TERMIN 5 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★ ★ ★

Zadatak 1.
Ispitati da li postoji i ako postoji odrediti matricu $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ takvu da je:

a) matrica A invertibilna, a njen prostor kolona neka ravan;

b) prostor kolona matrice A ravan $x + y + z = 0$.

Rješenje

a) Kako je $dim\left(C(A)\right) = 2$ i zaključujemo da je $dim\left(N(A)\right) = 1$, odakle je dalje jedna sopstvena vrijednost matrice A jednaka 0. Kako je determinanta matrice A jednaka proizvodu svih njenih sopstvenih vrijednosti, zaključujemo da je $det(A) = 0$ pa matrica A nije invertibilna. Stoga, ovakva matrica $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne postoji.

b) Uočimo dva linearno nezavisna vektora iz ravni $\alpha : x + y + z = 0$. Neka su to, recimo, $\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jasno je da $\overrightarrow{x_1}$ i $\overrightarrow{x_2}$ čine bazu potprostora $\alpha : x + y + z = 0$. Posmatrajmo matricu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

čije su kolone $A_{\bullet 1} = \overrightarrow{x_1}$, $A_{\bullet 2} = \overrightarrow{x_2}$ i $A_{\bullet 3} = \overrightarrow{0}$. Vidimo da je

$$C(A) = Lin\left\{A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, A_{\bullet 3}\right\} = Lin\left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{0}\right\} = Lin\left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right\} = \alpha,$$

pa je A jedna takva matrica. Naravno, ovakvih matrica ima beskonačno mnogo, a matrica A je samo primjer jedne takve.

★ ★ ★

Zadatak 2.

Ispitati da li postoji i ako postoji odrediti matricu A takvu da je:

a) $C(A) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $R(A) = C\left(A^T\right) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$;

b) $C(A) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $R(A) = C\left(A^T\right) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Rješenje

a) Iz dimenzija potprostora $C(A)$ i $R(A)$ zaključujemo da je A matrica reda 3×2. Kako je

$$R(A) == Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2 = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

navedene uslove ispunjava matrica

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

b) Iz dimenzija potprostora $C(A)$ i $R(A)$ zaključujemo da je A matrica reda 3×3. Kako je

$$C(A) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

zaključujemo da je matrica A oblika

$$A = \begin{bmatrix}a & b & c\\a & b & c\\a & b & c\end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Sa druge strane, kako je

$$R(A) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\},$$

zaključujemo da je

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Odavde dobijamo da je $b = 2a$ i $c = a$, pa je

$$A = \begin{bmatrix}a & 2a & a\\a & 2a & a\\a & 2a & a\end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

skup svih matrica koje zadovoljavaju početni uslov. Jedna takva matrica je i matrica

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Važno je napomenuti da matrica A u oba slučaja nije jednoznačno određena.

★ ★ ★

Zadatak 3.

Neka je $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$ linearno preslikavanje takvo da je $\mathcal{A}\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{j}$, $\mathcal{A}\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{k}$ i $\mathcal{A}\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{i}$. Ne određujući matricu A tog preslikavanja, dokazati da je $A^3 = I$.

Rješenje

Kako je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^3\left(\overrightarrow{i}\right) &= \mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\overrightarrow{i}\right)\right)\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\overrightarrow{j}\right)\right) = \mathcal{A}\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{i} \\
\mathcal{A}^3\left(\overrightarrow{j}\right) &= \mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\overrightarrow{j}\right)\right)\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\overrightarrow{k}\right)\right) = \mathcal{A}\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{j} \\
\mathcal{A}^3\left(\overrightarrow{i}\right) &= \mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\overrightarrow{k}\right)\right)\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}\left(\overrightarrow{i}\right)\right) = \mathcal{A}\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $\mathcal{A}^3\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v}$ za sve $\overrightarrow{v} \in V_3$, pa je $A^3 = I$, što je trebalo dokazati.

★ ★ ★

Zadatak 4.
Neka je $\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ refleksija u odnosu na ravan $\pi : x + 2y + 3z = 0$. Odrediti matricu R operatora $\mathcal{R}$ u odnosu na standardnu bazu.

Rješenje

Odredimo proizvoljno dva linearno nezavisna vektora koji pripadaju ravni π. Takvi su, npr. vektori

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ i } \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kako vektori $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ pripadaju ravni π, oni se refklektuju u sebe, dok se vektor normale $\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ reflektuje u sebi suprotan vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.
Ako formiramo bazu

$$B_N = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

po ovoj bazi matrica refleksije je

$$R_{B_N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

pa je matrica refleksije po standardnoj bazi:

$$\begin{aligned} R_{B_S} &= S_{B_N \to B_S} \cdot A_{B_N} \cdot S_{B_S \to B_N} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

★ ★ ★

Zadatak 5.
Neka je $\mathcal{P}_{\overrightarrow{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonalno projektovanje na pravu određenu vektorom $\overrightarrow{a} = (2,1,2)$. Odrediti matricu P_a preslikavanja $\mathcal{P}_{\overrightarrow{a}}$ u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathbb{R}^3$.‘

Rješenje

Primijetimo da se svi vektori iz prostora ortogonalnog na pravu određenu vektorom $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ projektuju u $\overrightarrow{0}$.

