

Dr J. Janjić

Dr I. Bikit

Dr N. Cindro

OPŠTI KURS

FIZIKE

I DEO

1	FIZIKA I NEJENI METODI	U V O D	P R E D G O V O R
11	OSNOVNE FIZIČKE VELIČINE.	ELEMENCI VEKTORSKOG RACUNA	I I I
11	INTERAKCIJONALNI SISTEM HERA (SI)	1. SKALARNE I VEKTORSKIE VELIČINE	I I
XI	ELIMENCI VEKTORSKOG RACUNA	2. SABIRANJE I ODZIMANJE VEKTORA	X I
XV	3. MNOCENJE VEKTORA	4. VEKTORI U PRAVOUGLOM (DEKARTOVOM)	X V
XVII	5. RADIJUS-VEKTOR I NJEGOVA PROMENA U VREMENU	5. KARIDIJATONOM SISTEMU	X V I I
XX	UVOD	M E H A N I K A	I
1	K I N E M A T I K A	1. OSNOVNI PODMOLVI KINEMATIKE	4
9	2. PRAVOLINIJSKO KRETANJE	2. UNIFORMNO (RAVNOMERNO) KRETANJE	9
9	3. UNIFORMNO (RAVNOMERNO) KRETANJE	4. JEĐNAKO UBRAZANO KRETANJE	11
11	5. PRIMERI UBRAZANOG KRETANJA	5. JEĐNAKO UBRAZANO KRETANJE	13
13	6. KRIVOLINIJSKO KRETANJE	6. KRIVOLINIJSKO KRETANJE	18
18	7. KRUZNO KRETANJE	7. KRUZNO KRETANJE	19
22	8. RAVNOMERNO (UNIFORMNO) KRUZNO KRETANJE	8. RAVNOMERNO (UNIFORMNO) KRUZNO KRETANJE	22
23	9. UBRAZANO KRUZNO KRETANJE	9. UBRAZANO KRUZNO KRETANJE	23
25	10. ANALOGIJA IZMEĐU PRAVOLINIJSKOG	10. ANALOGIJA IZMEĐU PRAVOLINIJSKOG	25
26	11. SILA I MASA. KOŁICINA KRETANJA	11. SILA I MASA. KOŁICINA KRETANJA	26
27	12. JUTNOVI ZAKONI	12.1. PRVI JUTNOV ZAKON. INERCIJA LINIJI SISTEMI	27
27	12.2. DRUGI JUTNOV ZAKON	12.2. DRUGI JUTNOV ZAKON	27

12.3. Treći Njutnov zakon	33
13. ZNAČAJ NJUTNOVIH ZAKONA U FIZICI	35
14. IMPULS SILE I KOLIČINA KRETANJA	39
15. ZAKON ODRŽANJA KOLIČINE KRETANJA	41
16. DINAMIKA KRUŽNOG KRETANJA	49
16.1. Sile kod kružnog kretanja	49
16.2. Sile u referentnom sistemu koji rotira ravnomerno	50
17. PRIMERI I ZNAČAJ CENTRIFUGALNIH INERCIJALNIH SILA	56
III RAD I ENERGIJA	61
18. RAD	61
19. SNAGA	63
20. ENERGIJA	64
20.1. Kinetička energija	65
20.2. Potencijalna energija	67
20.3. Zakon održanja energije	71
21. TRENUJE	74
IV GRAVITACIJA	77
22. NJUTNOV ZAKON GRAVITACIJE	77
22.1. Uprzanje Mesečevog kretanja oko Zemlje	81
22.2. Eksperimentalno određivanje konstante gravitacije G; Kevendilšova vaga	82
22.3. Određivanje mase Zemlje i Sunca	84
22.4. Gravitaciona i inercijalna masa	85
22.5. Gravitaciono polje	86
22.6. Gravitaciona potencijalna energija i potencijal	89
22.7. Kosmičke brzine	91
22.8. Težina tela	96
V ELEMENTI SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI	98
23.1. Eksperiment Majkelsona i Morlija	98
23.2. Ajnštajnovi postulati i Lorencove transformacije	100
23.3. Posledice Lorencovih transformacija	102
23.4. Rezultati relativističke dinamike	104

VI SVE MIR I PROCESI NA ZVEZDAMA	106
24.1. "Gorenje" vodonika	113
24.2. "Gorenje" helijuma	114
24.3. Neobična nebeska tala	115
VII MEHANIKA ČVRSTOG TELA	121
25. TRANSLATORNO KRETANJE ČVRSTOG TELA	121
26. MOMENT SILE U ODНОSU NA STALNU OSU	124
27. MOMENT INERCИJE	124
28. OSNOVNA JEDНАЧИНА DINAMIKE ROTACIONOG KRETANJA	127
29. KINETИKA ENERGIJA I RAD KOD ROTACИJE ČVRSTOG TELA	128
30. MOMENT KOLIČINE KRETANJA. ZAKON ODRŽANJA MOMENTA KOLIČINE KRETANJA	129
30.1. Primer za primenu zakona održanja momenta količine kretanja	133
31. ROTACИJA TELA OKO SLOBODNE OSE	137
32. ROTACИJA KRUTOГ TELA OKO STALNE TAČKE. ZИROSKOP	140
VIII STATIKA ČVRSTOG TELA	146
33. USLOVI RAVNOTEZE	146
34. SLAGANJE SILA. SPREG SILA	149
35. VRSTE RAVNOTEZE. STABILNOST	152
36. PROSTE MAŠINE	154
IX ELASTИČNOST ČVRSTIH TELA	158
37. ELASTИČNA DEFORMACИJA ISTEZANJA	158
38. ELASTИČNA DEFORMACИJA PRI SHICANJU	159
39. SUDAR	161
40. UZHAK I MODERATORI	165
X OSCILACИJE	167
41. PRIMERI HARMONИJSKIH OSCILACИJA	167
41.1. Oscilovanje tela obešenog o elastičnu oprugu	168
41.2. Matematičko klatno	173
41.3. Fizičko klatno	175
41.4. Torziono klatno	177
41.5. Primene klatna pri otkrivanju unutrašnjeg bogatstva Zemlje	177

42. VEEZA IZMEDUJU HARMONIJSKOG OSCILOVANJA I	RAVNOHODNOG KRUVZNOG KRETANJA. GRAFIČKI	XII	T A L A S N O K R E T A N J E
57. PROSTIRANJE TALASA U ELASTITUDU SREDINI	58. JEĐNACINA PROGRAMSIVNOG TALASA	178	
241			
243			
245	43. PRIGUŠENE HARMONIJSKE OSCILACIJE 58.2. Grupna i fazna brzina 58.3. Talasi na površini tehnosti	185	Lijazbove figure elastičnoj sredini
250	58.4. Energijska talasa	186	44.1. Prenos energije kod rezonancije
254	59. OSNOVNE OSOBINE TALASNOG KRETANJA	191	44.2. Modulirano oscilovanje
255	59.1. Odgijanje i prelamanje talasa	193	45. AGREGATNA STANJA
257	59.2. Difrakcija talasa	194	G A S O V A T E C N O S T I
260	59.3. Interferencija talasa	194	A. S T A T I K A T E C N O S T I
262	59.4. Polarizacija talasa	194	G A S O V A T E C N O S T I
263	60. STOJECI TALASI	194	
269	60.1. Uticaj granicnih uslova na talasu	206	48. POKRINSKI NAPON
271	duzinu stogačih talasa	206	49. UTICAJ MOLEKULARNIH SILA NA OBLIK POKRISNE
275	61. DOPLENOV EFEKT	203	NA GRANICI TEHNOSTI I VRSTOG TELA. KAPITOL
275	62. ZVUK	208	50. ZEMLJINA ATMOSFERA I TEZINA VAZDUHA
276	62.1. Jatina zvuka. jedinice	208	51. ATMOSFERSKI PRITISK
278	62.2. Zvukna barjera	211	52. PRITISK GASA. MANOMETRI
279	62.3. Rezonancija u akustici	213	53. STRUJANJE FLUIDA. JEĐNACINA KONTINUITETA
281	62.4. Uticaj	215	54. BEURNIJEVA JEĐNACINA
284	62.5. Akustičnost dvorana. Akustični filteri	215	55. PRIMENA BEURNIJEVE JEĐNACINE
284		216	56.1. Viskoznost
287		219	56.2. Režnoldsov broj. Preslikavanje
287	TE M P E R A T U R A T O P L O T A	227	56.3. Bernulijeva jednacina za rečne
291	63.1. Temperatura. Termometri	227	56.4. Proticanje fluida kroz uske clevi.
294	63.2. Temperaturske skale	230	56.5. Optop viskozne sredine. Stoksov zakon
296	63.3. Toplotna i masena koeficijenta toplice	231	56.6. Dinamicki potisak
299	63.4. Strojne vibracije tela pri zagrevanju	232	
301	63.5. Strojne tehnich tela pri zagrevanju	235	
	63.6. Strojne gasova pri zagrevanju	237	

II	64.1. Atomsko-molekulski sastav materije	309
	64.2. Osnovne prepostavke kinetičke teorije toplote	313
	64.3. Idealan gas. Jednačina stanja idealnog gasa	314
1	64.4. Osnovna jednačina kinetičke teorije gasova	319 <i>1</i>
	64.5. Raspodela energije po stepenima slobode	323
	64.6. Unutrašnja energija i masena količina topline idealnog gasa <i>2</i>	325 <i>2</i>
	64.7. Maksvelov zakon raspodele brzina	328
	64.8. Eksperimentalna potvrda Maksvelove raspodele brzine	331
	64.9. Boltmanova raspodela energije u gasu	332
	64.10. Srednja dužina slobodnog puta. Difuzija	333
III	OSNOVI TERMODINAMIKE	335
	65.1. Osnovno pojmovi termodinamike	335
	65.2. Prvi princip termodinamike	338 <i>6</i>
	65.3. Promena gasnog stanja i izvršen rad	340
	65.4. Drugi princip termodinamike	343 <i>7</i>
	65.5. Kružni procesi	344
	65.6. Klauzijusova nejednačina. Entropija	350
	65.7. Nernstova teorema	356
IV	REALNI GASOVI, TEČNA I ČVRSTA TELA	359
	66.1. Medjumolekularne sile i agregatna stanja materije	359
	66.2. Realni gasovi. Jednačina Van der Valsa	361
	66.3. Džul - Tompsonov efekat	364
	66.4. Eksperimentalne izoterme. Kritična tačka	367
	66.5. Dijagram stanja. Trojna tačka	368
	66.6. Toplota pretvaranja	369
	66.7. Kristalno i amorfno stanje	370
	66.8. Osnovni tipovi kristala	372
	LITERATURA	373

P R E D G O V O R

Ovaj udžbenik je namenjen studentima, kojima fizika služi samo kao teorijska osnova za studiranje stručnih predmeta. Prvi deo sadrži dve oblasti - mehaniku i termofiziku, dok će elektromagnetne pojave i atomska fizika sa osnovama kvantne mehanike biti obradnjene u drugom delu. Tekst je pisan sa namerom da, obzirom da fizika zadire u sve oblasti prirodnih i tehničkih nauka, bude najviše prilagođen studentima tehnologije i hemije, te su u skladu sa tim pojedine oblasti, koje se na ovim studijama slušaju kao posebni predmeti, prezentirane koncianije.

Dugogodišnje iskustvo autora na kursevima fizike za "neftičare" uticalo je i na način objašnjavanja i naglašavanje pojedinih aspekata, na pokušaj plastičnog, možda negde pojednostavljenog tumačenja, kao i na proširenje teksta matematičkim pojmovima i izvodjenjima, za koje se pokazalo da nisu dovoljno bliski studentima ovih fakulteta (sa rasličitim srednjim obrazovanjem).

Istovremeno je pokušano da prikazi budu matematički dovoljno strogi i da akcenat udžbenika ne bude nikako na tzv. radnim formulama i detaljnijem prikazivanju aparat i maština i njihove praktične prime-ne u tehnologiji i tehnološkim procesima, nego da se da objašnjenje opštih zakonitosti iz čijeg dubokog poznavanja u suštini proističe aplikativni deo, te da u krajnjoj konsekvenci privikne studente na egzaktnost i logično rasudjivanje i da doprineće njihovoj kreativnosti u budućem radu.

Uvodjenjem odeljka "Svemir i procesi na zvezdama" autori su želeli da upoznaju studente i sa naučnim dostignućima i trenutnim stanjem u izučavanju svemira.

Pri pisanju teksta strogo se vodilo računa o jedinicama, koje se danas koriste u okviru Međunarodnog sistema jedinica.

Autori se zahvaljuju recenzentima i kolegi Dr Bratislavu Tošiću, koji je pored korisnih ideja pružio svesrdnu direktnu pomoć pri pisanju ovog teksta.

Za uspešno završavanje ovog udžbenika zaslужni su i Mr Ljiljana Čonkić, Mr Jelena Kiurski, Lazar Beljanški i Dragan Jović.

Obzirom da je ovo prvo izdanje udžbenika bićemo zahvalni svim čitaocima koji nam budu ukazali na izvesne greške i propuste.

Autori

tin veličina i da ih tako svedećemo na relativno male broj. Međutim fizikalnih pojava može biti veoma veliki. Iskusstvo i generacija Broj fizikalnih veličina koje u vodiću radi opisivanja

INTRODUKCIJA I METODI OSNOVNE FIZIKE VELICINE.

dakle razvoju fizike i većoj fizikalnosti učenih metoda. ste u nekoj druge oblasti, što u celini gledano, doprinosi da se ideje, metodi i prilazi iz edene oblasti prenose i koriste oblasti fizike se jesto proizmaju, a još poseća je pojava ostre granice između pojedinih delova fizike. Naprotiv, različite oblasti fizike se jesto proizmaju, a još poseća je pojava različitih delova fizike i postoji različna podela na mala atomskom jezgrom, na osnovu kvantnih zakonitosti. Treba naglasiti, dok je predmet uključene fizike objasnjenje pojava u atomskom. Atomska fizika izučava kvantne pojave u atomskom materijalu. Atomska elektromagnetenog zračenja i interakciju sa polja i nelektronskim, dok je zadatok optike da prouči zakone elektromagnetenog zračenja, nelektronske optike i interakciju između elektrona i protona, nelektronske optike i interakciju između elektrona i molekula. Elektromagnetenog zračava ne oblike kretanja i transformisanja materije. Mechanika izučava kretanje tela u prostoru, a molekularna fizika hotično delu fizike po oblastima. Svaka od ovih oblasti izučava okreće se u različitim teorijama. Svaki oviog razlaganja možemo se osvrnuti na po- u zaključku ovog razlaganja možemo se osvrnuti na po- zitivnu teoriju.

ova nova saznanja će svakako uticati na dalje usavršavanje fizike. Instrumenata prostirće nasu saznanja o materijalnom svetu, a podleže dalje usavršavanju. Stvaranje novih, osetljivih merenja i pak ne znaci da fizika, u svojim danasnjim fazama razvija, ne skoro sve fenomene koje nasi meriti instrumenti registruju. To će i elektrodinamike i kvantna teorija koja objasnjava zakoni relativnosti, koja predstavlja i opštine klasične mehaničke relativnosti, pojavom ovog veka paralelno su nastale teori- naše saznanje horizonte. Fizika je doživela naravito duhan raz- vitiak u XX veku. Početkom ovog veka paralelno su nastale teori-

metode, a ova je opet, usavršavajući svoje metode proširila obima naših saznanja o prizrodi usavršavao je fiziku i njene povratnoj sprezici između saznanja procesa i fizike. Porast svake metode. Onde bi se na neki način mogao govoriti o fizikama razvijala veoma brozo i neprestan je usavršavala ta, fizika se razvija u novome zakonitosti materijalnog sve- Izučavanje osnovne zakonitosti fizike razvijeno materijiji. Izrađivači ovih razvojnih metod fizike, bez obziра da li se oni odigravaju u neživoj ili živoj materiji, u domen biologije i danas se u ovu nauči kao i u medicici, u domen fizike, što su deobra, razvoj i drugo. Osim je fizika skih procesa, kao što su deobra, razvoj i drugo. Razvoj je različitih amionikseline dala je osnove za razjasnjenje različitih različnih značajki. Razvoj je u životu, a primena kvantnih zakonitosti na proteine i materije u životu, a statističke pravilnosti da se odsanu prelaz nežive ne statističke pravilnosti su mogućnosti da, termodinamika i ostalih tehniki nauka. Metodi neravnometričke, termometričke i izgradnje na bazi fizikalnih zakona. Fiziki zakoni tada mehanička izgradnja je gravitacionim silama, što znaju da je i nebeska regulisano specifičnom oblasti fizike. Kretanje nebeskih tела povi uključuju reakciju, pa se stoga astrofizika može smatrati jednom specifičnom oblasti fizike. Kretanje nebeskih tenukih tehnika. Procesi na zvezdama nisu nista drugo od različiti radio-tehnike. Fizika u temelje elektrotehnike i radio-tehnike zakoni o interakciji između elektromagnetenih polja i medju atomu i molekulama i zbrog predstavlja osnovu hemije. Fizika objasnjava prirodu i zakone interakcije između atoma i molekula i za razliku od fizike i tehnike, je da ona predstavlja osnovu svih prirodnih i tehničkih struktura materije, kao i na nećeno kretanje i transformisanje, u materijalnom svetu. Ove zakonitosti odnose se na osobine i strukture materije, a u podnehnaku meri vaze i za neživo materijalu. Na osnovu ovako definisane oblasti fizike, očigledno a u podnehnaku meri vaze i za neživo materijalu. Na strukture materije, kao i na nećeno kretanje i transformisanje, Fizika izučava najopštije zakonitosti odnose se na osobi- na materijalnom svetu, koja vjedaju

djutim, iskustvo nam ukazuje i na to da ćemo u redukciji broja fizičkih veličina konačno doći na takve koje ne možemo svesti jedne na druge. Takve veličine, koje zahtevaju definisanje "a priori", zvaćemo osnovnim fizičkim veličinama; sve ostale fizičke veličine koje možemo izvesti pomoću osnovnih, zvaćemo izvedene fizičke veličine.

Osnovne fizičke veličine ne možemo u fiziku uvesti čistim jednačinama, tj. fizičkim zakonom. Za razliku od njih sve izvedene veličine uvodimo definicionim jednačinama koje ih povezuju sa osnovnim fizičkim veličinama

Današnji razvoj fizike pokazuje da se čitavo područje pojava, koje istražuje savremena fizika, da prikazati pomoću sledećih osnovnih fizičkih veličina, koje odgovaraju nezavisnim područjima fizike*:

- 3 mehaničke veličine
- 1 električna veličina
- 1 termička veličina
- 1 fotometrijska veličina
- 1 atomistička veličina

Internacionalni sistem mera, kojim ćemo se koristiti u ovoj knjizi, upotrebljava ovih sedam veličina. U principu, izbor navedenih osnovnih veličina je u svakom području fizike slobadan.

U mehanici započinjemo sa geometrijskim merenjima položaja. Prirodno je dakle da kao prvu osnovnu veličinu uzmeмо dužinu. Sledeci korak je merenje kretanja, kinematika. Tu je, uz dužinu, potrebno i merenje vremena. Druga dakle osnovna veličina je vreme. U problemima dinamike, koji sada obuhvataju čitavo područje mehanike, potrebne su nam tri osnovne veličine.

* V.F. Kohlrausch, *Praktische Physik*, B.G. Teubner, Stuttgart, 22. Aufl. (1968), str. 12.

Kao treću osnovnu veličinu uzimamo u fizici masu ili njen ekivalent - energiju. Osnovni sistem veličina u mehanici su dakle dužina - vreme - masa.

U električnim merenjima pojavljuje se četvrta osnovna fizička veličina. Giorgi* je 1901.g. predložio da se kao četvrta osnovna veličina uzme jačina struje. Kao što ćemo kasnije videti, ovaj je predlog danas ozakonjen. Ranije korišćena četvrta osnovna veličina, količina elektriciteta, bila je definisana uz pomoć mehaničkih efekata električnih sila. U oba slučaja, međutim, sve ostale električne veličine su izvedene veličine i mogu se izraziti pomoću tri mehaničke veličine i jačine struje u prvom, odnosno pomoću količine elektriciteta u drugom slučaju. Moguće bi naravno bilo kao osnovne veličine uzeti i druge električne veličine, npr. električni napon, ili dielektričnu konstantu, te ostale veličine izvesti pomoću njih.

Za područje termodinamike potrebno je takođe, uz tri mehaničke veličine, uvesti još jednu, četvrту, veličinu. Lako merljiva veličina je temperatura, koju, kao što ćemo videti, merimo pomoću termodinamičke ili Kelvinove skale. Ranije upotrebljavana veličina, količina toplote danas se po pravilu svodi na ekvivalentnu količinu energije izraženu u mehaničkim jedinicama.

Za fotometrijska merenja potrebne su nam tri osnovne veličine i to dve kinematičke, dužina i vreme, koje opisuju prostiranje svetlosti, te treća veličina, koja uzima u obzir njegove fiziološke efekte vezane za osjetljivost našeg oka na određene frekvencije elektromagnetskog zračenja. Ova treća veličina može se npr. povezati s količinom energije koju odredjeni svetlosni tok prenese u nekom vremenu. U tom slučaju četvrta osnovna fizička veličina će biti svetlosni fluks. Druga mogućnost, koja je danas uopšteno prihvaćena, jeste definisati veličinu analo-

* Giovanni Giorgi (1870-1950), italijanski elektrotehničar.

me

ćici za mreže i tegove 1971.g. Sam naziv International SI sistem modifikovale definicije nekih jedinica. Sedma osnovna jedinicu konferencije za mreže i tegove 1954.g.; kasnije konferencije su privih sešti sedinice prihvagene je još odlikom 10. Međunarodne modifikovane jedinicu jedinicu. Sedma osnovna jedinicu

za koljicnu materiju mol (mol) za jekatnu svetlosti kandele (cd) za termodynamiku temperaturu kelvin (K) amper (A) za jekatnu električne struje sekunda (s) za vreme kilogram (kg) za masu metar (m) za dužinu

su osnovne u internacionalnom sistemu mera (SI): tegove od 1954.g. do danas prihvagene su sljedeće jedinice koje odlikom nizazvedeni konferencijska za mreže i porcione.

Koji smo nazvali masa, premda su obe nazivene jedinice fizike veličine je u pozivano i faktički savršena različita od fizikalne Naglašavamo da je fizika veličina koljicna materija mol.

čestica uvedena okređena koljicna materija, koja se naziva broj. Tako je kao osnovna veličina koja se temelji na broju koljicne materije i broja čestica, koeficijent proporcionalnosti između činjenica, umesto njega se uzima koljicna materija, proporcijevima, kako se taj broj može direktno okređiti samo posebnim potrebno je da kake doznavati broj individualnih kes-molekula, radikal, elektrona i sl.

kih odnosno da dat problem ekvivalentnih jedinici, npr. atoma, hantike veličine još jedna specifična veličina, tj. broj jedna-kod mrežnjaka u atomskoj fizici potreba nam je uz me-

triji nazvati jekatna svetlosti. Tu gemo veličinu u fotome-

gnu jekatni struje u elektrodinamici. Tu gemo veličinu u fotome-

triji nazvati jekatna svetlosti.

1 sekunda (s) je trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja, koje odgovara prelazu izmedju dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma ^{133}Cs .

Nova definicija sekunde zasniva se dakle na fizičkim merenjima, čija je preciznost i reproducibilnost u ovom slučaju premašila astronomsku.

Amper. Ranije definicije ampera temeljile su se na elektrohemimskim efektima. Današnja definicija ampera doneta je na 9. medjunarodnoj konferenciji za mere i tegove (1948).

1 amper (A) je jačina vremenski stalne električne struje koja, prolazeći kroz dva prava, paralelna, beskonačno dugačka provodnika, zanemarljivog kružnog preseka, koji se nalaze u vakuumu na međusobnom rastojanju od 1 m, prouzrokuje između njih elektrodinamičku silu od $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po metru dužine.

Kako je sila po jedinici dužine između dva paralelna provodnika, kojima teku struje I_1 i I_2 , razmaknuta za daljinu d , jednaka:

$$\frac{F}{l} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d}$$

izlazi da je u SI jedinicama magnetna permeabilnost vakuma jednaka:

$$\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2,$$

odnosno:

$$1 \text{ A} = (4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ N}/\mu_0)^{1/2} = (4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ mkg s}^{-2}/\mu_0)^{1/2}$$

Pretходна relacija ekvivalentna je s gornjom definicijom ampe-ra.

Kelvin. Prve temperaturske skale uvedene su u fiziku fenomenološki preko konvencionalnih temperaturskih razlika. Na tim temeljima postavljena je Celzijusova skala, koja mržnjenju vode određuje temperaturu 0° , a ključanju temperaturu 100° . 1 Celzijusov stepen (${}^\circ\text{C}$) definisan je dakle kao $1/100$ ovog razmaka. Termodinamička temperaturna skala zasniva se na merenjima promene pritiska, odnosno zapremine idealnog gasa s temperaturom. Prema zaključku 13. medjunarodne konferencije za mere i tegove (1967),

Kelvin (K) je termodinamička temperatura koja je jednaka $1/273,16$ termodinamičke temperature trojne tačke vode*.

Termodinamička temperaturna skala pokazuje temperaturu iznad apsolutne termodinamičke nule, koja je, dakle, po definiciji $T = 0 \text{ K}$. Upotreba Celzijusovog stepena (${}^\circ\text{C}$) dozvoljena je istom konvencijom uz definiciju:

$$T \text{ (termodinamička; K)} = 273,15 + t({}^\circ\text{C})$$

Kandela. Nekadašnja jedinica za jačinu svetlosti, Hafnerova sveća, napuštena je zbog očigledne nepreciznosti. Definicija kandele potiče od 16. medjunarodne konferencije za mere i tegove (1979.) i glasi:

Kandela (cd) je svetlosna jačina u određenom pravcu izvora koji emituje monohromatsko zračenje frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ herca i čija je energetska jačina (izražena snaga) u tom pravcu $1/683$ vata po steradijanu.

Mol. Jedinica za količinu materije, mol, je najmladja jedinica SI sistema. Godine 1957. je Medjunarodna unija za čistu i primjenju fiziku (IUPAP) definisala jedinicu 1 mol zasnovanu na količini izotopa kiseonika ^{16}O . Kako je postojala odredjena razlika između jedinica upotrebljavanih u fizici i hemiji (ove druge zasnivale su se na količini atoma u prirodnom kiseoniku, tj mešavini izotopa ^{16}O , ^{17}O i ^{18}O), dve glavne medjunarodne stručne organizacije za fiziku i hemiju IUPAP i IUPAC složile su se o zajedničkoj definiciji mola polazeći od izotopa atoma ^{12}C .

Definicija mola predložena 1969.g., a prihvaćena na 14. medjunarodnoj konferenciji za mere i tegove 1971.g., glasi:

1 mol (mol) je količina materije sistema koji sadrži toliko elementarnih jedinika koliko ima atoma u $0,012 \text{ kg}$ izotopa ugljenika ^{12}C .

* Trojna tačka vode je ona tačka u pT dijagramu (dijagramu zavisnosti pritiska od temperature) u kojoj voda može postojati u sve tri faze, tj. u čvrstoj, tečnoj i gasovitoj fazi.

oblik

(kada je razlikit) naveden je u zagraditi.

*

sa na reč gram, a oznaka prefiksa piše se uz simbol g. Na primer
imenu sadrže prefiks, izvode se dodavanjem odgovarajućeg prefik-
sa na reč kg, a ne kg.

*

*

Medijutim, osnovne jedinice za masu, kose već u svom

eksa (exa)	E	10^{18}	FAKTOR KOJIM SE MNIZI JEDINICA
petra	P	10^{15}	
tera	T	10^{12}	
giga	G	10^9	
mega	M	10^6	
kilo	K	10^3	
hekti (hektar)	h	10^2	
deka (deca)	d	10^1	
centi	c	10^{-2}	
milii (milil)	m	10^{-3}	
milkiro (miljard)	n	10^{-6}	
hekti	p	10^{-9}	
femto	f	10^{-15}	
atto (atto)	a	10^{-18}	

ksit su:

nove, koji je celobrojni umnožak osnovne. Preporučeni SI prefik-
stavljaju broj (faktor) koji pomnožen s osnovnom jedinicom daje
niče grade pomognu prefiksa pred simbolom jedinice. Prefiks pred
osnovni jedinica se veće ili manje jedi-
ho ordedjena grupa estiča.

zbodila u definiciji "elementarnih jedinika" pokazuje da to mogu
biti atomi, molekuli, joni, elektroni ili neka druga jedinaca

III ELEMENTI VEKTORSKOG RAČUNA

1. Skalarne i vektorske veličine

Fizičke veličine se po svojim karakteristikama mogu eliti na skalare i vektore. Skalar je takva fizička veličina koja je potpuno određena samo jednim podatkom - svojom brojnom vrijednošću u odabranim mernim jedinicama. Skalarne veličine su temperatura, vreme, vrijeme, razmjer, zapremina itd. Pored pomenutih, postoje i fizičke veličine čije potpuno definisanje zahteva tri podatka, a to su, pored brojne vrijednosti, još pravac i smer. Ovaj tip fizičke veličine nazivaju se vektorima. Vektorske veličine su brzina, ubrzanje, sila, moment sile i druge. Potpuno je očitno da navođenje samo brojne vrijednosti za neku od poslednjih navedenih veličina ne sadrži punu informaciju o toj veličini, te se odmah postavlja pitanje pravca i smjera kretanja ako se radi o brzini, ili pravca i smjera delovanja ako se radi o sili. Učavanje vektorskih fizičkih veličina zahtevalo je pojavu novih matematičkih oblasti i tako je nastala matematička disciplina koja se naziva teorijom vektora. Teorija vektora je veoma srodnog povezana sa fizičkim pojavama i može se reći da su sve inicije i algoritmi ove teorije uzeti neposredno iz procesa koji se odvijaju među fizičkim veličinama.

U fizici se vektori prikazuju kao orijentisane duži linije. Vektori se najčešće obeležavaju malim slovom latinice sa strelicom iznad, npr. \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} itd. Intenzitet vektora \vec{a} (sl. 1.) se označava sa $|\vec{a}|$ i predstavlja brojnu vrijednost dužine \overline{AB} . Prava na kojoj leži vektor i koja određuje njegov pravac naziva se nosačem vektora. Smer vektora određen je strelicom u tački B.

Sl. 1 Tačka A je početak vektora, dok se tačka B naziva krajem vektora. Postoje slobodni i vezani vektori. Slobodni vektori se mogu paralelno pomerati u prostoru (znači bez promjene pravca). Vezani vektori se najčešće pojavljuju u statici i ve-

zani su za datu tačku. Tipični vezani vektor je težina tela, koja je vezana za tačku koja se naziva težištem. Vektor jediničnog intenziteta naziva se ortom. On se može predstaviti kao odnos vektora i njegovog intenziteta:

$$\text{ort } \vec{a} \equiv \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}; \quad \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$$

$$|\vec{a}_0| = \left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$
(1)

Vektori i skalari se ne mogu medjusobno sabirati i oduzimati, jer predstavljaju veličine različitog tipa, ali se mogu množiti. Proizvod skalara λ i vektora \vec{a} je neki novi vektor \vec{a}' , tj:

$$\vec{a}' = \lambda \vec{a}$$
(2)

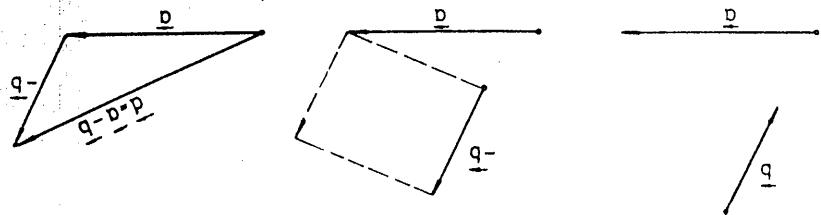
Kao što se vidi, množenje vektora skalarom menja intenzitet vektora, jer je $|\vec{a}'| = |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ i eventualno, smer vektora ako je skalar negativan: $\lambda < 0$. Množenje skalarom ne menja pravac vektora. Ako je skalar λ ravan nuli onda je proizvod ovakvog skalara i vektora takozvani nula vektor:

$$0 \cdot \vec{a} = 0$$
(3)

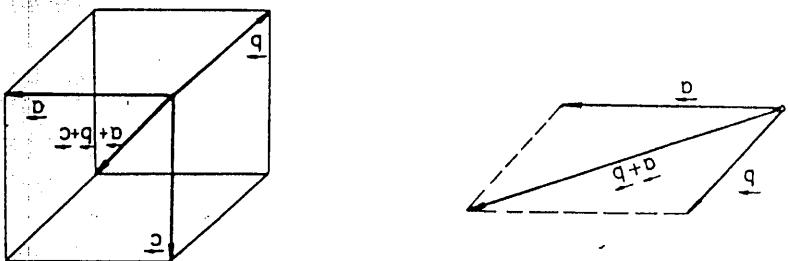
2. Sabiranje i oduzimanje vektora

Zbir dva vektori je neki vektor. Vektori \vec{a} i \vec{b} (sl. 2.a) sabiraju se tako što se paralelnim pomeranjem početak vektora \vec{b} doveđe na kraj vektora \vec{a} . Vektor \vec{c} koji predstavlja sumu vektora \vec{a} i \vec{b} ima početak u početku vektora \vec{a} i kraj na kraju vektora \vec{b} (sl. 2.b).

Ako se sabira više vektori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} (sl. 3.a).itd., onda se početak svakog vektora prenosi paralelnim pomeranjem na kraj prethodnog vektora, a sumarni vektor ima početak u po-



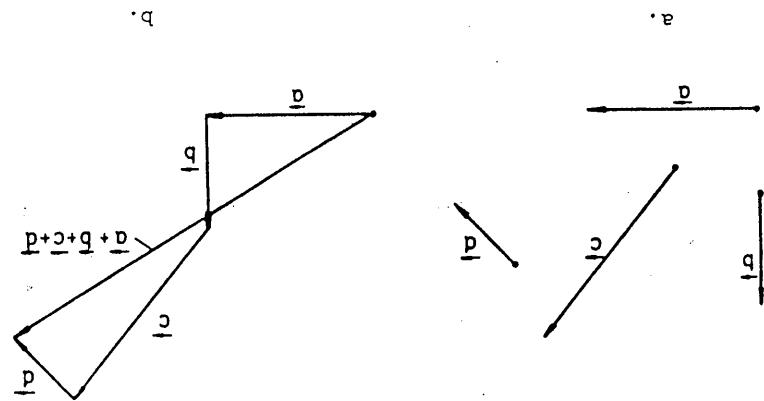
Za sabiranje vektora postoji pravila paralelograma vektora i paralelopipeda vektora. Zbog dva vektora \vec{a} i \vec{b} predstavlja glavnu dijagonalu paralelograma konstrukcije nad vektorima \vec{a} i \vec{b} kao različiti paralelograzi. Kao specijalni slučaj sabiranja. Nama nezadika $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$, može se napisati kao $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Znaci, ovde se vektor \vec{b} množi skalarom (-1) koji mu samo menja smjer. Vektor $(-\vec{b})$ dodaje se vektoru \vec{a} po napred navedenom pravilu sabiranja.



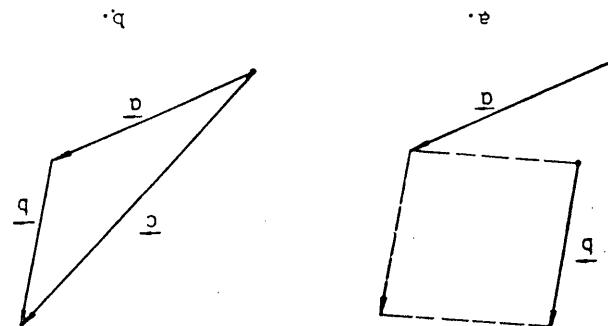
Ako se radi o tri vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} onda se oni parale-

du na zajednički pozetak (SL. 4.).

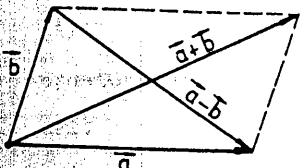
Za sabiranje vektora postoji pravila paralelograma vektora i paralelopipeda vektora. Zbog dva vektora \vec{a} i \vec{b} predstavlja glavnu dijagonalu paralelograma konstrukcije nad vektorima \vec{a} i \vec{b} kao različiti paralelograzi. Kao specijalni slučaj sabiranja. Nama nezadika $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$, može se napisati kao $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Znaci, ovde se vektor \vec{b} množi skalarom (-1) koji mu samo menja smjer. Vektor $(-\vec{b})$ dodaje se vektoru \vec{a} po napred navedenom pravilu sabiranja.



zbetu prvoog vektora i kraj na kraju poslednje nanesenog vekto- ra (SL. 3.b).



Razlika $\vec{a} - \vec{b}$ je sporedna dijagonala paralelograma (sl. 7.).



Sl. 7

Osobine vektorskog zbiru su sledeće:

- osobina komutativnosti
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- osobina asocijativnosti
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- osobina distributivnosti u odnosu na množenje skalarom α
 $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ (4)
- $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$ gde je β skalar
 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

3. Množenje vektora

Pravila vektorskog množenja uvedena su u teoriju vektora iz fizike. Poznato je da se množenje dve vektorske veličine - sile i puta dobija skalar - rad. S druge strane proizvod sile i kraka sile (znači, opet proizvod dva vektora) daje kao rezultat vektor koji se naziva moment sile. Pošto se u izvesnim slučajevima množenjem dva vektora dobija skalarna veličina dok je u nekim drugim slučajevima proizvod dva vektora vektorska veličina - ove fizičke činjenice preslikavaju se u matematičku teoriju vektora tako što se u ovoj definišu dva tipa proizvoda vektora i to skalarni proizvod (operacija množenja označava se tačkom) i vektorski proizvod (ova operacija označava se simbolom \times).

Skalarni proizvod dva vektora \vec{a} i \vec{b} definiše se na sledeći način:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad (5)$$

Kao što se vidi rezultat skalarnog množenja je skalar definisan desnom stranom jednačine (5). Ako su vektori \vec{a} i \vec{b} uzajamno normalni, onda je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Otuda se kao uslov ortogonalnosti dva vektora može napisati:

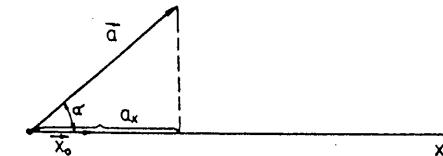
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (6)$$

Iz (5) se može odrediti ugao izmedju vektora \vec{a} i \vec{b} , odnosno izmedju pravih koje su njihovi nosači:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (7)$$

Definicija (5) došla je iz iskustva koje smo stekli u fizici. Ako želimo da izvršimo rad pomerajući telo po horizontalnoj podlozi, onda je najbolje delovati na telo silom koja je平行na sa podlogom. Tada je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$; $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ i $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ima maksimalnu vrednost. Ukoliko silom delujemo u pravcu normalnom na podlogu, telo nećemo pomeriti niti izvršiti bilo kakav rad. Iz (5) vidimo da je pri $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ proizvod $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ravan nuli.

Ako vektor \vec{a} (sl. 8.) želimo da projektujemo na pravac vektora \vec{x} , čiji je ort \vec{x}_0 , onda za to koristimo definiciju (5) skalarnog proizvoda



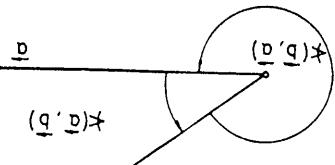
Sl. 8

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{x}_0 = |\vec{a}| |\vec{x}_0| \cos \alpha = |\vec{a}| \cos \alpha \quad (8)$$

Kao što se vidi projekcija vektora na drugi vektor je skalar. Ta projekcija može da bude pozitivna ili negativna u зависности od veličine ugla koji ovi vektori zaklapaju.

Skalarno množenje je, na osnovu definicije (5), komutativna i distributivna operacija, ali nije asocijativna tj.:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} && \text{komutativnost} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} && \text{distributivnost} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) &\neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} && \text{asocijativnost nije zadovoljena} \end{aligned} \quad (9)$$



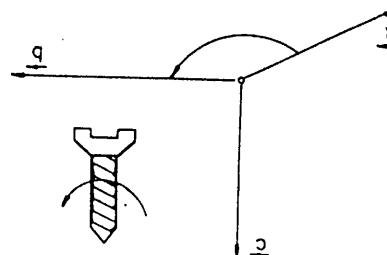
Vektorsko množenje nije komutativna operacija, što sledi iz (10), a iz pravila desnošnog zavrtanja prikazanog na slici 9. Zajista, negativan znak u odnosu na in-tenzitet $\hat{a} \times \hat{b}$ ova vektora pa postoji intenzitet $\hat{b} \times \hat{a}$ ima

$$\begin{aligned} &= -|\hat{a}| \cdot |\hat{b}| \sin(\hat{a}, \hat{b}) \\ &= -|\hat{a}| \cdot |\hat{b}| \sin(360^\circ - (\hat{a}, \hat{b})) = \\ &= |\hat{a}| \cdot |\hat{b}| \cdot |\hat{a}| \sin(\hat{b}, \hat{a}) = \\ &\text{Na osnovu (10) je:} \end{aligned}$$

prema slici 10. je $(\hat{b}, \hat{a}) = 360^\circ - (\hat{a}, \hat{b})$. Vektorsko množenje nije komutativna operacija, što sledi iz (10), a rezultat vektorskog množenja $\hat{a} \times \hat{b}$. Ovdje se uslov kolinearnosti vektora može pisati u obliku

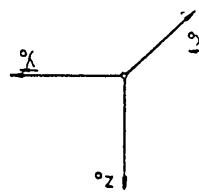
$$(\hat{a}, \hat{b}) = 0 \text{ ili } \hat{a} \parallel \hat{b}$$

Ako su vektori \hat{a} i \hat{b} kolinearni (paralelni ili antiparalelni), onda je $(\hat{a}, \hat{b}) = 0$ ili $\hat{a} \parallel \hat{b}$. Ovdje se sljedeći vektorski rezultat dobijamo učinak:



$$\hat{a} \times \hat{b} = \hat{c}; \quad (\hat{a} \times \hat{b}) = |\hat{c}| = |\hat{a}| |\hat{b}| \sin(\hat{a}, \hat{b}) \quad (10)$$

je intenzitet brojno jednako površini paralelograma desnošnog zavrtanja obrazujući \hat{b} , a smjer mu se određuje pravilom zavrtanja (SL. 9.). Vektorski projektovani paralelogram konstrukcione nad \hat{a} i \hat{b} kao stranica. Ovaj vektor je normalan na ravnanju



i za desni koordinatni sistem (SL. 11.).

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1; \quad x_0 \cdot y_0 = x_0 \cdot z_0 = y_0 \cdot z_0 = 0 \quad (15)$$

Pravouglji koordinatni sistem definisan je sa tri normale orta x_0, y_0 i z_0 . Orotvi x_0, y_0 i z_0 zadržavaju sele-dege relativne.

