$$= 2^{2q+2} \cdot q!(p+q)!(p+q+1)(q+1) =$$

$$= 2^{2q+2} \cdot (q+1)!(p+q+1)!,$$

што значи да неједнакост важи и за следећи број $q+1$ (и за произвољно p). Према томе, доказали смо да је тврђење испуњено за било који пар бројева p и q из задатог скупа.

68. Доказати идентитет

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k},$$

где је n природан број и $0 \le k < n$.

Упутство: Применити математичку индукцију по k.

69. Нека је $a_1, \ldots, a_n$ коначан низ позитивних реалних бројева, за који редом дефинишемо

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

$$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

као хармонијску, геометријску, аритметичку и квадратну средину. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важе следеће неједнакости:

$$H_n \le G_n \le A_n \le K_n.$$

Решење: Доказаћемо само неједнакост између геометријске и аритметичке средине индукцијом по броју $n \in \mathbb{N}$.

За $n = 1$ и $n = 2$ очигледно је $G_1 = a_1 = A_1$ и $G_2 = \sqrt{a_1 a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2} = A_2$ (видети зад. 2.). Претпоставимо да за неко изабрано $m \in \mathbb{N}$ важи

$$G_m = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_i} \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i = A_m .$$

Не умањујући општост узимамо да је

$$a_{m+1} = \max\{a_1, \dots, a_{m+1}\}$$

(будући да је нумерација чланова коначног низа произвољна, можемо их означити тако да буду у неопадајућем поретку). Због тога је $a_{m+1} \ge A_{m+1}$, па на основу еквиваленције

$$a_{m+1} \ge A_{m+1} \Leftrightarrow (\exists \delta \ge 0)\, a_{m+1} = A_m + \delta$$

за уведени ненегативни број $\delta = a_{m+1} - A_m \ge 0$ важи једнакост

$$A_{m+1} = \frac{mA_m + a_{m+1}}{m+1} = \frac{mA_m + A_m + \delta}{m+1} = A_m + \frac{\delta}{m+1} .$$

Одатле добијамо:

$$(A_{m+1})^{m+1} = \left(A_m + \frac{\delta}{m+1}\right)^{m+1} = (A_m)^{m+1}\left(1 + \frac{\delta}{(m+1)A_m}\right)^{m+1} \ge$$

$$\ge (A_m)^{m+1}\left(1 + (m+1)\frac{1}{(m+1)A_m}\right)$$

на основу Bernoulli-јеве неједнакости (видети зад. 57.). Због тога је

$$(A_{m+1})^{m+1} = (A_m)^{m+1}\left(1 + \frac{\delta}{A_m}\right) = (A_m)^m (A_m + \delta) \ge$$

$$\ge (G_m)^{m+1}(A_m + \delta) = (G_m)^m (a_{m+1}) = (G_{m+1})^{m+1},$$

односно

$$A_{m+1} \ge G_{m+1},$$

што је и требало доказати.

Напомена: Доказана неједнакост сматра се једном од најважнијих неједнакости у математици; познато је преко четрдесет разних доказа ове знамените неједнакости.

70. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост:

$$\frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{n!} \le \frac{n+1}{2} \le \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{6}} .$$

Упутство: Искористити елементарне једнакости

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{и} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

71. За функцију $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ кажемо да је *J-конвексна* ако за све $a, b \in [\alpha, \beta]$ важи неједнакост:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2} .$$

Доказати да за произвољни низ $(a_i)_{i=1}^{n} \subset [\alpha, \beta]$ и произвољно $n \in \mathbb{N}$ важи Jensen-ова неједнакост:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i). \qquad (J)_n$$

Решење: Најпре ћемо доказати (стандардном математичком индукцијом) да неједнакост $(J)_n$ важи за бесконачни скуп бројева облика 2^m, $m \subset \mathbb{N}$. Заиста, за $n = 2$ тврђење важи по претпоставци. Нека тврђење важи за $n = 2^m$, тј. нека важи неједнакост $(J)_{2^m}$. Тада за $n = 2^{m+1} = 2\nu$ према полазној претпоставци и индуктивној хипотези важи:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = f\left(\frac{1}{2\nu}\sum_{i=1}^{2\nu} a_i\right) = f\left(\frac{\frac{a_1+\dots+a_\nu}{\nu} + \frac{a_{\nu+1}+\dots+a_{2\nu}}{\nu}}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} a_i\right)\right) + \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} a_{\nu+i}\right)\right) \le \frac{1}{2\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} f(a_i) + \sum_{i=1}^{\nu} f(a_{\nu+i})\right) =$$

$$= \frac{1}{2\nu}\sum_{i=1}^{2\nu} f(a_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

Према томе, тврђење је доказано за природне бројеве облика $n = 2^m$. Сада доказујемо да из неједнакости $(J)_n$ следује неједнакост $(J)_{n-1}$ за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$. Из тачности неједнакости за n чланова следује тачност неједнакости следећег облика

$$f\left(\frac{a_1+\dots+a_{n-1} + \frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}}{n}\right) \le \frac{f(a_1)+\dots+f(a_{n-1}) + f\left(\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}\right)}{n}$$

која је еквивалентна траженој неједнакости

$$f\left(\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right) \leq \frac{f(a_1)+\ldots+f(a_{n-1})}{n-1}.$$

Тиме смо доказали тзв. повратном или регресивном математичком индукцијом да Jensen-ова неједнакост важи за произвољно $n \in \mathbb{N}$.

ПРЕСЛИКАВАЊА (ФУНКЦИЈЕ) И ОПЕРАЦИЈЕ

72. Наћи пример непразног скупа X таквог да пресликавање $f : X \to X$ испуњава услове:

а) f јесте сурјекција ("на") и није инјекција ("1-1"),

б) f јесте инјекција ("1-1") и није сурјекција ("на").

Да ли постоје таква пресликавања ако је X коначан скуп?

<u>Резултат:</u> Такви су, рецимо, скупови:

а) $X = [-1, 1]$ и $f(x) = 2x^2 - 1$;

$X = \mathbb{N}$ и $f(2n+1) = 1,\ f(2n) = n \quad (n \in \mathbb{N})$.

б) $X = [-1, 1]$ и $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

73. Да ли је пресликавање $f : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$ задато са

$$f(m, n) = \max\{m, n\}$$

сурјекција и/или инјекција?

<u>Резултат:</u> Пресликавање је сурјекција.

74. Нека су A и S било који коначни скупови. Ако је $|A| = n$ и $|S| = k$, доказати да постоји бар једна инјекција $f : S \to A$ ако и само ако је $k \leq n$.

75. Нека је дато пресликавање $f : X \to Y$. На скупу X дефинисана је бинарна релација ρ на следећи начин:

$$x_1 \rho\, x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in X).$$

Доказати да је ρ релација еквиваленције и одредити одговарајуће класе еквиваленције. Ако је f инјекција одредити колико елемената има свака класа еквиваленције.

76. Нека су за скупове X и Y пресликавања $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ таква да је

$$(\forall x \in X)\ g(f(x)) = x,$$
$$(\forall y \in Y)\ f(g(y)) = y.$$

Доказати да су пресликавања f и g бијекције.

<u>Напомена:</u> Пресликавање g назива се *инверзно пресликавање* пресликавања f и означава се са $g = f^{-1}$.

77. Наћи пример бијекције f јединичног интервала $\mathrm{I} = [0, 1]$ на самог себе која испуњава услов $f = f^{-1}$.

<u>Решење:</u> Тражено пресликавање f може се задати са

$$f(x) = \begin{cases} 0 : & x = 0, \\ -x + \alpha : & x \in (0, \alpha), \\ \alpha : & x = \alpha, \\ -x + (1 + \alpha) : & x \in (\alpha, 1), \\ 1 : & x = 1. \end{cases}$$

78. Наћи пример бијекције $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

<u>Решење:</u> Елементи скупа $\mathbb{N}^2$ су уређени парови (p, q) где су $p, q \in \mathbb{N}$. Доказаћемо да се овај скуп може пребројати, тј. поређати у низ. Посматрајмо следећу бесконачну правоугаону шему:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,n) & \dots \\
 & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,n) & \dots \\
 & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & (3,n) & \dots \\
 & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
(n,1) & (n,2) & (n,3) & \dots & (n,n) & \dots \\
 & \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}$$

у којој, полазећи од првог уређеног пара $(1,1)$ и пратећи слева смер стрелица (од прве врсте ка осталим врстама), уређене парове ређамо у низ. Математичком индукцијом доказује се да је позиција уређеног пара (p,q) у низу дата вредношћу функције $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$:

$$n = f(p,q) = \binom{p+q-1}{2} + p.$$

Према конструкцији пресликавање f јесте бијекција, што се непосредно проверава.

<u>Напомена:</u> За два непразна скупа X и Y кажемо да су *еквивалентни* или *исте кардиналности* ако постоји бијекција $f:X\to Y$ и ову чињеницу означавамо са

$$\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y.$$

На тај начин сваком скупу X придружујемо ознаку класе скупова са истом кардиналношћу, твз. *кардинални број* $\operatorname{card} X$. Даље, за два непразна скупа X и Y кажемо да је скуп X мање кардиналности од скупа Y ако постоји инјекција $f:X\to Y$, што означавамо са

$$\operatorname{card} X \le \operatorname{card} Y.$$

Кардинални број коначног скупа X јесте природан број који представља број елемената скупа; у том случају поред ознаке $\operatorname{card} X$ користи се и $|X|$. Кардинални број скупа природних бројева $\mathbb{N}$ означавамо са $\aleph_0$ (чита се: *алеф нула*) и сваки скуп чији је кардинални број $\aleph_0$ називамо *пребројивим скупом*. Кардинални број скупа реалних бројева $\mathbb{R}$ означавамо са c и сваки скуп чији је кардинални број c називамо *скупом моћи континуума*. На основу претходног задатка закључујемо да скуп $\mathbb{N}^2$ јесте пребројив, што се симболички може да изрази и као $\aleph_0^2 = \aleph_0$.

79. Одредити кардиналне бројеве:

а) скупа простих бројева (доказати да је сваки подскуп пребројивог скупа коначан или пребројив);

б) скупа целих бројева;

в) скупа свих рационалних бројева (доказати да је унија највише пребројиво много пребројивих скупова пребројив скуп).

80. Доказати да скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ није пребројив скуп.

<u>Решење:</u> Претпоставимо супротно, тј. да скуп $\mathbb{R}$ јесте пребројив. Тада се његови елементи, дати у децималном запису

$$x = \overline{x_0\,.\,x_1x_2\ldots x_n\ldots},$$

могу поређати у низ:

$$\begin{array}{l}
a_1 = \overline{\alpha_{10}\,.\,\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1m}\ldots} \\
a_2 = \overline{\alpha_{20}\,.\,\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2m}\ldots} \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_n = \overline{\alpha_{n0}\,.\,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nm}\ldots} \\
\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Међутим, конструишимо реалан број $b = \overline{\beta_0\,.\,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ тако да важи $\beta_0 \ne \alpha_{10}$, $\beta_1 \ne \alpha_{21}$, $\beta_2 \ne \alpha_{32}$, ..., $\beta_n \ne \alpha_{(n+1)n}$, ... ($\beta_0 \in \mathbb{Z}$, $\beta_i \in \{0,1,\ldots 9\} : i \in \mathbb{N}$). Према самој конструкцији броја b видимо да тај број не припада низу $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. То значи да било који низ реалних бројева никада не садржи све реалне бројеве, па закључујемо да скуп $\mathbb{R}$ није пребројив.

81. Ако за два скупа X и Y важи $X \subset Y$, доказати да је тада

$$\operatorname{card} X \le \operatorname{card} Y.$$

<u>Решење:</u> Тражена инјекција $f: X\to Y$ дата је са $f(x) = x$.

82. Испитати да ли је операција $*$ дефинисана са

$$x*y = xy - 2(x+y-3)$$

унутрашња операција на следећим скуповима:

а) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$,

б) $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ за реалан параметар $b \neq 2$.

Решење: а) Уочимо следећи низ еквиваленција:

$$x*y = 2 \Leftrightarrow xy - 2(x+y-3) = 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 0.$$

Према томе, уколико је $x \neq 2$ и $y \neq 2$ мора бити и $x*y \neq 2$, тј. операција $*$ јесте унутрашња за скуп $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

б) Уочимо следећи низ еквиваленција:

$$x*y = b \Leftrightarrow xy - 2(x+y-3) = b \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 - b = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-2)x = 2y + b - 6.$$

За $y = 2$ долазимо до контрадикције, док за $y \neq 2$ постоји јединствено одређена вредност:

$$x = \frac{2y+b-6}{y-2}.$$

Непосредно проверавамо да је $x \neq 2$ (јер бисмо, у противном, добили $b = 2$). Значи, за свако $y \in \mathbb{R}\setminus\{2,b\}$ постоји $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,b\}$ тако да је $x*y = b$, па није испуњена дефинициона импликација $x \in \mathbb{R}\setminus\{b\} \wedge y \in \mathbb{R}\setminus\{b\} \Rightarrow x*y \in \mathbb{R}\setminus\{b\}$, тј. $*$ није унутрашња операција.

83. Нека је у скупу $\mathbb{R}$ дефинисана операција:

$$x\circ y = 4xy + k(x+y),$$

где је k реалан параметар. Одредити вредност параметра k тако да је операција $\circ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ асоцијативна.

Решење: Посматрајмо следећа два израза:

$$L = (x\circ y)\circ z = (4xy + k(x+y))\circ z =$$

$$= 4(4xy + k(x+y))z + k((4xy + k(x+y) + z) =$$
$$= 16xyz + 4kxz + 4kyz + 4kxy + k^2x + k^2y + kz;$$

$$D = x\circ(y\circ z) = x\circ(4yz + k(y+z)) =$$
$$= 4x(4yz + k(y+z)) + k\cdot(x + (4yz + k(y+z)) =$$
$$= 16xyz + 4kxz + 4kyz + 4kxy + kx + k^2y + k^2z.$$

Изједначујући L и D закључујемо да асоцијативност важи ако и само ако је $k^2 = k$, тј. за $k \in \{0,1\}$. Према томе, имамо следеће две асоцијативне операције:

$$x\circ y = 4xy$$

и

$$x\circ y = 4xy + x + y.$$

84. Доказати да је бинарна операција $\circ : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^+$ дефинисана на следећи начин:

$$x\circ y = x^{\log_a y},$$

асоцијативна и да поседује неутрални елемент $e \in \mathbb{R}^+$.

Решење: Асоцијативност директно произлази на основу једнакости:

$$(x\circ y)\circ z = \left(x^{\log_a y}\right)\circ z = \left(x^{\log_a y}\right)^{\log_a z} = x^{\log_a y\cdot\log_a z} =$$

$$= x^{\log_a z\cdot\log_a y} = x^{\log_a y^{\log_a z}} = x\circ\left(y^{\log_a z}\right) = x\circ(y\circ z).$$

Непосредно се проверава да је основа логаритма $a \in \mathbb{R}^+$ неутрални елемент за бинарну операцију $\circ : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^+$, тј. да за свако $x \in \mathbb{R}^+$ важи $a\circ x = x\circ a = x$.

ГЛАВА 1.

БУЛОВЕ АЛГЕБРЕ

1. BOOLE-ОВЕ АЛГЕБРЕ

1. Полазећи од аксиома Boole-ове алгебре доказати следећа тврђења:

а) $a \vee a = a$, (идемпотентност)

б) $a \wedge a = a$,

в) $a \vee 1 = 1$,

г) $a \wedge 0 = 0$,

д) $a \wedge (a \vee b) = a$, (апсорптивност)

ђ) $a \vee (a \wedge b) = a$,

где су 0 и 1 неутрални елементи редом операција $\vee$ и $\wedge$.

2. Нека је $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \overline{\ })$ Boole-ова алгебра. Доказати да сваки елемент има јединствен комплемент, тј.

$$(\forall x \in B)\ (\exists_1 \overline{x} \in B) \quad x \wedge \overline{x} = 0,\ x \vee \overline{x} = 1.$$

<u>Решење:</u> Претпоставимо да постоје бар два различита комплемента, тј. посматрајмо два различита пресликавања $^{-1} : B \to B$ и $^{-2} : B \to B$ тако да за произвољно $x \in B$ и за $x_1 = \overline{x}^1$ и $x_2 = \overline{x}^2$ важе једнакости

$$x \wedge x_1 = x \wedge x_2 = 0,$$
$$x \vee x_1 = x \vee x_2 = 1.$$

Користећи аксиому о постојању неутралног елемента, као и услове дистрибутивности и комутативности, добијамо да је

$$x_1 = x_1 \vee 0 = x_1 \vee (x \wedge x_2) =$$
$$= (x_1 \vee x) \wedge (x_1 \vee x_2) = (x \vee x_1) \wedge (x_1 \vee x_2).$$

Имајући у виду претпоставке $x \vee x_1 = x \vee x_2$ и $x \wedge x_1 = x \wedge x_2$ и користећи поново дистрибутивност, као и особину апсорптивности из претходног задатка, видимо да је

$$x_1 = (x \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) = (x \wedge x_1) \vee x_2 =$$
$$= (x \wedge x_2) \vee x_2 = x_2,$$

што значи да елемент $x \in B$ има јединствен комплемент.

3. Нека је $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^{-})$ Boole-ова алгебра. Доказати de Morgan-ове законе, тј. да је:

$$(\forall x, y \in B) \qquad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}, \qquad \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

<u>Решење:</u> Применом аксиома Boole-ове алгебре добијамо:

$$(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = \big((x \wedge y) \wedge \bar{x}\big) \vee \big((x \wedge y) \wedge \bar{y}\big) =$$
$$= \big((x \wedge \bar{x}) \wedge y\big) \vee \big(x \wedge (y \wedge \bar{y})\big) = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0;$$

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = \big((x \wedge y) \vee \bar{x}\big) \vee \bar{y} =$$
$$= \big((x \vee \bar{x}) \wedge (y \vee \bar{x})\big) \vee \bar{y} = \big(1 \wedge (y \vee \bar{x})\big) \vee \bar{y} = \bar{x} \vee (y \vee \bar{y}) = \bar{x} \vee 1 = 1.$$

Имајући у виду да из $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$ следује (због јединствености комплемента) $\bar{a} = b$, закључујемо да је $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$, што је и требало доказати.

Слично се доказује да је и $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$.

4. Доказати да у Boole-овој алгебри важи *уопштени асоцијативни закон*: сваки израз Boole-ове алгебре формиран само помоћу бинарне операције $\vee$ једнак је изразу формираном помоћу ма које правилне примене заграда на полазни израз.

<u>Напомена:</u> Наведено тврђење важи за произвољну асоцијативну операцију, па самим тим и за $\vee$. На тај начин можемо говорити о главном $\vee$ - производу, као и о главном $\wedge$ - производу.

5. Доказати да у Boole-овој алгебри важи:

а) $a \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigvee_{i=1}^{n} (a \wedge a_i)$, $\qquad a \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} (a \vee a_i)$,

(уопштена дистрибутивност);

б) $\overline{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right)} = \bigvee_{i=1}^{n} \bar{a}_i$, $\qquad \overline{\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\right)} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bar{a}_i$,

(уопштени de Morgan-ови закони);

в) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$;

г) $\overline{(x \vee y)} \vee \overline{(\bar{x} \vee y)} = \bar{y}$;

д) $\overline{(x \wedge y)} \wedge \overline{(\bar{x} \wedge y)} = \bar{y}$;

ђ) $(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) = x$;

е) $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$.

<u>Решење:</u> а) Треба доказати да је

$$a \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2) \vee \ldots \vee (a \wedge a_n).$$

Доказ ћемо извести методом математичке индукције.

За $n = 1$ очигледно је $a \wedge a_1 = a \wedge a_1$. За $n = 2$ имамо

$$a \wedge (a_1 \vee a_2) = (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2),$$

што важи због дистрибутивности операције $\wedge$ према $\vee$.

Претпоставимо да једнакост важи за $n = k$, тј. да је

$$a \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{k} a_i\right) = \bigvee_{i=1}^{k} (a \wedge a_i).$$

За $n = k + 1$ биће:

$$a \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{k+1} a_i\right) = a \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k \vee a_{k+1}) =$$

$= a \wedge \big((a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k) \vee a_{k+1}\big)$ (асоцијативност $\vee$)

$= \big(a \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)\big) \vee (a \wedge a_{k+1})$ (дистрибутивност)

$= \big((a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2) \vee \ldots \vee (a \wedge a_k)\big) \vee (a \wedge a_{k+1})$ (индукц. хипотеза)

$= (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2) \vee \ldots \vee (a \wedge a_k) \vee (a \wedge a_{k+1})$. (асоцијативност $\vee$)

Друга једнакост може се доказати аналогно, а последица је принципа дуалности у Boole-овој алгебри.

б) Треба доказати да је $\overline{(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n)} = \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \ldots \vee \bar{a}_n$. За $n = 1$ је $\bar{a}_1 = \bar{a}_1$. За $n = 2$ имамо $\overline{(a_1 \wedge a_2)} = \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2$ (de Morgan-ови закони, в. задатак 3.).

Претпоставимо да једнакост важи за $n = k$, тј. $\overline{\left(\bigwedge_{i=1}^{k} a_i\right)} = \bigvee_{i=1}^{k} \overline{a}_i$.

За $n = k + 1$ имаћемо:

$$\overline{\left(\bigwedge_{i=1}^{k+1} a_i\right)} = \overline{a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k \wedge a_{k+1}} =$$

$= \overline{(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k) \wedge a_{k+1}} =$ (асоцијативност за $\wedge$)

$= \overline{(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k)} \vee \overline{a}_{k+1} =$ (de Morgan-ов закон)

$= (\overline{a}_1 \vee \overline{a}_2 \vee \ldots \vee \overline{a}_k) \vee \overline{a}_{k+1} =$ (индукцијска хипотеза)

$= \overline{a}_1 \vee \overline{a}_2 \vee \ldots \vee \overline{a}_k \vee \overline{a}_{k+1}$. (асоцијативност за $\vee$)

в) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) =$

$= \big((a \wedge b) \vee (b \wedge c)\big) \vee (c \wedge a)$ (асоцијативност за $\vee$)

$= \big((b \wedge a) \vee (b \wedge c)\big) \vee (c \wedge a)$ (комутативност за $\wedge$)

$= \big(b \wedge (a \vee c)\big) \vee (c \wedge a)$ (дистрибут. $\wedge$ према $\vee$)

$= (c \wedge a) \vee \big(b \wedge (a \vee c)\big)$ (комутативност за $\vee$)

$= \big((c \wedge a) \vee b\big) \wedge \big((c \wedge a) \vee (a \vee c)\big)$ (дистрибут. $\vee$ према $\wedge$)

$= \big(b \vee (c \wedge a)\big) \wedge \big(a \vee (c \vee (c \wedge a))\big)$ (комутат., асоцијат. за $\vee$)

$= \big(b \vee (c \wedge a)\big) \wedge (a \vee c)$ (закон апсорпције)

$= \big((b \vee c) \wedge (b \vee a)\big) \wedge (a \vee c)$ (дистрибут. $\vee$ према $\wedge$)

$= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$. (асоцијатив. и комутат.)

<u>Напомена:</u> Доказана једнакост представља тзв. Dedekind-ов идентитет.

6. Уведимо у скупу природних бројева $\mathbb{N}$ две бинарне операције $\wedge$, $\vee$ као највећи заједнички делилац - $NZD(x, y)$ и најмањи заједнички садржалац - $NZS(x, y)$, тј.

$$(\forall x, y \in \mathbb{N}) \quad x \wedge y = NZD(x, y), \quad x \vee y = NZS(x, y).$$

Доказати да је $(\mathbb{N}, \wedge, \vee)$ мрежа.

<u>Решење:</u> Сваки природан број може се факторисати, тј. представити у облику производа потенција простих бројева који га не премашају, на следећи начин:

$$n_j = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_{ij}} \quad (\alpha_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots\}).$$

Види се да је

$$NZD(n_1, n_2) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}\}},$$

као и

$$NZS(n_1, n_2) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}\}},$$

што значи да се за NZD узимају мање, а за NZS веће од потенција истих простих чинилаца, док је k укупан број разних простих чинилаца. Уколико неки операнд не садржи неки од чинилаца, тада се за одговарајућу потенцију узима вредност нула. Имајући у виду ову интерпретацију, задатак се своди на доказивање појединих једнакости везаних за минимум и максимум природних бројева.

i) Јасно је да су обе операције комутативне.

ii) Како је $NZD(NZD(n_1, n_2), n_3) = NZD\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}\}}, n_3\right) =$

$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\min\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}\}, \alpha_{i3}\}}$ и $NZD(n_1, NZD(n_2, n_3)) =$

$= NZD\left(n_1, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}\}}\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_{i1}, \min\{\alpha_{i2}, \alpha_{i3}\}}$,

треба доказати да је за било које $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}_0$

$$\min\{\min\{a_1, a_2\}, a_3\} = \min\{a_1, \min\{a_2, a_3\}\}.$$

Ово је очигледно, јер је резултат у оба случаја најмањи од бројева a_1, a_2, a_3. Аналогно, из

$$\max\{\max\{a_1, a_2\}, a_3\} = \max\{a_1, \max\{a_2, a_3\}\}$$

следује асоцијативност NZD.

iii) Апсорптивност се своди на

$$\min\{a_1, \max\{a_1, a_2\}\} = a_1,$$

што се лако може доказати испитивањем случајева $a_1 \leq a_2$ и $a_1 > a_2$; аналогно је и

$$\max\{a_1, \min\{a_1, a_2\}\} = a_1.$$

Према томе, уређена тројка $(\mathbb{N}, \wedge, \vee)$ је мрежа.

7. Доказати да у мрежи $(S, \wedge, \vee)$ важи:

1) $(\forall x, y, z \in S) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ако и само ако је

2) $(\forall x, y, z \in S) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Решење: Докажимо да исправност релације 1) повлачи исправност релације 2):

$$
\begin{aligned}
&(x \vee y) \wedge (x \vee z) = \\
&= \big((x \vee y) \wedge x\big) \vee \big((x \vee y) \wedge z\big) && \text{(због услова 1))} \\
&= \big(x \wedge (x \vee y)\big) \vee \big((x \vee y) \wedge z\big) && \text{(комутативност)} \\
&= x \vee \big(z \wedge (x \vee y)\big) && \text{(апсорптивност и ком.)} \\
&= x \vee \big((z \wedge x) \vee (z \wedge y)\big) && \text{(због услова 1))} \\
&= x \vee \big((x \wedge z) \vee (y \wedge z)\big) && \text{(комутативност)} \\
&= \big(x \vee (x \wedge z)\big) \vee (y \wedge z) && \text{(асоцијативност)} \\
&= x \vee (y \wedge z). && \text{(апсорптивност)}
\end{aligned}
$$

Обратна импликација може се доказати аналогно, али је јасно да она проистиче из принципа дуалности.

8. Нека је T неки дати скуп, а $\mathcal{P}(T) = S$ партитивни скуп скупа T. Уведимо у S бинарне операције $\wedge$ и $\vee$ као пресек и унију скупова:

$$(\forall X, Y \in S) \quad X \wedge Y = X \cap Y, \quad X \vee Y = X \cup Y.$$

Доказати да је $(S, \wedge, \vee)$ мрежа.

Решење: Особине $X \wedge Y = Y \wedge X$ и $(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$ важе на основу познатих особина скуповних операција; једнакост $X \wedge (X \vee Y) = X$ следује из чињенице да је скуп $X \cup Y$ надскуп скупа X. Исте особине за унију доказују се аналогно. Тиме смо доказали да је $(S, \wedge, \vee)$ мрежа.

Као што је познато, операције $\cap$ и $\cup$ међусобно су дистрибутивне, па је и мрежа $(S, \wedge, \vee)$ дистрибутивна.

За произвољан елемент $X \in S = \mathcal{P}(T)$ посматрајмо елемент $\overline{X} = T \setminus X$, тј. комплемент скупа X у односу на скуп T. Како је

за свако $X \in S$:

$$X \wedge \overline{X} = X \cap (T \setminus X) = \varnothing,$$
$$X \vee \overline{X} = X \cup (T \setminus X) = T,$$

мрежа $(S, \wedge, \vee)$ је комплементирана.

Према томе, доказали смо да је $(S, \wedge, \vee)$ дистрибутивна комплементирана мрежа, тј. Boole-ова алгебра.

9. Доказати да су све двоелементне мреже Boole-ове алгебре.

10. Доказати да је структура $(S, \vee, \wedge, \overline{\ })$, где је $S = \{0, 1, a, b\}$, а операције $\vee$, $\wedge$ и $\overline{\ }$ дефинисане таблицама:

$x \vee y$:

$y \backslash x$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$x \wedge y$:

$y \backslash x$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\overline{x}$:

x	$\overline{x}$
0	1
a	b
b	a
1	0

Boole-ова алгебра изоморфна са Boole-овом алгебром $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \cup, \cap, {}^{c})$, где је ^{c} ознака за операцију комплементирања у односу на скуп $\{a, b\}$.

Решење: Посматрајмо таблице операција Boole-ове алгебре $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \cup, \cap, {}^{c})$:

$x \cup y$:

$\cup$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

$x \cap y$:

$\cap$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

x^{c}:

	c
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

Такође, посматрајмо бијекцију $f : \mathcal{P}\{a, b\} \to S$ дату са:

$$f = \{(\varnothing, 0), (\{a\}, a), (\{b\}, b), (\{a, b\}, 1)\}.$$

Тада важе једнакости:

$$(\forall x, y \in \mathcal{P}(\{a, b\}))\ f(x) \vee f(y) = f(x \cup y),$$
$$(\forall x, y \in \mathcal{P}(\{a, b\}))\ f(x) \wedge f(y) = f(x \cap y),$$
$$(\forall x \in \mathcal{P}(\{a, b\}))\ f(x^c) = \overline{f(x)}.$$

На основу тога алгебарска структура $(S, \vee, \wedge, \overline{\ })$ изоморфна је са Boole-овом алгебром скупова $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \cup, \cap, {}^C)$, па је и сама Boole-ова алгебра.

11. Нека је дат скуп T и нека је S непразан подскуп скупа $\mathcal{P}(T)$, такав да важи:

1) $(\forall x, y \in S)\ x \cap y \in S$ и $x \cup y \in S$;

2) $(\forall x \in S)\ T \setminus x \in S$.

а) Доказати да је $(S, \cup, \cap)$ Boole-ова алгебра.

б) Показати да се услов 1) може заменити са:

$$(\forall x, y \in S)\ x \cap y \in S,$$

као и са

$$(\forall x, y \in S)\ x \cup y \in S.$$

Решење: а) Операције $\cup$ и $\cap$ су операције у скупу S (због услова 1)), а за структуру $(S, \cup, \cap)$ важи следеће:

1^0 Пошто је $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ Boole-ова алгебра и $S \subset \mathcal{P}(T)$, за свако $A, B, C \in S$ биће:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2^0 Постоје неутрални елементи и то:

$0 = \varnothing$, (према услову задатка S је непразан скуп, па постоји бар један скуп $A \in S$, а према услову 2) тада је и $T \setminus A \in S$ и (због 1)) $A \cap (T \setminus A) \in S$, односно $\varnothing \in S$);

$1 = T$ (показали смо да $\varnothing \in S$, па, на основу 2), $T \setminus \varnothing \in S$, односно $T \in S$); притом је $(\forall x \in S)\ x \cup \varnothing = x$ и $x \cap T = x$.

3^0 Сваки елемент $x \in C$ има свој комплемент $\overline{x} \in S$: заиста, за $x \in S$ је $\overline{x} = T \setminus x$ ($\overline{x} \in S$ због услова 2)). Очигледно је $x \cup \overline{x} = T$ и $x \cap \overline{x} = \varnothing$.

Дакле, $(S, \cup, \cap)$ је Boole-ова алгебра.

б) Докажимо да се услов 1) може заменити условом 1'):

1') $(\forall x, y \in S)\ x \cap y \in S$.

Пошто је $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ Boole-ова алгебра, на основу de Morgan-ових закона важи $(\forall A, B \in \mathcal{P}(T))\ A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$ и, стављајући $\overline{A} = T \setminus A$, имамо $A \cup B = T \setminus \big((T \setminus A) \cap (T \setminus B)\big)$. Због $S \subset \mathcal{P}(T)$ биће:

$$(\forall x, y \in S)\quad x \cup y = T \setminus \big((T \setminus x) \cap (T \setminus y)\big).$$

Сада, због услова 2), $(\forall x, y \in S)\ (T \setminus x),\ (T \setminus y) \in S$, а због услова 1') $(\forall x, y \in S)\ (T \setminus x) \cap (T \setminus y) \in S$; најзад, поново због 2), $(\forall x, y \in S)\ T \setminus \big((T \setminus x) \cap (T \setminus y)\big) \in S$, односно

$$(\forall x, y \in S)\ x \cup y \in S.$$

Дакле, из 1') и 2) следује 1), па је $(S, \cup, \cap)$ Boole-ова алгебра.

12. Нека је дат скуп T $(\operatorname{card} T \geq 3)$ и нека је A дати бар двоелементни прави подскуп скупа T. Нека је S скуп оних и само оних подскупова X скупа T за које је $X \cap A = \varnothing$ или $X \cap A = A$. Доказати да је $(S, \cup, \cap)$ Boole-ова алгебра.

13. Дате су Boole-ове алгебре $(A, \vee_1, \wedge_1, {}^{-1})$ и $(B, \vee_2, \wedge_2, {}^{-2})$. Доказати да је $(C, \vee, \wedge, \overline{\ })$ Boole-ова алгебра ако је $C = A \times B$ и за свако $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 \vee_1 a_2, b_1 \vee_2 b_2),$$
$$(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 \wedge_1 a_2, b_1 \wedge_2 b_2),$$
$$\overline{(a_1, b_1)} = (\overline{a}_1^{1}, \overline{b}_1^{2}).$$

Решење: 1^0 Комутативност бинарних операција важи јер је:

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee_1 a_2, b_1 \vee_2 b_2)$$
$$= (a_2 \vee_1 a_1, b_2 \vee_2 b_1)$$
$$= (a_2, b_2) \vee (a_1, b_1);$$

$$(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge_1 a_2, b_1 \wedge_2 b_2)$$
$$= (a_2 \wedge_1 a_1, b_2 \wedge_2 b_1)$$
$$= (a_2, b_2) \wedge (a_1, b_1).$$

2^0, 3^0 Слично се доказује асоцијативност и дистрибутивност.

4^0 Неутрални елементи су:

$0 = (0_A, 0_B)$, где је 0_A неутрални елемент за операцију $\vee_1$, а 0_B за $\vee_2$;

$1 = (1_A, 1_B)$, где је 1_A неутрални елемент за операцију $\wedge_1$, а 1_B за $\wedge_2$.

Заиста, $0, 1 \in C$ и важи:

$$(a, b) \vee 0 = (a, b) \vee (0_A, 0_B) = (a \vee_1 0_A, b \vee_2 0_B) = (a, b),$$
$$(a, b) \wedge 1 = (a, b) \wedge (1_A, 1_B) = (a \wedge_1 1_A, b \wedge_2 1_B) = (a, b).$$

5^0 Сваки елемент има комплемент: наиме, за $(a, b) \in C$ је $\overline{(a, b)} = (\overline{a}^1, \overline{b}^2)$ и важи:

$$(a, b) \vee \overline{(a, b)} = (a, b) \vee (\overline{a}^1, \overline{b}^2) = (a \vee_1 \overline{a}^1, b \vee_2 \overline{b}^2) = (1_A, 1_B) = 1,$$
$$(a, b) \wedge \overline{(a, b)} = (a, b) \wedge (\overline{a}^1, \overline{b}^2) = (a \wedge_1 \overline{a}^1, b \wedge_2 \overline{b}^2) = (0_A, 0_B) = 0.$$

Дакле, $(C, \vee, \wedge, \overline{\ })$ је Boole-ова алгебра.

14. Нека је $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ природан број чији су прости чиниоци $p_1, p_2, \ldots, p_k$ сви међусобно различити и нека је $B = \{k \in \mathbb{N} : k | m\}$. Доказати да је $(B, \vee, \wedge, \overline{\ })$ Boole-ова алгебра, где је

$$x \vee y = \mathrm{NZS}(x, y),$$
$$x \wedge y = \mathrm{NZD}(x, y),$$
$$\overline{x} = \frac{m}{x}.$$

Решење: За $x, y \in B$ важи:

$$x = \prod_{i \in I} p_i, \quad y = \prod_{i \in J} p_i,$$

где су $I, J \subset \{1, 2, \ldots, k\}$. Тада је:

$$x \vee y = \mathrm{NZS}(x, y) = \prod_{i \in I \cup J} p_i, \tag{1}$$

$$x \wedge y = \mathrm{NZD}(x, y) = \prod_{i \in I \cap J} p_i, \tag{2}$$

$$\overline{x} = \frac{m}{x} = \prod_{i \in \{1, 2, \ldots, k\} \setminus J} p_i.$$

Уочимо пресликавање: $f: B \mapsto \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, k\})$ дефинисано са $f(x) = f\Big(\prod_{i \in I} p_i\Big) = I$. Очигледно је да је f бијекција и још важи (на основу (1) и (2)):

$$f(x \vee y) = f\Big(\prod_{i \in I \cup J} p_i\Big) = I \cup J = f\Big(\prod_{i \in I} p_i\Big) \cup f\Big(\prod_{i \in J} p_i\Big) = f(x) \cup f(y);$$

$$f(x \wedge y) = f\Big(\prod_{i \in I \cap J} p_i\Big) = I \cap J = f\Big(\prod_{i \in I} p_i\Big) \cap f\Big(\prod_{i \in J} p_i\Big) = f(x) \cap f(y);$$

$$f(\overline{x}) = f\Big(\frac{m}{x}\Big) = f\Big(\prod_{i \in \{1, 2, \ldots, k\} \setminus I} p_i\Big) = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus I =$$
$$= \{1, 2, \ldots, k\} \setminus f(x) = \big(f(x)\big)^C.$$

Дакле, уређена четворка $(B, \vee, \wedge, \overline{\ })$ изоморфна је са $(\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots k\}), \cup, \cap, {}^C)$, па је и сама Boole-ова алгебра.

Приметимо још да је у Boole-овој алгебри $(B, \vee, \wedge, \overline{\ })$ неутрални елемент за операцију $\vee$ број 1, а за операцију $\wedge$ број m.

15. Нека је n природан број већи од 1. Означимо са B скуп свих природних бројева који деле n, тј. нека је $B = \{k : k \in \mathbb{N}, k | n\}$.

У скупу B дефинишимо операције:

$$x \vee y = \mathrm{NZS}(x, y),$$
$$x \wedge y = \mathrm{NZD}(x, y),$$
$$\overline{x} = \frac{n}{x}.$$

Доказати да је $(B, \vee, \wedge, \overline{\ })$ Boole-ова алгебра ако и само ако n није дељиво квадратом неког природног броја различитог од 1.

Решење: Нека је $(B, \vee, \wedge, \overline{\ })$ Boole-ова алгебра. Тада на основу чињенице да је $x \wedge 1 = \mathrm{NZD}(x, 1) = 1$ и $x \vee n = \mathrm{NZS}(x, n) = n$ закључујемо да је њена нула $0_B = 1$, а јединица $1_B = n$. Даље, претпоставимо да је $n = pk^2$ за неке природне бројеве $p, k > 1$. Међутим, ово доводи до контрадикције:

$$1 = 0_B = k \wedge \overline{k} = \mathrm{NZD}(k, \overline{k}) = \mathrm{NZD}(k, pk) = k,$$

на основу чега закључујемо да природан број n није дељив квадратом природног броја већег од један.

Доказ обратног тврђења дат је у решењу претходног задатка.

16. Доказати да је исказна формула F

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

таутологија.

Решење: Испитивањем свих могућности за p, q и r добија се таблица истинитости у којој је са L, односно D, означена лева, односно десна страна еквиваленције.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee r$	L	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	D	F
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

Из таблице се види да формула поприма вредност ⊤ за све могуће вредности променљивих, тј. да је дата исказна формула таутологија.

Напомена: Видети и решење задатка 5в.

17. Испитати ток вредности истинитости исказних формула:

а) $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big) \Rightarrow \big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big)$;

б) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

18. Испитати да ли су следеће исказне формуле таутологије:

а) $(p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow \big(\neg r \Rightarrow (p \Rightarrow q)\big)$;

б) $(p \vee \neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$;

в) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$;

г) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$;

д) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$;

ђ) $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow p\big) \Rightarrow p$;

е) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)\big)$;

ж) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$;

з) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;

и) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)\big)$.

Решење: в) Претпоставимо да дата исказна формула (обележимо је са A) није таутологија и покажимо да је то немогуће (reductio ad absurdum).

$$\tau(A) = \bot \Leftrightarrow \big(\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top \wedge \tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) = \bot\big) \Leftrightarrow$$
$$\big(\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top \wedge \tau(p \Rightarrow q) = \top \wedge \tau(p \Rightarrow r) = \bot\big) \Leftrightarrow$$
$$\big(\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top \wedge \tau(p \Rightarrow q) = \top \wedge \big(\tau(p) = \top \wedge \tau(r) = \bot\big)\big) \Leftrightarrow$$
$$\big(\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top \wedge \big(\tau(p \Rightarrow q) = \top \wedge \tau(p) = \top\big) \wedge \tau(r) = \bot\big) \Leftrightarrow$$
$$\big(\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top \wedge \tau(p) = \top \wedge \tau(q) = \top \wedge \tau(r) = \bot\big) \Leftrightarrow$$
$$\big(\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top \wedge \tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \bot\big) \Leftrightarrow \bot,$$

одакле следује да је $\tau(A) = \top$, или $\models A$, што је и требало доказати.

19. Доказати да је исказна формула

$$(a \wedge b) \wedge \neg(a \vee b)$$

контрадикција.

20. Исказна формула A састоји се од исказних слова p_1, p_2, ..., p_n и логичких симбола ¬, ∧ и ∨. Формула A^* настала је заменом сваког исказног слова p_i формулом $\neg p_i$ и симбола ∧ и ∨ симболима ∨ и ∧ респективно. Доказати да је формула $\neg A \Leftrightarrow A^*$ таутологија.

21. Не користећи таблицу истинитости доказати да исказна формула

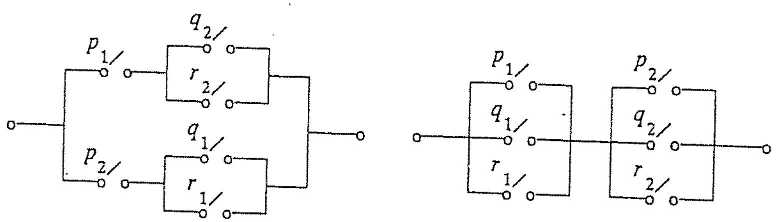
$$(p \wedge q) \vee \neg(p \Rightarrow q)$$

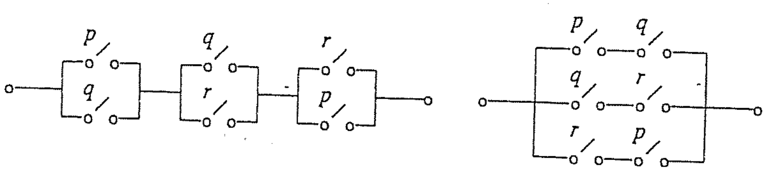
није таутологија.

22. Нека су A и B исказне формуле и нека је формула $A \Rightarrow B$ таутологија. Доказати да постоји исказна формула C (која зависи од истих променљивих као и A и B) таква, да су и формуле $A \Rightarrow C$ и $C \Rightarrow B$ таутологије.

Решење: Покажимо да исказна формула $C = A \vee B$ задовољава услове задатка. Формула $A \Rightarrow (A \vee B)$ јесте таутологија за све формуле A и B (за $\tau(A) = \perp$ очигледно је $\tau(A \Rightarrow (A \vee B)) = \top$, а за $\tau(A) = \top$ је $\tau(A \vee B) = \top$). Уколико формула $(A \vee B) \Rightarrow B$ не би била таутологија, то би значило да је за неке вредности исказних слова $\tau(A \vee B) = \top$ и $\tau(B) = \perp$, односно $\tau(A) = \top$. Ово, међутим, није могућно, јер би то значило да је $\tau(A \Rightarrow B) = \perp$, што противречи услову. Значи, и друга формула је таутологија. Дакле, показали смо да тражена формула C постоји.

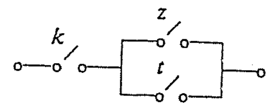
23. Да ли су прекидачке мреже на слици еквивалентне?

а) 

б) 

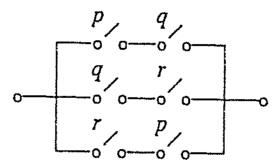
24. Ракетни систем активира се ако командант и бар један од његова два заменика укључе прекидаче. Нацртати одговарајућу прекидачку мрежу.

Резултат: Ако заменике означимо са z и t, а команданта са k, тражена прекидачка шема може да буде шема са слике.

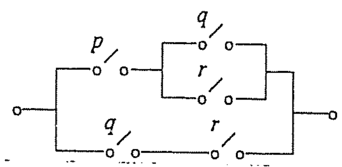


25. Нека комисија има три равноправна члана. Одлуке се доносе већином гласова и то тако што сваки члан комисије који је за доношење одлуке укључује свој прекидач (положај т). Конструисати одговарајућу прекидачку шему уређаја за гласање.

Резултат: Ако чланове комисије означимо са p, q и r, једна реализација прекидачке шеме може да буде шема са слике.



Напомена: Шеми са горње слике еквивалентна је, нпр., шема са доње слике.



Напомена: Видети и зад. 23. б.

26. У низу формула:

$$p,\ p \Rightarrow p,\ (p \Rightarrow p) \Rightarrow p,\ \ldots$$

одредити оне које су таутологије.

Решење: Доказаћемо индукцијом по броју појављивања исказног слова p у формули да су формуле овог низа таутологије ако и само ако се слово p у њима појављује паран број пута.

Означимо са F_n формулу $(\dots((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow \dots) \Rightarrow p$ у којој се слово p јавља n пута.

За $n = 1$ је $F_1 \Leftrightarrow p$, што очигледно није таутологија ($\tau(p) = 0 \Rightarrow \Rightarrow \tau(F) = 0$). За $n = 2$ је $F_2 \Leftrightarrow (p \Rightarrow p)$, што јесте таутологија. Претпоставимо да је F_{2k} таутологија. Тада је за $n = 2k + 1$ $F_{2k+1} \Leftrightarrow (F_{2k} \Rightarrow p)$. Пошто је по индуктивној претпоставци увек $\tau(F_{2k}) = 1$, онда је $\tau(F_{2k} \Rightarrow p) = \tau(1 \Rightarrow p) = \tau(p)$, тј. за $\tau(p) = 0$ имамо да је и $\tau(F_{2k+1}) = 0$. Тиме је доказано да формула F_{2k+1} није таутологија. За $n = 2k + 2$ је $F_{2k+2} \Leftrightarrow (F_{2k+1} \Rightarrow p)$. Према претходном је $\tau(F_{2k+1}) = \tau(p)$, па је $\tau(F_{2k+1} \Rightarrow p) = 1$, без обзира на вредност исказног слова p, тј. формула F_{2k+2} је таутологија.

Дакле, из претпоставке да F_{2k} јесте таутологија следује да F_{2k+1} није, и да F_{2k+2} јесте таутологија. Тиме је доказана почетна хипотеза о таутологијама у задатом низу формула.

27. Доказати да су исказне формуле

а) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots p_n \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow \dots (p_{n-1} \Rightarrow (p_n \Rightarrow p)) \dots))$,

б) $(p_1 \Rightarrow p) \wedge (p_2 \Rightarrow p) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow p)$,

в) $(p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n) \wedge (p_n \Rightarrow p_1) \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n),$$

таутологије за све вредности $n \in \mathbb{N}$.

Решење: а) Доказ се спроводи применом принципа математичке индукције. За $n = 1$ формула се своди на
$$(p_1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p),$$
што јесте таутологија. За неко $n = k$ посматрајмо дату исказну формулу у облику $L_k \Leftrightarrow D_k$ и претпоставимо да је она таутологија, а затим размотримо случај $L_{k+1} \Leftrightarrow D_{k+1}$. За $\tau(p_{k+1}) = \perp$ је $\tau(L_{k+1}) = \top$ (јер $(\perp \Rightarrow p) \Leftrightarrow \top$), док је $\tau(D_{k+1}) = \top$ јер је $((\perp \Rightarrow p) \Leftrightarrow \top) \wedge ((p_k \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top)$. За $\tau(p_{k+1}) = \top$ очигледно је $L_{k+1} \Leftrightarrow L_k$, као и $D_{k+1} \Leftrightarrow D_k$ (јер је $(\top \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$). Значи, $L_{k+1} \Leftrightarrow D_{k+1}$, чиме смо доказали да је дата исказна формула таутологија за свако $n \in \mathbb{N}$.

28. Испитати да ли је исказна формула
$$(p_1 \Rightarrow p_2) \vee (p_2 \Rightarrow p_3) \vee \dots \vee (p_{n+2} \Rightarrow p_1)$$
таутологија за сваки природан број n. Шта се дешава ако се импликација замени еквиваленцијом?

Решење: Докажимо да је формула
$$F \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p_2) \vee (p_2 \Rightarrow p_3) \vee \dots \vee (p_{n+2} \Rightarrow p_1)$$
таутологија за сваки природан број n дискусијом по слову p_1. Ако је $\tau(p_1) = \top$, онда је $\tau(p_{n+2} \Rightarrow p_1) = \tau(p_{n+2} \Rightarrow \top) = \top$, па је и $\tau(F) = \top$. Ако је $\tau(p_1) = \perp$, онда је $\tau(p_1 \Rightarrow p_2) = \tau(\perp \Rightarrow p_2) = \top$, па је и $\tau(F) = \top$. Дакле, формула F је таутологија.

У случају да се уместо импликације стави еквиваленција, формула гласи:
$$\Phi \Leftrightarrow (p_1 \Leftrightarrow p_2) \vee (p_2 \Leftrightarrow p_3) \vee \dots \vee (p_{n+2} \Leftrightarrow p_1).$$
Тада је $\tau(\Phi) = \perp$ ако и само ако је
$$\tau(p_1 \Leftrightarrow p_2) = \tau(p_2 \Leftrightarrow p_3) = \dots = \tau(p_{n+2} \Leftrightarrow p_1) = \perp,$$
односно
$$\tau(p_1) \neq \tau(p_2),\ \tau(p_2) \neq \tau(p_3),\ \dots\ , \tau(p_{n+2}) \neq \tau(p_1),$$
тј.
$$\tau(p_1) = \delta,\ \tau(p_2) = \overline{\delta}, \dots , \tau(p_{n+2}) = \overline{\delta},$$
где је $\delta \in \{\top, \perp\}$. Али, како је $\tau(p_{n+2}) = \overline{\delta}$ ако и само ако је $n + 2$, тј. n, паран број, Φ је таутологија ако и само ако је n непаран број.

29. Доказати да је исказна формула
$$F = F_n(p_1, \dots, p_n, \Leftrightarrow)$$
таутологија ако и само ако се свако исказно слово појављује паран број пута.

Решење: Лако се проверава да је:
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p),$$

$$\big((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r\big) \Leftrightarrow \big(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)\big),$$

па важи и уопштена асоцијативност операције $\Leftrightarrow$.

Због ових особина, формулу F можемо представити као

$$\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \Phi_n,$$

при чему је са Φ_k означена формула $p_k \Leftrightarrow p_k \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow p_k$, где се p_k појављује i_k пута $(k = 1, 2, \dots, n)$. Уколико је i_k паран број, $\Phi_k \Leftrightarrow \top$, а ако је i_k непаран број, $\Phi_k \Leftrightarrow p_k$ (ово се доказује индукцијом по броју појављивања слова p_k у формули Φ_k). Приметимо да, ако за неко $k \in \{1, \dots, n\}$ важи $\Phi_k \Leftrightarrow p_k$, онда вредност целе формуле F зависи од p_k, па F није таутологија. С друге стране, ако су сви бројеви i_k парни, тј. $\Phi_k \Leftrightarrow \top$ за свако k, вредност целе формуле F биће увек $\top$.

Дакле, F је таутологија ако и само ако је i_k паран број за све $k \in \{1, \dots, n\}$, што је и требало доказати.

30. Доказати да исказна формула која садржи само логичке симболе $\vee$ и $\wedge$ не може бити ни таутологија ни контрадикција.

31. Колико се највише међусобно нееквивалентних исказних формула (различитих Boole-ових функција) може саставити од променљивих $p_1, p_2, \dots, p_n$?

Резултат: 2^{2^n}.

32. Колико има комутативних бинарних логичких операција?

33. Одредити по један Boole-ов израз за Boole-ове функције $F(p,q,r)$, $G(p,q,r)$, $H(p,q,r)$, $K(p,q,r)$ задате следећом таблицом:

p	q	r	F	G	H	K
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0

Решење: Свака Boole-ова функција $f(p,q,r)$ може се на следећи начин представити у савршеној дисјунктивној (СДНФ), односно у савршеној конјунктивној нормалној форми (СКНФ):

$$\begin{aligned} f(p,q,r) = {} & (f(1,1,1) \wedge p \wedge q \wedge r) \vee (f(1,1,0) \wedge p \wedge q \wedge \bar r) \vee \\ & (f(1,0,1) \wedge p \wedge \bar q \wedge r) \vee (f(1,0,0) \wedge p \wedge \bar q \wedge \bar r) \vee \\ & (f(0,1,1) \wedge \bar p \wedge q \wedge r) \vee (f(0,1,0) \wedge \bar p \wedge q \wedge \bar r) \vee \\ & (f(0,0,1) \wedge \bar p \wedge \bar q \wedge r) \vee (f(0,0,0) \wedge \bar p \wedge \bar q \wedge \bar r), \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} f(p,q,r) = {} & (f(1,1,1) \vee \bar p \vee \bar q \vee \bar r) \wedge (f(1,1,0) \vee \bar p \vee \bar q \vee r) \wedge \\ & (f(1,0,1) \vee \bar p \vee q \vee \bar r) \wedge (f(1,0,0) \vee \bar p \vee q \vee r) \wedge \\ & (f(0,1,1) \vee p \vee \bar q \vee \bar r) \wedge (f(0,1,0) \vee p \vee \bar q \vee r) \wedge \\ & (f(0,0,1) \vee p \vee q \vee \bar r) \wedge (f(0,0,0) \vee p \vee q \vee r). \end{aligned}$$

Тако је, нпр.:

$$\begin{aligned} F(p,q,r) = {} & (1 \wedge p \wedge q \wedge r) \vee (1 \wedge p \wedge q \wedge \bar r) \vee (0 \wedge p \wedge \bar q \wedge r) \\ & \vee (0 \wedge p \wedge \bar q \wedge \bar r) \vee (0 \wedge \bar p \wedge q \wedge r) \vee (0 \wedge \bar p \wedge q \wedge \bar r) \\ & \vee (1 \wedge \bar p \wedge \bar q \wedge r) \vee (0 \wedge \bar p \wedge \bar q \wedge \bar r) = \\ = {} & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar r) \vee (\bar p \wedge \bar q \wedge r) \quad \text{(СДНФ)}, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} F(p,q,r) = {} & (1 \vee \bar p \vee \bar q \vee \bar r) \wedge (1 \vee \bar p \vee \bar q \vee r) \wedge (0 \vee \bar p \vee q \vee \bar r) \\ & \wedge (0 \vee \bar p \vee q \vee r) \wedge (0 \vee p \vee \bar q \vee \bar r) \wedge (0 \vee p \vee \bar q \vee r) \\ & \wedge (1 \vee p \vee q \vee \bar r) \wedge (0 \vee p \vee q \vee r) = \\ = {} & (\bar p \vee q \vee \bar r) \wedge (\bar p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar q \vee \bar r) \wedge \\ & \wedge (p \vee \bar q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \quad \text{(СКНФ)}. \end{aligned}$$

34. Нека за Boole-ову функцију $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ важи да је

$f(1,0,1) = f(0,1,1) = 1$, и $f(p_1, p_2, p_3) = 0$ у осталим случајевима. Изразити ову функцију у облику савршене дисјунктивне (СДНФ) и савршене конјунктивне (СКНФ) нормалне форме.