Prostor ortogonalan na vektor $\overrightarrow{a}$ je ravan π čiji je vektor normale vektor $\overrightarrow{a}$, a to je ravan

$$\pi : 2x + y + 2z = 0.$$

Odredimo proizvoljna dva linearno nezavisna vektora koji pripadaju ravni π. Takvi su npr. vektori

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} \text{ i } \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Vektor $\overrightarrow{a}$ se projektuje u samog sebe, pa ako formiramo bazu

$$B_N = \left\{ \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \right\},$$

matrica projekcije po ovoj bazi je

$$P_{B_N} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

pa je matrica projekcije po standardnoj bazi:

$$\begin{aligned} P_{B_S} &= S_{B_N\to B_S} \cdot P_{B_N} \cdot S_{B_S\to B_N} \\ &= \begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{4}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{4}{9}.\end{bmatrix}\end{aligned}$$

★ ★ ★ ★

Zadatak 6.
Dokazati da za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_n$ važi:

a) $Ker\,(A) \subseteq Ker\,\left(A^2\right)$;

b) $Ker\,(A) = Ker\,\left(A^2\right)$, ako je matrica A regularna.

Rješenje

a) Za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_n$ važi

$$\overrightarrow{x} \in Ker\,(A) \Rightarrow A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

pa je

$$A^2\overrightarrow{x} = A \cdot A\overrightarrow{x} = A \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{x} \in Ker\,\left(A^2\right)$$

čime dokazujemo da je $Ker\,(A) \subseteq Ker\,\left(A^2\right)$.

b) Ako je matrica A regularna, tada je $det\,(A) \neq 0$ pa je $Ker\,(A) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
S druge strane, matrica A^2 je takođe regularna jer je $det\,\left(A^2\right) = det\,(A) \cdot det\,(A) \neq 0$ pa je $Ker\,\left(A^2\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
Dakle, ako je matrica A regularna, vrijedi $Ker\,(A) = Ker\,\left(A^2\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

★★★★

Zadatak 7.

Za svako od sljedećih tvrđenja ustanoviti da li je tačno ili ne:

a) Ako je $A \in \mathcal{M}_3$ i ako postoje vektori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in \mathbb{R}^3$ takvi da su vektori $A\overrightarrow{v_1}, A\overrightarrow{v_2}, A\overrightarrow{v_3}$ linearno nezavisni, tada je matrica A regularna.

b) Neka je $A \in \mathcal{M}_{3,2}$ i neka je $Ker\left(A\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Ako su $B, C \in \mathcal{M}_{2,3}$ matrice takve da je $AB = AC$, tada je $B = C$.

Rješenje

a) Kako potprostor $C\left(A\right)$ sadrži tri linearno nezavisna vektora $A\overrightarrow{v_1}, A\overrightarrow{v_2}, A\overrightarrow{v_3}$, jasno je da je $dim\left(C\left(A\right)\right) \geq 3$.
Sa druge strane, kako je $C\left(A\right) \subseteq \mathbb{R}^3$, vrijedi $dim\left(C\left(A\right)\right) \leq 3$, što znači da je $dim\left(C\left(A\right)\right) = 3$, odnosno $rank\left(A\right) = 3$.
To dalje znači da je $det\left(A\right) \neq 0$ pa je matrica A regularna.

b) Kako je $Ker\left(A\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, zaključujemo da je $dim\left(Ker\left(A\right)\right) = 0$. Pošto je $dim\left(Ker\left(A\right)\right) + dim\left(Im\left(A\right)\right) = 2$, jer je matrica A reprezentacija linearnog operatora $\mathcal{A} : U \to V$, pri čemu je $dim\left(U\right) = 2$ i $dim\left(V\right) = 3$, zaključujemo da je $dim\left(Im\left(A\right)\right) = 2$ pa su kolone $A_{\bullet 1}$ i $A_{\bullet 2}$ matrice A linearno nezavisne.
Ako je $AB = AC$, tada je $A\left(B - C\right) = O$, a to znači da su kolone matrice $A\left(B - C\right)$ nula-vektori. Dakle

$$A\left(B - C\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{\bullet 1} & A_{\bullet 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} - c_{1j} \\ b_{2j} - c_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(b_{1j} - c_{1j}\right) A_{\bullet 1} + \left(b_{2j} - c_{2j}\right) A_{\bullet 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Kako su kolone $A_{\bullet 1}$ i $A_{\bullet 2}$ matrice A linearno nezavisne, prethodni uslov će biti ispunjen ako i samo ako je

$$b_{1j} - c_{1j} = 0 \quad \wedge \quad b_{2j} - c_{2j} = 0,$$

odakle dobijamo $b_{1j} = c_{1j}$ i $b_{2j} = c_{2j}$ za $j = 1, 2, 3$, tj. $B = C$.