4. Vektori u pravouglom (Dekartovom) koordinatnom sistemu

i neglasiti da vektorsko množenje nije asocijativna operacija,

$$\hat{a} \times (\hat{b} \times \hat{c}) = \hat{b}(\hat{a} \cdot \hat{c}) - \hat{c}(\hat{a} \cdot \hat{b}) \quad (14)$$

od interesa je navesti obrázac za dovrstku vektorsko množenje:

$$\hat{a} \times (\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a} \times \hat{b} + \hat{a} \times \hat{c} \quad (13)$$

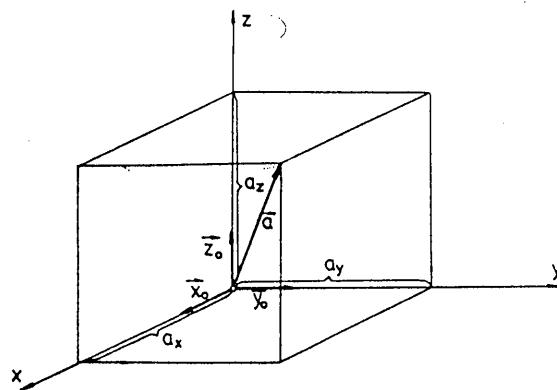
$$\hat{a} \times (\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a} \times \hat{b} + \hat{a} \times \hat{c}$$

Janje, tj.

vektorsko množenje je distributivna operacija u odnosu na sabi-

$$\hat{b} \times \hat{a} = -\hat{a} \times \hat{b} \quad (12)$$

$$\hat{b} \times \hat{a} = -\hat{a} \times \hat{b}$$



Sl. 12

Preko svojih projekcija vektor \vec{a} se može napisati u obliku

$$\vec{a} = a_x \vec{x}_0 + a_y \vec{y}_0 + a_z \vec{z}_0 \quad (18)$$

Što je jasno na osnovu slike 12. i pravila o paralelopipedu vektora. Njegov intenzitet je

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (19)$$

Ukoliko imamo dva vektora \vec{a} i \vec{b} koji izraženi preko svojih projekcija imaju oblik:

$$\vec{a} = a_x \vec{x}_0 + a_y \vec{y}_0 + a_z \vec{z}_0; \vec{b} = b_x \vec{x}_0 + b_y \vec{y}_0 + b_z \vec{z}_0 \quad (20)$$

onda se skalarni proizvod, na osnovu (15) može napisati u obliku

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (21)$$

Vektorski proizvod $(\vec{a} \times \vec{b})$ se zadaje u obliku determinante:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{y}_0 \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{z}_0 \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{x}_0 + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{y}_0 + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{z}_0 \quad (22) \end{aligned}$$

Od značaja je pomenuti i mešoviti proizvod tri vektora:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{x}_0 + a_y \vec{y}_0 + a_z \vec{z}_0; \vec{b} = b_x \vec{x}_0 + b_y \vec{y}_0 + b_z \vec{z}_0; \\ \vec{c} &= c_x \vec{x}_0 + c_y \vec{y}_0 + c_z \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Ovaj proizvod je skalarna veličina i definiše se kao:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (23)$$

Na osnovu definicije (23) očigledno je da je u mešovitom proizvodu dozvoljena ciklična permutacija vektora, tj.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (24)$$

Geometrijski, mešoviti proizvod predstavlja zapreminu paralelopiped-a konstruisanog nad \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} kao ivicama. Otuda je uslov koplanarnosti tri vektora (uslov da tri vektora leže u istoj ravni) izražen sa:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \quad (25)$$

5. Radijus-vektor i njegova promena u vremenu

Koordinate tačke M u desnom, pravouglom, Dekartovom koordinatnom sistemu obeležićemo sa x, y i z. Zadavanjem ove tri skalarne veličine potpuno je određen položaj tačke M u prostoru. Položaj tačke M može se odrediti zadavanjem samo jedn vektorske veličine. Ta vektorska veličina naziva se radijus-vektorom. Radijus-vektor je vezani vektor čiji se početak nalazi u koordinatnom početku i kraj u tački M. Na osnovu ove definicije potpuno je jasno da su koordinate tačke M projekcije radijus-vektora na koordinatne ose, pa se radijus-vektor može pisati u obliku:

$$\vec{r} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0 \quad (26)$$

Ukoliko se tačka M kreće, njene koordinate su funkcije vremena

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t) \quad (27)$$

Ove tri skalarne jednačine su parametarske jednačine krive

$$(31) \quad = \frac{dx}{dt} \dot{x}_0 + \frac{dy}{dt} \dot{y}_0 + \frac{dz}{dt} \dot{z}_0$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{x}_0 \frac{d^2x}{dt^2} + \dot{y}_0 \frac{d^2y}{dt^2} + \dot{z}_0 \frac{d^2z}{dt^2}$$

Ubrzane se definise kao izvod brzine po vremenu, tj.:

Znaci da brzina definisemo kao izvod radijus-vektora po vremenu.

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 \frac{dx}{dt} + \dot{y}_0 \frac{dy}{dt} + \dot{z}_0 \frac{dz}{dt} = \dot{x}_0 \dot{x}_0 + \dot{y}_0 \dot{y}_0 + \dot{z}_0 \dot{z}_0 \quad (32)$$

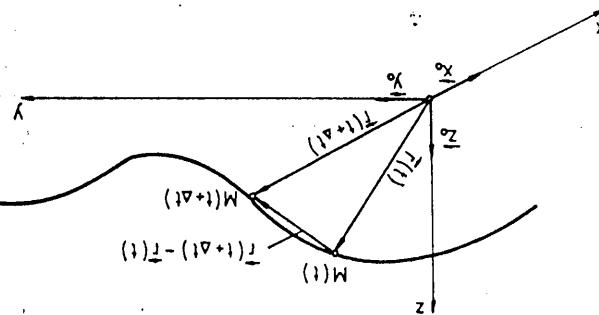
zulat differentijalne je vektor brzine, tj.:

sto se sve tri njegove komponente differentijira po vremenu. Re-

da po vremenu: radijus-vektor se differentijira po vremenu tako

Dobijeni rezultat daje nam pravilo differentijiranja radijus-vektora

Sl. 14



$$(29) \quad = \dot{x}_0 \frac{dx}{dt} + \dot{y}_0 \frac{dy}{dt} + \dot{z}_0 \frac{dz}{dt}$$

$$+ \dot{y}_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \dot{z}_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t)}{\Delta t} = \dot{x}_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

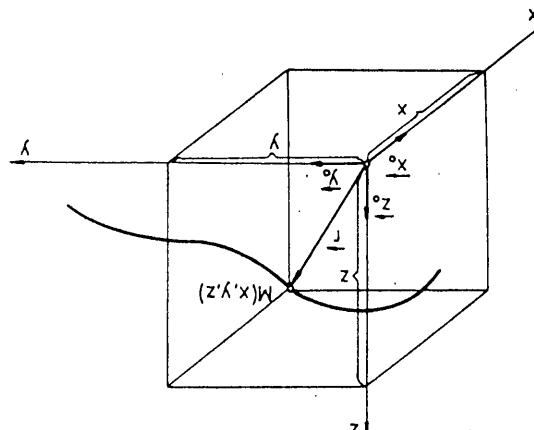
Po definiciji izvoda mozemo pisati:

je dat sa $\dot{x}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)x_0 + y(t + \Delta t)y_0 + z(t + \Delta t)z_0$ (sl. 14). Odgovarajući radijus-vektor $x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)$ i $\dot{x}(t + \Delta t)$ su staju $x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)$. To isteku neko gnutje radijus-vektora $\dot{x}(t) = x(t)\dot{x}_0 + y(t)\dot{y}_0 + z(t)\dot{z}_0$. To trentku takao M ista koordinatne $x(t), y(t), z(t)$ i $\dot{x}(t)$ i radijus-vektor od opsteg pravila za nalaže se izvoda funkcija. U trentku takao M ista koordinatne $x(t), y(t), z(t)$ i radijus-vektor polazeci skalarnom parametru t. Ovo pitanje smo analizirati polazeci nekom putanjom o mogunosti differenceiranja radijus-vektora po vremenu. Jednacina (28) da je nam zavisnost vektorske veličine definise putanju takoe u prostoru.

$$(28) \quad \dot{x}(t) = x(t)\dot{x}_0 + y(t)\dot{y}_0 + z(t)\dot{z}_0$$

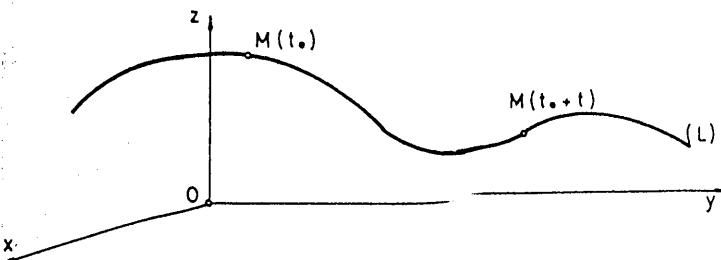
na (27), to moze da radijus-vektor vanje radijus-vektora ekvivalentno zadavanju skalarnih jednacii.

Sl. 13



Istije sa sljice 13. po kojoj se kreće takao M. Posto je zada-

Na kraju možemo dati obrazac za izračunavanje dužine puta koji za neko vreme t predje tačka M .



Sl. 15

Sa slike 15. se vidi da je predjeni put za vreme t , geometrijski posmatrano, luk krive (L) izmedju tačaka $M(t_0)$ i $M(t_0 + t)$, pa možemo pisati da je put:

$$s_{M(t_0), M(t_0+t)} = \int_{M(t_0)}^{M(t_0+t)} ds$$

Diferencijal luka dat je sa:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 dt^2 + \dot{y}^2 dt^2 + \dot{z}^2 dt^2} \\ &= dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}; \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}; \dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} \quad (32)$$

pa je predjeni put:

$$\begin{aligned} s_{M(t_0), M(t_0+t)} &= \int_{t_0}^{t_0+t} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} = \\ &= \int_{t_0}^{t_0+t} dt |\vec{v}(t)| \quad (33) \end{aligned}$$

M E H A N I K A

U V O D

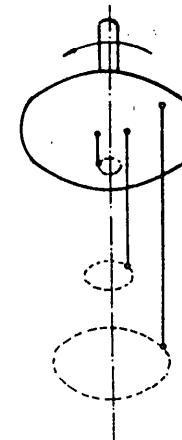
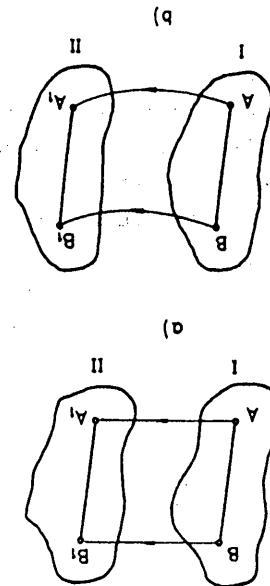
Mehanika izučava najjednostavnije oblike kretanja materije, koji se svode na pomeranja tela u prostoru i na njihova medjudejstva. Ova kretanja su najpristupačnija svakodnevnom iskustvu, te nam se zato zakoni mehanike čine jednostavnim i logičnim daleko više nego na primer zakoni kvantne mehanike, koji opisuju pojave koje ne možemo da doživimo svojim čulima. Da bismo izučavali kretanje tela treba da definišemo u odnosu na šta se tela kreću, odnosno da izaberemo referentni sistem. Izbor referentnog sistema nije jednostavan, jer ni jedno telo u svemiru ne miruje, te apsolutno nepokretan koordinatni sistem ne postoji. Zbog toga su sva kretanja relativna. Dugo vremena se smatralo da je vasporna ispunjena hipotetičnom supstancom nazvanom "etar", koja prenosi elektromagnetske talase i koja apsolutno miruje. Eksperimentalno otkriće, da se postojanje ovakve supstance ne može registrovati, dovelo je do preformulacije cele klasične mehanike. Za praktične račune uvek se može izabrati neki pogodan referentni sistem, koji u zavisnosti od vrste problema mogu činiti zidovi laboratorije, površina Zemlje ili pak određeni sistem zvezda.

U velikom broju mehaničkih problema se dimenzije tela mogu zanemariti u uslovima datog problema čime se dobijaju znatno uprošćena matematička rešenja problema. U svim ovakvim slučajevima se govori o kretanju "materijalne tačke" (tela sa konačnom masom i zanemarljivom zapreminom), koja ima sledeća svojstva: može se kretati, odnosno menjati svoj položaj u prostoru i vremenu, sadrži neku količinu materije i podvrgnuta je uzajamnom dejstvu sa okolinom.

obrtanja.

slacijske sve takake tela imaju jednake brzine, razmernie rastojanja od ose rotacionog i rotacionog kretanja postoji bitna razlika. Kod translatornog, koga se naziva osa rotacije (sl. 2). Izmedju translatornog i rotacionog kretanja osi rotacije (sl. 2). Izmedju translatornog i rotacionog kretanja osi rotacije (sl. 2). Razlike u translatornom, koga se naziva osa rotacije (sl. 2). Razlike u translatornom, koga se naziva osa rotacije (sl. 2). Razlike u translatornom, koga se naziva osa rotacije (sl. 2).

sl. 1. sl. 2.



svaka kretanje objektu vrstog tela moze se smatrati kao komponentu rotacione i translacione kretanje. Prema objektu strazivana mehanička se deli na:
- mehaničku materijalne takke
- mehaničku vrsnih tel
- mehaničku kontinuuma, koga obuhvata:
teorijsku elastičnost i mehaničku fluida.
S obzirom na vrstu analize sistema mehaničku još de-
striku kinematičku, koga proučava zakone kretanja bez obzira na sile koje one prouzrokuju;
dinamiku, koga proučava zavisnosti između sila i kretanja koga
su ta kretanja prouzrokovala;

kinematičku, koga proučava zakone kretanja bez obzira na sile koje su ta kretanja prouzrokuju;

statiku, koga proučava uslove ravnoteže tela pod dejstvom više

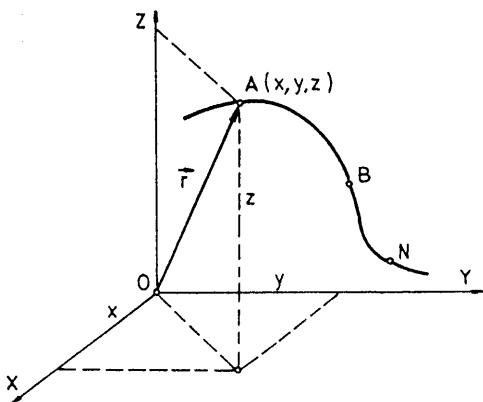
akto po križnim linijama onda je križolinijska (sl. 1.b). Le po pravim linijama translaciona je pravolinijska (sl. 1.a). da je ostala sama sebi paralelna. Ako su se takake AB prešla u položaj A₁B₁, tako da je nešegova pravljina prava AB prešla u položaj III, o- svaka prava ili ravnanje telo ostaje sama sebi paralelna (sl. 1.). Ako se na pravim telo iz položaja I premesti u položaj III, o- translatornim kretanjem podrazumevamo takvo kretanje kod kojeg binačija dva osnovna vidu kretanja, translacione i rotacione. Pod translacionim kretanjem podrazumevamo takvo kretanje kada kretanje svakog objekta vrstog tela ostaje isti u vremenu (sl. 1.).

I KINEMATIKA

1. OSNOVNI POJMOWI KINEMATIKE

a. Putanja, put i brzina

Kada se neko telo kreće, ono menja svoj položaj, pa se može reći da je kretanje relativna promena položaja prema kolini, odnosno prema referentnom sistemu. Linija koja spaja sve tačke u prostoru kroz koje prolazi materijalna tačka N pri kretanju, naziva se putanja ili trajektorija (sl. 1.1). Putanja

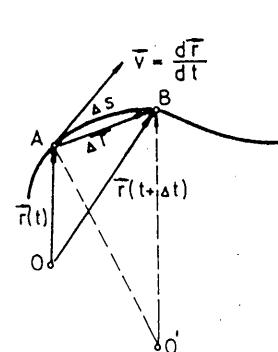


Sl. 1.1

može biti prava ili kriva linija, te kretanje prema obliku putanja može biti pravolinijsko i krivolinijsko. Deo putanje, na primer od tačke A do tačke B (sl. 1.1), koji materijalna tačka pređe u određenom vremenskom intervalu, naziva se put. Ako u svakom trenutku vremena može odrediti položaj materijalne

tačke moguće je postaviti zavisnost izmedju predjenog puta i proteklog vremena. Ta zavisnost predstavlja funkciju vremena $s = s(t)$ i zove se zakon puta. Znači, da bi se u svakom trenutku odredio položaj materijalne tačke na putanji potrebno je znati: putanju (trajektoriju) i zakon puta. Položaj tačke A u odnosu na koordinatni početak 0 može se odrediti pomoću koordinata x, y i z ili pomoću radijus-vektora (vektor položaja) $\vec{r}(OA = \vec{r})$. Radijus-vektor jedne tačke (\vec{r}) naziva se vektor povučen iz koordinatnog početka u datu tačku (sl. 1.1) i on jednoznačno određuje položaj te tačke u prostoru. Radijus-vektor \vec{r} pri kretanju materijalne tačke, uopšteno govoreći, menja se i po intenzitetu i po pravcu.

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke po proizvoljnoj putanji (sl. 1.2). Neka se materijalna tačka u trenutku t



našla u položaju A, koji je određen vektorom položaja \vec{r} . Posle elementarnog vremenskog intervala Δt materijalna tačka prešla je elementarni put Δs (tačka B), a vektor položaja \vec{r} dobio je elementarni priraštaj $\Delta \vec{r}$. Modul i pravac vektora $\Delta \vec{r}/\Delta t$, uopšte govoreći, зависи od vremenskog intervala Δt . Smanjivanjem vremenskog intervala Δt smanjivaće se i Δs i $\Delta \vec{r}$. Kad Δt teži nuli, vektor $\Delta \vec{r}/\Delta t$ se praktično ne menja po veličini i po pravcu i teži nekoj graničnoj vrednosti, koja se obeležava sa $\dot{\vec{r}}$ i naziva se brzinom pokretne materijalne tačke u trenutku t, tj.

$$\dot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Sa slike 1.2. sledi da je vektor priraštaja $\Delta \vec{r}$ jednak razlici radijus-vektora koji određuju položaj materijalne tačke u trenutku t i $t + \Delta t$.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\frac{d}{dt} (ab) = \frac{da}{dt} b + a \frac{db}{dt}$$

* Na oenou opeteg privatla diferencticu putz u skala na a(t) i vektoru b(t)

Puta i vremenu, ili brzina je prvi izvod puta po vremenu. Ra-
ti. Intenzitet ili brzine je odredjen din diferencajim koliznikom

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1.3)$$

Tada izraz za brzinu moze da se predstavi u obliku

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ odnosno } \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

tican sa modulom $|r|$, te se moze napisati
Elementarni put as (sl. 1.2) razlicit je, u opstem slucaju, od
modula elementarnog privrastaja $|r|$. Kad $\Delta t \rightarrow 0$, onda je as iden-

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} (r \frac{dr}{dt}) = \frac{d}{dt} r^2 \frac{dr}{dt} + r \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} \quad (1.2)$$

kratnja po vremenu dobija se izraz za brzinu u obliku
nichnog orta, kao prema relaciji (1), $\dot{r} = |\dot{r}|$, nakon differen-
zialnog privozvoljno. Ako se vektor polozaja izrazil preko jedini-
(1.1). Zbog toga pri opisivanju kratnja centar O moze biti
u tacku O, \dot{r} se ne menjaj se ni granicna vrednost
ke A i B ne zavisi od izbora centra O. Ako se centar premesiti
Sa sljede 1.2. Vizimo da vektor \dot{r} za fiksirane tac-

usmeren je u pravcu kratnja matricijane tace. Vektor \dot{r} ima pravac tangente na putanju i-
vektora po vremenu. Vektor \dot{r} je prvi izvod radijusa-
polozaja i vremenu, ili trenutna brzina je prvi izvod promene vektora
dijena diferencajim koliznikom infinitesimalne promene vektora
i, pri vektorskom opisivanju kratnja trenutna brzina je odre-

$$\dot{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (1.1)$$

Zametom \dot{r} u poslednjem izraz za dobijamo prema (29) da je

trajnslatorno pomeri na zadnjeku posetak sa vektorom brzine slujeci razliku po vremenu i pravcu. Ako se vektor brzine na at u polozaju B sa brzinom \dot{v}_1 . Brzine \dot{v}_1 se u opstem terijala taka bila u polozaju A sa brzinom \dot{v}_2 , a nakon vreme- proizvoljno krovinskoj putanji (sl. 1.3) u trenutku t ma- slijean nadjin kao i prvi delefijenoj taki putanji. Neka je na tji. ubrzanje u jednom odredjenosti taki putanje, postupa se na intervalu. Medjutim, ako je potrebito odrediti trenutno ubrzanje, i odredjuje promenu stanja kretanja samo u odredjenom vremenskom intervalu. Kao i u jednom odredjenosti trenutno ubrzanje, kao sto se iz (1.5) videti srednje ubrzana vektorska velicina.

$$\dot{v}_{sr} = \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.5)$$

zove srednje ubrzanje pokretne materijalne tace, tj. onda se promena brzine $\dot{v}_2 - \dot{v}_1$ u vremenskom intervalu Δt - \dot{v}_1 ubrzane taka u trenutku t_1 , a u trenutku t_2 bila \dot{v}_2 , tera kretanja je ubrzanje izli akceleracija. Ako je brzina mate- jedna od velicina koja doprinosi odredjivanju karakteristike ubrzanja

b. ubrzanje

mota prakticno zanemariti. Jedinicza za brzinu je [m/s]. pri mazim intervalima vremena obicano zanemarjivo malo, te se vogn kretanja. Ostupanje srednje brzine od trenutne brzine je kretaju presto isti put as za isto vreme at kao kod promenljiv- srednja brzina je stala brzina kojom bi telo pri jednolikom

$$\dot{v}_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.4)$$

zivu v_{sr} u datom intervalu vremenu, tj. nejednakje intervale puta as. Tada odnos $\Delta s/\Delta t$ da je srednja kretanje prece, razlicite vrednosti u raznim tacakama putanje ako se telo imace, razlicite vrednosti u raznim tacakama putanje ako se teli, prelazi jednake intervale puta as. Medjutim, taj koliznik \dot{s}/\dot{t} da je te- as/ata u svakoj taki putanje biti s:alan (konstantan) ako se te- lo kreće jednoliko, tj. ako u jednaku intervalu vremena at prelazi jednake intervale puta as. Medjutim, taj koliznik \dot{s}/\dot{t} da je te- zumjivo je da je brojna vrednost (intenzitet) brzine, tj. odnos

\vec{v} dobije se vektor priraštaja $\Delta\vec{v}$. Vektor $\Delta\vec{v}$ ima drugi pravac i smer u odnosu na brzinu \vec{v} i usmeren je ka konkavnoj strani krivine. Prema izrazu (1.5) srednje ubrzanje je

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

a pravac \vec{a}_{sr} se poklapa sa pravcem vektora $\Delta\vec{v}$. Srednje ubrzanje \vec{a}_{sr} se u opštem slučaju razlikuje

Sl. 1.3

od trenutnog ubrzanja \vec{a} u tački A i po pravcu i intenzitetu. Razlika će biti manja ukoliko je vremenski interval Δt manji. Može se zaključiti da će srednje ubrzanje \vec{a}_{sr} dostići vrednost trenutnog ubrzanja \vec{a} u graničnom slučaju kada rastojanje AB=0, odnosno vremenski interval $\Delta t \rightarrow 0$. Vektor \vec{a} je u tom slučaju granična vrednost vektora \vec{a}_{sr} ,

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.6)$$

tj. ubrzanje je diferencijalni količnik brzine i vremena. Vektor \vec{a} je usmeren ka centru krivine trajektorije. Kako su u slučaju pravolinijskog kretanja \vec{a} i \vec{v} uvek istog pravca, to se izraz (1.6) može napisati u skalarном obliku,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (1.7)$$

tj. ubrzanje je prvi izvod brzine po vremenu, ili drugi izvod puta po vremenu. Jedinica za ubrzanje je $[m/s^2]$. U praksi se retko koristi pojmom srednjeg ubrzanja. Zato ubuduće pod pojmom ubrzanja treba uvek podrazumevati trenutno ubrzanje.

Ako se vektor \vec{v} prema (1) napiše kao $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{v}_0$, tada se prema (1.6) ubrzanje \vec{a} može predstaviti kao

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (|\vec{v}| \vec{v}_0) = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{v}_0 + \frac{d\vec{v}_0}{dt} |\vec{v}| \quad (1.8)$$

Ubrzanje može biti pozitivno i negativno. Negativno ubrzanje naziva se usporenje.

2. PRAVOLINIJSKO KRETANJE

Kretanje kod kojeg je putanja prava linija naziva se pravolinijsko. Ako se koordinatni početak O nalazi na putanji (sl. 2.1) onda ort \vec{r}_0 bilo koje tačke na putanji ne menja prava

Tada se ovo kretanje može matematički definisati uslovom

$$\vec{r}_0 = \text{const.} \quad (2.1)$$

Zamenom uslova $\vec{r}_0 = \text{const.}$ u jednacnu (1.2) dobija se

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{r}_0 \quad (2.2)$$

Kako je $|d\vec{r}| \equiv ds$, to je intenzitet brzine kod pravolinijskog kretanja dat kao

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2.3)$$

Kod pravolinijskog kretanja vektor brzine ima pravac duž putanje.

Istim postupkom prema (1.6) i (2.2) dobija se izraz za ubrzanje kod pravolinijskog kretanja

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{|d\vec{r}|}{dt} \vec{r}_0 \right] = \frac{|d^2\vec{r}|}{dt^2} \vec{r}_0 = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{r}_0 \quad (2.4)$$

odnosno, za intenzitet

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (2.5)$$

3. UNIFORMNO (RAVNOMERNO) KRETANJE

Ako se materijalna tačka kreće po pravoj putanji, tako da u jednakim vremenskim intervalima prelazi jendake puteve, kretanje se zove "uniformno". Kod uniformnog kretanja brzina je konstantna, tj. nema priraštaja brzine u jedinici vremena, pa je ubrzanje prema (1.7) jednako nuli. Ovaj uslov može se napi-

Ako se materijala taka krece po putanji taka da u jednaku se zove promenljivo. Promenljivo kretanje moze biti ubrzano ili usporeno, vec prema tome da li intenzitet brzine pokretnog materijala ne rasporedi, već rasporedi kretanje u vremenskim razdobljima.

Uzimajući da je u početnom trenutku kretanja ($t_0 = 0$) pokretna materijala taka imala početnu brzinu v_0 , a na kraju vremena skog intervala i brzina v , sledi prema (4.1)

$$dv = a dt$$

stavimo, $a = \text{const.}$, pa je prema (4.6) se jednako ubrzano kretanje (staviti iznos - ubranje je konstantno).

$$\int dv = \int a dt$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$(4.2)$$

odnosno, nakon integracije dobija se

$$\int v_0 \frac{dt}{t} = \int a dt$$

matеријala da je u početnom trenutku kretanja ($t_0 = 0$) pokretna skog intervala i brzina v , sledi prema (4.1)

$$v = v_0 + a t$$

$$(4.3)$$

gdje se znak "+" odnosi na jednako ubrzano, a znak "-" na jednako usporjeno kretanje.

Kod pravolinijskog kretanja v , v_0 je su istog pravca, a suprotnog smere kretanje je jednako uspojeno. Brzina v istog pravca i smera kretanje je jednako ubrzano, a ca i kolinarni su sa putem, kada su vektor ubranja i vektor brzine v istog pravca, a suprotnog smere kretanje je jednako ubrzano, a

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$(4.3)$$

izraz (4.2) se može napisati u skalarном obliku

Na osnovu kolinearnosti vektora v , v_0 i a sa putem ako su istog pravca, a suprotnog smere kretanje je jednako uspojeno. Brzina v istog pravca i smera kretanje je jednako ubrzano, a

$$v = v_0 + a t$$

$$(4.2)$$

odnosno, nakon integracije dobija se

$$\int v_0 \frac{dt}{t} = \int a dt$$

nakon integracije dobija se

$$v = v_0 + a t$$

$$(4.1)$$

do t da $v = \text{const.}$ je predejeli put u početnom trenutku vremena ($t_0 = 0$) ukoliko je kretanje vrši u vremenskom intervalu od $t_0 = 0$ do t sa $v = \text{const.}$

Uzimajući da se kretanje vrši u vremenskom intervalu od $t_0 = 0$ do t sa $v = \text{const.}$, posam rednje brzine (2.2) je $ds = v \cdot dt$.

Kod ovog kretanja se, očigledno, posam rednje brzine izjednačujuće sa početne brzine. Prema obrascu (2.2) je $ds = v \cdot dt$.

4. JEDNAKO UBRAZANO KRETANJE

put kod uniformnog kretanja može predstaviti u sljedeći način (grafirana površina).

SL. 3.1



(izvornom) kretanje predstavljene su na slici 3.1. Sa grafikom jednacine (3.1) i (3.3) kojima se opisuje uniformno kretanje (3.3) odredjuje zakon puta uniformnog pravolinijskog kretanja.

Predejeli put jednako je pravzadu brzine i vremena. Jednaci-

$$s = v \cdot t$$

$$(3.3)$$

$$\int v dt = \int s ds$$

$$t_0 = 0 \quad s_0 = 0$$

$$(3.2)$$

ukoliko $s_0 = 0$, dobija se

do t da $v = \text{const.}$ je predejeli put u početnom trenutku vremena ($t_0 = 0$) ukoliko je kretanje vrši u vremenskom intervalu od $t_0 = 0$ do t sa $v = \text{const.}$

$$v = \text{const.}, \quad a = 0$$

$$(3.1)$$

Srednja brzina jednako ubrzanog kretanja u nekom intervalu vremena data je aritmetičkom sredinom početne (v_0) i krajnje brzine (v)

$$v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (4.4)$$

Srednja brzina odgovara stalnoj brzini kojom telo predje isti put za isto vreme, ako se pri tome kreće uniformno.

Iz izraza (2.3) i (4.3) sledi da je

$$ds = v_0 dt + a \cdot t dt$$

odnosno,

$$\int_{s_0}^s ds = v_0 \int_{t_0=0}^t dt + a \int_{t_0=0}^t t dt$$

pošto su a i v_0 konstante. Nakon integraljenja dobija se obrazac za put kod jednako ubrzanog kretanja,

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \quad (4.5)$$

gde je s_0 put u početnom trenutku vremena $t_0 = 0$. Ako je $s_0 = 0$ tada je

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \quad (4.6)$$

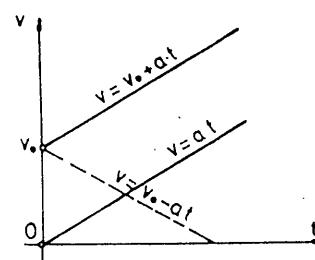
Rešavanjem jednačine (4.3) po t i zamenom u jednačinu (4.6) dobića se

$$v^2 = v_0^2 \pm 2as \quad (4.7)$$

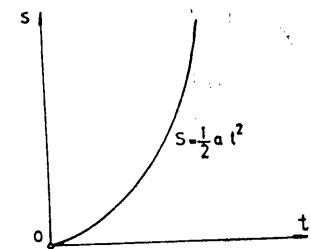
U praksi je čest slučaj da materialna tačka kreće iz stanja mirovanja ($v_0 = 0$), tada jednačine (4.3), (4.6) i (4.7) imaju oblik

$$v = at; \quad s = \frac{at^2}{2}; \quad v = 2as \quad (4.8)$$

Na slici 4.1. i 4.2. grafički su prikazane zakonitosti date jednačinama (4.3) i (4.8).



Sl. 4.1



Sl. 4.2

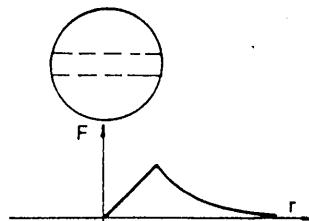
5. PRIMERI UBRZANOG KRETANJA

5.1. Slobodno padanje

Najpoznatiji i najčešće sretani primer kretanja sa konstantnim ubrzanjem je slobodno padanje. Pod slobodnim padanjem podrazumeva se padanje tela bez početne brzine u polju sile Zemljine teže sa izvesne visine H . Kako je ubrzanje Zemljine teže g konstantno (na malim visinama iznad Zemlje), a putanja prava linija, sledi da je slobodno padanje pravolinijsko jednako ubrzano kretanje.

Na sva tela koja slobodno padaju deluje konstantna sila - sila gravitacije*. Kako je gravitaciona sila proporcionalna

* Strogo uezvši ta sila nije konstantna. Ako bi Zemlja bila homogena i ako bi se kroz njen centar mogao probušiti tunel onda bi gravitaciona sila, koja bi dejstvovala na jednu česticu (tj. njena težinu), menjala kao što pokazuje slika. Maksimum u se načinio na Zemljinoj površini i sila bi linearno opadala ka nuli ako bismo se približavali centru i opadala kao $1/r^2$ prema nuli ako bismo se udaljavali od Zemlje ka beskonačnosti.





5.2. Hidrac

nu iz vistina padanja.

$$v = \sqrt{2gh}$$

SL. 5.1 Eliminacija vremena t iz jednacina (5.1)

$$v = gt; h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.1)$$

iz (4.5) se dobija
 $v_0 = 0, s_0 = 0, a = g \text{ i } s = H, \text{ to iz (4.3)}$

Kako je, po pretpostavci,
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
 isto ubrzanje
 padaju istom brzinom i da sva tela
 jemo da u bezvazdušnom prostoru sva tela
 padaju jednako brzinom. Iz togaključu
 vazduch, zapazimo da u njiju tada sva tela
 tali su kugličicu stavimo u staklenu cev (sl.
 5.1.b). (Njutnov ogleđ) iz koje je izvučen
 istim brzinama (sl. 5.1.a). Ako prece i me-
 otpora vazduha razlikoti, jer zbrog delovanja
 nje bilo lako uočiti, jer zbrog delovanja
 svata teža. Ovu naoko očiglednu činjenicu

onačina masi tela, to će i uzimanje biti konstantno i jednako za
 svata teža. Isto tako očigledno je gravitacione silne i nadmorske vrste.

"zbog jednake gravitacione i inertione mase (vidi 22.4).

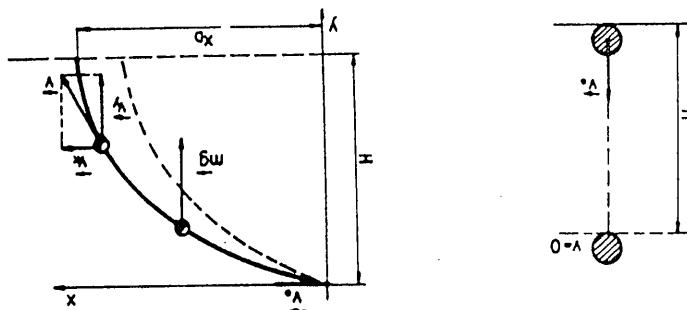
Izkušnja: vertikalni, horizontalni i kos hitac.

Koji je učinak u odnosu na površinu Zemlje telo izbačeno, raz-
 da u toku kretanja teža ne postoji slika trenutka i da se kretanje
 u polju sile Zemljine teže, naziva se hitac. Pređepostavljaju se
 u polju sile Zemljine teže, kije je izbačeno pod uticajom vrlo
 malog gravitacionog uticaja.

Gravitacione vrste je sastavni dio geografske fizike i nadmorske vrste.

SL. 5.3
 brzina posle vremena t nakon izbacivanja tela su
 kako se ovde radi o jenuako usporenici kretanja, pređeni put i

SL. 5.2



a. Vertikalni hitac. Kod vertikalnog hitca tela se izbacuje u vise
 pod uticajom brzином v_0 (SL. 5.2).

- uniformnog kretanja duž x-ose (horizontalna komponenta),
- jednakoubrzanog kretanja (slobodnog padanja) duž y-ose (vertikalna komponenta).

Odgovarajuće jednačine za predjeni put su

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (5.7)$$

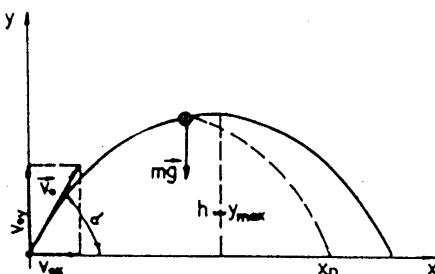
Ako se iz jednačina (5.7) elimiše vreme t dobija se jednačina putanje

$$y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2 \quad (5.8)$$

Ako je telo izbačeno u pravcu horizonta sa visine H (sl. 5.3), može se izračunati njegov domet x_D uvrštavanjem u jednačinu (5.8). $y = H$ i $x = x_D$, pa se dobija

$$x_D = \sqrt{2 v_0^2 H / g} \quad (5.9)$$

c. Kos hitac. Kosim hicem naziva se kretanje tela koje je izbačeno početnom brzinom \vec{v}_0 pod oštrim uglom α u odnosu na horizont u polju Zemljine teže. Ovo složeno kretanje, čija putanja leži u jednoj ravni, može se rastaviti na uniformno pravolinjsko kretanje duž x-ose i na jednakousporeno kretanje duž y-ose (sl. 5.4).



Sl. 5.4

Komponente početne brzine su

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad \text{i} \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha \quad (5.10)$$

a komponente brzine u trenutku t

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt \quad (5.11)$$

Za vreme t telo duž x i y-ose prelazi put

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (5.12)$$

Ako se iz jednačina (5.12) elimiše vreme t dobija se jednačina putanje kod kosog hica

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (5.13)$$

Domet tela x_D dobija se uvrštavanjem $y = 0$ u jednačinu (5.13). Rešenje dobijene kvadratne jednačine, koje je različito od nule, daje traženu vrednost dometa

$$x_D = \frac{v_0^2 \tan^2 \alpha}{g} \quad (5.14)$$

Maksimalna visina koju telo dostigne (teme parabole) nalazi se iz uslova $dy/dx = 0$

$$h = y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (5.15)$$

Realno, u slučajevima hica, sila trenja vazduha postoji. Posledica dejstva ove sile na telo u kretanju je deformacija putanje kosog i horizontalnog hica, tako da putanje više nisu parabole već tzv. balističke krive, koje su na slici 5.3. i slici 5.4. prikazane isprekidanim linijama.

M₁, tj. kada $\dot{\theta} = 0$, srednja ugao na brzina trenutnoj ugao noj
Kada se tazka M priblizava tazki

SL. 7.1

$$\omega_{sr} = \frac{dt}{d\phi}$$

vreme

kao ugao na promena za proteklo
vrijeme se srednja ugao na brzina
trenutnoj kretanji (1.4) definisanoj sa
definisanjem srednje brzine kod
 $at = t - t_0$, a vremenska promena
govara ugaona promena

trenutku t uglem ϕ , onda je od
polozaj definiisan uglem ϕ_0 , a u

odredjen lukom M_1M_0 , odnosno uglem ϕ . Ukojiko je u trenutku t_0
kruznoj putanji, onda je u svakom trenutku vremena njen polozaj
a. ugao na brzina. Ako se materijalna tazka (SL. 7.1) kreće po

se polazam ugaone brzine i ugaoone ubrzane.

Radi jednostavnije opisivanja kruzne kretanje uvoidi
ki se definise relaciju

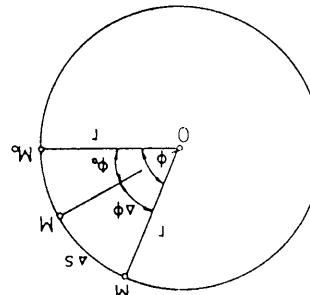
$$|\dot{\phi}| = \text{const.}$$

je od centra ka putanji. Kretanje po kruznoj putanji matematički

sa polazajem materijalne tazke na kruznoj putanji, a usmeren
se datim pomenu radijus-vektora, tj. vektoru kojim spaja centar
polozaj maternjiline tazke kod kruzne kretanje.
odnosno jendako usporeno.

Ako je ubrzanje konstantno kretanje je jendako ubrzani,
ne menjaju, kretanje se zove neravnomerno i to ubrzano ili uspo-
reno. Ako je ubrzanje konstantno kretanje je jendako ubrzani,
na ovog kretanja konstantnog intenziteta, kretanje se zove uni-
tanje. Kod ovog kretanja putanja je kružna linija. Ako je brzi-
tanjem kružno kretanje po fragmentima različitim poluprečniku kružni-

7. KRUŽNO KRETANJE



* Kod svake vektorske veličine promena pravaca snazi promenu sa me veličine.

na tangantu, odnosno na vektoru brzina u toj tazki.

$$K_1 = \frac{1}{r} \quad \text{i} \quad K_2 = \frac{1}{r}$$

SL. 6.1.

u posmatranim tazkama, njihovim poluprečnicima
i C_2 obrazuto razmene ne K_1 i K_2 kruznicu C_1 zaključiti da su kružne kružna veća. Može se njih u tazki N gde je je kružna manja, a manje većih u tazki M gde da je poluprečnik kružne tazke. Sa sljede se vi- i poklapa se sa diferenčijalno malim delom kružine ds u okolini
M i N) (SL. 6.1), naziva se kružnica koja prolazi kroz tu tazku kom kružno kretanje kod putanje materijalne tazke (za posmatrane tazke svako kružno kretanje po fragmentima različitim poluprečniku kružni-

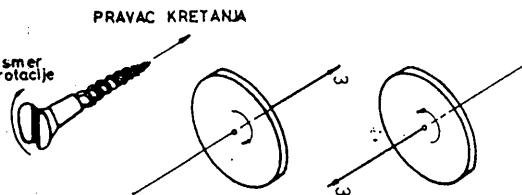
ubrzanje i onda kada se ne menjaju intenzitet brzine
na ovog kretanja, jer promena brzine po pravcu izaziva menjaju po intenzitetu i po pravcu. Svako kružno kretanje se kod pravolinjsko kretanje se ne mijenja intenzitet brzine

6. KRIVOLINJSKO KRETANJE

rzini tela u tački M_1

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \quad (7.3)$$

ugaona brzina ω je vektorska veličina, čiji je intenzitet brojno jednak ugлу za koji se telo obrne u jedinici vremena, čiji se pravac poklapa sa pravcem ose rotacije i normalan je na ravan obrtanja, a smer se određuje smerom desnog zavrtnja (sl. 7.2). Pri rotaciji brzina pojedinih tačaka je zavisna od rastojanja od ose rotacije.



Sl. 7.2

janja od ose rotacije, dok je ugaona brzina ista za sve tačke. Jedinica za ugaonu brzinu je rad/s.

Ako je materijalnoj tački potrebno vreme T (jedan period) da opiše ceo krug $\Delta\phi = 2\pi$, onda je prema (7.3) njena ugaona brzina $\omega = 2\pi/T$. Ako materijalna tačka izvrši v^* obrta u jedinici vremena (1s), onda je vreme potrebno da ona izvrši jedan obrt $T = 1/v$, pa je

$$\omega = 2\pi v \quad (7.4)$$

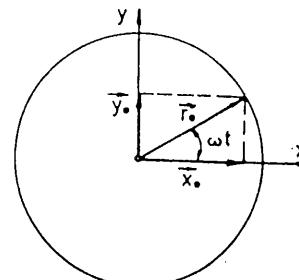
Kod kružnog kretanja koristi se kako pojam brzine v , tako i pojam ugaone brzine ω , te se radi boljeg definisanja brzina v zove

* Broj obrtaja tela po krugu u jedinici vremena, odnosno frekvencija obrtanja $v = 1/T$ izražava se u jedinicama Hz (herc).

periferna ili obimna brzina. Veza izmedju ugaone brzine (7.3) i ranije definisane periferne brzine (1.1) može se izvesti na sledeći način: kao što se vidi na slici 7.3. ort-vektor položaja, se može razložiti na komponente

$$\vec{r}_0 = (\cos \omega t) \hat{x}_0 + (\sin \omega t) \hat{y}_0 \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}_0}{dt} | \vec{v} | = \\ &= |\vec{r}| \omega (-\hat{x}_0 \sin \omega t + \hat{y}_0 \cos \omega t) \\ &= |\vec{r}| \omega \vec{v}_0 \end{aligned} \quad (7.6)$$



Sl. 7.3

Prema (1.2), (7.1) i (7.5) dobija se

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \omega^2 r^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

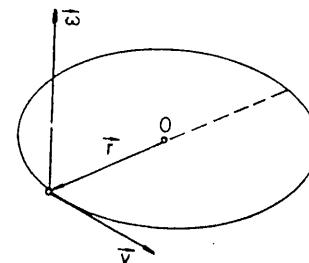
odnosno,

$$v = r\omega \quad (7.7)$$

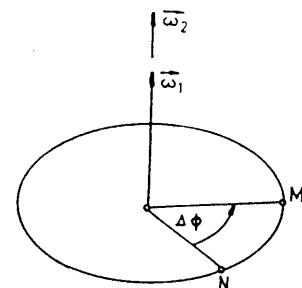
jer je $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$.

