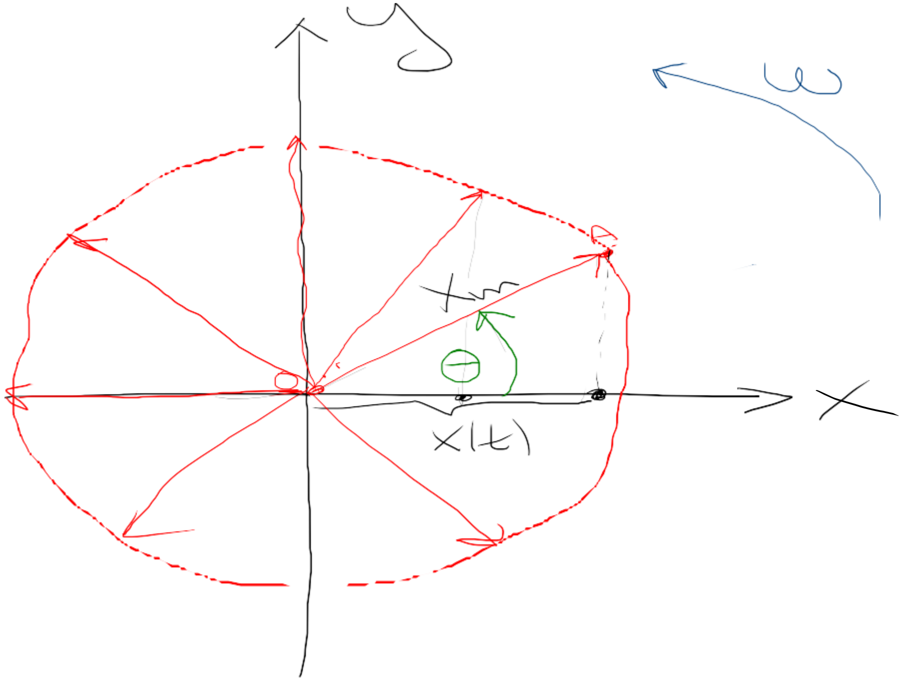
Фазори. Увод у анализу кола у комплексном домену.

Основи електротехнике 2

Предавање: 8. блок

ПРЕДСТАВЉАЊЕ ПРОСТОПЕРИОДИЧНИХ ВЕЛИЧИНА ПОМОЋУ ОБРТНИХ ВЕКТОРА (ФАЗОРА)



$$\underline{X} = X\angle\theta$$

Фазна оса је оса у односу на коју се одређују фазе

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

…плитуде дужи OA

Фазорски дијаграми отпорника, калема и конденз.

1. отпорник отпорности R

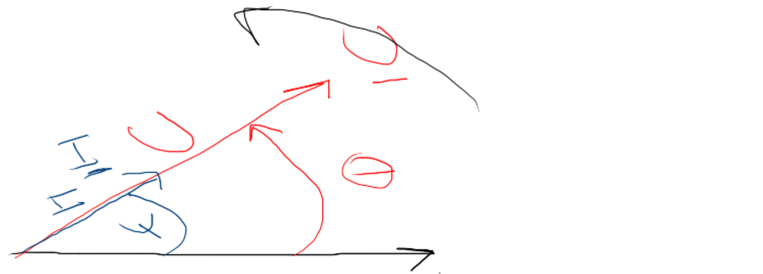
$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \longleftrightarrow \underline{U}=U\angle\theta$$

Еф. вриједност

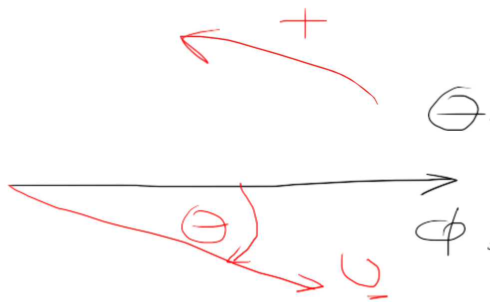
почетна фаза

$$i(t)=\sqrt{2}\frac{U}{R}\cos(\omega t+\theta)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi) \Leftrightarrow \underline{I}=I\angle\psi$$