35. Написати у облику савршене дисјунктивне нормалне форме (СДНФ) следеће формуле:

а) $\big((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r\big) \wedge (p \vee \overline{q})$;

б) $\overline{\big((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)\big)}$.

36. Одредити број различитих Boole-ових функција $\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ за које су исказне формула

а) $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots p_n \Rightarrow \varphi(p_1, p_2, \dots p_n)$,

б) $p_1 \vee p_2 \vee \dots p_n \Rightarrow \varphi(p_1, p_2, \dots p_n)$,

таутологије.

Решење: а) Ако је $\tau(p_1) = \dots = \tau(p_n) = 1$, онда формула $\varphi(1, \dots, 1)$ мора да има истинитосну вредност 1. Ако бар једна од променљивих има истинитосну вредност 0, цела формула има вредност 1. Дакле, $\varphi(1, \dots, 1) = 1$, а $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ је произвољан елемент скупа $\{0,1\}$ (за остале вредности променљивих). - Пошто одговарајућа таблица има 2^n места, а само једна вредност је фиксирана, број одговарајућих функција је 2^{2^n-1}.

б) Ако је $\tau(p_1) = \dots = \tau(p_n) = 0$, онда је формула таутологија. Ако бар једна од променљивих има истинитосну вредност 1, $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ мора да има вредност 1. У одговарајућој таблици није фиксирано само једно место, тј. $\varphi(0, \dots, 0) = 1$ или $\varphi(0, \dots, 0) = 0$. Дакле, број одговарајућих функција је 2.

37. Наћи све Boole-ове функције $\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, за које важи:

$$\models \big(r \Rightarrow \overline{q} \vee p \Rightarrow \varphi(p,q,r)\big) \Rightarrow \big(\varphi(p,q,r) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge r\big).$$

Решење: Представимо дату формулу (означимо је са F) таблицом:

p	q	r	$\overline{q}$	$\overline{q} \vee p$	$r \Rightarrow \overline{q} \vee p$	$\varphi(p,q,r)$	$r \Rightarrow \overline{q} \vee p \Rightarrow \varphi(p,q,r)$	$p \Rightarrow q$	$\varphi(p,q,r) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge r$	F
1	1	1	0	1	1	$\varphi(1,1,1)$	$\varphi(1,1,1)$	1	$\varphi(1,1,1)$	$1 = 1$
1	1	0	0	1	1	$\varphi(1,1,0)$	$\varphi(1,1,0)$	1	0	$\overline{\varphi(1,1,0)} = 1$
1	0	1	1	1	1	$\varphi(1,0,1)$	$\varphi(1,0,1)$	0	0	$\overline{\varphi(1,0,1)} = 1$
1	0	0	1	1	1	$\varphi(1,0,0)$	$\varphi(1,0,0)$	0	0	$\overline{\varphi(1,0,0)} = 1$
0	1	1	0	0	0	$\varphi(0,1,1)$	1	1	$\varphi(0,1,1)$	$\varphi(0,1,1) = 1$
0	1	0	0	0	1	$\varphi(0,1,0)$	$\varphi(0,1,0)$	1	0	$\overline{\varphi(0,1,0)} = 1$
0	0	1	1	1	1	$\varphi(0,0,1)$	$\varphi(0,0,1)$	1	$\varphi(0,0,1)$	$1 = 1$
0	0	0	1	1	1	$\varphi(0,0,0)$	$\varphi(0,0,0)$	1	0	$\overline{\varphi(0,0,0)} = 1$

Дакле, $\varphi(1,1,0) = \varphi(1,0,1) = \varphi(1,0,0) = \varphi(0,1,0) = \varphi(0,0,0) = 0$, $\varphi(0,1,1) = 1$, док $\varphi(1,1,1)$ и $\varphi(0,0,1)$ могу имати вредност било 0, било 1. Зато постоје четири различите функције $\varphi(p,q,r)$ за које је F таутологија. Описаћемо их следећом таблицом:

p	q	r	$\varphi_1(p,q,r)$	$\varphi_2(p,q,r)$	$\varphi_3(p,q,r)$	$\varphi_4(p,q,r)$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0

38. Одредити све функције $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ такве да формула
$$\big(q \wedge f(p,q) \Rightarrow \overline{p}\big) \Rightarrow \big((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow f(p,q)\big)$$
буде таутологија и представити их у облику СДНФ и СКНФ.

Решење: Таблица истинитости има следећи изглед·

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$q\wedge f$	$q\wedge f\Rightarrow\overline{p}$	$p\Rightarrow\overline{q}$	$(p\Rightarrow\overline{q})\Rightarrow f$	$(q\wedge f\Rightarrow\overline{p})\Rightarrow((p\Rightarrow\overline{q})\Rightarrow f)$
0	0	1	1	0	1	1	$f(0,0)$	$f(0,0)$
0	1	1	0	$f(0,1)$	1	1	$f(0,1)$	$f(0,1)$
1	0	0	1	0	1	1	$f(1,0)$	$f(1,0)$
1	1	0	0	$f(1,1)$	$\overline{f(1,1)}$	0	1	1

Дакле, таблица истинитости функције $f(p,q)$ мора бити:

p	q	$f(p,q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0 или 1,

што значи да постоје две функције, $f_1(p,q) = 1$ (константа) и $f_2(p,q) = p\uparrow q$ (Sheffer-ова "ни") које задовољавају услов задатка. Одговарајуће СДНФ су:

$$f = (p\wedge q)\vee(p\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge q)\vee(\overline{p}\wedge\overline{q})$$

и

$$f_2 = (p\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge q)\vee(\overline{p}\wedge\overline{q}),$$

док СКНФ за f_1 не постоји, а за f_2 је $f_2 = \overline{p}\vee\overline{q}$.

39. Одредити у облику СДНФ Boole-ову функцију $A(p,q)$ тако да формула

$$(p\Rightarrow(A\Rightarrow\overline{q}))\Rightarrow p\wedge q\vee A$$

буде таутологија.

Решење: Представимо дату формулу (означимо је са F) таблицом:

p	q	$\overline{q}$	A	$A\Rightarrow\overline{q}$	$p\Rightarrow(A\Rightarrow\overline{q})$	$p\wedge q$	$p\wedge q\vee A$	F
1	1	0	$A(1,1)$	$\overline{A(1,1)}$	$\overline{A(1,1)}$	1	1	$1 = 1$
1	0	1	$A(1,0)$	1	1	0	$A(1,0)$	$A(1,0) = 1$
0	1	0	$A(0,1)$	$\overline{A(0,1)}$	1	0	$A(0,1)$	$A(0,1) = 1$
0	0	1	$A(0,0)$	1	1	0	$A(0,0)$	$A(0,0) = 1$

Да би формула F била таутологија, исказна формула A мора да задовољава услове $A(1,0) = A(0,1) = A(0,0) = 1$, док $A(1,1)$ може да поприми вредност било 0, било 1. Разликујемо два случаја:

i) $A(1,1) = 0$. Тада ову исказну формулу можемо представити у облику СДНФ на следећи начин:

$$A(p,q)\Leftrightarrow(p\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge q)\vee(\overline{p}\wedge\overline{q}).$$

ii) $A(1,1) = 1$. Тада је A таутологија, а одговарајућа СДНФ је:

$$A(p,q)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge q)\vee(\overline{p}\wedge\overline{q}).$$

40. Одредити у облику СДНФ Boole-ову функцију $A(p,q,r)$ такву да исказна формула

$$(\overline{r}\vee(p\wedge\overline{q})\Rightarrow A)\wedge\overline{(r\wedge(p\Rightarrow q)\wedge A)}$$

буде контрадикција.

41. Саставити таблицу вредности Boole-ових функција дефинисаних следећим изразима:

а) $\neg p\Rightarrow(\neg r\Leftrightarrow(q\veebar(p\uparrow r)))$,

б) $p\uparrow q\downarrow r\uparrow q\downarrow r$,

в) $p\uparrow(q\Rightarrow r)\downarrow q$,

г) $((\neg p\vee\neg q)\downarrow(p\veebar\neg q))\ \veebar\ (\neg(p\Rightarrow\neg q)\Rightarrow\neg p\vee q)$,

где $\veebar$, $\uparrow$ и $\downarrow$ редом означавају ексклузивну дисјункцију, Sheffer-ову и Łukasiewicz-еву операцију.

42. Написати у облику СДНФ и СКНФ Boole-ове функције дате следећим изразима:

а) $p\uparrow q\downarrow r$;

б) $(p\Rightarrow q)\wedge(q\downarrow r)$;

в) $((p\Rightarrow q)\vee\neg r)\uparrow p$.

43. Нека $*$ и $\circ$ означавају две међусобно различите операције из скупа $\{\wedge,\vee,\veebar,\downarrow,\uparrow,\Leftrightarrow\}$. Испитати за које парове $(*,\circ)$ важи дистрибутивни закони

$$p * (q \circ r) = (p * q) \circ (p * r).$$

44. Ако је $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ Boole-ова функција, тада се Boole-ова функција f^* дата са

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}$$

назива *дуалном функцијом* функције f. Притом је очигледно $(f^*)^* = f$. Доказати да су конјункција и дисјункција, као и Sheffer-ова и Łukasiewicz-ева операција, међусобно дуалне Boole-ове функције.

45. Boole-ова функција $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ таква да је за све вредности променљивих $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}$$

назива се *самодуалном функцијом*.

а) Одредити све самодуалне Boole-ове функције за $n = 2$ у облику савршене дисјунктивне нормалне форме (СДНФ).

б) Колико има самодуалних Boole-ових функција за произвољно n?

Решење: а) Ако се формирају све Boole-ове функције $f:\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ (има их 16) и одаберу само оне које су комплементиране (антисиметричне) у односу на средину таблице, добија се таблица

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

Нпр. СДНФ за f_1 је $f_1 = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2) = x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1$.
Уочимо да су добијене функције, заправо, $f_1 = x_1$, $f_2 = x_2$, $f_3 = \overline{x}_2$ и $f_4 = \overline{x}_1$.

б) Као што је познато, број свих Boole-ових функција од n променљивих износи $\overline{V}_2^{2^n} = 2^{2^n}$. Самодуалне Boole-ове функције су

оне за које је $f(x_1, x_2, \dots x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots \overline{x}_n)}$, што значи да је број места којима слободно располажемо у таблици вредности функције f сада двоструко мањи, па је, према томе, број самодуалних функција:

$$\overline{V}_2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} = \overline{V}_2^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}}.$$

46. Изразити негацију, конјункцију, дисјункцију, импликацију и еквиваленцију помоћу:

а) Łukasiewicz-еве $\downarrow$ ("нили");

б) Sheffer-ове $\uparrow$ ("ни")

функције.

Решење: а) Како је $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$, одмах закључујемо да је

$$x \downarrow x = \overline{x \vee x} = \overline{x};$$

сада је

$$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y),$$

и, пошто је $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$:

$$x \wedge y = \overline{x} \downarrow \overline{y} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y).$$

За импликацију имамо:

$$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = \big((x \downarrow x) \downarrow y\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow y\big),$$

а онда се лако одређује израз за еквиваленцију имајући у виду да је $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$.

б) Аналогно претходном добија се:

$$\overline{x} = x \uparrow x;$$
$$x \wedge y = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y);$$
$$x \vee y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y);$$
$$x \Rightarrow y = x \uparrow (y \uparrow y);$$
$$x \Leftrightarrow y = \big((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\big) \uparrow (x \uparrow y).$$

47. Изразити Sheffer-ову операцију помоћу Łukasiewicz-еве и обратно.

Резултат: $x \uparrow y = \big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big);$

$$x \downarrow y = \big((x\uparrow x)\uparrow(y\uparrow y)\big)\uparrow\big((x\uparrow x)\uparrow(y\uparrow y)\big);$$

48. Нека је $M = \{\Rightarrow, \neg\}$.

а) Доказати да је M база Boole-ових функција.

б) Приказати ексклузивну дисјункцију ($\veebar$) преко функција из M.

Решење: а) Може се поћи од познате чињенице да скуп $\{\vee, \neg\}$ јесте база Boole-ових функција. Како се дисјункција може представити као $(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \Rightarrow y)$, следује да је скуп $\{\Rightarrow, \neg\}$ генераторски. Операција $\neg$ је унарна и њом се не могу исказати бинарне операције, па скуп $\{\neg\}$ није генераторски. Поставља се још питање да ли је $\{\Rightarrow\}$ генераторски скуп. Уколико би то био случај, тада би се преко импликације могла изразити негација. Доказаћемо следећу лему на основу које ће се видети да то није могућно.

Лема: Исказна формула у којој се појављују само променљива p и операција $\Rightarrow$ (уз употребу произвољног потребног броја заграда) може имати истинитосну вредност $\tau(p)$ или 1.

Доказ: Доказ ће бити спроведен применом принципа математичке индукције по броју појављивања променљиве p у исказној формули. Како је очигледно да је

$$p \Leftrightarrow p,$$

$$(p \Rightarrow p) \Leftrightarrow 1,$$

$$((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \quad \text{и} \quad (p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Leftrightarrow 1,$$

види се да је претпоставка испуњена за $n = 1, 2, 3$ појављивања променљиве. Нека је тврђење тачно и за све природне бројеве $n \le k$. Уочимо неку формулу у којој се p појављује $k+1$ пут. Сигурно је да се у тој формули могу издвојити подформуле A и B такве да је та формула облика $A \Rightarrow B$. У свакој од формула A и B променљива p појављује се не више од k пута, па је по индуктивној хипотези $(A \Leftrightarrow p) \veebar (A \Leftrightarrow 1)$ и $(B \Leftrightarrow p) \veebar (B \Leftrightarrow 1)$. Формирајмо таблицу истинитости формуле $A \Rightarrow B$.

$A \Rightarrow B$	(B) 1	(B) p
(A) 1	1	p
(A) p	1	1

Види се да је вредност истинитости формуле $A \Rightarrow B$ или 1 или $\tau(p)$, чиме је лема доказана.

На основу доказане леме видимо да није могућно изразити негацију применом импликације, одакле следује да скуп $\{\Rightarrow\}$ није генераторски. Како ниједан подскуп генераторског скупа $\{\Rightarrow, \neg\}$ није генератор, значи да је генераторски скуп $\{\Rightarrow, \neg\}$ минималан, тј. да је *база* Boole-ових функција, што је и требало доказати.

49. Нека је Boole-ова функција $*$ дефинисана изразом

$$p * q = \neg(p \Rightarrow q).$$

Испитати да ли је скуп $\{\Rightarrow, *\}$ база Boole-ових функција.

Решење: У претходном задатку доказано је да је $\{\Rightarrow, \neg\}$ база Boole-ових функција. Да бисмо доказали да је скуп $\{\Rightarrow, *\}$ генераторски, довољно је доказати да се функција $\neg$ може да представи помоћу $\Rightarrow$ и $*$; тада се функције из базе $\{\Rightarrow, \neg\}$, а тиме и све Boole-ове функције, могу изразити помоћу функција скупа $\{\Rightarrow, *\}$. Ово следује из

$$\neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow (p * p)).$$

Потребно је доказати и минималност скупа $\{\Rightarrow, *\}$. Познато је да скуп $\{\Rightarrow\}$ није база, па остаје да се докаже да скуп $\{*\}$ такође није база Boole-ових функција.

Претпоставимо супротно, тј. да скуп $\{*\}$ јесте база. Тада би функција $f = 1$ (идентички једнака јединици) могла да се представи помоћу функције $*$. Доказаћемо индукцијом да ово није могућно.

Нека је n број појављивања операције $*$ у формули. За $n = 1$ је

$p * q \neq 1$. Претпоставимо да се за $n < k$, где је k произвољно изабран природан број, не може добити функција $f = 1$ и докажимо да се у том случају она не може добити ни са k примена функције $*$. Формула у којој се $*$ јавља k пута може се представити у облику $F_1 * F_2$, где је број појављивања $*$ у F_1, као и у F_2, мањи од k. Према томе, $F_1 \neq 1$, па је и $F_1 * F_2 \neq 1$ (јер $F_1 * F_2 = 1$ ако и само ако је $F_1 = 1$ и $F_2 = 0$). Дакле, скуп $\{*\}$ није база, па је зато минимални генераторски скуп, тј. база, скуп $\{\Rightarrow, *\}$.

50. Испитати да ли је скуп $\{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ база Boole-ових функција.

Упутство: Показати да није могућно представити негацију.

51. Показати да скуп $\{*\}$, где је Boole-ова функција $* : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ дефинисана таблицом

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

није база Boole-ових функција.

52. Нека су A и B исказне формуле. Доказати да је формула B последица скупа формула $\{A, A \Rightarrow B\}$ (*modus ponens*).

Решење: За исказну формулу која за извесну комбинацију вредности свих исказних слова добије вредност истинитости $\top$ (односно $\bot$) рећи ћемо кратко да је у том случају тачна (односно нетачна). Дакле, треба показати да, ако A и $A \Rightarrow B$ имају вредност $\top$, тј. ако су тачне формуле, тада је и B тачна исказна формула. Претпоставимо да формула B није тачна. Тада имамо:

A	тачно (из услова задатка),	(1)
$A \Rightarrow B$	тачно (из услова задатка),	(2)
B	нетачно (претпоставка).	(3)

Из (2) и (3) следује да је A нетачно, што је у противречности са (1). Дакле, полазна претпоставка није добра, па је формула B тачна.

53. Нека су A и B исказне формуле. Доказати:

а) Ако су исказне формуле $A \Rightarrow B$ и $\neg A \Rightarrow B$ таутологије, онда је и формула B таутологија.

б) Ако су формуле $A \Rightarrow B$ и $A \Rightarrow \neg B$ таутологије, онда је формула $\neg A$ таутологија (*reductio ad absurdum*).

Решење: а) Ако су исказне формуле $A \Rightarrow B$ и $\neg A \Rightarrow B$ таутологије, тада је и формула $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$ таутологија, односно, таутологија је и $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee B)$, односно $(\neg A \wedge A) \vee B$. То значи

$$\models 0 \vee B,$$

тј. B је таутологија.

54. Нека су A, B, C исказне формуле. Доказати:

а) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$;

б) $A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C \models A \Rightarrow B \wedge C$;

в) $A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C \models A \vee B \Rightarrow C$.

Решење: б) Ако је $A \Rightarrow B$ тачно и $A \Rightarrow C$ тачно, тада је и $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$ тачно, тј. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$, односно $\neg A \vee (B \wedge C)$ јесте тачна формула. То значи да је $A \Rightarrow (B \wedge C)$ тачно, што се и тврди.

55. Доказати:

а) $F_1, F_2, \dots, F_n \models F$ ако и само ако $\models (F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow (\dots(F_n \Rightarrow F)\dots)))$;

б) $F_1, F_2, \dots, F_n \models F$ ако и само ако $F_1, F_2, \dots, F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F$.

56. Испитати да ли важи:

а) $A \Leftrightarrow B,\ A \models B$;

б) $A \wedge B,\ \neg A \Rightarrow B \models \neg B$;

в) $A \vee B,\ \neg B,\ C \Rightarrow \neg A \models \neg C$;

г) $A \vee B,\ A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow D \models C \vee D$;

д) $A \Rightarrow B,\ C \Rightarrow D,\ A \vee C \models B \wedge D$;

ђ) $A \veebar B,\ A \vee C,\ C \Rightarrow D,\ \neg(B \wedge D) \models A$;

е) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow D),\ \neg(C \Rightarrow D) \models D$;

ж) $\neg A \vee B,\ \neg B \wedge C,\ \neg(A \vee B) \Rightarrow D \models C \wedge D$,

где су A, B, C и D исказне формуле.

Решење: е) Ако су исказне формуле A, B, C и D такве да су A и C тачне, а B и D нетачне, тада ће формуле $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)$ и $\neg(C \Rightarrow D)$ бити тачне. Дакле

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow D),\ \neg(C \Rightarrow D) \not\models D.$$

ГЛАВА 2.

КВАНТИФИКАТОРСКИ РАЧУН ПРВОГ РЕДА

2. КВАНТИФИКАТОРСКИ РАЧУН

1. Нека је $\mathbb{Z}$ скуп целих, а $\mathbb{N}$ скуп природних бројева. Које је од датих тврђења истинито, а које није?

а) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\ x < y$,

б) $(\forall y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\ x < y$,

в) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(\exists z \in \mathbb{Z})\ x + y = z$,

г) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{N})\ x + y = z$.

2. Испитати тачност тврђења:

а) $(\exists x \in \{1, 2, 3\})\ x^2 = 2$;

б) $(\exists x \in (0, \infty))\,(\forall y \in (0, \infty))\ x^2 < y$;

в) $(\forall y \in (0, \infty))\,(\exists x \in (0, \infty))\ x^2 < y$.

Решење: а) $(\exists x \in \{1, 2, 3\})\ x^2 = 2$ јесте нетачно тврђење јер $\pm\sqrt{2} \notin \{1, 2, 3\}$.

б) $(\exists x \in (0, \infty))\,(\forall y \in (0, \infty))\ x^2 < y$ јесте нетачно тврђење: за фиксно $x_0 \in (0, \infty)$ релација $x_0^2 < y$ не важи за свако $y \in (0, \infty)$.

в) Тврђење је тачно: за сваки број $y \in (0, \infty)$ неједначина $x^2 < y$ по x има позитивно решење.

3. Доказати да за све реалне бројеве x, y важи:

а) $x^3 + y^3 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$,

б) $|x + y| = |x - y| \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$.

Решење: а) Уколико је $x = y = 0$, еквиваленција је очигледна. Претпоставимо зато да x и y нису оба једнака нули. Нека $p(x, y)$ означава предикат $x^3 + y^3 = 0$, а $q(x, y)$ предикат $x + y = 0$.

Прво решење:

Докажимо $(\forall x,y)(p(x,y) \Rightarrow q(x,y))$ (скраћено: $p \Rightarrow q$):

$$x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

(јер би из претпоставке $x^2 - xy + y^2 = 0$ следовало $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{-3y^2}\right)$, супротно претпоставци да су x и y реални).

Докажимо сада $q \Rightarrow p$:

$$x + y = 0 \Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 = 0.$$

Друго решење:

Доказујемо $p \Rightarrow q$ и $\neg p \Rightarrow \neg q$.

$$x^3 + y^3 \neq 0 \Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) \neq 0 \Rightarrow x + y \neq 0.$$

Треће решење:

Доказујемо $q \Rightarrow p$ и $\neg q \Rightarrow \neg p$.

$$x + y \neq 0 \Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) \neq 0 \Rightarrow x^3 + y^3 \neq 0.$$

Четврто решење:

Доказујемо $\neg p \Rightarrow \neg q$ и $\neg q \Rightarrow \neg p$.

4. Доказати да за све реалне бројеве x, y, z важи:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Leftrightarrow (x + y + z = 0 \vee x = y = z).$$

5. Испитати да ли је истинита еквиваленција:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ x = k\pi.$$

6. Нека релацијски симболи $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и $D(x,y)$ имају следеће интерпретације:

$P(x)$: x је прост број,
$Q(x)$: x је паран број,
$R(x)$: x је цео број,
$D(x,y)$: x дели y.

Превести следеће предикатске формуле:

а) $(\forall x)\ P(x) \Rightarrow \neg Q(x)$;

б) $(\forall x)\ \big(\neg P(x) \Rightarrow (\forall y)(P(y) \Rightarrow \neg D(x,y))\big)$;

в) $(\forall x)\ \big(Q(x) \Rightarrow (\forall y)(D(x,y) \Rightarrow Q(y))\big)$;

г) $(\forall x)(\exists y)\ \big(R(x) \wedge R(y) \Rightarrow D(x,y)\big)$;

д) $(\forall y)(\forall x)\ \big(R(x) \wedge R(y) \Rightarrow D(x,y)\big)$;

ђ) $(\exists x)(\forall y)\ \big(R(x) \wedge R(y) \Rightarrow D(x,y)\big)$.

Одредити и истинитосну вредност добијених исказа.

7. Користећи универзални и егзистенцијални квантификатор, као и релације "=" и "∈" дефинисати следеће појмове теорије скупова:

а) - бити непразан скуп;
б) - бити празан скуп;
в) - бити једночлан скуп;
г) - бити двочлан скуп;
д) - бити скуп са бар два елемента;
ђ) - бити скуп са највише два елемента;
е) - унија скупова;
ж) - пресек скупова.

Решење: а) A је непразан скуп $\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A)$;

б) A је празан скуп $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A)$;

в) A је једночлан скуп $\Leftrightarrow (\exists x)\,(x \in A \ \wedge\ \neg(\exists y)(y \neq x \ \wedge\ y \in A))$;

г) A је двочлан скуп $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\ \big(x \neq y \wedge x \in A \wedge y \in A \wedge \neg(\exists z)(z \neq x \ \wedge\ z \neq y \ \wedge\ z \in A)\big);$$

д) A је скуп који садржи бар два елемента $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\,(x \neq y \ \wedge\ x \in A \ \wedge\ y \in A);$$

ђ) A је скуп са највише два елемента $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \neg(\exists x, y, z)\,(x \neq y \neq z \neq x \ \wedge\ x \in A \ \wedge\ y \in A \ \wedge\ z \in A);$$

е) унија скупова: $\bigcup_i A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ за неко } i\} = \{x \mid (\exists i)\, x \in A_i\}$;

ж) пресек скупова: $\bigcap_i A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ за свако } i\} = \{x \mid (\forall i)\, x \in A_i\}$.

8. За следеће квантификаторске формуле одредити зону дејства сваког квантификатора и за свако појављивање променљивих одредити да ли је слободно или везано:

а) $(\exists x)P(x) \wedge Q(x,y)$;

б) $(\forall x)\,(P(x) \wedge (\exists x)Q(x,z) \Rightarrow (\exists y)R(x,y)) \vee Q(z,x)$;

в) $(\exists x)\,(P(x) \Rightarrow ((\exists y)Q(y) \Rightarrow (\forall z)R(y,z)))$.

Решење: а) Квантификатор делује само на предикат $P(x)$; зато су прва два појављивања променљиве x везана, а треће слободно, док променљива y има слободно појављивање.

б) Квантификатор $(\forall x)$ не делује само на последњи дисјункт $Q(z,x)$, док $(\exists x)$ делује само на $Q(x,z)$, а $(\exists y)$ само на $R(x,y)$; везана су сва појављивања променљиве x осим у $Q(z,x)$ и сва појављивања y, док су сва појављивања променљиве z слободна.

9. Проверити следеће еквиваленције (de Morgan-ове законе):

а) $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$;

б) $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$.

Напомена: Уколико посматрани квантификатор означимо са $q \in \{\forall, \exists\}$, тада је супротни (комплементарни) квантификатор $\overline{q} \in \{\forall, \exists\} \setminus \{q\}$. У том случају de Morgan-ове законе записујемо једном формулом:

$$\neg(qx)A(x) \Leftrightarrow (\overline{q}x)\neg A(x).$$

10. Одредити квантификаторске формуле еквивалентне датим формулама у којима се дејство знака негације $\neg$ не простире ни на један квантификатор:

а) $\neg(\exists x)\ \big(P(x) \wedge (\exists y)(Q(y) \wedge R(x,y))\big)$;

б) $\neg(\forall x)\ \big((P(x) \vee (\exists y)\neg Q(x,y)) \wedge (\forall y)R(y)\big)$;

в) $\neg\big((\neg(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) \wedge (R(x) \Rightarrow (\forall x)S(x))\big)$.

11. За сваку од следећих формула квантификаторског рачуна одредити бар једну интерпретацију у којој је формула тачна и бар једну у којој је формула нетачна:

а) $(\forall x)(\forall y)\ \big(\alpha(x,y) \vee \alpha(y,x)\big)$;

б) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\ \alpha(x,y,z)$;

в) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,z) \Rightarrow \alpha(x,z)\big)$;

г) $(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x) \Leftrightarrow (\forall x)\big(\alpha(x) \vee \beta(x)\big)$;

д) $(\forall x)\ \big(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(f(x))\big)$;

ђ) $\alpha(x) \Rightarrow (\forall y)\alpha(y)$;

е) $(\forall x)(\exists y)\ \alpha(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\ \alpha(x,y)$;

ж) $(\forall x)(\exists y)\ (\alpha(x,y) \Rightarrow \alpha(y,x))$;

з) $(\forall x)\ \big(\alpha(x,a) \Rightarrow \alpha(a,x)\big)$.

Упутство: Испитати тачност формула при следећим понуђеним интерпретацијама.

а) Домен је скуп $\mathbb{R}$, α је релација "$\leq$".

Домен је скуп $\mathbb{R}$, α је релација "$<$".

г) Домен је скуп $\mathbb{Z}$, α је унарна релација "бити паран број", β је унарна релација "бити непаран број".

Домен је скуп $\{7, 11\}$, α је релација "бити паран број", β је релација "бити прост број".

д) Домен је скуп $\mathbb{N}$, α је релација "бити паран број", $f(x) = x + 2$.

Домен је скуп тачака равни π, $\alpha(x)$ значи "тачка x припада кругу k у равни π чији је центар у тачки O", а f је ротација равни π око тачке O за угао φ.

Домен је скуп $D = \{a,b,c\}$, α је релација дата са $\alpha(a) = \bot$, $\alpha(b) = \top$, $\alpha(c) = \bot$, а $f : D \to D$ је пресликавање дато са

$$f = \{(a,b), (b,a), (c,c)\}.$$

ж) Домен је скуп $\mathbb{N}$, α је релација "$|$" (дељивост).

Домен је скуп $D = \{a, b\}$, α је релација тог скупа дефинисана таблицом:

α	a	b
a	$\perp$	$\top$
b	$\top$	$\perp$

Међутим, може се доказати да је ова формула тачна при свакој интерпретацији (тј. да је ваљана формула). Уколико бисмо претпоставили да постоји интерпретација (D, φ) у којој је она нетачна, тада би формула $\neg(\forall x)(\exists y)\left(\alpha(x,y) \Rightarrow \alpha(y,x)\right)$, односно њој еквивалентна формула $(\exists x)(\forall y)\left(\alpha(x,y) \wedge \neg\alpha(y,x)\right)$ била тачна. Нека је x, чија се егзистенција тврди последњом формулом, елемент $x_0 \in D$. Дакле, $(\forall y)\left(\alpha(x_0, y) \wedge \neg\alpha(y, x_0)\right)$. Пошто ово важи за свако y из скупа D, морало би бити тачно и за $y = x_0$, тј. било би тачно $\alpha(x_0, x_0) \wedge \neg\alpha(x_0, x_0)$, што није могућно.

Напомена: Уочити да су у датој формули све променљиве везане, што значи да се ради о предикату дужине 0, тј. о исказу. Због тога је (при датој интерпретацији) или тачна сама формула, или је тачна њена негација. Из спроведеног доказа следује да је при свакој интерпретацији тачна управо дата формула.

з) Домен је скуп $\mathbb{R}$, α је релација "=", константа a је број 0.

Домен је скуп $\mathbb{N}$, α је релација "$|$" (дељивост), константа a је број 10.

Домен је скуп свих правих у равни, α је релација паралелности правих, константа a је нека фиксирана права из уочене равни.

12. Изразити следећу дефиницију језиком квантификаторског рачуна: *"Низ реалних бројева је конвергентан ако постоји реалан број a такав, да за произвољан позитиван реалан број ε постоји природан број n_0 такав, да је за све природне бројеве не мање од n_0 испуњена неједнакост $|a_n - a| < \varepsilon$"*, а затим је негирати.

Решење: $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$.

Негација ове дефиниције гласила би: *"Низ реалних бројева је дивергентан ако ..."*

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon).$$

13. Изразити следећу дефиницију језиком квантификаторског рачуна: *"Реална функција f реалне променљиве непрекидна је у тачки $a \in \mathbb{R}$ ако за сваки позитиван реалан број ε постоји позитиван реалан број δ такав да за свако x важи: ако је $|x-a| < \delta$ онда је $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$"*, а затим је негирати.

Решење: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$.

Негација ове дефиниције гласила би: *"Функција f прекидна је у тачки a ако ..."*

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)\ (|x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon).$$

14. Изразити следећу дефиницију језиком квантификаторског рачуна: *"Реална функција f реалне променљиве униформно је непрекидна на скупу $A \subset \mathbb{R}$ ако за сваки позитиван реалан број ε постоји позитиван реалан број δ такав да за све x_1 и x_2 из скупа A важи: ако је $|x_1 - x_2| < \delta$, онда је $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$"*, а затим је негирати.

15. Језиком квантификаторског рачуна изразити тврђење:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

где је $f(x)$ реална функција реалног аргумента x, а a и b дати реални бројеви.

16. Проверити да ли је следећом еквиваленцијом

$$(\forall n)\, P(n) \Leftrightarrow \big(P(1) \land (\forall n)\,(P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(n) \Rightarrow P(n+1))\big)$$

исказан принцип математичке индукције.

17. Доказати да су ваљане следеће формуле квантификаторског рачуна:

а) $\alpha(x) \Rightarrow (\beta(x) \Rightarrow \alpha(x))$;

б) $\neg\alpha(x) \Rightarrow (\alpha(x) \Rightarrow \beta(x))$;

в) $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)$;

г) $(\forall x)\alpha(x) \land \big((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\beta(x)$.

Решење: Наведене формуле јесу ваљане формуле јер су изведене из следећих таутологија:

а) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;

б) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$;

в) $p \Rightarrow p$;

г) $p \land (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.

18. Испитати да ли су ваљане следеће формуле квантификаторског рачуна:

а) $(\forall x)\ R_1^1(x) \Rightarrow R_1^1(y)$;

б) $R_1^1(x) \Rightarrow (\forall y)\ R_1^1(y)$.

Решење: а) Формула је тачна при свакој интерпретацији: ако би било тачно $(\forall x)\,R_1^1(x)$, тада би $R_1^1(x)$ било тачно и за $x = y$, тј. $R_1^1(y)$, па $\top \Rightarrow \top$; уколико би $(\forall x)\ R_1^1(x)$ било нетачно, тада $\bot \Rightarrow \top$ или $\bot \Rightarrow \bot$; дакле, у свим случајевима импликација је тачна.

б) Формула није ваљана: нпр. у скупу $\mathbb{R}$ она би се сводила на $x = 0 \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{R})\ y = 0$.

19. Доказати да су следеће формуле ваљане:

а) $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y)$;

б) $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$;

в) $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$;

г) $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x, y)$;

д) $(\exists x)(\exists y)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$.

20. Испитати да ли су ваљане следеће формуле квантификаторског рачуна:

а) $(\forall x)(\exists y)\ R_1^2(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\ R_1^2(x, y)$;

б) $(\exists y)(\forall x)\ R_1^2(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\ R_1^2(x, y)$

Решење: а) Формула није ваљана. Нпр. нека $R_1^2(x, y)$ представља релацију "<" на скупу $\mathbb{R}$. Тада је $(\forall x)\,(\exists y)\ x < y$ тачно, док је $(\exists y)(\forall x)\ x < y$ нетачно (јер не постоји највећи реалан број), па се формула своди на импликацију $\top \Rightarrow \bot$, што је нетачно.

б) Формула је ваљана.

21. Доказати да су следеће формуле ваљане:

а) $(\forall x)\big(P(x) \land Q(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$;

б) $(\exists x)\big(P(x) \land Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$

Напомена: Видети и зад. **34. а)**.

22. Испитати да ли су следеће формуле ваљане:

а) $(\exists x)A(x) \lor (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \lor B(x))$;

б) $(\forall x)A(x) \lor (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \lor B(x))$.

Решење: Уводећи у претходном задатку смену $P(x) = \neg A(x)$ и $Q(x) = \neg B(x)$, на основу de Morgan-ових закона и закона контрапозиције закључујемо да су наведене формуле ваљане.

23. Доказати да за функцију $f : X \to Y$ важе формуле:

а) $(\forall A, B \subset X)\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

б) $(\forall A, B \subset X)\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,

где су X, A, B произвољни скупови.

Решење:

а)
$$\begin{aligned} & y \in f(A \cup B) \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in X)\ \big(y = f(x) \wedge (x \in A \vee x \in B)\big) \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x)\ \big((y = f(x) \wedge x \in A) \vee (y = f(x) \wedge x \in B)\big) \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x)(y = f(x) \wedge x \in A) \vee (\exists x)(y = f(x) \wedge x \in B) \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} & y \in f(A \cap B) \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x \in X)(y = f(x) \wedge x \in A \wedge x \in B) \\ \Leftrightarrow\ & (\exists x)\big((y = f(x) \wedge x \in A) \wedge (y = f(x) \wedge x \in B)\big) \\ \Rightarrow\ & (\exists x)(y = f(x) \wedge x \in A) \wedge (\exists x)(y = f(x) \wedge x \in B) \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Напомена: Упоредити овај задатак са задацима 22. а) и 21. б).

24. Доказати да су следеће формуле ваљане:

а) $(\exists x)\big(P \wedge Q(x)\big) \Leftrightarrow P \wedge (\exists x)Q(x)$,

б) $(\forall x)\big(P \vee Q(x)\big) \Leftrightarrow P \vee (\forall x)Q(x)$,

при чему формула P не садржи x као слободну променљиву.

25. Доказати да су следеће формуле ваљане:

а) $(qx)(A \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (qx)B(x))$ (формула A не садржи x као слободну променљиву),

б) $(qx)(A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\overline{q}x)A(x) \Rightarrow B)$ (формула B не садржи x као слободну променљиву),

где је q ма који квантификатор из скупа квантификатора $\{\forall, \exists\}$.

Решење: Користимо се законом ослобађања од импликације:
$$\models (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

а)
$$\begin{aligned} (qx)(A \Rightarrow B(x)) &\Leftrightarrow (qx)(\neg A \vee B(x)) \\ &\Leftrightarrow \neg A \vee (qx)B(x) \\ &\Leftrightarrow A \Rightarrow (qx)B(x). \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} (qx)(A(x) \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (qx)(\neg A(x) \vee B) \\ &\Leftrightarrow (qx)(B \vee \neg A(x)) \\ &\Leftrightarrow B \vee (qx)\neg A(x) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg(\overline{q}x)A(x) \\ &\Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(\overline{q}x)A(x)) \\ &\Leftrightarrow ((\overline{q}x)A(x) \Rightarrow B). \end{aligned}$$

Према томе, следеће формуле су ваљане:
$$\begin{aligned} (\forall x)(A \Rightarrow B(x)) &\Leftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B(x)), \\ (\exists x)(A \Rightarrow B(x)) &\Leftrightarrow (A \Rightarrow (\exists x)B(x)), \\ (\forall x)(A(x) \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\exists x)A(x) \Rightarrow B), \\ (\exists x)(A(x) \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\forall x)A(x) \Rightarrow B). \end{aligned}$$

26. Доказати да су следеће формуле ваљане:

а) $(\exists x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x))$,

б) $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow ((\forall x)A(x) \Rightarrow (\forall x)B(x))$.

Решење: а) Директно проверавамо да важи:
$$\begin{aligned} (\exists x)(A(x) \Rightarrow B(x)) &\Leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x) \vee B(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x) \vee (\exists x)B(x) \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \\ &\Leftrightarrow ((\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x)). \end{aligned}$$

б) Приметимо да је формула облика $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. На основу таутологије $\models p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$ закључујемо да је полазна формула еквивалентна формули
$$\big((\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge (\forall x)A(x)\big) \Rightarrow (\forall x)B(x).$$

Сада се на основу задатка 21. а) и правила закључивања *modus* *ponens* (зад. 52. из главе 1.) уверавамо да је формула ваљана.

27. Доказати да следеће формуле нису ваљане:

а) $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$, где је c произвољна константа;

б) $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \Rightarrow (\exists y)A(y,y)$.

Решење: а) Формула није тачна ако је домен интерпретације скуп природних бројева $\mathbb{N}$ и ако предикат $A(x)$ интерпретирамо као: $A(x) \Leftrightarrow x \mid 2$, тј. као унарну релацију "бити паран број", а константу c као ма који непаран број (нпр. $c = 1$).

б) Формула није тачна у домену природних бројева $\mathbb{N}$ уколико бинарни предикат $A(x,y)$ интепретирамо као: $A(x,y) \Leftrightarrow x < y$.

28. Замена променљиве x термом - изразом $t = t(\ldots)$ у предикатској формули $A = A(x)$ јесте исправна ако и само ако ни једна променљива терма t не постаје везана у формули $A(t) = A(t(\ldots))$ (каже се да је у том случају терм t слободан за променљиву x у формули $A(x)$). Доказати: ако је замена променљиве x термом t у предикатској формули $A(x)$ исправна, тада предикатска формула

$$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t)$$

јесте ваљана.

29. Доказати да је формула Φ квантификаторског рачуна ваљана ако и само ако не постоји интерпретација I у којој је формула $\neg\Phi$ тачна.

30. Доказати ваљаност формуле

$$(\forall x)(\exists y)(A(x) \Rightarrow B(y)) \wedge (\forall y)(\exists z)(B(y) \Rightarrow C(z)) \wedge (\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists z)C(z).$$

Решење: Означимо са Φ дату формулу. Она је облика $p \wedge q \wedge r \Rightarrow t$.

Претпоставимо супротно, да формула Φ није ваљана. Тада према претходном задатку постоји интерпретација I таква да је формула $\neg\Phi$, тј. конјункција $\neg\Phi = p \wedge q \wedge r \wedge \neg t$, тачна при тој интерпретацији. У том случају важи:

$$\tau\big((\forall x)(\exists y)(A(x) \Rightarrow B(y))\big) = \top, \tag{1}$$

$$\tau\big((\forall y)(\exists z)(B(y) \Rightarrow C(z))\big) = \top, \tag{2}$$

$$\tau\big((\exists x)A(x)\big) = \top, \tag{3}$$

$$\tau\big((\exists z)C(z)\big) = \bot. \tag{4}$$

Даље, на основу (1) и (2) и према задатку 25. имамо:

$$\tau\big((\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists y)B(y)\big) = \top, \tag{5}$$

$$\tau\big((\exists y)B(y) \Rightarrow (\exists z)C(z)\big) = \top. \tag{6}$$

На основу транзитивности из (5) и (6) долазимо до закључка:

$$\tau\big((\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists z)C(z)\big) = \top. \tag{7}$$

Коначно, на основу modus ponens-а из (3) и (7) добијамо:

$$\tau\big((\exists z)C(z)\big) = \top, \tag{8}$$

што је у контрадикција са релацијом (4). Отуда закључујемо да је формула тачна у свакој интерпретацији, тј. да је Φ ваљана формула.

31. Доказати да је предикат

$$(\exists x)\,\alpha(x) \wedge (\forall x)\,(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)\,\beta(x)$$

ваљана формула.

Решење: Означимо са Φ дату формулу. Претпоставимо да Φ није ваљана формула, тј. нека постоји интерпретација у којој је $\tau(\Phi) = \bot$, што је еквивалентно са

$$\tau\big((\exists x)\,\beta(x)\big) = \bot \wedge \tau\big((\exists x)\,\alpha(x) \wedge (\forall x)\,(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x))\big) = \top,$$

односно

$$\tau\big((\exists x)\,\beta(x)\big) = \bot \wedge \tau\big((\exists x)\,\alpha(x)\big) = \top \wedge \tau\big((\forall x)\,(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x))\big) = \top.$$

Значи, постоји елемент x_0 (из домена интерпретације) тако да важи

$$\tau\big((\exists x)\,\beta(x)\big) = \bot \wedge \big(\tau(\alpha(x_0)) = \top \wedge \tau\big(\alpha(x_0) \Rightarrow \beta(x_0)\big) = \top\big),$$

одакле следује

$$\tau\big((\exists x)\,\beta(x)\big) = \bot \ \wedge\ \tau\big(\beta(x_0)\big) = \top$$

или

$$\tau\big((\exists x)\,\beta(x)\big) = \bot \ \wedge\ \tau\big((\exists x)\,\beta(x)\big) = \top,$$

што је контрадикција. То значи да је $\tau(\Phi) = \top$. Према томе, не постоји интерпретација у којој формула Φ не би била тачна, што значи да је Φ ваљана формула.

32. Доказати да су следеће формуле ваљане:

а) $(\forall x)(\forall y)(A(x,y) \vee A(y,x)) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z)(A(x,z) \wedge A(y,z))$;

б) $(\forall x)(\exists y)\, A(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)(A(x,y) \Rightarrow B(x,y)) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)B(x,y)$.

Решење: а) Означимо са Φ дату формулу. Претпоставимо да Φ није ваљана формула, тј. нека постоји интерпретација у којој је $\tau(\Phi) = \bot$. У том случају је

$$\tau\big((\forall x)(\forall y)(A(x,y) \vee A(y,x))\big) = \top, \tag{1}$$

$$\tau\big((\forall x)(\forall y)(\exists z)(A(x,z) \wedge A(y,z))\big) = \bot. \tag{2}$$

На основу (2) имамо $\tau\big(\neg(\forall x)(\forall y)(\exists z)(A(x,z) \wedge A(y,z))\big) = \top$, односно $\tau\big((\exists x)(\exists y)(\forall z)(\neg A(x,z) \vee \neg A(y,z))\big) = \top$. То значи да постоје константе x_0 и y_0 из домена интерпретације такве да је

$$\tau\big((\forall z)(\neg A(x_0,z) \vee \neg A(y_0,z))\big) = \top. \tag{3}$$

На основу (1), бирајући $x = y = x_0$ и $x = y = y_0$, добијамо:

$$\tau(A(x_0,x_0)) = \top \quad \text{и} \quad \tau(A(y_0,y_0)) = \top. \tag{4}$$

На основу (3) и (4), бирајући $z = x_0$ и $z = y_0$ закључујемо:

$$\tau(A(y_0,x_0)) = \bot \quad \text{и} \quad \tau(A(x_0,y_0)) = \bot. \tag{5}$$

Најзад, помоћу (1) и (5), стављајући $x = x_0$ и $y = y_0$, долазимо до контрадикције: $\tau\big(A(y_0,x_0) \vee A(x_0,y_0)\big) = \top$. Због тога закључујемо да је формула тачна у свакој интерпретацији, тј. да је формула Φ ваљана.

б) Претпоставимо да постоји интерпретација у којој формула није тачна. Тада је

$$\tau\big((\forall x)(\exists y)\, A(x,y)\big) = \top, \tag{1}$$

$$\tau\big((\exists x)(\forall y)\,(\,A(x,y) \Rightarrow B(x,y)\,)\big) = \top, \tag{2}$$

$$\tau\big((\exists x)(\exists y)\, B(x,y)\big) = \bot, \tag{3}$$

при чему је последња чињеница еквивалентна са

$$\tau\big((\forall x)(\forall y)\,\neg B(x,y)\big) = \top. \tag{3'}$$

Из (2) имамо да за неку константу x_0 из домена интерпретације важи:

$$\tau\big((\forall y)\,(\,A(x_0,y) \Rightarrow B(x_0,y)\,)\big) = \top. \tag{4}$$

На основу (1), за избор $x = x_0$, биће $\tau\big((\exists y)\, A(x_0,y)\big) = \top$, одакле је за неку константу y_0 из домена интерпретације испуњено:

$$\tau\big(A(x_0,y_0)\big) = \top. \tag{5}$$

Из (4), узимајући $y = y_0$ добијамо $\tau\big(A(x_0,y_0) \Rightarrow B(x_0,y_0)\big) = \top$, па је због (5) (према modus ponens-у) $\tau\big(B(x_0,y_0)\big) = \top$. С друге стране, из (3'), за избор $x = x_0$ и $y = y_0$ следује: $\tau\big(\neg B(x_0,y_0)\big) = \top$.

Из добијене контрадикције закључујемо да је формула тачна у свакој интерпретацији, тј. да је ваљана.

33. Доказати да су следеће формуле ваљане:

а) $(\exists x)\,((\neg\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \wedge \gamma(x)) \ \wedge\ \neg(\exists x)\,(\beta(x) \wedge \gamma(x)) \Rightarrow (\exists x)\,\alpha(x)$;

б) $(\exists x)\,(\neg\alpha(x) \Rightarrow \beta(x) \wedge \gamma(x)) \ \wedge\ \neg(\exists x)\,(\beta(x) \wedge \gamma(x)) \Rightarrow (\exists x)\,\alpha(x)$.

Решење: б) Претпоставимо да дата формула Φ није ваљана, тј. нека постоји интерпретација у којој је $\tau(\Phi) = \bot$. То би значило да је

$$\tau\big((\exists x)(\neg\alpha(x) \Rightarrow \beta(x) \wedge \gamma(x)\big) = \top, \tag{1}$$

$$\tau\big(\neg(\exists x)(\beta(x) \wedge \gamma(x))\big) = \top, \tag{2}$$

$$\tau\big((\exists x)\alpha(x)\big) = \bot. \tag{3}$$

На основу (1) ослобађајући се од импликације добијамо да важи:

$$\tau\big((\exists x)(\alpha(x) \vee (\beta(x) \wedge \gamma(x)))\big) = \top, \tag{4}$$

што према задатку 22. и релацији (2) значи да је:

$$\tau\big((\exists x)\alpha(x)\big) = \top.$$

Свођењем на контрадикцију закључујемо да је формула тачна у свакој интерпретацији, тј. формула Φ је ваљана.

34. Показати да следеће формуле нису ваљане:

а) $(\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x) \Rightarrow (\exists x)(p(x) \wedge q(x))$;

б) $(\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \big((\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x)\big)$;

в) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)\big(p(x,y) \Rightarrow q(x,y)\big) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y)$.

Решење: а) Нађимо интерпретацију у којој ће дата формула бити нетачна. Нека је $D = \{a, b\}$. На скупу D дефинисаћемо релације p и q тако да формула буде нетачна. При овој интерпретацији морало би да буде

$$\tau\big((\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)\big) = \top, \tag{1}$$

$$\tau\big((\exists x)(p(x) \wedge q(x))\big) = \bot. \tag{2}$$

Из (2) следује

$$\tau\big(\neg(\exists x)(p(x) \wedge q(x))\big) = \top,$$

односно

$$\tau\big((\forall x)(\neg p(x) \vee \neg q(x))\big) = \top. \tag{3}$$

Из (1) имамо да је тачно да $(\exists x)\,p(x)$ (нека је то елемент $a \in D$) и $(\exists x)\,q(x)$ (нека то буде, нпр., елемент $b \in D$). Дакле, имамо:

$$p(a) \text{ је тачно и } q(b) \text{ је тачно.} \tag{4}$$

Одредимо још какву ће истинитосну вредност имати $p(b)$ и $q(a)$. Из (3) следује да и $\neg p(a) \vee \neg q(a)$ и $\neg p(b) \vee \neg q(b)$ мора бити тачно, па због (4) закључујемо: $q(a)$ је нетачно и $p(b)$ је нетачно.

Дакле, домен интерпретације може бити скуп $\{a, b\}$, p релација дефинисана са

p	a	b
	$\top$	$\bot$

,

а q релација дефинисана са

q	a	b
	$\bot$	$\top$

.

Или, нпр. домен интерпретације је $\{5, 2\}$, p је релација "бити непаран број", а q је релација "бити паран број".

Напомена: Видети зад. 21. б.

б) Формула облика $F \Leftrightarrow G$ ваљана је ако и само ако су ваљане формуле $F \Rightarrow G$ и $G \Rightarrow F$. Формула

$$((\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x)) \Rightarrow (\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x))$$

јесте ваљана (доказати!). Показаћемо да формула

$$(\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x))$$

није ваљана. Нека је $D = \{a, b\}$. Потражимо интерпретације релација p и q у скупу D да при томе формула буде нетачна. Мора бити:

$$\tau\big((\exists x)\,(p(x) \Rightarrow q(x))\big) = \top, \tag{1}$$

$$\tau\big((\exists x)\,p(x) \Rightarrow (\exists x)\,q(x)\big) = \bot. \tag{2}$$

Због (2) важи:

$$\tau\big((\exists x)\,p(x)\big) = \top, \tag{3}$$

тј. $\tau\big(p(a)\big) = \top$ за неко $a \in D$, као и

$$\tau\big((\exists x)\,q(x)\big) = \bot, \tag{4}$$

што значи $\tau\big((\forall x)\,\neg q(x)\big) = \bot$, па је и $q(a)$ и $q(b)$ нетачно. Остаје још да се одреди истинитосна вредност $p(b)$. Због (1) је формула $(\exists x \in D)\,(p(x) \Rightarrow q(x))$ тачна, а на основу (3) и (4) закључујемо да то x не може бити елемент $a \in D$, већ мора бити $b \in D$, и да $p(b)$ мора бити нетачно.

Дакле, домен интерпретације је скуп $D = \{a, b\}$, p је релација дефинисана са

p	a	b
	$\top$	$\bot$

,

а q релација дефинисана са

q	a	b
	$\bot$	$\bot$

.

Или, нпр. домен интерпретације је скуп $D = \{3, 10\}$, p је релација "бити корен једначине $x^2 - 4x + 3$", а q релација "бити негативан број".

в) На сличан начин као и у претходним примерима могу се конструисати интерпретације при којима је формула нетачна. Једна од њих је: $D = \{a, b\}$, p и q су релације дате са

p	a	b
a	$\bot$	$\top$
b	$\top$	$\bot$

q	a	b
a	$\bot$	$\bot$
b	$\top$	$\bot$

.