Prema jednačini (7.7), a na bazi definicije ugaone brzine može se videti (sl. 7.4) da je brzina \vec{v} vektorski proizvod ugaone brzine ω i radijus-vektora \vec{r} , tj.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.8)$$



Sl. 7.4



Sl. 7.5

a nákon integráljenja

$$\phi = \omega t$$

$$(8.2)$$

sto po analógií odgovara zakonu ravnomerne pravolinijskog

$$(8.1)$$

$$\text{preko izraza } (1.8), (8.1), (7.5) \text{ i } (7.6)$$

Ubrzanje kod ravnomerne kružnog kretanja se

$$(8.3)$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} |\dot{x}| = -|\dot{x}|^2 \frac{d}{dt} \cos \omega t + \dot{y}_0 \sin \omega t =$$

$$(8.4)$$

Iz jednačine (8.3) vidimo da je kod ravnomerne kružnog kretanja

njija ubrzanje razlikito od nule i da je usmereno ka centru rotacionom sljedajući Kad at+0 srednje ugao ubrzanje prelazi u

$$v = 2\pi vr$$

v i ugaone brzine ω . Na osnovu relacije (7.7) i (7.4) dobija se jednacina (7.7) da je vezu izmedju intenziteta periferne brzine

$$(7.9)$$

b. Ugao ubrzanje, Neka težo pri rotaciji u tački M ima ugao brzini w_1 , a u tački N ugao ubrzani w_2 (sl. 7.5). Srednje ugao no ubrzanje za vreme at, za koje težo optise ugao ϕ_0 , definise se kao promena ugaoone brzine ω po protekloim vremenom at, t₀.

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$(7.10)$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$(7.12)$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

odnosno,

8. RAVNOMERNO (UNIFORMNO) KRUŽNO KRETANJE

Pod ravnomernim kružnim kretanjem podrazumeva se kretanje teža po kružni poluprečniku r sa konstantnim intenzitetom brzine,

konstanta ($\omega = \text{const}$), što znaci da se materijalna tačka kreće po kružnoj putanji sa konstantnim brojem obrota ($N = \text{const}$).

a praviljivoj pravca. Kod ovog kretanja je i ugao na brzina ne brzine nije konstantan, tada je $\omega \neq \text{const}$. Da prema tome i $\omega \neq \text{const}$. Ako intenzitet peri-

ferenčne brzine ne je konstantan, tada je $\omega \neq \text{const}$. Uzimajući da se kretanje vrši prema izrazu (7.3) je $d\phi = \omega dt$. Uzimajući da se kretanje vrši po kružnoj putanji sa konstantnim brojem obrota ($N = \text{const}$).

$\int d\phi = \omega \int dt$

$$\begin{cases} \phi = 0 & t = 0 \\ \phi = \omega t & \end{cases}$$

ugao u periferne brzine vremena $\phi = 0$, dobija se

u vremenskom intervalu od $t_0 = 0$ do t sa $\omega = \text{const}$. I da je

prema izrazu (7.3) je $d\phi = \omega dt$. Uzimajući da se kretanje vrši

po kružnoj putanji sa konstantnim brojem obrota ($N = \text{const}$).

Konstanta ($\omega = \text{const}$), što znaci da se materijalna tačka kreće

po kružnoj putanji sa konstantnim brojem obrota ($N = \text{const}$).

težom brzine,

konstante teža po kružni poluprečniku r sa konstantnim intenzitetom brzine,

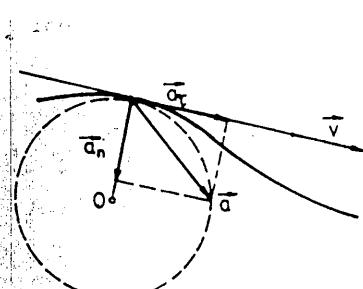
pod ravnomernim kružnim kretanjem podrazumeva se

pod ravnomernim kružnim kretanjem u tački M

trećuo ugao ubrzanje u tački M

odnosno,

što ukazuje da pored normalnog (centripetalnog) ubrzanja a_n postoji i tangencijalno ubrzanje a_τ . Ovo se može bolje razumeti ako se uoči da vektor ubrzanja \vec{a} kod krivolinijskog kretanja u opštem slučaju zaklapa neki ugao sa tangentom, odnosno vektorom



brzine u nekoj tački na putanji (sl. 9.1). Ubrzanje \vec{a} povezano je sa svojim komponentama \vec{a}_τ i \vec{a}_n sledećim relacijama

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \text{ i } a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$$

pri čemu je prema (8.4) i (9.1)

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} = -\frac{v^2}{r^2} \cdot \vec{r} \quad (9.2)$$

i

$$\vec{a}_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{v}_0 \quad (9.3)$$

Korišćenjem izraza (7.7) tangencijalno ubrzanje može se napisati i u obliku

$$a_\tau = r \frac{d\omega}{dt} \quad (9.4)$$

Kako je prema (7.11)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

to je

$$a_\tau = r\alpha \quad (9.5)$$

Ubrzanje a_τ postoji uvek pri neravnomernom kružnom kretanju, odnosno pri bilo kojem neravnomernom kretanju po krivoj liniji.

a. Jednako ubrzano kružno kretanje

Najjednostavnije ubrzano kružno kretanje je ono za koje je ugaono ubrzanje $\alpha = \text{const.}$. Po analogiji sa zakonima za jednako ubrzano pravolinijsko kretanje, obrasci (4.3), (4.5) i (4.7), dobijaju se sledeće jednačine

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{const.} & \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \phi &= \phi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} & \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha\phi \end{aligned} \quad (9.6)$$

b. Jednako usporeno kružno kretanje

Ovo kretanje ima početnu ugaonu brzinu ω_0 i negativno ubrzanje, tj. ugaono usporenje, pa su osnovne kinematičke jednačine

$$\begin{aligned} -\alpha &= \text{const.} & \omega &= \omega_0 - \alpha t \\ \phi &= \phi_0 + \omega_0 t - \frac{\alpha t^2}{2} & \omega^2 &= \omega_0^2 - 2\alpha\phi \end{aligned} \quad (9.7)$$

10. ANALOGIJA IZMEDJU PRAVOLINIJSKOG I KRUŽNOG KRETANJA

Izrazi koji su izvedeni u prethodnom tekstu ukazuju na formalnu analogiju izmedju pravolinijskog i kružnog kretanja. Preko relacija

$$\begin{array}{ll} s & \phi \\ v = \frac{ds}{dt} & \omega = \frac{d\phi}{dt} \\ a = \frac{dv}{dt} & \alpha = \frac{d\omega}{dt} \end{array}$$

može se niz izraza za pravolinijsko kretanje transformisati u izraze za kružno kretanje. Sledеća tabela daje korespondenciju

PRAVOLINIJSKO KRETANJE

$$\begin{aligned} s &= v \cdot t & \phi &= \omega t \\ v &= v_0 + at & \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} & \phi &= \phi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \\ v^2 &= v_0^2 + 2as & \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha\phi \end{aligned}$$

KRUŽNO KRETANJE

nači u odusutvu interakcije ne vazi zakonitost da je brzina tela natiči sistem vezan za automobil koji se kreće u krediti, tada la opisuje u referentnom sistemu. Na primjer, ako se kretanje teži u savojm referentnom sistemu, Natiče, ovaj zakon ne važe definicijom tзв. inercijalnih sistema. Koji je tenuo povezan sa treba shvatiti kao osnovni princip, koji je tenuo povezan sa u svemiru svu tenuu medusobnoj interakciji. Ovaj zakon rečanjem eksperimentima se ovaj zakon ne može ni provjeriti, jer se više deštava na tenuo medusobno ponosljavaju. U stvari, u nja, nisu kretanja po inerciji, već kretanja u uslovima u kojima se razlikujem eksperimentima sa tenuu medusobno ponosljavaju.

(12.3)

$F = 0$,
kako spoljne sile, tj.
uslovi (12.1) i (12.2) mogući su samo kad na tela ne deluju niti

(12.2)

$\ddot{x} = \text{const.}$ $\ddot{x} = 0$
 $m \cdot \ddot{x} = \text{const.}$
Prvi Njutnov zakon glasi: "Sakuo tenuo zadržava stanje kretanja po inerciji. Matematički izraz ovog zakona je konsantnom brzином. Beso se kaze da je ovako kretanje tenuo to stanje ne promene". Znaci, bez interakcije se tenuo kretanja ili ravnometriju pravoučinkog kretanja dok druga tela svojim dejstvom to stanje ne promeni".

12.1. Prvi Njutnov zakon, inercijalni sistemi.

nosu na brzini svetlosti).
velikom masom (u odnosu na masu atoma) i malom brzinom (u od-
i kavntne mehanike i da vazi samo u slučaju kretanja tela sa
je Njutnova mehanika samo grančini slučaj opšte relativističke
ne sile (intenzitet, pravac i smjer). Medutim, pokazalo se da
novi zakoni potpuno definisu sile i to: postojanje sile, osobi-
stavljanju temelje tзв. klasične ili Njutnovske mehanike. Njut-
novo zakon objasnjavaju zastio se tela kreću i

12. NJUTNOVI ZAKONI

* Isaac Newton (1643-1727), najveći fizik, matematičar i
astronom, a erudiciju i jedan od najvećih naučnika u istoriji znanosti.
Svojim aktivnostima posebno je očarao moderne mehaniku. Oktoto je zakon
opšte gravitacije. Izgovorenu sa Letbinom oktoto je infiltriran u ra-
čun. Newtonova aktivnost u području optike, kontinuirana učenje u fizici
dok je u svakom referentnom sistemu. Natiče, ovaj zakon ne važe definicijom tзв.
treba shvatiti kao osnovni princip, koji je tenuo povezan sa
u svemiru svu tenuu medusobnoj interakciji. Ovaj zakon
rečanjem eksperimentima se ovaj zakon ne može ni provjeriti, jer
se više deštava na tenuo medusobno ponosljavaju. U stvari, u
njija, nisu kretanja po inerciji, već kretanja u uslovima u kojima
se razlikujem eksperimentima sa tenuu medusobno ponosljavaju.

La naziva se kolizična kretanja i označava se sa $k = m \cdot \ddot{x}$.
dinica za masu je kilogram (kg). Proizvod iz mase i brzine te-
la naziva se masa. Masa je skalarna veličina, a osnova je-
ja. Veličina koja predstavlja kvantitativnu mjeru za inerciju-
tanja. To oduprije promeni stanja kretanja naziva se inerci-
razljevita tela pruzaju razlike u optoru promeni stanja svog kret-
anja, te se za njeno pomerenje mora upotrebiti vela, znaci,
emo da se govorida kugla vise optire promeni kretanja od drve-
drvenu kuglu (iste po veličini) po glatkoj podlazi konstatova-
je sile na razljevita tela. Kad na prizmer gurnemo govoridenu i
do pojma mase može se doći ako se posmatra delova-

glasiti da sile možemo prepoznati samo po njihovom delovanju.
intenzitetom, pravcem i smerom. Sile je dake vektor. Treba na-
tanjia tela bilo po veličini ili po smjeru. Sile je uzrok promene kre-
va se sile. Egzaktino, prema Njutnu, sile je uzrok promene kre-
tajom interakcije ovog tela sa drugim telima. Fizika veličina,
svaka promena stanja kretanja nekoje tela uzrokovana izvrsnim
zapravo je centralno. Pitanje odnosa sile i kretanja
njihove uzroke zove se dinamika. Pitanje odnosa sile i kretanja
kretanja izazivaju. Deo mehanike, koji je proučava i kretanja i
prostorno vremenska pojava bez obasjenja uzroka, koji je takva
u delu kinematičke posmatrana u kretanju tela kao

11. SILA I MASA, KOLIZINA KRETANJA

konstantna. Referentni sistemi u kojima važi prvi Njutnov zakon zovu se "inercijalnim referentnim sistemima". Ako je ubrzanje nekog referentnog sistema daleko manje od ubrzanja tела koje ispitujemo, tada se taj referentni sistem može smatrati približno inercijalnim. Jedan od često korišćenih inercijalnih sistema jeste heliocentrični referentni sistem čiji se početak vezuje za naše Sunce. Na osnovu prvog Njutnovog zakona se definiše i tzv. klasičan princip relativnosti. Svi su referentni sistemi, koji se u odnosu na jedan inercijalni sistem kreću konstantnom brzinom, takodje, inercijalni sistemi.

Klasičan princip relativnosti tvrdi da su svi inercijalni sistemi ekvivalentni, te da se oblik fizičkih zakona ne sme menjati ako se oni izražavaju u raznim inercijalnim sistemima. Ovaj princip se može iskazati i tvrdnjom da absolutna brzina nema smisla, jer se ni na koji način ne može izmeriti.

a.. Galilejeve transformacije koordinata i klasično slaganje brzina

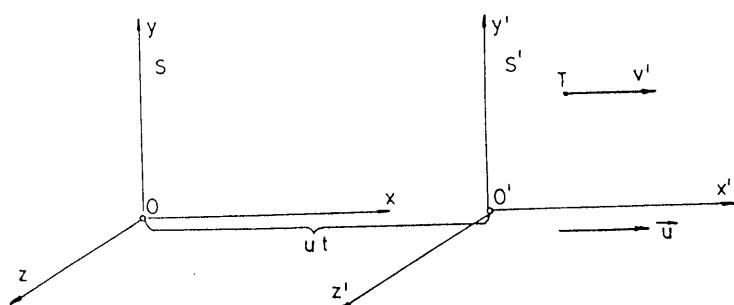
U osnovama klasične fizike leže pojmovi absolutnog prostora i absolutnog vremena. To znači da se uzima da postoji sistem koji absolutno miruje u vasioni, pri čemu se kretanje u odnosu na njega naziva absolutno kretanje. Što se tiče vremena, uzima se da za celu vasionu postoji jedno jedino vreme koje jednakost teče u svim inercijalnim sistemima.

Univerzalnost vremena označava da vreme teče apsolutno, nezavisno od sistema iz kojeg se posmatranje vrši i zasniva se na pojmu apsolutne istovetnosti. Pod apsolutnom istovremenošću se podrazumeva da ako su neka dva dogadjaja istovremena u jednom sistemu, tada su istovremena i sa gledišta posmatrača u bilo kojem drugom sistemu, tj. u celoj vasioni.

Posmatrajmo dva inercijalna sistema S i S' koji se jedan u odnosu na drugi kreću uniformno brzinom u (sl. 12.1).

Neka se telo T nalazi u odnosu na koordinatni sistem O' na mestu x' , y' i z' u trenutku t' i neka se kreće

brzinom v' u odnosu na ovaj sistem (sistem S').



Sl. 12.1

Postavlja se pitanje kako treba izračunati koordinate i brzinu ovog tela u odnosu na inercijalni sistem S ? Usvojimo merenje vremena od trenutka kada se tačke O i O' poklapaju. Prema klasičnoj mehanici izmedju koordinata i vremena koji određuju dogadjaj u jednom i u drugom sistemu postoji sledeća relacija

$$x = x' + ut; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t' \quad (12.4)$$

Ovakve transformacije, koje se vrše pri prelasku iz jednog sistema u drugi, zovu se Galilejeve transformacije. Na ovaj način izvedeno posmatranje nekog dogadjaja u odnosu na drugi sistem koji se kreće zove se Njutnova relativnost. Jednačina $t = t'$ koja izgleda u ovom slučaju izlišna ukazuje na činjenicu da u klasičnoj fizici postoji samo jedno vreme u svim sistemima referencije.

Jedna od važnih posledica Galilejevih transformacija

na putnici i voza isto, a snak "t" ukočko su suprotit.

$$f = \frac{d}{dt} (m \cdot \dot{x}) \quad (12.6)$$

va formułom

veličina $k = m \cdot \ddot{x}$, pa se drugi Newtonov zakon matematik i zaznaciti koga deluje i presti se u pravcu silce. Kolizion kretanje zove se dejstvo sile na telo. Promena kolizione kretanje tela je proporcionalna dejstvuju zakuon definise kakve posledice izaziva

telima naziva se silom.

Fizika veličina kojom se opisuje interakcija medju

ekih polja i danas predstavlja jedan od centralnih problema fizike. Nije planeta objasnilo "dejstvo na dajinu". Resenje ovisa fizickim poljima. I sam Newton je bio dugo kritikovan kada je kretanje (putem polja). Posedbu je tesko razumeti interakciju tela terakcija moze biti direktna (medjusobnim dodirom) ili indirektna (putem polja). Sva te la se nalaze u medjusobnoj interakciji. Ova in-

12.2. Drugi Newtonov zakon

voda iznositi v1 + v2 sto je u saglasnosti sa iskusstvom. Na voz, brzina putnika u odnosu na okolinu izvan se voz u odnosu na okolinu kreće brzinom v1, a putnik, ako u slučaju kada se tela kreću malim brzinama. Na primer, ako skim brzini svetlosti. Ova klasinski zakon sabiranja je dobar činila logičnom, nije primenljiv za kretanje sa brzinama blizu Kasnije smo videli da relacija (12.5), ma kolicko se

$$\Delta = v_2 + u \quad (12.5)$$

na sistem s koji mituje (sl. 12.1), iznositi brzina istog tela, na osnovu navedenog zakona (12.4) u odnosu na odnosu na sistem. Koji se kreće brzinom u odnosu na S, ja u odnosu na sistem. Nisme, ako je v, brzina te je klasinski zakuon sabiranja brzina. Nisme, ako je v, brzina te

sistem. Tada se jednačina (12.9) svodi na

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0; \vec{F} = m\vec{a}$$

što je identično sa jednačinom (12.7).

Navedimo jedan primer. Pre uzletanja, avion se kreće po pisti sa ubrzanjem od 1 m/s^2 u odnosu na Zemlju. Jedna stjuardesa, mase $m = 60 \text{ kg}$, kreće se ubrzanjem od $0,5 \text{ m/s}^2$ prema kabini pilota u odnosu na avion.

Posmatrajmo najpre avion kao referentni sistem, a Zemlju kao inercijalni sistem. Ubrzanje referentnog sistema u odnosu na inercijalni sistem iznosi $a_r = 1 \text{ m/s}^2$. Ubrzanje stjuardese u odnosu na ubrzani referentni sistem iznosi $a' = 0,5 \text{ m/s}^2$, a njeno ubrzanje u odnosu na Zemlju prema (12.8) je $a = a' + a_r = 1,5 \text{ m/s}^2$. "Realna" sila koja dejstvuje na stjuardesu (od poda aviona) iznosi $F = ma = 90 \text{ N}$, a "inercijalna" sila koja dejstvuje na nju je $-ma_r = 60 \text{ N}$. Rezultanta realne i inercijalne sile prema (12.9) jednak je proizvodu mase stjuardese i njenog ubrzanja u odnosu na avion

$$90 \text{ N} - 60 \text{ N} = 30 \text{ N} = 60 \text{ kg} \times 0,5 \text{ m/s}^2$$

Ako bi se stjuardesa posmatrala kao referentni sistem, tada bi bilo $a_r = 1,5 \text{ m/s}^2$ i $a' = 0$.

Razmotrimo i primer kretanja tela (kosmonauta) u avionu koji slobodno pada. Referentni sistem vezan za avion ima ubrzanje u odnosu na Zemlju kao inercijalni sistem $\vec{a}_r = \vec{g}$, te je "inercijalna" sila jednak $-m\vec{g}$. Na posmatrano telo (kosmonauta) u avionu deluje "realna" gravitaciona sila $\vec{F} = m\vec{g}$. Na osnovu (12.9) dobijamo

$$m\vec{g} - m\vec{g} = m\vec{a} \text{ odnosno } \vec{a} = 0$$

Posmatrano iz aviona, dato telo (kosmonaut) se ne ubrzava jačo na njega deluje stalno "realna" gravitaciona sila. Ovo telo (kosmonaut) ne deluje nikakvom silom na avion i kaže se da ovo lebdi. Ovakvo stanje tela naziva se "bestežinskim stanjem".

12.3. Treći Njutnov zakon

Treći Njutnov zakon bliže opisuje interakciju medju telima vodeći računa o oba tela koja su u interakciji.

Treći Njutnov zakon se može formulisati na sledeći način: "Svakom delovanju (akciji) postoji uvek suprotno i jednak protivdelovanje (reakcija) odnosno, delovanja dva tela jedno na drugo su jednaka i suprotnog smera". Matematički

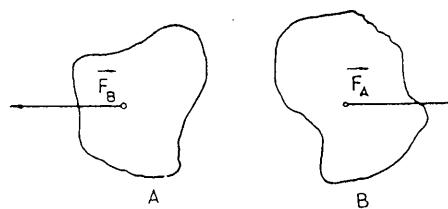
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (12.10)$$

ili prema (12.7)

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \quad (12.11)$$

Neka su ta dva tela A i B (sl. 12.2). Ako telo A deluje na telo B silom \vec{F}_A , tada i telo B deluje na telo A silom \vec{F}_B , pri čemu je

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \quad (12.12)$$



Sl. 12.2

Kvalitativno možemo ovaj zakon ilustrovati sledećim eksperimentom. Spojimo dva dinamometra kao na slici 12.3. i povucimo oba u suprotnim smerovima. Sila kojom dinamometar A vuče dinamometar B može se očitati na kazaljci dinamometra A. Na dinamometru B može se očitati sila kojom taj dinamometar vuče dinamometar A. Obe sile su jednakе. Varijanta ovog eksperimenta je na desnoj strani. Sila kojom je vučen dinamometar A jednak je (i suprotnog smera) sili kojom ekser vuče dinamometar B.

Posledice III Njutnovog zakona lako uočavamo kod interakcije tela slične mase. Tada su po jednačini (12.11)

Njutnovi zakon je mogao da se formule u fizičkoj mehanici. Upravo je njutnovi zakon sile na pravu mesto u fizici. Njutnovi zakon je mogao da se formule u fizičkoj mehanici.

U njutnovoj formulaciji II zakona mehanike, dugo vrijeme bilo je da se formule u njutnovoj formulaciji II zakona mehanike. Zavisiće od te pravine, činjenica je da tu zavisnost nismo o konstantnosti mase. Nastave, maza kao otpor promenit pravine možda ogradi od impakcije moguću zaključak.

$$F = m \cdot a$$

a ne u eksplicitnoj (i praktičnoj korisnosti) obliku

$$F = \frac{dp}{dt} (m\cdot a)$$

zakon u obliku

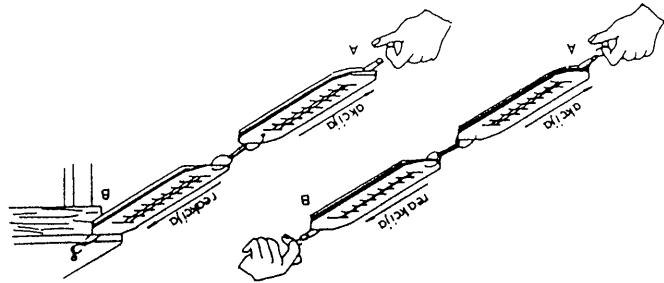
Njutn je verovatno bio svestan toga kada je formulisao svoj II jezik. Pojmu koštene materije, ali nije s njim identičan. Kao posledice opterećenja nekog tela prema promeni kretanja. Projektila i Sunca. Isto tako Njutn je uveo fizikalni pojam mase u pravati i u sporstvu tela. Njutn je pojam sile proširio na mrežu: elastična opругa, zice itd. Napeta elastična tetiva, jednako kao i maliči naše ruke, mogu izazvati promenu kretanja, mreža: da vratiti novog zanemariva na pravodu. Analognom zovet je smatran sve što se u pravodu ponosa poput dekovanih njegova tice iz nasleg devoljanja na pravodu. Pojam sile potražiti u devoljanju novog zanemariva podmornica sile i mase. To je rezultiralo ko je vazoni i naučno zanemarije tih zagona, što je rezultiralo otvorilo put mehanički i njenoj primeni u tehnologiji. No jednato, svoditi medjusobno telu na koncizne matematičke formule, na u fizici. Taj je značaj u pravu redu praktičan, jer je Njutnovi zakon sile dovoljno isticati značaj Njutnovih zagona.

13. ZNACAJ NJUTNOVIH ZAKONA U FIZICI

III. Njutnov zakon daje kaze da je tom koča deluju na konja deluju zapravo na sistem konj + Zemlja. Tom koča deluju na konja deluju zapravo na sistem konj + Zemlja. Sa Zemljom, dok koča, ako zanemariće trenje, to ništa. Sila koča je jednostavno: vrasto se upišući u tlo, konj je vrasto vezan to niže takо, jer konj pokrene koča iz mirovanja. Objasnjenje vuce koča jednaka je i suprotnog smere sili koča vuku koču. Reklo bi se dakle, da će se ove dvije sile ponistavati. No zasao konj vuce koču. Po III. Njutnovom zakonu sile kočom konj poznat je prvi pravilo prihvadajući paradosku

je, naravno, malo, pa opazamo samo odbijanje laksog tela. Ičica odskaciće od čvrste podloge. U tom slučaju ubrzanjje Zemlje veća. To je na prvoj slučaju kad odskočimo od tla ili kad kuge pučanjem iz artiljerijskog oruđa ili puške, prvi skok je čamca na obalu i sljepo.esto je, medutim, maza jednog tela zanato

SL. 12.3



merljivu i njihova ubrzanja. Takav je slučaj na pravu, prvi

sasvim neprihvatljiv. I kasnije je postojala čitava škola fizičara, pozitivisti, koji su se priklanjali mišljenju da je sila samo zgodan naziv za proizvod mase i ubrzanja.

Ne može se, međutim, poreći da se fizičko značenje sile zasniva na medjusobnom dejstvu tela u prirodi, u prvom redu mogućnosti da se ispravno proračuna njihov medjusobni položaj i kretanje. Naravno, i Njutnu je bilo jasno da se celokupnost pojava povezanih s pojmom sile može shvatiti samo u uzajamnom dejstvu dvaju tela jedno na drugo. U svetu zapravo postoje samo uzajamna dejstva. Da bi naglasio uzajamnost dejstva (sile izmedju dva tela), Njutn je dodao zakonu kretanja zakon akcije i reakcije, koji matematički precizira tu uzajamnost. Tek principom akcije i reakcije dobijaju Njutnovi zakoni kretanja potpuni fizički smisao.

U formalnom pogledu, koncipirajući svoje zakone aksiomatski*, Njutn se ugledao na antičke uzore, u prvom redu na Euklida. On je, međutim, svojim aksiomima dao moderan sadržaj. Njegova genijalnost ogleda se u tome što je uspeo da odvoji bitno od nebitnog i pruži i formalni okvir za rešavanje problema iz mehanike. Nema, u principu, ni jednog problema kretanja koji se ne bi mogao rešiti uz pomoć Njutnovih zakona. Naravno, mnoga rešenja u praksi su veoma komplikovana, što zavisi od matematičkog izraza za silu. No univerzalna shema data diferencijalnom jednačinom (12.6) primenljiva je na svaki slučaj, bez obzira na komplikovanost matematičkog izraza za silu.

Danas su u prirodi poznata četiri osnovna tipa međudejstva medju česticama. To je u prvom redu gravitaciona sila, zatim elektromagnetne sile, te napokon vrste sile koje su karakteristične za međudejstvo izmedju elementarnih, sub-

tomskih čestica, tzv. slabe interakcije i jake interakcije. Dok su sile slabe interakcije uočene kod beta-raspada radioaktivnih jezgara, jake interakcije u suštini su sile koje drže nukleone na okupu. Istini za volju treba reći da, iako o silama znamo mnogo, a gravitacionim i električnim silama znamo i matematički oblik, o prirodi i dubokom uzroku tih osnovnih sila možemo reći malo. Za elektromagnetne sile znamo odavno da potiču od izmenе fotona, kvanata elektromagnetskog polja, a od nedavno su nam poznati i kvanti nosioci slabih nuklearnih sila. To su intermedijni bozoni, čestice nazvane Z^0 i W^\pm . Gravitacione sile predstavljaju još uvek problem opšte teorije relativnosti, a nismo blizu ni potpunom razumevanju jakih sila izmedju nuklearnih i subnuklearnih čestica.

Osnovni podaci o četiri osnovne sile u prirodi dati su u tabeli 13.1. Brojke u drugom stupcu daju relativnu jačinu tih sila. Naravno, kako se radi o sasvim različitim silama koje deluju medju različitim česticama, te brojke treba uzeti samo kao indikaciju. Tako će na primer, gravitaciona sila izmedju dva elektrona biti 10^{38} puta slabija ($10^{-2}/10^{-40}$), od elektromagnetne, dok se o jakom međudejstvu izmedju dva elektrona ne može govoriti. Ono postoji samo medju teškim česticama, na primer protonima, neutronima itd. Jako međudejstvo izmedju na primer jednog protona i jednog neutrons je čak 10^{40} puta jače od gravitacionog, ali domet te sile je veoma mali, te se jaka sila (kao i slaba) ispoljava samo u domenu atomskog jezgra.

TABELA 13.1. Četiri osnovne sile u prirodi

Medjudejstvo	Jačina	Zakoni
gravitacija	10^{-40}	zakoni su poznati
slabo međudejstvo	10^{-5}	zakoni su uglavnom poznati
elektromagnetizam	10^{-2}	zakoni su poznati
jako međudejstvo	10^0	zakoni su delimično poznati

* U ovom smo poglavljiju, a i u daljem tekstu udžbenika ćemo često koristiti naoko suprotne nazive "Njutnovi aksiomi" i "Njutnovi zakoni". Temeljna pravila o kretanju i silama postavio je Njutn u obliku aksioma, tj. temeljnih konstatacija iz kojih je izvodio ostale zakone. Međutim, ispravnost tih aksioma je danas toliko puta proverena, a njihova upotreba tako opšta, da se za njih uobičajio naziv osnovnih zakona mehanike.

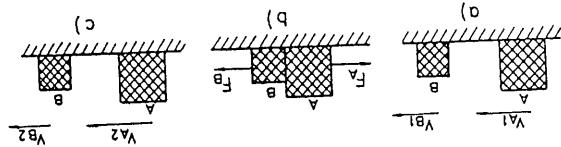
Iz liskustva znamo da te sile nisu konstantne. One su manje u
 pravim trenutima sudara, zatim rastu do neke maksimalne vrednosti.
 Iz liskustva znamo da te sile nisu konstantne. One su manje u
 metodama. Sve takeve sile koje su jake, a kratkotrajanje, zovu se
 za vrlo kratko vreme, pa se tesko moze pratiti eksperimentacionim
 sti i onda opet opadaju do nule. Ceo opisan proces se desava
 u svakom trenutku jednako. Prema II Njutnovom zakonu sila
 dje istina da sile pri sudaru prikezani je na slici 14.2.
 Besplatna dva tela pri sudaru prikezani je na slici 14.2.
 mena moze da bude razlicita. Prikazan oblik slika uzajamno
 impulsnog sile. Usposte uzev, promena impulsnih sile u toku vre-
 metodama.

$$f_A = -f_B$$

napisati

tijevom zakonu medjusobno jednako i supportnog smera, pa se moze
 a telo B delovalo na telo A. Silom f_A . Te su sile prema III Nju-
 tonovom zakonu medjusobno jednako i supportnog smera, pa se moze
 a telo B delovalo na telo A. da je telo A delovalo na telo B silom f_B ,
 medju dva tela, tj. da je telo A delovalo na telo B silom f_B ,
 uociti smo da je za vreme sudara doslo do uzajamnog dejstva iz-

Sl. 14.1



uzajamnog dejstva, oba tela nastave kretanje promenjenim br-
 zinama (sl. 14.1.c).

Na slici 14.1.a telo A, koje klijizi po podlozi bez
 trenja, stigne telo B, udari u njega (sl. 14.1.b) i, nakon
 uzajamnog dejstva, oba tela nastave kretanje promenjenim br-
 zinama (sl. 14.1.c).

14. IMPULS SILE I KOLICINA KRETANJA

detu ovog uzborka u oblasti PIZIČKE FIZIKE POAVE U MIKROSVETU.
 *** Detaljnije objašnjenje osnovnih interakcija dat je u dugom

fritzku.
 *** Carlo Rubbia, dobitnik Nobelove nagrade 1984. godine za

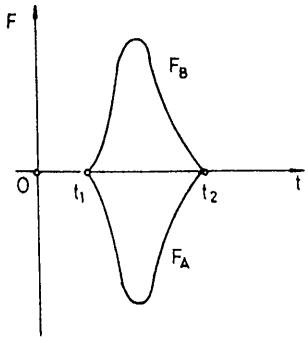
(slla) u prizori. .
 ve nagrade 1979. godine za radove na uvedenjenju osnovnih medjusobnih
 interakcija pak stanak poretka, dobitnik Nobelova za Nobelo-
 Seveneleti Fritzeg i Sheldon Glashow, američki fizičari, i

nije čak jasno da li je takvo uvedenje usposte i moguće.
 genetim. Na tom putu je deva da smo prevelili početne korake, a
 i gravitacionih sile u zalednjiku shemu sa slabim i elektroma-
 gos je dug put do uključivanja jekich ("nuklearnih")

krilj Rublja i saradnicicu**
 1982. Godine u evropskom nuklearnom centru (CERN) u Ženevi, ot-
 veli spomenuti hite eksperimentalno otkriće
 arnih sile, u tzv. eksperimentalnoj bozona Z. i W, koje su krejemi
 ispravljeno u jedinjenje teorije elektromagnetenih i slabih nukle-
 ije ta delimična sinteza krunisana uspehom. Definitivni dokazi
 postigli značajne uspehe, pa danas možemo sa sigurnosću reći da
 na tom području Međimurje, Glashow i Salam i drugi fizici
 obuhvate i elektromagnete i slike. Poslednjih godina su
 stojići protivni na taj način da se u istom teoriji skrom opisu
 kriterije, kome još uvek je deva da ima premea u storiji nauke, na-
 električne, magnete i niz svestlosnih polova. Danas se ovo ot-
 nju elektromagnete polja, koja u svom okviru uvedenju
 datak tzv. uvedenje teorije polja. Prva uvedena teorija polja
 se sve te sile svedu na manje-više zalednjaki uzrok. To je za-
 sledeti krok u shvatnju prirode je nastojanje da
 prisustvu velikih masa.

ne sile (jako medjučestvovo) najjače od svih medjučestava u
 periodi, a gravitacione su najslabije. One se ogledaju samo u

$$\vec{F}_A = m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} \quad \text{i} \quad \vec{F}_B = m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$



Sl. 14.2

Za vrlo kratko vreme dt važiće

$$\vec{F}_A dt = m_A d\vec{v}_A \quad \text{i} \quad \vec{F}_B dt = m_B d\vec{v}_B \quad (14.1)$$

Kako relacije (14.1) moraju važiti za svaki infinitezimalni vremenski interval od početka do dodira i odvajanja, može se napisati

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = \int_{\vec{v}_{A1}}^{\vec{v}_{A2}} m_A d\vec{v}_A ; \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B dt = \int_{\vec{v}_{B1}}^{\vec{v}_{B2}} m_B d\vec{v}_B \quad (14.2)$$

Masa tela A i B nije se menjala pri sudaru, te je

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = m_A \vec{v}_{A2} - m_A \vec{v}_{A1} ; \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B dt = m_B \vec{v}_{B2} - m_B \vec{v}_{B1} \quad (14.3)$$

Integral sile po vremenu, u kojem ta sila deluje, naziva se impuls sile (\vec{p})

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (14.4)$$

Za specijalni slučaj konstantne sile, koja na telo deluje odredjeno vreme t , važi

$$\vec{p} = \int_{t=0}^t \vec{F} dt = \vec{F} t \quad (14.5)$$

Kako se proizvod mv naziva količina kretanja, to izrazi na desnoj strani jednačina (14.3) predstavljaju promene količine kretanja ΔK , odnosno

$$m_A \vec{v}_{A2} - m_A \vec{v}_{A1} = \Delta \vec{K}_A \quad \text{i} \quad m_B \vec{v}_{B2} - m_B \vec{v}_{B1} = \Delta \vec{K}_B \quad (14.6)$$

Na osnovu (14.4) i (14.6) jednačine (14.3) mogu da se napišu u obliku

$$\vec{p}_A = \Delta \vec{K}_A \quad \text{i} \quad \vec{p}_B = \Delta \vec{K}_B \quad (14.7)$$

ili uopšteno

$$\vec{p} = \Delta \vec{K} \quad (14.8)$$

tj. impuls sile jednak je promeni količine kretanja koju ta sila uzrokuje.

15. ZAKON ODRŽANJA KOLIČINE KRETANJA

Skup od dva ili više tela nazivamo sistem tela. U zavisnosti od sila koje dejstvuju na sistem, sistemi mogu biti zatvoreni i otvoreni.

Zakon održanja količine kretanja detaljnije će biti proučen u dva slučaja:

a. Za zatvoren sistem

U slijedaju kada sile koje deluju na sistem poticju samo od uzajamnog dejstva tela, a delovanje spoljasnjih sila kom vremenja. Jedenacka ukupne kolicine kretanja zatvorenog sistema zakona drzavnja ukupne koliciine kretanja zatvorenog sistema te la.

b. Za otvoren sistem

Posmatrajmo zatvoren sistem od dva tela na koji de- ljuju, sem unutrasnjih sila f_1 i f_2 , koje su prema (15.1) jedna- ke i spoljasnje sile F_1 i F_2 . U tom slucaju je posmatrajmo otvoren sistem od dva tela na koji de- ljuju, sem unutrasnjih sila f_1 i f_2 , koje su prema (15.1) jedna- ke i spoljasnje sile F_1 i F_2 .

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{v}_1 + m_2\dot{v}_2) = f_1 + f_2 + F_1 + F_2 \quad (15.6)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{v}_i = \sum_{i=1}^2 f_i; \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 K_i = \sum_{i=1}^2 F_i \quad (15.7)$$

121

$$f_1 = -f_2$$

je po III Nutnovom zakonu

m_2 koja se kredu brzinama \dot{v}_1 i \dot{v}_2 i koja interagiju s ilama f_1 i f_2 . Sile kojima ta tela deluju jedno na drugo jednak su, te posmatrajmo zatvoren sistem od dva tela mase m_1 i m_2 se po III Nutnovom zakonu

ne postoji (spoljasnje sile poticju od tela izvan sistema) kazet samo od uzajamnog dejstva tela, a delovanje spoljasnjih sila u slucaju kada sile koje deluju na sistem poticju samo od uzajamnog dejstva tela, a delovanje spoljasnjih sila

a. Za zatvoren sistem

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n f_i + C \quad (15.8)$$

Primenom jednacine (15.7) na sistem od n tela, dobijamo

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{v}_i = \sum_{i=1}^2 f_i \quad (15.9)$$

122

$$\frac{d}{dt} (m_1\dot{v}_1 + m_2\dot{v}_2) = 0 \quad (15.3)$$

a odatile integraljenjem

$$m_1\dot{v}_1 + m_2\dot{v}_2 = \text{const.} \quad (15.4)$$

$$\int \sum_{i=1}^n f_i dt + C = \sum_{i=1}^n F_i = \text{const.} \quad (15.8)$$

Iz (15.8) pod uslovom da je

Drugiim rečima, u zatvorenom sistemu u kojem postoji samo dva tela u interakciji, zbir kolicina kretanja samo dva zakaon. Medjutim, u prirodni je pozнато da postoji interakcije zakaon. Međutim, u prirodni je pozнато da postoji interakcije zakaon. Zaključak vazi samo za unutrasnje sile za koje vazi III Nutnov zakon. Ovaj drugiim rečima, u zatvorenom sistemu u kojem postoji samo dva telaka interakciji, zbir kolicina kretanja je konstantan. Drugim rečima, u zatvorenom sistemu u kojem postoji samo dva telaka interakciji, zbir kolicina kretanja je konstantan. Ovaj

$$\sum_n m_i \dot{v}_i = \text{const.} \quad (15.5)$$

Zaključak se lako da preostaviti i na sistem od n sa Lorencovom silom).

dobija se

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i(t) = \vec{F}_R t + C \quad (15.9)$$

gde je \vec{F}_R rezultanta svih spoljašnjih sila. Ako predpostavimo da je u početnom trenutku $t=0$ ukupna količina kretanja sistema bila

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i(0) = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i(0)$$

dobićemo

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i(t) - \sum_{i=1}^n \vec{K}_i(0) \equiv \Delta \left(\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \right) = \vec{F}_R t \quad (15.10)$$

Na osnovu (15.10), gde je $\vec{F}_R t$ impuls rezultujuće sile (\vec{p}), može se zaključiti da je promena ukupne količine kretanja ($\Delta \vec{K}_i$) otvorenog sistema jednaka impulsu rezultante spoljašnjih sila ($\vec{p} = \Delta \vec{K}_i$).

Jedinice impulsa (\vec{p}) i količine kretanja (\vec{K}) su iste: kg m s^{-1} .

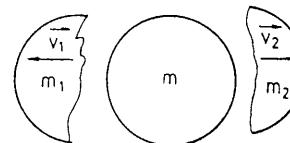
c. Primeri primene zakona održanja količine kretanja

1. Pri eksploziji, mina (mase m) se raspade na dva komada (mase m_1 i m_2), koji se kreću u horizontalnim pravcima, kao što je prikazano na slici 15.1. Komad mase m_2 kreće se brzinom \vec{v}_2 . Da bi se odredila veličina i smer brzine \vec{v}_1 polazi se od izraza (15.4). Pre eksplozije je ukupna količina kretanja sistema

$$m \vec{v} = 0 \quad (15.11)$$

a posle eksplozije

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (15.12)$$



Na osnovu zakona (15.5) je

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \quad (15.13)$$

što daje

$$\vec{v}_1 = -\frac{\vec{v}_2 m_2}{m_1} \quad (15.14)$$

2. Analizirajmo primer iz odeljka 14. prikazan na slici 14.1. Kako je po III Njutnovom zakonu

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

u svakom trenutku je

$$\text{impuls sile } F_A = -\text{impuls sile } F_B$$

Kako je impuls sile jednak razlici količine kretanja na kraju i početku delovanja sile, to je

$$m_A v_{A2} - m_A v_{A1} = - (m_B v_{B2} - m_B v_{B1})$$

$$m_A v_{A1} - m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

Leva strana je ukupni impuls sistema pre sudara, a desna nakon sudara. Poslednja jednačina, dakle, pokazuje da se ukupni iznos količine kretanja nije tokom sudara izmenio, što je u skladu sa (15.5).