$I=\frac{U}{R}$ $\qquad \psi=\theta$



$\theta>0$



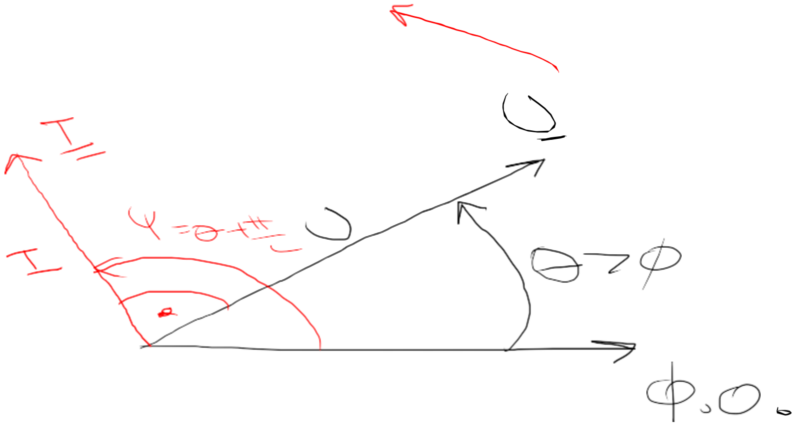
2. Кондензатор капацитивности C

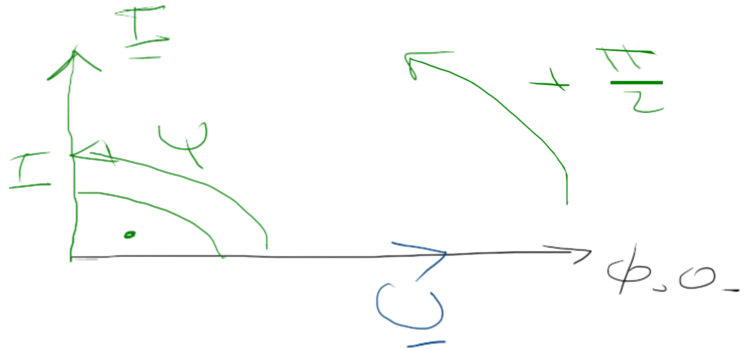
$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \Leftrightarrow \underline{U}=U\angle\theta$$

$$i(t)=C\frac{du}{dt}=\sqrt{2}\omega C U\cos\left(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi)$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}=I\angle\psi$$