35. Испитати да ли су следеће формуле предикатског рачуна ваљане:

а) $((\forall x)\,A(x) \Rightarrow (\forall x)\,B(x)) \Rightarrow (\forall x)\,(A(x) \Rightarrow B(x))$;

б) $\big((\forall x)(\exists y)\,B(y,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((B(y,x) \wedge B(y,z)) \Rightarrow A(x,z)\big)\big) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall x)\,A(x,x)$.

в) $$\Big(\big((\forall x)(\forall y)\,(A(x,y) \Rightarrow A(y,x)\big) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((A(x,y) \wedge A(y,z)) \Rightarrow A(x,z)\big)\Big) \Rightarrow (\forall x)\,A(x,x).$$

36. Доказати да из претпоставки:

$$(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)(Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y))\big),$$
$$(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\exists y)(S(y) \wedge R(x,y))\big),$$
$$(\exists x)P(x),$$

произлази закључак:

$$(\exists x)\,\big(S(x) \wedge \neg Q(x)\big).$$

<u>Решење:</u> Треба доказати да је формула $(\exists x)\big(S(x) \wedge \neg Q(x)\big)$ тачна кад год су (тј. при свакој интерпретацији при којој су) три дате формуле - хипотезе тачне, тј. да је завршна формула последица скупа од три дате формуле.

Посматрајмо прву хипотезу у еквивалентном облику:

$$(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)(R(x,y) \Rightarrow \neg Q(y))\big). \qquad (1)$$

Нека је $(\exists x)P(x)$ тачна и нека је x_0 такво да важи $P(x_0)$. Увршћавањем x_0 у другу хипотезу, добија се

$$P(x_0) \Rightarrow (\exists y)\big(S(y) \wedge R(x_0,y)\big)$$

и нека је y_0 такво да важи $S(y_0) \wedge R(x_0,y_0)$. Заменом x_0 и y_0 у (1) добијамо $\neg Q(y_0)$. Значи, $S(y_0) \wedge \neg Q(y_0)$ је тачно, тј. важи

$$(\exists x)\big(S(x) \wedge \neg Q(x)\big),$$

што је и требало доказати.

37. Доказати да из претпоставки:

$$(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\forall y)(Q(y) \Rightarrow R(x,y))\big),$$
$$(\exists x)\big(P(x) \wedge (\exists y)\neg R(x,y)\big),$$

следује закључак:

$$(\exists x)\neg Q(x).$$

ГЛАВА 3.

КОМБИНАТОРИКА И ГРАФОВИ

3. 1. КОМБИНАТОРИКА

1. У кутији се налази 100 куглица, и то 28 црвених, 15 зелених, 12 жутих, 25 плавих и по 10 белих и црних. Колико је најмање куглица потребно насумично узети из кутије да бисмо били сигурни да се међу њима налази бар 15 куглица једне боје?

Решење: У најнеповољнијем случају потребно је узети све куглице којих има мање од 15, тј. $12 + 10 + 10 = 32$ куглице. Затим се узимају куглице којих има бар 15 и то по 14, тј. $3 \cdot 14 = 42$ куглице. Наредна узета куглица биће сигурно бар петнаеста за неку боју, па је тражени минимални број куглица $32 + 42 + 1 = 75$.

2. У квадрат странице дужине 1 уцртане су 1 993 тачке. Доказати да постоји 499 тачака које припадају кругу пречника 3/4.

Решење: Поделимо квадрат на четири подударна квадрата (дужине странице 1/2). Тада се бар у једном од њих налази бар 499 тачака. Око тог квадрата може се описати круг чији је пречник $\sqrt{2} \cdot 1/2 < 3/4$, чиме је тврђење доказано.

3. Правоугаона плоча димензије $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n)$ издељена је мрежом хоризонталних и вертикалних правих линија на квадрате димензије 1. Колико на овој плочи укупно има квадрата (свих димензија)?

Решење: Квадрата странице 1 има mn; квадрата странице 2 има $m - 1$ дуж дуже странице и то мултипликовано $n - 1$ пута дуж краће странице, дакле $(m - 1)(n - 1)$; ... квадрата странице k има $(m + 1 - k)$ дуж дуже странице и то мултипликовано $(n + 1 - k)$ пута дуж краће странице, дакле $(m + 1 - k) \cdot (n + 1 - k)$; коначно, квадрата странице n има $(m+1-n)$ дуж дуже странице и то мултипликовано 1 пут дуж краће странице. Сабирањем се добија:

$$S = \sum_{k=1}^{n}(m+1-k)(n+1-k) = mn\cdot n - m\cdot(1+2+\dots+n-1) - n\cdot(1+2+\dots+n-1) +$$
$$+(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2) = mn^2 - m\frac{(n-1)n}{2} - n\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} =$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1).$$

Напомена: Нпр. на шаховској табли је $m = n = 8$, па је $S = 204$.

4. У равни је дато n правих од којих никоје две нису паралелне, а никоје три нису инцидентне, тј. немају заједничку тачку. Одредити број полигоналних (коначних или бесконачних) области на које је издељена ова раван.

Решење: Посматрајмо опет $k-1$ праву $(2 \le k \le n)$ и означимо са P_{k-1} број области на које је подељена дата раван. Узмимо још једну праву. Она сече све уочене праве у $k-1$ тачака и на тај начин добија се k нових области (област кроз коју права пролази до првог пресека дели се на две области, исти је случај са облашћу кроз коју права пролази од првог до другог пресека, итд., закључно са облашћу после последњег пресека). Зато је могућно формирати рекурентну релацију

$$P_k = P_{k-1} + k.$$

Замењујући редом $k = 1, 2, 3, \dots, n$ добија се

$$P_1 = P_0 + 1, \quad P_2 = P_1 + 2, \quad \dots, \quad P_n = P_{n-1} + n,$$

тј.

$$P_n = P_0 + (1+2+\dots+n) = P_0 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Како је $P_0 = 1$, из претходног произлази да је

$$P_n = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

5. На факултету студирају три студента прве, четири друге, пет

треће и по два студента четврте и пете године. Потребно је изабрати делегацију од пет студената тако да године буду подједнако заступљене. На колико је начина то могућно остварити?

Решење: Према принципу производа број могућних састава делегације је $3\cdot4\cdot5\cdot2\cdot2 = 240$.

6. На квадратно обележеном листу хартије размере $n\times n$, $n\in\mathbb{N}$, уписују се (у свако поље) бројеви $1, 2, \dots, n^2$ тако да сви бројеви који се налазе у неком реду (хоризонталном или вертикалном) образују (узети по редоследу у коме се налазе) аритметичку прогресију. Одредити број тако насталих различитих распореда.

Решење: Пошто су на располагању само позитивни бројеви, *јединица* (најмањи) мора да се налази у неком од углова, нпр. у горњем левом. *Двојка* се мора налазити до (или испод) *јединице*, па је и цео први ред (хоризонтални или вертикални) једнозначно испуњен бројевима $1, 2, \dots n$. Слична је ситуација и са следећим бројевима који се надаље ређају једнозначно. Значи, број разних распореда одређен је положајем *јединице* (4 могућности) и релативним положајем *двојке* (2 могућности), па је тражени број $4\cdot2 = 8$ распореда.

7. Застава има 13 хоризонталних пруга, које могу бити црвене, плаве или беле, при чему две суседне пруге не могу бити исте боје. Колико има оваквих застава?

Резултат: $3\cdot2^{12}$.

8. Зидове собе треба обојити различитим бојама тако да суседни зидови не буду обојени истом бојом. На колико се начина то

може учинити ако су на располагању

а) две; б) три; в) четири

боје?

9. Колико има

а) шестоцифрених; б) максимално шестоцифрених природних бројева чији је збир цифара паран?

Решење: а) На првом месту слева може стајати нека од 9 цифара (не и нула), а на другом, трећем, ... петом месту нека од 10 цифара; коначно, на шестом месту може стајати нека од 5 цифара тачно одређене парности (исте као што је и збир претходних пет цифара). Према принципу производа добија се

$$9\cdot10^4\cdot5 = 450\,000$$

бројева.

б) Уколико се узимају бројеви од 1 до (закључно) 999 999, добија се да је тражени број $10\cdot10^4\cdot5-1 = 499\,999$ (јер $0\notin\mathbb{N}$).

10. На располагању су слова А и Б. Колико се речи дужине n може формирати од ова два слова ако реч схватимо формално, тј. ако су дозвољени сви међусобни распореди и понављања слова?

Решење: У питању су варијације са понављањем n-те класе од 2 елемента чији је број 2^n.

11. Колико се максимално n-тоцифрених бројева може написати у декадном бројном систему коришћењем свих цифара?

Резултат: 10^n.

12. Колико има природних бројева са највише n цифара у којима се појављују цифре 3 или 5?

Резултат: $10^n - 8^n$.

13. Колико је и којих цифара потребно "употребити" да би се написали сви бројеви од 1 закључно са

а) 999 999; б) $10^n - 1$?

Решење: а) Укупан број цифара које се морају употребити за тражено исписивање је $9+2\cdot90+3\cdot900+4\cdot9000+5\cdot90000+6\cdot900000 = 5\,888\,889$. Све цифре, изузев нуле, потпуно су равноправне у броју појављивања, док се 0 појављује ређе. На последњем месту (јединица) нула се појављује у бројевима 10, 20, ... 999 990, тј. 99 999 пута; на претпоследњем месту (десетица) 101, 102, ... 999 909, тј. 99 990 пута, итд. Укупан број једнак је $99999+99990+99900+99000+90000 = 488\,889$ пута. Остали бројеви појављују се, дакле, $\frac{1}{9}(5\,888\,889 - 488\,889) = 600\,000$ пута.

б) Нула се појављује $(n-1)\cdot10^{n-1}-(10^{n-1}-1)/(10-1)$, а све остале цифре по $n\cdot10^{n-1}$ пута.

14. На листићу спортске прогнозе има 13 мечева са 3 могућна исхода. Колико испуњених колона гарантује главну премију?

Решење: У питању су варијације 13. класе од 3 елемента чији је број $3^{13} = 1\,594\,323$.

15. Колико има групоида $(X,\cdot)$ ако је $|X| = n$?

16. Ако су X и Y коначни скупови, колико елемената има скуп Y^X свих пресликавања скупа X у скуп Y?

Решење: Нека је $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ и $f : X \mapsto Y$. Тада је пресликавање f одређено уређеном n-торком $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m))$ елемената скупа Y. Одавде следује да је број различитих пресликавања скупа X у скуп Y једнак броју различитих уређених n-торки елемената скупа Y. Тај број једнак је броју варијација са понављањем скупа од n елемената класе m, тј. он износи n^m.

Напомена: Уочимо да је $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

17. Дати су скупови $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. На колико се начина може формирати уређена $(m+n)$-торка састављена од различитих елемената, ако се на њених првих p места налазе елементи из скупа A, а на последњих q места елементи из скупа B, при чему је $p \le m$ и $q \le n$?

Резултат: $\frac{m!}{(m-p)!} \cdot \frac{n!}{(n-q)!} \cdot (m+n-p-q)!$.

18. Одредити:

а) збир цифара свих бројева који се добијају пермутацијама цифара броја 1234;

б) збир свих бројева који се добијају пермутацијама цифара броја 1234.

Резултат: а) $4! \cdot 10 = 240$; б) 66 660.

19. Три беле куглице, нумерисане са 1, 2 и 3, и четири црне куглице, нумерисане са 4, 5, 6 и 7, треба поређати у низ тако да различито обојене куглице стоје наизменично. На колико се начина то може урадити?

20. Дат је скуп слова $S = \{А, Б, Г, Д, Е, О, Р\}$. Која је (по лексикографском редоследу) реч БЕОГРАД у "речнику" који се састоји од речи које се формирају коришћењем свих слова из скупа S тачно једном?

Решење: Пребројмо све речи које се налазе испред дате речи. У табели су најпре дати низови слова који се налазе на почетку речи које претходе речи БЕОГРАД:

А	$6! = 720$	БЕД	$4! = 24$
БА	$5! = 120$	БЕОА	$3! = 6$
БГ	$5! = 120$	БЕОГА	$2! = 2$
БД	$5! = 120$	БЕОГД	$2! = 2$
БЕА	$4! = 24$	БЕОГРАД	$1! = 1$
БЕГ	$4! = 24$		1 163

Сабирањем се добија место речи у речнику. Дакле, реч БЕОГРАД је 1 163. по лексикографском редоследу.

21. У колико се пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ цифра 3 налази на четвртом месту?

22. У колико се пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ између бројева 1 и n налази тачно r, $(r \le n-2)$, других бројева?

Решење: Нека се најпре распоређује r бројева између бројева 1 и n. То је могућно урадити на $V^r_{n-2} = \frac{(n-2)!}{(n-2-r)!}$ начина. Ти бројеви "омеђени" су бројевима 1 и n и заједно се могу схватити као нови објекат који се може распоредити са преостала $n-r-2$ броја на $(n-r-2+1)!$ начина. Према принципу производа укупан број пермутација са наведеном особином је $\frac{(n-2)!}{(n-2-r)!}(n-r-1)!$, што треба помножити и бројем међусобних положаја 1 и n, па је тражени број $2(n-r-1)(n-2)!$.

23. На шаховском турниру учествују четири Руса, три Југословена, два Украјинца и један Индијац. На колико је начина могућно поређати заставе учесника (с лева на десно)?

<u>Решење:</u> У питању су пермутације са понављањем од 10 елемената: $\dfrac{(4+3+2+1)!}{4!3!2!1!} = 12\,600$.

24. На располагању су по три беле и црне куглице. На колико је начина могућно поређати све куглице тако да
а) распоред куглица буде произвољан;
б) све црне и све беле куглице буду суседне;
в) све црне куглице буду суседне;
г) истобојне куглице не буду суседне?

<u>Резултат:</u> а) $\dfrac{(3+3)!}{3!\cdot 3!} = 20$;
б) 2;
в) $\dfrac{(3+1)!}{3!\cdot 1!} = 4$;
г) 2.

25. На колико се начина n лица могу распоредити на m столица, ако је $m > n$?

<u>Резултат:</u> $\binom{m}{n}\cdot n! = \dfrac{m!}{(m-n)!}$.

26. На колико се начина може n лица разместити на
а) n, б) $n+m$
столица размештених око округлог стола ако се сматра да су

размештања различита ако и само ако је међусобни распоред различит и под условом да се у обзир узима и распоред празних столица?

<u>Резултат:</u> а) $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$;
б) $\dfrac{(n+m)!}{(n+m)\cdot m!} = \dfrac{(n+m-1)!}{m!}$.

27. Одредити број елемената партитивног скупа n-точланог скупа.

<u>Решење 1:</u> Скуп од n елемената има $\binom{n}{i}$ подскупова са i елемената. Стога је укупан број подскупова овог скупа једнак

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n.$$

До последње једнакости долази се када се у биномну формулу

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ стави $a=1$ и $b=1$.

<u>Решење 2:</u> Нека је $A=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $B\subset A$. Подскупу B придружимо n-торку $(b_1,\dots,b_n)$, где за $i=1,\dots,n$ важи $b_i=1$ ако је $x_i\in B$ и $b_i=0$ ако $x_i\notin B$. Подскупови скупа A су у биунивокој кореспонденцији са скупом свих n-торки описаног облика. Ове n-торке су варијације са понављањем класе n скупа $\{0,1\}$. Стога је тражени број једнак $\overline{V}_2^n = 2^n$.

28. Десеторица студената играју фудбал тако што формирају две екипе од по пет играча. На колико начина могу да организују утакмицу?

<u>Решење:</u> У броју комбинација $\binom{10}{5} = 252$ тражени број урачунат је два пута (јер је без значаја којим се редом екипе формира-

ју), тј. резултат је $252/2 = 126$.

29. Један човек има пет књига, а други девет. На колико начина могу да размене по две књиге?

30. Колико дијагонала има n-тоугао?

31. Одредити број комбинација k-те класе скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ у којима се налази тачно s елемената из скупа $\{1, 2, \dots, m\}$, при чему је $s \le k \le m \le n$.

<u>Резултат:</u> $\binom{m}{s} \cdot \binom{n-m}{k-s}$.

32. На колико се начина из шпила од 52 карте може извући пет карата тако да међу њима буде бар један ас?

<u>Решење 1:</u> $\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = 886\,656$.

<u>Решење 2:</u> $\binom{4}{1}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1} = 886\,656$.

33. Колико постоји пермутација шпила од 32 карте при којима ћемо добити четири аса ако узмемо првих десет карата?

<u>Решење:</u> У десет нама намењених карата четири аса се могу разместити на $\binom{10}{4}$ начина (избор четири места из скупа од десет места). Двадесет осам преосталих карата (које нису асови) могу се пермутовати на произвољан начин на оним местима која нису заузета асовима. При фиксираном распореду асова ових пермутација има $28!$. Такође, и асови могу међусобно да мењају места. Број њихових пермутација је $4!$. Број пермутација шпила карата при којима добијамо 4 аса зато је

$$\binom{10}{4} \cdot 28! \cdot 4!.$$

34. На колико начина можемо из шпила од 52 карте да изаберемо шест тако да међу њима буду карте све четири боје?

35. Колико постоји n-торки састављених од бројева $1, 2, \dots, p$ које имају тачно k $(1 \le k \le n)$ координата различитих од једне фиксиране n-торке описаног облика?

<u>Резултат:</u> $\binom{n}{k}(p-1)^k$.

36. Назовимо два фудбалска првенства "у суштини истим" ако је редослед првих пет клубова исти и ако иста два клуба испадају из лиге. Колико има "у суштини различитих" првенстава у лиги од 18 (сталних) клубова?

<u>Решење:</u> Клубова који првенство чине "посебним" има *седам* и они се могу одабрати на C_{18}^{7} начина. Међу њима су пет првопласираних (њихов редослед је, разуме се, битан), што даје V_7^5 могућности, док редослед преостала два клуба није од значаја. Према принципу производа тражени број "у суштини различитих" првенстава је $C_{18}^{7} \cdot V_7^5 = \frac{18!}{11! \cdot 2!} = 80\,196\,480$. До истог резултата могло се доћи и на друге начине, нпр. $V_{18}^5 \cdot C_{13}^2$ (пет првопласираних од 18 у редоследу и два од преосталих 13 клубова без обзира на међусобни редослед), или $C_{18}^2 \cdot V_{16}^5$ (најпре два клуба који испадају, а затим од преосталих 16 пет према пласману).

37. Стартне бројеве, којих има m, извлачи n такмичара, међу којима су и такмичари A и B, и при томе је $m > n$. На колико се начина могу разделити стартни бројеви тако да такмичар A добије број који је мањи од стартног броја који је добио такмичар B ?

38. Колико природних бројева мањих од 10^n има цифре поређане у неопадајућем поретку?

39. За функцију $f: X \to Y$, $(X, Y \subset \mathbb{R})$, рећи ћемо да је монотоно неопадајућа ако важи

$$(\forall x, y \in X)\ (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$$

Одредити број монотоно неопадајућих функција у случају када је

$$X = Y = \{1, 2, ..., n\}.$$

<u>Резултат:</u> $\binom{2n-1}{n}$.

40. Одредити функцију генератрису за партиције у којима су сви елементи различити.

<u>Решење:</u> Број партиција природног броја n у којима су сви елементи различити, тј. број партиција облика

$$n = 1 \cdot K_1 + 2 \cdot K_2 + 3 \cdot K_3 + ... + n \cdot K_n$$

(K_i је број појављивања броја i у партицији и $K_i \in \{0, 1\}$ јер се поједини сабирци могу појављивати највише једанпут) једнак је броју начина факторизације величине t^n у форми:

$$t^n = (t^1)^{K_1} (t^2)^{K_2} ... (t^n)^{K_n}.$$

Број начина такве факторизације величине t^n једнак је коефицијенту уз t^n у производу $(1 + t)(1 + t^2)(1 + t^3) ... (1 + t^n)$, па је тражена функција генератриса:

$$G(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + t^i).$$

41. Одредити функцију генератрису за партиције броја n код којих су сви сабирци непарни.

<u>Резултат:</u> $G(t) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} (1 - t^{2i-1})}$.

42. Одредити функцију генератрису за бројеве партиција које садрже тачно k сабирака.

<u>Резултат:</u> $G(t) = \dfrac{t^k}{(1 - t)(1 - t^2) \cdots (1 - t^k)}$.

43. Доказати да је број партиција датог броја n које садрже тачно k сабирака једнак броју партиција тог броја чији је највећи сабирак једнак k.

44. На колико се начина новчаница од 100 новчаних јединица може разменити у метални новац од 10, 20 и 50 новчаних јединица?

45. Написати све композиције броја 7 састављене од 4 сабирка.

46. Колико у скупу A од n елемената има таквих комутативних бинарних операција $\odot$ код којих је

$$(\forall x \in A)\ x \odot x \neq x?$$

Решење: Cayley-јева таблица операције мора бити симетрична у односу на главну дијагоналу. Број места која се могу произвољно да попуне је $\frac{n^2-n}{2}$. На главној дијагонали могућно је распоредити елементе на $(n-1)^n$ начина, па је укупан број операција које имају дату особину $(n-1)^n \cdot n^{\frac{n^2-n}{2}}$.

47. Дат је скуп $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Колико има групоида $(X, *)$ таквих да операција $*$ има следећу особину:

$$(\forall x \in X)\ x * x \geq x\ ?$$

48. Дат је скуп $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Колико се разних операција може дефинисати ако је $(A, *)$ групоид који има следећу особину:

а) $|\{i : i * i \neq i,\ i \in A\}| = k$,

б) $|\{i : i * (n+1-i) \neq i \wedge i * (n+1-i) \neq (n+1-i)\}| = k$, n је паран број, при чему је $k \in A \cup \{0\}$?

Решење: а) Посматрајмо Cayley-јеву таблицу групоида над скупом A. Изван главне дијагонале могу се поставити било који елементи, а број могућности је $\overline{V}_n^{n^2-n} = n^{n^2-n}$. На главној дијагонали на k места је $i * i \neq i$, а на преосталих $n-k$ места је $i * i = i$. На местима на којима је $i * i = i$ морају бити постављени елементи i, а њих можемо изабрати на $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ начина. На преосталих k места на главној дијагонали елементе можемо поставити на $(n-1)^k$ начина. Према принципу производа тражени број групоида је

$$\binom{n}{k} \cdot (n-1)^k \cdot n^{n^2-n}.$$

б) Посматрајмо опет Cayley-јеву таблицу операције На местима ван споредне дијагонале могу се поставити било који елементи скупа A (n^{n^2-n} распореда). На споредној дијагонали на k места се не налазе елементи који "учествују" у операцији, док се на преосталих $n-k$ места налази управо један од операнада. За фиксан избор поменутих k места (а број тих избора је $\binom{n}{k}$) ово је могућно реализовати на $(n-2)^k$, односно $2^{n-k}\binom{n}{n-k}$ начина. Према принципу производа тражени број операција је

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} (n-2)^k \cdot n^{n^2-n}.$$

49. Колико има природних бројева који, написани у декадном бројном систему, садрже само различите цифре?

50. По пет црвених, плавих, белих и црних куглица треба поређати у низ тако да ма које четири суседне куглице буду различите боје. На колико је начина могућно то извести

а) ако куглице нису нумерисане;

б) ако су куглице нумерисане?

Резултат: а) $4!$; б) $4! \cdot (5!)^4$.

51. Испитати да ли су пермутације $p = (16)(2354)7$ и $q = (164)(2753)$ пермутабилне.

52. Одредити пермутацију $r = p^2 \circ q^{-1}$ скупа $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ ако је $p = (123)(4568)7$, $q = (34)(52618)7$, а $\circ$ ознака за производ (композицију) пермутација.

Решење: Представимо дате пермутације у облику а укупан број уређених парова је

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} = 3^n .$$

57. На колико се начина може разделити n различитих књига лицима A, B, и C тако да лице C добије највише k ($\le n$) књига?

Резултат: $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}$.

58. Две кутије имају по k куглица нумерисаних бројевима од 1 до k. Из прве кутије бирамо n, а из друге m куглица ($n, m \le k$). На колико се начина то може урадити тако да тачно r куглица ($r \le n, m$) буде извучено два пута?

59. На основу претходног задатка или на други начин доказати да је

$$\binom{k}{n} \cdot \binom{n}{r} \cdot \binom{k-n}{m-r} = \binom{k}{m} \binom{m}{r} \binom{k-m}{n-r} ,$$

где $k, m, n, r \in \mathbb{N}$.

60. Одредити у затвореној форми вредност збира

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} .$$

Решење: Нека је на располагању кутија у којој се налази $m+n$ куглица, и то m белих и n црних. На колико је начина могућно извући k куглица? До очигледног одговора $\binom{m+n}{k}$ може се доћи и следећим резоновањем. Од k извучених куглица k могу да буду

беле, а ниједна црна, а то може да се оствари на $\binom{n}{0}\binom{m}{k}$ начина; k-1 куглица може да буде бела, а 1 црна, и то на $\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}$ начина; ... коначно, k куглица могу бити црне, а ниједна бела, и то на $\binom{n}{k}\binom{m}{0}$ начина. Тако се долази до једнакости

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

чиме је одређена вредност датог збира.

Напомена: За $m = n = k$ добија се идентитет:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} .$$

61. Одредити коефицијент уз $x^r y^s$ у развијеном облику израза

$$(1 + x + y)^n,$$

где су r, s и n природни бројеви и $n \ge r + s$.

Резултат: $\dfrac{n!}{r! \cdot s! \cdot (n - r - s)!}$.

62. Одредити максималан број пресечних тачака дијагонала конвексног n-тоугла.

Решење: Ма која четири различита темена конвексног n-тоугла одређују тачно један пар дужи које се секу и које одређују пресечну тачку. Уколико се никоје две од свих овако добијених тачака не би поклопиле, добио би се тражени максимални број тачака који је, дакле, једнак броју избора 4 од n разних тачака, или $\binom{n}{4}$.

$$p = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,3\,1\,5\,6\,8\,7\,4 \end{pmatrix},\quad q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 8\,6\,4\,3\,2\,1\,7\,5 \end{pmatrix}.$$

Имамо:

$$p^2 = p \circ p = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,1\,2\,6\,8\,4\,7\,5 \end{pmatrix}.$$

Одредимо још q^{-1}. Пошто је $q \circ q^{-1} = \mathrm{Id}$ (идентичка пермутација), биће:

$$q^{-1}(1) = q^{-1}(q(6)) = (q \circ q^{-1})(6) = \mathrm{Id}(6) = 6,$$
$$q^{-1}(2) = q^{-1}(q(5)) = (q \circ q^{-1})(5) = \mathrm{Id}(5) = 5,$$
$$q^{-1}(3) = q^{-1}(q(4)) = (q \circ q^{-1})(4) = \mathrm{Id}(4) = 4,$$

итд. Добија се $q^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 6\,5\,4\,3\,8\,2\,7\,1 \end{pmatrix}$.

За $r = p^2 \circ q^{-1}$ имамо:

$$r(1) = (p^2 \circ q^{-1}) = q^{-1}(p^2(1)) = q^{-1}(3) = 4,$$
$$r(2) = (p^2 \circ q^{-1}) = q^{-1}(p^2(2)) = q^{-1}(1) = 6,$$

итд., односно:

$$r = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 4\,6\,5\,2\,1\,3\,7\,8 \end{pmatrix}.$$

53. Дате су пермутације f и g скупа $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,6\,3\,1\,4\,5 \end{pmatrix},\quad g = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,4\,5\,2\,1\,3 \end{pmatrix}.$$

Одредити пермутацију h тако да важи $f \circ h = g$.

Решење: Имамо:

$$h(1) = h(f(4)) = (f \circ h)(4) = g(4) = 2,$$
$$h(2) = h(f(1)) = (f \circ h)(1) = g(1) = 6,$$
$$h(3) = h(f(3)) = (f \circ h)(3) = g(3) = 5,$$

итд. Тражена пермутација је:

$$h = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,6\,5\,1\,3\,4 \end{pmatrix}.$$

54. Решити једначине:

а) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \circ X = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \circ X^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$.

55. Дате су три црне куглице нумерисане са 1, три црне куглице нумерисане са 2 и три групе са по шест белих куглица нумерисаних респективно са 1, 2 и 3. Од датих куглица треба поређати у низ 9 куглица тако да се одаберу 3 црне и 6 белих. На колико се начина то може урадити?

Решење: Најпре ћемо израчунати на колико се начина могу поређати у низ 3 црне и 6 белих куглица, без обзира на њихову нумерацију. У питању су пермутације са понављањем од 9 елемената, где је број елемената једне врсте 3, а друге 6, што износи $\frac{9!}{3!\cdot 6!}$. Сада за фиксирани распоред црних и белих куглица размотримо нумерацију. Црне куглице могу имати бројеве 1 и 2, па на 3 црне куглице ови бројеви могу бити распоређени на 2^3 начина (варијације са понављањем од 2 елемента треће класе), док је одговарајући број распореда на белим куглицама 3^6. Укупно, број начина износи $\frac{9!}{3!\cdot 6!}\cdot 2^3 \cdot 3^6 = 489\,888$.

56. Нека је дат скуп A од n елемената. Наћи број уређених парова (X, Y) при условима $X \cup Y \subset A$ и $X \cap Y = \varnothing$.

Решење: Скуп $X \subset A$ који има k $(0 \le k \le n)$ елемената можемо одабрати на $\binom{n}{k}$ начина. Скуп Y тако да је $X \cap Y = \varnothing$, ако је скуп X већ одабран, бирамо међу подскуповима скупа $A \setminus X$ који има $n - k$ елемената, а тих подскупова има 2^{n-k}. Значи, ако скуп X има k елемената, број уређених парова (X, Y) је $\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$,

63. Свака страница квадрата подељена је на n делова. Колико се разних троуглова може добити спајањем деобних тачака (искључујући темена квадрата)?

Решење: На свакој страници број деобних тачака је $n-1$, па је укупан број деобних тачака $4n-4$. Како три тачке чине троугао, то је потенцијални број троуглова једнак $\binom{4n-4}{3}$. Међутим, уколико би све три изабране тачке биле на истој страници квадрата, не би се добио троугао већ дуж, а таквих могућности има $\binom{n-1}{3}$ на свакој страници. Дакле, тражени број троуглова је

$$\binom{4n-4}{3} - 4\binom{n-1}{3} = 2(n-1)^2(5n-8).$$

64. Четворо деце добило је 20 јабука. На колико је разних начина могућно извршити расподелу јабука деци?

Решење: У питању су комбинације са понављањем класе 20 од 4 елемента: $\overline{C}_4^{20} = \binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20} = 1\,771$.

Може се резоновати и овако: на располагању је 20 цифара 1 и три цифре 0. Пише се број од 23 цифре по коме прво дете добија онолико јабука колико има јединица у броју слева до прве нуле, друго дете онолико јабука колико има јединица између прве две нуле слева, итд. Јасно је да број расподела кореспондира са бројем различитих исписивања оваквих бројева од 23 цифре, а они се могу написати на

$$\overline{P}_{23}^{(20,3)} = \frac{(20+3)!}{20!\,3!} = 1\,771$$

начин.

65. На колико се начина шест једнаких кликера може поделити десеторици дечака?

Резултат: $\binom{15}{6} = 5\,005$.

66. На колико се начина n једнаких објеката може сместити у k различитих кутија?

Резултат: $\binom{n+k-1}{n}$.

67. На колико се начина n истоветних поклона може да раздели групи од r деце

а) без посебних услова;

б) под условом да свако дете добије бар један поклон?

Напомена: Видети и зад. 85.

68. На колико се начина n_1 црвених, n_2 плавих и n_3 белих куглица може разместити у m различитих кутија ако се куглице исте боје не разликују међусобно?

Резултат: $\binom{n_1+m-1}{n_1} \cdot \binom{n_2+m-1}{n_2} \cdot \binom{n_3+m-1}{n_3}$.

69. Колико делилаца има број $2 \cdot 3^5 \cdot 5^3$ (укључујући број 1 и задати број)?

70. Колико различитих делилаца има дати природни број n? Међу природним бројевима од 1 до 1000 одредити број са највећим бројем различитих делилаца.

Решење: Нека је $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где су $p_1, p_2, \ldots, p_k$

међусобно различити прости фактори броја n. Делилац броја n је број $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где је $\beta_i \in \{0, 1, 2, \ldots, \alpha_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, а број d различитих делилаца једнак је броју различитих k-торки $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, тј.

$$d = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Нека је сада $1 \le n \le 1000$. Потражимо највећу могућну вредност добијеног производа d. Очигледно је $k \le 4$ јер је производ првих пет простих бројева $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 1000$. Ако су притом сва четири броја β_i различита од нуле, могућна је факторизација $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ која даје $d = 32$, док све друго даје мању вредност d. Ако у производу d постоји само један фактор, онда је $d < 10$ (јер је $2^9 = 512$). У случају када d има два или три фактора, после једноставне дискусије уверавамо се да се ни у једном случају не добија $d \ge 32$. Значи, број 840 је тражени број са највећим бројем различитих делилаца којих има 32.

71. Колико има природних бројева који не премашају дати природан број n, а који нису дељиви ни са два, ни са три?

Решење: Број природних бројева не већих од n који су дељиви бројем p је $\left[\frac{n}{p}\right]$, па је број бројева који су дељиви са 2 или са 3 једнак $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]$ (према принципу укључења - искључења) јер су у прва два сабирка бројеви дељиви и са 2 и са 3 урачунати два пута. Сада је број природних бројева који не премашају n, а који нису дељиви ни са 2, ни са 3, једнак

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{6}\right].$$

72. Колико има четвороцифрених бројева који нису дељиви ни једним од бројева 2, 3 и 5?

Решење 1: Број максимално четвороцифрених бројева (мањих од 10 000) дељивих бројем p је $\left[\frac{9999}{p}\right]$. Користећи се принципом укључења - искључења добија се да међу првих 9999 бројева има

$$\left[\frac{9999}{2}\right] + \left[\frac{9999}{3}\right] + \left[\frac{9999}{5}\right] - \left[\frac{9999}{2\cdot 3}\right] - \left[\frac{9999}{2\cdot 5}\right] - \left[\frac{9999}{3\cdot 5}\right] + \left[\frac{9999}{2\cdot 3\cdot 5}\right] =$$

$= 7333$ оних који су дељиви неким од бројева 2, 3 или 5, а оних који то нису $9999 - 7333 = 2666$. Слично се добија да међу првих 999 бројева (тј. максимално троцифрених) има 266 оних који нису дељиви ни са 2, ни са 3, ни са 5. Дакле, (тачно) четвороцифрених бројева који нису дељиви ни једним од ових бројева има $2666 - 266 = 2400$.

Решење 2: Међу бројевима од 1000 до 9999 има $(9999-1000+1)/30 = 300$ низова по 30 $(= 2\cdot 3\cdot 5)$ бројева (узастопних), а међу првих 30 бројева има 8 бројева који испуњавају услове задатка (1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29). Дакле, укупан број бројева са траженом особином је $8 \cdot 300 = 2400$.

73. Нека је X непразан скуп. За функцију $f\colon X \to X$ кажемо да има *фиксну тачку* $x_0 \in X$ уколико је $f(x_0) = x_0$. За коначан скуп $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ одредити број свих бијекција без фиксне тачке.

Решење: Уведимо систем својстава:

C_1 : својство да је елеменат $x_1 \in X$ фиксна тачка за функцију f;
C_2 : својство да је елеменат $x_2 \in X$ фиксна тачка за функцију f;
⋮
C_n : својство да је елеменат $x_n \in X$ фиксна тачка за функцију f.

Тада је број бијекција без фиксних тачака према принципу укључења - искључења дат са:

$$b = |C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n| = n! - \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{i_j} |(C_{i_1} \cap \ldots \cap C_{i_k}|\right),$$

при чему је укупном сумом $\sum_{i_j} |C_{i_1} \cap \ldots \cap C_{i_k}|$, по свим k-точланим подскуповима $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, дат укупан број бијекција - пермутација скупа X са тачно k фиксних тачака. Одатле добијамо да је тражени број бијекција са тачно k фиксних тачака дат са:

$$b = n! - \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} \right) = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

74. Секретарица има 5 писама и 5 различито адресованих коверата. На колико начина она може свако писмо да стави у погрешну коверту?

Резултат: $5! - \binom{5}{1} 4! + \binom{5}{2} 3! - \binom{5}{3} 2! + \binom{5}{4} 1! - 1 = 44.$

75. Нека се n људи налази на некој ранг - листи и нека им се деле (сваком човеку по једна) картице нумерисане бројевима од 1 до n. На колико начина је то могућно остварити уколико свако добија картицу са бројем који је различит од редног броја који заузима на ранг-листи?

Резултат: $n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$

76. Нека је дат коначан низ n међусобно различитих бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Колико има пермутација скупа $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ таквих да за тачно r $(0 \le r \le n)$ његових чланова важи да им се индекс подудара са местом у пермутацији?

Резултат: $\frac{n!}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \frac{1}{k!}.$

77. Колико се бинарних релација може дефинисати у скупу X од n елемената? Колико постоји
а) рефлексивних,
б) симетричних,
в) рефлексивних и симетричних

релација?

Решење: Како је бинарна релација у скупу X, по дефиницији, сваки подскуп скупа X^2 и како је $|X^2| = n^2$ ако је $|X| = n$, број бинарних релација у скупу X једнак је $\overline{V}_2^{\overline{V}^n_2} = \overline{V}_2^{n^2} = 2^{n^2}$ (видети задатак 27.).

а) Ако је релација рефлексивна, она мора да садржи све уређене парове облика (x, x), $x \in X$, па је број свих таквих релација једнак броју подскупова оног дела скупа X^2 чији елементи (уређени парови) имају различиту прву и другу компоненту, тј. броју

$$\overline{V}_2^{V^n_2} = \overline{V}_2^{n^2-n} = 2^{n^2-n}.$$

б) Уколико је релација симетрична, треба посматрати само неуређене парове елемната скупа X (јер сваки пар или у оба поретка припада, или не припада релацији), па је тражени број

$$\overline{V}_2^{\overline{C}^n_2} = \overline{V}_2^{\binom{n+1}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

в) У овом случају посматрамо само неуређене парове различитих елемената, па се добија

$$\overline{V}_2^{C^n_2} = \overline{V}_2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n^2-n}{2}}.$$

78. Колико се n-арних релација може дефинисати у скупу од m еле-

мената?

79. Колико у скупу X од n елемената постоји различитих бинарних релација

а) које су антисиметричне;

б) које нису ни симетричне ни антисиметричне?

<u>Решење:</u> Према зад. 77. број бинарних релација у скупу X једнак је 2^{n^2}. Придружимо бинарној релацији $\rho \subset X^2$ квадратну шему (аналогон Cayley-јевој таблици) у којој ће у пресеку i-те врсте и j-те колоне бити јединица ако су елементи i и j скупа X у релацији ρ, односно нула у супротном случају.

а) Релација је антисиметрична уколико је

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)\ (x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y).$$

Нека се елементи квадратне шеме изнад главне дијагонале бирају произвољно. Тада, уколико се у пресеку i-те врсте и j-те колоне налази јединица (за $i > j$), онда ће у пресеку j-те врсте и i-те колоне бити нула, док за вредност нула у пресеку i-те врсте и j-те колоне пресек j-те врсте и i-те колоне може имати било коју вредност (0 или 1). Ако претпоставимо да је број не-нула елемената квадратне шеме $(i > j)$ једнак k, тада је број одговарајућих антисиметричних релација $\binom{\frac{n^2-n}{2}}{k} 2^{\frac{n^2-n}{2}-k}$, док је њихов укупан број

$$\sum_{k=0}^{\frac{n^2-n}{2}} \binom{\frac{n^2-n}{2}}{k} 2^{\frac{n^2-n}{2}-k} = 3^{\frac{n^2-n}{2}}.$$

Наравно, на главној дијагонали (n места) вредност елемената може бити произвољна, па је тражени одговор $2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$.

б) Број релација које нису ни симетричне, ни антисиметричне једнак је (према принципу укључења - искључења) броју свих релација умањеном за број симетричних релација и за број антисиметричних релација, увећаном за број релација које су и симетричне и антисиметричне. Како су те вредности респективно једнаке 2^{n^2}, $2^{\frac{n^2+n}{2}}$, $2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ и 2^n (код релација које су и симетричне и антисиметричне у пресеку i-те врсте и j-те колоне налази се нула за $i \neq j$, док је вредност елемената на главној дијагонали произвољна), резултат је

$$2^{n^2} - 2^{\frac{n^2+n}{2}} - 2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}} + 2^n.$$

80. Нека је $R(n)$ број релација еквиваленције које се могу дефинисати у скупу од n елемената. Доказати да је

$$R(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} R(i),$$

за $n = 0, 1, 2, \dots$, где је $R(0) = 1$.

<u>Решење:</u> За $n = 0$ једнакост је тачна. За $n > 0$ уочимо у датом скупу од $n+1$ елемената произвољни елемент x. Нека се у класи еквиваленције елемента x налази још k $(k \in \{0, 1, \dots, n\})$ других елемената. Удаљимо елемент x из скупа. Добијамо скуп са n елемената у коме је дефинисана релација еквиваленције (рестрикција раније релације) чија једна класа еквиваленције има k елемената. Постоји $\binom{n}{k}$ начина да се изабере ових k елемената. У преосталом делу скупа, који садржи $n-k$ елемената, релација еквиваленције се може дефинисати на $R(n-k)$ начина. Зато је

$$R(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R(n-k),$$

чиме је тврђење задатка доказано.

81. Доказати да је

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}.$$

<u>Упутство:</u> Ако је A коначан скуп, $|A| = n$, пребројати све уређене парове (X, x), где је $X \subset A$ и $x \in X$.

82. Телефонска централа има n претплатника, а њена пропусна моћ (тј. максималан број истовремено успостављених веза између произвољна два различита претплатника) је m линија $(2m \le n)$. На колико је различитих начина могућно остварити максимално оптерећење централе?

<u>Решење:</u> Максимално оптерећивање централе, тј. заузеће свих m линија, може да оствари $2m$ претплатника и они се од n претплатника могу да одаберу на C_n^{2m} начина. Одредимо сада број могућности успостављања веза за одређени скуп који садржи $2m$ одабраних претплатника (који остварују максимално оптерећење централе). Скуп од $2m$ претплатника може да се уреди - нумерише - на P_{2m} начина, што даје укупан број начина успостављања веза. Међутим, редослед претплатника у оквиру једне везе није битан и то смањује број различитих начина успостављања веза 2^m пута. Коначно, нису од значаја ни редоследи остваривања веза, а њих има P_m. Према принципу производа тражени број начина је

$$C_n^{2m}\frac{P_{2m}}{2^m P_m} = \frac{n!}{2^m m!(n-2m)!}.$$

83. На колико је начина могућно поставити n мушкараца и n жена за

округли сто тако да никоје две жене не седе једна до друге?

84. Наћи број пермутација слова A, A, B, B, C, C, D и D таквих да:

а) бар два иста слова буду суседна;

б) два иста слова не буду суседна.

<u>Решење:</u> а) Са S_1 означимо скуп свих пермутација датих слова таквих да су два слова A суседна, и нека S_2, S_3 и S_4 означавају исто за слова B, C и D респективно. Тражени број тих пермутација једнак је

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4|.$$

На основу принципа укључења-искључења имамо:

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = \sum_{i=1}^{4}|S_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le 4}|S_{i_1}\cap S_{i_2}| +$$

$$+ \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 4}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap S_{i_3}| - |S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4|.$$

Израчунајмо сабирке:

$$|S_1| = |S_2| = |S_3| = |S_4| = \frac{7!}{(2!)^3};$$

$$|S_{i_1}\cap S_{i_2}| = \frac{6!}{(2!)^2},\ 1\le i_1<i_2\le 4;$$

$$|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap S_{i_3}| = \frac{5!}{2!},\ 1\le i_1<i_2<i_3\le 4;$$

$$|S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4| = 4!.$$

Дакле

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = \binom{4}{1}\frac{7!}{(2!)^3} - \binom{4}{2}\frac{6!}{(2!)^2} + \binom{4}{3}\frac{5!}{2!} - 4! = 1\,656.$$

б) Сада се ради о кардиналном броју скупа $|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\overline{S}_3\cap\overline{S}_4|$. Ако са S означимо скуп свих пермутација датих слова, тада је $|S| = \dfrac{8!}{(2!)^4}$, па је

$$|\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap \overline{S}_4| = |S| - |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| =$$

$$= \frac{8!}{(2!)^4} - \binom{4}{1}\frac{7!}{(2!)^3} + \binom{4}{2}\frac{6!}{(2!)^2} - \binom{4}{3}\frac{5!}{2!} + 4! = 864.$$

85. Колико решења има једначина

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \geq k$$

а) у скупу $\mathbb{N}_0^k$;

б) у скупу $\mathbb{N}^k$;

в) у скупу $\mathbb{Z}^k$, ако је $x_i > c_i$, где су c_i задати цели бројеви?

Решење: а) Проблем одређивања броја решења дате једначине истоветан је са проблемом поделе n објеката исте врсте на k прималаца (зад. 66.), што се може урадити на $\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{n}$ начина.

б) Увођењем смене $y_i = x_i - 1$ једначина постаје

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k \geq 0,$$

при чему су y_i из скупа $\mathbb{N}_0$. Број решења ове, па према томе и полазне једначине је $\binom{n-k+k-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$.

Напомена 1: Добијени резултат јесте број композиција броја n од k сабирака. Зашто?

Напомена 2: Упоредити задатак са зад. 67.

в) Увођењем смене $y_i = x_i - c_i$ једначина постаје

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - c_1 - c_2 - \dots - c_k,$$

при чему су y_i из скупа $\mathbb{N}$, па је број решења једначине

$$\binom{n-c_1-c_2-\dots-c_k-1}{k-1}.$$

86. Колико има природних бројева мањих од 10^n, $(n \in \mathbb{N})$, где је $n \geq 5$, чији је збир цифара једнак 5 ?

87. На полици се налази n томова енциклопедије. На колико је начина могућно међу њима изабрати r томова $\left(r \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ тако да избор не садржи узастопне томове?

Резултат: $\frac{(n-r+1)!}{r!(n-2r+1)!} = \binom{n-r+1}{r}$.

88. Колико m-тоуглова образују темена n-тоугла, ако су његове странице стриктно дијагонале (а не и странице) n-тоугла $\left(m \leq \frac{n}{2}\right)$?

Резултат: $\frac{n}{m}\binom{n-m-1}{m-1}$.

3. 2. ТЕОРИЈА ГРАФОВА

1. Нека је $X = \{1, \dots, 8\}$. Ако су x_1 и x_2 природни бројеви, нека $x_1 \rho x_2$ означава да су бројеви x_1 и x_2 узајамно прости. Нацртати граф (X, ρ).

2. Описати особине графова $G = (X, \rho)$, где је ρ релација еквиваленције у скупу X.

   Решење:
   - сваки чвор има петљу;
   - граф је неоријентисан;
   - компоненте повезаности су потпуни графови (одговарају класама еквиваленције).

3. Описати неоријентисане графове код којих је степен сваког чвора мањи од три.

4. Нека је X непразан скуп од n елемената. Нека је скуп свих подскупова скупа X скуп чворова графа G, при чему су два чвора спојена граном ако и само ако је пресек одговарајућих подскупова скупа X празан. Одредити број чворова и број грана у графу G.

   Решење: Број чворова је 2^n. Празан скуп спојен је са $2^n - 1$ скупом и сам са собом. Скуп од i елемената спојен је са себи дисјунктним подскуповима скупа X, а њих има 2^{n-i}, при чему је свака грана урачуната двапут. Значи, граф има:

- грана: $\frac{1}{2}\left(2^n - 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^i 2^{n-i} - 1\right) = \frac{1}{2}(3^n - 1)$;
- петљи: 1.

5. Нека је $X = \{1, 2, \dots, n\}$, а релација ρ дефинисана са

$$x \rho y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m}, \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Формиран је граф $G = (X, \rho)$. Одредити:

а) број чворова, број петљи и број компонената,

б) број грана

графа G.

Решење: Релација ρ је релација еквиваленције у скупу $\mathbb{Z}$ (видети зад. 31. из уводне главе), па и у скупу $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

а) - Број чворова је n;
- како је релација ρ рефлексивна, следује да је број петљи n;
- како је релација ρ симетрична, следује да је формирани граф неоријентисан;
- класе еквиваленције одређују компоненте графа и свака компонента је потпуни граф (јер је ρ релација еквиваленције). Постоји m класа еквиваленције, па за $n \geq m$ граф има m компоненти. За $n \leq m$ граф има n компоненти.

б) За $n \leq m$ граф осим петљи нема других грана.

За $n > m$ је $n = k \cdot m - r = \left[\frac{n}{m}\right] \cdot m + r, \ (0 \leq r < m)$.

У графу постоји r компонената са по $k+1$, тј. $\left[\frac{n}{m}\right] + 1$ чворова и $m - r$ компонената са по k, тј. $\left[\frac{n}{m}\right]$ чворова. Свака компонента је потпуни граф, а број грана у потпуном графу са t чворова је $\binom{t}{2}$). Према томе, број грана у графу G је

$$r \cdot \binom{\left[\frac{n}{m}\right] + 1}{2} + (m - r) \cdot \binom{\left[\frac{n}{m}\right]}{2},$$

што после сређивања ($r = n - \left[\frac{n}{m}\right] \cdot m$) даје:

$$\left(n - \left[\frac{n}{m}\right] \cdot m\right) \cdot \binom{\left[\frac{n}{m}\right] + 1}{2} + \left(m - n + \left[\frac{n}{m}\right] \cdot m\right) \cdot \binom{\left[\frac{n}{m}\right]}{2}.$$

6. Нека граф $G = (X, U)$ има n чворова и m грана. Одредити број подграфова и број делимичних графова датог графа. Ако је G потпун граф, одредити број делимичних подграфова таквог графа.

Решење: Означимо са $H = (Y, T)$ подграф датог графа G. Тада је $Y \subset X$ $(Y \neq \varnothing)$, дакле број подграфова датог графа једнак је броју подскупова скупа X различитих од празног скупа, значи $2^n - 1$.

Ако је $H = (X, T)$ делимични граф датог графа G, тада је $T \subset U$, те је број делимичних графова једнак броју подскупова скупа U, дакле 2^m.

Ако уочимо један подграф потпуног графа G са k $(1 \leq k \leq n)$ чворова, таквих подграфова имамо $\binom{n}{k}$. Сваки такав подграф има $\binom{k}{2}$ грана. Број делимичних графова тако уоченог подграфа је $2^{\binom{k}{2}}$, што значи да је број делимичних подграфова са k чворова датог графа

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{k}{2}},$$

$(1 \leq k \leq n)$, а укупан број је

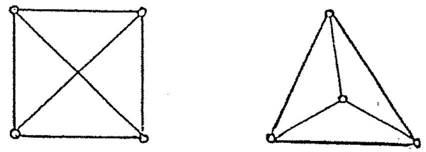
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{\binom{k}{2}}$$

7. Нацртати све међусобно неизоморфне, повезане, неоријентисане

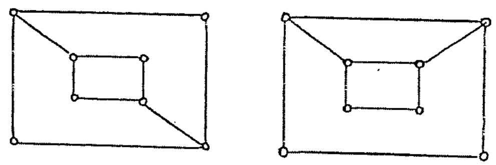
графове без петљи са највише 4 чвора.

8. Да ли су следећи графови изоморфни?

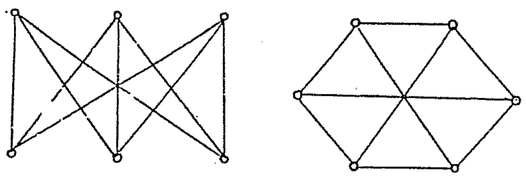
а)



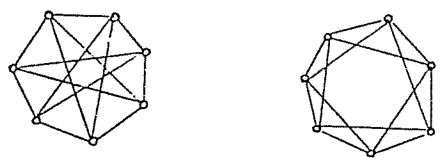
б)



в)



г)



9. Да ли постоји неоријентисан граф у коме свака два чвора имају различите степене?

Решење: Ако је граф неповезан, може се сматрати да је унија одговарајућих повезаних подграфова. Посматрајмо зато само повезане графове. Ако бисмо нумерисали чворове, тада би први чвор могао бити максимално степена $n-1$, други чвор максимално степена $n-2$, ..., i-ти чвор био би максимално степена

$n-i$, а n-ти чвор (максимално) степена 0; то би значило да је тај чвор изолован, па граф не би био повезан, што је супротно претпоставци да такав граф постоји. Дакле, не постоји граф у коме свака два чвора имају различите степене.

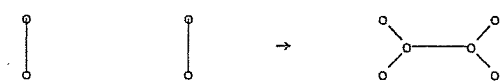
10. Да ли постоје регуларни графови непарног степена са непарним бројем чворова?

Решење: Број грана у регуларном графу степена r са n чворова је $m = \frac{1}{2} rn$. Очигледно је да бројеви n и r не могу истовремено бити непарни јер тада m не би био цео број, што значи да регуларан граф непарног степена са непарним бројем чворова не постоји.

11. Седам пријатеља који одлазе на одмор договоре се да ће сваки од њих да се јави разгледницом тројици од осталих шест. Да ли се ово може урадити тако да свако пише оним пријатељима који ће и њему писати?

12. Показати да је могућно конструисати регуларан граф степена 3 са парним бројем чворова не мањим од 6 који нема подграфова облика троугла.

Решење: Доказ ће бити спроведен применом принципа математичке индукције. За $n = 3$ постоји граф са $2n$ чворова датих особина (то је граф $K_{3,3}$). Нека за неко $n = k$ постоји регуларан граф са $2k$ чворова који нема троуглова. Уочимо две несуседне гране и одговарајуће чворове и овај делимични подграф заменимо оним



са слике. Нови граф садржи $2k+2$ чвора, а не садржи троуглове; степен уочених чворова није се променио (3), а степен нових чворова такође је 3, па је нови граф *регуларан*, што значи да је тврђење тачно и за $n=k+1$. Дакле, за било који број $n \geq 3$ могућно је конструисати регуларан граф степена 3 са парним ($2n$) бројем чворова без троуглова.

13. Доказати да највећи број грана графа са $2k$ чворова и без троуглова износи k^2.

Упутство: Применити принцип математичке индукције.

14. Наћи пример графа са $2k$ чворова који не садржи троуглове и има тачно k^2 грана.

Резулатат: Граф $K_{k,k}$ испуњава услов задатка.