3. Posmatrajmo metak, mase m_1 , koji se nakon ispaljenja kreće brzinom v_1 i udara u vreću napunjenu peskom, mase m_2 , koja je okačena da visi (sl. 15.2). Usled udara metka u vreću, vreća će dobiti izvesnu količinu kretanja i brzinu v , koja se može odrediti primenom zakona održanja količine kretanja na sistem metak-vreća. Pre udara metka količina kretanja metka je $m_1 v_1$, a posle udara sistem ima količinu kretanja $(m_1 + m_2)v_2$. Pošto su ove dve količine kretanja jednake, sledi

Tokom izdjezavajuće kratakog intervala vremena da raketeta ispušti masu dm produkata sa gorivom. U procesu sa gorivom ovi produkati sagorevanja mase dm u odnosu na posmatravajuću sazemljicu dobijaju u procesu sagorevanja u koju produkta sa zemljicu predestavlja razliku brzine u trenutku tada kretanje produkata sagorevanja mase dm u koju produkati sagorevanja dobijaju u trenutku tada kretanje produkata sagorevanja mase dm

nađe se kretanje rakete i produkata sagorevanja oznaka. **

Organicem sa M. Na osnovu ovoga, relacija (15.18) se može ukupnu masu konstrukcije rakete i goriva u njoj u trenutku to u trenutku to ispaljivanja rakete nena brzina je ravna nulli.

$$dv_x = - \frac{g}{m} dm \quad (15.18)$$

Ako se u izrazu (15.17) razvodi promenljive m i v_x, on se može napisati u obliku

$$m dv_x + g dm = 0 \quad (15.17)$$

$$mv_x = (m+dm)(v_x + dv_x) + (v_x - v_x - dv_x) dm \quad (15.16)$$

odnosno prema (15.15) i (15.16)

$$K(t) = K(t+dt)$$

je

$$K(t+dt) = (m+dm)(v_x + dv_x) + [v_x - (v_x + dv_x)] dm \quad (15.16)$$

Rakete i izbačenih produkata sagorevanja dala sa u trenutku t+dt kretajuća sistema koji se sastoji od je dm, pri čemu je dm > 0. Na osnovu ovoga zaključujemo da je iznos $v_x + dv_x$. Masa konstrukcije rakete i preostalog goriva zlina rakete se promeni za veličinu dv, tako da u trenutku t+dt menja u vremenu. Za razun izbačenih produkata sagorevanja, ali se ne v, koja zavisit od tipa goriva i nadija sagorevanja, ali se ne dukti sagorevanja mase dm u odnosu na raketu dobijaju brzinu

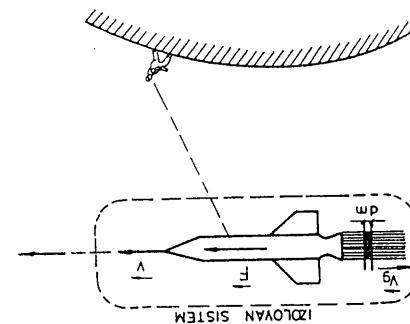
masu dm produkata sa gorivom. U procesu sa gorivom ovi pro-

dukati sagorevanja mase dm u odnosu na raketu dobijaju brzinu

$$K(t) = mv_x \quad (15.15)$$

Ako, zbir masa konstrukcije rakete i goriva koji se u njoj na masu u tom trenutku obelежimo sa $m = m(t)$, tada količina kre-taz i u trenutku t obelžimo sa $V_x = V_x(t)$, tada količina kre-

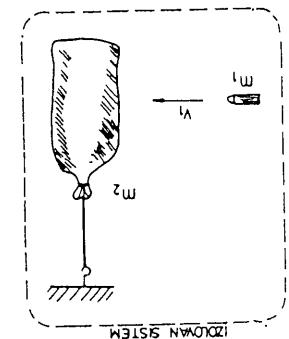
SL. 15.3



sagorevanja.

4. Kretanje rakete i izbacujući sistem sa kretanjem na izdavanje raketne uticaja gra-natice van ostalog uticaja gra-nata. Na sljedećem se ona kretanje rakete, pri čemu se ona kretanje raketne uticajne primenilemo na izdavanje polja Zemlje (SL. 15.3).

SL. 15.2



$$m_1 V_1 = (m_1 + m_2) V_2$$

$$V_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} V_2$$

odakle proizlazi

$$m_1 V_1 = m_2 V_2 \quad \text{to je } V_1 = \frac{m_2}{m_1} V_2$$

$$\int_0^{v_r(t)} dv = -v_g \int_M^m \frac{dm}{m}$$

odakle sledi konačni izraz za brzinu rakete u momentu t

$$v_r(t) = v_g \ln \frac{M}{m(t)} \quad (15.19)$$

Prema (15.19) zaključujemo da je brzina rakete proporcionalna brzini produkata sagorevanja koju ona ispusti tokom leta. Za danas poznata goriva brzina v_g iznosi oko 3 km/s . U optimalnom slučaju gorivo sačinjava 90% odnosno $9/10$ mase M, pa ako se ono potpuno iskoristi tokom leta onda je $m(t) = M/10$, gde je t moment kada je sve gorivo iskorišćeno. Za ovaj slučaj izraz (15.19) daje

$$\max v_r(t) = v_g \ln 10 = 3 \ln 10 = 3 \cdot 2,3 \approx 7 \text{ km/s} \quad (15.20)$$

Brzina sa vrednosću iz (15.20) nije dovoljna da raketu izvede iz polja Zemljine teže, pa se zato pri lansiranju sa Zemlje moraju koristiti višestepene rakete.

Vidimo da je brzina izbacivanja pogonskog sredstva važan ograničavajući faktor u maksimalnoj brzini rakete i odatle potiče ideja da se u budućnosti prave rakete koje će reaktivnu силу ostvarivati izbacivanjem svetlosnih kvanata - foto-na.

Deljenjem (15.17) sa dt, dobija se

$$m \frac{dv}{dt} r + \frac{dm}{dt} v_g = 0 \quad (15.21)$$

Član $\frac{dv}{dt} r$ je ubrazenje rakete a , te je prvi član u (15.21) proizvod ma i predstavlja reaktivnu силу rakete F, pa je

$$F = -\frac{dm}{dt} v_g \quad (15.22)$$

tj. pogonska sila rakete srazmerna je izbačenoj masi gasa u jedinici vremena dm/dt i brzine v_g isticanja gasova.

Pri startu APOLA 11 (koji je odneo kosmonaute na M-sec) raketni motori su izbacivali 12 tona sagorelih gasova u svakoj sekundi ($dm/dt = 12 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$), razvijajući pogonsku silu od $3,2 \cdot 10^7 \text{ N}$. Na osnovu ovih podataka izlazi da je brzina isticanja gasova $v' \approx 2700 \text{ m/s}$.

Pošto se kretanje raketa zasniva na zakonu održanja količine kretanja, to znači da se one mogu kretati kroz vazdušni prostor. To je tzv. princip reaktivnog pogona. Naime, reaktivni pogon je jedino mogući pogon u astronautici.

16. DINAMIKA KRUŽNOG KRETANJA

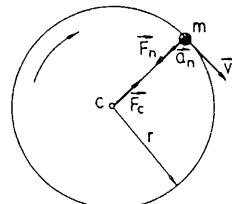
16.1. Sile kod kružnog kretanja

Neka se telo mase m (sl. 16.1) ravnomerno kreće ($v=const.$) oko jedne nepomične tačke C po krugu poluprečnika r. Pri ovakovom kretanju postoji samo normalno (radijalno) ubrzanje \ddot{a}_n jednako prema (8.4)

$$\ddot{a}_n = -\frac{v^2}{r} \dot{\vec{r}}_0 \quad (16.1)$$

Na osnovu II Njutnovog zakona može da se zaključi da ovo ubranje treba da je posledica sile

$$\vec{F}_n = m \ddot{a}_n = -\frac{mv^2}{r} \dot{\vec{r}}_0 \quad (16.2)$$



Sl. 16.1

koja je usmerena ka centru rotacije. Ova sila se naziva centripetalnom silom koja svojim dejstvom vuče telo prema centru i savija njegovu putanju. Ona, naravno, nije neki poseban tip sile koja je svojstvena samo kružnom kretanju. Naziv centripetalna odnosi se zapravo na njen efekat da stalno privlači telo ka centru ili brtanja. To mogu biti elastične sile u nekoj šipki, opruzi ili zategnutom koncu, dalje to može biti sila teže, električna i

Sa F_g označena je dodatna sile koja deluje na telo u neinerci-

$$F_g + F_i = 0 \quad (16.4)$$

a za posmatraca koji rotira na platformi (rotacioni sistem)

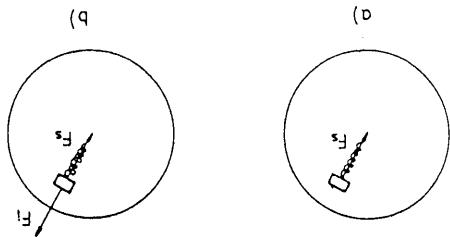
$$F_g = -\frac{mv^2}{r} \quad (16.3)$$

(inercijski sistem)

zakonu može da se napravi da je za posmatraca izvan platforme noj), a po smernu mora biti suprotna. Na osnovu II Newtonovog zakona može da se napravi da je za posmatraca izvan platforme deluje još jedna sila koja ponistava zavojnicu oprugе. Ta sila uprkos svemu mijenja, posmatrać mora zavojnicu oprugе. Ta sila deluje konsantnom silom na telo (sl. 16.2.b). Kako tezava da je opraga pustegnutu uvek konstantnom silom, tј. da lom na platformi. Za nizgagu telo mijenje. S druge strane, on uzmimo sada da se posmatrać rotira zajedno sa teme (sl. 16.2.a).

Posmatrać, koji se nalazi izvan platforme, učava da telo jestiće se spreda platforme pod dejstvom sile elastične oprugе F_g , koja deluje prema sprediju platforme.

sl. 16.2



stanovišta posmatraca koji se nalazi na spredini platforme i rotira zajedno sa temom.

51

novišta posmatraca koji miđu je i nalazi se van platforme i sa teleo u sistemu koji jednako rotira analiziraju sa stazom elastičnom opsegom za central rotaciju. Sila koja deluje horizontalnom podu rotacije platforme (sl. 16.2) i neka je neka se telo mase m nalazi izvan osi rotacije na smjeru okreće zajedno sa temom.

Koje rotira. Nessto se drugačije okolnosti javlaju ako se potemu referencijske, odnosno za posmatraca koji stoji van tela sva izlaganja izneta u sl. 1. Vaze u inercijskom si-

16.2. Sila u referentnom sistemu koji rotira ravnomerno

salо kretanje tela u inercijskom sistemu. Jelina sila i koja se uobičajeno kretanje u slednjem odjeku postoji i centralnog kretanja. Kao što je se videti u sl. 1. spaja sa centrom obrotanja. Veli na navedenu ravnostea ne odnosi na telo koje se okreće, već na silom. Očigledno je $F_g = -F$. Ali ne treba zaboraviti da se zeteta i pravaca, a suprotne smere i naziva se centralnog kretanja sila. Ova sila reakcije dejstvuje na centar, istog je intenziteta elastične sila F_g deluje i odgovarača sila reakcije F (sl. 16.1). Voga zakona može se zakrivljene putanju tela. Na osnovu III Newtonovog kretanja koji je odgovorna za rotaciju, jer daje radilanu centru. Ta sila je odgovarajuća centralni radilanu kod rotacijske isklučivo centrali petlana sila koja vuče telo ka trenutku.

U inercijskom referentnom sistemu poljavljuje se na kružnicu po kojoj se vrtelo, sa brzinom koju je imalo u tom ne, telo nastavlja da se kreće pravolinijski u smjeru tangente tanju sa vrednim poluprečnikom. Ako se delovanje ove sila prekriva sa okreći na putanjiji poluprečniku, telo prelazi na putanju ugao od $\pi/2$.

Ako ova sila nije dovoljna da telo sa okređenom sila ne vrši rad, jer njen pravac uvek zaklapa sa privremen kretanje dolazi od privlačenja masa (gravitacije). Centralni magnetna sila, kod metanja planeta oko Sunca, centralni petlana

50

jalnom sistemu. Uporedjivanjem jednačina (16.3) i (16.4) proizlazi

$$\vec{F}_i = \frac{mv^2}{r} \vec{r}_0 \quad (16.5)$$

tj. dodatna sila ima istu vrednost kao i centripetalna. Ta sila predstavlja tzv. inercijalnu силу, коју prema njenom delovanju (od centra van) називамо centrifugalnom inercijalnom sistemom.

Ova centrifugalna sila se pojavljuje samo u (neinercijalnom) sistemu koji rotira. To je, dakle, zamišljena sila које nema u (mirujućem) inercijalnom sistemu, а коју dodajemo u neinercijalnom sistemu da bi se sačuvala važnost II Njutnovog zakona. Posmatrač na platformi opaža dakle силу, која iste oprugu prema van (centrifugalnu силу). Istu силу опаžа и putnik u automobilu u krivini (сила га изbacuje према спољашњем делу krivine, tj. у смеру радијуса krivine), као и astronaut koji u veštačkom satelitu kruži oko Zemlje. Sa njegovog stanovišta na svaki предмет у satelitu deluju dve силе: привлачна сила Zemlje, која га vuče radikalno према Zemlji и centrifugalna сила која га тера радikalno од Zemlje. Kako se satelit задржава на konstantnoj udaljenosti od Zemlje, rezultanta тих dveju сила мора бити jednak nuli. Prema томе, за astronauta svi предмети лебде у satelitu, tj. они су bez težine. S друге стране, posmatrač izvan satelita рећи ће да svi предмети u satelitu izgledaju као da nemaju težine, zato što svi imaju jednakoubrzanje.

Ako posmatrač u neinercijalnom sistemu želi да примени II Njutnov zakon, tada mora uključiti delovanje inercijalne силе $\vec{F}_i = m\vec{a}_r$

Prema томе, за posmatrača u neinercijalnom sistemu II Njutnov zakon glasiće: zbir svih realnih сила (\vec{F}) i inercijalne силе \vec{F}_i jednak je произвodu mase i ubrzanja

$$\vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (16.6)$$

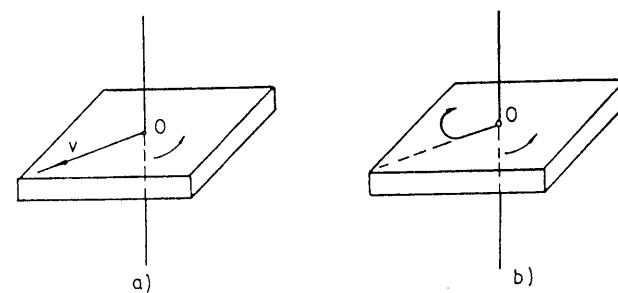
ili u skalarnom obliku

$$\Sigma F - m \cdot a_r = m \cdot a \quad (16.7)$$

где је F "realna" сила која делује на тело, a_r убрзане referentnog sistema prema inercijalnom i a убрзане тела prema referentnom (neinercijalном) систему.

Kao што smo već rekli izraz (16.6) je najopštija formulacija II Njutnovog закона, који важи за svakog posmatrača, bez обзира да ли се налази u inercijalnom ili neinercijalnom sistemu. Za specijalan slučaj да se inercijalne i neinercijalne силе kompenzuju, убрзане $a=0$, тела miruju (или се крећу једнако по правцу) u neinercijalnom sistemu.

Proučimo još jedan primer inercijalne силе, која сеjavlja pri кretanju тела u sistemu који rotira. Нека posmatrač, који се налази на оси rotacije rotirajuće платформе (sl. 16.3), баци куглу неком почетном brzinom тако да се без trenja kotrlja по поду. За posmatrača van platforme (inercijalni sistem) kretanje ће бити pravolinijsko sa stalnom

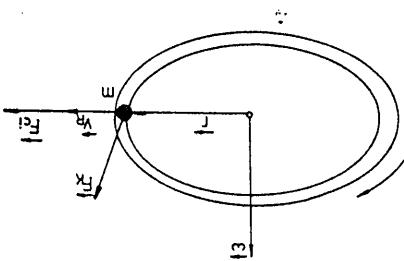


Sl. 16.3

brzinom v (sl. 16.3.a), dok ће за posmatrača na платформи (neinercijalni sistem) ово кретање бити krivolinijsko i то убрзано (sl. 16.3.b). Кугла ће скренuti od правца почетне

zvezdarnica izvrsne pogavje mogu protumačiti delovanje Koriolisa. Imaju značajnu ulogu u kretanju zemljine atmosfere. U bazi na prvi put kretanje u smjeru sever-jug na vesticim geografskim skupina. Tako reke koje imaju pritokom pravac sever-jug severnih vetrova ka zapadu. Premda su te sile slabe, ipak one staci se mora voditi razuma o pogavi Koriolisove sile javlja se tada na zapanju u smjeru sever-jug na vesticim geografskim na prvi put kretanje u smjeru sever-jug na vesticim geografskim na prvi put kretanje u smjeru sever-jug na vesticim geografskim

Sl. 16.5



Sl. 16.5).

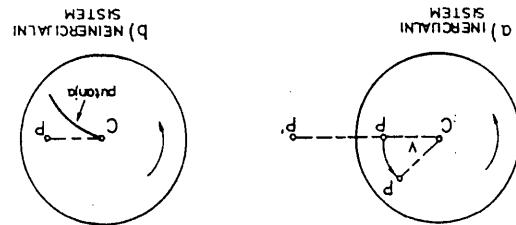
Iz navedenih primera vidi se da se Koriolisova sila pojavljuje u neinercijalnom referentnom sistemu kad god te-
la komponentu brzine po smjeru normalnom na smjer osi rota-
cije sistema (sl. 16.5.).

Ved je opisao zakrivljenu putanju. Za njega je, dakle (u neinercijalnom sistemu sl. 16.4.b), rezultat biti identičan kao da je na metak delovala sila (Koriolisova sila) normalna na smjer kretanja.

da je na metak delovala sila (Koriolisova sila) normalna na

referentni sistem neinercijalan, kao npr. na Zemlji) uo-
godi P i on nege uvođiti nove sile da to objasni. Međutim,
osmatrač koji se nalazi na rotirajućoj ploči (tj. izlje je
nalazi na rotirajućoj ploči (tj. osmatrač u inercijalnom si-
stemu - sl. 16.4.a)ovo je razlog zato što je metak nije po-
kao p zaptivati u novi polozaj P. Za osmatrača koji se ne
se u vremenu t = C/V, potreban da metak pređe put CP, traž-
Tako opažen metak nege, međutim, pogodići će u P jer je
se takođe na istom pravcu kao i taka P izvan ploče.

Sl. 16.4



gleđe je V - relativna brzina tela u odnosu na sistem koji se okreće. Značenje Koriolisove sile može se uobičiti i na pravem
pričekanom na sl. 16.4. Osmatrač u sredistu C rotiračnog
ploče usmeri i opaži hitac prema taki P na ploču u času kad
obje značenje Koriolisove sile može se uobičiti i na pravem

$$F_x = -2 m \left(\frac{v}{R} \times \frac{v}{R} \right) \quad (16.9)$$

$$F_x = 2 m v^2 \quad (16.8)$$

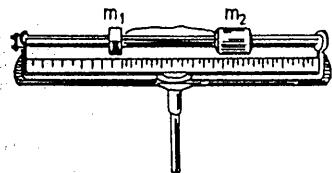
sila i dala je izrazom

kojem bi trebalo po inerciji da se kreće, zove se Koriolisova
potrebne brzine. Ta sila, koja skreće kućištu od pravca po
vac podstane brzine. Ta sila, koja skreće kućištu od pravca po
metak između da na kućištu deluje sila koja je upravna na pra-
vica potrebne brzine i to suprotno od smere rotacije. Osmatrač na ploči

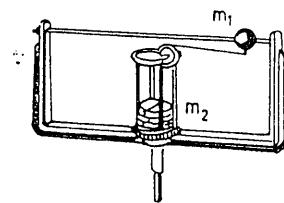
17. PRIMERI I ZNAČAJ CENTRIFUGALNIH INERCIJALNIH SILA

Centrifugalne inercijalne sile imaju veliki značaj za objašnjenje nekih pojava u prirodi, za različite primene u tehnici i svakodnevnom životu. Kao primere navešćemo sledeće:

1. Na dvema horizontalnim šipkama (sl. 17.1) postavljene su lako pokretne mase m_1 i m_2 , koje su medjusobno vezane. Kada se mašina stavi u pogon, na telo veće mase m_2 dejstvuje veća centrifugalna inercijalna sila, tako da ono privuče manju masu m_1 . Centrifugalne sile, koje dejstvuju na oba



Sl. 17.1



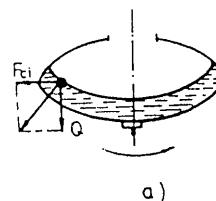
Sl. 17.2

tela (zategnutost konca), medjusobno su uvek jednake a suprotog smera, te se uzajamno poništavaju.

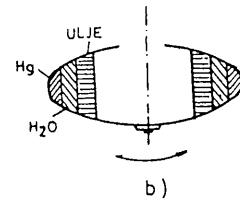
2. Na aparatu (sl. 17.2) manja masa m_1 diže veću masu m_2 kad se aparat dovoljno brzo obrće. Tada centrifugalna inercijalna sila, mase m_1 , koja se preko užeta prenosi na masu m_2 , postane veća od sile teže, koja dejstvuje na masu m_2 . Ako je m_2 jednom podignuta, primećuje se da ponovo pada pri manjoj brzini obrtanja od brzine potrebne za njeno podizanje. To se objašnjava povećanjem razdaljine mase m_1 pri podizanju od osovine obrtanja, na osnovu čega je porasla i vrednost centrifugalne inercijalne sile.

3. Kada se u sudu koji rotira nalazi neka tečnost (sl. 17.3.a), onda tečnost pri obrtanju dobija izdubljen oblik

(presek u vertikalnoj ravni je parabola). Pri stalnom broju obrta tečnost je u ravnoteži pod dejstvom centrifugalne



a)



b)

Sl. 17.3

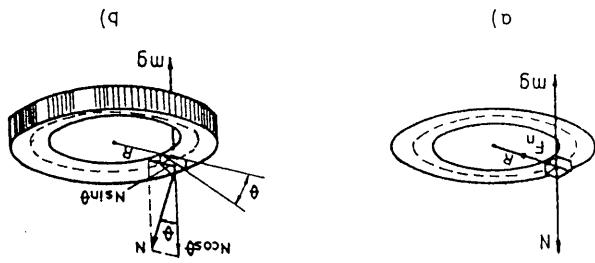
inercijalne sile i Zemljine teže. Za tečnosti u ravnoteži važi pravilo da rezultanta svih sila mora biti upravna na površinu tečnosti. Kada je broj obrta veoma veliki Q će biti zanemarljivo prema F_{ci} , tako da će površina tečnosti biti praktično normalna na F_{ci} . Ako se u sudu nalaze dve tečnosti ili više tečnosti različite zapremske mase, onda će se one razdvojiti po slojevima (sl. 17.3.b). Ova pojava naročito se koristi u hemiji, biohemiji i dr. za razdvajanje pre svega organskih supstanci različitih molekulskih masa (npr. izdvajanje maslaca iz mleka, razdvajanje proteina). Uredjaji sa kojima se vrše razdvajanja nazivaju se centrifuge.

4. Vrlo poučan primer imamo kod tzv. centrifugalnog regulatora (sl. 17.4.a). Centrifugalni regulator sastoji se od dve metalne lopte postavljene tako da kad miruju vise pored jedne vertikalne obrtne osovine. Pri obrtanju lopte se udaljavaju od osovine utoliko više ukoliko je brzina obrtanja veća. Rad centrifugalnog regulatora analiziraćemo prvo sa gledišta jednog posmatrača van obrtnog sistema. Na masu m (sl. 17.4.b) dejstvuju dve sile, sila težine Q i sila reakcija R , koja se javlja u šipci \vec{L} . Uniformno obrtanje nastaje kada rezultanta F ovih dve sila daje potrebnu cen-

na sličici 17.6.b. Tada normalna sila N ima horizontalan komponentu u smjeru rotacije, koje troši gume i put, moramo zavran putu nagnuti tako da se smanji takvo tomobilja uzrokovana trenje guma po putu. Da se smanji tripetalna sila F . Centripetalna sila je na primjer kod autotripetalna sila F .

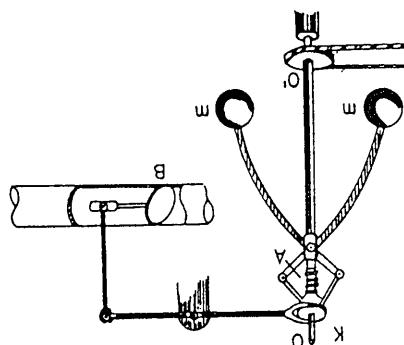
na masu m u ovom slučaju su težina mg , normalna sila N i centripetalna sila F .

S1. 17.6



način ne deluje centrifugalna inercijačana sila. Sila koje deluje pri kretanju vozila u krivini, radijusa R (S1. 17.6.a) na

S1. 17.5



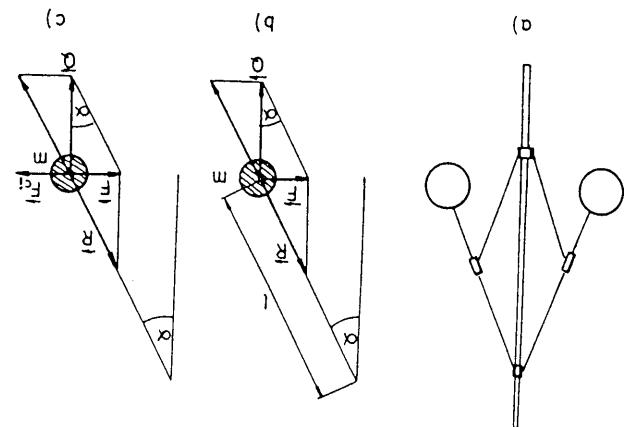
stalna ugaoana brzina rotacije.

59

Pod norme potinje da se povećava dovolj parale. Tako se održava smanjiju dovolj parale u cilindar. Pri manjim brojima obrtaja isti pri povećanju broja obrtaja oko osi znači neke norme, ventil B zilaze i povlače spominicu k manje okrećući sistem sa vremenskim intervalom B, koji se regulise dovolj parale u radijini cilindar. Pri rotaciji kugle se ruge A. Spominica je vezana sa spominicom k, o koju se upire opne kugle m koje su spomena sa spominicom 00, postavljeni su dve mase (S1. 17.5). Na rotirajuću osovinu 00, potrebna za zamjenu parne mase potrebna je regulisanje broja obrtaja regulator se u sile Q , R i F , su ravnoteži. Centrifugalni regulator se trijer postoji rezultanta F , dok kod drugog razmatranja sve tri pravog sile Q i R , koji deštavaju na kugle nisu u ravnoteži onda se uz sile F i R javlja i centrifugala sila F (S1. 17.4.c). Oba načina razmatranja rezultuju se u tome što kod izlike 17.4.b videti se da je $Q \cdot tg \alpha = m \omega^2 \sin \alpha$ proizlazi da je $Q \cdot tg \alpha = m \omega^2 \sin \alpha$, Iz slike 17.4.b je to slučaj kada je $F = Q \cdot tg \alpha$,

$$\cos \alpha = \frac{m \omega^2}{Q}$$

S1. 17.4



trijpetalnu silu $m \omega^2 \sin \alpha$, za obatanje po krugu $\alpha = \ell$ sreda.

58

ponentu $N \sin \theta$ prema centru krivine, koja zamenjuje centripetalnu silu zbog trenja. Ugao nagiba θ potreban da bi se kretanje obavilo bez trenja, dobija se izjednačavajući pomenutu komponentu sa radijalnom silom mv^2/R i uzimajući u obzir da nema vertikalnog ubrzanja

$$N \sin \theta = \frac{mv^2}{R}; N \cos \theta = mg$$

odakle je

$$mg \tan \theta = \frac{mv^2}{R}$$

odnosno

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

U poslednjem obrascu se ne javlja masa vozila, što znači da ugao ne zavisi od mase vozila, već samo od brzine i poluprečnika krivine R . Zato, nagib puta mora da bude veći na oštrim krivinama (radijus krivine R manji) i auto-putevima.

6. Kod rotirajućih sistema, kao što su točkovi vozila, obrtni delovi raznih mašina (strugova, bušilica, brusilica, rotirajući bubenjevi itd.) moraju biti usled delovanja centrifugalnih inercijalnih sila izbalansirani. U protivnom, rezultanta centrifugalnih inercijalnih sila nije jednaka nuli, te se kod navedenih sistema pojavljuju vibracije koje mogu dovesti do kidanja materijala. Stoga se problemu balansiranja kod rotirajućih sistema mora posvetiti posebna pažnja.

III RAD I ENERGIJA

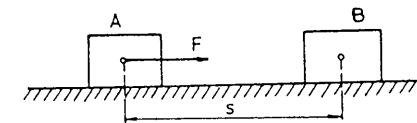
18. RAD

U svakodnevnom životu pod nazivom rad podrazumevamo svaki oblik aktivnosti koji zahteva mišićni napor i upotrebu mašina. U fizici je pojam rada strogo definisan i odnosi se na savladjivanje sile na datom putu. Dakle, naš zadatak će biti da pronadjemo izraz koji će na adekvatan način povezati силу и кретање, основне величине које smo do sada uveli, u jednu novu, složenu величину, коју ćemo назвати rad.

Videli smo na koji način se tela ubrzavaju pod dejstvom sile znajući da se tela pri tome pomeraju u prostoru. U mehanici se pomoću rada opisuje dejstvo sile povezano sa pomeranjem tela u prostoru. Iz iskustva je poznato da ako na neko telo deluje sila konstantnog intenziteta u pravcu i smeru kretanja (sl. 18.1) rad ove sile na putu od tačke A do tačke B iznosi

$$A = F \cdot s \quad (18.1)$$

tj. rad je pri navedenom premeštanju tela jednak proizvodu iz sile i predjenog puta.



Sl. 18.1

Ako po intenzitetu stalna sila F (sl. 18.2), koja deluje na telo zaklapa uvek isti ugao α sa putem s može se razložiti na dve komponente F_n i F_s . Dok komponenta $F_n = F \sin \alpha$ ne vrši rad, jer se telo ne kreće u njenom pravcu, dotle kom-

Ako se ne radi o konstantnoj sile, analizira se deluje na kratkom putu ds. U tom slučaju se izraz (19.3) je potrebno poznavati i smjer sile među dvije sile i komplikovana.

glede je \vec{V} - srednja brzina.

$$P = \frac{F}{A} = F \frac{V}{S} = F \cdot \vec{V} \quad (19.3)$$

Na osnovu (18.1) i (19.1) može se definisati snaga konstantne sile F na putu s kao

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (19.2)$$

zravamo rad izvrsen u sve kragem vremenskom intervalu da drugog, definisemo trenutnu ili pravu snagu tako da analiziramo rad izvrsenja rad menja od jednog vremenskog intervala do

$$P = \frac{d}{t} \quad (19.1)$$

A, tada gemo srednju snagu definisati kao
emo istom analogijom kao i pri definisanju prototrine brzine
emo istom analogijom koja se razlikuje na tretu na nje
veličina koja se naziva snaga.

bi se karakterisala brzina vresenja rada, uvedena je fizika
zini kojom se vrši rad, odnosno vreme za koje se rad vrši. Da
ro podigli. U mnogo lujevu, medjutim, potrebito je znati br-
za koje su dešavale sile. Pri podizanju tereta na visinu h iz-
za koje definiciji rada nismo uzimali u obzir vreme

19. SNAGA

Rad je tesno povezan sa projmom energije i videlicemo kasnije da je rad mera za promenu energije tela.

Ia od 1 N na putu od 1m, ako je sile u pravcu puta. $(1f = 1N \cdot 1m)$.

Definicija za rad je dešta (1). Rad od 1 je izvrsi sile

Ako se i intenzitet i smjer sile menjaju tokom pomerenja, tada je potrebno poznavati i smjer sile (tj. cosa) kao funkciju po-

$$A = \int_{S1}^{S2} F \cos \alpha \, ds \quad (18.5)$$

Za konacan rad u konacnom vremenu t priemu se telo pomakne od S1 do S2 rad je biti

$$dA = F \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad (18.4)$$

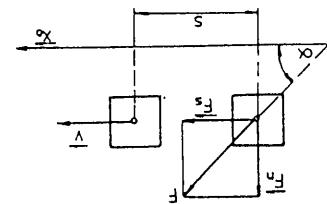
Preći infinitesimalni deo puta ds, pa je i sile izvrsiti in-
nacije promenit. U kratkom vremenskom intervalu telo je
nači u infinitesimalno kratkom vremenu dt, za koje se vreme
konstantna, nego se menja duž pomerenja. Tada gemo izraz (18.2)
djutim, iz situacija kod kojih sile koja deluje na telo nije
taj rad je skalarni rezultat sile F i pomerenja s. Postoji me-

$$A = \int_{S1}^S F \cdot s \quad (18.3)$$

definisanog skalarnog rezultata, jednacina (5), napisati kao
svojim intenzitetom. Jednacina (18.2) može se na bazi ranije
sa putem, sile vrši rad celim
nakon. Kad je $s = 0$ i $s =$
sile normalna na put rad je jed-
me, kad je $s = \pi/2$, tj. kada je
obrazac (18.2) pokazuje neke o-
kolnosti pri vresenju rada. Nai-

$$A = F \cdot s \cos \alpha \quad (18.2)$$

vrši rad, tako da je prema (18.1)
ponenata u pravcu puta $F_g = F \cos \alpha$



svodi na

$$P = F \frac{ds}{dt} = F \cdot v \quad (19.4)$$

Snaga se dakle može dobiti kao proizvod sile i trenutne brzine kretanja tela. Ukoliko sila ne deluje u smeru kretanja (brzine) analogno izrazu (18.3) za rad, dobija se i za snagu

$$P = F \frac{s}{t} \cos\alpha = F \cdot v \cos\alpha$$

odnosno

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (19.5)$$

Jedinica za snagu je vat (W). Jedan vat odgovara brzini vršenja rada od 1J u 1s. ($1W = 1J/1s$).

U tehnici se rad često izražava pomoću jedinica za snagu. Tako su nastale jedinice: vat-sekunda i kilovat-čas itd.

Vat-sekunda (Ws) je rad koji mašina snage 1W izvrši za vreme 1s, tj.

$$1 Ws = 1W \cdot 1s = 1J$$

Kilovat-čas (kWh) je rad koji mašina snage 1kW izvrši za vreme od 1 časa, tj.

$$1 kWh = 1000W \cdot 3600s = 3,6 \cdot 10^6 J$$

20. ENERGIJA

Mada je pojam energije prilično teško definisati, on nam je blizak iz svakodnevnog života. Poznato je da se rad koji vrše ljudi i životinje postoji i druge vrste rada. Na primer, voda koja teče može da obrće vodenični točak, kamen prilikom pada sa izvesne visine može da izvrši rad, sabijena opruga prilikom puštanja može da izvrši rad, itd. Fizička veličina koja karakteriše sposobnost tela ili sistema tela da izvrše rad naziva se energijom. Pri vršenju rada telo gubi energiju i prenosi je na sistem koji vrši rad. Rad

se, znači, može definisati kao proces kojim se vrši prenošenje energije medju telima.

Teorema (stav) o radu i energiji. Iz iskustva je poznato da je energija, koju izgubi (utroši) telo vršeći rad, jednak tom radu i obrnuto, rad izvršen nad nekim telom jednak je povećanju njegove energije

$$\Delta E = E_f - E_i \equiv A \quad (20.1)$$

Na ovaj način je uspostavljena veza izmedju promene energije i rada, čime je omogućeno nalaženje energije preko izvršenog rada. Ova veza dalje pokazuje da se energija i rad izražavaju istim jedinicama, iako je po svojoj prirodi u pitanju druga fizička veličina. Energija je veličina koja karakteriše stanje tela, dok je rad veličina koja karakteriše promenu tog stanja. Telo poseduje energiju, a rad predstavlja proces prenošenja energije sa jednog tela na drugo, ili proces pretvaranja jednog oblika energije u drugi. Na primer, pri elastičnom sudaru dva tela, jedno telo predaje drugom deo svoje energije.

Energija, kao i masa, predstavlja jednu od osnovnih karakteristika materije. U klasičnoj mehanici ove dve veličine su medjusobno nezavisne. Tek je u relativističkoj mehanici pokazano da je energija proporcionalna masi tela, čime je uspostavljena njihova medjusobna veza. U klasičnoj mehanici postoje dva oblika energije i to kinetička i potencijalna.

20.1. Kinetička energija

Da bismo uveli matematički izraz za kinetičku energiju tela, izračunaćemo rad sile F , koja deluje na telo mase m , koje se kreće po horizontalnoj podlozi bez trenja. Sila daje telu ubrzanje a , koje ćemo dobiti primenom II Newtonovog zakona. Neka brzina raste od v_1 , u početnom položaju s_1 , do v_2 u krajnjem položaju s_2 . Rad koji izvrši sila iznosi

$$A = \int_{S2}^{S1} F \cdot dS$$

Kako je $F = ma$ i $a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}$, dobijamo

$$A = \frac{\vec{m} \cdot \vec{v}_2}{2} - \frac{\vec{m} \cdot \vec{v}_1}{2}$$

(20.2)

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Ako relaciju (20.2) uporedimo sa teoremom (20.1) videlicemo da je matematički izraz za kinetičku energiju opteg oblika

(20.3)

20.2. Potencija na energija

okožinu.

Kinetičke energije, ali ovoga puta energetička prelazi s mase na je vrši se u suprotnom smjeru; izvršen rad opet je mera promene sile deljive euprotinje od smera kretanja, transformacija energije dolazi spolja u kinetičku energiju mase. S druge strane, kada gija mase raste. Izvršen rad mjeri transformaciju energije koja rad deljive energije na masu u smeru njenog kretanja, kinetička ener-

Rezimixajući dakle, možemo reći da kada sila vrši

ne umjeri.

od njene maksimalne vrijednosti do nule, tj. dok se telo savrim

gde je \vec{h} jedinični vektor, koji

$$\vec{Q} = -mg\vec{h} \quad (20.4)$$

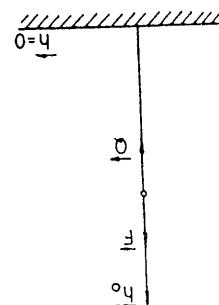
telu $\vec{Q} = mg \vec{i}_2$ u vektorskom obliku

Zemlje (sl. 20.1). Kako je težina voljno nivoa, recimo površine slijudi da se telo mase m diigne na vis izračunamo minimum potrebitog zraka težina u gravitacionom polju

Da bi smo dobili matematički izraz za energiju potrebitog izračunajmo potenciju elastičnosti potencijalnog energetičkog sistema slike, pa se otuda govoriti o gravitacionoj i polje elastičnosti slike, pa se potencijalnoj energiji.

Najakuteljnija polja slike u mehanički su gravitacione polje težina da izvrši rad zavlačujuće polozaju u kome se nalazi.

zato potencijalna energija popularno definise kao sposobnost sposebno da ovaj rad u bilo kom trenutku varane vrati, pa se kumulira dospevaći u datu takvu nekog polja slike. Telo je potencijalna energija predstavljala rad koji telo a-



a. Gravitaciona potencijalna energija

izvrsiti, može poticati samo od smanjenja kinetičke energije njega deljive usporavajućom silom. Rad Fds, koji to telo može ka energetička prelazi na sistem koji okružuje telo i koji na usporava, njegova kinetička delovanjem neke sile m/2. S druge strane, ako se telo pod delovanjem energije od mirovanija do brzine utrositi koliki su ubrzanjem masa netička energija iznositi m/2. To znaci da za ubrzanje mase Ako se, dakle, masa kreće brzinom v, njena kinetička energija zine telu i jednak je promeni kinetičke energije.

poloziji bez trenja, rad sile se utrosi samo na povećanje brzine težina brzina telu. Kada se telo pomera po horizontalu i potencija izrazu se pojavljuje samo masa, te krajnja dužinom, u krajnjem izrazu se pojaviči slike po volji menjati; takođe i put s2 - s1 može biti većik ili malii. Međutim, za rad sile, pri vremenju rada slike F se može po volji fundamentalno značenje kinetičke energije vidimo iz izraza

(20.3)

Ako rečemo (20.2) uporedimo sa teoremom (20.1) videlicemo da je matematički izraz za kinetičku energiju opteg oblika

(20.2)

$$A = \int_{S2}^{S1} m \cdot v \frac{dv}{ds} ds = \int_{V2}^{V1} m \cdot v dv$$

Kako je $F = ma$ i $a = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{v}{ds}$, dobijamo

$$A = \int_{S2}^{S1} F \cdot ds$$

sila \vec{F} potrebna da podignemo telo po inetenzitetu konstantna i jednaka težini tela

$$\vec{F} = -\vec{Q} = \vec{mgh}_0 \quad (20.5)$$

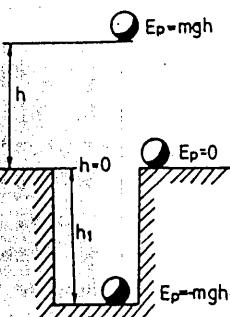
Rad potreban da podignemo telo prema (18.1) iznosi

$$A = E_p = \vec{F} \cdot \vec{h} = mgh \quad (20.6)$$

tj. potencijalna energija nekog tela u gravitacionom polju zavisi samo od njegove visine u odnosu na površinu Zemlje ($h=0$). Kako se nulti nivo potencijalne energije bira proizvoljno, ovaj vid energije može biti i negativan.

Na primer, prema slici 20.2. posmatrano telo ima na površini Zemlje potencijalnu energiju $E_p=0$, na visini h $E_p=mgh$, a u jami dubine h_1 $E_p=-mgh_1$.

S1. 20.2 telo nismo podizali vertikalno, nego po bilo kakvoj krivoj površini bez trenja (sl. 20.3). Za



vreme infinitezimalnog pomaka ds duž krivine postoje tri sile koje deluju na telo: težina mg prema dole, normalna sila N koja predstavlja reakciju podloge i spoljašnja sila F koja pomera telo prema gore. Neka sila F zaklapa sa tangentom na površini ugao θ . Za telo koje se polako pomera po površini tangencijalne komponente svih sila moraju biti u ravnoteži, tj. mora biti

$$F \cos \theta - mg \sin \psi = 0 \quad (20.7)$$

Rad koji izvrše spoljašnje sile pomerajući telo iz tačke 1 u tačku 2 iznosi

$$A = \int_1^2 F \cos \theta \, ds \quad (20.8)$$

ili prema (20.7)

$$A = \int_1^2 mg \sin \psi \, ds \quad (20.9)$$

Odnos izmedju infinitezimalnog puta ds , njegove vertikalne komponente dy i ugla ψ prikazan je na slici 20.3. Očigledno je

$$ds \sin \psi = dy$$

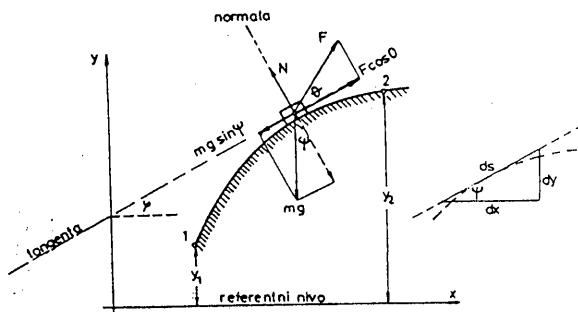
pa je

$$A = \int_1^2 m \cdot g \cdot dy$$

odnosno

$$A = m \cdot g \cdot y_2 - m \cdot g \cdot y_1 \quad (20.10)$$

Izraz (20.10) pokazuje da izvršen rad zavisi samo od početnog

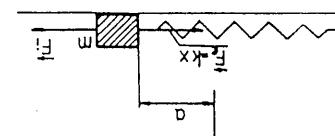


Sl. 20.3

$$E_p = \frac{K}{2} x^2$$

povećali potencijalnu energiju opругe sa 0 na
pa može da smo ovim radom

SL. 20.4



vršimo rad
te pri istezanju od 0 do x

$$(20.15)$$

$$A = \int_a^b F_2 dx = K \frac{x^2}{2} \quad (20.14)$$



te pri istezanju od 0 do x

$$F_2 = -F_1 = Kx \quad (20.13)$$

na možemo naprasti u obliku
potencijalna energija povrgana u celom sistemu, tj. da se
na potencijalna energija povrgana u celom sistemu, tj. da se
potencijalnu energiju. Ispravno je shvatiti da je gravitacija
izgubiti predmet (na pravac jedan planeto) bilo uporedivo ve-
zine, ne bi bilo jasno kogem od ta dva treba pogodati
smo istovremeno nogama podignemo neki predmet sa poda, mi
va. Ako, na primjer, ukama podignemo neki predmet sa poda, mi
čalanu energiju svojstvo sistema, a ne potencijalnu njegovu! de-
do na aditivnu konstantu. Takođe treba osjetiti da je potencij-
alne razlike potencijalnih energija, koga je nezavisna od
različenosti, međutim, nije značajna u praksi, jer se uvek
neodređenost, a ne razlike potencijalnih energija, neće biti. Ta
je već povijesni nivo, gde potencijalna energija nije nula. Ta
projektovani su svi: na primjer, za pod sobe površina stola
nivo površina stola. No očito je da je površina stola savšim
je projektovano. Podignemo li telo sa stola, tada nam je nulti
dutim, određivanje nultog referentnog nivoa referentnom nivou. Me-
nje, tj. kada se telo nalazi na nultom referentnom nivou, me-
nje, tj. kada je potencijalna energija jednaka nuli kada je
implicira da je potencijalna energija potencijalne energije, nego,
da je potencijalna energija potencijalne energije.

$$F(x) = -Kx \quad (20.12)$$

ne si te intenzitet linearno povećava sa rastojanjem elasti-
čići se elastična slika. Posmatrajući elastičnu sliku
nog sistema od ravnotežnog položaja.

b. Potencijalna energija elastične deformacije

$$E_p = - \int_{-x}^x F \cdot dx + C \quad (20.11)$$

nati je formule
u potencijalnu sliku F potencijalna energija se može izračun-
ati ima ovakvu osobinu zovu se konzervativnim poljima. Slije-
da duž koje smo pomerali telo. Fizička polja u kojima izvršen
(y1) i krajnjeg položaja (y2), a nezavisan je od oblika puta-

c. Apsolutne vrijednosti potencijalne i kinetičke
energije

me, tj. takve sisteme na koje ne deluju sile. Sile
u mehaniči vrlo jesti analiziramo zatvorene siste-

20.3. Zakon držanja energije

startu s obzirom na određeni energetički sistem. Kinetičku energiju daktele definisemo da na jednu aditivnu kon-
verziju brzinom, koji mi ne opazamo. Samo je daktele nezgova kine-
tičku razmatranju mogu se preneti i na kinetičku
energiju. Kinetička energija te la kaje miruje u labboratorijs-
koj učinku. No znamo da se to isto tako kaje zaledeno sa Zemljom
je učinku. Kinetička energija mogu se preneti i na kinetičku

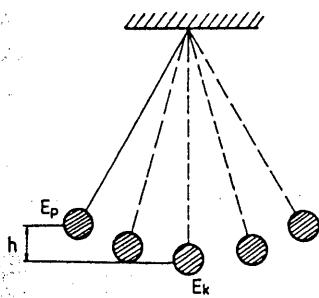
energiju elastične opruge kada je rastegnemo.
dusobno učinku. Slijedno tome se, na primjer, potencijalna
potencijalna energija sistema dva planetoida poveća kada ih me-
na potencijalna energija povrgana u celom sistemu, tj. da se
potencijalnu energiju. Ispravno je shvatiti da je gravitacija
izgubiti predmet (na pravac jedan planeto) bilo uporedivo ve-

dignuti predmet (na pravac jedan planeto) bilo uporedivo ve-
zine, ne bi bilo jasno kogem od ta dva treba pogodati
smo istovremeno nogama podignemo neki predmet sa poda, mi
va. Ako, na primjer, ukama podignemo neki predmet sa poda, mi
čalanu energiju svojstvo sistema, a ne potencijalnu njegovu! de-
do na aditivnu konstantu. Takođe treba osjetiti da je potencij-
alne razlike potencijalnih energija, koga je nezavisna od
referentnog nivoa. Potencijalna energija jednaka je određena, daktele,

radi o razlike potencijalnih energija, koga je nezavisna od
neodređenosti, međutim, nije značajna u praksi, jer se uvek
projektovani su svi: na primjer, za pod sobe površina stola
nivo površina stola. No očito je da je površina stola savšim
je projektovano. Podignemo li telo sa stola, tada nam je nulti
dutim, određivanje nultog referentnog nivoa referentnom nivou. Me-
nje, tj. kada je potencijalna energija jednaka nuli kada je
implicira da je potencijalna energija potencijalne energije, nego,

U takvim sistemima se pojavljuju samo kao međudelovanja tela u sistemu. Rad u tim sistemima se odvija kroz izmenu energije. Pitanje koje možemo postaviti jeste da li se energija u tim procesima transformacije izgubi ili ostaje sačuvana.