★★★★

Zadatak 8.
Neka je $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ linearno preslikavanje za koje vrijedi

$$\mathcal{A}(0,1,1)=(-4,4a,-2)\,,\quad \mathcal{A}(1,0,-1)=(2,-2,a)\quad \text{i}\quad \mathcal{A}(2,1,2)=(-6,8a-2,a-4)\,.$$

a) Odrediti $a\in\mathbb{R}$ ako je $rank(\mathcal{A})=1$.

b) Odrediti $a\in\mathbb{R}$ ako je $rank(\mathcal{A})=2$ i $\mathcal{A}(-a,1,-1)=(0,0,0)$.

Za oba rješenja naći $Ker(\mathcal{A})$ i $Im(\mathcal{A})$.

Rješenje

a) Kako su vektori $(0,1,1)$, $(1,0,-1)$ i $(2,1,2)$ linearno nezavisni, pa u odnosu na bazu

$$B_N=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

prostora $\mathbb{R}^3$, matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ je

$$A_{B_N}=\begin{bmatrix}-4&2&-6\\4a&-2&8a-2\\-2&a&a-4\end{bmatrix}.$$

Iz stepenaste forme matrice A

$$\begin{bmatrix}\boxed{-4}&2&-6\\4a&-2&8a-2\\-2&a&a-4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+R_3]{R_1\cdot(a)+R_2}\begin{bmatrix}\boxed{-4}&2&-6\\0&2a-2&2a-2\\0&a-1&a-1\end{bmatrix}$$

imamo da je $rank(\mathcal{A})=1\ \Leftrightarrow\ a=1$. Nakon uvrštavanja $a=1$ dobijamo da je matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ u odnosu na bazu B_N:

$$A_{B_N}=\begin{bmatrix}-4&2&-6\\4&-2&6\\-2&1&-3\end{bmatrix}.$$

U odnosu na standardnu bazu B_S prostora $\mathbb{R}^3$, matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ je

$$\begin{aligned}A_{B_S}&=S_{B_N\to B_S}\cdot A_{B_N}\cdot S_{B_S\to B_N}\\&=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4&2&-6\\4&-2&6\\-2&1&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&-3\\0&-6&-6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Odavde dobijamo da je

$$C(A)=Lin\left\{\begin{bmatrix}0\\-3\\-6\end{bmatrix}\right\}=Lin\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}\ \Rightarrow\ Im(\mathcal{A})=Lin\left\{(0,1,2)\right\}$$

dok je

$$\begin{aligned}N(A)&=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ :\ -3y-3z=0\right\}\\&=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ :\ y=-z\right\}\\&=\left\{\begin{bmatrix}x\\-z\\z\end{bmatrix}\right\}\\&=x\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+z\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\\&=Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}\ \Rightarrow\ Ker(\mathcal{A})=Lin\left\{(1,0,0),(0,-1,1)\right\}.\end{aligned}$$

b) Kako je

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 8a-2 \\ a-4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 4a \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ a \end{bmatrix},$$

vrijedi $rank\,(\mathcal{A}) = 2$ za sve vrijednosti $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Predstavimo vektor $\begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ kao linearnu kombinaciju baznih vektora baze B_N:

$$\begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

odakle dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \quad\ \beta + 2\gamma = -a \\ \alpha \quad\ + \ \gamma = 1 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = -1 \end{cases}$$

čcije je rješenje

$$\alpha = \frac{a+5}{3},\ \ \beta = \frac{4-a}{3},\ \ \gamma = -\frac{a+2}{3}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) &= \mathcal{A}\left(\frac{a+5}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4-a}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{a+2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{a+5}{3} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 4a \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{4-a}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ a \end{bmatrix} - \frac{a+2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 8a-2 \\ a-4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -4a-20+8-2a+6a+12 \\ 4a^2+20a-8+2a-8a^2-16a+2a+4 \\ -2a-10+4a-a^2-a^2-2a+4a+8 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4a^2+8a-4 \\ -2a^2+4a-2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4\,(a-1)^2 \\ -2\,(a-1)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4\,(a-1)^2 \\ -2\,(a-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = 1.$$

Međutim, kako je za $a = 1$, rang preslikavanja $\mathcal{A}$ jednak 1, ne postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da navedeni uslovi budu ispunjeni.