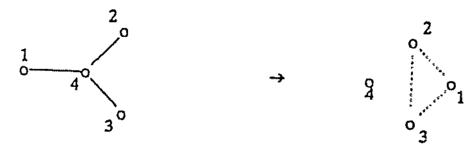
15. Доказати да је најмањи број чворова регуларног графа степена 3 са мостом једнак 10.

16. Доказати да регуларан граф степена 3 има мост ако и само ако има артикулациони чвор.

17. Нека је G неоријентисан граф који садржи 6 чворова. Доказати да бар један од графова G и $\overline{G}$ садржи троугао.

Решење: У бар једном од графова G и $\overline{G}$ постоји чвор степена бар 3 (уколико у неком од њих не би постојао такав чвор, тј. ако би степен сваког чвора био највише 2, тада би у комплементарном графу такав чвор био степена бар 3). Уколико у графу

G нема троуглова, могућно је уочити подграф као на слици, па



се у комплементарном графу појављује троугао. Значи, бар један од графова G и $\overline{G}$ садржи троугао, а то је и требало доказати.

18. На неком међународном скупу састало се шест делегата. Показало се да међу произвољна три од њих увек постоје два који могу да се споразумеју на неком језику. Доказати да тада постоји тројка делегата унутар које је између свака два делегата могућно споразумевање.

Упутство: Видети претходни задатак.

19. Нека су x и y произвољни чворови повезаног неоријентисаног графа G. Показати да постоји пут од x до y који садржи све чворове графа G.

20. Нека је G неоријентисан граф без петљи са n чворова и нека најмањи степен чвора у графу G није мањи од $\frac{n-1}{2}$. Доказати да је тада граф G повезан.

Решење: Претпоставимо супротно, тј. да је граф G неповезан и докажимо да тада у графу G постоји бар један чвор чији је степен мањи од $\frac{n-1}{2}$. Ако је G неповезан, у њему постоји бар једна компонента повезаности која нема више од $\frac{1}{2}n$ чворова, па њени чворови имају степен највише $\frac{n}{2}-1<\frac{n-1}{2}$, чиме је доказ завршен.

21. Ако је у неоријентисаном графу са n чворова број грана m већи од $\binom{n-1}{2}$, доказати да је граф повезан.

<u>Решење:</u> Доказ ћемо спровести свођењем на апсурд. Нека такав граф није повезан. Тада он има бар две компоненте повезаности. Нека оне имају k, односно $n-k$ чворова. Максималан број њихових грана је $\binom{k}{2}$, односно $\binom{n-k}{2}$. То значи да је број грана m у полазном графу

$$m \le \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = k^2 + \frac{n^2}{2} - nk - \frac{n}{2} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + k^2 - nk + n - 1 \le \binom{n-1}{2},$$

што је испуњено за

$$k^2 - nk + n - 1 \le 0,$$

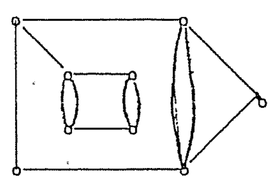
а то важи када $k \in \{1, 2, \dots n-1\}$. То значи да не може постојати више међусобно неповезаних целина, тј. да је граф *повезан*, што је и требало доказати.

22. Ако неоријентисан граф G има n чворова и c компоненти повезаности, доказати да G може да има максимално

$$m = \frac{1}{2}(n-c)(n-c+1)$$

грана.

23. Да ли се гране графа на слици могу оријентисати тако да се добије јако повезан диграф?



24. Одредити све регуларне графове степена 2 чији комплементи нису повезани.

25. Испитати да ли постоје неповезани самокомплементарни графови.

26. Наћи све самокомплементарне графове који садрже 4 чвора.

<u>Решење:</u> Пошто збир грана у графу са 4 чвора и његовом комплементу износи $\binom{4}{2} = 6$, самокомплементаран граф има 3 гране. Постоје три (међусобно неизоморфна) графа са 4 чвора и 3 гране и лако се проверава да је самокомплементаран само граф на слици

27. Доказати да самокомплементаран граф има $4k$ или $4k+1$ чворова, где је $k \in \mathbb{N}$.

28. Одредити максималну и минималну вредност максималног и минималног степена чвора у стаблу са n чворова.

29. Доказати да је неоријентисан граф G са n чворова стабло ако и само ако је

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2 \quad (d_i \in \mathbb{N}),$$

где су d_i степени чворова графа G, $(i = 1, 2, \dots, n)$.

<u>Решење:</u> Услов је очигледно потребан јер је у стаблу

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m = 2(n-1),$$

где је m број грана. Докажимо да је услов и довољан, тј. да под датим условом постоји стабло чији су степени чворова d_1, $d_2, \dots, d_n$ $(d_i \in \mathbb{N})$. Доказ ћемо спровести математичком индукцијом по броју чворова.

За $n = 2$ је $d_1 = d_2 = 1$ и такво стабло постоји. Претпоставимо да је тврђење тачно за било који низ степена $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$, $(e_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, \dots, n-1)$ такав да је њихов збир једнак $2n-4$, тј. да увек постоји стабло са степенима чворова $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Посматрајмо сада низ $d_1, d_2, \dots, d_n$ са збиром једнаким $2n-2$. Међу овим бројевима је бар један једнак 1, рецимо d_1, и (како је $n \geq 3$) бар један већи од 1, рецимо d_2. Сада за низ $d_2 - 1$, d_3, ..., d_n по индуктивној претпоставци постоји стабло са одговарајућим степенима чворова. Ако се то стабло прошири једним чвором и он повеже граном са чвором степена $d_2 - 1$, добија се стабло са n чворова и степенима чворова $d_1, d_2, \dots, d_n$, чиме је доказ завршен.

30. Ако је G_n неоријентисан граф без петљи са n чворова у коме су свака два чвора повезани једним и само једним елементарним путем, доказати да граф G_n садржи $n-1$ грану.

<u>Решење:</u> Доказ ће бити спроведен применом принципа математичке индукције. За $n = 1$ и $n = 2$ тврђење је очигледно испуњено. Нека је за све $k \leq n$ претпоставка тачна. Посматрајмо граф G_{n+1}. Уочимо неку његову грану. Ако бисмо је одстранили, добили бисмо као делимичан граф неповезан граф (јер између чворова који су инцидентни са одстрањеном граном не постоји пут) чије компоненте повезаности имају k и $n+1-k$ чворова, тј. по индуктивној претпоставци $k-1$ и $n+1-k-1$ грану, па граф G_{n+1} има $k-1+n+1-k-1+1 = n = (n+1)-1$ грану. То значи да за свако $n \geq 2$ граф G_n има $n-1$ грану, што је и требало доказати.

31. Ако је неоријентисан граф G повезан и не садржи ниједну контуру, доказати да су било која два чвора у графу G спојена јединственим елементарним путем.

32. Ако је G повезан неоријентисан граф са n чворова и $m = n-1$ грана, доказати да граф G не садржи ниједну контуру.

33. Ако неоријентисан граф G са n чворова и m грана не садржи ниједну контуру и ако је $n = m+1$, доказати да после додавања једне нове гране између произвољна два чвора настали граф садржи тачно једну контуру.

34. Доказати да сваки повезан неоријентисан граф садржи као делимичан граф стабло. Одредити број таквих стабала у потпуном графу са 4 чвора.

<u>Резултат:</u> 16.

35. Нека је G неоријентисан граф који садржи n чворова степена 4 и $2n+2$ чвора степена 1. Ако је G повезан граф, доказати да граф G не садржи ниједну контуру.

<u>Решење:</u> Овај граф састоји се од $N = n + 2n + 2 = 3n + 2$ чвора и $M = \frac{1}{2}(4n + 2n + 2) = 2n + n + 1 = 3n + 1$ гране. Како је G повезан граф који има $M = N - 1$ грану, то је G стабло, па *нема контура*.

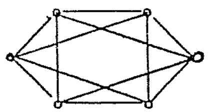
36. Дато је стабло са p чворова степена један и q чворова степена већег од два. Доказати да је

$$p \geq q + 2.$$

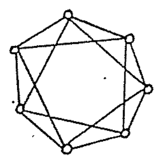
Када важи знак једнакости?

37. Да ли су следећи графови планарни?

а)



б)



38. Повезан планаран граф са n чворова и m грана дели раван на

$$f = m - n + 2$$

области. Доказати.

Решење: Доказ ће бити спроведен применом принципа математичке индукције по броју грана m. Минималан број грана које садржи повезан граф од n чворова је $m = n - 1$ (стабло), и у том случају је $f = 1 = m - n + 2$. Нека је G граф са m грана и нека је f број области тог графа $(m > n - 1)$. То значи да граф садржи бар једну контуру. Нека тврђење важи за графове са $m - 1$ граном. Посматрајмо грану која је гранична за две области. Ако бисмо је одстранили, добијени делимични граф G_1 имао би $m - 1$ грану и $f - 1$ област, јер се и број грана и број области смањио за један. По претпоставци је за граф G_1

$$f - 1 = (m - 1) - n + 2,$$

па је за граф G

$$f = m - n + 2,$$

што је и требало доказати.

Напомена: Доказани став представља Euler-ову теорему за планарне графове.

39. Одредити максималан број грана у планарном графу са n чворова.

Решење: Према Euler-овој теореми за повезане планарне графове је

$$f = m - n + 2 .$$

Како је минимална контура у графу са $n > 2$ чворова троугао, то је

$$2\,m \geq 3\,f ,$$

или, после сређивања,

$$m \leq 3n - 6 .$$

У случају када је $n < 3$ провером се добија да је $m \leq n - 1$. Дакле

$$m_{\max} = \begin{cases} 3n - 6 , & n \geq 3 \\ n - 1 , & n < 3. \end{cases}$$

Напомена: У случају неповезаног графа број грана је мањи од добијеног. Проверити.

40. Одредити максималан број грана у планарном графу са n чворова који не садржи ни један троугао.

41. Нека је G неоријентисани граф са n чворова и m грана у коме најкраћа контура има дужину g. Уколико је испуњена неједнакост

$$m > \frac{g(n-2)}{g-2},$$

доказати да граф G не може бити планаран.

Решење: Уколико би граф G био планаран, према Euler-овој теореми било би $f = m - n + 2$. Како је $2m \geq gf$, то је

$$2m \geq gm - gn + 2g \Leftrightarrow m(g-2) \leq gn - 2g \Leftrightarrow m \leq \frac{g(n-2)}{g-2},$$

што је у супротности са условом. Дакле, граф G задатих особина *не може бити планаран*, што је и требало доказати.

42. Доказати да следећи графови нису планарни:

а) K_5; б) $K_{3,3}$;

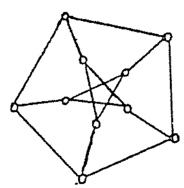
Решење: а) Граф K_5 има $n = 5$ чворова и $m = 10$ грана. Уколико би граф био планаран, важила би Euler-ова теорема, па би било $f = 7$. Али тада би морао да буде испуњен услов да је $2m = 20 \geq 21 = 3f$, што очигледно није тачно, па граф K_5 није планаран.

б) Сада је $n = 6$ и $m = 9$. Ако би граф био планаран, важила би Euler-ова теорема, па би било $f = 5$. Али тада би морао да буде испуњен услов да је $2m = 18 \geq 20 = 4f$ (јер граф нема троуглова), па граф $K_{3,3}$ није планаран.

43. Доказати да је бикомлетан граф $K_{r,s}$ планаран ако и само ако је

$$\min\{r, s\} \leq 2.$$

44. Испитати да ли је Petersen-ов граф (са слике) планаран.



Решење: У Petersen-овом графу је $n = 10$ и $m = 15$. Уколико би граф био планаран, важила би Euler-ова теорема, па би било $f = 7$. Али тада би морао да буде испуњен услов да је $2m = 30 \geq$ $\geq 35 = 5f$, што очигледно није тачно, па Petersen-ов граф није планаран.

45. Испитати да ли је граф образован од темена, ивица и једне (просторне) дијагонале октаедра планаран.

46. Повезан планаран регуларан граф степена 3 нацртан је у равни без пресецања грана, при чему је за свако фиксно i број ћелија ограничених са i грана једнак r_i. Доказати да је

$$\sum_i (6 - i) r_i = 12.$$

Решење: Пошто се ради о регуларном графу степена три, биће $2m = 3n$, а из услова задатка је

$$f = \sum_i r_i,$$

као и

$$2m = \sum_i i r_i,$$

где су m и n редом број грана и чворова графа, а f број области на које граф дели раван. Према Euler-овој теореми је

$$f = m - n + 2$$

и заменом претходних израза у овој једнакости добија се тражена веза.

47. Доказати да у планарном графу постоји бар један чвор степена мањег од шест.

Решење: Претпоставимо да такав чвор не постоји. То би значило да је за све чворове у графу степен $d_i \geq 6$. Тада је

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq 6n,$$

или $m \geq 3n$, што није могућно (видети зад. 39.). То значи да претпоставка није добра, тј. у графу *постоји* чвор степена мањег од шест, што је и требало доказати.

48. Доказати да сваки планаран граф са више од три чвора има бар четири чвора степена који је мањи или једнак пет.

Решење: Додавањем гране између два несуседна чвора графа не смањује се степен тих чворова. Стога можемо посматрати планаран граф са максималним бројем грана, тј. са $3n-6$ грана, где је n број чворова графа. Приметимо још да је у једном таквом графу степен сваког чвора већи од два. Тада имамо

$$2(3n-6)=\sum_{i=1}^{n} d_i \geq (n-k)6+3k,$$

где су са d_i, $i=1,2,\dots,n$ означени степени чворова, а k је број чворова степена мањег од 6. Из последње неједнакости непосредно произлази да је $k \geq 4$, што је и требало доказати.

49. Доказати да је аритметичка средина степена чворова неоријентисаног планарног графа мања од 6.

<u>Решење:</u> Аритметичка средина (средња вредност) степена чворова графова са n чворова и m грана биће

$$\overline{d}=\frac{\sum_i d_i}{n}=\frac{2m}{n}.$$

Како је у планарном графу $m \leq 3n-6$, добија се

$$\overline{d} \leq \frac{6n-12}{n}=6-\frac{12}{n}<6,$$

што је и требало доказати.

50. Ако сви чворови планарног неоријентисаног графа G имају степене бар 5, доказати да граф G има најмање 12 чворова степена 5.

51. Посматрајмо коначне повезане неоријентисане планарне графове који су регуларни (степена r) и имају особину да су све ћелије графа ограничене контурама исте дужине g. Одредити све допустиве вредности парова (r,g) и нацртати одговарајуће парове.

<u>Решење:</u> Нека је, као и обично, n број чворова, m број грана,

а f број ћелија посматраног планарног графа. Очигледно је

$$2m=nr=fg.$$

Из ових двеју једнакости и Euler-ове теореме

$$f=m-n+2,$$

елиминацијом величина m и f, добијамо

$$n=\frac{4g}{2(r+g)-rg}=\frac{4g}{2r-g(r-2)}. \qquad (1)$$

Одмах се види да се за $r=2$ добија $n=g$, тј. једна контура произвољне дужине. Претпоставимо зато $r>2$ (уз очигледно $g>2$). Приметимо, пре свега, да је именилац разломка (1) израз симетричан по r и g и да је он једнак нули када се за уређен пар (r,g) узме $(3,6)$, $(6,3)$ или $(4,4)$, као и да постаје негативан када се у било коме од ових парова нека компонента повећа (јер производ расте брже од двоструког збира). Зато тражене допуштене парове можемо наћи само у распону између почетног случаја $(3,3)$ и поменутих горњих ограничења. Добијамо следећих пет случајева:

1° $r=3, g=3$ $(n=4)$;
2° $r=3, g=4$ $(n=8)$;
3° $r=4, g=3$ $(n=6)$;
4° $r=3, g=5$ $(n=20)$;
5° $r=5, g=3$ $(n=12)$.

Цртање ових пет графова препушта се читаоцу.

<u>Напомена 1:</u> Ови графови јесу у ствари тзв. *тополошки правилни полиедри* или Платонова тела: тетраедар, хексаедар, октаедар, икосаедар и додекаедар (редом којим су набројани у решењу), па се на основу овога уједно можемо уверити да се сви они могу представити у равни као планарни графови.

<u>Напомена 2:</u> Испитати какав смисао има и до каквог закључка доводи гранични случај када је именилац разломка (1) једнак нули.

52. Доказати да је потребан услов да неоријентисан граф G и његов

комплемент $\overline{G}$ буду планарни дат са $n^2 - 13n + 24 \le 0$, где је $n \ge 3$ број чворова ових графова.

Решење: Укупан број грана у неком графу и у њему комплементарном графу је $\binom{n}{2}$. Да би оба графа била планарна, мора бити $\binom{n}{2} \le 2\cdot(3n-6)$ за $n \ge 3$, или

$$n^2 - 13n + 24 \le 0\,,$$

што је и требало доказати.

Напомена: Планаран граф са особином да је и њему комплементаран граф планаран назива се *копланарним*.

53. Нека је G неоријентисан граф са n чворова и $\overline{G}$ његов комплемент. Уколико је $n \ge 11$, доказати да бар један од ова два графа није планаран.

54. Одредити највећи број мостова у графу са $n \ge 2$ чворова.

55. Ако су $d_1^+, d_2^+, \dots, d_n^+$ излазни степени чворова потпуног оријентисаног графа са n чворова, одредити број оријентисаних троуглова у том графу.

Решење: Код оријентисаних троуглова из сваког чвора излази и у сваки чвор улази по једна грана, а код осталих (неоријентисаних) троуглова постоји један овакав чвор, док из једног чвора обе гране излазе и у један обе гране улазе.

Број оријентисаних троуглова одредићемо као разлику броја свих троуглова (у потпуном графу то је $\binom{n}{3}$) и броја неоријентисаних троуглова. Ових последњих, на основу датог описа, има колико и парова грана са заједничким почетним чвором. Значи, тражени број t је:

$$t = \binom{n}{3} - \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i^+}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (d_i^+)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^+ \,.$$

Како је последња сума једнака броју грана, тј. $\binom{n}{2}$, после сређивања израза добија се:

$$t = \frac{1}{12} n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (d_i^+)^2.$$

56. Нека је G регуларан граф степена r са n чворова, без троуглова, такав да између било која два несуседна чвора постоје тачно два пута дужине два. Доказати да је тада

$$n = \frac{1}{2}(r^2 + r + 2).$$

Решење: Број парова суседних чворова у графу једнак је броју грана, тј. $m = \frac{nr}{2}$, па је број парова несуседних чворова једнак:

$$\binom{n}{2} - m = \frac{n}{2}(n - r - 1).$$

Посматрајмо сада једну грану xy која спаја чворове x и y. Како су сви чворови степена r, ова грана учествује у $r-1$ путева дужине 2 који спајају чвор x са $r-1$ чворова суседних са y и различитих од x и, takође, у $r-1$ путева који спајају y са чворовима суседним чвору x и различитим од y. Како граф нема троуглова, ово су све путеви дужине 2 који спајају несуседне чворове и свака грана, према томе, учествује у $2r-2$ таква пута. Како, међутим, између свака два несуседна чвора постоје два пута дужине 2, тј. 4 гране, биће:

$$(2r-2)m = (r-1)nr = 4\cdot\frac{n}{2}(n-r-1),$$

из чега следује

$$n = \frac{1}{2}(r^2 + r + 2),$$

што је и требало доказати.

Напомена: Доказана релација представља потребан услов за постојање описаног графа. Испитати случајеве $r = 2, 3, 4$.

57. Нека је G потпуни неоријентисани граф са n чворова. Колико у њему постоји елементарних путева дужине k? Ако је b_k тражени број путева, израчунати збир $S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{(k+1)!}$.

58. На колико је начина могућно у потпуном графу са $2n$ чворова одабрати n међусобно несуседних грана?

<u>Резултат:</u> $(2n-1)!!$.

<u>Напомена:</u> Погледати зад. 82. из главе 3.1.

59. Одредити број контура садржаних у потпуном неоријентисаном графу без петљи са n чворова.

<u>Решење:</u> У графу од n чворова k чворова се може одабрати на $\binom{n}{k}$ начина, а k чворова може оформити $\frac{(k-1)!}{2}$ разних контура. Дакле, решење је $\frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} \frac{n!}{k(n-k)!}$, јер контуру чине бар три чвора.

ГЛАВА 4.

ОПШТА АЛГЕБРА

4. 1. АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ СА ЈЕДНОМ ОПЕРАЦИЈОМ

1. Дати су скупови

$$A = \{x : x = 2^n,\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$B = \{x : x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$C = \{x : x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Који су од ових скупова затворени у односу на

а) сабирање;

б) одузимање;

в) множење?

2. Операција $\odot$ дефинисана је на следећи начин:

$$\odot = \{((x, y), z) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge z = xy - 1\}.$$

Испитати да ли је структура:

а) $(\mathbb{N}, \odot)$,

б) $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \odot)$

групоид.

Резултат: а) Није; б) јесте.

3. Нека је G непразан скуп и нека је операција $\cdot$ дефинисана са

$$(\forall x, y \in G)\ x \cdot y = y.$$

Доказати:

а) $(G, \cdot)$ је семигрупа;

б) сваки елемент скупа G је леви неутрални (јединични) елемент;

в) сваки елемент скупа G је идемпотентан;

г) сваки елемент скупа G је пермутабилан једино сам са собом.

Решење: а) Из $x \cdot y = y \in G$ следује да је $(G, \cdot)$ групоид; такође је $(x \cdot y) \cdot z = y \cdot z = z \quad \wedge \quad x \cdot (y \cdot z) = x \cdot z = z \quad \Rightarrow$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, па важи асоцијативност. Дакле, структура $(G, \cdot)$ јесте семигрупа.

в) Идемпотентност је испуњена јер је $x \cdot x = x$.

г) Из $x \cdot y = y \cdot x$ следује $y = x$, што се и тврдило.

4. На скупу $\mathcal{P}(X)$ подскупова скупа X дата је операција унија $\cup$. Показати да је она унутрашња, асоцијативна, комутативна и да има неутрални елемент. Показати исто за операцију пресек $\cap$.

5. На скупу рационалних бројева проучити законе операције $\circ$ дефинисане релацијом

а) $x \circ y = x + 2y$; б) $x \circ y = \dfrac{x+y}{1-xy}$.

Решење: Посматрајмо следеће особине:

1) $(\forall x, y \in \mathbb{Q})\ x \circ y \in \mathbb{Q}$ (затвореност);

2) $(\forall x, y, z \in \mathbb{Q})\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (асоцијативност);

3) $(\exists e \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{Q})\ x \circ e = e \circ x = x$ (постојање неутралног елемента);

4) $(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists x' \in \mathbb{Q})\ x \circ x' = x' \circ x = e$ (постојање инверзних елемената);

5) $(\forall x, y \in \mathbb{Q})\ x \circ y = y \circ x$ (комутативност).

а) 1) Нека су x и y рационални бројеви. Тада је $x + 2y$ рационалан број, јер је скуп $\mathbb{Q}$ затворен у односу на сабирање и множење.

2) Операција $\circ$ није асоцијативна, јер у општем случају
$$(x \circ y) \circ z \neq x \circ (y \circ z).$$
Наиме,
$$(x \circ y) \circ z = (x + 2y) + 2z,$$
док је
$$x \circ (y \circ z) = x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z.$$

3) Из $x \circ e = x + 2e = x$ следује $e = 0 \in \mathbb{Q}$. Међутим, из
$$e \circ x = e + 2x = x$$
следује да леви неутрални елемент не постоји. Дакле, $e = 0$ је само *десни* неутрални елемент.

4) Пошто не постоји неутрални елемент, нема смисла испитивати егзистенцију инверзних елемената.

5) У општем случају је $x \circ y$ различито од $y \circ x$, па операција није комутативна.

6. У скупу $\mathbb{R}$ дефинисана је бинарна операција $\cdot$ са:
$$a \cdot b = 1 - (a + b) + 2ab.$$

а) Да ли је операција $\cdot$ асоцијативна?

б) Да ли је операција $\cdot$ комутативна?

в) Да ли операција $\cdot$ има неутрални елемент?

г) Ако је претходни одговор потврдан, одредити скуп инвертибилних елемената.

7. У скупу позитивних рационалних бројева $\mathbb{Q}^+$ дефинисана је операција $\cdot$ са
$$a \cdot b = \frac{ab}{a+b}.$$
Показати да је $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ комутативна семигрупа.

8. Испитати особине операције $\cdot$ у скупу A и издвојити елементе са посебним особинама ако је:

а) $A = \mathbb{N}$, $a \cdot b = a^b$;

б) $A = \mathbb{N}_0$, $a \cdot b = (a - b)^2$;

в) $A = \mathbb{N}_0$, $a \cdot b = \min\{a, b\}$;

г) $A = \mathbb{Q}$, $a \cdot b = \dfrac{2a+b}{3}$;

д) $A = \mathbb{R}^+$, $a \cdot b = \sqrt{ab}$.

9. У скупу свих уређених парова (x, y) реалних бројева операција $\circ$ дефинисана је изразом
$$(x, y) \circ (u, v) = (x, v).$$
Испитати особине ове операције.

10. Да ли на скупу $\mathbb{N}$ могу да се дефинишу две бинарне операције $\cdot$ и $*$ тако да су оне обе некомутативне и неасоцијативне, и да $\cdot$ има леви, а $*$ десни јединични елемент?

Резултат: Могу: нпр. $x \cdot y = y^x$ и $x * y = x^y$ $(x, y \in \mathbb{N})$.

11. Нека је $(S, \cdot)$ коначна семигрупа. Нека је $e \in S$ леви неутрални елемент, а a и t елементи скупа S за које важи $t \cdot a = e$. Доказати да свака једначина облика $a \cdot x = b$, где је b произвољан фиксан елемент скупа S, има јединствено решење у скупу S.

12. Испитати природу следећих алгебарских структура:
а) скуп позитивних рационалних бројева $\mathbb{Q}^+$ у односу на дељење;
б) $\mathbb{R}^+$ у односу на операцију $a*b = a^2b^2$.

13. Нека је дат скуп $A = \{a, b, c\}$. На колико се начина може допунити следећа таблица операције $\cdot$

$\cdot$	a	b	c
a	c	b	a
b	.	.	b
c	a	.	.

тако да $(A, \cdot)$ буде моноид?

Решење: Из таблице се види да неутрални елемент моноида мора бити c, па зато она добија следећи облик

$\cdot$	a	b	c
a	c	b	a
b	.	.	b
c	a	b	c

и још треба одредити $b \cdot a$ и $b \cdot b$ тако да операција $\cdot$ буде асоцијативна. Значи, за $\overline{V}_3^3 = 27$ уређених тројки (x, y, z), где $x, y, z \in A$, мора да важи $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Јасно је да је, без обзира на елемент $b \cdot a$ и $b \cdot b$, асоцијативност задовољена за оне (x, y, z) у којима је бар једна координата једнака неутралном елементу c. За $(x, y, z) \in \{(a, b, a), (b, a, a)\}$ асоцијативност зависи директно од резултата $b \cdot a$. Непосредно се проверава да је једина могућност да је $b \cdot a = b$. За

$$(x, y, z) \in \{(b, b, b), (a, b, b), (b, b, a), (b, a, b)\},$$

имајући у виду $b \cdot a = b$, асоцијативност зависи од резултата $b \cdot b$, па се директном провером утврђује да мора бити $b \cdot b = b$. Дакле, таблица се може допунити само на један начин и то је:

$\cdot$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

.

14. Саставити таблицу операције $\cdot$ за семигрупу која садржи елементе a и b ако се зна да је $a \cdot a = a \cdot b \cdot a = a$ и $b \cdot b = b \cdot a \cdot b = b$.

Резултат:

1°

$\cdot$	a	b
a	a	a
b	b	b

2°

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	a	b

15. Испитати да ли се у сваком скупу може дефинисати бинарна операција $*$ која је неасоцијативна.

Решење: *i)* Ако је $|X| = 1$, тј. $X = \{a\}$, онда је $a * a = a$, па је операција $*$ асоцијативна;

ii) Нека је сада $X = \{a, b, \ldots\}$; дефинишимо операцију $*$ на следећи начин:

$*$	a	b	...
a	b	b	...
b	a	a	...
⋮	⋮	⋮	

Тада је $(a * a) * a \neq a * (a * a)$. Значи, одговор је потврдан са изузетком случаја $|X| = 1$.

16. У скупу $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ бинарна операција $\cdot$ дефинисана је помоћу таблице

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	1	1	3
3	3	4	5	1	1
4	4	1	1	2	3
5	5	1	1	5	3

а) Да ли групоид $(G, \cdot)$ има јединични елемент?

б) За елемент 2 одредити леве и десне инверзне елементе.

в) Да ли је операција $\cdot$ асоцијативна?

17. Доказати да у групоиду $(G, \cdot)$ са јединичним елементом e важи закон

$$(\forall x, y, z, u)\ (x \cdot y) \cdot (u \cdot z) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot z)$$

ако и само ако важе закони

$$(\forall x, y, z)\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

и

$$(\forall x, y)\ x \cdot y = y \cdot x .$$

<u>Решење:</u> Покажимо да из првог следују друга два закона. Заиста:

$$(\forall x, y, z \in G)\ (x \cdot y) \cdot (e \cdot z) = (x \cdot e) \cdot (y \cdot z) \ \Rightarrow\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \text{(асоцијативност);}$$

$$(e \cdot x) \cdot (y \cdot e) = (e \cdot y) \cdot (x \cdot e) \ \Rightarrow\ x \cdot y = y \cdot x \quad \text{(комутативност).}$$

Да је први закон и потребан услов за друга два закључујемо на основу следећег низа једнакости

$$(x \cdot y) \cdot (u \cdot z) = ((x \cdot y) \cdot u) \cdot z = (x \cdot (y \cdot u)) \cdot z = (x \cdot (u \cdot y)) \cdot z =$$
$$= ((x \cdot u) \cdot y) \cdot z = (x \cdot u) \cdot (y \cdot z).$$

18. Ако у групоиду $(G, \cdot)$ са левим јединичним елементом e' важи:

$$(\forall x, y, z \in G)\ (x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y,$$

доказати да је $(G, \cdot)$ комутативна семигрупа са јединичним елементом.

<u>Решење:</u> Уколико се узме да је $x = e'$, добија се

$$(\forall y, z \in G)\ (e' \cdot y) \cdot z = (e' \cdot z) \cdot y \ \Rightarrow\ (\forall y, z \in G)\ y \cdot z = z \cdot y,$$

тј. комутативност; међутим, сада такође важи

$$(x \cdot y) \cdot z = (y \cdot x) \cdot z = (y \cdot z) \cdot x = x \cdot (y \cdot z),$$

тј. испуњена је и асоцијативност, па је $(G, \cdot)$ комутативна семигрупа; егзистенција јединичног елемента следује из доказане комутативности:

$$(\forall x \in G)\ x \cdot e' = e' \cdot x = x.$$

Дакле, $(G, \cdot)$ је комутативна семигрупа са јединичним елементом.

19. Доказати да у свакој семигрупи $(G, \cdot)$ важи

а) $(\forall x \in G)\ (\forall m, n \in \mathbb{N})\ x^m \cdot x^n = x^{m+n}$,

б) $(\forall x \in G)\ (\forall m, n \in \mathbb{N})\ (x^m)^n = x^{mn}$,

где је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева.

<u>Решење:</u> а) Доказ ћемо извести математичком индукцијом по n. Нека је x произвољан елемент скупа G, а m произвољан елемент скупа $\mathbb{N}$. За $n = 1$ заиста је $x^m \cdot x^1 = x^{m+1}$ (по дефиницији степена). Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$, тј. $x^m \cdot x^k = x^{m+k}$, и докажимо да важи за $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^{k+1} &= x^m \cdot (x^k \cdot x) && \text{(по дефиницији степена)} \\ &= (x^m \cdot x^k) \cdot x && \text{(због асоцијативности)} \\ &= x^{m+k} \cdot x && \text{(по индукцијској хипотези)} \\ &= x^{(m+k)+1} && \text{(по дефиницији степена)} \\ &= x^{m+(k+1)} && \text{(због асоцијативности сабирања у } \mathbb{N}\text{).} \end{aligned}$$

Овим је тврђење доказано.

б) Доказ поново изводимо индукцијом. Нека је x произвољан елемент скупа G, а m произвољан елемент скупа $\mathbb{N}$.

За $n = 1$ је $(x^m)^1 = x^{m \cdot 1}$ због дефиниције степена $(y^1 = y)$ и особине множења у скупу $\mathbb{N}$ $(m \cdot 1 = m)$.

Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$, тј. $(x^m)^k = x^{m\cdot k}$, и докажимо да важи за $n = k+1$, тј. да је $(x^m)^{k+1} = x^{m\cdot(k+1)}$. Наиме:

$$\begin{aligned}(x^m)^{k+1} &= (x^m)^k \cdot x^m && \text{(по дефиницији степена)}\\ &= x^{mk}\cdot x^m && \text{(по индукцијској хипотези)}\\ &= x^{mk+m} && \text{(по претходно доказаном тврђењу а))}\\ &= (x^m)^{k+1} && \text{(због дистрибутивности у скупу } \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Овим је доказ завршен.

20. Доказати да у комутативној семигрупи $(G, \cdot)$ важи

$$(\forall x, y \in G)(\forall n \in \mathbb{N})\ (xy)^n = x^n y^n.$$

Решење: Доказ се изводи индукцијом по n. Нека су x и y произвољни елементи скупа G. За $n = 1$ заиста је $(xy)^1 = x^1y^1$ (по дефиницији степена). Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$, тј. $(xy)^k = x^k y^k$, и докажимо да важи за $n = k+1$:

$$\begin{aligned}(xy)^{k+1} &= (xy)^k\cdot(xy) && \text{(по дефиницији степена)}\\ &= (x^ky^k)(xy) && \text{(по индукцијској хипотези)}\\ &= (x^kx)(y^ky) && \text{(видети задатак 17.)}\\ &= x^{k+1}y^{k+1} && \text{(по дефиницији степена).}\end{aligned}$$

Дакле, тврђење важи за свако $n \in \mathbb{N}$.

21. Доказати следећа тврђења:

а) Ако је у семигрупи $(G, \cdot)$ елемент a пермутабилан са елементима b и c, онда је a пермутабилан и са елементом $b\cdot c$.

б) Ако су у комутативној семигрупи $(G, \cdot)$ елементи a и b идемпотентни, онда је и елемент $a\cdot b$ идемпотентан.

Решење: а) На основу чињеница да је $a\cdot b = b\cdot a$ и $a\cdot c = c\cdot a$ следује

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c = (b\cdot a)\cdot c = b\cdot(a\cdot c) = b\cdot(c\cdot a) = (b\cdot c)\cdot a.$$

б) На основу чињеница да је $a^2 = a$ и $b^2 = b$ следује

$$(a\cdot b)^2 = (a\cdot b)\cdot(a\cdot b) = a\cdot(b\cdot(a\cdot b)) = a\cdot((b\cdot a)\cdot b) =$$

$$a\cdot((a\cdot b)\cdot b) = a\cdot(a\cdot(b\cdot b)) = a\cdot(a\cdot b^2) = (a\cdot a)\cdot b^2 = a^2\cdot b = a\cdot b.$$

22. У скупу S дефинисана је бинарна операција $\circ$ која задовољава услове

1) $(\forall x \in S)\ x\circ x = x,$

2) $(\forall x, y, z \in S)\ (x\circ y)\circ z = (y\circ z)\circ x.$

Доказати да је операција асоцијативна и комутативна.

Решење:

$$(\forall x, y \in S)\ x\circ y \overset{(1)}{=} (x\circ x)\circ(y\circ y) \overset{(2)}{=} (x\circ(y\circ y))\circ x \overset{(2)}{=}$$
$$= ((y\circ y)\circ x)\circ x \overset{(2)}{=} ((y\circ x)\circ y)\circ x \overset{(2)}{=} (y\circ x)\circ(y\circ x) \overset{(1)}{=} y\circ x,$$

чиме је доказана комутативност;

$$(\forall x, y, z \in S)\ x\circ(y\circ z) \overset{(k)}{=} (y\circ z)\circ x \overset{(2)}{=} (z\circ x)\circ y \overset{(2)}{=} (x\circ y)\circ z,$$

чиме је доказана асоцијативност.

(Са (1), (2) и (k) означена је редом примена услова (1), (2) и комутативног закона).

23. Ако је

$$(\forall b, c \in G)\ (a\cdot b = a\cdot c \Rightarrow b = c),$$

каже се да је a лево регуларан елемент групоида $(G, \cdot)$. Аналогно се дефинише десно регуларан елемент. Елемент је регуларан ако је истовремено и лево и десно регуларан. Доказати да су инвертибилни елементи групоида (са јединичним елементом) регуларни.

24. Доказати да је релација изоморфизма међу групоидима релација еквиваленције.

25. Нека је $(G, \cdot)$ моноид и нека елементи $x, y \in G$ имају редом инверзне елементе x' и y'. Доказати да је тада елемент $z' = y'\cdot x'$ инверзан елементу $z = x\cdot y$ овог моноида.

26. Нека је a инвертибилан елемент моноида $(A,\cdot)$ и a' њему инверзан елемент. Доказати да је пресликавање $f: A \to A$ дато са:

$$(\forall x \in A)\ f(x) = a \cdot x \cdot a'$$

ендоморфизам моноида $(A,\cdot)$.

27. Нека је X непразан скуп. Проверити да ли је скуп X^X свих пресликавања скупа X у самог себе снабдевен операцијом композиције пресликавања моноид.

Решење: Нека су f и g произвољни елементи скупа X^X, тј. произвољна пресликавања скупа X у самог себе. Тада је њихова композиција $f \circ g$ такође елемент скупа X^X, па је $(X^X, \circ)$ групоид. Како је композиција пресликавања асоцијативна операција, структура $(X^X, \circ)$ је семигрупа. Идентичко пресликавање I_x припада скупу X^X, а пошто је $f \circ I_X = I_X \circ f = f$ за свако $f: X \to X$, I_X је јединични елемент скупа X^X, па је структура $(X^X, \circ)$ моноид.

28. Нека је G скуп свих реалних или комплексних бројева и нека је операција $\circ$ дефинисана једнакошћу

$$a \circ b = \frac{1}{2}(a+b),$$

где $+$ има уобичајени смисао. Доказати да је $(G, \circ)$ комутативна, неасоцијативна квазигрупа без јединичног елемента.

Решење: Скуп G је затворен у односу на операцију $\circ$ због особине затворености уобичајеног сабирања и множења у скуповима $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Закон комутације очигледно важи, док асоцијативни закон не важи у општем случају: нпр. за $a = b = 0$ и $c = 4$ је

$$(a \circ b) \circ c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+b)+c\right) = 2,$$

$$a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}(b+c)\right) = 1.$$

Да бисмо доказали да је групоид $(G, \circ)$ квазигрупа, потребно је доказати да једначина $x \circ a = b$ за фиксиране елементе $a, b \in G$ има јединствено решење у скупу G (за једначину $a \circ x = b$ следоваће исто због комутативности). За фиксиране елементе $a, b \in G$, једначина $x \circ a = b$ своди се на $\frac{1}{2}(x+a) = b$, тј. $x = 2b - a$, што је јединствено решење у скупу G. Да би ова структура имала јединични елемент, потребно је да постоји $e \in G$ тако да за произвољно $a \in G$ важи $a \circ e = a$ (и $e \circ a = a$ због комутативности), али како из $\frac{1}{2}(a+e) = a$ следује $e = a$, јединични елемент за структуру $(G, \circ)$ не постоји.

29. Доказати да у квазигрупи важе закони канцелације (скраћивања):

$$a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y;$$
$$x \cdot b = y \cdot b \Rightarrow x = y.$$

Решење: Посматрајмо једнакост $a \cdot y = b$. Постоји тачно једно x за које је $a \cdot x = b$ (тј. $a \cdot x = a \cdot y$), а како је y решење једначине $a \cdot y = b$, значи да је x једнако управо y, тј. $x = y$.

Слично се показује да важи закон канцелације здесна.

30. Доказати да је групоид $(G,\cdot)$ квазигрупа ако и само ако се у свакој врсти и свакој колони његове Cayley-јеве таблице сваки његов елемент појављује тачно једанпут.

31. Нека су $(G,\cdot)$ и $(H,\circ)$ групоиди и нека је пресликавање $f: G \to H$ њихов изоморфизам. Доказати:

а) ако је $(G,\cdot)$ семигрупа, онда је и $(H,\circ)$ семигрупа;

б) ако је $(G,\cdot)$ квазигрупа, онда је и $(H,\circ)$ квазигрупа;

в) ако је e неутрални елемент скупа G, онда је $f(e)$ неутрални елемент скупа H;

г) ако је елемент x инвертибилан у скупу G, онда је $f(x)$ инвертибилан у скупу H;

д) ако је елемент $x \in G$ идемпотентан, онда је и елемент $f(x) \in H$ идемпотентан;

ђ) ако је структура $(G, \cdot)$ комутативна, онда је и структура $(H, \circ)$ комутативна.

<u>Решење:</u> а) Нека је $(\forall x, y, z \in G) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Како је f бијекција, биће

$$(\forall a, b, c \in H)(\exists x, y, z \in G) \ \ a = f(x), b = f(y), c = f(z);$$

сада је

$$(a \circ b) \circ c = (f(x) \circ f(y)) \circ f(z) = (f(x \cdot y)) \circ f(z) = f((x \cdot y) \cdot z) =$$
$$f(x \cdot (y \cdot z)) = f(x) \circ f(y \cdot z) = f(x) \circ (f(y) \circ f(z)) = a \circ (b \circ c).$$

б) Нека је $a, b \in H, a = f(c), b = f(d)$; у том случају је

$$c \cdot x = d \Leftrightarrow f(c \cdot x) = f(d) \Leftrightarrow f(c) \circ f(x) = f(d) \Leftrightarrow a \circ y = b;$$

значи:

$$(\exists_1 x \in G) \ \ c \cdot x = d \Rightarrow (\exists_1 y \in H) \ \ a \circ y = b, (y = f(x)).$$

Аналогно се доказује и случај када је промењљива на левој страни.

32. Нека су $(G, \cdot)$ и $(H, \circ)$ групоиди. Нека је $K = G \times H$ и нека је у скупу K дефинисана операција $*$ као:

$$(\forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in K) \ \ (g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \circ h_2).$$

Доказати:

а) ако су операције $\cdot$ и $\circ$ комутативне, онда је таква и операција $*$;

б) ако су e_1 и e_2 леви (десни) неутрални елементи у скуповима G и H респективно, онда је (e_1, e_2) леви (десни) неутрални елемент из скупа K;

в) ако су структуре $(G, \cdot)$ и $(H, \circ)$ семигрупе, онда је и $(K, *)$ семигрупа;

г) ако су $(G, \cdot)$ и $(H, \circ)$ квазигрупе, онда је и структура $(K, *)$ квазигрупа.

<u>Решење:</u> Пре свега, приметимо да је $(K, *)$ групоид.

а) $$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \circ h_2) =$$
$$= (g_2 \cdot g_1, h_2 \circ h_1) = (g_2, h_2) * (g_1, h_1).$$

б) За свако $g \in G$ и $h \in H$ је

$$(g, h) * (e_1, e_2) = (g \cdot e_1, h \circ e_2) = (g, h),$$
$$(e_1, e_2) * (g, h) = (e_1 \cdot g, e_2 \circ h) = (g, h).$$

в) $$((g_1, h_1) * (g_2, h_2)) * (g_3, h_3) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \circ h_2) * (g_3, h_3) =$$
$$= ((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3, (h_1 \circ h_2) \circ h_3) = (g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3), h_1 \circ (h_2 \circ h_3)) =$$
$$= (g_1, h_1) * (g_2 \cdot g_3, h_2 \circ h_3) = (g_1, h_1) * ((g_2, h_2) * (g_3, h_3)).$$

г) По дефиницији операције $*$ је:

$$(g_1, h_1) * (x, y) = (g_2, h_2) \Leftrightarrow (g_1 \cdot x, h_1 \circ y) = (g_2, h_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g_1 \cdot x = g_2 \wedge h_1 \circ y = h_2;$$

због тога

$$(\exists_1 x \in G) \ \ g_1 \cdot x = g_2 \ \wedge \ (\exists_1 y \in H) \ \ h_1 \circ y = h_2 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ (\exists_1 (x, y) \in G \times H) \ \ (g_1, h_1) * (x, y) = (g_2, h_2).$$

33. Ако је $(G, \cdot)$ семигрупа са десним јединичним елементом e и ако

$$(\forall x \in G)(\exists x' \in G) \ \ x \cdot x' = e,$$

доказати да је $(G, \cdot)$ група.

<u>Решење:</u> Пођимо од чињенице

$$(x' \cdot x) \cdot x' = x' \cdot (x \cdot x') = x' \cdot e = x';$$

множењем ове једнакости са $(x')'$ са десне стране добијамо

$$((x' \cdot x) \cdot x') \cdot (x')' = (x' \cdot x) \cdot (x' \cdot (x')') = (x' \cdot x) \cdot e = x' \cdot x = x' \cdot (x')' = e,$$

тј. $x \cdot x' = e \Rightarrow x' \cdot x = e$. Даље је

$$e \cdot x = (x \cdot x') \cdot x = x \cdot (x' \cdot x) = x \cdot e = x,$$

па је e и леви јединични елемент, из чега следује да је x' елемент инверзан елементу x.

Значи, $(G, \cdot)$ јесте група.

34. Ако је групоид $(G,\cdot)$ семигрупа и квазигрупа, онда је $(G,\cdot)$ група. Доказати.

Решење: Како је $(G,\cdot)$ квазигрупа, важи

$$(\forall a \in G)(\exists_1 e_a \in G)\ a \cdot e_a = a$$

и

$$(\forall a, b \in G)(\exists_1 y \in G)\ y \cdot a = b.$$

Сада је

$$b = y \cdot a = y \cdot (a \cdot e_a) = (y \cdot a) \cdot e_a = b \cdot e_a ,$$

што значи да је e_a десни неутрални елемент. Слично се доказује да је e_a и леви неутрални елемент, па постоји јединствен неутрални елемент $e_a = e$. Инвертибилност следује из једнозначне решивости једначина $a' \cdot a = e$ и $a \cdot a'' = e$.

35. Одредити групоид $(A,\cdot)$ са најмањим бројем елемената за који важи

$$\{1, i\} \subset A \subset \mathbb{C},$$

где је $\mathbb{C}$ скуп комплексних бројева, а $\cdot$ множење комплексних бројева. Да ли је $(A,\cdot)$

а) моноид,

б) група?

Решење Да би $(A,\cdot)$ био групоид, скуп A мора да садржи све елементе i^k, $k \in \mathbb{N}$. Како је $\{z : z = i^k, k \in \mathbb{N}\} = \{1, i, -1, -i\}$, овај скуп је подскуп скупа A. Међутим, он је затворен у односу на множење, па је $\{1, i, -1, -i\} = A$. Пошто је $-1 = i^2$, а $-i = i^3$, скуп A можемо представити као $\{1, i, i^2, i^3\}$, па је очигледно дата структура циклична група реда 4 (јединични елемент је 1, а инверзни су редом: $1^{-1} = 1$, $i^{-1} = i^3$, $(i^2)^{-1} = i^2$, $(i^3)^{-1} = i$).

36. Доказати да је $(G,\cdot)$, где је скуп $G = \{x + y\sqrt{2} : x^2 + y^2 \neq 0,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$, а $\cdot$ множење реалних бројева, група.

Решење: Резултат операције примењене на елементе скупа G је

$$(x + y\sqrt{2})(z + u\sqrt{2}) = xz + 2yu + (xu + yz)\sqrt{2},$$

одакле се види да је резултат облика који задовољава услове припадности скупу G $\left((xz + 2yu)^2 + (xu + yz)^2 \neq 0\right.$ јер је производ два реална броја различита од нуле и сам различит од нуле$\left.\right)$. Асоцијативност важи јер је у питању множење реалних бројева. Неутрални елемент је $e = 1 + 0\sqrt{2}$ $(1 + 0 \neq 0)$, а елемант инверзан елементу $x + y\sqrt{2}$ биће

$$\frac{1}{x + y\sqrt{2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}} = \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} \in G;$$

(приметимо да је $(\forall x, y \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\})\ x^2 - 2y^2 \neq 0$, јер, у противном, не би могло да важи $x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}$, што значи да сваки елемент скупа G има инверзан елемент).

Дакле, $(G,\cdot)$ јесте група.

37. Дат је скуп $G = \{x + y\sqrt{5} : x^2 - 5y^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$. Доказати да је $(G,\cdot)$ група.

Решење: Покажимо да је дата структура групоид:

$$(x_1 + \sqrt{5}y_1)(x_2 + \sqrt{5}y_2) = (x_1x_2 + 5y_1y_2) + \sqrt{5}(x_1y_2 + y_1x_2);$$

из

$$x_1^2x_2^2 + 10x_1x_2y_1y_2 + 25y_1^2y_2^2 - 5x_1^2y_2^2 - 10x_1x_2y_1y_2 - 5y_1^2x_2^2 =$$
$$= x_1^2(x_2^2 - 5y_2^2) + 5y_1^2(5y_2^2 - x_2^2) = (x_1^2 - 5y_1^2)(x_2^2 - 5y_2^2) = 1$$

следује да $(x_1 + \sqrt{5}y_1)(x_2 + \sqrt{5}y_2) \in G$.

Доказ се даље спроводи као у решењу задатка 36.

38. У скупу рационалних бројева дефинисана је операција $\circ$:

$$a \circ b = ma + nb,$$

где су m и n дати цели бројеви. Испитати карактер алгебарске структуре $(\mathbb{Q}, \circ)$.

Решење: 1° Затвореност је очигледно задовољена.

2° Како је
$$(a \circ b) \circ c = (ma + nb) \circ c = m^2 a + mnb + nc$$
и
$$a \circ (b \circ c) = a \circ (mb + nc) = ma + nmb + n^2 c,$$
асоцијативност је задовољена када је за произвољне $a, b, c \in \mathbb{Q}$
$$m^2 a + mnb + nc = ma + nmb + n^2 c,$$
тј. ако важи
$$m^2 = m \wedge mn = nm \wedge n = n^2,$$
односно $m, n \in \{0, 1\}$.

3° Неутрални елемент e постоји када је
$$a \circ e = e \circ a = a,$$
тј.
$$ma + ne = me + na = a$$
за свако a; ово је испуњено за $m = n = 1$ и тада је $e = 0$, а операција $\circ$ своди се на обично сабирање.

4° Под претпоставком постојања неутралног елемента сваки елемент $a \in \mathbb{Q}$ има свој инверзан елемент $a' = -a$.

5° Због $a \circ b = ma + nb$ и $b \circ a = mb + na$ комутативност $a \circ b = b \circ a$ задовољена је када је $ma + nb = mb + na$ за произвољне $a, b \in \mathbb{Q}$, тј. за $m = n$.

39. Испитати да ли је скуп $\left\{ \frac{1+2m}{1+2n} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ у односу на операцију множења реалних бројева група.

40. Да ли је $(\mathbb{R}, \cdot)$, где је $\cdot$ операција дефинисана са

а) $x \cdot y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, б) $x \cdot y = \sqrt{x^2 + y^2}$

група?

41. Нека је S произвољан непразан скуп. Дефинишимо операцију Δ на партитивном скупу $\mathcal{P}(S)$ скупа S на следећи начин:
$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(операција Δ назива се *симетричном разликом скупова*). Доказати да је $(\mathcal{P}(S), \Delta)$ група.

42. Доказати да скуп
$$G = \{x : -1 < x < 1,\ x \in \mathbb{R}\}$$
са операцијом $*$ дефинисаном као
$$(\forall a, b \in G)\ a * b = \frac{a+b}{1+ab}$$
чини Abel-ову групу.

43. На скупу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ операција $*$ дефинисана је са
$$x * y = \frac{x \cdot y}{2}.$$
Проверити да ли је алгебарска структура $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ група.

44. Ако је $S_n = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, а операција $\circ$ дефинисана као сабирање по модулу p, доказати да је $(S_n, \circ)$ Abel-ова група.

45. Нека је $S = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0\}$. У скупу S дефинисана је бинарна операција $*$ изразом
$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d).$$
Доказати да је $(S, *)$ група.

<u>Решење:</u> Ако су a, b, c и d рационални бројеви, онда су то и бројеви ac и $bc + c + d$. Поред тога, како је $a \neq 0$ и $c \neq 0$, биће и $ac \neq 0$. Према томе, $(S, *)$ је групоид. Како је
$$(a_1, b_1) * \big((a_2, b_2) * (a_3, b_3)\big) = \big((a_1, b_1) * (a_2, b_2)\big) * (a_3, b_3) =$$
$$= (a_1 a_2 a_3,\ b_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 + b_2 a_3 + a_3 + b_3),$$
закључујемо да важи асоцијативност.

Уређени пар $(1, -1) \in S$ је неутрални елемент за операцију $*$ јер важи
$$(a, b) * (1, -1) = (1, -1) * (a, b) = (a, b)$$

за свако $(a,b)\in S$.

За $(a,b)\in S$ постоји инверзни елемент $\left(\frac{1}{a},-\frac{a+b+1}{a}\right)\in S$, јер важи

$$\left(\frac{1}{a},-\frac{a+b+1}{a}\right)*(a,b) = (a,b)*\left(\frac{1}{a},-\frac{a+b+1}{a}\right) = (1,-1).$$

Према томе, $(S,*)$ је (некомутативна) група.

46. Испитати природу структуре $(\mathbb{Z}^2,\cdot)$, где је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева, а операција $\cdot$ дефинисана са

$$(a,b)\cdot(c,d) = (a+c, (-1)^c b + d).$$

47. У скупу $\mathbb{Z}^3$ свих уређених тројки целих бројева, дефинисана је операција $\circ$

$$(a,b,c)\circ(x,y,z) = (a+(-1)^b x, b+(-1)^c y, c+(-1)^a z).$$

Доказати да је $\mathbb{Z}^3$ у односу на операцију $\circ$ група.

48. На скупу $M = \left\{x : x\in\mathbb{R}\setminus\left((-\infty,1]\cup\{2\}\right)\right\}$ дефинисана је операција $*$ на следећи начин:

$$(\forall a,b\in M)\quad a*b = (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)} + 1,$$

где $t\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$. У зависности од параметра $k\in\mathbb{N}$ испитати природу алгебарске структуре $(M,*)$.

Решење: 1) Докажимо најпре да је $*$ унутрашња операција скупа M, тј. $(\forall a,b\in M)\ (a*b>1\ \wedge\ a*b\neq 2)$; заиста

$$a*b = (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)} + 1\in\mathbb{R};$$

$$a*b>1 \Leftrightarrow (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)} > 0 \qquad (a>1);$$

$$a*b\neq 2 \Leftrightarrow (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)} \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\neq 2\wedge\frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 2\wedge b\neq 2.$$

Дакле, структура $(M,*)$ је групоид.