Jednostavan primer prelaza kinetičke energije u potencijalnu daje nam obično klatno (sl. 20.5). U krajnjem levom (ili desnom) položaju kuglica ima najveću visinu, zbog toga će imati i najveću potencijalnu energiju u tom položaju. Kad se spušta gubi potencijalnu energiju, ali postaje sve brža i dobija kinetičku energiju. U najnižem položaju potencijalna energija je najmanja, ali je brzina kuglice najveća, pa će biti najveća i kinetička energija.



Sl. 20.5

Drugim rečima, kinetička i potencijalna energija kuglice nisu stalne. One se neprestano menjaju, ali koliko se jedna poveća toliko se druga smanji. Njihov zbir ostaje stalan. Zato govorimo o održanju energije i to ne samo kinetičke ili samo potencijalne, već ukupne energije. To se može napisati u obliku

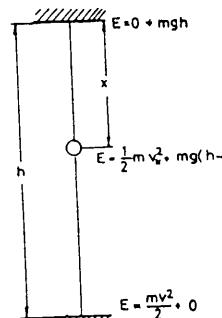
$$E = E_k + E_p \quad (20.16)$$

ili formulisati na sledeći način: ukupna mehanička energija (E) za tvorenog sistema tela, između kojih dejstvuju samo potencijalne sile, ostaje nepromenjena, ili u zatvorenom sistemu u kojem ne deluju sile trenja, zbir kinetičke i potencijalne energije (mehanička energija) je konstantan. Ovo pravilo se zove i zakon o održanju mehaničke energije.

Navedeni primer kvalitativno ilustruje zakon o očuvanju mehaničke energije. Međutim, nije jasno da li ovo razmatranje važi i kvantitativno, tj. da li je u svakom položaju kuglice pri njihanju zbir kinetičke i potencijalne energije

stalan. Analizirajmo zato primer slobodnog pada (sl. 20.6), gde telo iz stanja mirovanja pada sa visine h . Na početku je njegova kinetička energija nula. Na osnovu (20.16) ukupna energija sastoji se dakle samo od potencijalne energije i iznosi

$$E = E_p = mgh$$



Sl. 20.6

Nakon pada (otpor vazduha se zanemaruje) za proizvoljnu visinu x telo ima brzinu v_z i kinetičku energiju $mv_z^2/2$. Ukupna energija je

$$E = \frac{mv_z^2}{2} + mg(h - x)$$

Kako je brzina kod slobodnog pada prema (5.2) $v_z = \sqrt{2gh}$, to je energija tela

$$E = \frac{m}{2} 2gx + mg(h - x) = mgh$$

jednaka kao na početku.

Telo, slobodno padajući, posle izvesnog vremena pada na površinu Zemlje ($h=0$) i tada mu je potencijalna energija jednaka nuli. Kako je brzina tela u trenutku udara o Zemlju $v = \sqrt{2gh}$, dobija se da je kinetička energija u tom položaju

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m 2gh = mgh$$

tj. jednaka je energiji tela koju je ono imalo na visini h . Odavde se vidi da telo prilikom slobodnog pada održava svoju ukupnu mehaničku energiju, iako se potencijalna energija pretvara u kinetičku.

Izraz (20.16), iako razmatran u jednom posebnom slučaju, je opšti. Naime, radi jednostavnosti u prethodnim primerima, govorili smo samo o potencijalnoj i kinetičkoj energiji i njihovom zbiru. Da smo u razmatranje uključili i trenje, struktura izraza (20.16) ostala bi ista, samo bi se

$$F_{tr} = \frac{M}{R} = \frac{M}{R} \cos \alpha$$

N = Q cos α. Na osnovu (21.2) može se napisati da je
netuči $F = Q$ etra u pravcu strme ravni i normalnu komponentu
težina teža Q može da se razloži na dve komponente - kompo-
nentu težine teža Q može da se razloži na dve komponente - kompo-

$$F_{tr} = M_0; R = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad (21.3)$$

21.1., slika treninga je
u primjeru kretanja teža, predstavljenom na sljedi-

će telo deluje na podlogu.
ne zavisi od dodirne površine teža, već samo od slike kojom
je trenja. Eksperimentirano je nadjeeno da slika slijeduće treninga
gde je R - koeficijent proporcionalnosti i naziva se koeficij-

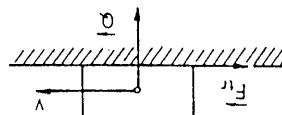
$$F_{tr} = R \cdot N; R = \frac{F_{tr}}{N} \quad (21.2)$$

za slučaj kretanja teža po nekoj podlozi eksperi-
mentirano je utvrđeno da je slika trenja F_{tr} proporcionalna
normalanu komponenti slike N, kojom telo protiskuce podlogu, t.j.

a. Svoje kretanja

Treninge koje se javlja pritisu obrazac treninga. Treninge još delimo na treninge
stima težima zove suvima treningem, dok se treninge medju cvr-
težnostima zove se viskoznim treningem, dok se treninge medju slojevima
treninge koje se javlja pritisu obrazac treninga. Treninge koje se javlja pritisu obrazac treninga.

Sl. 21.1



sto se makrofizički opisuje kao "gubitak" mehaničke energije
prenositi na mikrokretanje sistema,
molekula, što znači da se energija
netičke i potencijalne energije
ta ustvari troši na povećanje ki-
namicičem vredeti da se ova toplo-
ma pretvara u toplostu. U termodi-
koga deo mehaničke energije siste-
sa desne strane površinu izraz za rad slike treninga. No, u svakoj
kom slučaju, rad spoljasnjih sile A_p bi jednak zbiru pro-
meni kinetičke energije AE_k i potencijalne energije AE_p uve-
gane eventualno za rad slike treninga A_tr.

$$A_{tr} = F_{tr} \cdot s = -F_{tr} s \quad (21.1)$$

dinamiku. Slije trenja vrše rad na težima smanjujući njihovu
njegu, za razliku od trenja u stenju kretanja koji se naziva
postoji i u slučaju mikrovanijskih slika i naziva se statičko tre-
trenje posledica delovanja molekularnih slika na površini te-
trenje je vrlo komplikovana postava i mada može da rege da je
ukvuk usmerene nasuprotni slika trenja. Slika trenja su
druge slike slijednja delovanja svoje površine. Slije trenja su
vlijala kod teža koja se relativno kreće jedno prema drugom do-
izmije ostalih slika delujuće i slika trenja. Slika trenja se ja-
po evristici podlozi i kroz neku tehniku sliki gase, na njega
čuna o treningu. Međutim, ukvuk kada se jedno telo kreće, bilo
pri proučavanju kretanja do sada nismo vodili ra-

21. TRENING

običku vazi u svim oblastima prirodnih nauka.
zakon je jedan od fundamentalnih zakona fizike i u opštrem
promeniti, već samo pretvarati u razne vidove. Demonstrirani
čime je pokazano da se energija izjavljavanog sistema ne može

$$E_k1 + E_p1 = E_k2 + E_p2$$

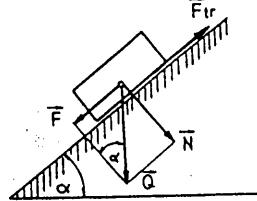
$$\Delta E^p + \Delta E^k = 0$$

Ako zanemarimo treninge i ako je sistem zatvoren, tada je rad
spoljasnjih sile A_p = 0, te iz izraza (20.17) dobijamo

$$A_p = \Delta E^k + \Delta E^p + A_{tr} \quad (20.17)$$

sa desne strane površinu izraz za rad slike treninga. No, u svakoj
kom slučaju, rad spoljasnjih sile A_p bi jednak zbiru pro-
meni kinetičke energije AE_k i potencijalne energije AE_p uve-
gane eventualno za rad slike treninga A_tr.

Ako se ugao strme ravni podesi da telo klizi niz strmu ravan stalnom brzinom ($\vec{v} = \text{const.}$), onda su sile \vec{F} i \vec{F}_{tr} u ravnoteži, tj.



Sl. 21.2

Koefficijent trenja zavisi od vrste materijala i obradjenosti dodirnih površina, kao i od brzine kretanja tela. Ovaj koefficijent ima najveću vrednost kada je uzajamna brzina tela $v = 0$ (statički koefficijent trenja). Pri malim brzinama koefficijent trenja ima malu vrednost i generalno se njegova vrednost povećava sa povećanjem brzine kretanja.

Da bi umanjili uticaj trenja na kretanje tela po podlozi upotrebljavaju se sredstva za podmazivanje. Kad se upotrebni takvo sredstvo, a to je najčešće neko ulje, onda se izloženi zakoni trenja znatno menjaju. Sila trenja nije više nezavisna od veličine dodirne površine, već više zavisi od nje nego od normalnog pritiska.

Najčešće se uticaj trenja smanjuje na taj način što se, kad god je to moguće, trenje klizanja zamjenjuje trenjem kotrljanja upotrebom valjkastih ili kugličnih ležaja.

Ne treba naglašavati da trénje nije uvek štetna pojava. Da nema trenja automobili, vozovi itd. ne bi mogli da se kreću. Ukoliko ne bi bilo trenja, hodanje bi bilo kao na poleđici. No i poređ toga, trenje može biti štetna pojava; na primer, trenje u pokretnim delovima raznih mašina u mnogome utiče na njihov uvek trajanje.

$$\begin{aligned}\vec{Q} \sin \alpha &= \mu \vec{Q} \cos \alpha \\ \text{ili } \mu &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad (21.4)\end{aligned}$$

Izraz (21.4) omogućuje da se merenjem nagibnog ugla strme ravni odredi koefficijent trenja.

IV G R A V I T A C I J A

22. NJUTNOV ZAKON GRAVITACIJE

Od svih sila sa kojima se srećemo u svakodnevnom životu najočitija je težina. Svako telo na Zemlji ima težinu, što znači da svako telo na Zemlji, prepusteno samo sebi, pada ubrzano po trajektoriji koja je u proseku normalna na Zemljinu površinu. Kažemo "u proseku", jer druge sile, na primer otpor trenja, mogu deformisati pravolinijsku putanju koju, na primer, zapažamo pri padanju težih tela.

S druge strane, ne manje uočljiva pojava bilo je kružno kretanje nebeskih tela po nebeskom svodu. Dnevno kretanje zvezda, dnevno i godišnje kretanje Sunca, te znatno složenija kretanja Meseca i planeta* budili su interes i znatiželju ljudi od nauke od davnina. Međutim, ideja da su te dve pojave, težina i kretanje nebeskih tela, povezane relativno je nova. Naime, gotovo dvadeset vekova posle postavke Ptolomejeve teorije geocentričnog sistema** torunjski biskup Nikola Kopernik postavlja teoriju heliocentričnog sistema prema kojoj je Sunce središte svemira, a sve ostale planete, pa i Zemlja, kruže oko njega. Ovo je osnovna postavka heliocentričnog sistema. Druga Kopernikova postavka jeste da se Zemlja kreće oko Sunca u pravcu zapad-istok i da u toku jedne godine obidje oko Sunca, a za 24 časa se obrne oko svoje ose. Njegova treća postavka jeste da je osa Zemlje nagnuta pod uglom od $66,5^\circ$ prema ravni svoje putanje (ekliptike). O Kopernikovom naprednom shvatanju Engels je napisao: "Kopernik je prvi skinuo zvezde sa neba i omogućio

* Planete su: Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn itd.

** Prema teoriji geocentričnog sistema Zemlja je nepomična i nalazi se u središtu svemira.

*** Nikolaj Kopernik (1473-1543), poljski astronom, osnivač heliocentričnog sistema, koji je postavio u svom delu "De revolutionibus orbium caelestium, libri VI", izdatim nekoliko meseci pre smrti. Kopernik pripada onim umovima čija je nauka bitno promenila svet.

Na osnovu Kepplerovih zakona i svojih vlastnosti zatancje predstavlja Njutnov zakon gravitacije. Preostaje još da se odatle dolazi slika, koja deluje na planetu. Njutn je naišao kvadratu udaljenosti od Sunca. Izraz (22.5) već u svu-

$$\text{Sledi, da je slika, koja deluje na planetu obnuto proporcijom}$$

$$F = \frac{4\pi^2}{R^2} \frac{m}{M} = K \cdot \frac{m}{R^2} \quad (22.5)$$

S1. 22.2
ili, nakon zamene v iz (22.3)

$$F = \frac{mv^2}{R} \quad (22.4)$$

tanjem)

slika, t.j. imo oblik (za kružno kre-
smeđe prema Suncu, je centralna potrebita
slika koja deluje na planetu, a imo

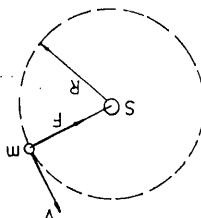
$$v^2 = \frac{K R}{m} \quad (22.3)$$

dobjija se

gdje je R - poluprečnik kružnog, a v - brzina kretanja planete.

$$T = \frac{2\pi}{v}$$

period obrtanja se može napisati kao
vrednost planeta pridržano kružnicu (S1. 22.2). U tom slučaju
planeti kreću veoma malo razlikuju od kružnice, to se pri iz-
pitovanju izraza za gravitacionu sili može predepositaviti da je
planeti matematički izvodjenje oblika gravitacione sile za eli-
ipse. Matematičko izvodjenje centralne (gravitacione) sile, čiji je izvor
dejstvom jeđene centralne (gravitacione) sile, čiji je izvor
kojeg su ovih empirički zakoni posledica kretanja planeta pod
prinципima Matematičica. Ovdje je Njutn formulisao teoriju po
godišnju u njegovom kapitalnom delu "Philosophiae Naturalis
Konta Njutn je izveo matematički oblik sile koja uzrokuje kre-
tanje planeta oko Sunca. Zakon gravitacije objavljen je 1686.



S1. 22.2

zakon 1618. g. u delu "Harmonice mundi".
Mars i empirijske zakone kretanja planeta (1. i 2. zakon 1609. g. 3.
ma bunačevanje zivotinja, koji ga je u svom delu "Astronomia" teoriju kretanja
intervijum postavio je u svom delu "Astronomia" teoriju kretanja planete
začeljivala. Zajedno sa drugim astronomom, I posred uo-
čio Johannes Kepler (1571-1630), nemakati astronom. I posred uo-
(teleškop je Galileo između 1609. g.) i prečiznije nije govoriti među
dvoračem kraljica Rudolfa u vrsti je Bracche savršena među njima počasna pla-
nete Mars, mereći tzu. "Zavorone", Bracche savršena među njima počasna pla-
kružnice kao savršenog modela putanje nebeskih trela.
Jedna od bitnih postavki Kepplerovih zakona bilo je odbacivanje
putne konstante kima tatu predočest za sve
planete.

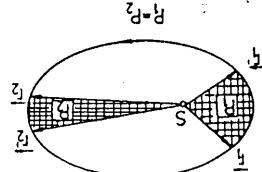
$$T^2 = KR^3 \quad (22.1)$$

3. kvadrat perioda obrtanja pla-
nete oko Sunca odnos je kao treći stepeni njih
horizontalne rastojanije od Sunca

(S1. 22.1)***;

2. radijus vektor biti količine
neće za isto vreme prelazi jednake površine

1. putnja saka planete je elipsa sa Suncem u jednom od njih
nog sistema:
trii zakona, koji predstavljaju empiričku osnovu heliocentrič-
ke teorije ne može dobiti komplinaciju kružni kretanje. Re-
zultati njegova dva desetogodisnjeg istraživanja nebeskih
planeta ne mogu dobiti kružni kretanje. Re-
zultat je da zaključi da se kretanje
nebeskih planeta u heliocentrični sistem i da zaključi da se kretanje
Bračhe pruzio je odužne dokaze da Johan Keppler prihvati Ko-
da li nesmetani razvoj nauka". Na bazi sistema skog posmatranja
nebeskih trela, a posebno planete Mars, danski astronom Thilo de
Bračhe pruzio je odužne dokaze da Johan Keppler prihvati Ko-
da li nesmetani razvoj nauka". Na bazi sistema skog posmatranja
nebeskih trela, a posebno planete Mars, danski astronom Thilo de
Bračhe pruzio je odužne dokaze da Johan Keppler prihvati Ko-
da li nesmetani razvoj nauka". Na bazi sistema skog posmatranja
nebeskih trela, a posebno planete Mars, danski astronom Thilo de
Bračhe pruzio je odužne dokaze da Johan Keppler prihvati Ko-



predpostavio da ta sila dolazi od Sunca i da je proporcionalna Sunčevoj mase m_S . Drugim rečima, faktor proporcionalnosti $K' = 4\pi^2/K$ u izrazu (22.5) možemo pisati kao Gm_S , gde je G univerzalna konstanta. Na taj način se dobija oblik za gravitacionu silu

$$F = G \frac{m_S m}{R^2} \quad (22.6)$$

Prelaz od izraza (22.5) na izraz (22.6) nije tako jednostavan kako bi na prvi pogled moglo izgledati. Zaključak da sila, koja deluje prema Suncu, ima svoje poreklo u samom Suncu je da lekosežan zaključak dubokog fizičkog značenja. Sunce je, dakle, centar sila koje deluju na daljinu bez vidljive fizičke veze.

Uvodjenjem gravitacione sile Njutn je generalisao pojam sile, koji je do tada bio uopšteno vezan na delovanje tela u bliskom dodiru. Tela, dakle, mogu delovati na daljinu bez direktnе veze medju njima. Princip delovanja na daljinu, tj. postojanje sila koje potiču iz jednog središta, bio je odlučujući u razvoju fizike XVIII i početka XIX veka.

Genijalnom intuicijom Njutn je uočio da zakon gravitacije ne određuje samo kretanje planeta. Gravitaciono medjudelovanje je temeljno delovanje izmedju tela. Na bilo koja dva tela mase m_1 i m_2 , koja se nalaze na udaljenosti R deluje gravitaciona sila

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad (22.7)$$

ili u vektorskom obliku

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{r}_0 \quad (22.8)$$

Izraz (22.7) predstavlja zakon univerzalne gravitacije, koji možemo formulisati na sledeći način:

Svaka materijalna čestica privlači svaku drugu česticu silom koja je upravo proporcionalna proizvodu njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti medju njima.

Zakon gravitacije važi za kretanje planeta, zvezda i galaksija, kao i za padanje predmeta na Zemlji. Danas, međutim, znamo da je Njutnov zakon gravitacije samo prva aproksimacija (iako izvanredno dobra) opštег zakona gravitacije u okviru opšte teorije relativnosti.

22.1. Ubrzanje Mesečevog kretanja oko Zemlje

Njutnov zakon gravitacije, koji smo izveli iz Keplerovih zakona i fizičke postavke da je Sunce središte i izvor gravitacione sile, primer je fizičke teorije koja objašnjava određeni skup fizičkih pojava. Međutim, test ispravnosti svake fizičke teorije je objašnjenje i onih pojava koje su izvan tog skupa. Kako je, dakle, Njutn eksperimentalno proverio svoj zakon gravitacije? Zakon je izведен iz empirijskih činjenica o kretanju planeta. Ako je zakon univerzalan, mora važiti i za kretanje drugih nebeskih tela, na primer Meseca. Njutn je zato primenio svoj zakon na kretanje Meseca oko Zemlje. U ovom slučaju gravitaciona sila deluje izmedju Zemlje i Meseca. Kako je masa Meseca manja, to će ubrzanje koje ta sila daje Mesecu biti veća. S druge strane, ako je zakon gravitacije univerzalan, on određuje i gravitaciono delovanje na Zemlji, tj. padanje tela prema središtu Zemlje. Gravitaciono ubrzanje će biti i u slučaju kretanja Meseca i u slučaju padanja tela na Zemlju obrnuto proporcionalno kvadratu udaljenosti od središta Zemlje, pa će se ta dva ubrzanja odnositi kao kvadrat Zemljinog radijusa prema kvadratu udaljenosti Meseca od Zemlje. Treba, naravno, uočiti da se pri kretanju Meseca radi o centripetalnom (radikalnom) ubrzavanju: Mesec "pada" prema Zemlji za iznos za koji se njegova putanja zakrivi.

Proračun koji je izveo Njutn na osnovu poznatih podataka o kretanju Meseca potpuno je potvrdio ispravnost zakona gravitacije. Zemljin radijus iznosi 6377 km; radijus Me-

đaju dva tečla pozname male smestena na datoj udaljenosti jedno
se odrediti tako da se izmeri gravitaciono privlačenje između
noskih merenja. Eksperimentalo, vrednost konstante G astro-
dijutim, tu vrednost nije bilo moguće odrediti iz samih astro-
nos te sile zavisi od vrednosti univerzalne konstante G. Među-
kvama deljive sile (Gm₁m₂/r²) u smernu njihove sposobnosti. Izmedju dva ta-
menjiv na svaku tečlu u svemiru koja imaju masu. Izmedju dva tra-
njirov zakon gravitacije je univerzalni zakon, pri-

daju dva tečla pozname male smestena na datoj udaljenosti jedno
se odrediti takto da se izmeri gravitaciono privlačenje između
noskih merenja. Eksperimentalo, vrednost konstante G astro-
dijutim, tu vrednost nije bilo moguće odrediti iz samih astro-
nos te sile zavisi od vrednosti univerzalne konstante G. Među-
kvama deljive sile (Gm₁m₂/r²) u smernu njihove sposobnosti. Izmedju dva tra-
njirov zakon gravitacije je univerzalni zakon, pri-

G; Krevendžova vaga

22.2. Eksperimentalo odredjivanje konstante gravitacije

sto je identično u okviru tenuostti eksperimentalnih opazanja.

$$a = 2,76 \cdot 10^{-4} \times 9,81 = 2,72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Vog zakona iznosi Rezultat koji smo dobili za Mesecovo ubrzanje primenom Nutra-

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{1,062 \cdot 940}{384 \cdot 400 \cdot 10^5} = 2,76 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

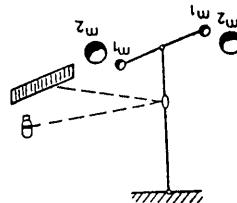
Premda tome $v_M = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 384 \cdot 400 \cdot 10^3}{2,34 \cdot 10^5} = 1031 \text{ m/s}$
Centripetalno ubrzanje Meseca dobijamo iz brzine kretanja

čija je $R_M = 384 \cdot 400 \text{ km}$ za $T = 27,3 \text{ dana}$, tj. za $23,4 \cdot 10^5 \text{ sekundi}$.
Mesec se oko Zemlje okreće po prizbiljivo kružnoj putanji radijus
pada g, tj. oko $0,27 \text{ cm/g}$. Sta o tome kaže astronomski podaci?

Mesecovo ubrzanje svega oko $1/400$ iznosa ubrzanja slobodnog
(radijus Zemlje smo uzeli na $450 \text{ geografske širine}$) kaže da je

$$\left[\frac{R^2}{R^2} \right] = \left(\frac{384 \cdot 400 \text{ km}}{6 \cdot 377 \text{ km}} \right)^2 = 2,75 \times 10^{-4}$$

sekreve putanje iznosi $384 \cdot 400 \text{ km}$. Odnos



od drugog. Prvo precizno merenje konstante G izveo je Keven-
diš 1798. Godine, iako je merenje uređaji zamislilo već pre nje-

22.3. Određivanje mase Zemlje i Sunca

Često se može pročitati i ovo: Kevendiš je pomoću torziona vase izmerio Zemlju. To je tačno, a evo i kako. Gravitaciona sila, koja deluje između Zemlje i svakog tela na Zemljini daje tim telima ubrzanje, koju uočavamo kao slobodan pad. Pomoću ubrzanja slobodnog pada g , vrednosti konstante gravitacije G i Njutnovog zakona gravitacije izračunaćemo masu Zemlje. Sila između mase m_1 i Zemlje mase m_2 iznosi

$$m_1 g = G \frac{m_1 m_2}{R_z^2} ; g = G \frac{m_2}{R_z^2} \quad (22.9)$$

odnosno

$$m_2 = \frac{R_z^2 g}{G} \quad (22.10)$$

gdje je R_z - poluprečnik Zemlje.

Sa vrednostima $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{s}^2$ i $R_z = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ dobija se

$$m_2 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Kako je zapremina Zemlje:

$$V_z = \frac{4}{3} R_z^3 \pi = 1,09 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$$

proizilazi da je srednja zapreminska masa Zemljine materije

$$\bar{\rho}_z = \frac{m_2}{V_z} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Kako je dobijena vrednost $\bar{\rho}_z$ znatno veća od zapreminske mase materijala blizu Zemljine površine (na primer, vode ili kamena), to unutrašnjost Zemlje mora da je sastavljena od materijala mnogo većih vrednosti ρ od $\bar{\rho}_z$.

Sila kojom Sunce deluje na Zemlju može se izraziti

kao centripetalna sila preko izraza (22.4) i (22.2)

$$F = \frac{4\pi^2 m_2 R}{T^2}$$

ili prema zakonu (22.7)

$$F = G \frac{m_S m_Z}{R^2}$$

Na osnovu poslednja dva izraza za silu sledi da je masa Sunca

$$m_S = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{R^3}{G}$$

Nakon zamene brojnih vrednosti za: $T = 365 \cdot 86400 \text{ s}$ (period obilaska Zemlje oko Sunca za 1 godinu = 365 dana), $R = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$ (srednje rastojanje Zemlje od Sunca) i $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{s}^2$ (konstanta gravitacije) dobija se

$$m_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

tj. m_S je oko 330 000 puta veće od m_Z .

22.4. Gravitaciona i inercijalna masa

Svojstvo materije nazvano masa ispoljava se na dva sasvim različita načina. Za gravitacionu silu između dva tela kažemo da je proporcionalna proizvodu njihovih mase. U tom smislu masa je ono svojstvo materije preko kojeg svako telo deluje privlačnom silom na neko drugo telo. To ćemo svojstvo zvati gravitaciona ili teška masa. S druge strane II Njutnov zakon kazuje da moramo primeniti silu (ne obavezno gravitacionu) ako želimo da promenimo vrednost ili smer brzine nekog tela. To svojstvo, preko kojeg se telo protivi promeni kretanja, nazvaćemo inercijalna ili troma masa. Vidimo da nije очigledno da gravitaciona masa jednog tela mora biti jednaka njegovoj inercijalnoj masi. Eksperiment, međutim, pokazuje

(22.14)

gravitacione polje postoji oko svakog telea i pove-
zano je sa tim telom. Pri kretanju
jednoj mase u blizini druge, gravitacione
silu potreba da se postavi u ravnotežu.

(22.13)

$$\frac{F}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

ili u skalarnom obliku

$$\frac{F}{m} = - G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

Ako se u razlikuju (22.11) unese izraz za gravitacijsku silu, definisanu Newtonovim zakonom gravitacije (22.7), dobija se jaka polja u nekoj tacki Zemljine gravitacione cijonu silu, definisanu Newtonovim zakonom gravitacije (22.7).

Vektor \vec{F} definisan je u svakoj tacki polja sivojim pravcem, smjerom i intenzitetom.

$$\vec{F} = \frac{m}{r^2}$$

Kao gravitaciona sila na jedinici mase u toj tacki

je opisano vektorskom veličinom kojuemo nazvati gravitacionom polja. Jaka gravitacione polja su nekoj tacki definise vektorskim vrednostima, svako po intenzitetu razmeran jacići je gravitacionom silom, tj. je gravitacione polje u posmatranju tacki. Kvantiativno, svako po-

SL. 22.4

da meseču njima postoji striktna proporcionalnost, tj. da ako da puta vega sila potreba da se postavi u ravnotežu

na drugo telo. Zbog toga se svako uzajamno dejstvo tela u prostoru može predstaviti na sledeći način: prevo telo stvara po-
stojuću gravitacionu polje koje deluje na drugo telo. Naravno
ono polje, te da to polje deluje silom na drugo telo. Naravno
luje na drugo. Kazemo da prevo telo stvara oko sebe gravitacijsku silu
posmatrajući kogom neko telo de-
deo protora u kojem se oseca dejstvo sila.

korisno je definisati pojam polja sila. Poljem sila se naziva prostor bez neposrednog dodira medju telima. Za takve sile (ne) su sile koje deluju na daljinu, što znači da deluju kroz gravitacione sile (sljedno kao elektroline i magne-

22.5. gravitacione polje

jih ovih dveju veličina.

nu u opštoj relativnosti, koja se bazira na ekvivalenciji trosačišljane i gravitacione mase dobila je teorijsku prime za sve tela (vidi I.5.a.). $a = g$, sledi da $m_i = m_g$. Ova ekvivalencija je opštoj relativnosti, koja se bazira na ekvivalenciji trosačišljane i gravitacione mase dobila je teorijsku prime za sve tela (vidi I.5.a.). $a = g$, sledi da $m_i = m_g$. Ova ekvivalen-

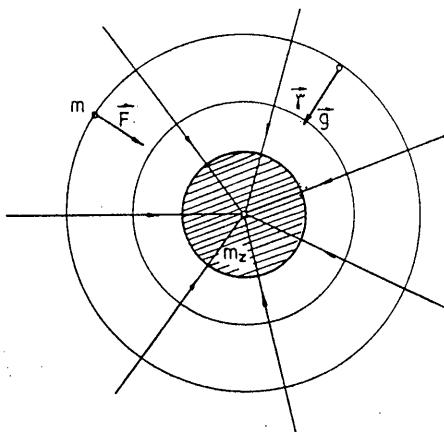
$$m_i a = m_g g$$

možemo opisati jednadžbom $m_i a = m_g g$

Newtonova zakona slobodno padaće tela u gravitacionom polju zakon je izražen u takvim merenjima mase dobijenim u II. Njutnovu sistemu, merimo gravitacionu (težku) mase tla. Međutim, vrednost izražavamo u istim jedinicama. Laboratorijsko mase, smatramo ih jednakim i (uz istu mjeru) u istim jedinicama. Kako dakle, iškustvo pokazuje da mase dobijene takvom merenjem u II. Njutnovu sistemima propricijalnosti druge mase, smatramo ih jednakim i (uz istu mjeru) u istim jedinicama. Kako je gravitacija u blizini drugog tala C bilo dva puta veća nego ona između tala B i C, Kao telo B je gravitaciona privlačna sila između tala A i ne-
da dva puta veća sila potreba da se postavi u ravnotežu

Iz (22.13) i (22.14) sledi da jačina Zemljinog gravitacionog polja opada sa kvadratom rastojanja tačke od centra Zemlje i jednaka je po intenzitetu i smeru gravitacionom ubrzajujućem u toj tački.

Za slikovito prikazivanje gravitacionog polja koriste se linije sile gravitacionog polja. To su linije kod



Sl. 22.5

kojih tangenta u svakoj tački polja daje pravac i smer gravitacione sile \vec{F} , gravitacionog ubrzanja \vec{g} i gravitacionog polja \vec{g} (sl. 22.5). Karakteristično je da linije sile gravitacionog polja uviru u telo i normalne su na površinu tela u posmatranoj tački na telu. Linije sile gravitacionog polja produžuju se i kroz telo, što znači da gravitaciono polje postoji i u telu.

Iz relacije (22.11) sledi da je jedinica za polje N/kg .

22.6: Gravitaciona potencijalna energija i potencijal

Na osnovu napred izloženog možemo potpuno razumeti i pojam gravitacione potencijalne energije, koju smo izveli u delu 20.2. Uzimajući da je ubrzanje pri slobodnom padu, g , konstantno, potencijalna energija tela mase m na visini h iznad Zemljine površine iznosila je prema (20.6) mgh . Pomoću zakona gravitacije izvešćemo opštiji izraz za gravitacionu potencijalnu energiju na bilo kojoj udaljenosti od središta Zemlje. Kako je gravitaciona sila potencijalna sila, to se na osnovu (20.11) potencijalna energija može izraziti kao

$$E_p = - \int \vec{F} dr + C \quad (22.15)$$

Za telo mase m , koje se nalazi u gravitacionom polju Zemlje, potencijalna energija je prema (22.15) i (22.7)^{*}

$$E_p = G \int \frac{m \cdot m_Z}{r^2} dr + C = - G \frac{m \cdot m_Z}{r} + C \quad (22.16)$$

Ako se telo mase m nalazi na beskrajnoj udaljenosti od Zemlje, onda gravitaciona sila Zemlje ne dejstvuje na njega. Zato je najbolje nulti nivo izabrati tako da za $r \rightarrow \infty$ bude $E_p = 0$. Uz ovaku definiciju nultog nivoa za integracionu konstantu u (22.16) dobijamo vrednost $C = 0$, odakle sledi

$$E_p = - G \frac{m \cdot m_Z}{r} \quad (22.17)$$

Iz (22.17) vidimo da je potencijalna energija tela u polju Zemlje negativna i da raste (manje je negativna) sa rastojanjem od središta Zemlje. Gravitaciona potencijalna energija Zemlje jednaka je radu ($E_p = A$), koji na telu izvrši Zemljino polje privlačeći ga iz beskonačnosti na rastojanje r . Ako se telo mase m iz tačke r_1 podigne u tačku r_2 Zemljinog polja, onda se potencijalna gravitaciona energija povećava prema (22.17)

^{*}Ako smer od središta Zemlje radijalno prema van usvojimo kao pozitivan, onda gravitaciona sila F ima negativan smer.

$$V = -\frac{G}{m^2} \quad (22.24)$$

Gravitacijski potencijal u nekoj tački polja je po definiciji potencijalna energija jedinice mase cijene sitke, prikazano poklapa sa formулом (22.23).

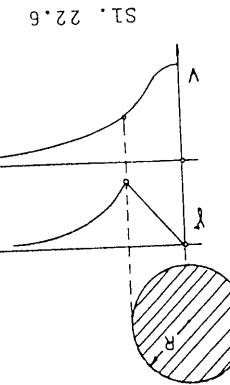
Prema (22.24) i (22.17) gravitacijski potencijal u gravitacijskom polju Zemlje je

$$V = \frac{E}{m}$$

$$(22.25)$$

Ukoliko se u prostoru gravitacijskog polja spose takže istog u drugim granama fizike, savsim je opštii moze se uvesti za 22.5), kôje su koncentrične sa površinom Zemlje. Potencijala dobije se ekvipotencijalne sferne površine (sl. 22.6), kôje su koncentrične sa površinom Zemlje. Projam potencijala, kôji gemo veoma jesto strelati bilo kôju konzervativnu silu.

Jedina gravitacijska potencijalna energija na homogenu sferu, prikazani su sljici 22.6. u funkciji od rastojanja između sfera, kako točnjajia x od centra sfera, kako ilustruje jedan objek "potencijala naime jame".



22.7. Kosmische brzine

Planete ili da bi izaslio iz zone dejstva njene gravitacijske potrebuju je težo lansirati sa okređenom potencijalom. Od vrednosti potencijalne zavisí da li će vescak sa nom. Da bi edno težo postalo vescak satelit neke planete ili satelit neke planete, da li napusti zonu dejstva Sunca težit postavlja satelit neke planete, da li izlazi iz dejstva Sunca.

Ovi smo pokazali da se formula (20.10), kôju smo izveli za gravitacionu potencijalnu energiju, bez poznavanja gravitacije

$$E_p(h_2) - E_p(h_1) = mg(h_1 - h_2) \quad (22.23)$$

Znaci, razlika potencijalne energije na dve proizvođene visiće ne h₁ i h₂ u blizini površine Zemlje je prema (22.22)

$$E_p = -mgR^2 \left(1 - \frac{h}{R} \right) = -mgR^2 + mgh \quad (22.22)$$

te dobijamo traženi rezultat

$$\left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} = 1 - \frac{h}{R} \text{ jer je } \frac{h}{R} \ll 1 \quad (22.21)$$

biće

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots \text{ za } x \ll 1$$

Kako je

$$E_p = -G \frac{m \cdot m}{R^2} = -G \frac{m^2}{R^2} \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} \quad (22.20)$$

Formula (22.17) moze se napisati u obliku gravitacione uravnanje, a h je rastojanje od površine Zemlje.

$$g = G \frac{R^2}{m^2}$$

gdje je prema (22.9)

$$E_p = -m \cdot g \cdot R^2 + m \cdot g \cdot h \quad (22.19)$$

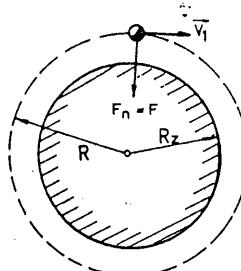
Moze se pokazati da se blizu površine Zemlje potencijalna energetska moze izraziti u formi

$$E_p = G \cdot m \cdot m^2 \left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right] \quad (22.18)$$

ili napušta zonu dejstva polja galaksije i prelazi u vacionu. Te brzine nazivaju se kosmičke brzine. Postoje četiri kosmičke brzine i to:

a. Prva kosmička brzina jeste brzina koju treba da ima veštački satelit ili planeta, čiji je poluprečnik putanje približno jednak poluprečniku te planete. Za kretanje satelita po kružnoj putanji oko Zemlje sa radijusom R , koji se malo razlikuje od radijusa Zemlje R_Z ($R \approx R_Z$) (sl. 22.7), mora biti ispunjen uslov da je (za posmatrača sa Zemlje) centripetalna sila F_n jednaka gravitacionoj sili F^*

$$\frac{m \cdot v_1^2}{R} = G \frac{m \cdot m_Z}{R^2} \quad (22.26)$$



Sl. 22.7

Kako je $g = Gm_Z/R^2$, to je iz (22.26)

$$v_1 = \sqrt{gR} \quad (22.27)$$

Zamenom vrednosti za $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ i $R \approx R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ dobija se da je prva kosmička brzina u odnosu na Zemlju

$$v_1 = 7,9 \text{ km/s} \quad (22.28)$$

Prva kosmička brzina u odnosu na Zemlju uzima se za visinu od 200 km, jer je na toj visini otpor sredine zanemarljiv. Kreću-

* Uslov (22.26) predstavlja izjednačavanje dva različita analitička izraza za istu silu.

ći se brzinom v_1 satelit obilazi Zemlju za 84 min i 12 s.

Prva kosmička brzina može se uzeti kao karakterističan primer dijalektičkog skoka u prirodi.

b. Druga kosmička brzina je najmanja brzina kojom bi trebalo izbaciti telo sa neke planete da bi napustilo zonu dejstva njenog gravitacionog polja. Ovakvo telo ulazi u zonu dejstva Sunca.