$$I=\omega C U \qquad \psi=\theta+\frac{\pi}{2}$$





$$\theta=0$$

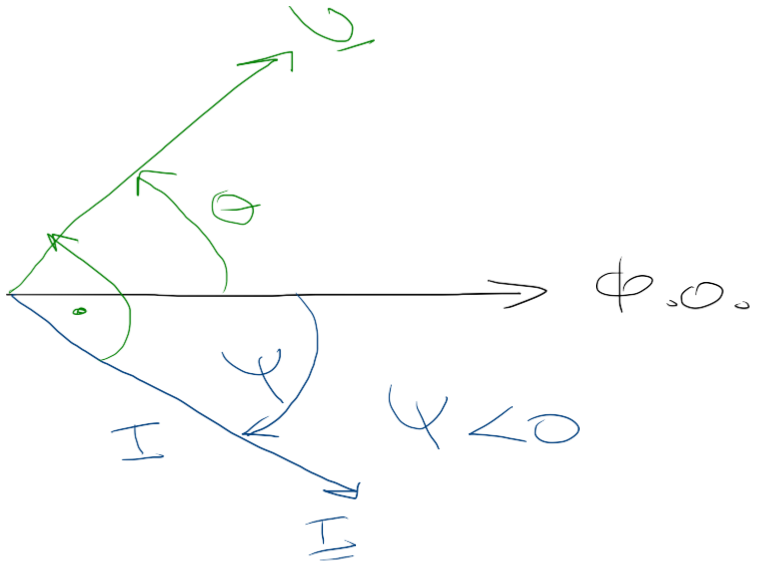
— канал индуктивности L

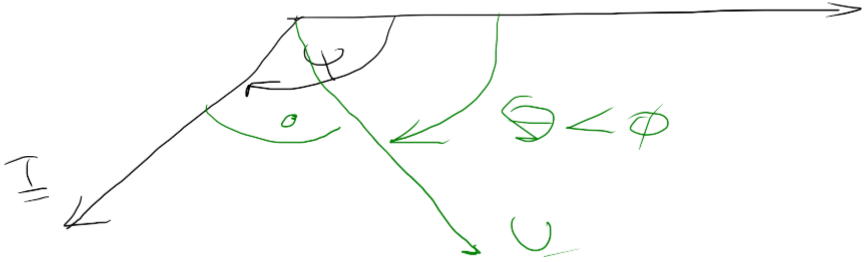
$$u = L\frac{di}{dt} \qquad i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{I} = I \angle \psi$$

$$u(t) = \sqrt{2}\,\omega L I \cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

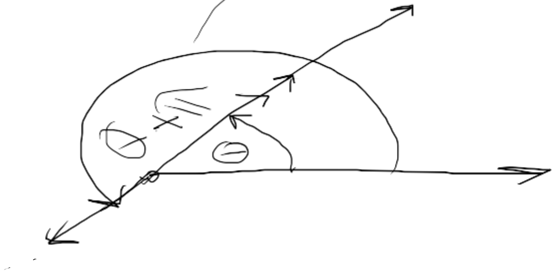
$$= \sqrt{2}\, U \cos(\omega t + \theta) \Leftrightarrow \underline{U} = U \angle \theta$$

$$U = \omega L I \qquad \theta = \psi + \frac{\pi}{2}$$





Началните фази са все const



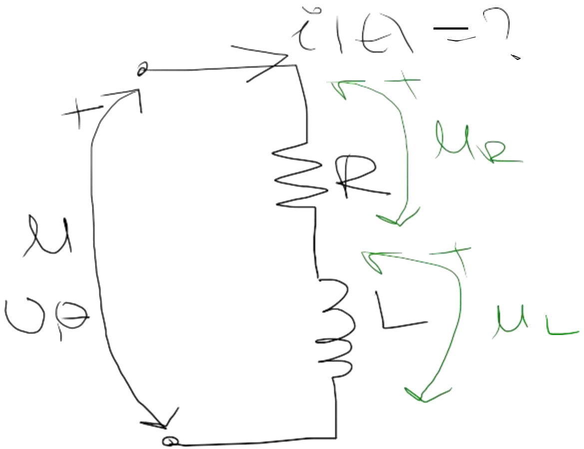
$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \rightarrow 5\cdot u(t) = \sqrt{2}\cdot 5U\cos(\omega t+\theta)$$

$$-5u(t) = 5\cdot \cos\pi \cdot \sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)$$

$$* \ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{-5u(t) = \sqrt{2}\,5U\cos[\omega t+\theta+\pi]}$$

Примјер:



$$u(t) = \sqrt{2}\,U\cos(\omega t + \theta) \Leftrightarrow \underline{U} = U\angle\theta$$

$$\underbrace{i(t) = \sqrt{2}\,I\cos(\omega t + \psi)} \Leftrightarrow \underline{I} = I\angle\psi$$