2) $$(a*b)*c = \left((a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)} + 1\right)*c =$$

$$= \left((a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)} + 1 - 1\right)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(c-1)} + 1 =$$

$$= (a-1)^{\frac{1}{k^2}\cdot\log_t(b-1)\cdot\log_t(c-1)} + 1;$$

како је истовремено

$$a*(b*c) = a*\left((b-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(c-1)} + 1\right) =$$

$$= (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t\left((b-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(c-1)}\right)} + 1 =$$

$$= (a-1)^{\frac{1}{k^2}\cdot\log_t(b-1)\cdot\log_t(c-1)} + 1,$$

биће

$$(\forall a,b,c\in M)\ (a*b)*c = a*(b*c),$$

тј. операција $*$ је асоцијативна.

3) Потражимо неутрални елемент e из услова $a*e=a$:

$$a*e = (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(e-1)} + 1 = a \Leftrightarrow (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(e-1)} = a-1,$$

па пошто је $a\neq 1$, имамо

$$\frac{1}{k}\cdot\log_t(e-1) = 1 \Leftrightarrow \log_t(e-1) = k,$$

тј.

$$e = t^k + 1.$$

Лако се проверава да важи услов

$$e\in M \Leftrightarrow (e\in\mathbb{R}\ \wedge\ e>1\ \wedge\ e\neq 2).$$

4) Проверимо да ли $(\forall a\in M)(\exists a'\in M)\ a*a'=e$. Имамо

$$a * a' = (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(a'-1)} + 1 = t^k + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; (a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(a'-1)} = t^k \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{k}\cdot\log_t(a'-1)\cdot\log_t(a-1) = k \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \log_t(a'-1) = \frac{k^2}{\log_t(a-1)} \;\Leftrightarrow\; a' = 1 + t^{\frac{k^2}{\log_t(a-1)}}$$

Једноставно се проверава да a' постоји за свако $a \in M$ и да $a' \in M$.

5) Важи $(\forall a, b \in M)\; a * b = b * a$, јер

$$(a-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)} + 1 = (b-1)^{\frac{1}{k}\cdot\log_t(a-1)} + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{1}{k}\cdot\log_t(b-1)\cdot\log_t(a-1) = \frac{1}{k}\cdot\log_t(a-1)\cdot\log_t(b-1).$$

Дакле, за све вредности параметра $k \in \mathbb{N}$ структура $(M, *)$ је Abel-ова група.

49. За реалне бројеве x и y број $x*y$ може се дефинисати користећи се изразом $\overline{x * y} = \overline{x} + \overline{y}$, где је $\overline{x} = \begin{cases} -x, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$. Доказати да је $(\mathbb{R}, *)$ Abel-ова група.

Решење: Приметимо најпре да је $\overline{\overline{x}} = \begin{cases} -\overline{x} = x, & x \in \mathbb{Q} \\ \overline{x} = x, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$. Сада је

$$x * y = \overline{\overline{x * y}} = \overline{\overline{x} + \overline{y}},$$

а такође и

$$\overline{x} = \overline{y} \;\Rightarrow\; \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \;\Rightarrow\; x = y.$$

Затвореност $x * y \in \mathbb{R}$ очигледно важи.

Асоцијативност важи јер је

$$\overline{(x * y) * z} = \overline{(x * y)} + \overline{z} = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} =$$
$$= \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} + \overline{(y * z)} = \overline{x * (y * z)}.$$

Неутрални елемент постоји јер је $x * 0 = \overline{\overline{x} + \overline{0}} = \overline{\overline{x} + 0} = \overline{\overline{x}} = x$.

Потражимо инверзни елемент елемента $x \in \mathbb{R}$. Имамо

$$\overline{x * x'} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} + \overline{x}' = 0 \Rightarrow \overline{x}' = -\overline{x};$$

сада је:

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(\overline{x}' = -(-x) \Leftrightarrow \overline{\overline{x}}' = \overline{x} \Leftrightarrow x' = -x\right);$$
$$x \in \mathbb{I} \Rightarrow \left(\overline{x}' = -x \Leftrightarrow \overline{\overline{x}}' = -\overline{x} \Leftrightarrow x' = -x\right).$$

Дакле, $(\mathbb{R}, *)$ јесте Abel-ова група, јер је и комутативност очигледно задовољена.

50. Дате су групе $(G, \cdot)$ и $(H, \circ)$. У скупу $G \times H$ дефинисана је бинарна операција $*$ помоћу

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \circ h_2).$$

Испитати да ли је $(G \times H, *)$ група.

Решење: Операција $*$ је унутрашња операција скупа $G \times H$ јер

$$(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; g_1, g_2 \in G \;\wedge\; h_1, h_2 \in H \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; g_1 \cdot g_2 \in G \;\wedge\; h_1 \circ h_2 \in H \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (g_1 \cdot g_2, h_1 \circ h_2) \in G \times H;$$

Провера асоцијативности и постојања неутралног елемента садржана је у решењу задатка 32.

Нека су g_0 и h_0 редом неутрални елементи група G и H, тј. нека је (g_0, h_0) неутрални елемент групе $G \times H$. Нека су g^{-1} и h^{-1} елементи инверзни елементима g и h из група G и H респективно. Како је

$$(g^{-1}, h^{-1}) * (g, h) = (g^{-1} \cdot g, h^{-1} \circ h) = (g_0, h_0)$$

и

$$(g, h) * (g^{-1}, h^{-1}) = (g \cdot g^{-1}, h \circ h^{-1}) = (g_0, h_0),$$

то је (g^{-1}, h^{-1}) елемент инверзан елементу (g, h) из групе $G \times H$. Дакле, $(G \times H, *)$ јесте група.

Напомена: Приметити да из задатка 32. произлази да је структура $(G \times H, *)$ истовремено семигрупа и квазигрупа, па је сада чињеница да је структура $(G \times H, *)$ група последица задатка 34.

51. Посматрајмо множење у скупу $J = \{-1, 1\}$ и логичку еквиваленцију $\Leftrightarrow$ у скупу $T = \{\top, \bot\}$.

а) Испитати природу алгебарских структура $(J, \cdot)$ и $(T, \Leftrightarrow)$.

б) Показати да су структуре $(J, \cdot)$ и $(T, \Leftrightarrow)$ изоморфне.

52. Посматрајмо пресликавање $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ дато са

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = 2^x.$$

Њиме се елементи адитивне групе $(\mathbb{R}, +)$ пресликавају у елементе мултипликативне групе $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Да ли је f

а) хомоморфизам,

б) изоморфизам?

53. Нека је $(G, \cdot)$ група. Операција $\circ$ дефинисана је са

$$(\forall x, y \in G)\ x \circ y = y \cdot x.$$

Доказати да је $(G, \circ)$ група изоморфна групи $(G, \cdot)$.

<u>Решење:</u> Проверимо да ли важе аксиоме групе:

затвореност:

$$(\forall x, y \in G)\ x \circ y = y \cdot x \in G;$$

асоцијативност:

$$(\forall x, y, z \in G)\ (x \circ y) \circ z = (y \cdot x) \circ z = z \cdot (y \cdot x) =$$
$$= (z \cdot y) \cdot x = x \circ (z \cdot y) = x \circ (y \circ z);$$

јединични елемент:

$$(\exists e \in G)(\forall x \in G)\ x \circ e = e \cdot x = x,$$

(аналогно и са леве стране);

инверзни елементи:

$$(\forall x \in G)(\exists x' \in G)\ x \circ x' = x' \cdot x = e$$

(аналогно и са леве стране).

Нека је сада $f: G \to G$ пресликавање дефинисано са $f(x) = x'$. Оно је очигледно бијективно, при чему је

$$f(x \circ y) = f(y \cdot x) = (y \cdot x)' = x' \cdot y' = f(x) \cdot f(y),$$

па је f изоморфизам.

54. Нека за групе $(G, \cdot)$ и $(G, \circ)$ важи

$$(\forall a, b, c \in G)\ \big((a \cdot b) \circ c = a \cdot (b \circ c) \wedge (a \circ b) \cdot c = a \circ (b \cdot c)\big).$$

Доказати да су групе $(G, \cdot)$ и $(G, \circ)$ изоморфне.

<u>Решење:</u> Посматрајмо пресликавање $f: G \to G$ дефинисано изразом $f(x) = x \cdot e_1$, где је e_1 јединични елемент из $(G, \circ)$. Нека је ′ ознака за инверзију елемента у $(G, \cdot)$. Како

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x \cdot e_1 = y \cdot e_1 \Rightarrow (x \cdot e_1) \cdot e_1' = (y \cdot e_1) \cdot e_1' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot (e_1 \cdot e_1') = y \cdot (e_1 \cdot e_1') \Rightarrow x = y,$$

то значи да је f инјекција, а пошто је

$$(\forall y \in G)(\exists x \in G)\ f(x) = y$$

испуњено ако је $x = y \cdot (e_1)' \in G$, следује да је f и сурјекција, тј. бијекција. Једнакост

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y) \cdot e_1 = x \cdot (y \cdot e_1) = x \cdot ((e_1 \circ y) \cdot e_1) =$$
$$= x \cdot (e_1 \circ (y \cdot e_1)) = (x \cdot e_1) \circ (y \cdot e_1) = f(x) \circ f(y)$$

комплетира доказ да је пресликавање f изоморфизам.

55. Нека је $(G, \cdot)$ група и $(G, \circ)$ групоид, где је $\circ$ операција дефинисана са

$$(\forall x, y \in G)\ x \circ y = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

при чему су $f_1, f_2: G \to G$ дба произвољна (изабрана) пресликавања. Доказати да, ако $(G, \circ)$ има јединични елемент e_1, онда је $(G, \circ)$ група изоморфна групи $(G, \cdot)$.

<u>Упутство:</u> Уочити пресликавање $\varphi: G \to G$ дефинисано са

$$\varphi(x) = (f_1(e_1))^{-1} \cdot x \cdot (f_2(e_1))^{-1}.$$

56. У групи $G = (A, \cdot)$ изабран је произвољан елемент $q \in A$ и дефинисан групоид $H = (A, *)$ са операцијом $*$ одређеном са

$$a * b = a \cdot q \cdot b.$$

а) Показати да је $H = (A, *)$ група.

б) Показати да је пресликавање $f : A \to A$ дато са $f(a) = a \cdot q^{-1}$ изоморфизам ових група.

57. Доказати да је група $(G, \cdot)$ комутативна ако и само ако је пресликавање $f : G \to G$ дато са

$$(\forall x \in G)\ f(x) = x'$$

аутоморфизам, где је x' елемент инверзан елементу x.

Решење: Претпоставимо да је група $(G, \cdot)$ комутативна и посматрајмо задато пресликавање $f : G \mapsto G$. За пресликавање f важи:

1) $(\forall x, y \in G) f(x \cdot y) = f(y \cdot x)$ (због комутативности операције)

$= (y \cdot x)'$ (по дефиницији пресликавања f)

$= x' \cdot y'$ (позната особина инверзије производа)

$= f(x) \cdot f(y)$; (по дефиницији пресликавања f)

2) f је инјекција јер

$$(\forall x, y \in G)\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x' = y' \Rightarrow (x')' = (y')' \Rightarrow x = y)$$

(користећи дефиницију пресликавања f и познате особине групе);

3) f је сурјекција јер

$$(\forall y \in G)(\exists x \in G) f(x) = y \text{ (тј. } x' = y, \text{ па је } x = y' \in G).$$

Дакле, f је аутоморфизам.

Нека је сада дато пресликавање f аутоморфизам. Тада, за произвољне елементе x и y скупа G важи:

$x \cdot y = f(x') \cdot f(y')$ (по дефиницији пресликавања f)

$= f(x' \cdot y')$ (јер је f аутоморфизам)

$= f((y \cdot x)')$ (због особине инверзије производа)

$= ((y \cdot x)')'$ (по дефиницији пресликавања f)

$= y \cdot x$.

Дакле, $(G, \cdot)$ је комутативна група.

58. Пресликавања f_1, f_2, f_3 и f_4 дефинисана су са

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = -x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = -\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$$

Доказати да скуп $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ чини групу у односу на операцију композиције пресликавања.

Решење: Свака коначна група може се представити Cayley-јевом таблицом, која у овом случају гласи

$\odot$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$f_1(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$f_2(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$
$f_3(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$
$f_4(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$

Имајући у виду да је композиција пресликавања асоцијативна и на основу таблице види се да композиција $\odot$ на скупу датих функција чини групу. Очигледно, у питању је Klein-ова четворна група (видети зад. 68.).

59. Доказати да функције (пресликавања) дефинисане на скупу $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ изразима

$$t,\ \frac{1}{t},\ 1 - t,\ \frac{1}{1-t},\ \frac{t-1}{t},\ \frac{t}{t-1}$$

образују групу у односу на операцију композиције пресликавања.

60. Доказати да скуп S свих реалних функција датих са

$$f_{p,q}(x) = px + q,$$

где су p и q реални бројеви и $p \neq 0$, образује групу у односу на операцију $\circ$ композиције пресликавања

$$\left(f_{p,q} \circ f_{r,s}(x)\right) = f_{r,s}(f_{p,q}(x)).$$

Да ли је та група комутативна?

61. Доказати да скуп $\operatorname{Aut} G$ аутоморфизама произвољне групе G образује групу у односу на операцију композиције пресликавања.

Решење: Доказаћемо следећа својства.

1) Групоидност, тј. $(\forall f, g \in \mathrm{Aut}\, G)\ f \circ g \in \mathrm{Aut}\, G$:
ако су $f, g : G \to G$, онда је и $f \circ g : G \to G$. Познато је да је композиција две бијекције бијекција, и важи

$$(f \circ g)(x \cdot y) = g(f(x \cdot y)) = g(f(x) \cdot f(y)) =$$
$$= g(f(x)) \cdot g(f(y)) = \big((f \circ g)(x)\big) \cdot \big((f \circ g)(y)\big),$$

па $f \circ g \in \mathrm{Aut}\, G$.

2) Асоцијативност, тј. $(\forall f, g, h \in \mathrm{Aut}\, G)\ (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$:
познато је да је композиција пресликавања асоцијативна операција.

3) Постојање јединичног елемента, тј.

$$(\exists e \in \mathrm{Aut}\, G)(\forall f \in \mathrm{Aut}\, G)\ f \circ e = e \circ f = f:$$

тај елемент је идентичко пресликавање I_G.

4) Постојање инверзних елемената, тј.

$$(\forall f \in \mathrm{Aut}\, G)(\exists f' \in \mathrm{Aut}\, G)\ f \circ f' = f' \circ f = \mathrm{I}_G:$$

за сваки аутоморфизам f скупа G постоји инверзно пресликавање f^{-1} (f је бијекција, па постоји инверзна бијекција f^{-1}, а како $f : G \to G$, следује да $f^{-1} : G \to G$), за које је

$f^{-1}(x \cdot y) = f^{-1}(f(a) \cdot f(b))$ ($x = f(a)$, $y = f(b)$, за неке a, b јер је f сурјекција)

$= f^{-1}(f(a \cdot b))$ (f је аутоморфизам)

$= \mathrm{I}_G(a \cdot b)$

$= a \cdot b$

$= f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$. ($x = f(a) \Rightarrow f^{-1}(x) = a$ и $y = f(b) \Rightarrow f^{-1}(y) = b$, јер је f инјекција)

Дакле, за $f \in \mathrm{Aut}\, G$, f^{-1} такође припада скупу $\mathrm{Aut}\, G$, па је $f' = f^{-1}$, чиме је доказ завршен.

62. Нека је $(G, \cdot)$ група и нека је a било који елемент скупа G. Доказати:

а) да је пресликавање $f_a : G \to G$ дефинисано са $f_a(g) = aga^{-1}$ аутоморфизам;

б) да скуп $F = \{f_a : a \in G\}$ чини групу у односу на композицију пресликавања.

Решење: б) Ово тврђење може се доказати директно, провервањем да ли важе аксиоме групе, или индиректно, доказивањем да је дата структура подгрупа неке познате групе, из чега би следовало да је она, посматрана сама за себе, група.

I начин:

1) Нека су $f_a, f_b \in F$, тј. $a, b \in G$. Тада важи:

$(f_a \circ f_b)(x) = f_b(f_a(x))$ (по дефиницији композиције пресликавања)

$= f_b(axa^{-1})$

$= baxa^{-1}b^{-1}$ (по дефиницији пресликавања f_a и f_b)

$= (ba)x(ba)^{-1}$ (због особина инверзије производа)

$= f_{ba}(x)$.

Пошто су $a, b \in G$, онда је и $ba \in G$, а пресликавање $f_{ba} \in F$, па групоидност важи.

2) Композиција пресликавања је асоцијативна операција.

3) Пошто идентичко пресликавање $\mathrm{I}_G : G \mapsto G$ може да се представи у облику $f_e \in F$, где је e неутрални елемент групе G, (заиста, $f_e(x) = exe^{-1} = x$ за свако $x \in G$) и пошто за идентичко пресликавање I_G важи $f \circ \mathrm{I}_G = \mathrm{I}_G \circ f = f$ за свако $f : G \mapsto G$, ова структура има неутрални елемент.

4) Нека је f_a произвољни елемент скупа F, тј. $a \in G$. Потребно је доказати да постоји елемент $f_b \in F$, тј. $b \in G$, такав да је $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a = f_e$. Према претходно доказаном важи $f_a \circ f_b = f_{ba}$ и $f_b \circ f_a = f_{ab}$, па је $f_{ba} = f_{ab} = f_e$ испуњено за $b = a^{-1} \in G$ (a^{-1} је инверзни елемент елемента $a \in G$). Дакле, сваки елемент f_a из F има одговарајући инверзни елемент $f_{a^{-1}}$.

На основу доказаног, структура $(F, \circ)$ је група.

II начин:

Према претходном задатку, скуп

$$\mathrm{Aut}\, G = \{f : G \mapsto G \mid f \text{ је аутоморфизам}\}$$

чини групу у односу на композицију пресликавања. Како је F непразан подскуп скупа Aut G, довољно је доказати (видети задатак 73.) да важи

$$(\forall f_a, f_b \in F)\ f_a \circ f_b^{-1} \in F,$$

где је f_b^{-1} инверзно пресликавање пресликавања f_b, дакле пресликавање за које важи $f_b \circ f_b^{-1} = f_b^{-1} \circ f_b = I_G$. Приметимо да је f_b^{-1} исто што и $f_{b^{-1}}$, где је b^{-1} елемент инверзан елементу b у групи G. Сада важи:

$$(f_a \circ f_b^{-1})(x) = (f_a \circ f_{b^{-1}})(x) = f_{b^{-1}}(f_a(x)) =$$
$$= f_{b^{-1}}(axa^{-1}) = b^{-1}axa^{-1}(b^{-1})^{-1} = f_{b^{-1}a}(x).$$

Како је $b^{-1}a \in G$ за $a, b \in G$, биће и $f_{b^{-1}a} \in F$, па је $(F, \circ)$ подгрупа групе (Aut G, $\circ$), тј. група.

63. Доказати да скуп свих пермутација скупа $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ представља групу у односу на операцију композиције пермутација (ова група назива се *симетричном групом реда* n и означава са S_n). Конструисати симетричну групу S_3 и одредити парове међусобно инверзних елемената.

64. Нека су дате следеће четири пермутације скупа $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ако је операција $\circ$ композиција пермутација скупа $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, формирати Cayley-јеву таблицу за алгебарску структуру $(A, \circ)$ и испитати њене особине.

Решење 1: Cayley-јеву таблицу формирамо рачунајући композиције елемената из скупа носача структуре $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Тако нпр. из: $(p_2 \circ p_3)(1) = 3$, $(p_2 \circ p_3)(2) = 4$, $(p_2 \circ p_3)(3) = 1$, $(p_2 \circ p_3)(4) = 2$ закључујемо да је $p_2 \circ p_3 = p_4$. На основу таблице

$\circ$	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_4	p_1	p_2
p_4	p_4	p_3	p_2	p_1

видимо да је операција композиције $\circ$ на скупу A унутрашња операција. Даље, познато је да је композиција пресликавања асоцијативна операција. Јасно је да је p_1 неутрални елемент и да је сваки елемент себи инверзан. Стога је алгебарска структура $(A, \circ)$ група. На основу симетричности Cayley-јеве таблице у односу на главну дијагоналу следује да је $(A, \circ)$ Abel-ова група.

Решење 2: Према формираној таблици у свакој врсти и у свакој колони сваки елеменат $p_j \in A$ појављује се тачно једанпут, па је алгебарска структура $(A, \circ)$ квазигрупа. Како је композиција функција асоцијативна, структура је истовремено и семигрупа, тј. $(A, \circ)$ је група. Најзад, из симетричности Cayley-јеве таблице у односу на главну дијагоналу следује да је алгебарска структура $(A, \circ)$ Abel-ова група.

Напомена: Добијена група јесте Klein-ова четворна група (видети зад. 68.).

65. Дата је следећа непотпуна таблица множења једне комутативне групе од пет елемената:

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	b	c	.	.	.
b	.	.	e	a	.
c	.	.	.	b	.
d	e	.	.	.	.
e	a	b	c	d	.

Попунити ову таблицу.

66. Доказати да је групоид $(A, \cdot)$, дат таблицом

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	d	a	a
b	d	a	b	b
c	a	b	c	d
d	a	b	d	d

моноид и одредити групу која је у њему садржана.

Решење: Одмах се види да је c неутрални елемент групоида. Код провере асоцијативности довољно је показати да она важи за елементе a, b, d, јер асоцијативност увек важи ако је један од три учествујућа елемента неутралан. Значи, треба проверити укупно $\overline{V}_3^3 = 27$ једнакости, чиме се доказује да је $(A, \cdot)$ моноид. Овај моноид садржи само тривијалну групу од једног елемента (неутрални елемент c).

67. Испитати све групе од 4 елемента (реда 4).

68. Доказати да су све групе реда не већег од 5 комутативне.

Решење: Ако је p прост број, све групе реда p су цикличке и, самим тим, међусобно изоморфне и комутативне. Ово важи за групе реда 2, 3 и 5, а и за групу реда 1 важи аналогно тврђење. Постоје две међусобно неизоморфне групе реда 4: једна је циклична, па зато и комутативна, а друга тзв. Klein-ова група, која се може представити таблицом:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Ова таблица је симетрична, па је и Klein-ова група комутативна.

69. Дат је скуп $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ и операција $\odot$ Cayley-јевом таблицом:

$\odot$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f	e
b	b	c	e	f	a	d
c	c	d	f	e	b	a
d	d	f	a	b	e	c
f	f	e	d	a	c	b

Показати да је групоид $(G, \odot)$ комутативна *лупа* (квазигрупа са неутралним елементом), али да није група.

Решење: $(G, \odot)$ јесте групоид јер се у Cayley-јевој таблици појављују само елементи из скупа G. Комутативност следује из симетричности Cayley-јеве таблице у односу на главну дијагоналу. Неутрални елемент је e. Пошто се сваки елемент појављује у свакој врсти (и колони) тачно једанпут, $(G, \odot)$ је квазигрупа. Асоцијативност очигледно није испуњена јер је нпр.

$$(b \odot c) \odot d = f \odot d = c \neq e = b \odot b = b \odot (c \odot d),$$

па $(G, \odot)$ није група.

70. Нека је дат групоид $G = (G, *)$ Cayley-јевом таблицом:

$*$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	e	f	a	d
c	c	d	a	b	f	e
d	d	f	b	e	c	a
e	e	a	f	c	d	b
f	f	e	d	a	b	c

Испитати природу ове алгебарске структуре.

Решење: Приметимо да се према датој Cayley-јевој таблици у свакој врсти и у свакој колони сваки елемент појављује тачно једанпут. Због тога је G квазигрупа. На основу контрапримера

$$(b*b)*b = c*b = d \neq e = b*c = b*(b*b)$$

закључујемо да је G неасоцијативна и некомутативна алгебарска структура. Даље, очигледно је да је a неутрални елемент алгебарске структуре G. На крају, из једнакости $a*a = a$, $c*c = a$, $b*e = e*b = a$ и $d*f = f*d = a$ закључујемо да су сви елементи скупа G инвертибилни. Према томе, $(G, *)$ јесте *некомутативна лупа* у којој су сви елементи инвертибилни.

71. На скупу свих реалних бројева дефинисана је операција $\circ$

$$x \circ y = ax + by + c,$$

где су a, b и c дати реални бројеви и $ab \neq 0$. Доказати да је $(\mathbb{R}, \circ)$ квазигрупа. Које би услове требало да задовољавају a, b и c да би $(\mathbb{R}, \circ)$ била група?

72. Допунити следећу таблицу операције $\cdot$ тако да се добије таблица групе.

$\cdot$	p	q	r	s	t	u
p	.	.	q	.	.	.
q	r	.	.	.	.	.
r	.	.	.	.	r	.
s	.	p	.	.	.	.
t	.	.	.	.	.	.
u	t	.	.	.	.	p

73. Нека је $(G, \cdot)$ група и нека је H непразан подскуп скупа G. Доказати да је $(H, \cdot)$ подгрупа групе $(G, \cdot)$ ако и само ако је

$$(\forall x, y \in H)\ x \cdot y^{-1} \in H.$$

<u>Решење:</u> Дати услов је очигледно потребан. Покажимо да је и довољан. Како је $H \neq \varnothing$, постоји $x \in H$, а на основу тога

$$x \in H \Rightarrow x \cdot x^{-1} = e \in H$$

и, такође

$$e, x \in H \Rightarrow e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in H.$$

Сада на основу претходног имамо

$$x, y \in H \Rightarrow x, y^{-1} \in H \Rightarrow x \cdot (y^{-1})^{-1} \Rightarrow x \cdot y \in H.$$

Најзад, како је операција $\cdot$ асоцијативна, следује да је $(H, \cdot)$ група, тј. подгрупа групе $(G, \cdot)$.

74. Нека је $(H, *)$ подгрупа групе $(G, *)$ и нека је у скупу G дефинисана релација ρ на следећи начин:

$$(\forall x, y \in G)\ (x \rho y \Leftrightarrow x*y^{-1} \in H).$$

Доказати да је ρ релација еквиваленције.

<u>Решење:</u> По дефиницији, ρ је релација еквиваленције скупа G ако за све $x, y, z \in G$ важи:

1) $x \rho x$ (рефлексивност);
2) $x \rho y \Rightarrow y \rho x$ (симетричност);
3) $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$ (транзитивност).

Доказаћемо да за релацију ρ важе све три особине.

1) $x * x^{-1} = e \in H$, па важи

$$(\forall x \in G)\ x \rho x,$$

тј. рефлексивност.

2) Нека је $x \rho y$. Тада је $x * y^{-1} \in H$. У групи H је $(x * y^{-1})^{-1} \in H$, тј. $(y^{-1})^{-1} * x^{-1} = y * x^{-1} \in H$, па је $y \rho x$, тј. важи симетричност.

3) Пођимо од $x \rho y \wedge y \rho z \Leftrightarrow (x * y^{-1} \in H) \wedge (y * z^{-1} \in H)$. У групи H је

$$(x * y^{-1}) * (y * z^{-1}) = x * \left(y^{-1} * (y * z^{-1})\right) =$$
$$= x * \left((y^{-1} * y) * z^{-1}\right) = x * (e * z^{-1}) = x * z^{-1} \in H,$$

па је $x \rho z$, тј. важи транзитивност.

75. Дата је група G и две њене подгрупе H_1 и H_2.

а) Доказати да је $H_1 \cap H_2$ подгрупа групе G.

б) Ако су кардинални бројеви подгрупа H_1 и H_2 коначни узајамно прости бројеви, доказати да је $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, где је e јединични елемент групе G.

<u>Решење:</u> а) Како $x, y \in H_1 \Rightarrow x \cdot y \in H_1$ и $x, y \in H_2 \Rightarrow x \cdot y \in H_2$, биће $x \cdot y \in H_1 \cap H_2$, па је затвореност скупа испуњена. Асоцијативност важи у G, па зато и у сваком подскупу скупа G.

Пошто су H_1 и H_2 подгрупе, а e је јединствено у G, следује $e \in H_1$ и $e \in H_2$, па $e \in H_1 \cap H_2$.
Најзад, нека $x \in H_1 \cap H_2$. Тада

$$(x \in H_1 \Rightarrow x^{-1} \in H_1) \wedge (x \in H_2 \Rightarrow x^{-1} \in H_2) \Rightarrow x^{-1} \in H_1 \cap H_2,$$

па је $(H_1 \cap H_2, \cdot)$ група, тј. подгрупа групе $(G, \cdot)$.

б) Како је $H_1 \cap H_2$ подгрупа и групе H_1 и групе H_2, то (према теореми Lagrange-а) следује да $|H_1 \cap H_2|$ дели и $|H_1|$ и $|H_2|$. Међутим, $|H_1|$ и $|H_2|$ су узајамно прости бројеви, па је њихов највећи (и једини) заједнички делилац 1. То значи да је $|H_1 \cap H_2| = 1$, тј. да је $H_1 \cap H_2$ једночлана група. Тај једини елемент мора бити јединични елемент, па је $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, што је и требало доказати.

76. а) Нека је $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, где је $\mathbb{Z}$ скуп целих, а $\mathbb{Q}$ скуп рационалних бројева, а операција $\cdot$ дефинисана са

$$(\forall a, c \in \mathbb{Z})(\forall b, d \in \mathbb{Q})\ (a, b) \cdot (c, d) = (a + c, 2^c b + d).$$

Доказати да је $(G, \cdot)$ група. Да ли је у питању Abel-ова група?

б) Испитати да ли скупови

$$H = \{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\} \quad \text{и} \quad K = \{(0, b) : b \in \mathbb{Q}\}$$

дефинишу две подгрупе групе $(G, \cdot)$.

77. Нека је скуп $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$. У скупу G дефинисана је операција $*$ на следећи начин:

$$(a, b) * (a_1, b_1) = (aa_1, ab_1 + b).$$

Доказати:

а) $(G, *)$ је група;

б) ако је $G_1 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$, тада је $(G_1, *)$ подгрупа групе $(G, *)$;

в) група $(G_1, *)$ изоморфна је групи $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$;

г) група $(G, *)$ хомоморфна је групи $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

<u>Упутство:</u> Уочити пресликавања:

в) $f : G_1 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ дефинисано са $f(a, 0) = a$;

г) $\varphi : G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ дефинисано са $\varphi(a, b) = a$.

78. Ако су F и H подгрупе групе $(G, \cdot)$, испитати да ли је релација ρ скупа G дефинисана на следећи начин

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow (\exists f \in F)(\exists h \in H)\ x = f \cdot y \cdot h$$

релација еквиваленције.

<u>Решење:</u> 1) Нека је x произвољан елемент скупа G. Ако за елементе f и h у дефиниционој једнакости за релацију ρ изаберемо неутрални елемент e групе G, који припада подгрупама F и H, добијамо $x = e \cdot x \cdot e$, чиме је својство рефлексивности доказано.

2) Нека су x и y произвољни елементи групе G. Тада је:

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow (\exists f \in F)(\exists h \in H)\ x = f \cdot y \cdot h.$$

Множењем последње једнакости са f^{-1} са леве и h^{-1} са десне стране, где су f^{-1} и h^{-1} елементи инверзни елементима f и h у групи G, добијамо једнакости

$$f^{-1} \cdot x \cdot h^{-1} = f^{-1} \cdot f \cdot y \cdot h \cdot h^{-1} = e \cdot y \cdot e = y.$$

Приметимо да $f \in F \Rightarrow f^{-1} \in F$ и $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$, јер су F и H групе. Уведимо нове ознаке: $k = f^{-1}$, $l = h^{-1}$. Тада важи:

$$(\exists f \in F)(\exists h \in H)\ x = f \cdot y \cdot h \Rightarrow (\exists k \in F)(\exists l \in H)\ y = k \cdot x \cdot l,$$

што је еквивалентно са $x \,\rho\, y \Rightarrow y \,\rho\, x$. Овим је доказано својство симетричности.

3) Нека су x, y и z произвољни елементи групе G. Тада је, по дефиницији релације ρ

$$x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists f_1 \in F)(\exists h_1 \in H)\ x = f_1 \cdot y \cdot h_1 \wedge (\exists f_2 \in F)(\exists h_2 \in H)\ y = f_2 \cdot z \cdot h_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists f_1 \in F)(\exists h_1 \in H)(\exists f_2 \in F)(\exists h_2 \in H)\ x = f_1 \cdot f_2 \cdot z \cdot h_2 \cdot h_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists f \in F)(\exists h \in H)\ x = f \cdot z \cdot h,$$

јер $f_1, f_2 \in F \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in F$ и $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_2 \cdot h_1 \in H$. Десна страна последње импликације еквивалентна је са $x \,\rho\, z$, чиме је доказано и својство транзитивности.

Дакле, релација ρ јесте релација еквиваленције.

79. Нека су H и K подгрупе групе G. Доказати да је скуп $H \cup K$ такође подгрупа групе G ако и само ако је тачна следећа скуповна дисјункција:

$$H \subset K \vee K \subset H.$$

Решење: Нека је $H \cup K$ подгрупа групе G у односу на операцију $\cdot$ групе. Претпоставимо супротно, тј. да ни једна од подгрупа H и K не садржи другу. Тада постоје елементи $a \in H \setminus K$ и $b \in K \setminus H$. Будући да је по претпоставци $H \cup K$ подгрупа, $a \cdot b \in H$ или $a \cdot b \in K$. Уколоко $a \cdot b \in H$, на основу чињенице да $a^{-1} \in H$ долазимо до контрадикције: $b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) \in H$. На исти начин, уколико $a \cdot b \in K$, на основу чињенице да $b^{-1} \in K$ добијамо $a = b^{-1} \cdot (b \cdot a) \in K$. Из добијених контрадикција следује тврђење.

Обратно, ако је $H \subset K$, тада је $H \cup K = K$ подгрупа групе G, а ако је $K \subset H$, опет је $H \cup K = H$ подгрупа групе G.

80. а) Нека је $(G, \cdot)$ група и $A, B \subset G$. Нека је

$$AB = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}.$$

Ако су $(A, \cdot)$ и $(B, \cdot)$ подгрупе групе $(G, \cdot)$, доказати да је и $(AB, \cdot)$ подгрупа ове групе ако и само ако је $AB = BA$.

б) Ако су $(A, \cdot)$ и $(B, \cdot)$ коначне подгрупе, доказати да је

$$|AB| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}.$$

Решење: а) Претпоставимо да је $AB = BA$ и нека $x, y \in AB$. Тада је $x = a_1 \cdot b_1$ и $y = a_2 \cdot b_2$, $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$, па из

$$x \cdot y = a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2,$$

с обзиром да је (због $AB = BA$)

$$b_1 \cdot a_2 = a_3 \cdot b_3, \quad a_3 \in A \text{ и } b_3 \in B,$$

следује

$$x \cdot y = (a_1 \cdot a_3) \cdot (b_3 \cdot b_2) \in AB.$$

Пошто је и $x^{-1} = (a_1 \cdot b_1)^{-1} = b_1^{-1} \cdot a_1^{-1} \in BA \ (= AB)$, тј. $x^{-1} \in AB$,

доказали смо да је $(AB, \cdot)$ подгрупа групе $(G, \cdot)$.

Ако је $(AB, \cdot)$ подгрупа, тада

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a \cdot e \in AB \ \wedge \ e \cdot b \in AB,$$

тј.

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a \in AB \ \wedge \ b \in AB$$

(јер су $(A, \cdot)$ и $(B, \cdot)$ подгрупе, па садрже неутрални елемент e), и због тога је $b \cdot a \in AB$, а то значи да је $BA \subset AB$. На исти начин може се показати да је $AB \subset BA$.

Према томе, $AB = BA$.

б) У скупу $A \times B$ дефинишимо релацију $\sim$ на следећи начин

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \overset{def}{\Leftrightarrow} a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2.$$

Једноставно се може проверити да је $\sim$ релација еквиваленције. Очигледно је $|AB| = |(A \times B) / \sim|$, где је на десној страни једнакости број класа еквиваленције на које релација $\sim$ дели скуп $A \times B$. Нека је

$$C_{(a,b)} = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \wedge (x, y) \sim (a, b)\}.$$

Функција $f : A \cap B \to C_{(a,b)}$, дефинисана са $f(x) = (a \cdot x, x^{-1} \cdot b)$, јесте бијекција (доказати и проверити да $f(x) \in C_{(a,b)}$), па је $|C_{(a,b)}| = |A \cap B|$ за свако $(a, b) \in A \times B$. Зато је

$$|AB| = |(A \times B)/\sim| = \frac{|A \times B|}{|C_{(a,b)}|} = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}.$$

81. Нека је $G = \{1, 2, \dots, p-1\}$, и нека је операција $\circ$ дефинисана као множење по модулу p. Доказати:

а) $(G, \circ)$ је комутативан моноид;

б) ако је p прост број, $(G, \circ)$ је Abel-ова група.

82. Операција $\circ$ у скупу $A = \{1, 3, 7, 9\}$ дефинисана је са

$$a \circ b = a \cdot_{10} b$$

(тј. као множење по модулу 10). Да ли је $(A, \circ)$ група? Ако јесте, да ли је та група циклична?

Решење: Из претходног задатка произлази да је операција $\circ$ асоцијативна. Таблица операције је:

$\circ$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

На основу таблице закључујемо:

1) $(\forall a, b \in A)\ a \circ b \in A$
2) Неутрални елемент је 1, тј. $(\forall a \in A)\ a \circ 1 = 1 \circ a = a$.
3) $(\forall a \in A)(\exists \bar{a} \in A)\ a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = 1$ јер:

за $a = 1$ је $\bar{a} = 1$,
за $a = 3$ је $\bar{a} = 7$,
за $a = 7$ је $\bar{a} = 3$,
за $a = 9$ је $\bar{a} = 9$.

Дакле, $(A, \cdot)$ је група, и то циклична. Генератори могу да буду 3 или 7, односно

$$A = \{1, 3, 7, 9\} = \{3^4, 3^1, 3^3, 3^2\} = \{7^4, 7^3, 7^1, 7^2\}.$$

83. Да ли скуп $A = \{1, 3, 7, 9\}$ представља групу у односу на операцију $\circ$ дефинисану са:

$$a \circ b = a \cdot_{10} b - \left[\frac{ab}{8}\right] \cdot 8,$$

где $\cdot_{10}$ означава множење по модулу 10 ?

84. Одредити све подгрупе цикличке групе C_{12} реда 12.

Решење: Нека је $C_{12} = \{e, a, a^2, \dots, a^{11}\}$. Ако је $(H, \cdot)$ подгрупа дате групе $(C_{12}, \cdot)$, према Lagrange-овој теореми $|H|$ је делилац броја 12, тј. $|H| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Због тога:

- ако је $|H| = 1$, тада је $H = \{e\}$;
- ако је $|H| = 2$, тада је $H = \{e, a^6\}$;
- ако је $|H| = 3$, тада је $H = \{e, a^4, a^8\}$;
- ако је $|H| = 4$, тада је $H = \{e, a^3, a^6, a^9\}$;
- ако је $|H| = 6$, тада је $H = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\}$;
- ако је $|H| = 12$, тада је $H = C_{12}$.

85. Доказати да је свака подгрупа цикличке групе циклична. Ако $m, n \in \mathbb{N}$ и $m|n$, конструисати подгрупу реда m цикличке групе реда n.

Решење: Нека је $(G, \circ)$ циклична група генерисана елементом a, $(H, \circ)$ подгрупа групе G и скуп $A = \{s : s \in \mathbb{N} \wedge a^s \in H\}$.
Ако је $A = \varnothing$, тада је $H = \{e\}$, па је H циклична.
Уколико је $A \neq \varnothing$, нека је $k = \min A$. За произвољни елемент a^j $(j \in \mathbb{N})$ подгрупе H важи $j = k \cdot q + r$ $(q \in \mathbb{N},\ 0 \le r < k)$ и $a^r = a^{j-kq} = a^j (a^k)^{-q} \in H$ (јер $a^j \in H$ и $(a^k)^{-q} \in H$ пошто је подгрупа затворена за степеновање). Из $k = \min A$, $a^r \in H$ и $0 \le r < k$ закључујемо да мора бити $r = 0$, па је $a^j = a^{kq} = (a^k)^q$, тј. a^k је генератор подгрупе H, која је, према томе, циклична.

86. У цикличкој групи C_n реда n генерисаној елементом a, елемент a^m $(m \in \mathbb{N})$ је генератор ако и само ако су n и m узајамно прости бројеви. Доказати.

Решење: Уколико је $NZD(n, m) = 1$, доказаћемо да су следећих n елемената: a^m, a^{2m}, ... , $a^{nm} = e$ међусобно различити, тј. да је a^m генераторски елемент. Ако би важило супротно, тј. да постоје $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ тако да је $a^{im} = a^{jm}$ $(i < j)$, било би $a^{(j-i)m} = e$, што доводи до закључка да постоји природан број k такав да је $(j - i)m = kn$. Тада на основу претпоставке $NZD(n, m) = 1$ и због $\frac{n}{m} = \frac{j-i}{k}$ закључујемо да $n \le j - i$, што није могућно јер су $i, j < n$. Према томе, a^m је генератор групе.

Обратно, ако је a^m генераторски елемент за цикличку групу

C_n са генератором a, доказаћемо да је $\mathrm{NZD}(m,n)=1$. Претпоставимо да је $\mathrm{NZD}(m,n)=d>1$. Уведимо ознаке $p=\frac{m}{d}$ и $q=\frac{n}{d}$. Тада из $mq=np$ следује закључак:

$$(a^m)^q=(a^n)^p=e.$$

Значи, a^m јесте генераторски елемент за само q елемената $\left(q=\frac{n}{d}<n\right)$, који се даљем множењем само понављају, што је контрадикција, па је зато $\mathrm{NZD}(m,n)=1$.

87. Доказати да је неутрални елемент групе једини њен идемпотентни елемент.

Решење: Нека је x елемент групе који има особину идемпотентности

$$x^2=x.$$

Множењем са x^{-1} добија се $x=e$ (e је јединични елемент групе). С друге стране, важи $e^2=e$. Овим је тврђење доказано.

88. Ако су сви елементи групе $(G,\cdot)$ инволутивни, тј. ако је

$$(\forall a\in G)\ a^2=e,$$

где је e неутрални елемент, доказати да је група $(G,\cdot)$ Abelова.

Решење: Нека су x и y произвољни елементи скупа G; тада је

$$(x\cdot y)^2=e \Rightarrow (x\cdot y)\cdot(x\cdot y)=e \Rightarrow x\cdot(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)\cdot y=x\cdot y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2\cdot y\cdot x\cdot y^2=x\cdot y \Rightarrow e\cdot y\cdot x\cdot e=x\cdot y \Rightarrow y\cdot x=x\cdot y.$$

89. Доказати да у коначној групи са парним бројем елемената постоје бар два инволутивна елемента.

90. У групи реда седам решити једначину

$$x^4=y^3.$$

Решење: Како је једина група реда 7 циклична, дату једначину треба решити у групи $C_7=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,a^7=e\}$. Биће:

x	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
x^4	e	a^4	a	a^5	a^2	a^6	a^3

и

y	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
y^3	e	a^3	a^6	a^2	a^5	a	a^4

,

па су сва решења једначине

$$(x,y)=\{(e,e),(a,a^6),(a^2,a^5),(a^3,a^4),(a^4,a^3),(a^5,a^2),(a^6,a)\}.$$

91. Доказати да у свакој групи $(G,\cdot)$ важе следећа тврђења.

а) Елементи $a\cdot b$ и $b\cdot a$ имају исти ред.

б) Ако су a и b пермутабилни елементи, онда су и елементи a^m и b^n пермутабилни, где су m и n цели бројеви.

Решење: а) Нека је ред елемента $a\cdot b$ број k, односно

$$k=\min\{s \mid s\in\mathbb{N}\wedge(a\cdot b)^s=e\}.$$

Тада је

$$(a\cdot b)^k=e \Rightarrow (a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ \ldots\ \cdot(a\cdot b)=e \ (k \text{ пута}).$$

Помножимо ову једнакост са a^{-1} са леве и са a са десне стране, па је

$$a^{-1}\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)\cdot a=a^{-1}\cdot e\cdot a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)\cdot a=e \Rightarrow$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow (b\cdot a)^k=e.$$

Поставља се још питање да ли је k најмањи природан број за који је $(b\cdot a)^k=e$?

Претпоставимо да $(\exists p\in\mathbb{N})(p<k\wedge(b\cdot a)^p=e)$. Тада бисмо на исти начин показали да је и $(a\cdot b)^p=e$, супротно претпоставци да је k ред елемента $a\cdot b$.

Дакле, заиста је $k=\min\{i \mid i\in\mathbb{N}\wedge(b\cdot a)^i=e\}$, односно k је ред елемента $b\cdot a$.

б) Ако су m,n природни бројеви, тврђење следује према

$$a^m \cdot b^n = a^{m-1} \cdot (a \cdot b) \cdot b^{n-1} = a^{m-1} \cdot (b \cdot a) \cdot b^{n-1} =$$
$$= \dots = a^{m-2} \cdot (b \cdot a) \cdot a \cdot b^{n-1} = \dots = b \cdot a^m \cdot b^{n-1} = \dots = b^n \cdot a^m.$$

Из $a \cdot b = b \cdot a$ множењем слева и здесна са a^{-1} следује

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot (b \cdot a) \cdot a^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot (b \cdot a^{-1}) = (a^{-1} \cdot b) \cdot (a \cdot a^{-1}) \Rightarrow b \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b,$$

па су и елементи a^{-1} и b пермутабилни. Аналогно су a и b^{-1} пермутабилни. Према дефиницији степена за експонент 0 и негативне експоненте следује тврђење и у осталим случајевима.

92. Доказати да елементи коначног реда произвољне Abel-ове групе чине њену подгрупу.

Решење: Означимо са H скуп свих елемената из Abel-ове групе G чији је ред коначан. Ако су $a, b \in H$, онда је за неке $m, n \in \mathbb{N}$ $a^n = e$ и $b^m = e$, па је

$$(ab^{-1})^{nm} = a^{nm}(b^{-1})^{nm} = a^{nm}(b^{nm})^{-1} = e,$$

што значи да је ред елемента ab^{-1} такође коначан.

Према томе, $ab^{-1} \in H$, па је H подгрупа групе G.

93. Нека је $(G, \cdot)$ група и $a, b \in G$ $(a \neq b)$. Доказати да елементи a, $b^{-1}ab$ имају исти ред.

Решење: Ако је $a^n = e$, тада је

$$(b^{-1}ab)^n = (b^{-1}ab) \cdot (b^{-1}ab) \cdots (b^{-1}ab) =$$
$$= b^{-1}a(bb^{-1})a \cdots a(bb^{-1})ab = b^{-1}a^n b = b^{-1}eb = e.$$

Обратно, ако је $(b^{-1}ab)^n = e$, биће $b^{-1}a^n b = e$, тј. $a^n = beb^{-1} = e$, чиме је доказ завршен.

94. Да ли постоји група са тачно три инволутивна елемента?

Резултат: Не.

95. Нека је $(G, \cdot)$ група реда pq, где су p и q $(p \neq q)$ прости бројеви. Доказати да је свака права подгрупа ове групе циклична. Ако су елементи $x, y \in G$ реда p и q, респективно, доказати да је група $(G, \cdot)$ циклична ако и само ако је за све такве $x, y \in G$ $x \cdot y = y \cdot x$.

4. 2. ПРСТЕНИ И ПОЉА

1. Проверити да у прстену $(P, +, \cdot)$ важи:

$$(\forall x, y \in P)\ -(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y.$$

2. Доказати да у прстену $(P, +, \cdot)$ важе закони:

а) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$, где је 0 неутрални елемент за операцију $+$;

б) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$;

в) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Решење: а) $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow 0 = x \cdot 0$; аналогно за $0 \cdot x$.

б) $x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0 \Rightarrow (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$; доказ друге једнакости је аналоган.

в) На основу б) је $(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(x \cdot y) = x \cdot y$.

3. Нека је $(P, +, \cdot)$ алгебарска структура која задовољава све аксиоме прстена изузев комутативности сабирања. Ако P има десну јединицу, доказати да је $(P, +, \cdot)$ прстен.

Решење: Ако је 1 десна јединица, тада је, за произвољно $b \in P$, на основу претходног задатка

$$-(b \cdot 1) = -b = b(-1).$$

Даље је

$$0 = (-b) + (-a) + a + b = b(-1) + a(-1) + a + b = (b + a)(-1) + a + b,$$

тј.

$$a + b = -((b + a)(-1)).$$

Како је на основу претходног задатка и

$$b + a = -((b + a)(-1)),$$

мора бити

$$a + b = b + a,$$

па важи и комутативност операције $+$. Дакле, $(P, +, \cdot)$ јесте прстен, што је и требало доказати.

4. Ако је у прстену са јединицом $(P,+,\cdot)$ елеменат $a\in P$ инвертибилан у односу на множење, доказати да је исти такав и елеменат $-a$, као и да важи:

$$(-a)^{-1} = -a^{-1}.$$

5. Нека је $(P,+,\cdot)$ прстен са јединицом такав да је $|P|\geq 2$. Доказати да су тада нула и јединица прстена међусобно различити елементи скупа P.

6. Ако су у прстену $(P,+,\cdot)$ елементи a и b пермутабилни, доказати да су такви и елементи a и $-b$, односно $-a$ и b, као и $-a$ и $-b$.

7. Ако се у адитивној Abel-овој групи $(A,+)$ уведе операција $\circ$ са

$$(\forall x,y\in A)\ x\circ y = 0,$$

где је 0 неутрални елемент групе $(A,+)$, доказати да је $(A,+,\circ)$ прстен.

8. Нека је дат скуп $P=\{a,b,c,d\}$. Бинарне операције $+$ и $\cdot$ дефисане су Cayley-јевим таблицама:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	a	a	a
d	a	b	c	d

Доказати да је $(P,+,\cdot)$ прстен.

Решење: Структура $(P,+)$ јесте Abel-ова група јер је изоморфна Klein-овој четворној групи. Проверимо да ли је множење асоцијативно, тј. да ли је

$$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$$

за све $x,y,z\in P$.

Уколико је x једнако a или c, тада је

$$x\cdot(y\cdot z) = a = (x\cdot y)\cdot z,$$

а ако је x једнако b или d, онда је

$$x\cdot(y\cdot z) = y\cdot z = (x\cdot y)\cdot z,$$

што значи да је множење заиста асоцијативно.

Слично се може проверити да важе оба дистрибутивна закона, па је $(P,+,\cdot)$ прстен, што је и требало доказати.

9. Дат је скуп $P=\{x,y,z,u\}$ и Cayley-јеве таблице операција $+$ и $\cdot$

$+$	x	y	z	u
x	x	.	z	.
y	y	z	.	.
z	.	.	x	.
u	.	.	.	z

$\cdot$	x	y	z	u
x	x	x	x	x
y	x	y	.	.
z	x	.	.	z
u	x	u	z	.

Попунити таблице тако да $(P,+,\cdot)$ буде прстен.

10. Ако структура $(P,+,\cdot)$ има следеће особине:

1^0 $(P,+)$ је Abel-ова група,

2^0 $(P,\cdot)$ је комутативна семигрупа,

3^0 операција $\cdot$ је лево (или десно) дистрибутивна у односу на $+$,

доказати да је $(P,+,\cdot)$ комутативан прстен.

11. У прстену целих бројева $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ дефинисане су операције $\oplus$ и $\odot$:

$$a\oplus b = a+b+1,$$

$$a\odot b = a\cdot b + a + b.$$

Доказати да је $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ комутативан прстен са јединичним елементом. Испитати да ли постоји изоморфизам прстена $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ и

$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

<u>Решење:</u> 1) $(\mathbb{Z}, \oplus)$ је комутативна група због:

i) $a \oplus b = a + b + 1 \in \mathbb{Z}$;

ii) $(a \oplus b) \oplus c = (a + b + 1) + c + 1 = a + (b + c + 1) + 1 = a \oplus (b \oplus c)$;

iii) $a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$;

iv) $a \oplus e = a + e + 1 = a \Leftrightarrow e = -1 \in \mathbb{Z}$;

v) $a \oplus a' = a + a' + 1 = -1 \Leftrightarrow a' = -a - 2 \in \mathbb{Z}$.

2) $(\mathbb{Z}, \odot)$ је комутативна семигрупа са јединицом због:

i) $a \odot b = ab + a + b \in \mathbb{Z}$;

ii) $(a \odot b) \odot c = (ab+a+b)c + ab + a + b + c = a(bc+b+c) + a + bc + b + c = a \odot (b \odot c)$;

iii) $a \odot b = ab + a + b = ba + b + a = b \odot a$;

iv) $a \odot e_1 = a \Leftrightarrow ae_1 + a + e_1 = a \Leftrightarrow e_1 = 0 \in \mathbb{Z}$.

3) Лева дистрибутивност важи јер је

$$a \odot (b \oplus c) = a(b + c + 1) + a + b + c + 1 = (a \odot b) \oplus (a \odot c),$$

а десна је последица леве и комутативности операције $\odot$.

Из 1), 2) и 3) следује тврђење.

Уколико са f означимо евентуални изоморфизам прстена $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ на $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, начин дефинисања операције $\oplus$ упућује на претпоставку да је

$$(\forall x \in \mathbb{Z}) \ f(x) = x - 1.$$

Очигледно је да је f бијекција и да је

$$f(x + y) = x + y - 1 = x - 1 + y - 1 + 1 = f(x) \oplus f(y),$$

$$f(x \cdot y) = xy - 1 = xy - y - x + 1 + x - 1 + y - 1 = (x - 1)(y - 1) + x - 1 + y - 1 = f(x) \odot f(y),$$

па је f заиста изоморфизам.

12. На скупу $\mathbb{R}^2$ дефинисане су операције $+$ и $\cdot$ помоћу:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c + 1, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd + a + c, bc + ad + b + d).$$

Доказати да је $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ комутативан прстен са јединицом.

13. Доказати да скуп реалних бројева облика $a + b\sqrt{2}$, где су a и b цели бројеви, представља комутативан прстен са јединицом у односу на сабирање и множење. Да ли је овај прстен област целих?

<u>Напомена:</u> Видети и зад. 27.

14. Нека је C скуп непрекидних реалних функција дефинисаних на сегменту $[-1, 1]$. Доказати да је структура $(C, \oplus, \circ)$, где је за свако $f, g \in A$ и за произвољно $x \in \mathbb{R}$

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

комутативан прстен са јединицом. Да ли је овај прстен област целих?

15. Доказати да у произвољном прстену $(P, +, \cdot)$ за дати елемент a и произвољне елементе x и y важи импликација

$$a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$$

ако и само ако a није леви делилац нуле.