Ako se sa v_2 obeleži druga kosmička brzina, a sa m masa tela koje se izbacuje, onda kinetička energija ovog tela, $mv_2^2/2$, troši se na vršenje rada protiv gravitacione sile Zemlje sa njene površine poluprečnika R_Z do beskonačnosti ($R=\infty$), tj.

$$\frac{mv_2^2}{2} = A = \int_{R_Z}^{\infty} \vec{F} d\vec{r} = G \cdot m \cdot m_Z \int_{R_Z}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = G \frac{m \cdot m_Z}{R_Z} \quad (22.29)$$

odnosno

$$v_2^2 = \frac{2Gm_Z}{R_Z} \quad (22.30)$$

Kako je prema (22.9) $Gm_Z/R_Z^2 = g$, to je

$$v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2v_1} = 1,41 \cdot 7,9 = 11,1 \text{ km/s} \quad (22.31)$$

c. Treća kosmička brzina je najmanja brzina koja je telu potrebna da bi ono izašlo iz zone dejstva Sunca (sl. 22.8). Da bi telo napustilo zonu dejstva Sunca i udaljilo se u galaksiju (telо bi postalo veštačka zvezda), mora posedovati kinetičku energiju jednaku radu, koji se utroši da bi se telо sa Zemljine putanje (orbite) premestilo u beskonačnost. Očigledno je da je taj rad jednak potencijalnoj energiji tela, koje se nalazi u polju Sunčevog privlačenja i to na rastojanju

* Samo Sunce tma povišenju brzinau 222 km/s.

mjeku brzina bića bi nezantno veća od 285 km/s, tj. zinama one ne ostaju u zvezdanim sistemima. Znaci, ekstra kozgalaksije) još mogu ostati u oblasti galaksije. Pri većim brzina u zvezde (galaksije se u posmatranju najveća brzina prvi kojih je brzina od 285 km/s i to je uslovljeno verovatnog time što je brzina od 285 km/s i SL. 22.9
bi brzina bića veća od 285 km/s.
i Sunce, ne postoji nijedna galaksija na istom raspodjeljenju kao dama, koje se kreće oko centra smatrajući pokazuju da medju zvezdama postavki: astrofizička postavka: vrednosti, polazeći od sljedećih
jedne pričice u vlasionu (SL. 22.9)
da bi prelido u vlasionu
gravitacionog polja galaksije i
neće da bi napustilo zonu dejstva
bi trebalo da ima telo izbačeno sa Zemlje ili neke druge planete da
ekstra kosmička brzina je načinjena brzinom koju
sto predstavlja vrednost trećeg kosmičke brzine.

$$v_3 = \sqrt{v_z^2 + v_x^2} = \sqrt{11,2^2 + 12,4^2} = 16,7 \text{ km/s (22.32)}$$

$$v_z^2 = 2G \frac{m}{R_z}$$

dobija se

$$v_z^2 = 2G \frac{m}{R_z}$$

odnosno

$$\frac{mv^2}{2} = G \frac{m \cdot m}{R^2} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

i kinetičke energije te la koje se kreće brzinom v, tj. dnaka sumi potencijalne energije te la na Zemljinoj površini nije gova kinetička energija u momentu lansiranja mora biti je izazici iz zone Zemljine gravitacije i da zadrži brzinu v, rezonovanijem: da bi telo, koje se lansira sa Zemlje, moglo veća od v. Da bi održao brzinu v3 poslužimo se sljedećim zinu v3 lansiranjem: da sa Zemljine površine mora biti nesto posle izlaska iz polja Zemljine teže, Da zbrog toga potreba biti nešto Treba, međutim, uzeti u obzir da brzina u telo mora imati

$$v = v - u = 42,2 - 29,8 = 12,4 \text{ km/s}$$

Suncu. Stoga je dovoljno telu u odnosu na Sunce saopštiti brzina periferijsku brzinu Zemlje, u = 29,8 km/s, u odnosu na ne putanje oko Sunca, zbrog toga što u tom pravcu telo već najzgodnije je da mu se ona saopštiti u pravcu tangente Zemlji-brzina v se može saopštiti telu u bilo kom pravcu. Međutim,

SL. 22.8

$$v = 42,2 \text{ km/s}$$

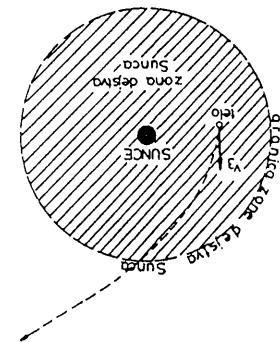
vrednosti dobija se Lj-a-Sunce. Nakon zameće brojnih gde je $m_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ masa Sunca, a $R = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ rastojanje Zemlje-Sunca. Nakon zameće brojnih

$$v = 2G \frac{m_S}{R}$$

odnosno

$$\frac{mv^2}{2} = G \frac{m \cdot m}{R}$$

Zemljine putanje od Sunca, tj.



$$v_4 \approx 290 \text{ km/s}$$

(22.33)

22.8. Težina tela

Težinom tela naziva se sila kojom telo deluje na horizontalnu podlogu. Da Zemlja ne rotira, da je homogena i sfernog oblika, težina tela mase m na površini Zemlje bila bi jednaka gravitacionoj sili

$$Q = G \frac{\frac{m_Z}{R_Z^2} m}{R_Z^2} m$$

(22.34)

Uobičajeno je da se težina tela mase m izrazi u obliku

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{g}$$

(22.35)

gde se \vec{g} naziva "gravitacionim" ubržanjem. Zbog odstupanja od pretpostavki pod kojima važi jednačina (22.34) izraz za gravitaciono ubržanje

$$g = G \frac{\frac{m_Z}{R_Z^2}}{R_Z^2} m$$

(22.36)

ima približni karakter, a vrednosti g se menjaju na pojedinim tačkama Zemlje.

Razmotrićemo prvo uticaj rotacije Zemlje na težinu tela, odnosno na gravitaciono ubržanje. Za posmatrača na Zemlji (koja se okreće ugaonom brzinom ω) na telo sem gravitacione sile \vec{F} deluje i centrifugalna inercijalna sila \vec{F}_{ci} (sl. 22.10.a), te on meri težinu tela

$$\vec{Q} = \vec{F} + \vec{F}_{ci} = m \left[G \frac{\frac{m_Z}{R_Z^2} \vec{F}_0 + \omega^2 \vec{r}}{R_Z^2} \right]$$

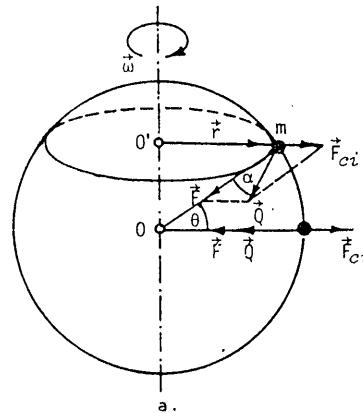
(22.37)

Odnosno gravitaciono ubržanje

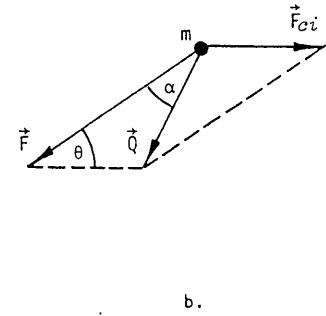
$$\vec{g} = G \frac{\frac{m_Z}{R_Z^2} \vec{F}_0 + \omega^2 \vec{r}}{R_Z^2} = \frac{G m_Z}{R_Z^2} \vec{F}_0 + (\omega^2 R_Z \cos \theta) \vec{r}_0$$

(22.38)

Iz (22.38) vidimo da se gravitaciono ubržanje menja sa geografskom širinom.



a.



b.

Sl. 22.10

skom širinom. Uticaj centrifugalne inercijalne sile je najveći na ekvatoru, a ne postoji na polovima. Zbog toga su vrednosti g na ekvatoru manje od vrednosti na polovima za oko 3.37 cm/s^2 . Iz izraza (22.36) vidimo da se gravitaciono ubržanje smanjuje sa povećanjem poluprečnika Zemlje R_Z . Kako Zemlja ima oblik elipsoida, njen je poluprečnik na polovima za oko 40 km manji od poluprečnika na ekvatoru. Zbog ove varijacije poluprečnika vrednosti g merene na ekvatoru su za oko 1.8 cm/s^2 manje od vrednosti na polovima. Prema tome, ukupna promena vrednosti g od ekvatora do polova iznosi oko 5.17 cm/s^2 .

Ugao izmedju težine \vec{Q} i gravitacione sile \vec{F} možemo proceniti iz sinusne teoreme (sl. 22.10.b):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{F_{ci}}{Q} = \frac{m \omega^2 R_Z \cos \theta}{mg} \approx 0.0035 \cos \theta \quad (22.39)$$

odakle se, zamenom sinusa malog ugla vrednošću ugla u rad, dobija: $\alpha \approx \sin \alpha = 0.0035 \cos \theta \sin \theta \approx 0.0018 \sin 2\theta$.

Ugao α ima najveću vrednost $\alpha = 0.0018 \text{ rad}$ na geografskoj širini koja odgovara uglu $\theta = 45^\circ$.

Sem navedenih faktora, na vrednost g , odnosno na težinu tela utiču i lokalne varijacije zapreminske mase Zemlje i zbog toga se tačna vrednost gravitacionog ubržanja može utvrditi samo eksperimentalno.

V ELEMENTI SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

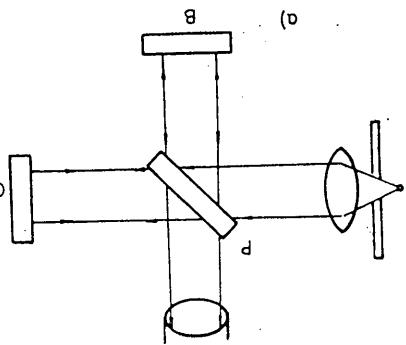
23.1. Eksperiment Majkešon i Morlija

* Albert Michelson (1852-1931), američki fizik koji je izradio eksperiment za mjeru brzine svjetlosti (1887) da je neodređena rezultat i dobio do transferometri moguće je vrlo taktički pomaknati, a mjeriti rezultat i dobro.

** Edward Willard Morley (1838-1923), američki fizik koji je izradio eksperiment teorije relativnosti.

Iz svjetlosnog izvora (I) svjetlost pada na poluprozračni zrcalo sa Zemljom u odnosu na etar kretanje brzinoom u, kao što je Leskoja i gde se posmatraju. Pređe postavimo da se ceeo teleskop svjetlosni zraci ponovo padaju na ogledalo (P) i dolaze do teleskopa a deo do ogledala (B). Posle odbijanja sa ogledala (B) i (C), puštajivo ogledalo (P). Deo svjetlosti putuje do ogledala (C), dok svjetlost putuje do ogledala (B).

SL. 23.1



23.1.b.

Majkešon i Morlji su osnovnu klasu zalog zakaona za slaganje brzina (12.5) orderde brzini kretanja teorijski eksperimentetizma ispunjavao celu vlasionu, apsolutno jenodjaja koji su oni koristili prikazana je na slikama 23.1.a i 23.1.b.

23.1.a.

Na slici 23.1.b. Na osnovu (12.5) možemo zaključiti da put PC i put CP svjetlost prelazi za vreme što znači da put PC i put CP svjetlost prelazi za vreme što je prikazano na sliki 23.1.b.

$$t_{PP} = \frac{2c}{c^2 - u^2}$$

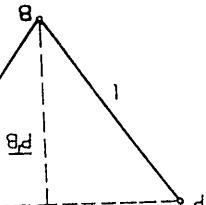
SL. 23.2

ukupno vreme putovanja svjetlosti

$$t = \frac{P_B}{c^2 - u^2}$$

$$t_2 = \frac{c^2}{c^2 + P_B^2}$$

Dok svjetlost stigne od P do B
ogledalo P prelazi put ut, gde je
t = t/c. Kako je



či 23.2.

Dok svjetlost putuje od P do B i nazad, teleskop T se pomera
brzinom u. Putanja svjetlosti duž grane PB je prikazana na sli-

$$t_{CP} = t_{PC} + t_{CP} = \frac{c^2 - u^2}{c^2} \frac{2c}{c^2 - u^2}$$

sto znači da duž grane PC svjetlost ukupno putuje za vreme

$$t_{PC} = \frac{PC}{c-u}, t_{CP} = \frac{PC}{c+u}$$

čiti da put PC i put CP svjetlost prelazi za vreme

je prikazano na sliki 23.1.b. Na osnovu (12.5) možemo zaključi-

protumačen stavom da svetlost ima istu brzinu u svim inercijalnim sistemima, tj. nezavisna je od brzine referentnog sistema u kojem se vrši posmatranje.

Ova suštinska odstupanja od klasičnog zakona sabiranja brzina (koja su ustvari posledica shvatanja apsolutnog prostora i vremena) govore da je bilo potrebno da se izvrši revizija svih ovih pojmovra.

23.2. Ajnštajnovi^{*} postulati i Lorencove transformacije

Kako bi otklonio logičke teškoće u kojima se klasična fizika našla, Ajnštajn napušta pojmove apsolutnog prostora i apsolutnog vremena. Po njemu, nema privilegovanog sistema u prostoru koji bi apsolutno mirovao i nema apsolutnog vremena. Svi su inercijalni sistemi međusobno ekvivalentni, a vreme kod sviju ne teče podjednako. Dakle, u svakom inercijalnom sistemu vreme različito teče. Ovako shvaćeni pojmovi prostora i vremena sadržani su u tzv. postulatima specijalne teorije relativnosti, koji glase:

1. "Svi inercijalni sistemi su međusobno ekvivalentni" (klasičan princip relativnosti);
2. "Brzina svetlosti u vakuumu ista je u svim inercijalnim sistemima".

Na osnovu ovih postulata izvedene su Lorencove^{**} transformacije, koje povezuju koordinate i vreme jednog istog dogadjaja

^{*} Albert Einstein (1879-1955), nemacki fizičar, jedan od najvećih umova modernog doba. Ajnštajnovo glavno otkriće je teorija relativiteta (specijalna 1905. i opšta 1916. g.), koja u povezaniosti prostora i vremena daje ne samo okvire za dalji razvoj fizike, nego duboko zalaže u filozofske koncepcije o svetu i u naše pojmove o kosmologiji. No i niz drugih Ajnštajnovih priloga naučnoj epohi je od vrednosti: objašnjenje fotoefekta, kvantna teorija masene količine toplotne i radovi na statističkom kretanju molekula. Nobelovu nagradu za fiziku dobio je 1921. godine. Zbog jevrejskog porekla bio je proganjivan od nacista, te se 1933. godine presepio u SAD, gde je ostao da kraja života.

^{**} Hendrik Lorentz (1853-1928), holandski fizičar.

ja posmatranog iz dva različita inercijalna sistema.

Pokazaćemo da se drugi Ajnštajnov postulat može matematički zadovoljiti ako se koordinate dva inercijalna sistema O i O' (sl. 12.1) povežu Lorencovim transformacijama

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad t = \frac{t' + (u/c^2)x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (23.5)$$

gde je u brzina sistema O' u odnosu na sistem O .

Pre nego što rešimo postavljen problem, prodiskutovaćemo neke važne osobine ovih transformacija. Pre svega, možemo da vidimo da brzina tela ne može biti veća od c , jer u tom slučaju koordinata x postaje imaginarna veličina, što je bez fizičkog smisla. Dalje vidimo da apsolutno vreme, tj. apsolutna istovremenost u dva koordinatna sistema (koja leži u osnovi klasične fizike) takodje nema smisla jer se ni jedna informacija izmedju dva referentna sistema ne može razmeniti većom brzinom od brzine c . Treba da zapazimo da u graničnom slučaju kada je $u \ll c$, Lorencove transformacije prelaze u Galilejeve transformacije (12.4).

Ako u sistemu O' telo ima brzinu v' , tada će na osnovu Lorencovih transformacija u sistemu O telo imati brzinu

$$v = \frac{x}{t} = \frac{x' + ut'}{t' + \frac{u}{c^2}x'} = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'} \quad (23.6)$$

Primenimo sad dobijeni izraz za relativističko slaganje brzina na foton, stavljujući u (23.6) vrednost $v' = c$. Brzina svetlosti u sistemu O će biti

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{uc}{c^2}} = c \quad (23.7)$$

čime je dokazano da Lorencove transformacije koordinata zado-

Iz (23.11) sledi da je dužina stepa za posmatraca u sistemu O skragena faktorom $\frac{1}{1 - \frac{u^2}{C^2}}$. Ovaj efekat se naziva kontrakcija dužine.

b. Produzenje vremena (dilatacija vremena)

U sistemu O, koj i smo definisali u prethodnoj analizi, se na mestu x_1' odigrava dogadjaj u vremenskom intervalu t_1 i t_2 , koj i se prema (23.5) mogu napisati

$$t_1' = \frac{u^2}{C^2} x_1; \quad t_2' = \frac{u^2}{C^2} x_2$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{u^2}{C^2} \Delta t$$

$$x_1' = \frac{x_1 - ut_1}{1 - \frac{u^2}{C^2}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - ut_2}{1 - \frac{u^2}{C^2}}$$

te se za njega odigrava za vreme

Posmatraca u sistemu O registruje (meri) potek u sistemu O, u trenutku t među 0 i t_2 , kada je dogadjaj u trenutku t t_1 i t_2 , koj i se prema (23.5) mogu napisati

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1 \quad (23.12)$$

valja

u sistemu O, koj i smo definisali u prethodnoj analizi, se na mestu x_1 odigrava dogadjaj u vremenskom intervalu

Iz (23.11) sledi da je dužina stepa za posmatraca u sistemu O skragena faktorom $\frac{1}{1 - \frac{u^2}{C^2}}$. Ovaj efekat se naziva kontrakcija dužine.

na na primjeru raspraca u-mezona, vreme izvota u-mezona izmerno pod dejstvom kosmičkog zračenja u gorivu slojevima Zemlji u atmosferi. Na osnovu zakona klasične fizike mogli bi zaključiti da u-mezoni (zak iako se kreću brzinom svetlosti u laboratorijskoj iznosu $= 10^{-6}$ s, u-Mezoni mogu nastati u "dilataciji" vremena je eksperimentalno dokazano.

Ova "dilatacija" vremena je eksperimentalno potvrđena. Ovaj se efekat naziva dilatacija vremena i eksperimentalan je dešti od vremena odigravanih dogadjaja u postvenom sistemu. Vremenski interval ato je produzen faktorom ($\frac{1}{1 - \frac{u^2}{C^2}}$).

Vidimo da posmatratični meri vremenski interval koji

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1 - \frac{u^2}{C^2}}{1 - \frac{u^2}{C^2}} \Delta t_0 \quad (23.14)$$

(23.13)

(23.12)

(23.11)

odnoso

sledi

$$t = t_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{u^2}{C^2}}}$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{1 - \frac{u^2}{C^2}}$$

$$x_1' = \frac{x_1 - ut_1}{1 - \frac{u^2}{C^2}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - ut_2}{1 - \frac{u^2}{C^2}} \quad (23.10)$$

(23.11)

SL. 23.3

Kako je

$$t = x_2 - x_1 \quad (23.9)$$

ja dužinu

kraga x_1 i x_2 i dobili

njegovo početka i

urediće koordinatne

xi dužinu stepa, tj.

mu 0 u trenutku t među

posmatraca (P) u sistemu

$$t_0 = x_2' - x_1' \quad (23.8)$$

Io žima dužinu

(postveni sistem) te-

u sistemu O

odnosu na sistem O kreće brzinom u (SL. 23.3)

Neka step dužine t_0 miruje u sistemu O, koj i se u

a. Skragine dužine u pravcu kretanja

23.3. Posledice Lorenzovih transformacija

voltjavaču drugi Ajustažnov postulat.

volj

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, mogu preći najviše put

$$s = c \cdot t = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} = 300 \text{ m} \quad (23.15)$$

Medjutim, v -mezoni stižu do površine Zemlje, tj. prelaze Zemljinu atmosferu debljine $d = 3 \cdot 10^5 \text{ m}$, što znači da posmatrano sa Zemlje žive najmanje

$$t = \frac{d}{c} = \frac{3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8} = 10^{-3} \text{ s} \quad (23.16)$$

23.4. Rezultati relativističke dinamike

Iz Lorencovih transformacija se može videti da su u teoriji relativnosti prostorne i vremenske koordinate međusobno povezane i uzajamno zavisne. Zato se fizički procesi moraju opisivati u jedinstvenom prostorno-vremenskom koordinatnom sistemu. Položaj tela se u ovom sistemu zadaje pomoću kvadrijevktora položaja

$$x_\mu = (\vec{r}, ic) \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (23.17)$$

gde je i imaginarna jedinica. Vektor X ima četiri komponente: tri prostorne i jednu vremensku. U ovom prostoru se brzina i impuls definišu kao

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{dt_0}; \quad P_\mu = m_0 v_\mu \quad (23.18)$$

gde su t_0 i m_0 sopstveno vreme, odnosno sopstvena masa. Po analogiji sa II Njutnovim zakonom osnovna jednačina relativističke dinamike ima oblik

$$\frac{d}{dt_0} (m_0 v_\mu) = F_\mu \quad (23.19)$$

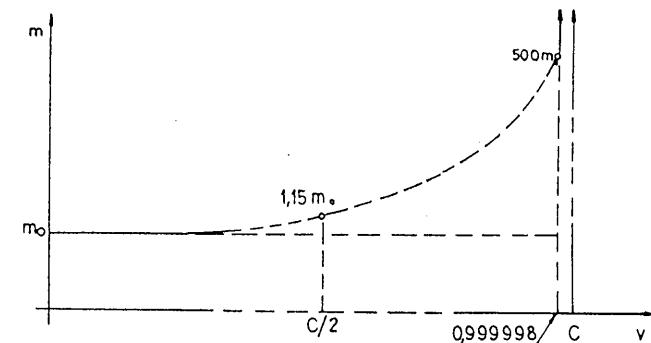
gde je F_μ sila u sistemu prostor-vreme. Analizom ove jednačine izvlače se sledeći zaključci:

1. U specijalnoj teoriji relativnosti zaključuje se da se masa

(koja se i ovde definiše kao mera inercije) menja sa brzinom po formuli

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (23.20)$$

gde je m - masa tela u kretanju, m_0 - masa tela u stanju mirovanja, a v - brzina kretanja tela. Grafik zavisnosti mase od brzine dat je na slici 23.4.



Sl. 23.4

Na grafiku se vidi da masa ostaje dugo nepromenjena (klasični slučaj), a onda naglo počne da se povećava tako da kada $v \rightarrow c$ masa teži beskonačnosti. Pri brzinama jednakim $c/2$ masa je približno 15% veća od mase u miru m_0 . Kada je brzina $v = 0,999\ 998 \cdot c$ masa tela je 500 puta veća od mase u mirovanju. Takvu brzinu i masu imaju protoni kada napuštaju akcelerator sagradjen u Bataviji (SAD), koji je trenutno najveći akcelerator na svetu. Najveća do sada poznata brzina koju je čovek saopštio makroskopskim telima je reda druge kosmičke brzine od $11,2 \text{ km/s}$. Kada se ova vrednost zameni u formulu (23.20) izlazi da je $v/c = 11,2/300\ 000 = 0,000\ 038$, što daje $m = 1,000\ 000\ 000\ 000\ 2 \cdot m_0$. Ovaj rezultat ukazuje da je masa

težla m za, sve brzine kobje današnjega cívijilizacijske postrike u makro sistemima pravljene jednaka masi težla u mriju m_0 .

Smisao porasta mase sa brzinom se sastoji u tome sto sa porastom brzine raste inertcija težla.

2. Iz jednacina relativističke dinamike sledi, jedna opšta vezza izmedju mase (inercije) i energije težla u obliku $E = mc^2$. Ova se energija naziva inertcija mirovanija i ne postoji u prirodni procesima. Relacija $E = mc^2$ utvrđuje proporcionalnost izmedju mase težla (inercije) i njegove energije.

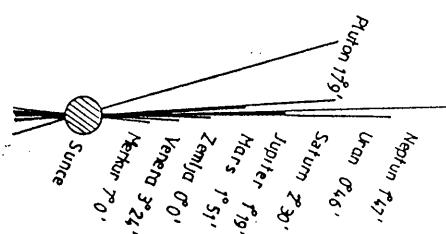
Natme, kao što je istaknuto, masa kao i energija u prirodnom procesu menjava formu postojanju, ali tako, da je u svakom trenutku veza izmedju njih $E = mc^2$. Dakle, ne radi se o pretvaraњu materije u energiju i obrnuto, već o proporcionalnosti dveju osobina materije, mase i energije.

VI. SVEMIR I PROCESI NA ZVEZDAMA

Svemir ili vasilona je prostor u kojem je smestena celokupna materija u svim oblicima svog postojanja. Nauka koja razvijku nebeskih tel (planeti, zvezda i galaksija) naziva se kosmologija.**

Naziv potreba od grake retkih kozmos - vasteona i gontica - radjana je.

** Od grake retkih kozmos - vasteona i gontica - radjana je.



SI. 24.1

sve planetne sunčevog sistema rotiraju oko Sunca po svojim putanjama usled gravitacionog privlačenja. Putanje planeta su gotovo u jednoj ravni (SI. 24.1) sa izuzetkom staze Plata.

Neto pluton. Sve ove planete predstavljaju velika nebeska tela, za razliku od preko 2000 poznatih manjih, okom nevidljivih pluto-

nefta, tзв. asteroide. U sunčevom sistemu postoje još i grupe nefta, tзв. asteroida. Za razliku od preko 2000 poznatih manjih, okom nevidljivih pluto-

nefta, tзв. asteroide. Kao se sastoji iz silikatnih mi-

nit je stenovita ili metala masa sto pada na Zemlju; tma je tela malih dimenzija kobja sa nazivaju meteore ili komete. Meteorite vrste: meteore kamenje, kobje se sastojici iz silikatnih mi-

nenata reči u raznim kombinacijama i meeteoriske guvođe, kobje je ele-

mentarno gvozdje sa nešto nikla. Komete sivele zboge fluorescencije se

kreću oko Sunca po putanjiama putaneje planete (zvezde repeatice) se

putanje planeta. Ponekad se prividje Sunce zboze kretanje po eliptičnoj putanji putanjama. Komete sivele zboge fluorescencije gase kobje

nastaje pod dejstvom sunčevog zračenja i odbijanjia Sunčeve svetlosti od estiča prasine.

To su zvezde. Sunce je najbliza zvezda Zemlji,

Jane plazme u vasilioni se nalaze supstance i u obliku guseto zatrebe astreja, veste i dr.

"Izmedju Marca i dupljera npr. Ceres, Palas, Juno,

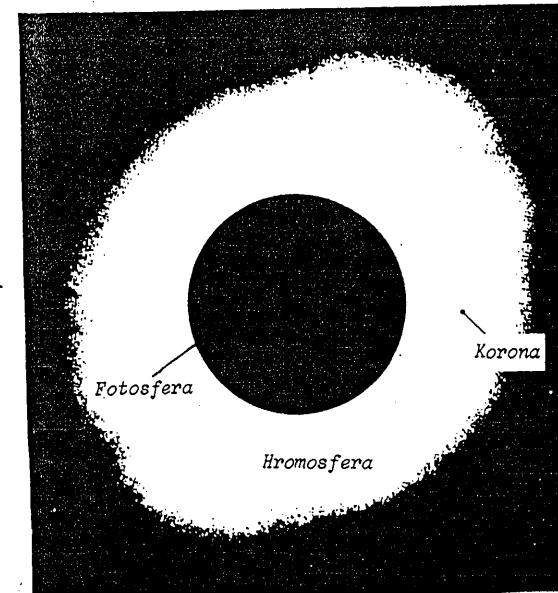
"Plazma - gas u ionizovanom stanju.

udaljena 149,5 miliona kilometara (1 astronomска единица*). Zvezde se nalaze na vrlo velikim rastojanjima jedna od druge. Najbliža zvezda našem Suncu *Proxima Centauri* udaljena je 4,3 ** svetlosne godine*, a to odgovara udaljenosti koja je 275 000 puta veća nego što je rastojanje izmedju Zemlje i Sunca. Raketa koja bi se kretala brzinom od 10 km/s došla bi na tu zvezdu za 130 000 godina. Malo je zvezda koje su nam bliže od 100 svetlosnih godina. Tako, jedna daleka zvezda, *Deneb*, udaljena je 650 svetlosnih godina. Nama je najvažnija zvezda naše Sunce. U poređenju sa nekim drugim zvezdama prilično je maleno i beznačajno. U poređenju sa našom planetom veoma je veliko. Prečnik mu je. Masa Sunca je 330 000 puta veća od mase Zemlje. Središte Sunca u kojem vlada pritisak od 20 biliona Pa, i temperatura od oko $20 \cdot 10^6$ stepeni, sastoји se najvećim delom od vodonika. Zbog tako visoke temperature protoni (vodonikova jezgra) imaju u tako visoke temperature protoni (vodonikovog jezgra) imaju u središtu termičku brzinu od 600 km/s. Površina Sunca naziva se *fotosfera* i sastoји se od 75% vodonika, 23% helijuma i 2% teških elemenata (sl. 24.2). Ona je mnogo hladnija od unutrašnjosti, ali je još uvek strahovito vruća (oko 6000 stepeni). Fotosfera ima nejednak zrnasti izgled. To je zato što iz unutrašnjosti izviru gasovi. Vrlo često sa površine izbija oblak užarenog gasa. To se naziva *Sunčeva protuberanca*. Protuberance se najbolje vide za vreme pomračenja Sunca. Pomračenje nastaje kad Mesec prolazi izmedju Sunca i Zemlje i potamni Sunčevu svetlost. Na slici 24.2. prikazano je potpuno pomračenje Sunca. Mesec je

* Rastojanje Zemlje od Sunca ili astronomска единица, koja iznosi 149,5 miliona km, najstarija je единица mere za određivanje udaljenosti u svemiru.

** Udaljenost koju svetlost prevodi u 1 godini krećući se brzinom od 300 000 km/s. Svetlost prevodi u 1 godini udaljenost od 9,463 miliona km (od Sunca do Zemlje stigne za nešto više od 8 minuta).

prekrio Sunčevu površinu i vidljiv je jedino svetleći gas oko



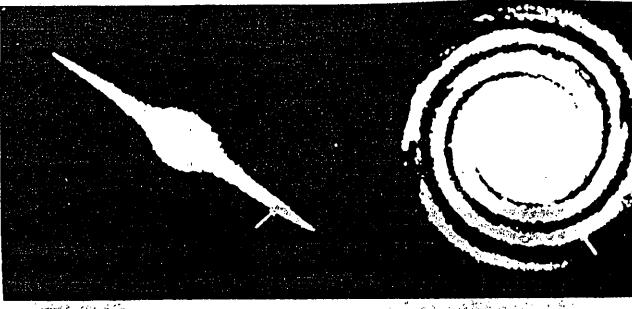
Sl. 24.2.

njega. On se sastoји od uskog unutrašnjeg sloja od nekoliko hiljada kilometara debljine, nazvan *hromosfera*. Spoljašnji sloj gase naziva se *korona*. Ona je jako topla, a vidi se kao biserast prsten svetla koje se prostire na milione kilometara od površine Sunca.

Sunce se okreće oko svoje ose jednom za 25 dana. Naučnici mere to okretanje posmatrajući kretanje velikih tamnih pega na površini Sunca, tzv. sunčanih pega. Sunčane pege izgledaju tamne, jer su za 2000 stepeni hladnije od svoje okoline. One su povezane sa veoma svetlim površinama na rubu ili u blizini sunčevih pega tzv. *bakljama* (*faculae*), te sa velikim eksplozijama u Sunčevoj atmosferi, zvanim *sunčani bljeskovi*. Ti bljeskovi traju samo kratko vreme, ali su veoma sjajni. Kroz

razdodblaće od 11 godina broj sunčanih pega rasete dok ne doстиже manje 100 000 godina da pređe sa jednog na drugi galaksij. Razdodblaće od 11 godina broj sunčanih pega rasete dok ne doстиже manje 100 000 godina da pređe sa jednog na drugi galaksij. Svoj maksimum, a zatim ponovo opada. To se naziva ciklus sunčanih pega. Kad se njihov broj spusti do minimuma, ciklus ponovo počinje da raste. Iako su zvezde u skupine zvane galakticije. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda koje sadržavaju nase galakticiju.

Iako su zvezde veoma udaljene jedna od druge, ipak su grupisanе u skupine zvane galaktice. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda koje sadržavaju nase galakticiju. Deo nase galaksije se može ponakad videti kao bleći pojedinični predmeti. Iako su zvezde nekolicina puta veći od zemljine prečnika. Suneve pega se razlikuju po veličini, ali one velelike često su na emisije radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Pjeskoviti rastući po sjaj u po broju. Sunčani bijeskovit dešum je nova. Kad sunčane pega dostignu svoj najveći broj i sunčani su neke slike radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Da bi stigao do najbolje galaksije naseo - do Andromedine galaksije - svediškom brodu bi trebalo vise od dva miliona godina. Svi objekti koji je zine galaksiju, rotiraju oko osi, koja je. Da bi stigao do najbolje galaksije naseo - do Andromedine galaksije - svediškom brodu bi trebalo najt Suncu je potrebno za jedan orbit oko galaksije 200 miliona godina.



S1. 24.3

galaksiju. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda u skupini zvane galakticije. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda koje sadržavaju nase galakticiju. Deo nase galaksije se može ponakad videti kao bleći pojedinični predmeti. Iako su zvezde nekolicina puta veći od zemljine prečnika. Suneve pega se razlikuju po veličini, ali one velelike često su na emisije radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Pjeskoviti rastući po sjaj u po broju. Sunčani bijeskovit dešum je nova. Kad sunčane pega dostignu svoj najveći broj i sunčani su neke slike radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Da bi stigao do najbolje galaksije naseo - do Andromedine galaksije - svediškom brodu bi trebalo najt Suncu je potrebno za jedan orbit oko galaksije 200 miliona godina.

galaksiju. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda u skupini zvane galakticije. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda koje sadržavaju nase galakticiju. Deo nase galaksije se može ponakad videti kao bleći pojedinični predmeti. Iako su zvezde nekolicina puta veći od zemljine prečnika. Suneve pega se razlikuju po veličini, ali one velelike često su na emisije radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Pjeskoviti rastući po sjaj u po broju. Sunčani bijeskovit dešum je nova. Kad sunčane pega dostignu svoj najveći broj i sunčani su neke slike radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Da bi stigao do najbolje galaksije naseo - do Andromedine galaksije - svediškom brodu bi trebalo najt Suncu je potrebno za jedan orbitoko galaksije 200 miliona godina.

galaksiju. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda u skupini zvane galakticije. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda koje sadržavaju nase galakticiju. Deo nase galaksije se može ponakad videti kao bleći pojedinični predmeti. Iako su zvezde nekolicina puta veći od zemljine prečnika. Suneve pega se razlikuju po veličini, ali one velelike često su na emisije radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Pjeskoviti rastući po sjaj u po broju. Sunčani bijeskovit dešum je nova. Kad sunčane pega dostignu svoj najveći broj i sunčani su neke slike radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Da bi stigao do najbolje galaksije naseo - do Andromedine galaksije - svediškom brodu bi trebalo najt Suncu je potrebno za jedan orbitoko galaksije 200 miliona godina.

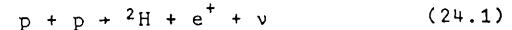
galaksiju. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda u skupini zvane galakticije. Nase sunce je samo jedna od više miliona zvezda koje sadržavaju nase galakticiju. Deo nase galaksije se može ponakad videti kao bleći pojedinični predmeti. Iako su zvezde nekolicina puta veći od zemljine prečnika. Suneve pega se razlikuju po veličini, ali one velelike često su na emisije radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Pjeskoviti rastući po sjaj u po broju. Sunčani bijeskovit dešum je nova. Kad sunčane pega dostignu svoj najveći broj i sunčani su neke slike radio-sigurnala oko površine zemlje i smetaju im. Da bi stigao do najbolje galaksije naseo - do Andromedine galaksije - svediškom brodu bi trebalo najt Suncu je potrebno za jedan orbitoko galaksije 200 miliona godina.

od nekoliko miliona do nekoliko stotina miliona godina, u zavisnosti od mase zvezde. Zvezda male mase neće imati jako gravitaciono delovanje. Kada se završi spajanje vodonika u helijum, tj. "gorenje" vodonika, vruć gas u središtu zvezde držaće i dalje ravnotežu spoljašnjem delovanju. Zvezda će se polagano hladiti, zračiće energiju u mnogo manjim količinama nego kada se energija oslobadja procesima "gorenja" u jezgru zvezde. Zato te zvezde i vidimo kao *bele patuljke*. U tom slučaju od zvezde ostaje samo njen centralni deo, u kojem su već prestale nuklearne reakcije. Njihova veličina je manja od veličine Zemlje, ali se njihova masa može uporediti sa masom Sunca, pa je i njihova zapreminska masa milion puta veća od zapreminske mase vode. Ovo je *sudbina svake zvezde čija je masa manja od $1,4 m_S$* (m_S - masa Sunca). To je, dakle, i sudbina našeg Sunca, samo u njemu nije izgoreo još sav vodonik.

U zvezdama veće mase (bar 2-3 puta veće od Sunčeve mase) skupljanje se nastavlja i u središtu je pritisak sve veći. Zbog toga spajanje protona ("gorenje" vodonika) postaje sve življje, oslobadja se energija, temperatura zvezde raste, pa se dogadja da zvezda i eksplodira. Eksplozija zvezde nije česta ali je poznata pojava. Po iznenadnom bljesku nazvali smo je *supernova*. Količina energije koja se pri tome oslobodi toliko je velika da je uprkos velikoj udaljenosti 1054. godine supernova bila vidljiva i danju. Dogadjaj su zabeležile hronike istočnih naroda. Na mestu na kojem su pre više od 900 godina videli zvezdu koja je iznenada postala vrlo sjajna, danas se vide maglica nalik na rakovicu. Iz paralakse pod kojom je vidimo zaključujemo da je od nas udaljena oko $3,6 \cdot 10^{19} m$, a iz ugla pod kojim se vide krajevi te maglice (oko 6°) procenjujemo njenu veličinu na $6 \cdot 10^{16} m$. Izmerena je i brzina kojom se njeni delovi šire (razleću od središta na sve strane) i ona iznosi $1,1 \cdot 10^6 m/s$ (1100 km/s). Tom se brzinom maglica proširila od središta do rubova za oko 900 godina.

24.1. "Gorenje" vodonika

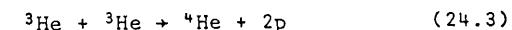
Jezgro vodonika, proton, stabilna je čestica i ne raspljava se. Ako je ostavljen sam, proton traje večno*. U zvezdi, gde je mnogo protona, zbijeni gravitacionim skupljanjem zvezde, vrlo često udaraju jedan u drugog. Zbog pozitivnog naboja oni se odbijaju, ali ako su jako brzi, a to će biti pri visokim temperaturama, odbojna sila neće moći sprečiti njihovo približavanje. A tada se može dogoditi reakcija spajanja dvaju protona u kojem se stvaraju: jezgro teškog vodonika, deuteron (sastavljen od jednog protona i jednog neutrona), pozitron i neutrino



U mnoštvu protona pojavljuju se sada i neutroni, a sudarom deuterona sa protonom može da se desi reakcija



Tako su se deuteron i proton spojili u jezgro helijuma i to laki izotop helijuma. U reakciji nastaje i jedan foton. Sada imamo protone, deuterone i jezgra lakog helijuma. Oni se sudaraju, a u nekom sudaru doći će i do njihove reakcije



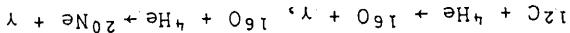
u kojoj se radja novi element, helijum. Za izgradnju helijumovog jezgra potrošili smo četiri protona. Masa četiri protona je veća od mase jezgra helijuma. Deo te energije odnose pozitron i neutrino, deo se zrači (foton), a ostalo će biti kinetička energija čestica nastalih u procesu.

Vrlo se retko dogadja da se dva protona spoje u deuteron. To znači da je gorenje protona vrlo sporo. Zaista, zračenje Sunca iznosi samo $0,0002 \text{ W kg}^{-1}$, tj. iz svakog kilograma Sunca svake sekunde izlazi prosečno energija od $0,0002 \text{ J}$. To je mnogo manje od energije koja se oslobadja iz ljudskog tela (iz svakog kilograma), ali iz mase Sunca ($2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) i uz tako slabo zračenje dobijamo $4 \cdot 10^{26} \text{ J}$ svake sekunde.

Zračenjem se Sunčeva masa smanjuje za više od četiri miliona tona svake sekunde. Brojke se mogu na prvi pogled

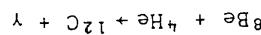
* Još ne postoji eksperimentalni dokazi o konačnom životu protona.

vise temperature imamo i drugie reakcije te procesi postaju sve
Lanac nastajanja novih elemenata nastavlja se i dalje, ali uz



mo do kisernika, neona, itd.

Dobiti smo jezgro ulegnica. Na potpuno identickim nacin dolazi-



jezgro u helijuma

Ko vreme, poskra jezgra berilijsuma je dobi u medjudejstvu sa
sechenju po jednu na 10¹⁰ helijumovih jezgara. I pak i za takvo kretanje
na dva jezgra helijuma. Zato berilijsumovih jezgara i ima pro-
tivni je vek procesno samo 10-15 s, nakon cega se ponovo raspada
do 10-20 kilometara), a zapreminska masa postaje veza od zap-
rekamne mase jezgra atoma koja iznosi 1,5-10¹⁸ kg/m³. U takvo
remesne mase jezgra formira neutroni. U sljednjem stanju neutron je ne-
kada su sve estice neutroni. U sljednjem stanju (stanje na nizje energije)
protomima, pa je najpovoljnije stanje (stanje na nizje energije)



moge dobiti do spajanja u jezgro berilijsuma
biti pre nego sto dodju u dodir. A u dodiru dva jezgra helijuma
staje dovoljno velika da ih elektroline odobjene silje ne mogu od-
postojati energija postoji u rasponu od 140 miliona stepeni energije jezgara helijuma po-
jer neima oslobadjanja energije koja bi se tome opirala. Helijum
tvori u helijumu, gravitacione skupljane zvezde ce se nastaviti
kada goranjie vodonika prestane i sav se vodonik pre-
rotina delovanja.

24.2. "Gorenje" helijuma

ce nastoji da prositri zvezdu. Tako se uravnotezuju dva sup-
gije oslobadjati, viska je biti temperatura i veci pritisak koji
u jezgru, bezec je biti sudarci medju protonima, visce ce se ener-
giju. Postoje gravitacione skupljane stezane, povelicu se gusina
dok traje goranjie vodonika, zvezda ce u ravnotezi
vreme sunčeva masa ce se smanjiti samo za 1%.

goranjie traja i duge desetak milijardi godina. I za sve to
inicijalni zastresujuci, ali vodonika na suncu ima toliko da ce

24.3. Neobična nebeska tela

0,06 kg⁻¹, to je posledica velike verovatnosti spajanja helijuma
u berilijsum od spajanja vodonika u deuteriju.
Gorenjem helijuma oslobadja se viske energije, oko

Tako cela zvezda postaje kugla vrlo gustog neutronskog "gasa". Takve zvezde se nazivaju *neutronske zvezde*.

Tačnih podataka nema, ali se smatra da je temperatura na površini neutronskih zvezda oko $0,1 MK$, a unutar zvezde preko $100 MK$. Na samoj površini neutronske zvezde imaju zapreminsку masu oko $10^7 kg/m^3$, što odgovara zapreminskoj masi supstance belih patuljaka, koja se sastoji iz atomskih jezgara i elektronskog gasa. U dubini zvezde (prema jezgru), gde supstanca dostiže zapreminsку masu oko $3 \cdot 10^{18} kg/m^3$, skoro celokupna supstanca postaje neutronski gas. Debljina tog sloja je oko $100 m$ kod najtežih neutronskih zvezda.

Postoje predpostavke da se neutronski gas ponaša kao super fluidna tečnost i da se prisutne nanelektrisane čestice kreću kroz njega u superprovodnom stanju.

Spoljašnji deo neutronske zvezde predstavlja čvrstu koru koja sadrži najviše gvožđja. Kora ima debljinu nekoliko stotina metara, a zapreminska masa do tih dubina dostiže vrednost oko $4 \cdot 10^{14} kg/m^3$. U graničnom sloju kore, debljine nekoliko metara, gde je zapreminska masa supstance oko $10^8 kg/m^3$, supstanca zvezde je jako namagnetisana tako da magnetna indukcija dostiže vrednost $10^6 - 10^8 T$.

Tipična neutronska zvezda ima masu približno jednaku masi Sunca. Neutronske zvezde male mase ne mogu postojati, jer je kod takvih zvezda zapreminska masa relativno mala te se neutroni raspadaju na protone, elektrone i antineutrino. Smatra se da masa neutronske zvezde ne može biti manja od $0,1$ mase Sunca.

Neutronske zvezde otkrivene su 1967. godine negde u središtu magline Rakovica. Opažen je zapravo pulsar. To su znatno složenije neutronske zvezde, koje se sastoje od neutronskog gasa, hiperonskog gasa*, plazme i čvrste kore. Intenzitet zra-

* Hiperoni - nestabilne elementarne čestice sa masom većom od mase neutrona, a manjom od mase deuterona.

čenja kod ovih zvezda menja se, pulsira. Neobično je što su te promene pravilne i vrlo kratke. Najkraća poznata perioda pulsiranja iznosi $0,033 s$, a najduža $3,5 s$.

Pulsiranje objašnjavamo time što ne zrači jednako cesta površina zvezde. Deo površine koji najintenzivnije zrači okreće se prema nama samo jednom za vreme okreta zvezde oko ose, slično svetiljci na krovu policijskog ili ambulantnog automobila.

Crne rupe. Da bi neutronska zvezda nastala, kao što smo vidieli, mora postojati donja granica početne mase. Isto tako postoji i granica postojanja ovih zvezda pri povećanju mase. Zamislimo eksperiment sa povećanjem mase neutronske zvezde. Sa povećanjem mase zvezde raste i brzina odvajanja čestica od površine zvezde. Intenzitet ove brzine se može proceniti preko relacije (22.30) za drugu kosmičku brzinu

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} \quad (24.5)$$

gde je M masa zvezde, a R njen poluprečnik. Ako bi se u (24.5) M povećalo, a R smanjivalo, kao što se i dogadja kod neutronskih zvezda, tada bi brzina v_2 mogla dostići vrednosti jednake brzini svetlosti. Od tog trenutka zvezda bi bila "odvojena" od okolnog prostora. Za takve zvezde se kaže da su ušle u svoju crnu rupu. Ovakav naziv jasno odgovara prirodi ovog tela. Ovakvotelo može sve da privlači, a da ništa ne izbací u okolini prostora, čak ni foton.