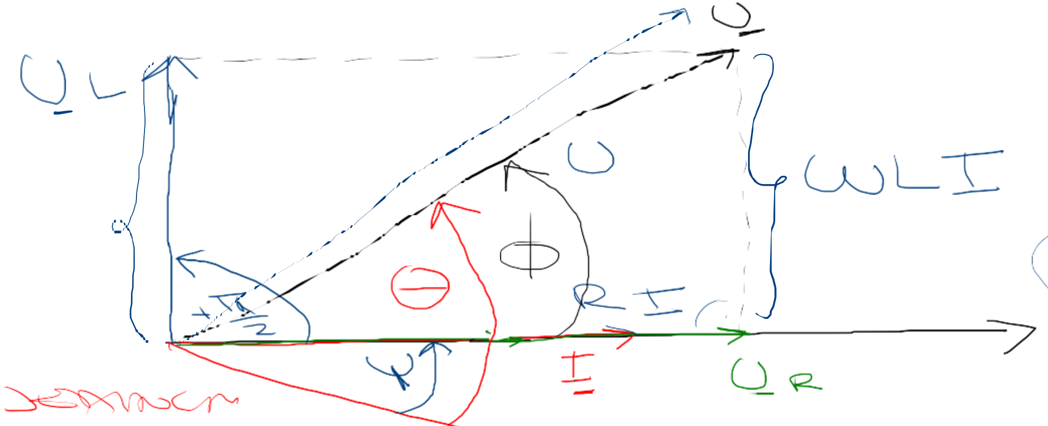
$$u_R = Ri$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$u = u_R + u_L$$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$$

$$\underline{U}_R = RI\angle\psi \qquad \underline{U}_L = \omega LI\angle\psi + \frac{\pi}{2}$$



$$U^2 = U_L^2 + U_R^2$$

$$\cancel{U = U_L + U_R}$$

ЕФЕКТИВНЕ ВРИЈЕДНОСТИ СЕ НЕ СМИЈУ САБИРАТИ

фазна оса

$$U=\sqrt{U_L^2+U_R^2}=\sqrt{(\omega L I)^2+(R I)^2}=I\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$\phi=\theta-\psi \qquad \text{ως}\quad \theta=\phi+\psi$$

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{\omega L I}{R I}\Rightarrow \phi=\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$$

$$\psi=\theta-\phi=\theta-\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$$

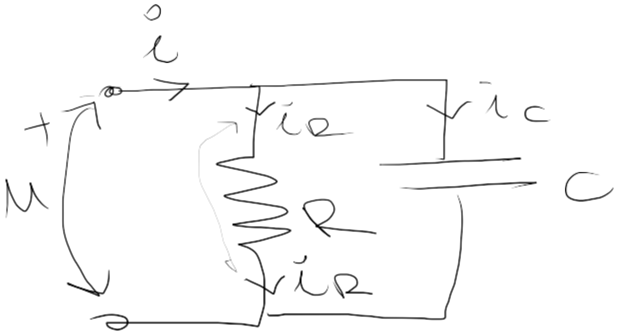
$$i(t)=\frac{\sqrt{2}\,U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos\left(\omega t+\theta-\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\phi=\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\begin{cases}0, & L=0\\ \vdots & L\neq 0,\ R\neq 0\\ \frac{\pi}{2}, & R=0\end{cases}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{U}{I} \neq R + \omega L$$

$$\cancel{i(t) = \frac{u(t)}{R + \omega L}}$$

Пример: $u(t) = \sqrt{2}\, U \cos \omega t$ $\qquad i(t) = ?$



$$\check{i} = \check{i}_R + \check{i}_C$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C$$

$$\underline{I}_R = \frac{U}{R}\angle 0^\circ$$

$$\underline{I}_C = \omega C U \angle \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{I} = I \angle \psi$$

$$i_R = \sqrt{2}\,\frac{U}{R}\cos \omega t$$

$$i_C = \sqrt{2}\,\omega C U \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + (\omega C U)^2}$$

$$\boxed{I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \theta - \psi \\ \varphi &= \psi - \theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi = -\varphi \text{ тј. } \varphi = \psi$$

угао који одговара како струја предњачи напону

$$\varphi = \psi = \operatorname{arctg}\frac{I_C}{I_R} = \operatorname{arctg}\frac{\omega C U}{\frac{1}{R}U}$$