<u>Решење:</u> Нека је

$$(\forall x, y \in P) \ a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y.$$

Тада за $y = 0$ имамо

$$(\forall x \in P) \ (a \cdot x = a \cdot 0 \Rightarrow x = 0).$$

Како је, на основу познате теореме (зад. 2.) $a \cdot 0 = 0$, биће

$$(\forall x \in P) \ (a \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0)$$

$$\Rightarrow (\forall x \in P) \ \neg(a \cdot x = 0 \land x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \neg(\exists x \in P) \ (a \cdot x = 0 \land x \neq 0),$$

тј. a није леви делилац нуле.

Претпоставимо сада да a није леви делилац нуле.

За све $x, y \in P$ имамо:

$$a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow a \cdot x + (-(a \cdot y)) = 0,$$

одакле, на основу познате теореме (зад. 2.) и дистрибутивности следује:

$$a\cdot(x+(-y))=0.$$

Пошто a није леви делилац нуле, мора бити $x+(-y)=0$, одакле је

$$x=y.$$

Овим је тврђење доказано.

16. Доказати да инвертибилан елемент прстена не може бити делилац нуле.

17. Нека је $P=(P,+,\cdot)$ коначан прстен у коме постоји бар један елемент који није делилац нуле. Доказати:
   а) прстен P је прстен са јединицом;
   б) уколико у прстену P постоји елемент b који нема инверзни елемент b^{-1} у односу на множење $\cdot$, тада је b делилац нуле овог прстена.

Упутство: а) Означимо са a елемент прстена P који није делилац нуле и посматрајмо подскуп $A=\{a^k \mid k\in\mathbb{N}\}\subset P$. Због коначности скупа P и подскуп A је коначан, па зато постоје природни бројеви m и n такви да је $a^m=a^n$ и $m>n$. Доказати да је тада $e=a^{m-n}$ јединица прстена P.

б) Поћи од претпоставке да b није делилац нуле и применити резултат а).

18. Доказати да у Boole-овом прстену $(P,+,\cdot)$ важи:
   а) $(\forall x\in P)\ x+x=0$;
   б) $(\forall x,y\in P)\ x\cdot y=y\cdot x$.

Решење: а) Из дефиниције Boole-овог прстена (идемпотентности) је

$$(\forall x\in P)\ (x+x)^2=x+x.$$

Како је $(x+x)^2=(x+x)\cdot(x+x)=x^2+x^2+x^2+x^2=x+x+x+x$, биће

$$x+x+x+x=x+x.$$

Ако обема странама ове једнакости додамо $-(x+x)$, добићемо

$$x+x=0.$$

б) За све $x,y\in P$ је

$$x+y=(x+y)^2=(x+y)\cdot(x+y)=$$
$$=x^2+x\cdot y+y\cdot x+y^2=x+x\cdot y+y\cdot x+y,$$

па следује да је

$$x\cdot y+y\cdot x=0.$$

Међутим, због а) важи $x\cdot y+x\cdot y=0$, па је $x\cdot y+y\cdot x=x\cdot y+x\cdot y$, тј.

$$x\cdot y=y\cdot x.$$

19. Доказати: ако је прстен $(P,+,\cdot)$ област целих и ако је елемент $e\in P$, $e\neq 0$, идемпотентан, тада је e јединица овог прстена.

20. Доказати да Boole-ов прстен са више од два елемента није област целих.

21. Нека је $(P,+,\cdot)$ прстен у коме важи

$$(\exists e\in P)(\forall x\in P)\ x\cdot e=e\cdot x=x$$

и

$$(\forall x\in P)\ x\cdot x=x,$$

тј. нека је $(P,+,\cdot)$ Boole-ов прстен. Дефинишимо у скупу P бинарне операције $\wedge$ и $\vee$ на следећи начин:

$$x\wedge y=x\cdot y,$$
$$x\vee y=x+y+x\cdot y.$$

Доказати да је $(P,\wedge,\vee)$ Boole-ова алгебра.

Решење: Операције су комутативне, јер за све $x,y\in P$ важи:

$$x\wedge y=x\cdot y=y\cdot x=y\wedge x;$$

$$x \vee y = x + y + x\cdot y = y + x + y\cdot x = y \vee x.$$

Операције су и асоцијативне, јер је:

$$x \wedge (y \wedge z) = x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z = (x \wedge y) \wedge z;$$

$$x \vee (y \vee z) = x + (y + z + y\cdot z) + x\cdot(y + z + y\cdot z) =$$
$$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz =$$
$$= (x + y + x\cdot y) + z + (x + y + x\cdot y)\cdot z = (x \vee y) \vee z.$$

Такође важе обе дистрибутивности, пошто је:

$$x \wedge (y \vee z) = x\cdot(y + z + y\cdot z) = x\cdot y + x\cdot z + x\cdot x\cdot y\cdot z =$$
$$= (x \wedge y) + (x \wedge z) + x\cdot y\cdot z =$$
$$= (x \wedge y) + (x \wedge z) + (x \wedge y)\cdot(x \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$
$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x + y + x\cdot y)\cdot(x + z + x\cdot z) =$$
$$= x^2 + x\cdot z + x^2\cdot z + y\cdot x + y\cdot z + y\cdot x\cdot z + x^2\cdot y + x\cdot y\cdot z + x\cdot y\cdot x\cdot z =$$
$$= x + (x\cdot z + x\cdot z) + (y\cdot x + x\cdot y) + y\cdot z + (x\cdot y\cdot z + y\cdot x\cdot z) + x\cdot y\cdot z =$$
$$= x + y\cdot z + x\cdot y\cdot z = x \vee (y \wedge z).$$

Лако се проверава да су нула и јединица прстена редом неутрални елементи за операције $\vee$ и $\wedge$.

Најзад, замењујући $\bar{x} = 1 - x$ у услов

$$(\forall x \in P)(\exists \bar{x} \in P)\ x \vee \bar{x} = 1 = e \ \wedge\ x \wedge \bar{x} = 0$$

уверавамо се да сваки елемент $x \in P$ има свој комплемент $\bar{x}$, чиме је доказ завршен.

22. Нека је $(B, \vee, \wedge)$ Boole-ова алгебра и нека су операције $+$ и $\cdot$ дефинисане помоћу:

$$x + y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y),$$
$$x\cdot y = x \wedge y.$$

Доказати да је $(B, +, \cdot)$ Boole-ов прстен.

23. Да ли је могућно у неком скупу A дефинисати операције $+$ и $\cdot$ тако да обе структуре $(A, +, \cdot)$ и $(A, \cdot, +)$ буду прстени?

Решење: Претпоставимо да су $(A, +, \cdot)$ и $(A, \cdot, +)$ прстени. Пошто је $(A, \cdot)$ Abel-ова група, за елемент $0 \in A$ (неутрални елемент за операцију $+$) постоји инверзни елемент у односу на

операцију $\cdot$ и нека је то елемент $0' \in A$. Дакле, $0\cdot 0' = 1$, где је $1 \in A$ неутрални елемент за операцију $\cdot$. С друге стране, из аксиома прстена $(A, +, \cdot)$ следује да је $0\cdot x = 0$ за свако $x \in A$, па и за $x = 0$. Дакле $0\cdot 0' = 0$. Одавде добијамо $0 = 1$, а онда за сваки елемент $x \in A$ важи $x = 1\cdot x = 0\cdot x = 0$, па скуп A има само један елемент. Према томе, одговор је потврдан, при чему је за то потребан и довољан услов дат са $|A| = 1$.

24. Нека је $(P, +, \cdot)$ прстен и скуп $T \subset P$. Доказати да је $(T, +, \cdot)$ потпрстен прстена $(P, +, \cdot)$ ако и само ако важи:

$$(\forall x, y \in T)\ (x - y \in T \ \wedge\ x\cdot y \in T).$$

Решење: Нека је $(T, +, \cdot)$ потпрстен прстена $(P, +, \cdot)$. Тада за свако $x, y \in T$ важи:

$$x - y = x + (-y) \in T \quad (\text{јер је } (T, +) \text{ група}),$$
$$x\cdot y \in T \quad (\text{јер је } (T, \cdot) \text{ групоид}).$$

Нека је сада

$$(\forall x, y \in T)\ x - y \in T \tag{1}$$

и

$$(\forall x, y \in T)\ x\cdot y \in T. \tag{2}$$

Због (1) је $(T, +)$ подгрупа групе $(P, +)$, а комутативност се наслеђује из Abel-ове групе $(P, +)$, па је и $(T, +)$ Abel-ова група. Због (2) је $(T, \cdot)$ групоид, а асоцијативност се наслеђује из $(P, \cdot)$, па је $(T, \cdot)$ семигрупа. Дистрибутивност операције $\cdot$ према $+$ наслеђује се из прстена $(P, +, \cdot)$.

25. У пољу $(A, +, \cdot)$ дефинишимо дељење елементом различитим од нуле на следећи начин:

$$\frac{a}{b} = a\cdot b^{-1}.$$

Доказати да за $b, d \neq 0$ важи:

а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a\cdot d = b\cdot c;$

б) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$.

26. Испитати да ли је $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ поље, где су операције $+$ и $\cdot$ дате са

$$(x,y)+(u,v) = (x+u,y+v),$$
$$(x,y)\cdot(u,v) = (xu-2yv,xv+yu).$$

<u>Решење:</u> 1) Докажимо да је $(\mathbb{R}^2,+)$ Abel-ова група.

i) Затвореност је очигледна.

ii) $((x,y)+(u,v))+(s,t) = ((x+u)+s,(y+v)+t) =$
$$= (x+(u+s),y+(v+t)) = (x,y)+((u,v)+(s,t)),$$
тј. операција је асоцијативна.

iii) Комутативност важи јер је
$$(x,y)+(u,v) = (x+u,y+v) = (u,v)+(x,y).$$

iv) Неутрални елемент је $0=(0,0)$ јер $(x,y)+(0,0)=(x,y)$.

v) Из $(x,y)+(x_1,y_1)=(0,0)$ је $x+x_1=0$ и $y+y_1=0$, па је супротни елемент елементу (x,y) дат са $(x_1,y_1)=(-x,-y)$.

2) Докажимо да је $(\mathbb{R}^2\setminus\{0\},\cdot)$ такође Abel-ова група.

i) Треба проверити да ли је $(xu-2yv,xv+yu) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Претпоставимо да то није тачно. Тада би важило:
$$xu-2yv=0,$$
$$xv+yu=0.$$
Множењем прве једначине са $-v$, а друге са u, и њиховим сабирањем добија се
$$2yv^2+yu^2=0,$$
а множењем прве са x, а друге са $2y$, и сабирањем
$$x^2u+2y^2u=0.$$
Из последње две једначине следује да је $2v^2+u^2=0$ или $y=0$, као и $x^2+2y^2=0$ или $u=0$. Међутим, из $y=0$ следује да је $x=0$ или $u=v=0$, а из $u=0$ добија се $v=0$ или $x=y=0$, па како то није могућно због услова задатка, следује затвореност скупа $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ у односу на операцију $\cdot$.

ii) $((x,y)\cdot(u,v))\cdot(s,t) = ((xu-2yv,xv+yu)\cdot(s,t) =$

$$= (xus-2yvs-2xvt-2yut,\ xut-2yvt+xvs+yus) =$$
$$= (x(us-2vt)-2y(vs+ut),\ x(ut+vs)+y(-2vt+us)) =$$
$$= (x,y)\cdot(us-2vt,ut+vs) = (x,y)\cdot((u,v)\cdot(s,t)),$$
па структура јесте асоцијативна.

iii) Множење је и комутативно јер је
$$(x,y)\cdot(u,v) = (xu-2yv,xv+yu) = (u,v)\cdot(x,y).$$

iv) Претпоставимо да је неутрални елемент (e_1,e_2). Тада је:
$$(x,y)\cdot(e_1,e_2) = (x,y),$$
одакле је
$$xe_1-2ye_2=x,$$
$$xe_2+ye_1=y,$$
односно
$$x(e_1-1)-2ye_2=0,$$
$$xe_2+y(e_1-1)=0,$$
што даје $e_1=1$ и $e_2=0$. Према томе, јединични елемент је
$$1=(1,0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}.$$

v) Испитајмо постојање инверзних екемената. Из $(x,y)\cdot(x_2,y_2)=(1,0)$ имамо
$$xx_2-2yy_2=1,$$
$$xy_2+yx_2=0.$$
Множењем прве једначине са x, а друге са $2y$, и сабирањем добија се
$$(x^2+2y^2)x_2=x,$$
одакле је
$$x_2=\frac{x}{x^2+2y^2},$$
и, слично,
$$y_2=-\frac{y}{x^2+2y^2},$$
јер $x^2+2y^2\neq0$. Дакле, инверзни елемент елементу (x,y) је
$$(x,y)^{-1}=(x_2,y_2)=\left(\frac{x}{x^2+2y^2},\ -\frac{y}{x^2+2y^2}\right).$$

3) Операција $\cdot$ дистрибутивна је према $+$ јер је
$$(x,y)\cdot((u,v)+(s,t)) = (x,y)\cdot(u+s,v+t) =$$
$$= (xu+xs-2yv-2yt,\ xv+xt+yu+ys) =$$
$$= (xu-2yv,xv+yu)+(xs-2yt,xt+ys) =$$

$$= (x, y)\cdot(u, v) + (x, y)\cdot(s, t).$$

Овим је доказано да је структура $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ поље.

27. Нека је M скуп свих реалних бројева облика $x + y\sqrt{m}$, где су x и y рационални бројеви, а m дати природан број такав да је $\sqrt{m}$ ирационалан број. Доказати да је $(M, +, \cdot)$ поље, где операције $+$ и $\cdot$ имају уобичајено значење.

28. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бијективно пресликавање. Ако су операције $*$ и $\circ$ дефинисане изразима

$$a * b = f^{-1}(f(a) + f(b))$$

и

$$a \circ b = f^{-1}(f(a)\cdot f(b)),$$

доказати да је $(\mathbb{R}, *, \circ)$ поље изоморфно пољу $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Решење: Како је f бијекција, биће $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = I$, где је I идентичко пресликавање. Због тога је

$$f(a * b) = f(a) + f(b),$$
$$f(a \circ b) = f(a)\cdot f(b),$$

па видимо да су структуре изоморфне, а да је изоморфизам сама функција f.

29. Доказати да је $(S, +_n, \cdot_n)$ поље $(\mathrm{GF}(n))$, где је $S = \{0, 1, \dots n-1\}$, n је прост број, а $+_n$ и $\cdot_n$ означавају сабирање и множење по модулу n.

30. Конструисати Cayley-јеве таблице сабирања и множења за $\mathrm{GF}(n)$ ако је:

а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = 7$.

Решење: а) $\mathrm{GF}(3) = (S, +_3, \cdot_3)$ где је $S = \{0, 1, 2\}$:

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

.

б) $\mathrm{GF}(5) = (S, +_5, \cdot_5)$ где је $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

.

31. У мултипликативној групи поља $\mathrm{GF}(7)$ одредити:

а) ред сваког елемента,

б) генераторе групе,

в) цикличке подгрупе,

г) елементе који су сами себи инверзни.

Решење: Мултипликативна група поља $\mathrm{GF}(7)$ јесте структура $(P, \cdot_7)$ где је $P = \{1, 2, \dots, 6\}$:

а) Директном провером налазимо да је $r(1) = 1$, $r(2) = 3$, $r(3) = 6$, $r(4) = 3$, $r(5) = 6$, $r(6)=2$, где је $r(x)$ ред елемента x (најмањи природни број k такав да је $x^k = 1$).

б) Генератори цикличке групе су елементи чији је ред једнак реду групе; према томе, генератори групе $(P, \cdot_7)$ су 3 и 5.

в) Осим целе групе (цикличка група реда 6) и тривијалне подгрупе $\{1\}$ (цикличка група реда 1) ова група има још и цикличке подгрупе реда 2 и 3. Подгрупа реда 2 генерисана је елементом реда 2, а то је 6, дакле $H_2 = \{1, 6\}$. Подгрупа реда 3 генерисана је елементом реда 3, а то је 2, или 4, па је због тога $H_3 = \{1, 2, 4 (=2\cdot_7 2)\} = \{1, 4, 2 (=4\cdot_7 4)\}$.

г) Ако је елемент x сам себи инверзан, мора да важи $r(x) \in \{1, 2\}$ Значи, то су елементи 1 и 6.

32. Доказати да у коначном пољу $GF(n) = (P, +_n, \cdot_n)$, где је n прост број, важи

$$(\forall a \in P)\ a^n = a.$$

Упутство: Мултипликативна група овог поља јесте група реда $n-1$.

33. Доказати да у коначном пољу карактеристике p важи релација:

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

Решење: По дефиницији карактеристике коначног поља, p је најмањи природан број за који важи $p \cdot 1 = 0$, где је 1 неутрални елемент операције $\cdot$, а 0 неутрални елемент операције $+$. Нека је дато поље $(F, +, \cdot)$ карактеристике p. Из $p \cdot 1 = 0$ следује $p \cdot a = 0$ за свако $a \in F$, јер је $p \cdot a = p \cdot (1 \cdot a) = (p \cdot 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$.
С друге стране, у пољу важи (биномна формула)

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} y^k.$$

За $k = 1, 2, \dots, p-1$, сабирци су облика $p \cdot a$, за неко $a \in F$, па су сви једнаки 0. Дакле,

$$(x+y)^p = x^p + y^p,$$

што је и требало доказати.

34. Нека су у скупу $\mathbb{Z}^2$ дефинисане бинарне операције $\circ$ и $*$ помоћу

$$(a,b) \circ (c,d) = (a+c, b+d);$$
$$(a,b) * (c,d) = (ac, ad+bc).$$

Испитати какву структуру образује уређена тројка $(\mathbb{Z}^2, \circ, *)$.

Решење: Јасно је да је пар $(\mathbb{Z}^2, \circ)$ Abel-ова група. Операција $*$ је унутрашња у скупу $\mathbb{Z}^2$ и очигледно је комутативна. Такође је

$$\big((a,b)*(c,d)\big)*(e,f) = (ac, ad+bc)*(e,f) =$$
$$= (ace, acf+ade+bce) = (a,b)*(ce, cf+de) =$$
$$= (a,b)*\big((c,d)*(e,f)\big),$$

па је $(\mathbb{Z}^2, \circ)$ семигрупа. Неутрални елемент једнак је $(1,0)$. Елемент инверзан елементу (a,b) био би $\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a^2}\right)$, али такви уређени парови у општем случају нису елементи скупа $\mathbb{Z}^2$. Како важи дистрибутивност (доказивање се препушта читаоцу), закључујемо да је $(\mathbb{Z}^2, \circ, *)$ комутативан прстен са јединицом.
Напомена: Уређена тројка $(\mathbb{Q}^2, \circ, *)$ била би поље.

35. У скупу уређених парова реалних бројева уведене су операције $\oplus$ и $\odot$ помоћу

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1x_2 + ay_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2),$$

где је a дати реални број. Испитати када $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ има структуру
а) прстена; б) тела; в) поља.

36. Нека су у скупу $\mathbb{Q}$ операције $\oplus$ и $\odot$ дефинисане као у зад. 11. Испитати природу структуре $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$.

37. Ако је A произвољан скуп, испитати природу структуре $(\mathcal{P}(A), \Delta, \cap)$.

38. Доказати да скуп бројева облика $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где су a, b и c рационални бројеви, образује поље у односу на операције сабирања и множења.

Решење: Означимо са $S = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ посматрани скуп и докажимо да је $(S, +, \cdot)$ поље.
Треба најпре доказати да је $(S, +)$ Abel-ова група; то може да се учини провером по дефиницији или тако што ће се показати да

је $(S,+)$ подгрупа групе $(\mathbb{R},+)$. Послужимо се овим другим начином. Заиста, $S \subset \mathbb{R}$ (на основу дефиниције скупа S) и $S \neq \varnothing$ (јер нпр. $1 + 1\cdot\sqrt[3]{2} + 1\cdot\sqrt[3]{4} \in S$). За $x, y \in S$ важи

$$x + y = (a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) + (a_2 + b_2\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{4}) =$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{2} + (c_1 + c_2)\sqrt[3]{4},$$

па, због

$$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Q}$$

следује

$$(a_1 + a_2), (b_1 + b_2), (c_1 + c_2) \in \mathbb{Q},$$

односно

$$x + y \in S.$$

Такође, ако $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in S$, видимо да и

$$-x = -a - b\sqrt[3]{2} - c\sqrt[3]{4} \in S.$$

Из претходних чињеница следује да је $(S,+)$ подгрупа групе $(\mathbb{R},+)$ (видети теорему 1. одељка 4.2.2 из [11]). Ова група је и Abel-ова, јер се комутативност наслеђује из Abel-ове групе $(\mathbb{R},+)$.

Докажимо на исти начин да је $(S\setminus\{0\},\cdot)$ Abel-ова група, тј. докажимо да је $(S\setminus\{0\},\cdot)$ подгрупа групе $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.
Очигледно, $S\setminus\{0\} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $S\setminus\{0\} \neq \varnothing$ (нпр. $1 \in S$).
За све $x, y \in S\setminus\{0\}$ важи:

$$x\cdot y = (a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})\cdot(p + q\sqrt[3]{2} + r\sqrt[3]{4}) =$$
$$(ap+2br+2cq) + (aq+bp+2cr)\sqrt[3]{2} + (ar+bq+cp)\sqrt[3]{4} = M + N\sqrt[3]{2} + T\sqrt[3]{4}.$$

Није тешко показати да је $M^2 + N^2 + T^2 \neq 0$, па следује да је $x\cdot y \in S\setminus\{0\}$.
Користећи факторизацију

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - AC)$$

имаћемо:

$$x^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{a^2 + b^2\sqrt[3]{4} + 2c^2\sqrt[3]{2} - ab\sqrt[3]{2} - 2bc - ac\sqrt[3]{4}}{a^2 + b^2\sqrt[3]{4} + 2c^2\sqrt[3]{2} - ab\sqrt[3]{2} - 2bc - ac\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \frac{(a^2-2bc) + \sqrt[3]{2}(2c^2-ab) + \sqrt[3]{4}(b^2-ac)}{a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6ab} \in S\setminus\{0\}.$$

Комутативност се наслеђује из Abel-ове групе $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

3) Дистрибутивност операције $\cdot$ према $+$ наслеђује се из поља

$(\mathbb{R},+,\cdot)$.

Према томе, из 1), 2) и 3) следује да $(S,+,\cdot)$ јесте поље.

39. Нека је $(K,\oplus,\odot)$ прстен свих реалних функција $f(x)$ дефинисаних на читавом скупу $\mathbb{R}$, где су операције $\oplus$ и $\odot$ дате са:

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$(f_1 \odot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

за свако $x \in \mathbb{R}$, и нека је c дати реални број. Испитати да ли је пресликавање $\varphi : K \to \mathbb{R}$, дато са $\varphi(f(x)) = f(c)$

а) хомоморфизам,

б) изоморфизам

структуре $(K,\oplus,\odot)$ на поље реалних бројева.

<u>Решење:</u> а) За свако $f_1, f_2 \in K$ важиће:

$$\varphi((f_1 \oplus f_2)(x)) = (f_1 \oplus f_2)(c) = f_1(c) + f_2(c) = \varphi(f_1(x)) + \varphi(f_2(x))$$

и

$$\varphi((f_1 \odot f_2)(x)) = (f_1 \odot f_2)(c) = f_1(c)\cdot f_2(c) = \varphi(f_1(x))\cdot\varphi(f_2(x)).$$

За свако $r \in \mathbb{R}$ постојаће $f \in K$ такво да је $\varphi(f) = r$, јер за произвољан реалан број r постоји, нпр. функција $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $(\forall x \in \mathbb{R})\ f_1(x) = r$, па је и $\varphi(f_1(x)) = f_1(c) = r$ (навести пример још неке функције из K за коју је $\varphi(f) = r$). Дакле, φ је и пресликавање "на", па је φ ***хомоморфизам*** прстена K на поље $\mathbb{R}$.

б) Како структура $(K,\oplus,\odot)$ није поље (већ прстен), пресликавање φ није изоморфизам.

4. 3. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

1. Ако су x, y и θ реални бројеви и ако је:

$$\frac{5+4\cos\theta}{2+\cos\theta+i\sin\theta} = x + iy,$$

доказати једнакост

$$x^2 + y^2 = 4x - 3.$$

Решење: Из услова задатка имамо

$$5 + 4\cos\theta = (x+iy)(2+\cos\theta+i\sin\theta) =$$
$$= (2+\cos\theta)x - y\sin\theta + i\big(x\sin\theta + (2+\cos\theta)y\big).$$

Из дефиниције једнакости два комплексна броја добијамо

$$(2+\cos\theta)x - y\sin\theta = 5 + 4\cos\theta,$$
$$x\sin\theta + (2+\cos\theta)y = 0.$$

Решавањем овог система линеарних једначина по x и y добијамо

$$x = 2+\cos\theta,\ y = -\sin\theta.$$

Сада је

$$x^2 + y^2 = (2+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 = 5 + 4\cos\theta =$$
$$= 4(2+\cos\theta) - 3 = 4x - 3.$$

2. Нека је $n \in \mathbb{N}$ фиксно и нека је

$$G_n = \{a + ib\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Испитати природу структуре

а) $(G_n, +)$;

б) $(G_n, \cdot)$,

где $+$ и $\cdot$ имају уобичајено значење.

3. Наћи све аутоморфизме f поља комплексних бројева $\mathbb{C}$ који не мењају реалне бројеве, тј. за које је

$$(\forall a \in \mathbb{R})\ f(a) = a.$$

Резултат: Постоје само два таква аутоморфизма: $f(z) = z$ и

$f(z) = \bar{z}$.

4. Посматрајмо пресликавање f мултипликативне групе комплексних бројева $(\mathbb{C}, \cdot)$ у мултипликативну групу реалних бројева $(\mathbb{R}, \cdot)$, тј. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, дато са

$$(\forall z \in \mathbb{C})\ f(z) = |z|.$$

Да ли је пресликавање f

а) хомоморфизам,

б) изоморфизам?

Решење:

а) $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ f(z_1 \cdot z_2) = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = f(z_1) \cdot f(z_2)$, па како $(\forall r \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{C})\ |z| = r$, f *јесте* хомоморфизам.

б) Пресликавање f није инјективно ("1-1"), јер

$$\neg(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ (f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ (f(z_1) = f(z_2) \wedge z_1 \neq z_2).$$

Нпр. за $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ је $f(i) = f(-i)$ и $i \neq -i$; значи, пресликавање f *није* изоморфизам.

5. Дати су комплексни бројеви:

$$a = 1 + i\lambda \quad \text{и} \quad b = 1 - \frac{i}{\lambda},$$

при чему је $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. За које је вредности λ тачка a комплексне равни ближа координатном почетку него тачка b?

Решење: Растојање тачке у комплексној равни од координатног почетка једнако је модулу одговарајућег комплексног броја, тако да тражимо вредност λ за коју ће модуо броја a бити мањи од модула броја b. Имамо:

$$|a| < |b| \Leftrightarrow |a|^2 < |b|^2 \Leftrightarrow 1 + \lambda^2 < 1 + \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^4 < 1 \wedge \lambda \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

(за $\lambda = \pm 1$ бројеви a и b су конјуговано-комплексни и подједнако су удаљени од координатног почетка).

6. Доказати да се сви комплексни бројеви модула једнаког 1, осим броја 1, могу приказати у облику $z = \frac{a+i}{a-i}$, где је a реалан број.

Решење: Комплексан број модула 1, изузимајући реалан број 1, одређен је тригонометријским обликом

$$z = \cos\varphi + i \sin\varphi,\ \varphi \neq 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Сада се трансформацијом преко тангенса полуугла добија

$$z = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} + i\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^2}{1 - i^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + i}{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - i},$$

где је $\varphi \neq \pi + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Значи, у задатом изразу a, у ствари, представља котангенс половине аргумента посматраног броја. За $\varphi = \pi + 2k\pi$, тј. у случају реалног броја -1, очигледно је $a = 0$. Такође је јасно да се реалан број 1 не може представити овим разломком (јер су бројилац и именилац увек различити бројеви).

7. Одредити:

а) z^{20}, за $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) z^6, за $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Решење: а) Напишимо дати комплексан број у тригонометријском облику

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

где је $\varphi = \arg z$, $(-\pi < \varphi \leq \pi)$. Видимо да је $|z| = 1$ и $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, па је

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}.$$

Тада је

$$z^{20} = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}\right)^{20} = \cos\frac{20\pi}{3} - i \sin\frac{20\pi}{3} =$$

$$= \cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Овде је $|z| = 2$ и $\arg z = -\frac{\pi}{3}$. Дакле

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

па је

$$z^6 = 2^6\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6 = 2^6\left(\cos\frac{6\pi}{3} - i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = 64.$$

8. Користећи Moivre-ову формулу доказати идентитете:

а) $\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha$;

б) $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$,

где је α реалан, а n природан број.

Решење: а) Moivre-ова формула за $n = 4$ гласи:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\sin 4\alpha.$$

На основу примене биномног обрасца, следује:

$$\cos^4\alpha + 4i\cos^3\alpha\sin\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha - 4i\cos\alpha\sin^3\alpha + \sin^4\alpha =$$

$$= \cos 4\alpha + i\sin 4\alpha,$$

одакле се, изједначавањем имагинарних делова бројева са леве и десне стране знака једнакости, добија тражени идентитет.

б) Како је

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},\ \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

важи:

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right),$$

што је и требало доказати.

9. Израчунати у скупу $\mathbb{C}$ све вредности следећих комплексних корена:

а) $\sqrt[3]{1}$;

б) $\sqrt[4]{-4}$.

Решење: а) Како је $1 = \cos 0 + i\sin 0$, биће за $k = 0, 1, 2$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

Стављајући редом $k = 0, 1, 2$ добијамо све тражене вредности:

$$(\sqrt[3]{1})_1 = 1,\ (\sqrt[3]{1})_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

б) Из $\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4\cdot(-1)}$, како је $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, имамо да је за $k = 0, 1, 2, 3$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2k+1}{4}\pi + i\sin\frac{2k+1}{4}\pi\right),$$

а затим, замењујући k, налазимо све тражене вредности.

10. Одредити скуп комплексних бројева за које је

$$z = (-16)^{3/4}.$$

Решење: Број -16 представићемо у тригонометријском облику имајући у виду да је $|-16| = 16$ и $\arg(-16) = \pi$; према томе

$$-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Сада је

$$(-16)^{3/4} = 16^{3/4}\left(\cos\frac{3\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi+2k\pi}{4}\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{2k+3}{4}\pi + i\sin\frac{2k+3}{4}\pi\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

одакле се добија:

- за $k = 0$: $z_1 = 8\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{4} = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}(-1 + i)$;
- за $k = 1$: $z_2 = 8\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{4} = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}(-1 - i)$;
- за $k = 2$: $z_3 = 8\,\mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{4} = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}(1 - i)$;

- за $k = 3$: $z_4 = 8 \operatorname{cis} \frac{9\pi}{4} = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\,(1 + i)$.

11. Ако је $k \in \mathbb{N}$, проверити да ли је $(1 + i)^{4k}$ реалан, а $(1 + i)^{4k+2}$ имагинаран број.

12. Ако је

$$f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n,$$

где је n природан број, доказати да је

$$f(n + 4) + f(n) = 0.$$

13. Решити по $x \in \mathbb{R}$ једначину

$$\prod_{k=1}^{n} (\cos kx + i \sin kx) = 1.$$

Решење: Дата једначина еквивалентна је једначини

$$\cos\big((1 + 2 + \dots + n)x\big) + i \sin\big((1 + 2 + \dots + n)x\big) = 1$$

или

$$\cos \frac{n(n+1)}{2} x + i \sin \frac{n(n+1)}{2} x = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi,$$

па је

$$\frac{n(n+1)}{2} x = 2k\pi,$$

што даје

$$x = \frac{4k\pi}{n(n+1)}, \ (k \in \mathbb{Z}).$$

14. Доказати идентитет:

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta}\right)^n = \left(\frac{1+i\operatorname{tg}n\theta}{1-i\operatorname{tg}n\theta}\right),$$

где је $\theta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.

15. Модули комплексних бројева a, b, c, и d чине геометријску прогресију, а главне вредности њихових аргумената аритметичку. Уколико је $a = \sqrt{2}$ и $d = 4i$, изразити те бројеве у тригонометријском облику.

Решење: Нека је q количник геометријске прогресије коју чине модули датих бројева. Како је $|a| = \sqrt{2}$ први, а $|d| = 4$ четврти члан ове прогресије, биће $\left|\frac{d}{a}\right| = 2\sqrt{2} = q^3$, па је $q = \sqrt{2}$. Одавде је $|b| = 2$, а $|c| = 2\sqrt{2}$. Нека је сада p разлика аритметичке прогресије коју чине аргументи датих бројева. Како је $\arg a = 0$ први, а $\arg d = \frac{\pi}{2}$ четврти члан ове прогресије, имамо

$$\arg d - \arg a = \frac{\pi}{2} = 3p,$$

па је $p = \frac{\pi}{6}$. Одавде је $\arg b = \frac{\pi}{6}$, а $\arg c = \frac{\pi}{3}$. Тригонометријски облик ових бројева је:

$$a = \sqrt{2} \operatorname{cis} 0,\ b = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6},\ c = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3},\ d = 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}.$$

16. Изразити $x^2 + iy^2$ помоћу z и $\bar{z}$ ако је $x = \mathcal{Re}\{z\}$ и $y = \mathcal{Im}\{z\}$.

Решење: Нека је $z = x + iy$. Тада је $\bar{z} = x - iy$, па је

$$2x = z + \bar{z} \Rightarrow x = \mathcal{Re}\{z\} = \frac{z+\bar{z}}{2},$$

$$2iy = z - \bar{z} \Rightarrow y = \mathcal{Im}\{z\} = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Дакле,

$$x^2 + iy^2 = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left((z+\bar{z})^2 - i(z-\bar{z})^2\right).$$

17. Ако су a, b и c комплексни бројеви, доказати једнакост:

$$a\,\mathcal{Im}\{\bar{b}c\} + b\,\mathcal{Im}\{\bar{c}a\} + c\,\mathcal{Im}\{\bar{a}b\} = 0.$$

тј. $w \in \mathbb{R}$, што је и требало доказати.

Напомена: Испитати у ком смислу би се овај резултат могао да генералише.

23. Ако је $|a| = |b| = |c| = r$, при чему су a, b и c комплексни бројеви, доказати једнакост:

$$\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right| = r.$$

24. Дата је квадратна једначина:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

где су a, b и c комплексни бројеви, $a \neq 0$ и $|a| \neq |c|$. Доказати да између коефицијената a, b и c постоји веза

$$|\bar{a}b - \bar{b}c| = |a\bar{a} - c\bar{c}|$$

ако је $|z_1| = 1$, где је z_1 један корен дате једначине.

25. Доказати да су за комплексне бројеве z_1 и z_2 следећи искази еквивалентни:

а) *i)* $\arg z_1 = \arg z_2$;

ii) $|z_1 - z_2| = \big||z_1| - |z_2|\big|$;

iii) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$;

iv) $|z_1||z_2| = z_1\bar{z}_2 = \bar{z}_1 z_2$;

v) $|z_1|z_2 = z_1|z_2|$.

б) *i)* $|\arg z_1 - \arg z_2| = \pi$;

ii) $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$;

iii) $|z_1 + z_2| = \big||z_1| - |z_2|\big|$;

iv) $|z_1||z_2| = -z_1\bar{z}_2 = -\bar{z}_1 z_2$;

v) $|z_1|z_2 = -z_1|z_2|$.

26. Ако је $A = x + y + z$, $B = x + \alpha y + \alpha^2 z$ и $C = x + \alpha^2 y + \alpha z$, где

су $x, y, z \in \mathbb{C}$ и $\alpha^3 = 1$, при чему је $\alpha \neq 1$, доказати једнакост

$$|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3\left(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2\right).$$

Упутство: Применити $|z|^2 = z\bar{z}$ и доказати да α задовољава једнакости $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, $1 + \bar{\alpha} + \overline{\alpha^2} = 0$, $\alpha\bar{\alpha} = 1$ и $\bar{\alpha} = \alpha^2$.

27. Да ли је тачна импликација

$$c > 0 \Rightarrow |a + b|^2 \leq (1 + c)|a|^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)|b|^2$$

где су a и b комплексни, а c реалан број? Да ли се импликација може заменити еквиваленцијом?

28. Решити у скупу комплексних бројева једначину

$$z^4 - a = 0,$$

где је a комплексан број такав да је $6a + \bar{a} = -56 + i \cdot 40\sqrt{3}$.

Решење: Нека је $a = x + iy$; тада је $\bar{a} = x - iy$, па је

$$7x + i \cdot 5y = -56 + i \cdot 40\sqrt{3},$$

одакле је $7x = -56$ и $5y = 40\sqrt{3}$, или $x = -8$ и $y = 8\sqrt{3}$; према томе,

$$a = 8(-1 + i\sqrt{3}) = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Задата једначина еквивалентна је једначини $z = \sqrt[4]{a}$, а њена решења су

$$z_k = 2\left(\cos\frac{(3k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(3k+1)\pi}{6}\right),$$

где је $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

29. Доказати да су корени једначине

$$z^4 = i(z - 2i)^4$$

дати формулом

$$z_k = i + \operatorname{ctg}(4k + 1)\frac{\pi}{16}, \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

18. Ако су a и b комплексни бројеви такви да је $|a| = |b| = 1$ и $ab + 1 \neq 0$, доказати да је $\dfrac{a+b}{1+ab}$ реалан број.

19. Одредити скуп $\mathcal{A}$ комплексних бројева z таквих да је

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|.$$

Решење: Пре свега важи $|z| = \dfrac{1}{|z|} \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Сада је на основу услова задатка

$$|1 - z| = 1 \Rightarrow |1 - z|^2 = 1 \Rightarrow (1 - z)\,(1 - \bar{z}) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - z - \bar{z} + z\bar{z} = 1 \Rightarrow z + \bar{z} = 1,$$

јер је $z\bar{z} = |z|^2 = 1$. То даље значи да је $2\cdot\mathcal{R}e\{z\} = 1$, или $\mathcal{R}e\{z\} = \dfrac{1}{2}$, па је $\mathcal{I}m\{z\} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Дакле,

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

20. Ако су a, b и c комплексни бројеви, доказати идентитете:

а) $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$;

б) $|1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 = \left(1 + |ab|\right)^2 - \left(|a| + |b|\right)^2$;

в) $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |a + b + c|^2 = |a + b|^2 + |b + c|^2 + |c + a|^2$.

Решење: а) За произвољан комплексан број z важи: $z\bar{z} = |z|^2$, а за произвољне комплексне бројеве z и w важи:

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}.$$

Зато је:

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 =$$
$$= (a + b)\cdot\overline{(a + b)} + (a - b)\cdot\overline{(a - b)} =$$
$$= (a + b)\cdot(\bar{a} + \bar{b}) + (a - b)\cdot(\bar{a} - \bar{b}) =$$
$$= a\bar{a} + b\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{b} + a\bar{a} - b\bar{a} - a\bar{b} + b\bar{b} =$$

$$= 2a\bar{a} + 2b\bar{b} =$$
$$= 2\left(|a|^2 + |b|^2\right).$$

21. Ако је

$$w = \frac{1}{a-b}\,(z + ab\bar{z} - a - b),$$

где су a, b и z комплексни бројеви, $a \neq b$ и $|a| = |b| = 1$, доказати да је $w^2 \leq 0$.

Решење: Да би важило $w^2 \leq 0$ потребно је и довољно да комплексан број w буде чисто имагинаран. Посматрајмо због тога збир $w + \bar{w}$. Добија се:

$$2\,\mathcal{R}e\{w\} = w + \bar{w} = \frac{1}{a-b}\left(z + ab\bar{z} - a - b\right) + \frac{1}{\bar{a} - \bar{b}}\left(\bar{z} + \bar{a}\bar{b}z - \bar{a} - \bar{b}\right).$$

Имајући у виду да је $a\bar{a} = b\bar{b} = 1$, сређивањем израза на десној страни једнакости налазимо да је $\mathcal{R}e\{w\} = 0$, чиме је доказ завршен.

22. Нека су z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ и $z_1z_2z_3 \neq -1$ и нека је

$$w = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{1 + z_1z_2z_3}.$$

Доказати да је $w \in \mathbb{R}$.

Решење: Из услова $|z_1| = 1$ следује $|z_1|^2 = 1$, тј. $z_1\bar{z}_1 = 1$, па је $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$. Исто тако је и $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$ и $\bar{z}_3 = \dfrac{1}{z_3}$. Тада имамо:

$$\bar{w} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2\bar{z}_3 + \bar{z}_3\bar{z}_1}{1 + \bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_3}\cdot\frac{1}{z_1}}{1 + \frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{z_3}} =$$

$$= \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{1 + z_1z_2z_3} = w,$$

30. Дата је једначина:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = A$$

где је n природан, а A дати комплексан број.

а) Решити ову једначину.

б) Одредити услове које мора да задовољава број A да би сва решења једначине била реална.

в) За $A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $n = 3$ израчунати решења дате једначине у алгебарском облику.

Решење: а) Из задате једнакости следује

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \sqrt[n]{A},$$

тј. да разломак на левој страни једнакости може бити једнак било којој од n различитих вредности n-тог корена комплексног броја A. Решавањем по z сада се добија

$$z = \frac{\sqrt[n]{A}-1}{i(\sqrt[n]{A}+1)},$$

где, нагласимо поново, $\sqrt[n]{A}$ узима свих својих n различитих вредности, што значи да једначина има n различитих решења.

б) Ради непосредног разликовања различитих решења представимо број A у тригонометријском облику $A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, и нека је

$$\varphi_k = \frac{\varphi+2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Сада решења једначине добијају облик

$$z_k = \frac{\sqrt[n]{r}\cos\varphi_k + i\sqrt[n]{r}\sin\varphi_k - 1}{-\sqrt[n]{r}\sin\varphi_k + i(\sqrt[n]{r}\cos\varphi_k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Раздвајањем реалног и имагинарног дела добијамо

$$z_k = \mathcal{Re}\{z_k\} + i\frac{-(\sqrt[n]{r})^2(\sin^2\varphi_k+\cos^2\varphi_k)+1}{(\sqrt[n]{r})^2(\sin^2\varphi_k+\cos^2\varphi_k)+2\sqrt[n]{r}\cos\varphi_k+1},$$

па услов $\mathcal{Im}\{z_k\} = 0$ одмах даје

$$(\sqrt[n]{r})^2 = 1,$$

тј. $r = 1$ (наравно, овде се ради о реалном n-том корену), што представља и потребан и довољан услов да сва решења једначине буду реална.

31. Решити у скупу комплексних бројева једначину

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i}{1-i}$$

ако је n природан број.

32. Доказати да су сви корени једначине

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+ai}{1-ai},$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R}$, реални и међусобно различити.

33. Решити једначину

$$z^n = z^{-m},$$

где је z комплексан број, а m и n природни бројеви.

Решење: Множењем једначине са z^m добија се еквивалентна једначина

$$z^{n+m} = 1,$$

чија су решења

$$z = \operatorname{cis}\frac{2k\pi}{m+n}, \quad k = 0, 1, \dots, n+m-1.$$

34. Решити у скупу $\mathbb{C}$ једначине:

a) $\bar{z} = z^{n+1}$;

б) $\overline{z^2} = z^n$,

ако је n природан број.

35. Решити једначину
$$(\bar{z})^m = az^n,$$
где су m и n природни, а a комплексан број.

36. Решити једначину
$$(2 + a)^n = (2 - a)^n,$$
где је a комплексан, а n природан број.

37. Решити једначину
$$az + b\bar{z} + c = 0$$
ако су a, b и c комплексни бројеви различити од нуле, при чему је $|a| \neq |b|$.

Решење: Из услова задатка добијамо $\overline{(az + b\bar{z} + c)} = 0$, односно
$$\bar{a}\bar{z} + \bar{b}z + \bar{c} = 0.$$
Сада имамо систем линеарних једначина по z и $\bar{z}$:
$$az + b\bar{z} + c = 0,$$
$$\bar{a}\bar{z} + \bar{b}z + \bar{c} = 0.$$
Ако прву једначину помножимо са $\bar{a}$, а другу са $-b$, добијамо
$$\bar{a}az + \bar{a}b\bar{z} + \bar{a}c = 0,$$
$$-\bar{a}b\bar{z} - b\bar{b}z - b\bar{c} = 0;$$
сабирањем добијамо
$$(a\bar{a} - b\bar{b})z = b\bar{c} - \bar{a}c,$$
па је
$$z = \frac{b\bar{c} - \bar{a}c}{|a|^2 - |b|^2}.$$

38. Решити у скупу комплексних бројева систем једначина:
$$z_1 + z_2 + z_1\bar{z}_2 = 2 + 2i,$$
$$z_1 \operatorname{cis}\frac{\pi}{4} + z_2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

39. Ако је $a = \varepsilon + \varepsilon^4$, $b = \varepsilon^2 + \varepsilon^3$, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, доказати да је:
$$a + b = -1, \quad ab = -1$$
и на основу тога израчунати $\cos\frac{2\pi}{5}$. Доказати да је ε решење једначине
$$x^{16} + x^9 + x^4 + x + 1 - \sqrt{5} = 0.$$

40. Користећи решења једначине
$$z^5 - 1 = 0$$
одредити $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Решење: Решења биномне једначине $z^5 - 1 = 0$ одређена су изразима који дају све вредности петог корена (комплексног) броја 1:
$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$
Притом је очигледно да комплексни бројеви z_1, z_2, z_3 и z_4 леже у различитим квадрантима комплексне равни, а број
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$
у првом квадранту. Уочимо сада да је
$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$
и потражимо решења симетричне једначине четвртог степена
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0;$$
ако једначину представимо у еквивалентном облику
$$z^2 + z \cdot 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$
и уведемо нову промењиву
$$z + \frac{1}{z} = t,$$
она добија облик квадратне једначине

$$t^2 + t - 1 = 0.$$

Решавањем последње једначине и враћањем смене налазимо сва решења једначине четвртог степена; међу њима z_1 је онај број који се налази у првом квадранту комплексне равни, а то је

$$z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Тиме су, упоређивањем реалних и имагинарних делова, одређене и вредности $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\sin\frac{2\pi}{5}$.

41. Ако је

$$\varepsilon^{2n} = 1 \quad (\varepsilon \in \mathbb{C})$$

и

$$z = 1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^{n-1},$$

одредити број z.

Решење: Како је

$$\varepsilon^{2n} - 1 = (\varepsilon^n - 1)(\varepsilon^n + 1) = 0,$$

имамо следеће могућности.

1^0 $\varepsilon = 1$. Тада је $z = n$.

2^0 $\varepsilon \neq 1$. Разликујемо следеће случајеве:

i) $\varepsilon^n + 1 \neq 0$: тада је $\varepsilon^n - 1 = 0$, па је $z = \dfrac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = 0$;

ii) $\varepsilon^n + 1 = 0$: тада је $\varepsilon^n = -1$, односно $\varepsilon = \operatorname{cis}\dfrac{\pi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, па је

$$z = \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = \frac{-2}{\varepsilon - 1} = \frac{-2}{\operatorname{cis}\frac{\pi+2k\pi}{n} - 1} =$$

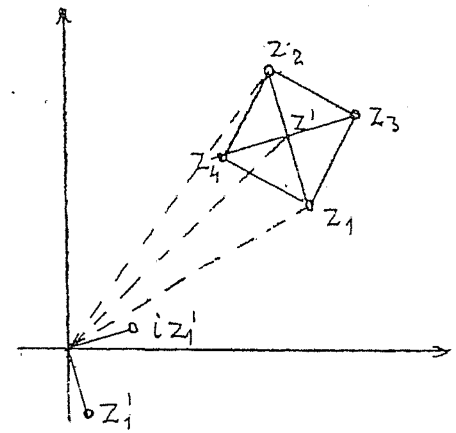
$$= \frac{-2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi+2k\pi}{2n}\right)}{\operatorname{cis}\frac{\pi+2k\pi}{2n} - \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi+2k\pi}{2n}\right)} = \frac{-2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi+2k\pi}{2n}\right)}{2i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n}} =$$

$$= i\,\frac{\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n} - i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n}} = 1 + i\operatorname{ctg}\frac{\pi+2k\pi}{2n},$$

где је $k = 0, 1, \dots, n-1$.

42. Ако су z_1 и z_2 комплексни бројеви који одговарају супротним теменима неког квадрата у комплексној равни, одредити комплексне бројеве z_3 и z_4 који одговарају осталим теменима.

Решење: Имајући у виду геометријску интерпретацију основних операција у скупу (пољу) $\mathbb{C}$ видимо да је број z' који је среди-



ште дужи z_1z_2, тј. тачка пресека дијагонала паралелограма одређеног паром страница Oz_1 и Oz_2, дат изразом

$$z' = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Такође, број z_1' чији су модуо и аргумент одређени дужином и положајем дужи $z'z_1$ дат је са

$$z_1' = z_1 - z' = \frac{z_1 - z_2}{2}$$

(зашто?). Како се дужи $z'z_3$, односно $z'z_4$, добијају ротацијом дужи $z'z_1$ за угао $\frac{\pi}{2}$, односно $\frac{3\pi}{2}$ (што одговара множењу комплексног броја бројем i, односно $i^3 = -i$), налазимо:

$$z_3 = z' + iz_1' = \frac{z_1+z_2}{2} + i\,\frac{z_1-z_2}{2},$$

$$z_4 = z' - iz_1' = \frac{z_1+z_2}{2} - i\,\frac{z_1-z_2}{2}.$$

43. Ако су z_1 и z_2 комплексни бројеви такви да је

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|,\ z_2 \neq 0,$$

доказати да је $i \cdot \frac{z_1}{z_2}$ реалан број.

44. Представити следеће скупове комплексних бројева у комплексној равни:

а) $\{z : |z - z_0| < r\}$;

б) $\{z : |z - z_0| \geq r\}$;

в) $\{z : \mathcal{Re}\{z\} > a\}$;

г) $\{z : \mathcal{Im}\{z\} \leq b\}$;

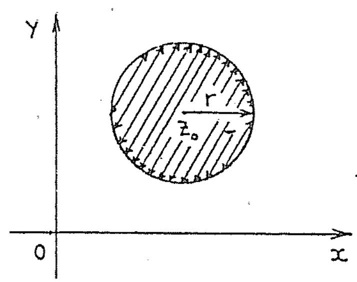
д) $\{z : \alpha < \arg(z - z_0) < \beta\}$;

ђ) $\{z : 1 < \mathcal{Re}\{z\} < 2,\ |\mathcal{Im}\{z\}| < 2\}$;

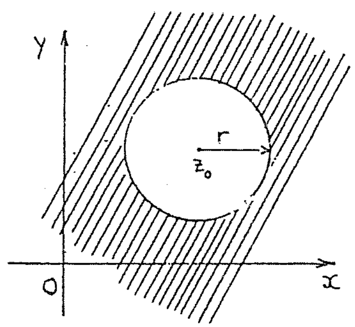
е) $\left\{z : \left|\frac{\pi}{2} - \arg z\right| < \frac{\pi}{4}\right\}$.

Резултат: Тражени скупови тачака су шрафиране области у комплексној равни.

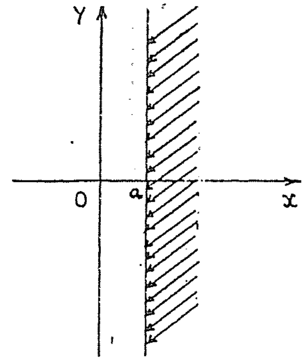
а)



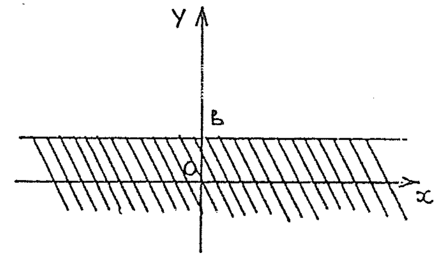
б)



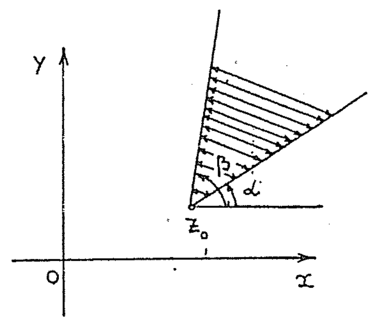
в)



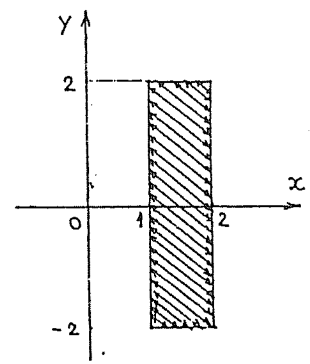
г)



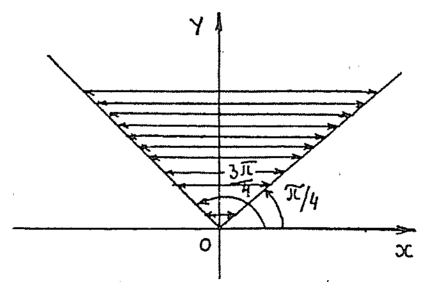
д)



ђ)



е)



45. У круг задат једначином

$$|z-a-bi| = r \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

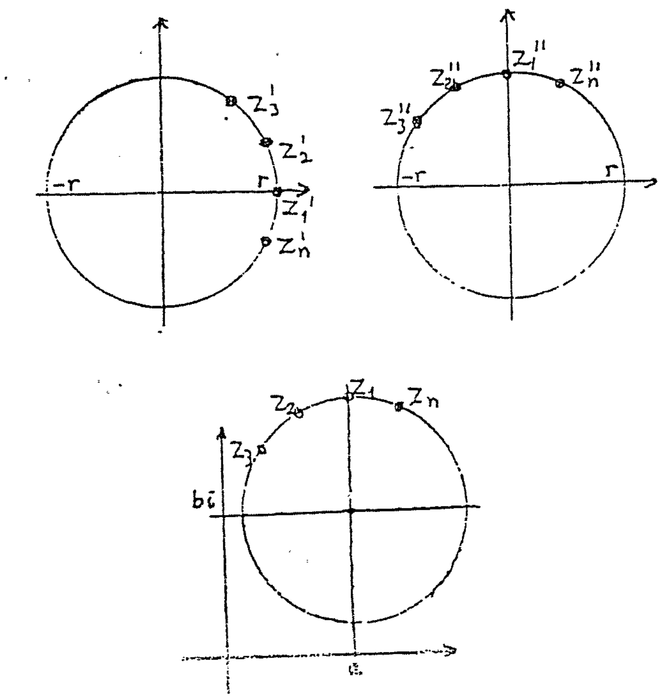
уписан је правилан n-тоугао чије једно теме лежи у тачки

$$z_1 = a + (b+r)i.$$

Одредити остала темена z_k, $k \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Решење: Јасно је да се ради о кругу полупречника r са центром у тачки $a+ib$, као и да се тачка z_1 налази на вертикали постављеној кроз центар круга, и то изнад центра. Приметимо да све комплексне вредности n-тог корена реалног броја r^n такође представљају темена правилног n-тоугла, али оног чије се једно теме налази у тачки која одговара реалном броју r. Означимо његова темена са z'_k, па је очигледно

$$z'_k = r\left(\cos\frac{2(k-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$



Да би се бројеви z'_k довели у положај бројева z_k, треба урадити две ствари: извршити ротацију слике за угао $\frac{\pi}{2}$ (што се постиже множењем са i), а затим извршити транслацију слике тако да се центар круга нађе у тачки $a+ib$ (додавањем свим бројевима броја $a+ib$).