Mogućnost nastajanja crne rupe pojaviće se kada izgore sve energetske zalihe na zvezdi, te nema izvora energije koji bi se cipirao gravitacionom skupljanju zvezde (gravitacioni kolaps). Crna rupa može nastati kada je masa zvezde dovoljno velika, bar 3 puta veća od Sunčeve mase. Kada je brzina v_2 jednak brzini svetlosti c , može se iz (24.5) izračunati početni (najveći) radijus crnih rupa. Taj radijus naziva se *gravitacioni radijus* i jednak je

Ako je radijus zvezde veci od gravitacionog radijusa R_g , zvezda moze niste saznati direktnim posmatranjem.

radijus neutronske zvezde da se nezantno razlikuje od Kao sto je to sluzaj kod crnih rupa, on se ne moze videti, jer moze da se vidi. Medutim, ako je radijus objekta manji od R_g , akto je radijus zvezde veci od gravitacionog radijusa R_g , zvezda moze niste saznati direktnim posmatranjem.

Temeljiti da je nazvan i stvarivanja pokazala da nije res prelazi velicina $3 \cdot 10^{14} m$.

objekat je nazvan quasistar steller object (engl. gotovo kao zvezda zvezdi, vec o savvezdu, maglini ili galaksiji, samo takodje u prilog trudnji da je res o dalekim objektima govori).

Kvazar je male krugove, manje od $1''$. (obiecto taj prezentik ne kvazar kao male kugle, gotovo kao zvezdu. Zvezde vidimo kao takodje radijus radijusa, sto omoguce da se izrazuna masa stala-

vezan zakljucak: kada u rezaru zvezde procesi gorenja neutralne zvezde ne mogu da postoji. Iz tog da moze izvesti nih neutronske zvezde da su novou toga masa neutronske zvezda gravitacionog radijusa, sto omoguce da se izrazuna masa stal-

vezi uokoliko se izvor opazeneve velikog zrachenja. Sto su nene- besci objekti dajte od nas, to se brze udaljavanju. Postoje u toliko rezno jazgatu koje je izvor opazeneve velikog zrachenja. Intenzit-

u sredistu takve magline, kvazar, postoji vrlo ak-

plasara. Nemoguce je sve to objasniti procesima koje poznavamo

u "obitanju" zvezdama. Zato i postoji nekoliko moguceh objasnjenja:

- u rezaru magline je crna rupa, ona privlači medju-
- u rezaru magline je estice, padajući na crnu rupu, gube energij-
- u rezaru magline je u obliku zrachenja;

projave, sto objasnjava veliki koliciu energije zrachenja, pove-

masa (stotinak miliona puta veci masa od Sunca), nestabilna je masi zlog velike mase, eksplozije su na njoj este i nebitna je

- rezaru magline je supervezda, nebesko telo velike

* La menige udaljenosti u sumini, sestlosna godina je takođe premačena jedinicu, pa je zlog toga vedenja veća jedinicu I parsek (stozeni-

ka od reči paralaks i sekunda). Parsek je udaljenost iz koje bi se poluprečnik Putanja pod ulom od $1''$ (uglavine sekunde) iz udaljenosti od Sunca ili 265 astronomske jedinice, a to odgovara udaljenost od 31 bilion km ili $149,5$ miliona km. Parsek je prema tome mjeritev putanje video pod ulom od $1''$ (uglavine sekunde) iz udaljenosti iz koje bi se poluprečnik Putanja

ra udaljenosti od $3,26$ svestorski godina.

$R_g = 2G \frac{c^2}{M}$ (24.6)

Radijus neutronske zvezde da se nezantno razlikuje od Kao sto je to sluzaj kod crnih rupa, on se ne moze videti, jer moze da se vidi. Medutim, ako je radijus objekta manji od R_g , zvezda moze niste saznati direktnim posmatranjem.

iz nje ne dospeva svetlost pa se o procesima u ovakvim telima ne moze videti. Nezantno razlikuje da je radijus zvezde veci od R_g , zvezda moze niste saznati direktnim posmatranjem.

* Energetika energija, a to znaci potrat preteka u zvezdi. Preteka energija se u tam sluzaju ostlobadja medijusom privatizacionjem.

Najlik na zvezdu, ali tako snaznog zrachenja da je dilo tesko za- kazari. Godine 1960. pronadjeni su neobični izvori zrachenja.

ali je nitičovo postojanje dokazano tek 1972/73. Godine.

Cine rupe su bile teorijiski dokazane 1939. Godine,

ste. Moguce je i spajanje crnih rupa u jednu vodu.

ne rupe deluje na okolinu supstanca, pri čemu masa postepeno ra- vitiacioni radjusi, tada se prostor samozatvara. Naravno da telo vezuje se zakrivljenjem protora. Ako telo ulazi pod svoj gra- zala za evoluciju zvezda.

delja zvezda, za eksploziju supernove. Sve ovo ima izbacivanje se nagliči sabijanjem osloboditi dovoljno energije za izbacivanje nje nastavi i zvezda postane crna rupa. Druga je moguocnost da nema više energije koja bi se protivila gravitacionom skuplja- u zvezan zakljucak: kada u rezaru zvezde procesi gorenja neutrosne zvezde ne mogu da postoji. Iz tog da moze izvesti nih neutronske zvezde da su novou toga masa neutronske zvezda gravitacionog radijusa, sto omoguce da se izrazuna masa stal-

Radijus neutronske zvezde da se nezantno razlikuje od mole niste saznati direktnim posmatranjem.

iz nje ne dospeva svetlost pa se o procesima u ovakvim telima ne moze videti. Nezantno razlikuje da je radijus zvezde veci od R_g , zvezda moze niste saznati direktnim posmatranjem.

* Energetika energija, a to znaci potrat preteka u zvezdi. Preteka energija se u tam sluzaju ostlobadja medijusom privatizacionjem.

privlatane sile izuzeće red kozli se prenoset na bestice, kogima time raste kineticka energija, a to znaci potrat preteka u zvezdi.

mene promene intenziteta, ali bez pravilnosti pulsiranja;
 - nekoliko vrlo bliskih zvezda, medjusobno čestim sudarima oslobadjavaju velike količine energije.

Ima i mnogo drugih objašnjenja, ali sva govore o vrlo aktivnom jezgru. Za sada još ne znamo koje je tumečenje tačno. Treba nam više novih podataka.

VII MEHANIKA ČVRSTOG TELA

Apsolutno čvrstim telom naziva se telo koje se pod dejstvom sila ne deformiše. U prirodi ne postoji idealna čvrsta tela, jer se svako telo može deformisati delovanjem snažnih spoljašnjih sila. Radi toga u praktičnom smislu se čvrstim telom mogu smatrati tela koja se u datim uslovima zanemarljivo deformišu.

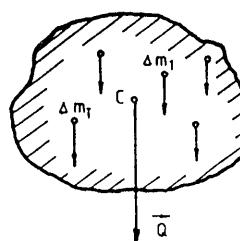
Svako kretanje čvrstog tela možemo prikazati kao superpoziciju dva osnovna tipa kretanja:

a. translatornog, kada se sve tačke tela kreću istom brzinom \vec{v} i sa istim ubrzanjem \vec{a} ,

b. rotacionog, kada se brzine pojedinih tačaka \vec{v} i njihova ubrzanja \vec{a} razlikuju, ali sve tačke imaju istu ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje.

25. TRANSLATORNO KRETANJE ČVRSTOG TELA

a. Težište tela. Centar mase. Svako čvrsto telo može se smatrati za sistem čvrsto vezanih materijalnih tačaka čije su mase $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots \Delta m_i, \Delta m_n$ (sl. 25.1). Svaka od ovih tačaka ima svoju težinu $\Delta \vec{Q}_1, \Delta \vec{Q}_2, \dots \Delta \vec{Q}_i, \Delta \vec{Q}_n$. U homogenom gravitacionom polju sve one predstavljaju paralelne sile koje možemo složiti u jednu rezultantu, koja predstavlja ukupnu težinu tela \vec{Q} . Napadna tačka C rezultante svih paralelnih sile zove se težište tela. Napadna tačka C se ne menja i ma kako obrtali telo ona ostaje na istom mestu, kao da je sva masa skoncentrisana u jednoj tački. Zato se tačka C naziva i centar mase tela. U homogenom gravitacionom polju težište i centar mase leže u istoj tački, dok će se u opštem slučaju nehomogenog polja razlikovati.



Sl. 25.1

* $\frac{d}{d} = \frac{d}{d}$

$\frac{d}{d} = \frac{d}{d}$

$m_a = F$

$$F_{am,a} = F_F$$

(25.3)

(25.2)

(25.1) Po svim elementima tela da je
kako je na osnovu III Nutnovo zakona $\frac{d}{d} = 0$, a po definiciji
translatorne kretanje $\frac{d}{d} = \frac{d}{d}$, sledi nакон sumiranja jedinice
gde je sa F , označena neutranslasična sila, a sa F_F , spoljanska sila.

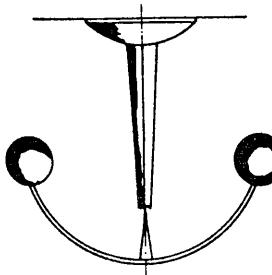
$$Am_{+}^a = F_{+} + F_F$$

se opisati prema II Nutnovo zakonu
kretanja za celo telo. Kretanje materijalne tачke mase m može
tacku i sumiranjem po svim materijalnim tackama, dobijemo zakon
b. Koordinatne centra mase. Znajući zakone kretanja za materijalnu
ubrzanje \ddot{a} , ima tacka opisana sa koordinatama

lučka savijenom zicom (sl. 25.3).

povućenih linija. Teziste tela ne mora da se nalazi u samoj ma-
teli, već mže biti i van tela, kao što je to slučaj kod su-
zati u pravcu zategnutog konca krzakutu A. Ako sada obesimo
telo u nekoj drugoj tacki B ili C teziste se nalazi u preseku
obesima tela i pustimo da se uravnotezi, teziste tela mora le-
za koncu zategnutog konca krzakutu A. Ako sada obesimo
zadušniku zategnutog konca krzakutu A, te u izrazu (25.2) ne možemo ubrzanje izvuci ispred
zakonu, pomozimo ga i podelite sa masom tela m

sl. 25.2



tezista na način prikazan na slici 25.2.
tezista neprovlačene oblike možemo eksperimentiratno opredeliti teziste
tela neprovlačene u centru, npr. kod lopate, valjaka, kocke, itd. Kod
kod homogenih tela provlačene geometrijskoj oblike

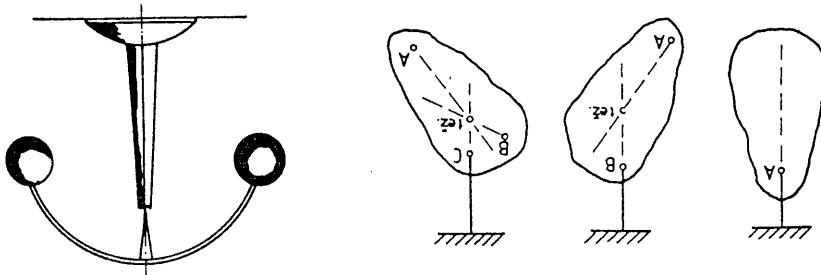
122

(25.6) $F = \frac{m}{\ddot{a}}$

gdje je F rezultanta svih spoljanskih sila koje dejstvuju
na telo, a $m = \frac{d}{d}$ masa tela. Na osnovu (25.3) sledi da je
translatorne kretanje tачke vrstog tela ekvivalentno kretanju mate-
rijalne tачke mase m pojedine rezultante rezultante spoljanskih sila F.

pri slozenom (netranslatornom) kretanju vrstog te-
la, pojedine tачke tela imaju različite brzine i ubrzanja
(a_1, a_2, a_3), te u izrazu (25.2) ne možemo ubrzanje izvuci ispred
zakona za sumiranje

sl. 25.3



123

Na osnovu izloženog možemo zaključiti da se pri složenom kretanju čvrstog tela centar masa kreće kao materialna tačka mase m pod dejstvom rezultante spoljašnjih sila.

26. MOMENT SILE U ODNOSU NA STALNU OSU

Prepostavimo da sila \vec{F} deluje na telo u proizvoljnoj tački A, koja se nalazi na rastojanju r od stalne ose rotacije tela (sl. 26.1). Neka sila deluje u ravni koja je normalna na osu rotacije, tako da \vec{r} i \vec{F} leže u toj ravni. Rezultat delovanja sile \vec{F} biće da telu daje ugaono ubrzanje $\ddot{\theta}$, koje ne zavisi samo od sile \vec{F} , koja deluje na telo već i od rastojanja r od ose rotacije do pravca duž koga dejstvuje sila.

Matematički, moment sile je vektorski proizvod dva vektora, vektora položaja \vec{r} i vektora sile \vec{F}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (26.1)$$

Novi vektor \vec{M} ima pravac koji je normalan na ravan u kojoj leže \vec{r} i \vec{F} , a smer mu određuje pravilo desnog zavrtnja (sl. 26.2).

Intenzitet vektora \vec{M} je

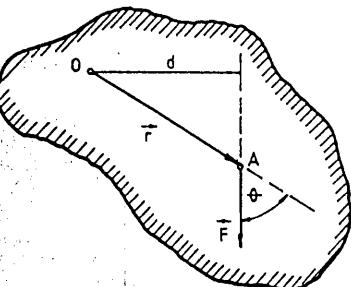
$$M = Fr \sin \theta = Fd \quad (26.2)$$

tj. intenzitet momenta sile jednak je proizvodu iz intenziteta sile i normalnog rastojanja tačke O od pravca sile.

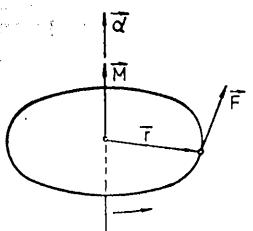
27. MOMENT INERCije

Moment inercije je skalarna veličina, koja je karakteristična za rotaciono kretanje tela. Moment inercije zavisi od mase tela i od rastojanja tela od ose rotacije.

Za materijalnu tačku, mase m, koja se nalazi na ra-



Sl. 26.1



Sl. 26.2

stojanju r od proizvoljne ose rotacije 00' (sl. 27.1.a), moment inercije je

$$I = m r^2 \quad (27.1)$$

Za bilo koje telo (sl. 27.1.b) moment inercije u odnosu na osu 00' dobija se kao zbir momenata inercije elementarnih masa

$$I = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2 \quad (27.2)$$

gde su $\Delta m_1 \dots \Delta m_n$ mase elementarnih delića, a $r_1 \dots r_n$ njihove najkraće udaljenosti od ose 00'. Relacija (27.2) može se napisati u obliku

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \quad (27.3)$$

Kako je zapreminska masa definisana kao

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (27.4)$$

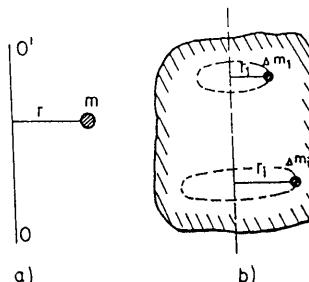
to se izraz (27.3) može napisati u obliku

$$I = \sum_{i=1}^n \rho r_i^2 \Delta V \quad (27.5)$$

Izrazi (27.3) i (27.5) se u graničnom slučaju mogu napisati u integralnoj formi

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV \quad (27.6)$$

Na osnovu relacija (27.3) i (27.6) mogu se izračunati momenti inercije tela pravilnog geometrijskog oblika u odnosu na njihove karakteristične ose rotacije. Tako, na primer, da bismo odredili moment inercije homogenog valjka u odnosu na njegovu osu (sl. 27.2.a) poći ćemo od relacije (27.6). Ako je masa valjka m, poluprečnik R, a H visina, tada doprinos sloja valjka poluprečnika r i debljine dr iznosi



Sl. 27.1

u odnosa u na bilo koju daramenju osu imati moment inercije prolazi kroz jedan centar masa, i ma moment inercije I_0 , tada ce ova teorema, prema ovom teoremi, ako telo u odnosu na neku osu koja vanju momenta inercije u odnosu na neku osu kojist se stajne razracunati primenom formula (27.6). Međutim, pri ordenicije moze se izracunati primenom formula iz navedenih primera, moment inercije moze kao sto smo videli iz navedenih primera, moment inercije moze izraziti izvedeni formule (27.6).

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \quad (27.8)$$

Jedan je doprinos gornje i donje poluluopste jednak. Za homogenu loptu zapreminska masa je $\rho = m/V = 3M^3/4$, pa je

$$I = \frac{2}{5} \int_{R}^{0} (R^2 - x^2) dx = \frac{8\pi}{15} R^5$$

Kako je $dm = \rho dV = \rho(R^2 - x^2)dx$, to je moment inercije lopte

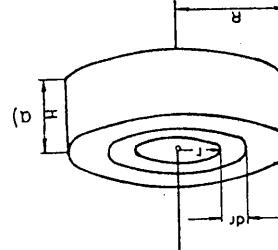
$$dI = \frac{1}{2} dm x^2$$

vrijaka iznositi prema (27.7)

iznos $dV = \pi x^2 dx = \pi(R^2 - x^2)dx$. Moment inercije ovog tankog sredista lopte. Njegova zapremina koji je nalazit na udaljenosti x od ljenice dx i poluprečnika $x = \sqrt{R^2 - x^2}$ priros sloja u obliku iseka deboko svog prečnika. Posmatrajmo do-putna lopta poluprečnika R, rotira inercije pure lopte (sl. 27.2.b.). Na isti nacin izracunacemo moment inercije za osu 00, koji prema (27.7) iznosi

$$= \frac{1}{2} M R^2 \quad (27.7)$$

$$I = \frac{m}{R} \int_{R}^{0} 2\pi x^3 H dx =$$



moment inercije je

$$\rho x^2 dV = \rho x^2 (2\pi x dx H)$$

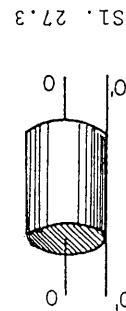
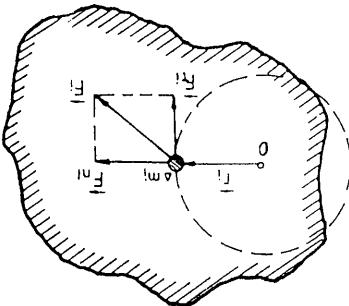
$$F_t^x \times F_t^y = M^x = M^x(F_t^x \times F_t^y) \quad (28.2)$$

gdje je F_t^x tangencijsko ubrzanje (28.1) vektorски sa F_t^y da je zemljem jednacine, kome im smjer sila F_t^x .

$$F_t^x = Am^x \quad (28.1)$$

sa

am pod dejstvom F_t^x opisujuemo novog zakona kretanje deljica poneta F_t^x . Na osnovu II Newtonovog zakona kretanje u osovini i ne doprino reakcije u ravnotezna silom Sila F_t^y je uravnotezna silom Ponenti F_t^y i tangencijsko u radijalu F_t^x . Kao rezultatemo na radijalu F_t^x , kome je masu Am^x deljive sila (sl. 28.1). Na de- ljasnje sila (sl. 28.1).



Sl. 27.3

28. OSNOVNA JEDNACINA DINAMIKE ROTACIONOG KRETANJA

Za nepravilna tela moment inercije se ordenti uvek razdjeli na rotacione kretanje zavisnosti perioda rotacionog kretanja i spoljne telesne sile. Posmatrajmo rotaciono kretanje perioda oscilovanja ovog kretanja od momenta inercije tina, korisicenjem pozante torziona kretanja eksperimentala pomogu torzionog kretanja za nepravilna tela moment inercije se ordenti inercije za osu 00, koji prema (27.7) iznosi

$$I = \frac{M R^2}{2} + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2$$

ili $M R^2/2$ plus $M R^2$, tj.

Prema stajnevoj teoremi, na primjer, moment inercije valjaka u odnosu na osu 00 (sl. 27.3) jednak je momentu

gdje je x - rastojanje izmedju paralelnih osa.

$$I = I_0 + mx^2 \quad (27.9)$$

ili skalarno

$$M_i = \Delta m_i r_i^2 a_{ri} \quad (28.3)$$

Kako je $a_{ri} = r_i \alpha$, sledi

$$M_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha \quad (28.4)$$

Sumiranjem po svim delicima masa na koje je podeljeno telo dobijamo

$$M = \sum_i M_i = \alpha \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad (28.5)$$

Kako je prema (27.3) $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$, to izraz (28.5) dobija oblik

$$M = I \alpha \quad (28.6)$$

što predstavlja osnovnu jednačinu dinamike rotacionog kretanja. Iz (28.6) sledi da čvrsto telo dobija ugaono ubrzanje pod dejstvom momenta sile i da veličina ugaonog ubrzanja ne zavisi samo od mase već i od raspodele mase tela oko ose rotacije.

29. KINETIČKA ENERGIJA I RAD KOD ROTACIJE ČVRSTOG TELA

Pri rotacijski krutog teli oko stalne ose rotacije elementarna masa Δm_i na normalnom rastojanju r_i od ose rotira brzinom $v_i = r_i \omega$, gde je ω ugaona brzina rotacije. Kinetička energija elementarne mase Δm_i iznosi $\Delta E_{ki} = \Delta m_i v_i^2 / 2 = \Delta m_i r_i^2 \omega^2 / 2$. Ukupna kinetička energija rotacije E_K^R tala biće jednak zbiru kinetičkih energija ΔE_{ki} , tj.

$$E_K^R = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum_i \Delta m_i r_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (29.1)$$

Vidimo da je izraz (29.1) za kinetičku energiju tala pri rotaciji sasvim analogan izrazu za kinetičku energiju pri translaciji, ako se masa m zameni momentom inercije I , a periferna brzina v ugaonom brzinom ω .

Pri složenom kretanju čvrsto telo ima ukupnu kinetičku energiju

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (29.2)$$

gde je v_c brzina centra masa, a I moment inercije u odnosu na osu koja prolazi kroz centar masa. Ako pri rotacionom kretanju telo predje ugao θ pod dejstvom momenta sile M , izvršen rad se može napisati u obliku

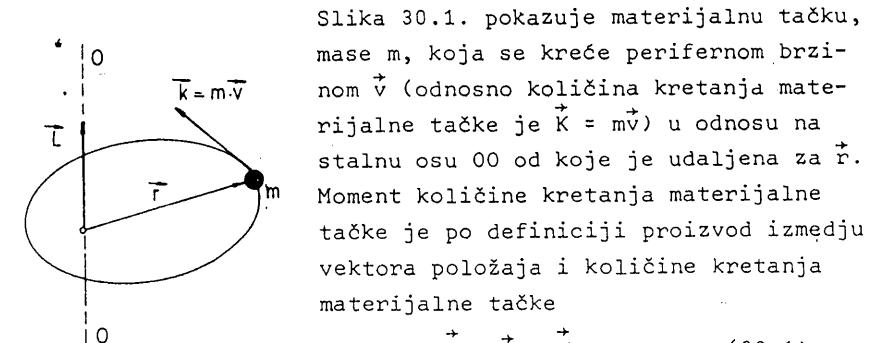
$$A = M \theta \quad (29.3)$$

30. MOMENT KOLIČINE KRETANJA. ZAKON ODRŽANJA MOMENTA KOLIČINE KRETANJA

U poglavlju 28. posmatrali smo rotaciju čvrstog tela, ograničavajući se pri tome na rotaciju oko stalne ose u prostoru. Ta rotacija bila je opisana jednostavnom relacijom $M = I \alpha$. Ako, međutim, osa rotacije nije stalna, tada ćemo rotaciju najlakše opisati jednom novom fizičkom veličinom - momentom količine kretanja*.

Moment količine kretanja definisamo najpre za materijalnu tačku, mase m , koja rotira oko stalne ose, a zatim ćemo

tu definiciju proširiti na kruto telo.



$$L = \vec{r} \times \vec{v} \quad (30.1)$$

Vektor L ima pravac koji je upravan na ravan u kojoj leže vektori \vec{r} i \vec{v} , a njegov smer se određuje pravcem desnog zavrtnja. Moment količine kretanja je dakle aksijalni vektor, u mnogo čemu analogan momentu sile. Njegov intenzitet je

* U našem jezičkom području naziv ove veličine nije jednoznačno definisan, pa se uz pomenuti naziv upotrebljava i moment rotacije, moment impulsa, ili čak ugaoni moment.

$$\frac{dL}{dt} = \dot{S} \times \frac{dk}{dt} + \frac{dS}{dt} \times k \quad (30.5)$$

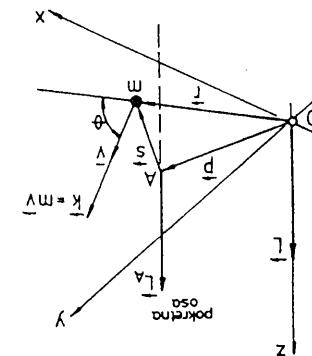
$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{S} \times k) \quad (30.4)$$

Uzmiimo da se osa kroz tazku A moze pomerati brzinaom \dot{V}_A , ali tada je moment kolicine kretanja L_A iznositi
uzmiimo da se osa kroz tazku A i masa m kredu nezavisno, obe velicina
koje odredjuju L_A , tj. i S i k , menjace se na projekciju: kako
se i osa kroz tazku A i masa m kredu nezavisno, Sada imamo sasvim novu situaciju: kako
ko da sačuva svoj smjer. Sada imamo sasvim novu situaciju: kako
se i osa kroz tazku A i masa m kredu nezavisno, obe velicina
oset kroz tazku A. Ostatak je zbir kolicina kretanja svih elemenata u
nova izvuci zadržati član $d\dot{p}/dt = \dot{V}_A$, tj. brzina drugih elemenata
elmentarnih masaama ponistavao), dokemo u zbiru drugih elemenata
daće ukupan moment spoljashnjih sila (jer se momenti sile medju
izdeline kretanja sistema. Zbir prvih elanova na elementarnu masu
dopilemo na levoj strani vremensku promenu ukupnog momenta ko-
stemu (npr. u vrustom teliu podleđenom na elementarnu masu u
sabremo li izraz analogni (30.8) za svaku elementarnu masu u
osu, te i za svaku materijalu tazku u bilo kom sistemu.

$$\frac{dL}{dt} = M_A - \frac{d\dot{p}}{dt} \times k \quad (30.8)$$

postaje

Izraz (30.8) je veoma značajan. On vazi za ma koju paralelnu
osu, te i za svaku materijalu tazku u bilo kom sistemu.
Vremenska promena kolicine kretanja dk/dt je slika koja deluje
na masu m; vektorski proizvod $S \times dk/dt$ je moment M_A te sile
oko osi A. Dakle, dk/dt je brzina v masi m, kako je ona para-
lelna kolicini kretanja k to je $dk/dt \times k = 0$. Jednako (30.7)



nja je $L_A = \dot{r} \times k$. Ako osu rotacijske postavimo u tazku A paralel-
ku 0 od koje je u udaljenosti r (Sl. 30.2) moment kolicine kretanja
se kreće brzinom \dot{r} u odnosu na stalnu osu koja prolazi kroz taz-
ku koju ga odredjujemo. Za materijalnu tazku, mase m, koja
nosu na osi \dot{r} prolazi da on zavisi od osi rotacije u od-
zadine kretanja L. prolazi da on zavisi od osi rotacije u od-

$$L = rk \sin \theta = mr \sin \theta \quad (30.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} &= \frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{d\dot{\theta}}{dt} \\ \text{pa je i} \\ \dot{r} &= \dot{p} + S \quad \text{odnosno} \quad S = \dot{r} - \dot{p} \\ \text{Sa slike 30.2, vidimo da je} \end{aligned} \quad (30.5)$$

la u odnosu na tu osu.

Razmotrimo nekoliko specijalnih slučajeva relacije (30.9). Ako osa kroz A mируje u odnosu na stalnu osu (tačka 0), tj. ako je $\vec{v}_A = 0$, proizilazi da je

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (30.10)$$

tj. vremenska promena momenta količine kretanja prema nekoj stalnoj osi jednaka je rezultanti momenta spoljnih sila s obzirom na tu osu. Sledi takođe da ukoliko je rezultanta momenata spoljašnjih sila jednaka nuli, moment količine kretanja oko te ose ostaje konstantan, tj.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \vec{L} = \text{const.} \quad (30.11)$$

Izraz (30.11) predstavlja zakon održanja momenta količine kretanja, a po svojoj važnosti analogan je zakonima o održanju energije i količine kretanja.

Uzmimo sada drugi specijalan slučaj da je tačka A identična sa centrom masa. Tada je $\vec{v}_A = \vec{v}_c$ i $m\vec{v}_A \times \vec{v}_c = 0$, pa je

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM} \quad (30.12)$$

tj. vremenska promena količine kretanja sistema oko ose kroz centar masa jednaka je rezultanti momenata spoljašnjih sila u odnosu na tu osu.

Analizirajmo opet specijalan slučaj dat izrazom (30.10), kod kojeg čvrsto telo rotira oko stalne (fiksne) ose. Tada je brzina \vec{v}_i za elementarnu masu Δm_i normalna na vektor \vec{r}_i i jednaka $v_i = r_i \omega$ (sl. 30.3). Ukupni momenat količine kretanja tela biće jednak zbiru momenata količine kretanja svih elementarnih masa, tj.

$$L = \sum_i L_i = \sum_i r_i K_i = \sum_i r_i m_i v_i = (\sum_i m_i r_i^2) \omega$$

odnosno

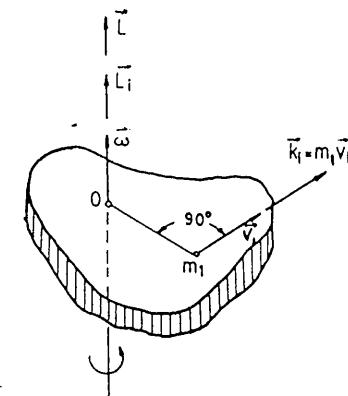
$$L = I\omega \quad (30.13)$$

U ovom specijalnom slučaju vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ i vektor \vec{L}

imaju isti smer, te možemo pisati

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (30.14)$$

Primenjujući uslove iz (30.11) kada je $\vec{M} = 0$ i $\vec{L} = \text{const.}$ dobija-



Sl. 30.3

ja se da je

$$I\vec{\omega} = \text{const.} \quad (30.15)$$

Vidimo da se moment količine kretanja može izraziti analogno količini kretanja $K = m\vec{v}$ uz konvenciju o zameni translatornih veličina (m, \vec{v}) rotacionim veličinama ($I, \vec{\omega}$). Međutim, relacija (30.14) važi samo za rotaciju krutog tela oko stalne (fiksne) ose. U opštem slučaju važi izraz (30.9). Važno je uočiti da iz izraza (30.14) proizilazi za rotaciju oko stalne ose da je

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{M} \quad (30.16)$$

što je zapravo identično izrazu (30.10).

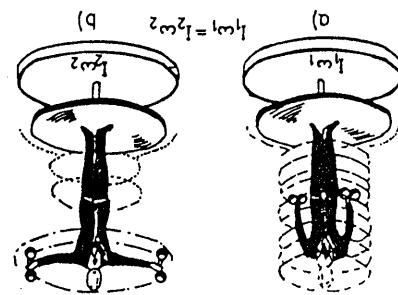
30.1. Primeri za primenu zakona održanja momenta količine kretanja

Smisao zakona održanja momenta količine kretanja može se videti na sledećim primerima:

1. Točak koji rotira velikom ugaonom brzinom ima prema (30.14)

i veliki moment koljicne kretanja t (sl. 30.4). Ukoliko se to promeniti i ugaona brzina u, posle nizhav provodima statnu vrednost. To se moze provesti pomocu eksperimenta sa Prandtlom

vom stolicom (sl. 30.7). To je stolica koja se moze okretati



SL. 30.7

oko statne (fiksne) ose. Ako je trenje pri rotaciji zanemarljiv, tada imamo sluzaj: $\omega_0 = \omega_1$. Moment koljicne kretanje moment spoljasnjih sila jednak nuli. Kada je takvog sistema je konstantan. Posmatravmo sada ovaku koljicu u koju drzim da tegu i vrti se na stolici nekom ugaonom brzini, tada imamo sluzaj: $\omega_0 = \omega_1$. Razlog je veloma jednostavan: kako

prema zakonu odrzanija momenta koljicne kretanje vazduha u rukama su na velicosti udaljenosti od ose rotacije) to se tegova u rukama u ruku početni moment inercije I₁ povećao na I₂ (masa se smanjila, cev je nazajbeljena sa rukama drzim da tegu i vrti se na stolici nekom ugaonom brzini

mu se brzina smanjila na ω_2 . Razlog je veloma jednostavan: kako

mu ω_1 (sl. 30.7.a). Razlog je veliki ruke (sl. 30.7.b) opazjedemo da

$$\omega_1 = \omega_2$$

U literaturu se srede i naziv "kuppa zukouskog".

Iz istog razloga i gradi baleta i kizaci ha ledju izvode razne vrake eksperiment. Kovak se popne na stolicu (sl. 30.8). A u rukama uzme tocak (recimo tocak od bicikla koji moze da rotira u zasebnoj ravnini) i uvezeni moment fiksne vrake i inercije raspodelom dopunske masa duž oboda) koji moze da rotira u zasebnoj ravnini.

5. Sa pomenu tom stolicom iz primeara 4. moze da se ostvari i ova figura pokazuje da rukama ugaone brzine i momenta inercije razne vrake eksperiment.

Iz istog razloga i gradi baleta i kizaci ha ledju izvode razne vrake eksperiment. Kovak se popne na stolicu (sl. 30.8).

4. Navadeni primjeri odnose se na organizje privaca i smera vektor-a se u sistemu koji rotira menjaju moment inercije. Teda, prema (30.11) $I_{\alpha} = const$, ako se menjaj moment inercije i mogu se

zaava neprimenjeni pravac kretanja.

5. Ne menjaj privacu preveratnja, vec ordi to projekt il u toku leta nema privacu privatnja, vec ordi

projekt il po izlasku iz celi po-

rotacionu oko svog ose. Takav

projekt il prolazi kroz nju dobro

nekoliko novaja tako da projek-

tekija, cev je nazajbeljena sa

iz kogih se vrati ispaljenje pro-

3. Kod putovanjih i topovskih celi,

vac osi rotacione odrzali neprone-

toga sto postoji tezina da pra-

utvrdjena lezisticima, samo zbroje

koline osi nece pasti, iako nije

2. Igrala koja rotira oko verti-

ma kada je vozilo u krovini.

na volanu upravljačkog mehaniza-

privacu, sto se narocito osega

brzine kretanja teško menjaju

ji prednji tocakovi, usled velike

ene se dogadjaja i kod vozila ei-

privac osi rotacione zadri. SL-i-

ki otpor, tj. tezzi da privodi

ose pomeri, tocak pokazuje veliki-

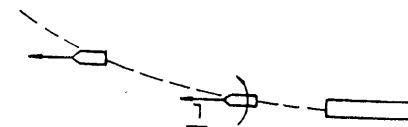
pokusaj da se privac neguje

akov pomerenju. Medutim, pri-

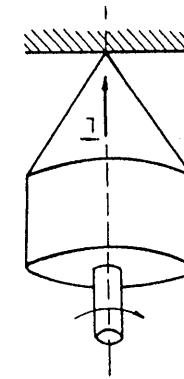
rotacione, nece pokazivati otpor

zak pomera paralelno svom osi

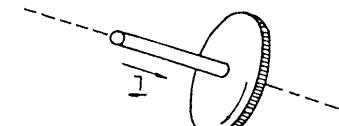
i veliki moment koljicne kretanja t (sl. 30.4). Ukoliko se to-



SL. 30.5



SL. 30.4

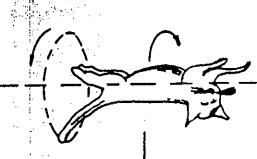


tira oko duže osovine. Ako čovek saopšti neku ugaonu brzinu točku, držeći štap vertikalno, počinje i on da se obrće zajedno sa postoljem u suprotnom smeru. Pokretanje točka izvode "unutrašnje sile" sistema koje ne mogu da izmene ukupni moment količine kretanja koji je bio jednak nuli. Ukoliko čovek drži štap horizontalno, neće doći do obrtanja. Ogled može da se izmeni tako, što će neko drugo lice saopštiti točku ugaonu brzinu i predati štap čoveku na stolici. Sistem sada spolja prima neki moment količine kretanja. Čovek se neće obrtati. Ali, ako pokuša da nagne štap iz vertikalnog pravca, čovek počinje da se obrće jer moment količine kretanja u odnosu na vertikalnu osu ne sme da se promeni. Na primer, ako štap okreće tako da točak bude dole, tj. vektor momenta količine kretanja promeni smer, klupa počinje da se obrće u prvobitnom smeru obrtanja točka.

Sl. 30.8

6. Poznato je da ma kako bacili mačku uvek se dočeka na noge.

Mačka svom repu (sl. 30.9) saopšti rotaciju u jednom smeru, zbog čega se njeno telo obrne u drugom. Da bi se ovo obrtanje izvelo što brže, mačka smanjuje moment inercije tela ispruzivši noge u pravcu tela, a uvećava moment inercije repa ispruzivši ga u upravnom pravcu.

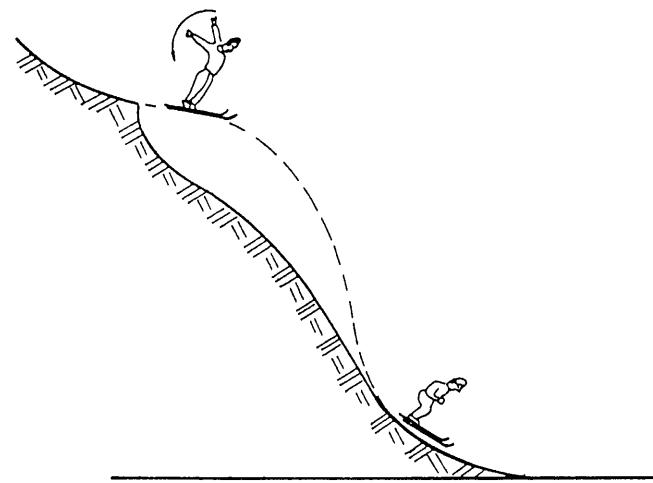


Sl. 30.9

7. Postupak sličan poslednjem primeru primenjuju i sportisti koji se bave skijaškim skokovima. Otskokom skakač počinje da se kreće translatorno (sl. 30.10)

Da bi podesio nagib svog tela prema nagibu doskočišta on pri letu raširi ruke i daje im slabu rotaciju unazad prema

dole. U odnosu na horizontalnu osu koja prolazi kroz njegovo



Sl. 30.10

težište, skakač dobija moment količine kretanja, tj. njegovo telo stekne izvesnu ugaonu brzinu unapred.

31. ROTACIJA TELA OKO SLOBODNE OSE

Poznato je da mnogi delovi raznih mašina rotiraju tako da njihova osa rotacije nije proizvoljna, već je određena i fiksirana ležištima. Analiza rotacije tela u ovom slučaju može se izvesti na bazi napred izloženih zakona o rotaciji. Ležišta primaju na sebe sile koje se pri ovom kretanju javljaju tako da se ne menja položaj ose rotacije.

Poseban slučaj se javlja kod rotacije tela kada osa rotacije nije fiksirana već telo rotira oko slobodne ose. Rotacija tela oko slobodne ose je specifičan oblik rotacionog kretanja. Slobodnom osom naziva se osa oko koje telo slobodno rotira, tj. bez dejstva spoljašnjih momenata. Slobodne ose tela uvek prolaze kroz težište, tj. one su težišne ose i ima ih

bjezbroj. Telо u rotaciјi nije podjednako stabilno oko svih osa bezbroj. Kada se promeni osa rotaciјe, menjaj se i visina pokazali da vrednost momenta inercije za osu.

U rotaciјi nisu prijavljene, ona slobodno kruži metalu šipku. Ta telo nisu prijavljene, ona slobodno kruži metalu šipku. U rotaciјi nisu prijavljene, ona slobodno kruži metalu šipku.

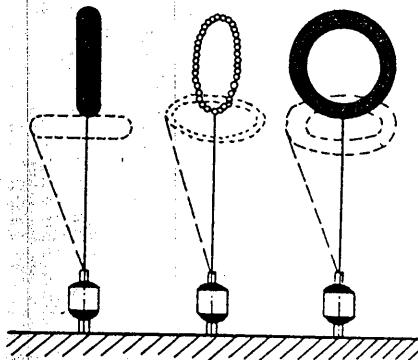
Kod električnih motora, centrifugalni masina, tura bina, točkova i svih tela, koja se okreću sa velikom ugonom brzino vaziće da se njihova osa rotaciјe poklapa sa jednom raspolođenom osom. U tom slučaju celokupna masa tela ravnomerni je rasporedjena oko osovine rotaciјe, pa se centrifugalne sile, koje dejstvuju na osu rotaciјe, uzačamo ponistavaju. Ako to nije postignuto, onda centrifugalna sila dejstvuje na osovinu i skrivači ići ležeće razlabaće, što se može videti na fotografiji.

Sl. 31.3

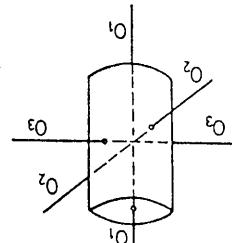
U poseću je sva tri tura rotirati oko onih osa (na) masina. U tom slučaju će se njihova osa rotaciјe poklapati u horizontalan položaj (polozaj najvećeg momenta inercije). Prema tome, momenta inercije u horizontalnom položaju su najveći u horizontalnom položaju (polozaj najvećeg momenta inercije). To je ležeće u proizvodu kanapa. Poste-

masina. U poseću je sva tri tura rotirati oko onih osa (na) masina. U poseću je sva tri tura rotirati oko onih osa (na) masina. U poseću je sva tri tura rotirati oko onih osa (na) masina. U poseću je sva tri tura rotirati oko onih osa (na) masina. U poseću je sva tri tura rotirati oko onih osa (na) masina.

Sl. 31.2



ići krateku metalnu šipku. Ta telo nisu prijavljene, ona slobodno kruži metalu šipku. Ta telo nisu prijavljene, ona slobodno kruži metalu šipku.

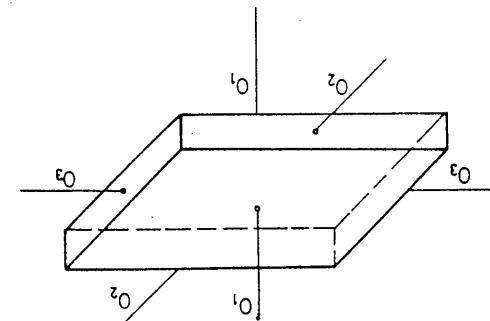


osu. U rotaciјu nešto obesimo pomenu takozog kanapa (sl. 31.3) ako na najvećim momentom inercije. Ova pojava se može provesti i pri delovanju spojkišnjih slika na telesu stabilna rotacija je okolo osi sa najvećim momentom inercije. Ova pojava se može videti na fotografiji.

$$I_1 \neq I_2 = I_3$$

Sl. 31.1 Kod homogenog valjka osa $I_{1\min}$ je 0.101 dok su osi 0.202 i 0.303 sa I_{\max} . U ovom slučaju momenti inercije su (sl. 31.2) slobozadna

$I_1 \neq I_2 \neq I_3$



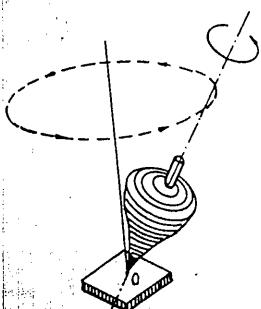
za ovaj slučaj mo- sti $I_{1\max}$ i $I_{2\min}$. cijeli izmehu vredno- josti je moment inercije stabilna posto nije stabilna posto sa $I_{3\min}$. Osa 0.202 sa $I_{1\max}$ i 0.303 stabilne rotaciјe su kod homogenog pravougađog paralelopipeda (sl. 31.1) slobodne osi telesa. rotira oko osi najvećeg momenta inercije. Tako, na prvoj, normalne i teleso kruži slobodno rotira, rotirajući oko jedne od tih normalnih (min.) i srednjih vrednosti. Ove tri osi su međusobno njenjama iko osi srednjeg momenta inercije ista za sve tri osi. Ona je osa, ali stabilnost rotaciјe nije ista za sve tri osi. Ona je normalne i teleso kruži slobodno rotira, rotirajući oko jedne od tih normalnih (min.) i srednjih vrednosti. Ove tri osi su međusobno njenjama iko osi srednjeg momenta inercije ista za sve tri osi. Ona je rotira oko osi koja mu pravljaci kroz težište, postojije tri moment inercije. Kod svakog tela kruži slobodno rotira, tj. kada se rotira ose rotaciјe. Kad se promeni osa rotaciјe, menjaj se i visina pokazali da vrednost momenta inercije za osu.