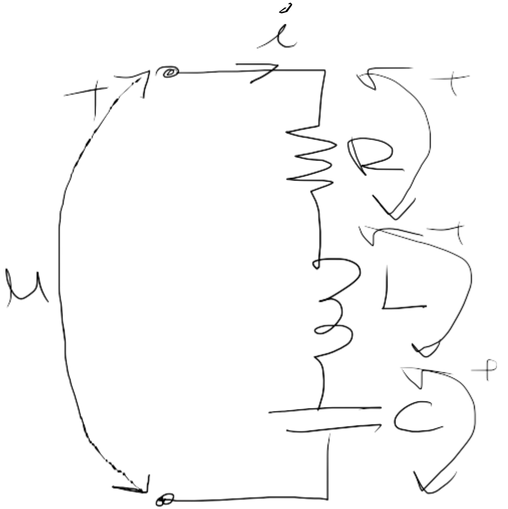
$$\varphi = \psi = \operatorname{arctg}(\omega C R)$$

$$\Rightarrow \phi = -\operatorname{arctg}(\omega R C)$$

$$\boxed{i(t) = \sqrt{2}\,U\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}\cos(\omega t + \operatorname{arctg}\omega R C)}$$

Παράδειγμα: Σειριακό RLC κύκλωμα

$$u(t) = \sqrt{2}\,U\cos(\omega t + \theta) \qquad i(t) = ? \qquad I = ? \quad \varphi = ?$$

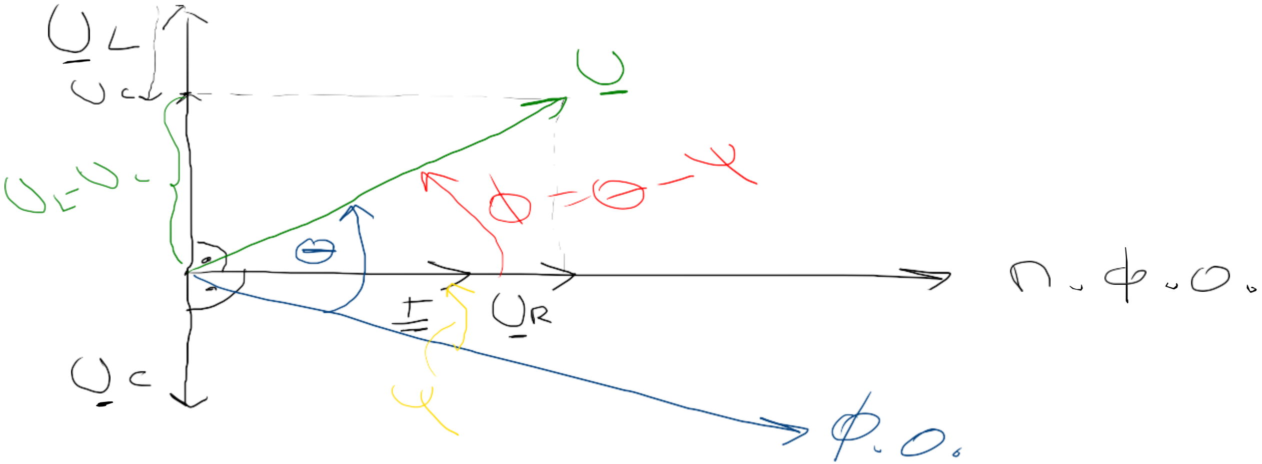


$$u = u_R + u_L + u_C$$

$$u_R = Ri \qquad u_L = L\frac{di}{dt} \qquad u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt + \text{σταθ}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

$$U_R = RI \qquad U_L = \omega L I \qquad U_C = \frac{1}{\omega C} I$$



$$U_L = \omega L I \qquad U_C = \frac{1}{\omega C} I \qquad U_R = RI$$

$$U^2 = (RI)^2 + \left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I\right)^2$$

$$U = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\phi = \theta - \psi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$$

$\phi = -\frac{\pi}{2}$ капацитивно оптоварување

$-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$ претежно капац.

$\phi = 0$ резонанса

$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ претежно инд. оптоварување

$\phi = \frac{\pi}{2}$ индуктивно оптоварување

$\phi > 0$ ако је $\underline{\omega L} > \frac{1}{\underline{\omega C}}$ претежно инд. пријемник

$\phi < 0$ ако је $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ претежно кап. пријемник

* $\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \phi = 0$

односно у редном RLC колу, напон и струја су у фази.

Ова појава се назива фазна РЕЗОНАНЦИЈА.