Нека је зато

$$z''_k = iz'_k = r\left(-\sin\frac{2(k-1)\pi}{n} + i\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\right).$$

Сада је

$$z_k = z''_k + a + ib = a - r\sin\frac{2(k-1)\pi}{n} + i\left(b + r\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\right),$$

где је $k = 1, 2, \dots, n$.

46. Ако су z_1, z_2 и z_3 темена једнакостраничног троугла у комплексној равни, доказати да важи једнакост:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1.$$

47. Доказати да је скуп свих комплексних бројева за које је $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \le 2$ идентичан скупу свих комплексних бројева за које је $\left|z - \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$, при чему је $z \ne 0$.

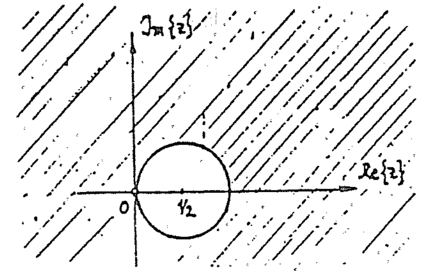
Решење: Задатак се своди на доказивање еквивалентности задатих дефиниционих релација скупова тачака у комплексној равни:

$$\left|z-\frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|z-\frac{1}{2}\right|^2 \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}\right) \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow z\bar{z} - \frac{1}{2}(z+\bar{z}) + \frac{1}{4} \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} \ge \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \Leftrightarrow 2 \ge \frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \le 2.$$

Дакле, у питању су идентични скупови тачака у комплексној равни. Тај скуп скициран је на слици.



48. Проверити да ли важи еквиваленција

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-z}\right\} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |z| > 1?$$

49. Ако су $a, z \in \mathbb{C}$ и $|a| < 1$, доказати да важи импликација:

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| > 1 \Rightarrow |z| > 1.$$

Да ли важи обратна импликација?

50. Нека је

$$f(z) = z^2 + z + 1 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Одредити скуп $A \subset \mathbb{C}$ свих комплексних бројева z за које је вредност $f(z)$ реална и позитивна.

<u>Резултат:</u> $A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \left\{(-\frac{1}{2}, y) \mid 0 < |y| < \frac{\sqrt{3}}{2}, y \in \mathbb{R}\right\}$.

51. Одредити све комплексне бројеве z такве, да је $\left(\frac{z-i-1}{iz+1}\right)^2$ реалан број.

<u>Решење:</u> Нека је $w = \frac{z-i-1}{iz+1}$, при чему је $z = x + iy$. Да би w^2 био реалан број мора бити $\arg w = k\frac{\pi}{2}$, где је k цео број. Ово је еквивалентно са $\mathcal{Im}\{w\} = 0 \vee \mathcal{Re}\{w\} = 0$. Како је за $iz + 1 \neq 0$, тј. $z \neq i$

$$w = \frac{(z-i-1)(-i\bar{z}+1)}{|iz+1|^2} = \frac{-i|z|^2 - \bar{z} + i\bar{z} + z - i - 1}{|iz+1|^2} =$$

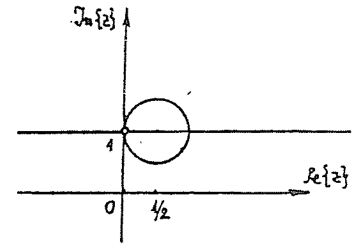
$$= \frac{y-1}{|iz+1|^2} + \frac{x+2y-1-(x^2+y^2)}{|iz+1|^2}\, i,$$

биће $y - 1 = 0 \vee x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$,

или, коначно:

$$\left(y = 1 \vee \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \tfrac{1}{4}\right) \wedge z \neq i.$$

Тај скуп тачака приказан је на слици.



52. Ако је $n \in \mathbb{N}$, израчунати суме:

а) $S_1 = \binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} + 3^2\binom{n}{5} - 3^3\binom{n}{7} + \ldots$

б) $S_2 = 1 - 3\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{4} - 3^3\binom{n}{6} + \ldots$

<u>Упутство:</u> Поћи од идентитета:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

53. Служећи се развојем израза $(1+i)^n$, где је $n \in \mathbb{N}_0$, доказати једнакости

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} = \sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} = \sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

54. Сумирати изразе:

$$A = 1 + \binom{n}{1}\cos\theta + \binom{n}{2}\cos 2\theta + \dots + \binom{n}{n}\cos n\theta;$$

$$B = \binom{n}{1}\sin\theta + \binom{n}{2}\sin 2\theta + \dots + \binom{n}{n}\sin n\theta.$$

55. Израчунати збир

$$S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\sin^n x},$$

где је x реалан број и $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$..

56. Доказати да за сваки природан број n важи импликација

$$z + \frac{1}{z} = 2\cdot\cos t \Rightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cdot\cos nt$$

у којој је z комплексан, а t реалан број.

Решење: Доказ ће бити спроведен применом принципа математичке индукције. За $n = 1$ и $n = 2$ тврђење је очигледно тачно. Нека је тврђење тачно и за две узастопне вредности $n = k - 1$ и $n = k$. Тада је

$$\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right)\cdot\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2\cdot\cos kt \cdot 2\cdot\cos t,$$

или

$$z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}} + z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} = 2\cdot\left(\cos(k+1)t + \cos(k-1)t\right),$$

дакле следује да је $z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}} = 2\cdot\cos(k+1)t$ (јер је по индуктивној хипотези $z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} = 2\cdot\cos(k-1)t$). То значи да је тврђење тачно и за $n = k + 1$, па, према томе, и за сваки природан број n, што је и требало доказати.

57. Решити по $x \in \mathbb{R}$ једначину

$$\prod_{k=1}^{n} (\sin kx + i\cos kx) = 1.$$

Решење: Како је

$$\sin kx + i\cos kx = i(\cos kx - i\sin kx) = i\,\mathrm{cis}(-kx),$$

биће

$$\prod_{k=1}^{n} (\sin kx + i\cdot\cos kx) = \prod_{k=1}^{n} i\,\mathrm{cis}(-kx) =$$

$$i^n\cdot\mathrm{cis}\left((1 + 2 + \dots + n)x\right) = \mathrm{cis}\frac{n\pi}{2}\cdot\mathrm{cis}\left(-\frac{xn(n+1)}{2}\right) = 1 = \mathrm{cis}\,2t\pi,$$

где је $t \in \mathbb{Z}$. Сада је $n\pi - xn(n+1) = 4t\pi$, па је, коначно

$$x = \frac{\pi(n-4t)}{n(n+1)}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

58. Одредити све целе бројеве n такве да једнакост:

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \sin n\theta + i\cos n\theta$$

важи за свако реално θ.

Решење: Множењем дате једнакости са i^{3n} добија се еквивалентна једнакост

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = i^{3n}\sin n\theta + i^{3n+1}\cos n\theta,$$

или, применом Moivre-ове формуле

$$\cos n\theta - i\sin n\theta = i^{3n+1}\cos n\theta + i^{3n}\sin n\theta.$$

Да би ова једнакост (еквивалентна полазној) била идентитет, тј. важила за свако θ, очигледно је потребно и довољно да буде $3n + 1 = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$, што је могућно када је n елемент скупа $\{\dots, -3, 1, 5, 9, \dots\}$, тј. $n = 4m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$.

ГЛАВА 5.

ПОЛИНОМИ

И

РАЦИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

5. 1. ПОЛИНОМИ

1. Одредити количник и остатак који се добијају дељењем полинома $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$ биномом $x - 2$.

Решење 1: Имамо:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 + 2x + 3) : (x - 2) = x^2 + 3x + 8. \\
\underline{\,x^3 - 2x^2} \\
\;= 3x^2 + 2x + 3 \\
\;\underline{3x^2 - 6x} \\
\;= 8x + 3 \\
\,\underline{8x - 16} \\
= 19
\end{array}
$$

Дакле, количник је полином $x^2 + 3x + 8$, а остатак је једнак 19.

Решење 2: Применом Horner-овог поступка имамо:

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & 1 & 2\cdot1+1=3 & 2\cdot3+2=8 & 2\cdot8+3=19
\end{array}
$$

тј.

$$P(x) = (x - 2)(x^2 + 3x + 8) + 19,$$

па је количник $x^2 + 3x + 8$, а остатак 19.

2. Дат је полином $P(x) = x^3 - x^2 + x$. Израчунати $P(1 + 2i)$.

Решење: Према Bezout-овој теореми тражена вредност једнака је остатку при дељењу полинома $P(x)$ биномом $x - (1 + 2i)$. Применимо Horner-ов поступак:

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 + 2i & 1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & (1+2i)-1=2i & (1+2i)\cdot 2i+1=-3+2i & (1+2i)(-3+2i)=-7-4i
\end{array}
$$

Према томе, добили смо вредност полинома

$$P(1 + 2i) = -7 - 4i.$$

3. За које је реалне вредности броја p реални полином

$$P(x) = x^3 + p^2x^2 + px - 5$$

дељив биномом $x+1$?

Решење 1: Деобом полинома $P(x)$ датим биномом добија се да је

$$\frac{P(x)}{x+1} = x^2 + (p^2-1)x - p^2 + p + 1 + \frac{p^2 - p - 6}{x+1}.$$

Услов дељивости своди се на $p^2 - p - 6 = 0$, односно $p \in \{-2, 3\}$.

Решење 2: Полином $P(x)$ дељив је биномом $x+1$ (према Bezout-овој теореми) ако се анулира за $x = -1$, тј. ако је $P(-1) = 0$. Како је

$$P(-1) = (-1)^3 + p^2\cdot(-1)^2 + p\cdot(-1) - 5 = p^2 - p - 6,$$

решавањем једначине $p^2 - p - 6 = 0$ добијамо тражене вредности

$$p_1 = -2,\ p_2 = 3.$$

4. Наћи реалне факторе полинома

$$P(x) = x^4 + 1.$$

Решење 1: Како је $P(x)$ полином четвртог степена, можемо га факторисати као

$$P(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

где су x_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ корени полинома $P(x)$. Корене датог полинома одређујемо решавањем једначине

$$P(x) = x^4 + 1 = 0,$$

тј.

$$x^4 = -1 \ \Rightarrow\ x = \sqrt[4]{-1} = \operatorname{cis}\frac{\pi + 2k\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

За конкретне вредности k добијамо следеће корене:

$$x_0 = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4},$$

$$x_1 = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{cis}\pi\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$x_2 = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{cis}\pi\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = -\operatorname{cis}\frac{\pi}{4},$$

$$x_3 = \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4} = \operatorname{cis}2\pi\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

Приметимо да је $x_2 = \overline{x_1}$ и $x_3 = \overline{x_0}$. Ако ово заменимо у факторизацију, имамо

$$P(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-\overline{x_1})(x-\overline{x_0}) =$$

$$= \left(x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0\overline{x_0}\right)\left(x^2 - (x_1 + \overline{x_1})x + x_1\overline{x_1}\right).$$

Како је

$$x_0 + \overline{x_0} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

и

$$x_0\overline{x_0} = 1,$$

односно

$$x_1 + \overline{x_1} = -\sqrt{2}$$

и

$$x_1\overline{x_1} = 1,$$

добијамо

$$P(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Решење 2: Уколико погодно групишемо сабирке, добићемо да је

$$P(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$

$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Приметимо да се полиноми $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ и $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ *не могу* да факторишу у пољу реалних бројева.

5. Наћи реалне факторе полинома $P(x) = x^{2n} + 1$, $(n \in \mathbb{N})$.

Резултат: $P(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + 1\right).$

6. Реални полином

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 7$$

изразити као полином по променљивој $x-2$.

Решење 1: Приметимо да је водећи коефицијент полинома $P(x)$

јединица, па имамо

$$P(x) = (x-2)^4 + a_1(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2) + a_4 .$$

Степеновањем и сређивањем добијамо

$$P(x) = x^4 + (-8 + a_1)x^3 + (24 - 6a_1 + a_2)x^2 +$$
$$+ (-32 + 12a_1 - 4a_2 + a_3)x + 16 - 8a_1 + 4a_2 - 2a_3 + a_4 ;$$

изједначавањем са одговарајућим коефицијентима полинома $P(x)$ добијамо

$$\begin{aligned} -8 + a_1 &= -5,\\ 24 - 6a_1 + a_2 &= 6,\\ -32 + 12a_1 - 4a_2 + a_3 &= -1,\\ 16 - 8a_1 + 4a_2 - 2a_3 + a_4 &= 7. \end{aligned}$$

Решавањем овог система линеарних једначина добијамо решење

$$a_1 = 3,\ a_2 = 0,\ a_3 = -5,\ a_4 = 5,$$

па је

$$P(x) = (x-2)^4 + 3(x-2)^3 - 5(x-2) + 5.$$

Решење 2: Вишеструка примена Horner-овог поступка доводи до:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & -5 & 6 & -1 & 7 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & -1 & 5 \\ & 1 & -1 & -2 & -5 & \\ & 1 & 1 & 0 & & \\ & 1 & 3 & & & \\ & 1 & & & & \end{array}$$

па је

$$P(x) = (x-2)^4 + 3(x-2)^3 - 5(x-2) + 5.$$

7. Реални полином

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

изразити као полином по променљивој $x - 1$.

8. Дат је полином $P(x) = x^5 - 209x + 56$ над пољем рационалних бројева $\mathbb{Q}$. Ако се зна да $P(x)$ има реалне нуле x_1 и $\frac{1}{x_1}$, факторисати $P(x)$ над $\mathbb{Q}$.

Решење: Поделимо полином $P(x)$ са $(x - x_1)\cdot\left(x - \frac{1}{x_1}\right) = x^2 - \lambda x + 1$, где је $\lambda = x_1 + \frac{1}{x_1}$. Количник је једнак $x^3 + \lambda x^2 + (\lambda^2 - 1)x + (\lambda^3 - 2\lambda)$, а остатак $(\lambda^4 - 3\lambda^2 - 208)\,x + \lambda^3 - 2\lambda - 56$. Уколико се остатак изједначи са нулом, добијају се једначине

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 208 = 0,$$
$$\lambda^3 - 2\lambda - 56 = 0,$$

чије заједничке корене треба одредити. Ако другу једначину помножимо са λ (очигледно је $\lambda \neq 0$) и одузмемо од прве, добијамо

$$\lambda^2 - 56\lambda + 208 = 0.$$

Решења ове једначине су $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 52$, од којих само $\lambda = 4$ задовољава обе једначине, па је, најзад

$$P(x) = (x^2 - 4x + 1)(x^3 + 4x^2 + 15x + 56).$$

9. Одредити коефицијенте a, b и c тако да реалан полином

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

буде дељив биномима $x - 1$ и $x + 2$, а при деоби са $x - 4$ даје остатак 18.

Резултат: $a = -2,\ b = -5,\ c = 6.$

10. Одредити количник и остатак при дељењу полинома

$$P(x) = 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x + 2$$

полиномом $Q(x) = 2x^2 + 1$ ако су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми над пољем GF (3).

Решење: Имамо

$$
\begin{array}{l}
(2x^5 + x^4 + \quad x^2 + 2x + 2) : (2x^2+1) = x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
\underline{-2x^5 \pm \quad x^3} \\
= \quad x^4 - x^3 + x^2 + 2x + 2 \qquad (\text{у } GF(3) \text{ је } 1 = 2\cdot 2 \text{ и } -1 = 2) \\
\quad 2\cdot 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2 \\
\quad \underline{-2\cdot 2x^4 \pm \quad 2x^2} \\
\quad = 2x^3 - x^2 + 2x + 2 \qquad (\text{у } GF(3) \text{ је } -1 = 2) \\
\quad = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \\
\quad \underline{-2x^3 \pm \quad x} \\
\qquad 2x^2 + x + 2 \\
\qquad \underline{-2x^2 \pm \quad 1} \\
\qquad = x + 1
\end{array}
$$

па је количник $x^3 + 2x^2 + x + 1$, а остатак $x + 1$.

11. Нека су r_a и r_b остаци при дељењу реалног полинома $P(x)$ са $x - a$, односно $x - b$, где је $a \neq b$. Колики је остатак при дељењу $P(x)$ са $(x-a)(x-b)$?

Решење: Морају бити задовољене следеће једнакости:

$$P(x) = q(x)(x-a)(x-b) + mx + n, \tag{1}$$

$$P(x) = q_a(x)(x-a) + r_a, \tag{2}$$

$$P(x) = q_b(x)(x-b) + r_b. \tag{3}$$

За $P(a)$ из (1) и (2) добијамо

$$ma + n = r_a,$$

а за $P(b)$ из (1) и (3)

$$mb + n = r_b.$$

Решавајући систем једначина по m и n добијамо

$$m = \frac{r_a - r_b}{a-b}, \quad n = \frac{ar_b - br_a}{a-b},$$

па је остатак при дељењу $P(x)$ са $(x-a)(x-b)$ једнак

$$\frac{x-b}{a-b} r_a + \frac{x-a}{b-a} r_b.$$

12. Нека су редом A, B и C остаци при дељењу полинома P, дефинисаног над пољем F, полиномима $s-a$, $s-b$ и $s-c$, где је $s = (0, 1, 0, \ldots)$, а a, b и c полиноми који одговарају међусобно различитим елементима поља F. Одредити остатак при дељењу полинома P полиномом $(s-a)(s-b)(s-c)$.

13. а) Доказати да се сваки полином $P(x)$ може приказати у облику

$$P(x) = xR(x^2) + Q(x^2),$$

где су $Q(t)$ и $R(t)$ полиноми по t.

б) Наћи остатак који се добија при дељењу полинома $P(x)$ са $x^2 + 1$

Резултат: б) Остатак је $xR(-1) + Q(-1)$.

Напомена: Показати да се тврђење а) може да уопшти:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i R_i(x^k), \quad 1 \le k \le \mathrm{dg}\, P(x).$$

14. Одредити највећи заједнички делилац (НЗД) полинома $P(x)$ и $Q(x)$ уколико је:

а) $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ и $Q(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;

б) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Решење: а) Применимо Еуклидов алгоритам. Ако полином $P(x)$ поделимо полиномом $Q(x)$, добијамо остатак $2R(x)$ где је

$$R(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2.$$

Сада, због једноставнијег рачуна, делимо полином $3Q(x)$ полиномом $R(x)$ и добијамо остатак $-\frac{5}{3}R_1(x)$, где је

$$R_1(x) = x^2 + x + 1.$$

Уколико поделимо полином $R(x)$ полиномом $R_1(x)$, добијамо количник $3x - 2$, а остатак је једнак нули. Дакле

$$\mathrm{NZD}(P,Q) = R_1(x) = x^2 + x + 1.$$

б) $\mathrm{NZD}(P,Q) = x + 1.$

15. Одредити реалне бројеве a и b тако да $x_1 = 1 + i$ буде корен једначине

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b = 0,$$

а затим решити тако добијену једначину.

Решење 1: Како је $x_1 = 1 + i$ корен датог полинома, то је и $x_2 = 1 - i$ такође његов корен. Сада је полином дељив фактором

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - 2x + 2,$$

па како је

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b}{x^2 - 2x + 2} = x^2 + 4x + 9 + \frac{(a+10)x + (b-18)}{x^2 - 2x + 2},$$

следује да је остатак једнак нули, тј. $a = -10$ и $b = 18$. До преосталих нула сада се лако долази и оне су $x_{3,4} = -2 \pm i\sqrt{5}$.

Решење 2: Заменом вредности $x_1^2 = 2i$, $x_1^3 = -2 + 2i$ и $x_1^4 = -4$ у дату једначину добија се идентитет

$$-4 - 4 + 4i + 6i + a + ai + b = 0,$$

одакле се добија систем једначина

$$a + b = 8,$$

$$a + 10 = 0,$$

чије је решење $a = -10$, $b = 18$. Сада, са нађеним вредностима за a и b, није тешко одредити квадратне факторе полинома и његове преостале нуле.

16. Одредити реалне бројеве a и b тако да $x = i$ буде корен једначине

$$x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0,$$

а затим решити тако добијену једначину.

Резултат: $a = 6$, $b = 4$; преостали корени су $-i$, $-2 - i$ и $-2 + i$.

17. Дата је једначина

$$z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0.$$

Решити дату једначину ако се зна да она има један комплексан корен чији је реални део једнак имагинарном делу.

Решење: Нека је та комплексна нула $a + ia$, где је $a \in \mathbb{R}$. Тада постоји још једна (њој конјугована) комплексна нула $a - ia$. По Bezout-овој теореми дати полином дељив је без остатка производом

$$(z - a - ia)(z - a + ia) = (z - a)^2 + a^2 = z^2 - 2az + 2a^2.$$

Како се дељењем добија

$$z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = (z^2 - 2az + 2a^2)\left(z^2 + z(2a + 1) + 2(a^2 + a + 1)\right) + \left(2z(a + 1)^2 - 4(a + 1)(a^3 + a - 1)\right),$$

неопходно је да буде $a = -1$. Тада је количник једнак $z^2 - z + 2$, његове нуле су $z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ и то су преостале нуле датог полинома.

18. Нека је познато да једначина

$$x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 4 = 0$$

има комплексни корен чији је аргумент $\pi/4$. Одредити тај корен.

Решење: Нека је корен дате једначине $x_1 = \rho \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. Тада је:

$$\rho^5 \operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} - 2\rho^4 \operatorname{cis}\pi + 2\rho^2 \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} - 4 = 0,$$

па је

$$\rho^5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\rho^4 + 2\rho^2 i - 4 = 0.$$

Ова једначина разбија се на:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho^5 + 2\rho^4 - 4 = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho^5 + 2\rho^2 = 0.$$

Решавањем друге једначине добијају се могућна решења $\rho = 0$ и

$\rho^3 = \frac{4}{\sqrt{2}}$, тј. $\rho = \sqrt{2}$, а последње решење задовољава и полазну једначину. Дакле, тражено решење је

$$x_1 = 1 + i.$$

19. Корени полинома $x^3 + x^2 - 2$ су комплексни бројеви a и b и реалан број c. Одредити полином другог степена $P(x)$ за који је $P(c) = c$, $P(a) = b$ и $P(b) = a$ и доказати да је полином $P(P(x)) - x$ дељив полиномом $x^3 + x^2 - 2$.

Решење: Очигледно је да је $c = 1$, па су a и b нуле полинома $x^2 + 2x + 2$, тј. једнаки су $-1 \pm i$. Ако је $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, онда се дати услови своде на систем једначина

$$A + B + C = 1,$$
$$2iA - B - iB + C = -1 + i,$$
$$-2iA - B + iB + C = -1 - i,$$

чије је решење $A = \frac{4}{5}$, $B = \frac{3}{5}$ и $C = -\frac{2}{5}$, тј. $P(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$.
Како је

$$P(P(c)) - c = P(c) - c = c - c = 0,$$
$$P(P(\overline{a})) - a = P(b) - a = a - a = 0,$$
$$P(P(b)) - b = P(a) - b = b - b = 0,$$

видимо да су a, b и c (све нуле датог полинома) нуле и полинома $P(P(x)) - x$ који је, дакле, дељив датим полиномом, што је и требало доказати.

20. Доказати да је полином

$$P_{2n}(x) = (x + a + b)^{2n+1} - x^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}, \quad a \neq b,$$

дељив са $P_2(x)$, а затим решити једначину $P_4(x) = 0$.

Решење: Ако је $a = -b$, онда је $P_{2n}(x) \equiv 0$. Нека је зато $a + b \neq 0$. За $n = 1$ добија се да је $P_2(x) = \left(x^2 + (a + b)x + ab\right) \cdot 3(a + b)$,

или $P_2(x) = 3(a + b)(x + a)(x + b)$. Дакле, нуле полинома $P_2(x)$ су $x = -a$ и $x = -b$. Како је

$$P_{2n}(-a) = b^{2n+1} + a^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1} = 0$$

и

$$P_{2n}(-b) = a^{2n+1} + b^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1} = 0,$$

видимо да су $x = -a$ и $x = -b$ нуле и полинома $P_{2n}(x)$, па $P_2(x) \mid P_{2n}(x)$, што је и требало доказати.
За $n = 2$ добија се полином

$$P_4(x) = 5(a + b)\left(x^4 + 2(a + b)x^3 + 2(a + b)^2x^2 + (a + b)^3x + ab(a^2 + ab + b^2)\right),$$

па је $P_4 : P_2 = \frac{5}{3}\left(x^2 + (a + b)x + (a^2 + ab + b^2)\right)$. Нуле количника су $-\frac{a+b}{2} \pm i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}(a^2+b^2) + \frac{ab}{2}}$, што са претходно одређеним нулама $-a$ и $-b$ чини скуп решења једначине $P_4(x) = 0$.

Напомена: Размотрити и случај $a = b$.

21. Доказати да је полином $P(x) = (x + 1)^{2n+1} + x^{n+2}$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 + x + 1$ за било коју вредност природног броја n.

Решење 1: Задатак може да се реши применом принципа математичке индукције. За $n = 1$ полином $P(x)$ постаје $(x + 1)^3 + x^3 = (2x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$ и дељив је полиномом $Q(x)$. Нека је за неко $n = k$ полином $P(x)$ дељив полиномом $Q(x)$. Тада је

$$(x+1)^{2(k+1)+1} + x^{(k+1)+2} = (x + 1)^{2k+3} + x^{k+3} = (x + 1)^2(x + 1)^{2k+1} + xx^{k+2} =$$
$$= (x^2 + 2x + 1)(x + 1)^{2k+1} + xx^{k+2} = (x^2 + x + 1)(x + 1)^{2k+1} + x\left((x+1)^{2k+1} + x^{k+2}\right),$$

што је дељиво полиномом $Q(x)$ (први сабирак очигледно, а други по индуктивној хипотези), па $Q(x) \mid P(x)$ и за $n = k + 1$. Дакле, за било коју вредност природног броја n полином $P(x)$ дељив је полиномом $Q(x)$.

Решење 2: Нуле полинома $Q(x)$ су кубни корени из јединице различити од 1. Због тога важи $Q(x) \mid P(x) \Leftrightarrow Q(x) \mid P_1(x)$, где је полином $P_1(x) = (-x^2)^{2n+1} + x^{n+2} = x^{n+2}(1 - x^{3n})$. Полином

$P_1(x)$ анулира се за вредности x такве да је $x^3 = 1$, што значи да $Q(x) \mid P_1(x)$, па је и полином $P(x)$ дељив полиномом $Q(x)$, што је требало доказати.

22. Ако је n паран природан број, доказати да полином
$$P(x) = (x+1)^n - x^n - 1$$
није дељив триномом $x^2 + x + 1$.

Решење: Ставимо $x^2 + x + 1 = (x-\alpha)(x-\alpha^2)$, где је
$$\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$
Полином $P(x)$ био би дељив триномом $x^2 + x + 1$ ако и само ако би важило $(\alpha+1)^n - \alpha^n - 1 = 0$ и $(\alpha^2+1)^n - \alpha^{2n} - 1 = 0$. Како је $\alpha + 1 = -\alpha^2$ и $\alpha^2 + 1 = -\alpha$, горње једнакости постају
$$(-1)^n\alpha^{2n} - \alpha^n - 1 = 0$$
и
$$(-1)^n\alpha^n - \alpha^{2n} - 1 = 0.$$
Имајући у виду парност броја n, сабирањем ових једнакости добија се контрадикција $-2 = 0$. То значи да полином $P(x)$ не може бити дељив датим триномом, што је и требало доказати.

23. Доказати да је полином
$$P(x) = (x+1)^{6m+1} - (x+1)^{6n+2} + (x+1)^{6p+3},\ (m,n,p \in \mathbb{N}_0)$$
дељив полиномом $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Решење: Нуле полинома $Q(x)$ су α и α^2, где је
$$\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$
Како је $\alpha + 1 = -\alpha^2$ и $\alpha^2 + 1 = -\alpha$, добија се да је
$$P(\alpha) = -(\alpha^{12m+2} + \alpha^{12n+4} + \alpha^{12p+6}) = -\left(\alpha^2(\alpha^3)^{4m} + \alpha^4(\alpha^3)^{4n} + \alpha^6(\alpha^3)^{4p}\right) = = -(1+\alpha+\alpha^2) = 0$$
и
$$P(\alpha^2) = -(\alpha^{6m+1} + \alpha^{6n+2} + \alpha^{6p+3}) = -\left(\alpha(\alpha^3)^{2m} + \alpha^2(\alpha^3)^{2n} + \alpha^3(\alpha^3)^{2p}\right) = = -\alpha(1+\alpha+\alpha^2) = 0.$$

Према томе, све нуле полинома $Q(x)$ истовремено су и нуле полинома $P(x)$, па $Q(x) \mid P(x)$.

24. Нека су p, q и r природни бројеви. Под којим је условом полином
$$P(x) = x^{3p} + ax^{3q+1} + x^{3r+2}$$
дељив полиномом
$$Q(x) = x^2 + ax + 1$$
ако је

а) $a = 1$;

б) $a = -1$?

Решење: а) Нуле x_i, $i \in \{1,2\}$, полинома $Q(x)$ су кубни корени јединице осим броја 1, тј. $x_i^3 = 1$. То значи да је
$$P(x_i) = 1 + x_i + x_i^2 = 0,$$
па $Q(x) \mid P(x)$ за све природне бројеве p, q, r, јер су све нуле полинома $Q(x)$ уједно и нуле полинома $P(x)$.

б) Нуле полинома x_i, $i \in \{1,2\}$, $Q(x)$ су кубни корени из -1, осим -1, тј. $x_i^3 = -1$. Тада је
$$P(x_i) = (-1)^p - (-1)^q x_i + (-1)^r x_i^2.$$
Последњи израз једнак је нули ако и само ако су бројеви p, q и r исте парности, и то је потребан и довољан услов да би важило $Q(x) \mid P(x)$.

25. Нека су a и b природни бројеви и $a \geq b$. Дати су полиноми
$$P(x) = x^{5a} + x^b + 1$$
и
$$Q(x) = x^2 + x + 1.$$
Испитати њихову дељивост уколико је:

а) $a, b \in \{1,2,3\}$ и $a = b$;

б) $a \equiv b \pmod 3$.

Решење: Приметимо да је
$$Q(\alpha) = 0 \iff \alpha^3 = 1 \wedge \alpha \neq 1 \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$
Полином $P(x)$ дељив је полиномом $Q(x)$ уколико је свака нула по-

линома $Q(x)$ нула и полинома $P(x)$. Имамо следеће случајеве:

а) *i)* $a = b = 1$:

$$P(\alpha) = \alpha^5 + \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = Q(\alpha) = 0,$$

па $Q(x) \mid P(x)$;

ii) $a = b = 2$:

$$P(\alpha) = \alpha^{10} + \alpha^2 + 1 = \alpha + \alpha^2 + 1 = Q(\alpha) = 0,$$

па $Q(x) \mid P(x)$;

iii) $a = b = 3$:

$$P(\alpha) = \alpha^{15} + \alpha^3 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0,$$

па $Q(x) \nmid P(x)$.

б) Како је $a \equiv b \pmod 3$, значи да

$$(\exists k, s \in \mathbb{N}_0)(\exists r \in \{0, 1, 2\})\ a = 3k + r \ \wedge\ b = 3s + r.$$

Нека је α нула полинома $Q(x)$. Имамо

$$P(\alpha) = \alpha^{5a} + \alpha^b + 1 = \alpha^{5r} + \alpha^r + 1, \quad r \in \{0, 1, 2\}.$$

Уколико $r \in \{1, 2\}$, према а) је $P(\alpha) = 0$, па $Q(x) \mid P(x)$. Ако је $r = 0$, директно добијамо да је $P(\alpha) = 3 \neq 0$, па $Q(x) \nmid P(x)$.

Дакле, под условом да је $a \equiv b \pmod 3$, полином $P(x)$ дељив је полиномом $Q(x)$ ако и само ако $a \not\equiv 0 \pmod 3$, тј. ако $3 \nmid a$.

26. Испитати да ли постоји реалан број a за који је реални полином

$$P(x) = x^6 - 15x^3 - 8x + 2$$

дељив полиномом $x^2 + ax + 1$.

27. Под којим је условом полином

$$P(x) = x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1$$

дељив полиномом

$$Q(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1,$$

$m, n \in \mathbb{N}$?

28. Доказати да је за све корене λ_i реалног полинома

$$P(x) = x^{2n} - 2x^n \cos\theta + 1$$

испуњена једнакост

$$\lambda_i^n = \cos\theta \pm i \sin\theta,$$

а затим одредити елементарну факторизацију датог полинома над пољем $\mathbb{R}$.

29. Доказати да је за било који природан број n и реалан број α $(\sin\alpha \neq 0)$ полином

$$P_n(x) = x^n \sin\alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

дељив полиномом

$$Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1.$$

Решење 1: Доказ ћемо спровести применом принципа математичке индукције. За $n = 1$ је $P_1(x) = 0$, па $Q(x) \mid P_1(x)$. Нека је за неко $n = k$ испуњено $Q(x) \mid P_k(x)$. Тада је

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= x^{k+1}\sin\alpha - x\sin(k+1)\alpha + \sin k\alpha \\ &= xP_k(x) + x^2 \sin k\alpha - x\big(\sin(k+1)\alpha + \sin(k-1)\alpha\big) + \sin k\alpha \\ &= xP_k(x) + (x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\sin k\alpha \\ &= xP_k(x) + Q(x)\sin k\alpha, \end{aligned}$$

одакле следује да $Q(x) \mid P_{k+1}(x)$.

Дакле, за било које $n \in \mathbb{N}$ полином $P_n(x)$ дељив је полиномом $Q(x)$.

Решење 2: Нуле полинома $Q(x)$ су $x_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Како је $P_n(x_1) = P_n(x_2) = 0$, то значи да су све нуле полинома $Q(x)$ истовремено и нуле полинома $P_n(x)$, па $Q(x) \mid P_n(x)$.

30. Доказати да је полином

$$P(x) = x^{n+1}\cos(n-1)\theta - x^n \cos n\theta - x\cos\theta + 1,$$

где је n природан, а θ реалан број, дељив полиномом

$$Q(x) = x^2 - 2x\cos\theta + 1.$$

Решење: Корени полинома Q су конјуговано - комплексни бројеви

$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ и $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$. Полином P дељив је полиномом Q ако и само ако је $P(z_1) = P(z_2) = 0$. Довољно је показати да је $P(z_1)=0$. Користећи Moivre-ову формулу, добијамо

$$\begin{aligned}
P(z_1) &= (\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta)\cos(n-1)\theta - \\
&- (\cos n\theta + i\sin n\theta)\cos n\theta - (\cos\theta + i\sin\theta)\cos\theta + 1 = \\
&= \cos(n+1)\theta\cos(n-1)\theta - \cos^2 n\theta - \cos^2\theta + 1 + \\
&+ i(\sin(n+1)\theta\cos(n-1)\theta - \sin n\theta\cos n\theta - \sin\theta\cos\theta) = \\
&= (\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta)(\cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta) \\
&- \cos^2 n\theta + \sin\theta + \\
&+ i((\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta)(\cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta) \\
&- \sin n\theta\cos n\theta - \sin\theta\cos\theta) = 0,
\end{aligned}$$

што значи да $Q \mid P$, а то је и требало доказати.

31. Факторисати реални полином $P(x) = x^{2n} - 2\cos(na\pi)\,x^n + 1$ у пољу реалних бројева ако је a ирационалан број.

Решење: Увођењем смене $x^n = t$ једначина $P(x) = 0$ своди се на квадратну једначину $t^2 - 2\cos(na\pi)\cdot t + 1 = 0$, чија су решења $t_{1,2} = \cos na\pi \pm i\sin na\pi$, па је $x^n = \mathrm{cis}(\pm na\pi)$. То значи да су нуле полинома $P(x)$ једнаке $x_k = \mathrm{cis}(\pm\alpha_k)$, где је $\alpha_k = a\pi + \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Према Bezout-овој теореми делиоци полинома $P(x)$ су облика $x - x_i$, а како се тражи факторизација у скупу $\mathbb{R}$, потребно је наћи факторе облика $x^2 + px + q$, јер су све нуле $P(x)$ (конјуговано) комплексне. Фактори су облика

$$(x - \cos\alpha_k - i\sin\alpha_k)(x - \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k) = x^2 - 2\cos\alpha_k x + 1,$$

где је α_k одговарајући аргумент једнак $\alpha_k = a\pi + \frac{2k\pi}{n}$. Дакле,

$$x^{2n} - 2\cos(na\pi)\cdot x^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(a\pi + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right),$$

што представља тражену факторизацију.

32. Одредити реалне бројеве a и b тако да полином

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 4$$

има две двоструке нуле и одредити их.

Резултат: Постоје два пара (a, b):

I $a = -4$, $b = 8$ (нуле су $1 \pm i$);

II $a = 4$, $b = 0$ (нуле су $-1 \pm \sqrt{3}$).

33. Одредити све вредности a и b за које реални полиноми

$$P(x) = x^3 + ax^2 + 18, \quad Q(x) = x^3 + bx + 12$$

имају два заједничка корена, а затим их одредити.

Решење: Заједнички корени полинома $P(x)$ и $Q(x)$ су корени и полинома $P(x) - Q(x)$, тј. $ax^2 - bx + 6$. Како су то и једини корени добијеног полинома, то су дати полиноми дељиви без остатка добијеним полиномом. На основу тога добијају се услови

$$(a^2 + b)b - 6a = 0,$$
$$b = 2a^2,$$

одакле је $a = 1$ и $b = 2$. Корени полинома $P(x)$ су -3 и $1 \pm i\sqrt{5}$, а полинома $Q(x)$ су -2 и $1 \pm i\sqrt{5}$.

34. Дати су реални полиноми

$$P(x) = x^3 + ax^2 + 11x + 6,$$
$$Q(x) = x^3 + bx^2 + 14x + 8.$$

а) Одредити a и b тако да дати полиноми имају заједнички фактор облика $x^2 + px + q$.

б) За тако нађене a и b одредити све нуле полинома $P(x)$ и $Q(x)$

35. Одредити услов који морају да задовоље реални бројеви a и b да би једначине

$$x^3 - 6x^2 - ax - 3 = 0$$

и

$$x^3 - x^2 + bx + 2 = 0$$

имале заједнички корен.

36. За које вредности параметра λ полиноми

а) $P(x) = x^3 - 2\lambda x + \lambda^3$ и $Q(x) = x^2 + \lambda^2 - 2$;

б) $P(x) = x^3 + \lambda x^2 - 9$ и $Q(x) = x^2 + \lambda x - 3$

имају заједничких нула?

37. Ако реални полиноми

$$P(x) = x^3 + px + q$$

и

$$Q(x) = x^3 + rx + s$$

имају тачно један заједнички корен, доказати да је тада

$$(q - s)^3 = (ps - qr)(p - r)^2.$$

Одредити заједнички корен.

Решење: Нека је $x = a$ заједнички корен ових полинома. Уколико би било $p = r$, тада би због једнакости полинома у тачки a морало да буде и $q = s$, па би полиноми били идентични, тј. имали би идентичне нуле, што противречи условy. Дакле, $p \neq r$. На основу услова задатка је

$$a^3 + pa + q = 0,$$
$$a^3 + ra + s = 0,$$

одакле је $a = \dfrac{s - q}{p - r}$. Заменом ове вредности у прву једначину добија се:

$$\frac{(s - q)^3}{(p - r)^3} + p\cdot\frac{s - q}{p - r} + q = 0,$$

тј.

$$(s - q)^3 + p(s - q)(p - r)^2 + q(p - r)^3 = 0$$

или

$$(p - r)^2(ps - pq + qp - qr) = (q - s)^3.$$

Коначно је

$$(q - s)^3 = (ps - qr)(p - r)^2,$$

што је и требало доказати.

38. Доказати да једначине

$$P_0(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = 0$$

и

$$P_1(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 6 = 0$$

имају два заједничка решења, па их затим решити.

Решење: Нека A mod B означава остатак при дељењу полинома A полиномом B. Применом Еуклидовог алгоритма за налажење највећег заједничког делиоца (НЗД) полинома $P_0(x)$ и $P_1(x)$ добија се следећи низ:

$$\frac{1}{2}(P_0 - P_1) = P_2 = x^3 + x^2 + x + 6;$$

$$\frac{1}{2}(P_1 \bmod P_2) = P_3 = x^2 - x + 3;$$

$$\frac{1}{2}(P_2 \bmod P_3) = P_4 = x^2 - x + 3,$$

па је $\mathrm{NZD}(P_0, P_1) = P_3 = P_4 = x^2 - x + 3$.

Из $\dfrac{P_0}{P_3} = x^2 + 2x + 2$ следује $P_0 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 3)$, а

из $\dfrac{P_1}{P_3} = x^2 - 2$ следује $P_1 = (x^2 - 2)(x^2 - x + 3)$. Нуле полинома P_0 су $-1 \pm i$, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$, а нуле полинома P_1 су $\pm\sqrt{2}$, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$

Јасно је да су решења једначине $\mathrm{NZD}(P_0, P_1) = 0$ заједничка решења датих једначина.

39. Користећи се теоремом о рационалним нулама полинома, наћи сва решења једначине

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 = 0.$$

Решење: По теореми о рационалним нулама полинома, све рационалне нуле дате једначине припадају скупу $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$. Провером утврђујемо да су -3 и 2 две нуле дате једначине, чиме се добија факторизација у $\mathbb{R}$:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 = (x + 3)(x - 2)(x^2 + 4).$$

Према томе, нуле дате једначине су $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \pm 2i$.

40. Одредити рационалне корене једначине
$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0.$$

Резултат: $-1, 2, 4$.

41. Дат је реални полином
$$P(x) = 4x^5 - 24x^4 + 53x^3 - 61x^2 + ax + b.$$
Наћи све нуле полинома $P(x)$ ако се зна да је $1+i$ једна нула и да постоји бар једна рационална нула.

Решење: Пошто се комплексне нуле јављају у конјугованим паровима, то је и $1-i$ нула полинома $P(x)$, па важи
$$P(x) = (x-1-i)(x-1+i)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D),$$
односно
$$(x^2 - 2x + 2)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 4x^5 - 24x^4 + 53x^3 - 61x^2 + ax + b,$$
одакле се, изједначавањем коефицијената, добија
$$A = 4,$$
$$B - 2A = -24 \Rightarrow B = -16,$$
$$C - 2B + 2A = 53 \Rightarrow C = 13,$$
$$D - 2C + 2B = -61 \Rightarrow D = -3,$$
$$2C - 2D = a \Rightarrow a = 32,$$
$$2D = b \Rightarrow b = -6.$$
Како $P(x)$ има рационалну нулу, то и
$$Q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$$
има ту исту рационалну нулу $x_0 = \frac{p}{q}$, где је $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ и притом су p и q узајамно прости бројеви. Пошто су коефицијенти полинома Q цели бројеви, то $p|3$ и $q|4$, па се провером добија да је $x_0 = 3$. Сада је
$$Q(x) = (x-3)(4x^2 - 4x + 1) = (x-3)(2x-1)^2,$$
што значи да је $x = \frac{1}{2}$ двострука нула. Дакле, све нуле полинома P су: $x_1 = 1+i$, $x_2 = 1-i$, $x_3 = 3$, $x_4 = x_5 = \frac{1}{2}$.

42. Дат је полином
$$P(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12.$$
Знајући да он има рационалних нула, факторисати $P(x)$ у скупу реалних бројева.

Резултат: $P(x) = 6(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$.

43. Дат је полином
$$P(x) = 3x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 55x - 20.$$
Знајући да он има рационалних нула, факторисати $P(x)$ у скупу реалних бројева.

Резултат: $P(x) = 3(x+4)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x^2+5) = (x+4)(3x-1)(x^2+5)$.

44. Показати да полином
$$P_5(x) = 9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6$$
има нулу $x_1 = -i\sqrt{3}$. Одредити затим остале нуле полинома.

Решење: Из
$$\begin{aligned} P_5(x_1) &= 9(-i\sqrt{3})^5 - 6(-i\sqrt{3})^4 + 22(-i\sqrt{3})^3 - 16(-i\sqrt{3})^2 - 15(-i\sqrt{3}) + 6 = \\ &= -9i \cdot 9\sqrt{3} - 6 \cdot 9 + 22i \cdot 3\sqrt{3} + 16 \cdot 3 + 15i\sqrt{3} + 6 = \\ &= (-81\sqrt{3} + 66\sqrt{3} + 15\sqrt{3})i - 54 + 48 + 6 = 0, \end{aligned}$$
следује да $-i\sqrt{3}$ јесте нула датог полинома. Због тога је и $x_2 = \overline{x_1} = i\sqrt{3}$ нула полинома $P_5(x)$, па је он дељив фактором
$$(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3}) = x^2 + 3.$$
Како је
$$(9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6) : (x^2 + 3) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2,$$
преостале (три) нуле полинома $P_5(x)$ јесу нуле полинома

$$Q(x) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2.$$

То је полином са целобројним коефицијентима, па ако има рационалних нула облика $\frac{p}{q}$, онда је p делилац броја 2, а q делилац броја 9. Могуће рационалне нуле су, према томе, из скупа $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{9}\right\}$. Непосредно се проверава да је $x_3 = 1$ нула полинома $Q(x)$, па је он дељив биномом $x - 1$. Налазимо

$$Q(x) = (x - 1)(9x^2 + 3x - 2).$$

Сада су x_4 и x_5 решења једначине $9x^2 + 3x - 2 = 0$. Одавде је

$$x_4 = -\frac{2}{3},\ x_5 = \frac{1}{3}.$$

Напомена: До нула x_4 и x_5 могли смо доћи и настављањем испитивања елемената скупа могућних рационлних нула.

45. Одредити вишеструке нуле реалног полинома

$$P(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Решење: Ако је x_0 вишеструка нула полинома $P(x)$, тада је $P(x_0) = 0$ и $P'(x_0) = 0$. Дакле, да бисмо одредили вишеструке нуле полинома $P(x)$ треба да нађемо највећи заједнички делилац полинома $P(x)$ и $P'(x)$, тј. $NZD\,(P(x), P'(x))$ и одредимо његове нуле. У том случају свака нула реда k полинома $NZD\,(P(x), P'(x))$ јесте нула реда $k+1$ полинома $P(x)$. Применимо Еуклидов алгоритам. Ако полином

$$3P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x - 3$$

поделимо полиномом

$$P'(x) = 3x^2 + 2x - 1,$$

добијамо остатак $-\frac{8}{7}(x + 1)$. Ако сада полином $P'(x)$ поделимо полиномом $x + 1$, добијамо количник $3x - 1$ и остатак 0. Дакле

$$NZD\,(P(x), P'(x)) = x + 1.$$

Сада следује да дати полином $P(x)$ има $x = -1$ за нулу *другог* реда.

46. За које рационалне вредности a и b је полином

$$P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1,$$

$n \in \mathbb{N}$, дељив са $(x - 1)^2$?

Решење: Ако је дати полином дељив са $(x - 1)^2$, онда је 1 бар двострука нула тог полинома, па зато мора бити

$$P(1) = a + b + 1 = 0,$$

$$P'(1) = (n + 1)a + nb = 0.$$

Одавде је

$$a = n, \quad b = -(n + 1).$$

Напомена: Како је $P''(1) = (n + 1)na + n(n - 1)b \neq 0$, то је $x = 1$ нула управо другог реда добијеног полинома.

47. Да ли је полином

$$P(x) = nx^{n+1} - (1 + np)x^n + (p - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots x) + p$$

дељив полиномом $x^2 - (p + 1)x + p$, где је n природан, а p реалан број? Посебно испитати случај када је $p = 1$.

Решење: Нуле полинома $Q(x) = x^2 - (p + 1)x + p$ су $x_1 = 1$ и $x_2 = p$. Како је

$$P(1) = n - 1 - np + (p - 1)(n - 1) + p = 0,$$

и

$$P(p) = np^{n+1} - (1 + np)p^n + (p - 1)p(1 + p + \dots + p^{n-2}) + p =$$

$$= -p^n + p(p - 1)\frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} + p = 0 \quad (p \neq 1),$$

тврђење је доказано за $p \neq 1$.

Уколико је $p = 1$, онда је $P(x) = nx^{n+1} - (1 + n)x^n + 1$, па како је

$$P'(1) = n(n + 1) - n(n + 1) = 0,$$

$x = 1$ је нула бар другог реда полинома $P(x)$, тј. и у том случају полином $Q(x)$ дели полином $P(x)$, што је и требало доказати.

$$Q''(x) = 2\big((n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 1\big)^2 + 2(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)\cdot$$
$$\cdot\big((n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots 2\cdot 1\big) - n^2(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

имамо да је

$$Q''(1) = 2(n-1 + n-2 + \ldots + 1)^2 +$$
$$+ 2(1 + \ldots + 1)\big((n-1)(n-2) + 3\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 1\big) - n^2(n-1)\cdot(n-2) =$$
$$= 2\,\frac{n^2(n-1)^2}{2} + 2n\,\frac{2(n-2)n(n-1)}{3\cdot 2} - n^2(n-1)(n-2) =$$
$$= (n-1)n^2\Big(\frac{n-1}{2} + \frac{2}{3}(n-2) - (n-2)\Big) = \frac{1}{6}(n-1)n^2(n+1) \neq 0,$$

видимо да је $k = 4$.

52. Доказати да је реалан полином
$$P(x) = 2x^{n+1} - n(n+1)a^{n-1}x^2 + 2(n^2-1)a^n x - n(n-1)a^{n-1},$$
$(n \in \mathbb{N})$, дељив са $(x-a)^3$.

53. Доказати да је за произвољно $n \in \mathbb{N}$ полином
$$P_{3n+3}(x) = (x^{n+2}-1)(x^{n+1}-1)(x^n-1)$$
дељив полиномом
$$Q_6(x) = (x^3-1)(x^2-1)(x-1).$$

54. Доказати да је реалан полином $P(x)$ дељив својим изводним полиномом ако и само ако је $P(x) = a_0(x-x_0)^n$ $(a_0 \in \mathbb{R})$.

55. За које a и b реалан полином
$$P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$$
има двоструку нулу $x = 1$?

Резултат: $a = n,\ b = -(n+1)$.

56. Одредити полином седмог степена $P(x)$ који задовољава услове

$$(x-1)^4 \mid P(x) + 1,$$
$$(x+1)^4 \mid P(x) - 1.$$

Решење: Како је $x = 1$ нула бар четвртог реда полинома $P(x) + 1$, то значи да је $x = 1$ нула бар трећег реда изводног полинома $P'(x)$; аналогно закључујемо да је и $x = -1$ нула бар трећег реда изводног полинома. Изводни полином је степена шест, па има шест нула, које су све познате, тј.
$$P'(x) = A(x-1)^3(x+1)^3,$$
или
$$P'(x) = A(x^2-1)^3 = Ax^6 - 3Ax^4 + 3Ax^2 - A,$$
одакле је
$$P(x) = \frac{A}{7}x^7 - \frac{3}{5}Ax^5 + Ax^3 - Ax + B.$$
Из $P(1) + 1 = 0$ и $P(-1) - 1 = 0$ добија се систем једначина
$$\frac{A}{7} - \frac{3}{5}A + A - A + B + 1 = 0,$$
$$-\frac{A}{7} + \frac{3}{5}A - A + A + B - 1 = 0,$$
чија су решења $B = 0$ и $A = \frac{35}{16}$, па је тражени полином
$$P(x) = \frac{x}{16}\big(5x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 35\big).$$

57. Одредити реални полином $P(x)$ четвртог степена који задовољава следеће услове:
$$(x-1)^3 \mid P(x) - 8,$$
$$(x+1)^2 \mid P(x) + 8.$$

Резултат: $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 3$.

58. Одредити реални полином $P(x)$ најмањег степена тако да важи
$$x^2+1 \mid P(x) \quad \text{и} \quad x^3+1 \mid P(x) - 1.$$

59. Реални полином P четвртог степена има двоструку нулу $x = 1$, а полином $Q(x) = P(x) + 4$ има двоструку нулу $x = -1$. Одредити

48. Доказати да је полином

$$P(x) = mx^{m+n} - (m+n)x^m + n \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

дељив са $(x-1)^2$ и одредити количник.

Решење: Како је $P(1) = m - (m+n) + n = 0$, то $x = 1$ јесте нула полинома $P(x)$. Из

$$P'(x) = m(m+n)x^{m+n-1} - m(m+n)x^{m-1}$$

следује да је $P'(1) = m(m+n) - m(m+n) = 0$, па заиста $(x-1)^2 \mid P(x)$.
Извршимо дељење по Horner-овој шеми:

m	0	0	...	0	$-(m+n)$	0	0	...	0	0	n
m	m	m	...	m	$-n$	$-n$	$-n$	...	$-n$	$-n$	0
m	$2m$	$3m$	...	nm	$(m-1)n$	$(m-2)n$	$(m-3)n$	...	n	0	

Према томе, количник је полином

$$mx^{m+n-2} + 2mx^{m+n-3} + \dots + nmx^{m-1} + (m-1)nx^{m-2} + (m-2)nx^{m-3} + \dots + 2nx + n.$$

49. Одредити коефицијенте реалног полинома

$$P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

ако је познато да је његов други извод $P''(x) = 12x^2 + 6x + 4$ и да $P''(x) \mid P(x)$.

Решење: Како је

$$P'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$$

и

$$P''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

добија се да је $A = 1$, $B = 1$, $C = 2$. Ако сада извршимо дељење $P(x) : P''(x)$, добићемо количник

$$Q(x) = \frac{x^2}{12} + \frac{x}{24} + \frac{17}{144},$$

а остатак је $\frac{24D-4-17}{24}x + \left(E - \frac{17}{36}\right)$, па је $D = \frac{7}{8}$ и $E = \frac{17}{36}$.