★★★★

Zadatak 9.
Odrediti linearnu transformaciju $\mathcal{A}$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ takvu da bude:

a) $Im\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(1,3,-1,0),(2,4,0,-1)\right\}$;

b) $Ker\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(3,2,-1,1)\right\}$;

c) $Im\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(1,3,-1,0),(2,4,0,-1)\right\}$ i $Ker\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(3,2,-1,1)\right\}$.

Rješenje

Linearna transformacija $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^4$ podrazumijeva linearno preslikavanje $\mathcal{A}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ koje zadovoljava svojstva iz zadatka.

a) Primijetimo da matrica

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

linearnog preslikavanja $\mathcal{A}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ zadovoljava početni uslov. Iz matrice A imamo da je

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1,0,0,0)&=(1,3,-1,0),\\ \mathcal{A}(0,1,0,0)&=(2,4,0,-1),\\ \mathcal{A}(0,0,1,0)&=(0,0,0,0),\\ \mathcal{A}(0,0,0,0)&=(0,0,0,0)\end{aligned}$$

pa je sa

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x,y,z,t)&=x\cdot\mathcal{A}(1,0,0,0)+y\cdot\mathcal{A}(0,1,0,0)+z\cdot\mathcal{A}(0,0,1,0)+t\cdot\mathcal{A}(0,0,0,1)\\ &=x\cdot(1,3,-1,0)+y\cdot(2,4,0,-1)+z\cdot(0,0,0,0)+t\cdot(0,0,0,0)\\ &=(x+2y,3x+4y,-x,-y)\end{aligned}$$

data jedna od linearnih transformacija $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^4$ takva da vrijedi uslov

$$Im\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(1,3,-1,0),(2,4,0,-1)\right\}.$$

b) Kako je $N(A)\perp C\left(A^T\right)$, zaključujemo da linearna transformacija $\mathcal{A}$ mora biti takva da zadovoljava uslov

$$R(A)\perp\begin{bmatrix}3\\2\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Sada je

$$C\left(A^T\right)=R(A)=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\ :\ 3x+2y-z+t=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\3x+2y+t\\t\end{bmatrix}\right\}=\left\{x\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}=Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

pa je

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

matrica jednog od linearnih transformacija $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^4$ koje zadovoljava uslov

$$Ker\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(3,2,-1,1)\right\}.$$

Odavde dobijamo da je linearno preslikavanje $\mathcal{A}$ kom odgovara matrica A:

$$\mathcal{A}(x,y,z,t)=(x+3z,y+2z,z+t,0).$$

c) Iz uslova zadatka imamo da je $dim\left(Im\left(\mathcal{A}\right)\right)=2$ i $dim\left(Ker\left(\mathcal{A}\right)\right)=1$. Međutim, kako mora da vrijedi

$$dim\left(Im\left(\mathcal{A}\right)\right)+dim\left(Ker\left(\mathcal{A}\right)\right)=dim\left(\mathbb{R}^4\right)=4,$$

vidimo da ne postoji linearno preslikavanje $\mathcal{A}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ takvo da vrijedi

$$Im\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(1,3,-1,0),(2,4,0,-1)\right\}\ \text{ i }\ Ker\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(3,2,-1,1)\right\}.$$

★★★★

Zadatak 10.
Odrediti

a) matricu skaliranja koja preslikava $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ u $\begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}$;

b) matricu projektovanja koja preslikava $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ u $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$;

c) matricu refleksije koja preslikava $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ u $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$;

d) matricu rotacije koja preslikava $\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ u $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.

Rješenje

a) Ako je A matrica skaliranja, onda vrijedi $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ za neku vrijednost parametra λ. Tada je

$$A = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}$$

pa je

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \lambda = 3.$$

Odavde je konačno

$$A = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$$

tražena matrica skaliranja.

b) Ako se vektor $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ projektuje u $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$, to znači da se projekcija vrši na pravu generisanu vektorom $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$, odnosno na y-osu.

To dalje znači da se vektor ortogonalan na y-osu, a to je vektor $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ projektuje u nula-vektor.

Kako se projektovanje vrši na y-osu, vektor $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ se projektuje u samog sebe. To sada znači da je tražena matrica projektovanja

$$P = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

c) Ako se vektor $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ reflektuje u vektor $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$, riječ je o refleksiji u odnosu na pravu $y = x$.

Ta refleksija vektor $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ preslikava u vektor $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, dok vektor $\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ preslikava u vektor $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.
S obzirom na to, matrica date refleksije u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathbb{R}^2$ je

$$R = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

d) Ako se vektor $\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ pomoću rotacije preslikava u vektor $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, onda se vektor $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ projektuje u vektor $\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$. Kako je

$$R_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

matrica rotacije za ugao θ zaključujemo da je $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ i $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$, pa je tražena matrica rotacije

$$R_\theta = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$