$\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0$ $\quad U_L \neq 0$

$U_C \neq 0$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \theta - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

* ако је $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{R} \cos(\omega t + \theta)$$

ефективна вредност струје биће max. у редном RLC колу ако је $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ РЕЗОН УЧЕСТАНОСТ

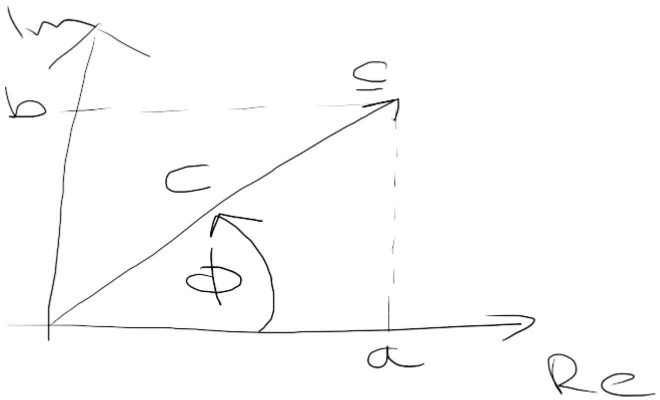
Комплексни бројеви

$\underline{c} = a + jb$ биномни (алгебарски) облик

a и b реални бројеви а $j = \sqrt{-1}$

$a = Re\{\underline{c}\}$

$b = Im\{\underline{c}\}$



Ојлерова релација

$$\underline{c} = Ce^{j\phi}$$
$$= C\cdot(\cos\phi + j\sin\phi)$$
$$= C\cdot\cos\phi + jC\cdot\sin\phi$$
$$= a + jb$$

$\rightarrow a = C\cdot\cos\phi$

$b = C\cdot\sin\phi$

$e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$

$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j$

$\underline{c} = Ce^{j\phi}$ тригонометријски (експоненцијални) облик

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ модул комп. броја

$\phi = arctg\frac{b}{a}$ аргумент комп. броја

$\phi = arctg\frac{Im\{\underline{c}\}}{Re\{\underline{c}\}}$ $\quad -\pi < \phi \le \pi$

$$\underline{c}_1 = a_1 + j b_1 = c_1 e^{j\phi_1}$$

$$\underline{c}_2 = a_2 + j b_2 = c_2 e^{j\phi_2}$$

$$\underline{c}_1 + \underline{c}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$\underline{c}_1 - \underline{c}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

$$\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2 = a_1 \cdot a_2 + j a_1 b_2 + j b_1 a_2 - b_1 b_2$$

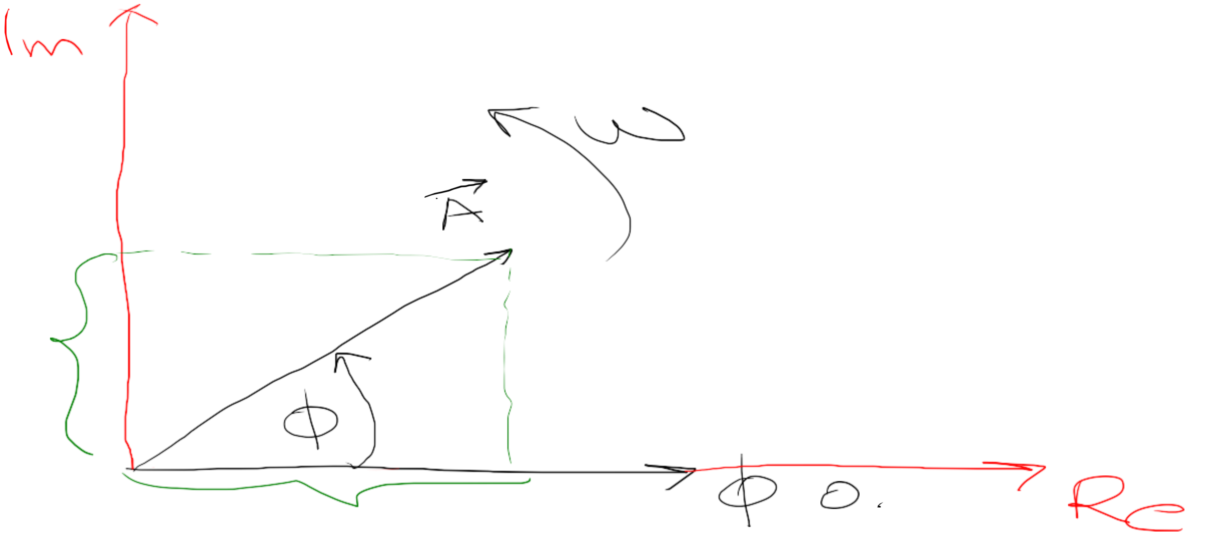
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2 = c_1 c_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\frac{\underline{c}_1}{\underline{c}_2} = \frac{a_1 + j b_1}{a_2 + j b_2} \cdot \frac{a_2 - j b_2}{a_2 - j b_2} = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\underline{c}_2^* = a_2 - j b_2$$