50. Нека је $P(x)$ реалан полином степена $n > 2$. Одредити ред нуле $x = a$ полинома

$$Q(x) = \frac{1}{2}(x-a)\left(P'(x) + P'(a)\right) - P(x) + P(a).$$

Решење: Имамо да је $Q(a) = 0$. Даље је

$$Q'(x) = \frac{1}{2}(x-a)\cdot P''(x) + \frac{1}{2}\left(-P'(x) + P'(a)\right),$$

као и

$$Q''(x) = \frac{1}{2}(x-a)\cdot P'''(x).$$

Дакле, $Q(a) = Q'(a) = Q''(a) = 0$, па је $x = a$ нула најмање трећег реда полинома $Q(x)$. Индукцијом се може показати да за $k > 2$ важи формула

$$Q^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(x-a)\cdot P^{(k+1)}(x) + \frac{k-2}{2}\cdot P^{(k)}(x).$$

Дакле, ако је $x = a$ нула реда m полинома $P'''(x)$, онда је то нула реда $m+3$ полинома $Q(x)$. У случају да $x = a$ није нула полинома $P'''(x)$, онда је $x = a$ нула трећег реда полинома $Q(x)$.

51. Одредити коефицијент a тако да $x = 1$ буде нула реалног полинома

$$P(x) = x^{2n} - ax^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - ax^{n-1} + 1,$$

а затим наћи ред k нуле $x = 1$.

Решење: Услов задатка је да је $P(1) = 0$, одакле је

$$P(1) = 1 - a + 2n^2 - 2 - a + 1 = 2(n^2 - a),$$

што значи да је $a = n^2$. Полином $P(x) = x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2x^{n-1} + 1$ може се трансформисати на следећи начин:

$$P(x) = x^{2n} - 2x^n + 1 + n^2(-x^{n+1} + 2x^n - x^{n-1}) =$$

$$= (x^n - 1)^2 - n^2x^{n-1}(x-1)^2 = (x-1)^2\left((x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)^2 - n^2x^{n-1}\right),$$

одакле је јасно да је $k \geq 2$. Нека је

$$Q(x) = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)^2 - n^2x^{n-1}.$$

Како је $Q(1) = (1 + 1 + \dots + 1)^2 - n^2 = n^2 - n^2 = 0$, мора бити $k \geq 3$. Даље је:

$$Q'(x) = 2(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)\cdot\left((n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 1\right) - n^2(n-1)x^{n-2},$$

$$Q'(1) = 2(1 + 1 + \dots + 1)\cdot((n-1) + (n-2) + \dots + 1) - n^2(n-1) =$$

$$= 2n\frac{(n-1)n}{2} - n^2(n-1) = 0,$$

па је $k \geq 4$. Како је

полином P ако је $Q(0) = -2$.

60. Нека су x_1, x_2 и x_3 корени једначине $x^3 + px + q = 0$. Каква веза постоји између коефицијената p и q ако је $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$?

Решење: Према Viète-овим формулама је

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,$$
$$x_1x_2x_3 = -q,$$

док је услов задатка $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$, па је $-q = x_1x_2x_3 = x_1 + x_2 = -x_3$, тј. $x_3 = q$. Уколико је $q \neq 0$, тада је $x_1x_2 = -1$, па друга релација постаје

$$p = -1 + x_3(x_1 + x_2) = -1 + q(-q) = -1 - q^2;$$

то значи да је $q^2 + p + 1 = 0$, што уз другу могућност $q = 0$ даје

$$q^3 + pq + q = 0.$$

61. Ако једначина

$$x^3 + ax + b = 0,$$

$b \neq 0$, има рационалне корене p, q и r, доказати да једначина

$$py^2 + qy + r = 0$$

такође има рационалне корене.

Решење: На основу Viète-ових формула за кубну једначину имамо да је

$$p + q + r = 0 \Rightarrow q = -(p + r).$$

Тада квадратна једначина постаје

$$py^2 - (p + r)y + r = 0.$$

Решења ове једначине су $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{r}{p}$. Како $p, q \in \mathbb{Q}$, важи и $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$ под условом да је $p \neq 0$, што важи с обзиром на полазни услов $b \neq 0$.

62. Ако корени једначине са реалним коефицијентима $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, образују геометријску прогресију, доказати да је $ac^3 = db^3$.

Решење: Нека су корени дате једначине $x_1 = \frac{p}{q}$, $x_2 = p$ и $x_3 = pq$. На основу Viète-ових веза је

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a},$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a},$$

или

$$\frac{p}{q} + p + pq = p\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = -\frac{b}{a},$$
$$\frac{p^2}{q} + qp^2 + p^2 = p^2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = \frac{c}{a},$$
$$p^3 = -\frac{d}{a}.$$

Из прве две једнакости добија се $p\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{c}{a}$ и, уз помоћ треће $-\frac{d}{a}(-b^3) = c^3$, што даје тражену релацију $ac^3 = db^3$.

63. Реални полином

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (c \neq 0)$$

има три различита корена који су узастопни чланови неке геометријске прогресије, док су њихове реципрочне вредности узастопни чланови неке аритметичке прогресије. Одредити коефицијенте b и c (у функцији a).

Решење: Нека су нуле датог полинома једнаке $\frac{k}{q}$, k и kq. Услов задатка даје

$$\frac{q}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{kq} = \frac{3}{k},$$

па је је $q + 1 + \frac{1}{q} = 3$. Према Viète-овим везама је

$$\frac{k}{q} + k + kq = k\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) = -a,$$

$$\frac{k^2}{q} + k^2 + k^2 q = k^2\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) = b,$$
$$k^3 = -c,$$
одакле се добијају тражене релације
$$b = \frac{a^2}{3}, \quad c = -\frac{a^3}{27}.$$

64. Ако је један корен полинома $x^2 + px + q$ једнак квадрату другог, доказати да је
$$p^3 + q(3p - 1) + q^2 = 0.$$

Решење: Према услову задатка је $x_2 = x_1^2$; па се Viète-ове везе могу написати у облику
$$x_1 + x_1^2 = x_1(x_1 + 1) = -p,$$
$$x_1 x_1^2 = x_1^3 = q.$$
Елиминацијом корена x_1 из претходних једнакости долази се до траженог услова
$$p^3 + q(3p - 1) + q^2 = 0.$$

65. Ако је збир два корена полинома
$$P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$$
једнак збиру остала два, доказати да је
$$4pq = p^3 + 8r.$$

Решење: Према услову задатка је $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, па се Viète-ове везе могу написати у облику
$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{p}{2},$$
$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = q,$$
$$x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2) = -r,$$
$$x_1 x_2 x_3 x_4 = s.$$
Из прве и треће релације следује $\frac{1}{2}(x_1 x_2 + x_3 x_4)p = r$, што уз другу једнакост даје тражену релацију $4pq = p^3 + 8r$.

66. Одредити вредност реалног параметра m тако да збир два корена полинома
$$P(x) = x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 16$$
буде једнак збиру друга два корена.

Решење: На основу Viète-ових веза и датог услова, добијају се следеће једнакости:
$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 3,$$
$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = m,$$
$$x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2) = 12,$$
$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 16,$$
па је $x_1 x_2 + x_3 x_4 = 4$, односно
$$m = 13.$$

67. Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да полином
$$P(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + 6x - 4$$
има два корена чији је производ једнак 2.

68. Одредити реалне бројеве a и b тако да корени x_1, x_2, x_3, x_4 једначине
$$x^4 + ax + b = 0$$
задовољавају услове
$$x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2) + \mu = 0,$$
$$x_3 x_4 + \lambda(x_3 + x_4) + \mu = 0,$$
где су λ и μ дати реални бројеви.

Резултат: $a = -4\lambda\mu$, $b = \mu^2 + 2\lambda^2\mu$.

69. Реални полином
$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (r \neq 0),$$
има три реална позитивна корена x_1, x_2 и x_3. Одредити рела

цију која повезује p, q и r тако да корени полинома могу бити мерни бројеви дужина страница неког троугла.

<u>Резултат:</u> Неједнакости троугла

$$x_1 + x_2 > x_3,$$
$$x_2 + x_3 > x_1,$$
$$x_3 + x_1 > x_2,$$

уз Viète-ове везе

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q,$$
$$x_1x_2x_3 = -r$$

елиминисањем корена доводе до услова

$$p < 0,\ p^2 < 4q,\ pq < 6r.$$

70. Дата је једначина са реалним коефицијентима

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

$s > 0$. Ако решења ове једначине образују геометријску прогресију, доказати да је тада $p^2 s = r^2$, а ако образују аритметичку прогресију, доказати да је $p^3 - 4pq + 8r = 0$.

<u>Решење:</u> Viète-ове формуле дају

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = q,$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -r,$$
$$x_1x_2x_3x_4 = s.$$

Уколико решења образују геометријску прогресију, тада је $x_1x_4 = x_2x_3$, што са последњим условом даје $x_1x_4 = x_2x_3 = \pm\sqrt{s}$. Трећа релација даје $-r = (x_1 + x_4)x_2x_3 + (x_2 + x_3)x_1x_4 = \pm\sqrt{s}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, што уз прву релацију даје $-r = \pm\sqrt{s}\cdot(-p)$, тј. $p^2 s = r$.

За случај аритметичке прогресије видети решење задатка 65.

71. Који потребан услов треба да испуњавају комплексни коефицијенти $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 и a_3 кубне једначине

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

да би за њене корене x_1, x_2 и x_3 важио услов

$$x_1x_2 + x_2x_3 = -2x_1x_3\ ?$$

<u>Решење:</u> Према Viète-овим формулама је

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0},$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_2}{a_0},$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}.$$

Заменом датог услова у другу једнакост добија се $x_1x_3 = -\frac{a_2}{a_0}$, па се применом треће једнакости добија $a_2x_2 = a_3$. Стављајући $x_2 = \frac{a_3}{a_2}$ $(a_2 \neq 0)$ у дату једначину, добијамо тражени услов:

$$a_0a_3^3 + a_1a_2a_3^2 = -2a_2^3a_3.$$

Уколико је $a_2 = 0$, то би значило да је $x_1x_3 = 0$, тј. $a_3 = 0$, па добијени услов опет важи.

72. Ако су нуле реалног полинома $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ међусобно различити реални бројеви, тада су нуле реалног полинома

$$Q(x) = x^3 + ax^2 + \frac{a^2+b}{4}x + \frac{ab-c}{8}$$

такође међусобно различити реални бројеви. Доказати.

<u>Решење:</u> Ако са x_1, x_2 и x_3 означимо нуле полинома $P(x)$, а са x_4, x_5 и x_6 нуле полинома $Q(x)$, тада ће по Viète-овим формулама бити:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \qquad x_4 + x_5 + x_6 = -a,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b, \qquad x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_4 = \frac{a^2+b}{4},$$
$$x_1x_2x_3 = -c; \qquad x_4x_5x_6 = \frac{c-ab}{8}.$$

Елиминацијом коефицијената a, b и c из ових шест једначина добијају се изрази за x_4, x_5 и x_6 у функцији од x_1, x_2 и x_3:

$$x_i = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad x_j = \frac{x_2 + x_3}{2}, \qquad x_k = \frac{x_3 + x_1}{2},$$

при чему је (i, j, k) пермутација скупа $\{4, 5, 6\}$. Одавде је јасно да $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$ повлачи $x_4 \neq x_5 \neq x_6 \neq x_4$, што је и требало доказати.

73. Ако су сва три корена реалног полинома $x^3 - px + q$ $(p > 0, q > 0)$ реални, доказати да за корен најмање апсолутне вредности r важи процена

$$\frac{q}{p} < r \le \frac{3q}{2p}.$$

Решење: Пошто је, према Viète-овим везама, збир корена нула, а њихов производ негативан $(q > 0)$, полином има два позитивна и један негативан корен. Нека су r, s и t корени тако да је $s \ge r > 0$, а $-t = r + s$. Из факторизације

$$(x - r)(x - s)(x + r + s) = x^3 - px + q$$

добијамо

$$p = r^2 + 3rs + s^2$$

и

$$q = rs(r + s).$$

Како је $s^2 \ge rs \ge r^2$, имамо да је

$$s^2 + rs - 2r^2 \ge 0,$$

па је

$$3(rs + s^2) \ge 2(r^2 + rs + s^2),$$

тј.

$$\frac{3}{2}(rs + s^2) \ge (r^2 + rs + s^2).$$

Ако неједнакости

$$rs + s^2 < r^2 + rs + s^2 \le \frac{3}{2}(rs + s^2)$$

помножимо са

$$\frac{r}{r^2+rs+s^2} > 0,$$

добијамо

$$\frac{rs(r+s)}{r^2+rs+s^2} < r \le \frac{3}{2}\,\frac{rs(r+s)}{r^2+rs+s^2},$$

односно

$$\frac{q}{p} < r \le \frac{3q}{2p},$$

што је и требало доказати.

74. Колико постоји комплексних полинома

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

чије су нуле a, b и c?

Решење: По Viète-овим формулама ће бити:

$$a + b + c = -a,$$
$$ab + bc + ac = b,$$
$$abc = -c.$$

Уколико је $c = 0$, тада се овај систем своди на

$$b = -2a, \quad ab = b,$$

одакле је $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $b_2 = -2$. За $c \neq 0$ систем се своди на

$$ab = -1,$$
$$c(b + 1)(b - 1) = b(b + 1),$$
$$c = \frac{2-b^2}{b}.$$

За $b = -1$ добија се да је $a_3 = 1$ и $c_3 = -1$, а за $b \neq -1$

$$c = \frac{b}{b-1} = \frac{2-b^2}{b},$$

или

$$b^3 - 2b + 2 = 0.$$

Последња једначина има три различита корена (који су различити од b_1, b_2 и b_3, што се лако проверава). Дакле, постоји шест полинома P са наведеном особином.

75. Познато је да су нуле комплексног полинома

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

(комплексни) бројеви $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Израчунати производ

$$\Pi = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_n + 1).$$

76. У једначини

$$x^4 + ax^2 + bx + 1 = 0$$

одредити коефицијенте a и b тако да једначина има

а) два двострука,

б) једно троструко решење.

У оба случаја решити дату једначину. Размотрити случајеве када су бројеви a и b

1° реални,

2° комплексни.

<u>Упутство и резултат:</u> Применити Viète-ове формуле.

1° $a, b \in \mathbb{R}$:

а) *i)* $a = 2,\ b = 0;\ x_{1,2} = 1,\ x_{3,4} = -1;$

ii) $a = -2,\ b = 0;\ x_{1,2} = i,\ x_{3,4} = -i;$

б) не постоје a, b.

2° $a, b \in \mathbb{C}$:

а) Исто као под 1° а).

б) *i)* $a = -2\sqrt{3}i,\ b = \dfrac{8}{\sqrt[4]{27}} \operatorname{cis} \dfrac{3\pi}{4};$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4},\ x_4 = -\sqrt[4]{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4};$$

ii) $a = 2\sqrt{3}i,\ b = \dfrac{8}{\sqrt[4]{27}} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4};$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4},\ x_4 = -\sqrt[4]{3} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4};$$

iii) $a = -2\sqrt{3}i,\ b = \dfrac{8}{\sqrt[4]{27}} \operatorname{cis} \left(-\dfrac{\pi}{4}\right);$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right),\ x_4 = -\sqrt[4]{3} \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right);$$

iv) $a = 2\sqrt{3}i,\ b = \dfrac{8}{\sqrt[4]{27}} \operatorname{cis} \left(-\dfrac{3\pi}{4}\right);$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right),\ x_4 = -\sqrt[4]{3} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

77. Уколико полином $P(x) = x^4 + px + q$ има фактор облика $(x - c)^2$, где су p, q и c реални бројеви, доказати да тада p и q испуњавају услов $27p^4 = 256q^3$.

<u>Решење:</u> Нека су нуле полинома a, b и c (бар двострука нула). Тада је по Viète-овим формулама:

$$a + b + 2c = 0;$$
$$ab + (a + b) \cdot 2c + c^2 = 0;$$
$$2abc + (a + b)c^2 = -p;$$
$$abc^2 = q.$$

Из прве једнакости је $a + b = -2c$, из друге $ab = 3c^2$, па последње две једначине постају

$$4c^3 = -p,$$
$$3c^4 = q,$$

одакле се, елиминацијом c, добија тражени услов $27p^4 = 256q^3$.

78. Одредити вредност реалног броја a за коју корени x_1, x_2 и x_3 реалног полинома $P(x) = x^3 - 6x^2 + ax + a$ задовољавају услов

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

<u>Решење 1:</u> Уведимо нову променљиву $y = x - 3$. Тада полином постаје

$$P(x) = Q(y) = (y + 3)^3 - 6(y + 3)^2 + a(y + 3) + a,$$

тј.

$$Q(y) = y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + 4a - 27,$$

а његове нуле су $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 3$ и $y_3 = x_3 - 3$ и оне морају према услову да задовоље једнакост

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0.$$

Viète-ове формуле дају

$$y_1 + y_2 + y_3 = -3,$$
$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = a - 9,$$
$$y_1y_2y_3 = 27 - 4a.$$

Како је

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)(y_1 + y_2 + y_3) + 3\,y_1y_2y_3$$

биће

$$0 = (-3)^3 - 3(a - 9)(-3) + 3(27 - 4a) = -27 - 3a,$$

што значи да је $a = -9$.

Решење 2: Без увођења смене добило би се

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a,$$
$$x_1x_2x_3 = -a.$$

Очигледно је

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 6^2 - 2a = 36 - 2a;$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(x_1 + x_2 + x_3) + 3x_1x_2x_3 =$$
$$= 6^3 - 3a\cdot 6 + 3(-a) = 216 - 21a.$$

Услов $(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$ своди се на

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 27(x_1 + x_2 + x_3) = 81,$$

или $216 - 21a - 324 + 18a + 162 = 81$, па је $-3a = 27$ или $a = -9$.

Напомена: Ако се узме да је $P(x) = x^3 - bx^2 + ax + a$ и да корени задовољавају услов $(x_1 - c)^3 + (x_2 - c)^3 + (x_3 - c)^3 = 0$, добија се

$$a = \frac{(b-c)^2 - 2c^2}{b+1-2c}, \quad (b + 1 - 2c \neq 0).$$

79. а) Одредити услов под којим се полином $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ може представити у облику

$$P(x) = (x^2 + rx)^2 + p\cdot(x^2 + rx) + q.$$

Када је тај услов испуњен, израчунати нуле полинома $P(x)$.

б) Изабрати параметар a тако да се једначина

$$x^4 + ax^3 + 7x^2 - 6x - 8 = 0$$

може решити на основу наведене особине.

Решење: а) Тражени идентитет даје

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + rx)^2 + p(x^2 + rx) + q =$$
$$= x^4 + 2rx^3 + r^2x^2 + px^2 + prx + q,$$

тј.

$$a = 2r, \; b = r^2 + p, \; c = pr, \; d = q.$$

Елиминацијом p, q, r добија се

$$r = \frac{a}{2}, \; p = b - r^2 = b - \frac{a^2}{4},$$

тј.

$$c = \frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a}{8}(4b - a^2),$$

што и представља тражени услов.

Једначина се у том случају своди на квадратну, при чему је

$$x^2 + rx = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

а ове квадратне једначине сада је лако решити:

$$x_{1,2,3,4} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 2p \pm 2\sqrt{p^2 - 4q}}}{2}.$$

б) У једначини $x^4 + ax^3 + 7x^2 - 6x - 8 = 0$ је $b = 7$ и $c = -6$, па је

$$a^3 - 28a - 48 = 0.$$

Ово је (канонска) кубна једначина. Ако се претпостави да она има рационалних нула, тада $a \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm16, \pm24, \pm48\}$. Добија се да $a \in \{-2, 6, -4\}$ и на основу добијене формуле лако се може доћи до решења дате једначина.

80. Одредити услов који морају да задовољавају коефицијенти реалног полинома

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

да би се сменом $x = y + h$ добио полином облика

$$Q(x) = y^4 + py + q.$$

Резултат: $8c = (4b - a^2)\,a$.

81. Помоћу смене $y = 2 - x^2$ трансформисати једначину

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

и протумачити добијени резултат.

Решење: Поступак се састоји од елиминације променљиве x из дате једначине и смене

$$x^2 + y - 2 = 0.$$

Множећи последњу једнакост са x и одузимајући добијену једначину од дате, имамо

$$-x^2 - xy + 1 = 0.$$

Сабирајући последње једнакости долази се до једначине

$$y(1 - x) = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{y},$$

а заменом у изразу за смену добија се

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Ова једначина идентична је полазној једначини. Према томе, закључујемо: ако је x решење дате једначине, њено решење је и $y = 2 - x^2$.

82. Решити једначину

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

у скупу комплексних бројева ако су коефицијенти a_i реални бројеви и $a_3 \neq 0$ (кубна једначина).

Решење: Тзв. *канонски* облик алгебарске једначине имамо онда када је $a_{n-1} = 0$, а у нашем случају $a_2 = 0$. До тог облика долази се (очигледно линеарном) сменом $x = z + \alpha$, при чему је $z^3 + pz + q = 0$. Добија се да је $x = z - \frac{a_2}{3a_3}$ (за једначину n-тог степена $x = z - \frac{a_{n-1}}{na_n}$). Нека је $z = u + v$. Тада је

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0,$$
$$u^3 + v^3 + q + (u + v)(3uv + p) = 0.$$

Изаберимо u и v тако да буде $uv = -p/3$, што значи да мора бити $u^3 + v^3 = -q$. Ако се уведе смена $t_1 = u^3$ и $t_2 = v^3$, може се конструисати квадратна једначина *(резолвента)* чија су решења t_1 и t_2. Она гласи

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Њена решења су

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

а одатле се добијају и вредности $u_{1,2,3}$ и $v_{1,2,3}$, тј. 9 парова решења по z, што значи да нека од њих не задовољавају једначину. Ако се стави $u^3 = A$, $v^3 = B$ и $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, тада се решења кубне једначине могу приказати изразима

$$z_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$
$$z_2 = \alpha\cdot\sqrt[3]{A} + \alpha^2\cdot\sqrt[3]{B},$$
$$z_3 = \alpha^2\cdot\sqrt[3]{A} + \alpha\cdot\sqrt[3]{B},$$

који су познати под именом Cardano-ове формуле. Дискусија решења може се спровести анализом дискриминанте једначине $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$:

- $D > 0$: једно реално, два комплексна решења;
- $D = 0$: три реална решења: $z_1 = 2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, $z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$;
- $D < 0$: три реална различита решења.

83. Решити једначину

$$x^3 + 3ax^2 - (b^4 + b^3 + b^2 - 3a^2)\,x - (b^5 + ab^4 + b^4 + ab^3 + ab^2 - a^3) = 0$$

ако су a и b реални бројеви.

Решење: Ако слободан члан раставимо на чиниоце, добијамо

$$b^5 + ab^4 + b^4 + ab^3 + ab^2 - a^3 = (a + b)(a + b^2)(-a + b + b^2).$$

На основу Viète-ових формула, како је слободан члан производ корена једначине, међу чиниоцима слободног члана потражимо корене једначине. Испитајмо да ли је $x = -(a + b)$ корен једначине. Применимо Horner-ов поступак

$-(a+b)$	1	$3a$	$-b^4-b^3-b^2+3a^2$	$-b^5-ab^4-b^4-ab^3-ab^2-a^3$
	1	$2a-b$	$-b^4-b^3-ab+a^2$	0

Значи, $x_1 = -(a + b)$ јесте нула једначине. Из горње шеме добијамо:

$$P(x) = (x + a + b)\left(x^2 + (2a - b)x - (b^4 + b^3 + ab - a^2)\right).$$

Решавањем квадратне једначине

$$x^2 + (2a - b)x - (b^4 + b^3 + ab - a^2) = 0$$

добијамо $x_2 = a + b^2$ и $x_3 = a - b - b^2$, тј. управо преостала два фактора слободног члана.

84. Одредити нуле полинома

$$P(x) = (a+b+c)(a+b+x)(a+c+x)(b+c+x) - abcx.$$

Упутство: Једначина је еквивалентна са

$$(x+a+b+c)\big((a+b+c)x^2 + (a+b+c)^2x + (a+b)(b+c)(c+a)\big) = 0.$$

85. Одредити број реалних корена једначине

$$P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a$$

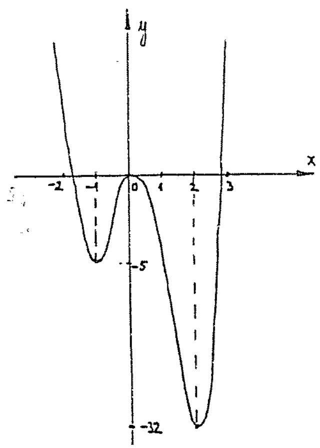
у зависности од реалног параметра a.

Решење: Као што је познато (Rolle-ова теорема), између сваке две реалне нуле полинома $P(x)$ налази се реална нула полинома $P'(x)$. Изводни полином је $P'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x\cdot(x^2 - x - 2)$, тј.

$$P'(x) = 12x(x+1)(x-2),$$

па су његове нуле -1, 0 и 2. Вредности полинома $P(x)$ у тим тачкама су $P(-1) = a - 5$, $P(0) = a$ и $P(2) = a - 32$. Једноставном анализом долази се до броја реалних нула датог полинома:

- $a < 0$: две просте нуле,
- $a = 0$: две просте и једна двострука (0),
- $0 < a < 5$: четири просте,
- $a = 5$: две просте и једна двострука (-1),
- $5 < a < 32$: две просте,
- $a = 32$: само једна двострука (2),
- $a > 32$: нема реалних нула.



86. Одредити реални параметар λ тако да једначина

$$x^3 + x + \lambda = 0.$$

има тачно једно реално решење и да разлика квадрата реалног корена и производа комплексних корена буде једнака -1.

Решење: Одредимо најпре број реалних корена у зависности од параметра λ. Између реалних корена полинома $P(x)$ налазе се нуле изводног полинома $P'(x)$ (по Rolle-овој теореми). Изводни полином једнак је $P'(x) = 3x^2 + 1$ и он нема реалних нула, па полином $P(x) = x^3 + x + \lambda$ има мање од две реалне нуле. С обзиром на његов степен, он има тачно једну реалну нула за било коју вредност параметра λ.

Нека су корени полинома $P(x)$ једнаки $x_1 = a$, $x_2 = b + ic$, $x_3 = b - ic$, где су $a, b, c \in \mathbb{R}$. По Viète-овим формулама је

$$a + 2b = 0,$$
$$2ab + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a(b^2 + c^2) = -\lambda,$$

при чему је, због задатог услова $b^2 + c^2 - a^2 = 1$.

За $\lambda = 0$ је $a = b = 0$ и $c = \pm 1$, па важи $b^2 + c^2 - a^2 = 1$.

Нека је $\lambda \neq 0$; тада је $a \neq 0$, па је $b^2 + c^2 = -\dfrac{\lambda}{a}$. Пошто је a нула полинома $P(x)$, важи једнакост $a^3 + a + \lambda = 0$, одакле је $-\dfrac{\lambda}{a} = a^2 + 1$, па следује да је $b^2 + c^2 = a^2 + 1$, тј. опет је задовољен услов

$$b^2 + c^2 - a^2 = 1.$$

Уз подсећање да случај $c = 0$ (постојање три реална решења) није могућан, закључујемо да су тражени услови испуњени за свако $\lambda \in \mathbb{R}$.

87. Колико различитих реалних нула имају полиноми

$$P_n(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - 1$$

и

$$Q_n(x) = (n-1)x^n - nx^{n-1} + 1\ ?$$

Решење: Очигледно је да је
$$Q_{n+1}(x) = P_n(x)\cdot(x-1),$$
па се број реалних нула полинома $P_n(x)$ и $Q_{n+1}(x)$ разликује за 1. Једна од нула је $x = 1$. Како је
$$Q'_{n+1}(x) = n(n+1)(x-1)x^{n-1},$$
види се да је, за $n = 2k+1$ кад $k \in \mathbb{N}$,
$$Q_{n+1}(x) \geq 0,$$
при чему се минимум ($= 0$) постиже за $x = 1$ и то је једина реална (двострука) нула полинома $Q_{n+1}(x)$, па и полинома $P_n(x)$ (проста). За $n = 2k$ је
$$Q'_{n+1}(x) < 0 \text{ за } x \in (0,1),$$
$$Q'_{n+1}(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty),$$
па осим нуле $x = 1$ постоји још тачно једна реална (негативна) нула полинома $Q_{n+1}(x)$ и $P_n(x)$. Дакле, полином $P_n(x)$ има једну, док полином $Q_n(x)$ има једну или две реалне различите нуле у зависности од тога да ли је број n непаран или паран.

88. Реални полином
$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1 \quad (a_i \geq 0)$$
има n реалних корена. Доказати да је $P(2) \geq 3^n$.

Решење: Из $a_i \geq 0$ следује да су сви корени x_i полинома $P(x)$ негативни. Значи, дати полином може се факторисати као
$$P(x) = (x+y_1)\cdots(x+y_n),$$
где су бројеви $y_i = -x_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ позитивни. Сада је
$$2 + y_i = 1 + 1 + y_i \geq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot y_i} = \sqrt[3]{y_i}$$
за све $i = 1, 2, \dots, n$. Имајући у виду да је (из Viète-ових веза) $y_1\cdots y_n = 1$, множењем претходних n неједнакости добија се
$$P(2) \geq (2+y_1)\cdots(2+y_n) \geq 3^n\cdot\sqrt[3]{y_1\cdots y_n} \geq 3^n,$$
што је и требало доказати.

89. Доказати да ни за једно $n \in \mathbb{N}$ полином
$$P_n(x) = x^{(2n)^2} - x^{(2n-1)^2} + x^{(2n-2)^2} - \dots + x^4 - x + 1$$
нема реалних нула.

Упутство: Показати (нпр. математичком индукцијом) да је
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})\ P_{n+1}(x) > P_n(x) > 0,$$
одакле следује тврђење.

90. Доказати да је за све природне бројеве a, b, c, d полином
$$P(x) = x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$$
дељив полиномом
$$Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1\,.$$

Решење: Пре свега је
$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x^4 = 1 \wedge x \neq 1;$$
дакле нуле полинома $Q(x)$ су све вредности четвртог корена из 1, осим 1. Сада је
$$P(x) = x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3} = (x^4)^a + x\cdot(x^4)^b + x^2\cdot(x^4)^c + x^3\cdot(x^4)^d.$$
Означимо са x_0 било коју нулу полинома $Q(x)$. У том случају је
$$P(x_0) = 1^a + x_0\cdot 1^b + x_0^2\cdot 1^c + x_0^3\cdot 1^d = Q(x_0) = 0.$$
Дакле, све нуле полинома $Q(x)$ истовремено су и нуле полинома $P(x)$, што значи да $Q(x) \mid P(x)$, што је и требало доказати.

91. Испитати када полином
$$P(x) = x^4 + x^2 + 1$$
дели полином
$$Q(x) = x^{3k} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$$
ако су k, m и n природни бројеви.

Решење: Полином $P(x)$ могућно је факторисати у скупу реалних бројева на следећи начин:

$$P(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Дакле, нуле полинома $P(x)$ су кубни корени из бројева -1 и 1, осим њих самих. Други фактор дели $Q(x)$ за било које k, m и n, а први ако и само ако је $x_i^2 - x_i + 1 = 0$, што је задовољено када су k и n исте парности, а m од њих различите парности, тј. када су бројеви k, $m+1$ и n исте парности.

92. Нека су a и b корени полинома

$$P(x) = x^4 + x^3 - 1.$$

Доказати да је њихов производ ab корен полинома

$$Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1.$$

Решење: Нека су корени полинома $P(x) = x^4 + x^3 - 1$ бројеви a, b, c и d, тј. $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Тада је $a+b+c+d = -1$ и $abcd = -1$ (Viete-ове формуле), као и

$$-1 = P(-1) = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1).$$

Како је $P(a) = P(b) = 0$, биће $a^3 = (1+a)^{-1}$ и $b^3 = (1+b)^{-1}$ $(P(-1) = -1 \neq 0)$ и аналогно за c и d. Посматрајмо израз

$$Q(ab) = (ab)^6 + (ab)^4 + (ab)^3 - (ab)^2 - 1 =$$
$$= (ab)^3\left((ab)^3 - (ab)^{-3} + ab - (ab)^{-1} + 1\right) =$$
$$= (ab)^3\left((ab)^3 + (cd)^3 + ab + cd + 1\right).$$

Сада је

$$(ab)^3 = (1+a)^{-1}(1+b)^{-1} = -(1+c)(1+d)$$

и

$$(cd)^3 = -(1+a)(1+b),$$

па је

$$Q(ab) = (ab)^3(-(1+c)(1+d) - (1+a)(1+b) + ab + cd + 1) =$$
$$= (ab)^3(1 - a - b - c - d),$$

тј. $Q(ab) = 0$. Дакле, број ab јесте нула полинома $Q(x)$, што је и требало доказати.

93. Полином $P(x)$ има целобројне коефицијенте. Нека је за четири различита цела броја a, b, c и d

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 12.$$

Доказати да не постоји цео број k такав, да је $P(k) = 25$.

Решење: Нека је полином $Q(x)$ са целобројним коефицијентима такав да је

$$P(x) - 12 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdot Q(x).$$

Вредности полинома $P(x)$ и $Q(x)$ за целобројне вредности променљиве x морају такође бити целобројне. Из различитости бројева a, b, c и d следује да вредност $P(x)$ може да се представи у облику производа бар четири различита (целобројна) чиниоца. Претпоставимо сада, супротно тврђењу, да је за $x = k$

$$P(x) - 12 = P(k) - 12 = 25 - 12 = 13.$$

Међутим, број 13 не може се приказати у облику производа бар 4 различита целобројна чиниоца. То значи да није могућно да важи једнакост $P(x) - 12 = 13$ за било који цео број x, тј. $P(x) \neq 25$, што је и требало доказати.

94. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Ако је $\frac{p}{q}$ његова рационална нула $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q$ су узајамно прости), доказати да је за сваки цео број m број $p - mq$ делилац броја $P(m)$.

Решење: Нека је

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

$a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \dots, n$, и $a_n \cdot a_0 \neq 0$. Ако је $m \in \mathbb{Z}$, тада је

$$P(x) = a_0(x-m)^n + c_1(x-m)^{n-1} + \dots + c_{n-1}(x-m) + c_n,$$

где су $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ и $P(m) = c_n$, па имамо да је

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0\left(\frac{p}{q} - m\right)^n + c_1\left(\frac{p}{q} - m\right)^{n-1} + \dots + c_{n-1}\left(\frac{p}{q} - m\right) + P(m).$$

Како је $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, имамо

$$\frac{a_0}{q^n}(p - mq)^n + \frac{c_1}{q^{n-1}}(p - mq)^{n-1} + \dots + \frac{c_{n-1}}{q}(p - mq) + P(m) = 0,$$

односно

$$a_0(p-mq)^{n-1}+c_1q(p-mq)^{n-2}+\ldots+c_{n-1}q^{n-1}+q^n\frac{P(m)}{p-mq}=0.$$

Како $\quad a_0(p-mq)^{n-1}+c_1q(p-mq)^{n-2}+\ldots+c_{n-1}q^{n-1}\in\mathbb{Z},\quad$ значи да и $q^n\frac{P(m)}{p-mq}\in\mathbb{Z}$, тј. $p-mq\,|\,q^nP(m)$. Докажимо да $p-mq$ не дели q^n, односно да су бројеви $p-mq$ и q узајамно прости. Претпоставимо супротно, тј. да је $p-mq=k_1r$ и $q=k_2r$, $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{N}$, $r\geq 2$. Тада је

$$p=k_1r+k_2rm=r(k_1+k_2m),\quad q=k_2r,$$

тј. бројеви p и q нису уајамно прости, што је супротно претпоставци. На основу тога закључујемо да $p-mq\,|\,P(m)$, што је и требало доказати.

95. Дат је полином

$$P(x)=x^n+V_n^0x^{n-1}+V_n^1x^{n-2}+\ldots+V_n^{n-2}x+V_n^{n-1},$$

где је $V_m^k=m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)$. Испитати да ли полином $P(x)$ има вишеструких корена, и у случају потврдног одговора одредити их.

Решење: Посматрајмо полином

$$Q(x)=\frac{P(x)}{n!}=\frac{x^n}{n!}+\ldots+\frac{x^2}{2}+x+1$$

чије су нуле идентичне нулама датог полинома. Уколико би полином $Q(x)$ имао вишеструких нула, тада би те нуле биле и нуле полинома $Q'(x)$, тј. полинома

$$Q'(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+x+1=Q(x)-\frac{x^n}{n!},$$

а тада би то биле и нуле полинома $Q(x)-Q'(x)=\frac{x^n}{n!}$. Како последњи полином има само једну нулу $x=0$ и како она није нула полинома $P(x)$, закључујемо да $P(x)$ нема вишеструких нула.

96. Дат је реалан полином

$$P_1(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Нека су његове нуле $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Одредити нуле полинома

а) $a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^na_0$,

б) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\quad(a_0\neq 0)$,

в) $\frac{P^{(n)}(a)}{n!}x^n+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots+P'(a)x+P(a)$,

г) $a_nx^n+a_{n-1}bx^{n-1}+a_{n-2}b^2x^{n-2}+\ldots+a_1b^{n-1}x+a_0b^n$,

где су a и b реални бројеви.

Резултат: а) $-x_1,-x_2,\ldots,-x_n$;

б) $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}$;

в) $x_1-a,\ x_2-a,\ \ldots,\ x_n-a$;

г) $bx_1,\ bx_2,\ \ldots,\ bx_n$.

97. Доказати да је полином

$$P(x)=x^{ka_1}+x^{ka_2+1}+\ldots+x^{ka_k+k-1}\quad(k,a_i\in\mathbb{N},\ i=1,2,\ldots,k)$$

дељив полиномом

$$Q(x)=x^{k-1}+x^{k-2}+\ldots+1.$$

98. Нека реални полиноми $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ задовољавају једнакост

$$P(x^5)+x\,Q(x^5)+x^2R(x^5)\equiv(1+x+x^2+x^3+x^4)\,S(x^5).$$

Доказати да је полином $P(x)$ дељив биномом $x-1$.

Напомена: Упоредити са задатком 65., стр. 352. другог дела *Збирке*.

99. Реални полином

$$P(x)=ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$$

има n позитивних корена. Доказати да су сви ти корени једнаки.

5. 2. РАЦИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

1. Разложити рационалну функцију

а) $\dfrac{x^4}{x+4}$,

б) $\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+x-2}$,

в) $\dfrac{x^5+5x^4+5x^3+5x^2+5x+1}{x^2-2x+3}$

на збир полинома и праве рационалне функције.

Решење: а) Функције $P(x) = x^4$ и $Q(x) = x + 4$ су несводљиве ($\mathrm{NZD}\,(P, Q) = 1$), па је довољно извршити дељење:

$$\frac{x^4}{x+4} = x^3 - 4x^2 + 16x - 64 + \frac{256}{x+4}.$$

б) За функције $P(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$ и $Q(x) = (x-1)(x+2)$ постоји највећи заједнички делилац различит од 1 ($\mathrm{NZD}\,(P, Q) = x - 1$), па се зато првобитно дата рационална функција изједначава са себи једнаком несводљивом функцијом:

$$\frac{x^3-7x+6}{x^2+x-2} = \frac{x^2+x-6}{x+2}, \tag{1}$$

а затим изврши дељење:

$$\frac{x^2+x-6}{x+2} = x - 1 - \frac{4}{x+2}.$$

Једнакост (1) важи само за оне вредности променљиве x за које је почетна рационална функција дефинисана, а то значи за

$$x \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 1\}.$$

Напомена: Задатак може да се реши и без свођења, само уз помоћ дељења.

2. Представити праву рационалну функцију

а) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,

б) $\dfrac{x}{x^2-4x+3}$,

в) $\dfrac{19x-62}{x^3-x^2-32x+60}$

у облику збира парцијалних разломака.

<u>Решење:</u> а) Из идентитета

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

свођењем на заједнички именилац и изједначавањем бројилаца, добијамо

$$x^2+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Коефицијенте A, B и C можемо одредити на два начина.

<u>Први начин:</u> После срећивања датог израза и изједначавања коефицијената уз одговарајуће степене променљиве x добија се систем линеарних једначина, тј. имамо:

$$x^2+1 = (A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + 6A+3B+2C,$$

односно

$$A+B+C = 1,$$
$$-5A-4B-3C = 0,$$
$$6A+3B+2C = 1.$$

Решавањем овог система једначина одређују се вредности коефицијената: $A = 1$, $B = -5$, $C = 5$.

<u>Други начин:</u> Заменимо у дати израз редом вредности $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. За $x = 1$ добија се $2 = A\cdot(-1)\cdot(-2)$, тј. $A = 1$; за $x = 2$ имамо $5 = B\cdot 1\cdot(-1)$, тј. $B = -5$; најзад је за $x = 3$ $10 = C\cdot 2\cdot 1$, тј. $C = 5$. Према томе, важи:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

б) Пошто полином другог степена x^2-4x+3 има реалне нуле, он се може раставити на чиниоце који су полиноми првог степе-

на: $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$. Из

$$\frac{x}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

следује $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$.

в) $$\frac{19x-62}{x^3-x^2-32x+60} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} - \frac{2}{x+6}.$$

3. Представити у виду збира парцијалних разломака следеће рационалне функције:

а) $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$;

б) $\dfrac{5x^4-1}{x^5(x+5)}$;

в) $\dfrac{2x^4+3x^3-3x^2+5x+10}{(x+3)^3(x-4)^2}$.

<u>Решење:</u> а) Из идентитета:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

следује

$$x^2+x+1 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C.$$

Срећивањем израза и изједначавањем коефицијената уз одговарајуће степене променљиве x добија се $A = 1$ и $B = C = 3$.

б) Полазимо од идентитета

$$\frac{5x^4-1}{x^5(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x+5},$$

који даје

$$5x^4-1 = Ax^4(x+5) + Bx^3(x+5) + Cx^2(x+5) + Dx(x+5) + E(x+5) + Fx^5$$

Добијени систем једначина гласи:

$$A+F = 0,$$
$$5A+B = 5,$$
$$5B+C = 0,$$

$$5C + D = 0,$$
$$5D + E = 0,$$
$$5E = -1,$$

тј. $E = -\frac{1}{5}$, $D = \frac{1}{5^2}$, $C = -\frac{1}{5^3}$, $B = \frac{1}{5^4}$, $A = 1 - \frac{1}{5^5}$, $F = \frac{1}{5^5} - 1$.

в) Полазећи од

$$\frac{2x^4+3x^3-3x^2+5x+10}{(x+3)^3(x-4)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} + \frac{D}{x-4} + \frac{E}{(x-4)^2}$$

добијамо $A = C = D = 1$, $B = -2$ и $E = 2$.

4. Рационалну функцију

$$Q(x) = \frac{x^3+1}{(x^2+4x+5)(x^2+1)}$$

изразити као збир

а) парцијалних разломака,

б) разломака чији су имениоци полиноми првог степена.

Решење: а) Пошто су нуле полинома $x^2 + 4x + 5$ и $x^2 + 1$ комплексне, датој функцији одговарају следећи парцијални разломци:

$$\frac{Ax+B}{x^2+4x+5}, \quad \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Из

$$Q(x) = \frac{Ax+B}{x^2+4x+5} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \qquad (1)$$

следује

$$x^3 + 1 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 4x + 5),$$

одакле се добија следећи систем линеарних једначина:

$$A + C = 1,$$
$$B + 4C + D = 0,$$
$$A + 5C + 4D = 0,$$
$$B + 5D = 1.$$

Његово решење је $(A, B, C, D) = \left(\frac{5}{4}, 1, -\frac{1}{4}, 0\right)$, чиме су одређени тражени парцијални разломци.

До решења смо, међутим, могли доћи и на следећи начин: уколико идентитет (1) помножимо са $x^2 + 4x + 5$ и променљиву x заменимо једном од две конјуговане нуле овог тринома (тј. $-2 \pm i$), из добијене једнакости одмах одређујемо A и B; на исти начин добићемо C и D ако (1) помножимо са $x^2 + 1$ и ставимо $x = i$ или $x = -i$.

б) У овом случају коефицијенти полинома у имениоцу не могу бити реални јер важе факторизације

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2 - i)(x + 2 + i)$$

и

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Сада рационалној функцији $Q(x)$ одговарају разломци:

$$\frac{A}{x+2-i}, \frac{B}{x+2+i}, \frac{C}{x-i}, \frac{D}{x+i}$$

(A, B, C и D не морају бити реални бројеви). Решавањем одговарајућег система добија се:

$$A = \frac{5}{8} + \frac{3}{4}i, \ B = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}i, \ C = D = -\frac{1}{8}.$$

5. Разложити следеће праве рационалне функције на збир парцијалних разломака:

а) $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$,

б) $\frac{1}{x^3+1}$.

Решење: а) Из идентитета

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1},$$

изједначавањем коефицијената добија се да је

$$A(x^2 - 1) + B(x - 1) + C(x + 1)^2 = x^2 + 1.$$

Замењујући редом вредности $x = -1$, $x = 1$ и $x = 0$ добијају се једнакости $-2B = 2$, $4C = 2$, $-A - B + C = 1$, одакле је $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{2}$, па је

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

б) Како је $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, имамо да је

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

одакле се добија систем линеарних једначина

$$A+B=0,$$
$$B+C-A=0,$$
$$A+C=1.$$

Његово решење $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$ даје тражено разлагање

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}.$$

6. Доказати да за дате бројеве $A, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ($a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$ су међусобно различити) постоје бројеви $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ тако да важи једнакост:

$$\frac{A}{(x^2+a_1^2)(x^2+a_2^2)\cdots(x^2+a_n^2)} = \frac{A_1}{x^2+a_1^2} + \dots + \frac{A_n}{x^2+a_n^2}.$$

Решење: Доказ ћемо извести применом принципа математичке индукције. Нека је

$$Q_n(x) = \frac{A}{(x^2+a_1^2)(x^2+a_2^2)\cdots(x^2+a_n^2)}.$$

За $n=1$ треба доказати да постоји $A_1 \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$Q_1(x) = \frac{A}{x^2+a_1^2} = \frac{A_1}{x^2+a_1^2},$$

што је омогућено избором $A_1 = A$. Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$ и докажимо да важи за $n=k+1$. За $n=k+1$ биће:

$$Q_{k+1}(x) = \frac{A}{(x^2+a_1^2)\cdots(x^2+a_k^2)(x^2+a_{k+1}^2)} = \frac{A\left(\frac{1}{a_{k+1}^2-a_k^2}\,(x^2+a_{k+1}^2-x^2-a_k^2)\right)}{(x^2+a_1^2)\cdots(x^2+a_k^2)(x^2+a_{k+1}^2)} =$$

$$= \frac{1}{a_{k+1}^2-a_k^2}\left(\frac{A}{(x^2+a_1^2)\cdots(x^2+a_{k-1}^2)(x^2+a_k^2)} - \frac{A}{(x^2+a_1^2)\cdots(x^2+a_{k-1}^2)(x^2+a_{k+1}^2)}\right)$$

и даље, по индукцијској хипотези,

$$Q_{k+1}(x) = \frac{1}{a_{k+1}^2-a_k^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{A_1}{x^2+a_1^2} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x^2+a_{k-1}^2} + \frac{A_k}{x^2+a_k^2} - \frac{B_1}{x^2+a_1^2} - \dots - \frac{B_{k-1}}{x^2+a_{k-1}^2} - \frac{B_k}{x^2+a_{k+1}^2}\right) =$$

$$= \frac{C_1}{x^2+a_1^2} + \dots + \frac{C_k}{x^2+a_k^2} + \frac{C_{k+1}}{x^2+a_{k+1}^2}$$

(где је $C_i = \frac{A_i-B_i}{a_{k+1}^2-a_k^2}$, за $i=1,2,\dots,k-1$; $C_k = \frac{A_k}{a_{k+1}^2-a_k^2}$ и $C_{k+1} = \frac{-B_k}{a_{k+1}^2-a_k^2}$), што је и требало доказати.

7. Раставити на збир парцијалних разломака следеће функције:

а) $\dfrac{3}{(x^2+4)(x^2+1)}$;

б) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$,

где су $a,b,c \in \mathbb{R}$ и a^2, b^2, c^2 међусобно различити бројеви.

Резултат: а) $\dfrac{3}{(x^2+4)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+4}$;

б) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)} = \dfrac{A}{x^2+a^2} + \dfrac{B}{x^2+b^2} + \dfrac{C}{x^2+c^2}$, где је

$$A=\frac{a^2+b^2+c^2}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},\quad B=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}\quad \text{и}\quad C=\frac{a^2+b^2+c^2}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}.$$

8. Раставити на збир одговарајућих парцијалних разломака функције:

а) $\dfrac{x^3+x^2+2x+7}{(x+1)^2(x^2+4)}$,

б) $\dfrac{11x^4+20x^3-45x^2+22x+158}{(x-3)(x+2)^3(x^2-2x+2)}$,

в) $\dfrac{2x^6+18x^4+7x^3-27x^2+69x-269}{(x-1)^3(x^2+9)^2}$.

Резултат: а) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{-1}{x^2+4}$;

б) $\dfrac{10}{x-3}+\dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{2x-6}{x^2-2x+2}$.

Решење: в) Из идентитета

$$\frac{2x^6+18x^4+7x^3-27x^2+69x-269}{(x-1)^3(x^2+9)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+9}+\frac{Fx+G}{(x^2+9)^2}$$

следује $A=1$, $B=2$, $C=-2$, $D=1$, $E=3$, $F=0$ и $G=-1$, па је

$$\frac{2x^6+18x^4+7x^3-27x^2+69x-269}{(x-1)^3(x^2+9)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-2}{(x-1)^3}+\frac{x+3}{x^2+9}+\frac{-1}{(x^2+9)^2}.$$

9. Доказати да за сваки природни број n важи

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+i},$$

где је $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ ($\mathbb{Z}^-$ је скуп негативних целих бројева).

Решење: Применићемо принцип математичке индукције. Докажимо да тврђење важи за $n=1$. Тада је

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{0!}\cdot\binom{0}{0}\cdot\frac{(-1)^0}{x+1},$$

што је очигледно тачно. Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$, тј. да важи:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+i}.$$

За $n=k+1$ биће:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)}=\frac{1}{k}\cdot\frac{(x+k+1)-(x+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+k+1)}\right).$$

На основу индукцијске хипотезе, примењене на оба разломка (у другом, уведимо смену $x+1=y$, а због $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ биће и $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$), следује:

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+k+1)}=\frac{1}{(y+1)(y+2)\cdots(y+k)}=$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{y+i}=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+1+i},$$

и, затим:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+i}-\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+1+i}\right)=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+i}-\sum_{i=2}^{k+1}\binom{k-1}{i-2}\frac{(-1)^{i-2}}{x+i}\right)=\frac{1}{k!}\cdot$$

$$\cdot\left(\binom{k-1}{0}\frac{(-1)^0}{x+1}+\sum_{i=2}^{k}\left(\binom{k-1}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+i}-\binom{k-1}{i-2}\frac{(-1)^{i-2}}{x+i}\right)-\binom{k-1}{k-1}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{x+k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\left(\binom{k-1}{0}\frac{(-1)^0}{x+1}+\sum_{i=2}^{k}\left(\binom{k-1}{i-1}+\binom{k-1}{i-2}\right)\frac{(-1)^{i-1}}{x+i}+\binom{k-1}{k-1}\cdot\frac{(-1)^k}{x+k+1}\right).$$

Због $\binom{k-1}{0}=1=\binom{k}{0}$, $\binom{k-1}{i-1}+\binom{k-1}{i-2}=\binom{k}{i-1}$ и $\binom{k-1}{k-1}=1=\binom{k}{k}$,

на крају добијамо:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)} = \frac{1}{k!}\cdot\left(\binom{k}{0}\frac{(-1)^0}{x+1} + \sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+i} + \binom{k}{k}\frac{(-1)^k}{x+k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}}{x+i},$$

чиме је доказ завршен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Дацић: "Елементарна комбинаторика", *Математички институт*, Београд, 1977.

[2] В. Девиде: "Задаци из апстрактне алгебре", *Научна књига*, Београд, 1989.

[3] Г. В. Калајџић: "Алгебра", *БС процесор - Математички факултет*, Београд, 1992.

[4] Д. С. Митриновић: "Математика у облику методичке збирке задатака са решењима, I део", *Грађевинска књига*, Београд, 1989.

[5] Д. С. Митриновић, Д. Ж. Ђоковић: "Полиноми и матрице", *ИЦС*, Београд, 1975.

[6] М. и С. Прешић: "Увод у математичку логику - теорија и задаци", *Математички институт*, Београд, 1984.

[7] З. Стојаковић, Ђ. Паунић: "Збирка задатака из алгебре - групе, прстени, поља", *Грађевинска књига*, Београд, 1983.

[8] Ј. Ушан, В. Ђонин, Р. Тошић: "Увод у алгебру са методичком збирком задатака", *РУ "Радивој Ћирпанов"*, Нови Сад, 1979.

[9] Д. Цветковић: "Дискретне математичке структуре", *Научна књига*, Београд, 1987.

[10] Д. Цветковић: "Теорија графова и њене примене", *Научна књига*, Београд, 1990.

[11] Д. Цветковић, И. Лажковић, М. Меркле, З. Радосављевић, С. Симић, П. Васић: "Математика I - алгебра", *Електротехнички факултет*, Београд, 1998.

[12] Д. Цветковић, С. Симић: "Дискретна математика - математика за компјутерске науке", *Просвета*, Ниш, 1996.

[13] Д. Цветковић, С. Симић: "Комбинаторика - класична и модерна", *Научна књига*, Београд, 1990.

Izdavač

AKADEMSKA MISAO

Bul. kralja Aleksandra 73, Beograd
tel./fax: (+381 11) 3218 354

e-mail: office@akademska-misao.co.yu

www.akademska-misao.co.yu

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

512.53/.55 (075.8)(076)
512.563 (075.8)(076)
512.622 (075.8)(076)
519.1 (075.8)(076)

ЗБИРКА задатака из алгебре. Део 1 / Петар Васић, Братислав Ирičанин, Мирко Јовановић, Татјана Мацаревић, Бојана Михаиловић, Зоран Радосављевић, Слободан Симић, Драгош Цветковић. - [5. изд.]. - Београд : Академска мисао, 2004 (Београд : Завод за ГТ ТМФ). - XIII, 302 стр. ; граф. прикази ; 24 цм

Тираж 300. - Библиографија: стр. 301-302.

ISBN 86-7466-122-X

1. Васић, Петар М.
а) Теорија група - Задаци б) Булова алгебра - Задаци ц) Полиноми - Задаци д) Комбинаторика - Задаци
COBISS.SR-ID 110189836