Представљање фазора компл. бројевима



КОМПЛЕКСНИ ПРЕДСТАВНИЦИ ПРОСТОПЕРИОДИЧНИХ ВЕЛИЧИНА

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \longleftrightarrow \underline{U}=Ue^{j\theta}$$

модуо комп. броја једнак је ефективној вредности простопериод. величине

аргумент комплексног броја једнак је поч. фази простопериодичне величине

п.п. величина се задаје у канонском облику (cos)

$$u(t) = \underbrace{5\sqrt{2}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \underline{U} = 5e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$u(t) = 6 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{3\sqrt{2}\sqrt{2}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \underline{U} = 3\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

* ако је познат комп. представник

$$\underline{U} = Ue^{j\theta} \Leftrightarrow u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$\underline{U} = 5e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$u(t) = \sqrt{2}\,5\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

АНАЛИЗА КОЛА У КОМПЛЕКСНОМ ДОМЕНУ

$$\frac{d}{dt} \longleftrightarrow j\omega$$

$$L\frac{di}{dt} \longleftrightarrow L \cdot j\omega \cdot \underline{I}$$

$$C\frac{du}{dt} \longleftrightarrow C \cdot j\omega \cdot \underline{U}$$

- први Кирхофов закон

$$\left.\begin{aligned} &\sum i(t) = 0 \\ &-i_1 + i_2 + i_3 = 0 \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \begin{aligned} &\sum \underline{I} = 0 \\ &-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \end{aligned}$$

$i_1 \Leftrightarrow \underline{I}_1$, $i_2 \Leftrightarrow \underline{I}_2$, $i_3 \Leftrightarrow \underline{I}_3$

- други Кирхофов закон

$$\left.\begin{aligned} &\sum u(t) = 0 \\ &-u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\sum \underline{U} = 0 \\ &-\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0 \end{aligned}$$

$u_1 \Leftrightarrow \underline{U}_1$, $u_2 \Leftrightarrow \underline{U}_2$, $u_3 \Leftrightarrow \underline{U}_3$

КОМПЛЕКСНА ИМПЕДАНСА И АДМИТАНСА

– комплексна импеданса

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$ ПРИ УСКЛАЂЕНИМ РЕФ. СМЈЕРОВИМА

$$\underline{Z} = Z e^{j\phi} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\theta}}{I e^{j\psi}} = \frac{U}{I} e^{j(\theta - \psi)}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{U}{I} \qquad \phi = \theta - \psi$$

– отпорник $u(t) = R i(t) \Rightarrow \underline{U} = R \cdot \underline{I}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R = Z e^{j\phi}$$

$$Z = R$$

$$\phi = 0$$

- калем $u = L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow \underline{U} = j\omega L \underline{I}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = Z e^{j\phi}$$

$$Z = \omega L \qquad \phi = \frac{\pi}{2}$$

- кондензатор $i = C\frac{du}{dt} \Leftrightarrow \underline{I} = j\omega C \underline{U}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = Z e^{j\phi}$$

$$Z = \frac{1}{\omega C} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Комплексна адмитанса

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}$$

$$\underline{Y} = j\omega C$$