Ranije smo pokazali da vrednost momenta inercije za osu. i trajana rotaciјa može da se ostvari samo oko tih redjene osa. Kada se rotaciјa najeve da je rotaciono podjednako stabilno oko svih osa bezbroj. Telо u rotaciјi nije podjednako stabilno oko svih osa bezbroj. Kada se promeni osa rotaciјe, menjaj se i visina pokazali da vrednost momenta inercije za osu.

i trajana rotaciјa može da se ostvari samo oko tih redjene osa.

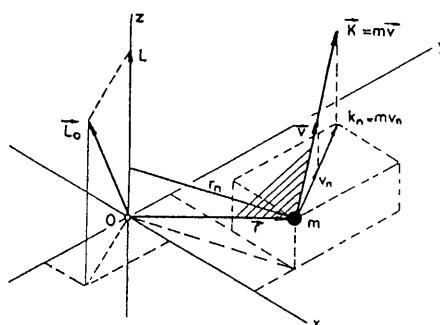
32. ROTACIJA KRUTOG TELA OKO STALNE TAČKE. ŽIROSKOP

Simetrično čvrsto telo koje se slobodno obrće oko ose čija je jedna tačka stalna, naziva se čigrom. Ako se stalna tačka poklapa sa centrom masa tela, onda se naziva žiroskopom.



Sl. 32.1

momenata vidi se na slici 32.2. Neka se čestica mase m kreće



Sl. 32.2

brzinom \vec{v} i količinom kretanja $\vec{K} = \vec{m}\vec{v}$. Tačka 0 neka je proizvoljna stalna tačka. Definisamo moment količine kretanja \vec{L}_0 čestice u odnosu prema stalnoj tački 0 kao vektorski proizvod vektora \vec{r} od tačke 0 do čestice m i količine kretanja \vec{K} , te

čestice

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{K} \quad (32.1)$$

Vektor \vec{L}_0 je dakle normalan na ravan u kojoj leže vektori \vec{r} i \vec{K} (naznačenu osenčenjem), a njegov smer prikazan je na slici. Vidimo da se vektor \vec{L}_0 razlikuje od aksijalnog momenta količine kretanja \vec{L} čestice m definisanog oko ose z kroz tačku 0

$$\vec{L} = \vec{r}_n \times \vec{K}_n$$

gde je \vec{r}_n normalna udaljenost od ose z do čestice m , a \vec{K}_n komponenta vektora \vec{K} u ravni normalnoj na osu z . Kako je sa slike vidljivo, \vec{L} je zapravo komponenta vektora \vec{L}_0 duž ose z .

Na sličan način definisamo i moment sile \vec{F} oko stalne tačke 0

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad (32.2)$$

Da se dokazati na način sličan onome kojim smo izveli izraz (30.10) da za rotaciju čestice oko stalne tačke važi relacija

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \quad (32.3)$$

gde su \vec{M}_0 i \vec{L}_0 momenti definisani oko stalne tačke 0. Izraz (32.3) može se lako uopštiti na kretanje sistema čestica, odnosno krutog tela. Na levoj strani zbir momenata za svaku česticu daće ukupni momenat spoljašnjih sila. Na desnoj strani dobijemo vremensku promenu ukupnog momenta količine kretanja. Uopšteno će rezultujući moment sile i moment količine kretanja tela imati različite smerove. Relacija (32.3) pokazuje da se promena ukupnog momenta količine kretanja odvija u smeru delovanja rezultujućeg momenta spoljašnjih sila.

U specijalnom slučaju kada je rezultanta momenta spoljašnjih sila oko date stalne tačke jednaka nuli, moment količine kretanja sistema oko te tačke je konstantan. Gornji izraz predstavlja najopštu formulaciju zakona o održanju momenta količine kretanja sistema. Već smo ranije pomenuli značenje ovog zakona. Njegova važnost je istog ranga kao i važnost ranije izvedenih zakona o održanju energije i količine kretanja. Svi ti zakoni proizilaze iz svoj-

Izradačnuće emo bržinu precesije. Ugaoo koj i opise osa

.

Kretanje osne rotacije ziroskopa zove precesiju. To se gde se u horizontacioni ravni optisujući kruug oka tache 0. Rezultujuće kretanje je prikazano na slici: vrh vektora \vec{L}_0 kreže i zanemarljivo malj, ali se od njeva razlikuje po pravcu. Vektor $\vec{L}_0 + \vec{d}_l$ ima pravilan dužinu kao i \vec{L}_0 (d_l) je normalan na biti dat vektorskim zbirom vektora \vec{L}_0 i \vec{d}_l , tj. biće $\vec{L}_0 + \vec{d}_l$. mena da novi moment kolicine kretanja ziroskopa oko tache 0 će koga će se dvijati u smjeru momenta M_0 . Prema tome, posle vre-

$$d\vec{L}_0 = \vec{M}_0 dt$$

promenu momenta kolicine kretanja $d\vec{L}$ zakonu rotacije (32.3) taj će moment proizvesti u vremenu da ta sile M_0 je normalan na smjer sile $m\vec{g}$ i osi rotacije. Prema gde je R udaljenost centra masa ziroskopa od osi 0. Smjer momen-

$$M_0 = mgR$$

mg. Vrednost tog momenta je

oko te tache, ukupni moment sile na ziroskop dolazi od tezine da rezultante momente sile. Kako sile su tache 0 nema momenta ziroskopa i polaganu rotira sa njom oko tache 0. Razmotrimo sas- ment kolicine kretanja ziroskopa \vec{L}_0 ima zato smjer osi rotacije \vec{d}_l i rotacijsku dolazu od rotacije osi zanemariti. Na slici 32.3. mo- nja koga dolazi od rotacije osi zanemariti. No kako se i sama osa rotacija kretati, u smjeru osi rotaci- je ziroskopa oko osi, moze komponentu momenta kolicine kretati- Medjutim, ako je brzina rotacije osi mala prema brzini rotaci- je. No kako se i sama osa rotacija krene, vektor momenta kolici- te osi i ugaone brzine, tijekući da se rotacija i nekreće osi ziroskopa jednako je prostoru moment kolicine kretanja. Pri rotaciji oko stolice osi u prostoru moment kolicine kretanja Proanalizirajmo kretanje ziroskopa malo detaljnije.

ostaje u horizontacionom položaju.

obrće oko stolice u tache 0, pri čemu prethodna osa obratila govarajućom ugaonom brzinom, sistem nastavlja da se ravnomerno lazi kroz prsten. Zarotiramo li platu u pokazanom smjeru sa osi stalne tache (sl. 32.3). Kružna plota rotira oko osi koga pro-

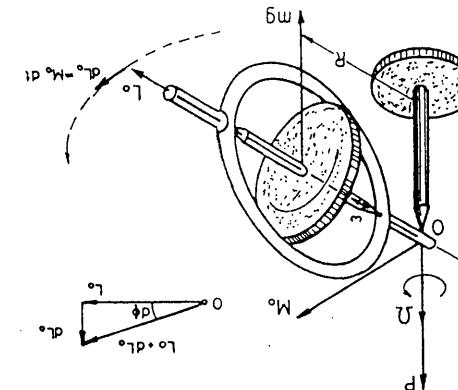
i zakoona kretanje centralna masa sistema (II Njutnov zakon prima-

$$\dot{M}_0 = \frac{dt}{d\vec{L}_0}$$

Uočimo sada formulu analogniju zakoona (32.3)

stva simetrije prostora i vremena.

sl. 32.3



Ziroskop je jednostavan primjer teška koga rotira oko

ma specijalnim slučajevima.

ma složenih te se dve jedinacine mogu analitički rešiti samo u veo- ment sile i moment kolicine kretanja sistema, po pravilu su veo- nosiličnih izrada. Matematički izraz za silu, a pogotovo za mo- = $\vec{d}\vec{L}/dt$, Medjutim, ne treba se dati zavestit formalnom jednostav- f = $d\vec{k}/dt$ i rotacijsku oko stolice opisanu relacijom $M_0 =$ može da se rastavi na kretanje centralna masa opisane relacijom stava kretanje mehaničkih sistema. Naije, svako kretanje sistema taknemo, da su gornja dva zakona pogodna za opisivanje svih vr- ovu formulu analogniju smo već pomenući. Treba, medjutim, da is-

$$\dot{\vec{f}} = \frac{d\vec{k}}{dt}$$

njen na centralni masa

rotacije (vektor \vec{L}_0) u vremenu dt iznosi (vidi mali vektorski dijagram)

$$d\phi = \frac{dL}{L_0}$$

pa je ugaona brzina precesije Ω

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dt} = \frac{M_0}{L_0} \quad (32.4)$$

jer je $M_0 = dL_0/dt$. Ugaona brzina precesije je obrnuto proporcionalna momentu količine kretanja. Žiroskop koji se brzo vrti precesira sporije. Možemo sada odrediti i smer ugaone brzine $\vec{\Omega}$. Vidimo iz slike da je $\vec{\Omega}$ normalan na \vec{L}_0 i \vec{M}_0 , pa možemo napisati

$$\vec{M}_0 = \vec{\Omega} \times \vec{L}_0$$

Sada možemo odgovoriti na pitanje koje smo sigurno sebi postavljali: zašto žiroskop ne pada? Odgovor je: sila nagore \vec{P} kojom stožer dejstvuje na žiroskop jednaka je i suprotnog smera od težine žiroskopa mg ^{†*}. Prema tome, rezultanta vertikalnih komponenata sile jednaka je nuli, pa je i vertikalna komponenta ubrzanja jednaka nuli i osa žiroskopa ostaje u istoj ravni (u našem slučaju u horizontalnoj). S druge strane, ukupni moment sile \vec{P} i mg nije nula; te dve sile čine spreg sile čiji je moment $M = mgR \neq 0$, što uzrokuje precesiju ose žiroskopa.

Primena žiroskopa u tehnici zasniva se na svojstvu izraženom jednačinom (32.4). U aproksimaciji da je moment količine kretanja žiroskopa $L_0 = I_w$ proizilazi da je ugaona brzina precesije (rotacije ose žiroskopa)

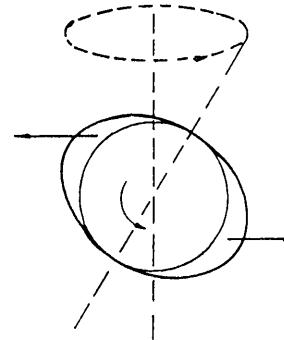
$$\Omega = \frac{M_0}{I_w}$$

Uopšte je pri rotaciji ugaono ubrzanje a proporcionalno momentu sile. Kod žiroskopa je međutim ugaona brzina Ω precesije

^{†*}Pitanje zašto su te dve sile jednakе kod rotirajućeg žiroskopa nije jednostavno i zahteva nešto detaljniju analizu nego što je okvir ovog udžbenika.

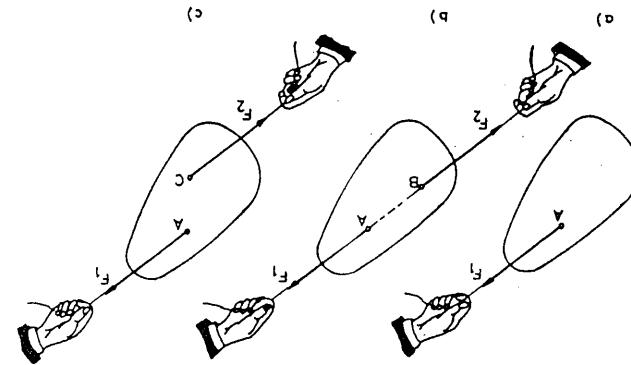
proporcionalna momentu sile. Ako je moment sile konstantan, brzina rotacije Ω se ne menja. Uz dovoljno velik moment količine kretanja ona može biti proizvoljno mala, čak i za velike iznose momenta M_0 . Drugim rečima, nezavisno od spoljašnjih uticaja, ova žiroskopa zadržava stalni pravac i smer u prostoru. Ova osobina nalazi široke primene kod žirokompassa i žiro-stabilizatora.

Na osnovu svega napred iznetog sada nije teško razumeti kretanje čigre (sl. 32.1). Težina čigre mg deluje u težištu i zajedno sa silom otpora oslonca $-mg$ obrazuje spreg koji teži da čigru obori na podlogu. No usled rotacije nastaje precesija, tako da osa čigre opisuje konus. Na sličan način vrši se i kretanje Zemlje (sl. 32.4). Usled spljoštenosti Zemlje, a s obzirom da se pravac njene ose rotacije ne poklapa sa osom ekliptike*, gravitaciona sila Sunca ne deluje podjednako na sve delove Zemlje. Usled toga rezultantna gravitaciona sila ne deluje u težištu Zemlje. Istovremeno se javlja i radikalna sila usled kruženja Zemlje oko Sunca. Rezultanta ovih radikalnih sile nema istu napadnu tačku sa rezultantom gravitacionih sila, te se javlja spreg koji teži da okreće osu rotacije Zemlje. Usled toga Zemlja vrši precesiju, tako da njena osa opisuje puni konus za 25 800 godina.



Sl. 32.4

* Ekliptika, Sunčeva putanja, najveći krug na nebeskom svodu koji Sunce u godini dana prividno predje (nazvan zbog toga što se u blizini toga kruga dogadjaju pomračenja Sunca i Meseca). Ugao od $23(1/2)$ stepena pod kojim Sunčeva putanja na dvema tačkama, ekinokcijama (u Ovnu i Terazijama), preseca nebeski polutar naziva se kosina ekliptike.



spoljšnjih sila na telo ponistavati, tj. kada je telo biti u ravnoteži. Posmatrajući slučajeve prikazane na slici 33.1, ahalizirajući u kojim slučajevima će se delovanje

33. USLOVI RAVNOTEZE

delovanjem više sila ne promeni ni transformiraju ni ugaoju pravcu. Prema tome, za vrsto telo kazemo da je u ravnoteži, ako pod jednoliko rotiralo, ono nastavlja jednoliko da rotira i dalje. Dalje mišljene (odnosno kreće se jednoliko po pravcu) ono jeako je mirovalo (odnosno kreta da telo nslatorno i rotacijom kretnje. Stalnost kretnja znači da telo ne izazove nikakvu promenu kretanja. U tom slučaju kazemo da je telo u ravnoteži. Svako kretanje tela može se rastaviti na translatorne i rotacione komponente. Kretanje se rastavlja na rotaciju i translatornu i rotaciju. Svaka rotacija po pravcu se rastavlja na translatorno i rotacione komponente. Delovanje sila ogleda se kao rotacije na ekvivalentni. Delovanje sila ogleda se kao promena kretanja su mehanički mirovane i jednoliko pravolinjsko sila. U najutrovoj mehanički mirovane i delovanje sila ogleda se kao promena kretanja takо i u rotaciji ravnoteži. Kao sila F_1 i F_2 (jednako rezultanta tih dviju sila jednaka je nulli i telo je koko u translatornoj rotaciji ravnoteži.

Kao što smo videli pri diskusiji I najutrovoj zako- na, kretanje tela može da se oviča i bez delovanja spoljni- ch (slučaj c), telo poginje da se okreće, tj. ono više nije u rotaciji ravnoteži. Kao što smo viđeli pri diskusiji I najutrovoj zako- nu (a) samo jedna sila F , deluje na telo i ono će pod- lelovanjem postati okreće. U slučaju (b) sila F , do- lazi smo silu F_2 istog intenziteta i pravca a suprotog smere. Rezultanta tih dviju sila jednaka je nulli i telo je koko u translatornoj rotaciji ravnoteži. Kao što smo viđeli pri diskusiji I najutrovoj zako-

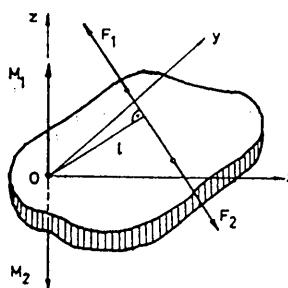
sistemu uslov (33.1) piše u obliku

$$\text{a. } \sum_i \vec{F}_{xi} = 0 \quad \sum_i \vec{F}_{yi} = 0 \quad \sum_i \vec{F}_{zi} = 0 \quad (33.2)$$

$$\text{b. } \sum_i \vec{M}_{xi} = 0 \quad \sum_i \vec{M}_{yi} = 0 \quad \sum_i \vec{M}_{zi} = 0$$

Analizirajmo sada uslov (33.2.b). Videćemo da se za slučaj dve koplanarne sile (sile koje deluju u istoj ravni) ovaj uslov svodi na zahtev da sile budu istog pravca.

Slika 33.2. prikazuje ravno telo smešteno u ravni



Sl. 33.2

x, y na koje deluju dve sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 . Ako je telo u ravnoteži, sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 su jednake i suprotnog smera (uslov pod a.), te deluju u istom pravcu. Prema tome, će i krak delovanja l tih sile oko ose normalne na ravan (x, y) , koja prolazi kroz proizvoljnu tačku 0, biti jednak. Drugim rečima, vrednost momenata sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 oko te ose biće jednak, jer su i sile jednake po

intenzitetu. Uzmimo tu osu kao osu z koordinatnog sistema. Momenati sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 kao vektorske veličine imaju smer ose z. No, kako su sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 medjusobno suprotnog smera i njihovi momenti će biti suprotno usmereni. Njihov zbir biće jednak nuli, tj.

$$M_1 - M_2 = 0$$

Kao što vidimo i ovaj analiziran slučaj potvrđuje da je telo u ravnoteži ako su ispunjeni uslovi (33.1).

Treba još da napomenemo da se pri primeni uslova (33.1.b) ili (33.2.b) momenti sile odnosno komponente momenata sile mogu računati u odnosu na bilo koju proizvoljnu osu. Ova osa se bira prema karakteru datog statičkog problema na taj način da se uslov (33.1.b) dobije u najjednostavnijem matematičkom obliku.

I pored formalne jednostavnosti osnovnih zakona statike, u praktičnim primenama na složene mehaničke sisteme statički proračuni mogu biti veoma složeni.

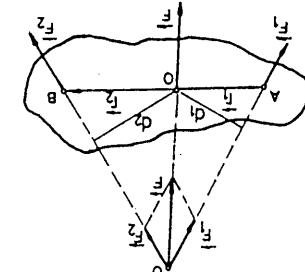
U sledećem poglavlju ćemo pokazati nekoliko jednostavnih problema iz statike i ukazaćemo na metode njihovog rešavanja.

34. SLAGANJE SILA. SPREG SILA

Uopšte uvezši, sile koje deluju na kruto telo nemaju istu napadnu tačku. Za ispunjenje uslova ravnoteže neophodno je prema izrazu (33.1) iznalaženje rezultante sile koje nemaju zajedničku napadnu tačku. Zato ćemo razmotriti neke posebne slučajeve slaganja sile ograničavajući se samo na slaganje koplanarnih sila.

a. Slaganje sile sa različitim napadnim tačkama

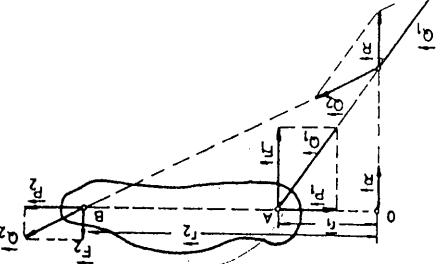
Neka na telo proizvoljnog oblika dejstvuju u tačkama A i B dve sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 proizvoljnog pravca (sl. 34.1). Obzirom da napadna tačka sile kod čvrstog tela može proizvoljno da se pomera duž pravca te sile, produženjem pravca sile dobija se tačka njihovog preseka O' . Tačka O' je zajednička napadna



SL. 34.1
 $F_1d_1 = F_2d_2$
 $F_1d_1 - F_2d_2 = 0$

$$F_1 \times \frac{x_1}{x_1} + F_2 \times \frac{x_2}{x_2} = 0 \quad (34.1)$$

La F_1 i F_2 biti jednaka nuli, tj.
 tante f ukupana statizki moment si-
 tezi mora za napadnu taku 0 rezul-
 tuzi AB. Da bi tezo ostalo u ravnou-
 ordediti joj taku 0, koja lezi na
 zemo pomjeriti duz njeneog pravca i
 njihovu rezultantu f koju zatim mo-



$$F_{1x_1} = F_{2x_2}$$

momentata, tj.

c. Slagajje paralelinih slija suprotnih smrova

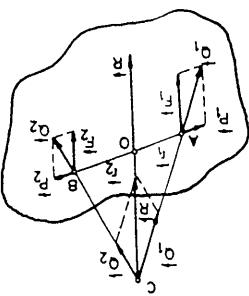
Na slici 34.3. prikazano je slagajje paralelinih slija suprotnih smrova. Postupak za slagajje ovih slija je prenosi-

la suprotnih smrova. Postupak za slagajje ovih slija je prenosi-
 la slično istoču pod b.

slično istoču pod b.
 c) Slagajje paralelinih slija suprotnih smrova
 34.4). Kako je intenziteta
 njavaju slike slija sači-
 a suprotnih smrova
 slike istog intenziteta
 tet slija kod sprege
 uzlantana jednaka nuli,
 sto znači da sprege sli-
 ja nema uticaja na

vezu i smera, koje dešuju u takama A i B nekog telea (SL. 34.2).

Postupak primenjen pod a. u ovom slu-
 ca i smera, postupiti tako da sliama f1
 ci slija f1 i f2 menjusobno ne sekut.
 Zato gemo postupiti takoj da sliama f1
 i f2 dodamo u pravcu AB pomoći "racun-
 istom pravcu, njihovo delovanje se po-
 dnake i suprotne smere, a dešiju po
 skake i suprotne smere, a dešiju po
 daju ne možemo primeniti, jer se prav-
 cu ne mogu deliti, jer su te slike je-
 sti "slike" f1 i f2. Kako su te slike je-
 sti "slike" f1 i f2, sada mogu da sliama f1
 rezultanta f1 i f2 mogu da se slože u ogovaraču-
 nistava. Međutim, slike f1 i f2, slije-
 li slije f1 i f2. Pravci delovanja po-
 tich rezultante f1 i f2. Sada mogu da se slože u ogovaraču-
 rezultanta f1 i f2. Rezultanta f1 i f2 je
 rezultanta f1 i f2. Rezultanta f1 i f2 je



b. Slagajje paralelinih slija

stavnu relaciju (34.2).

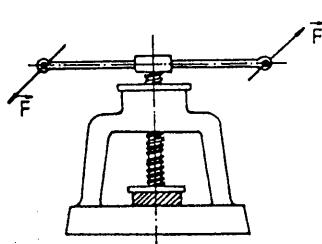
Znaci jednakost momentata slija se u ovom slučaju svodi na jedno-

odnosno

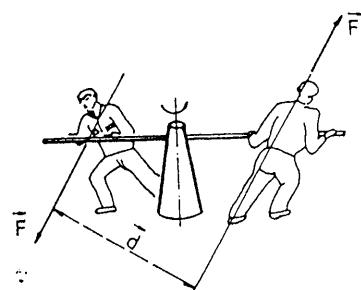
$$F_1d_1 = F_2d_2 \quad (34.2)$$

SL. 34.1

smera. Takođe, spreg sile je jedini primer gde se delovanje dve sile ne može zameniti delovanjem jedne rezultante sile. Spreg sile se često sreće, na primer, pri rotaciji teških rotora kod obrtanja volana u automobilu, kod obrtanja pedala na biciklu, kod ručne prese (sl. 34.5), kod garniture za bušenje (sl. 34.6).



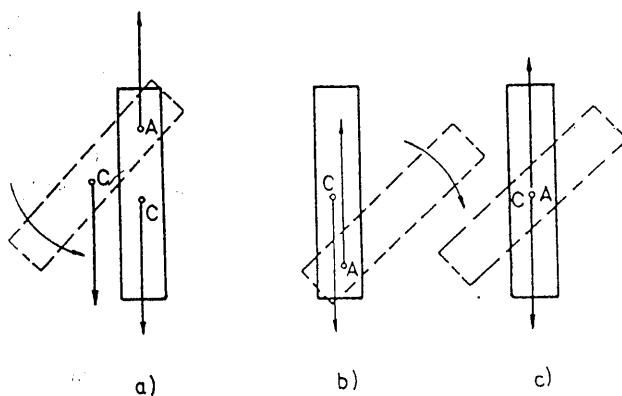
Sl. 34.5



Sl. 34.6

35. VRSTE RAVNOTEŽE. STABILNOST

Za telo prikazano na slici 35.1. opšti uslovi ravnoteže prema izrazu (33.4) mogu biti ostvareni na tri načina:

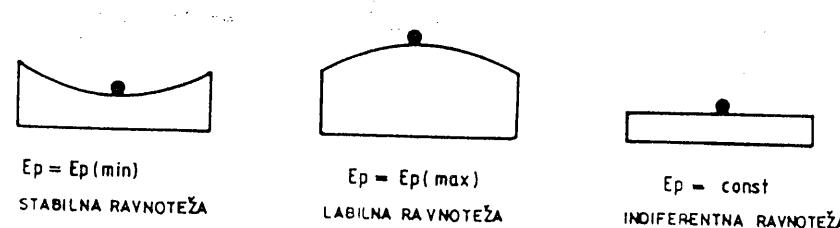


Sl. 35.1

1. ako je težište tela C ispod tačke vešanja A na težišnoj liniji (sl. 35.1.a);
2. ako je težište tela C iznad tačke vešanja A (sl. 35.1.b);
3. ako se težište tela C i tačka vešanja A poklapaju (sl. 35.1.c).

Pri malom poremećaju stanja ravnoteže, na primer, izvodjenjem tela iz ravnotežnog položaja (na slici 35.1.a. nov položaj je predstavljen isprekidanom linijom), nastaje spreg koji vraća telo u ravnotežni položaj. Ta vrsta ravnoteže zove se *stabilna ravnoteža*. Telo, prema slici 35.1.b., nalazi se u *labilnoj* (nestabilnoj) ravnoteži, jer ukoliko ga izvedemo iz ravnotežnog položaja javlja se spreg koji teži da udalji telo iz ravnotežnog položaja dok ga ne dovede u novo stanje koje odgovara stanju stabilne ravnoteže. U slučaju prema slici 35.1.c. ne javlja se nikakav spreg, te telo ostaje u ravnoteži bez obzira na položaj. Ova vrsta ravnoteže je granični slučaj između stabilne i labilne ravnoteže i zove se *indiferentna ravnoteža*.

Na slici 35.2.a, b, c. prikazani su analogni slučajevi ravnoteže lopte. U oba primera prikazana na slikama 35.1.



Sl. 35.2

I 35.2. može se uočiti da je položaj tela: pri stabilnoj ravnoteži ujedno i položaj koji odgovara minimumu potencijalne energije, pri labilnoj ravnoteži položaj koji odgovara maksimumu potencijalne energije i pri indiferentnoj ravnoteži položaj odgovara konstantnoj vrednosti potencijalne energije. U prirodi važi opšti princip prema kojem postoji spontana težnja da tела zauzmu stanja stabilne ravnoteže, odnosno minimuma potencijal-

í strma ravan, zatím specifické obecné (kotury, kotura-

vac

í směr.

Počítajte dva osnovní obecná prostředků masína: polouze-

másiňe možné se kod sítla menšatí napadna taká, intenzitět, prav-

se pomoci níž mohou formiratí složenijé masíne. Pomocu prostře-

nazívamo one kóje se ne mohou svéstí na něké jíos prostříje, dok

cípíjelatí deloví kóji se zovu prostředkem masína. Prostřem masínam

medjutím, kod svich mechanizma masína mohou se užití opští print-

bíjavaju u technicí su věoma raznovrásne, a česťto i vrtlo složené.

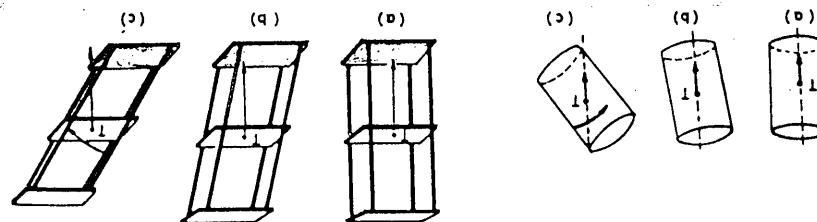
Pogodno iškoristí za vřesněje rada. Masíne kóje se danas upotre-

bejí všechny oslonice (sl. 35.4).

36. PROSTÉ MASÍNE

ravnotězú sve dok vertikala je něgovo težista prolezí kroz

SL. 35.3



SL. 35.4

da se tělo prevíne (sl. 35.3.c.). Tělo na podloži vráže se u
zája: da se tělo vrátí u prováděti podloži (sl. 35.3.b.) ilí
kóje leží na podloži nakreně i pustí, mohou da nastupe dva slu-
žební povrstívna oslonice. Akо se tělo (npr. valíjak, sl. 35.3.a.)
jde zelimo da ga oborímo. Za stabilitost těla na podloži značí-
redjenu stabilitnost i pruzza izvesťan otočor spojilášnici sítí kó-
stabilnost. Svako tělo kóje může na někoi podloži poseduje od-
je dna od vžinich karakteristik ravnoteče těla je
ne energijsé.

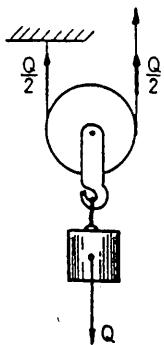
kotur (sl. 36.2.a.). Na nepomíčnom koturu ravnotězú nastaje ažko
se okrege, aži ne menja svouže mesto pa se zato zove nepomíčni
podízanju tereta koturu
se kóriste koturovi. Prá
ta na věcu vísitnu česťo
ta q. Zá podízanje teret
je ednak radu sítě teret
níkada. Uvek je rad sítě
ili na putu, aži na sítě
mo uštedreti ili na sítě
skladi sa zakonom o ade-
klijúšak potpuno je u
kraka tereta. Ovají za-
ta níjen krok veši od
nolíku puta kolíko je pu-
u sítě ge se uštedreti o-
silom podígne vecí teret.
omogučava da se manžom
zakona upotreba polouze
polouze. Na osnovu ovog
(36.1) predstavljá zakon
nosu na osu 0. Izraz
momentu tereta qb u od-
(36.1)

ti. moment sítě Fa mora za polouze u ravnotězí da bude jednak
 $Fa = qb$
nuli. Za polouze prikazanu na slíci 36.1. píšeme
no je prema uslovu (33.4) da je zpří státičkých momenta jednak
šé prave u obliku šípke. Da bi polouga bila u ravnotězí potreb-
stojí razni oblikci polouze (kružna, ugaona i dr.), aži se najče-
sa těžišom da izazovu suprotina obrtanja oko něnog oslonca. Po-
nepokretnog oslonca, a na kóje istovremeno dešluží bar dve sítě,
a. polouga. Polouga je svako čvrsto tělo kóje může se obrátit kó-
zavratnici), kóji se takodje ubrajaju u prosté masíne.
če, točák na vratilu) i specifické obecní strme ravan (klin).
SL. 36.2

SL. 36.1

The diagram shows a horizontal beam pivoted at point 'O' on a vertical axis. A vertical force vector 'Fa' is applied at a distance 'b' from the pivot, pointing downwards. A perpendicular vector 'qb' is shown at the same point, pointing clockwise, representing the moment of the force about the pivot.

je sila jednaka teretu. Nepomičan kotur se može smatrati jedno-krajom dvostrukom polugom (sl. 36.2.b.) čija je osovina u središtu kotura, dok se napadne tačke tereta A i sile B nalaze na njegovom obodu. Kotur koji se podiže zajedno sa teretom zove

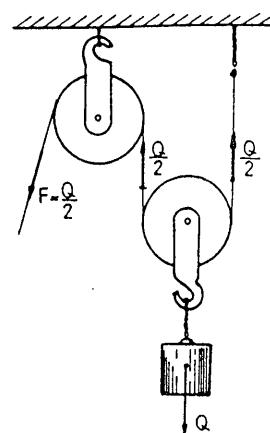


Sl. 36.3

se pomični kotur (sl. 36.3). Kombinovanjem dva ili više kotura dobijamo koturaču (sl. 36.4).

Na pomičnom koturu postiže se ravnoteža ako je sila jednaka polovini tereta, tj. $F = Q/2$.

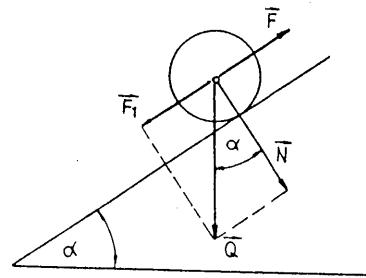
b. Strma ravan. Strma ravan je svaka ravan koja sa horizontalnom ravni zaklapa izvesan ugao α ($0 < \alpha < \pi/2$) (sl. 36.5). Kao što smo videli u delu 21.b. pri kretanju po strmoj ravni težina tela \vec{Q} može da se razloži na dve komponente \vec{N} i \vec{F}_1 . Prva je pasivna, jer ne može da pokreće telo, a druga \vec{F}_1 aktivna, jer pod njenim dejstvom telo može da se kreće niz strmu ravan. Da bi se telo zadržalo na strmoj ravni na njega mora da se deluje uz strmu ravan silom \vec{F} , koja je istog intenziteta kao sila \vec{F}_1 ali suprotnog smera, tj.



Sl. 36.4

$$F = F_1 = Q \sin \alpha \quad (36.2)$$

Prema (36.2) sledi da će sila F biti utoliko manja ukoliko je manji ugao strme ravni.



Sl. 36.5

A_k i ukupnog rada A_u zove se stepen korisnog dejstva.

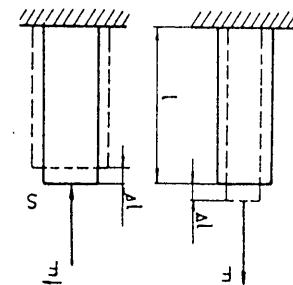
$$n = \frac{A_k}{A_u} \quad (36.3)$$

Kako je uvek $A_u > A_k$, to je stepen korisnog dejstva uvek manji od 1 ili u procentima uvek manji od 100%.

tj. normalni napon deformacije prema (37.2)

$$\frac{F}{S} = \frac{E}{\Delta L}$$

159



SL. 37.2) te se jednacina (37.2) moze napisati

$$F = k \cdot \Delta L$$

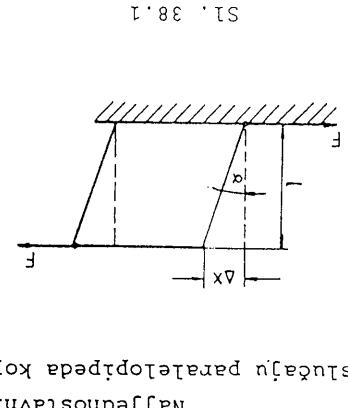
Prema (37.3) slika koja definuje na spiku (telo), u granicama elastičnosti, razmerna je promenit dužine.

38. ELASTICNA DEFORMACIJA PRI MECANJU

su blizu jedna drugoj ali se jasno mogu razlikovati. cionalnosti. Granica do koje vazi Hukov zakon zove se granica proporcionalnosti. Granica do koje vazi Hukov zakon zove se granica elastičnosti. Granica se ova granica predaje telo ostaje trajno deformisano. Ako se ova granica predaje telo se vrši preko izvesnih granica. Ako se može da istezanje, odnosno sabijanje materijala ne može da ostane trajno deformisano. Tada se granica se zove granica elastičnosti, razmerna je promenit dužine.

Prema (37.3) slika koja definuje na spiku (telo), u granicama elastičnosti, razmerna je promenit dužine.

$$(37.3)$$



SL. 38.1

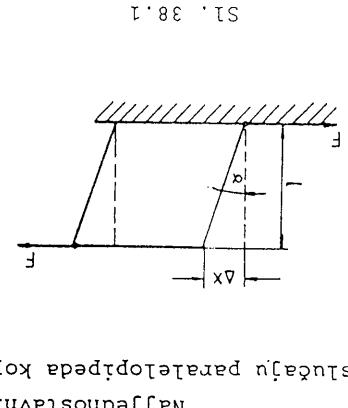
ugao a. Da bi deformacija ostala u granicama elastičnosti kod vertikalne strane tela zakrene za gom slika F, pod čijim dejstvom se smicanje je praktično izazvano spre- slojeva tela u odnosu na donje. To tako da dolazi do smicanja goranjih stvom sile F telo će se deformisati dejeno po celoj površini S. Pod dej- čije tangencijalna slika F (SL. 38.1) dženje je deštavu ravnomerno raspore- ljuje podlogu, dok na suprotnu stranu de- slučaju paralelopipeda koji je jednoum stranom evrasto vezan za

38. ELASTICNA DEFORMACIJA PRI MECANJU

su blizu jedna drugoj ali se jasno mogu razlikovati. cionalnosti. Granica do koje vazi Hukov zakon zove se granica proporcionalnosti. Granica do koje vazi Hukov zakon zove se granica elastičnosti. Granica se ova granica predaje telo ostaje trajno deformisano. Ako se ova granica predaje telo se vrši preko izvesnih granica. Ako se može da istezanje, odnosno sabijanje materijala ne može da ostane trajno deformisano. Tada se granica se zove granica elastičnosti, razmerna je promenit dužine.

Prema (37.3) slika koja definuje na spiku (telo), u granicama elastičnosti, razmerna je promenit dužine.

$$(37.3)$$



SL. 38.1

ugao a. Da bi deformacija ostala u granicama elastičnosti kod vertikalne strane tela zakrene za gom slika F, pod čijim dejstvom se smicanje je praktično izazvano spre- slojeva tela u odnosu na donje. To tako da dolazi do smicanja goranjih stvom sile F telo će se deformisati dejeno po celoj površini S. Pod dej- čije tangencijalna slika F (SL. 38.1) dženje je deštavu ravnomerno raspore- ljuje podlogu, dok na suprotnu stranu de- slučaju paralelopipeda koji je jednoum stranom evrasto vezan za

37. ELASTICNA DEFORMACIJA ISTEZANJA

itd.) i nastaje deformacija smicanje.

ako na kraj definisane homogene zice ili stepa dužine ℓ konstantnog preseka S deštavuemo slihom (SL. 37.1), onda se u deštavuće slika zove napon, tj. $\sigma = \frac{F}{S}$. Pod uticajem sile F posetna dužina zice ℓ se izduži za ΔL Kod istezanja je deštavuće slika sabija telo i površine S na koljene dolazi do smicanja slika deštavuće tangencijalno na potrebno dolazi (sabijanje), ukoliko slika deštavuće tangencijalno na potrebno dolazi (molekulji, atomi, ioni, itd.) i javlja se deformacija istezanja (molekulji, atomi, ioni, itd.). Na površinu tela dolazi u telu do promene raspolaganja izmedju istezanje (ili sabijanje) i smicanje. Kada slika deštavuće normalno stiče sa površinom telo dolazi oblik deformacije: istezanje sa površinom plastičnom telu. Svi oblici elastičnosti je npr. blizak savresno plastičnom telu. Na primer, telo od elektrobliske bliske savresno elastičnom, a plastično telo se po pravilu nazaje izmedju dva navedena ekstrema. Realna tela se po pravilu nazaje spoljasnjih slika. Zaviju novi oblik i nakon prestanka delovanja spoljasnjih slika, i savresno plastična (neplastična) tela, tj. tela koja zadržava u svoj provoditi oblik nakon prestanka delovanja spoljasnjih slika savresno elastična tela, tj. tela koja se u potpunosti vrage je u tom smislu definisati dva ekstrema slučaja:

je u tom smislu definisati dva ekstrema slučaja: istezana te promene zavise od unutrasnjeg svojstva tela. Zgadimo dejstvom spoljasnjih slika menja osim polozaja i svoj oblik. Veliki delovanje spoljasnjih slika na realna tela. Svako telo, pod oblik materijaka je apstraktiča, koju smo uvećali da bismo opisali pojam evrstog tela, tj. tela koje uvek zadržava svoj

za ΔL Kod istezanja ili smanjili kod sabijanja. Veliki deštavuće slike je jedinica napona a je N/m^2 .

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ju deštavuće slika zove napon, tj.

ako na kraj definisane homogene zice ili stepa dužine ℓ konstantnog preseka S deštavuemo slihom (SL. 37.1), onda se u deštavuće slika zove napon, tj.

$$(37.1)$$

velike većine materijala ugao α ne sme da bude velik. Za male uglove važi da je $tga \approx \alpha$ gde je α izražen u radijanima. Sada se za relativnu deformaciju može napisati da je

$$\alpha = \frac{\Delta x}{l} \quad (38.1)$$

Pošto je po Hukovom zakonu sila obračunata na jedinicu površine proporcionalna relativnoj deformaciji, može se napisati

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{l}$$

odnosno prema (38.1)

$$\frac{F}{S} = G \alpha \quad (38.2)$$

gde je G - modul smicanja.

Jedan specijalan slučaj elastične deformacije smicanja je torzija (uvijanje ili upredanje). Ovakvo naprezanje materijala vrlo često se javlja kod mašina, transmisija i dr., te je zbog toga torzija u tehnici najčešći oblik deformacije.

Ako je homogena žica jednim krajem učvršćena, a na drugom slobodnom kraju dejstvuje spreg sila koji uvrće žicu (sl. 38.2), žica će pretrpeti deformaciju pri kojoj će se njena donja osnova u odnosu na gornju zakrenuti za neki ugao α . Moment sprega M ($M = F \cdot d$) koji je potreban da bi žicu od materijala, modula smicanja G , poluprečnika r i dužine l uvrnuo za ugao α iznosi

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l} \alpha \quad (38.3)$$

Sl. 38.2

Iz jednačine (38.3) sledi da je

$$\alpha = \frac{2l}{\pi r^4 G} M \quad (38.4)$$

Merenja pokazuju da, u granicama elastične deformacije uvijanje postoji linearna zavisnost izmedju momenta primjenjenog sprega i ugla uvijanja, što se može predstaviti izrazom

$$M = C \alpha \quad (38.5)$$

gde je koeficijent srazmernosti C konstanta za jednu datu žicu i zove se torziona konstanta. Uporedjujući jednačine (38.3) i (38.5) izlazi da je

$$C = \frac{\pi R^4 G}{2l} \quad (38.6)$$

Na osnovu (38.6) jednačina (38.4) može se napisati

$$\alpha = \frac{1}{C} M \quad (38.7)$$

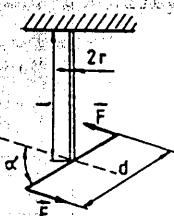
tj. ugao uvijanja kod torzije srazmeran je momentu sila u odnosu uvijanja. To je *Njutnov zakon za torziju*.

Torzija je u tehnici najvažniji i najčešći oblik naprezanja na smicanje. Navešćemo neke primere. Za određivanje gravitacione konstante Kevendiš je koristio torzionu vagu. Kulon je sličnom vagom ispitao prirodu elektrostatičkih sila. Zahvaljujući torzionim osobinama žice moguće je pomoći mnogim instrumenata (voltmetar, ampermeter, galvanometar i dr.) izmjeriti odgovarajuće električne veličine.

39. SUDAR

Jedan od veoma čestih problema u fizici je problem kretanja dva tела nakon sudara, odnosno kratkotrajnog uzajamnog medjudelovanja bez dejstva spoljašnjih sila. Prilikom sudara nastaje više ili manje elastična deformacija tela. Brzine tela posle sudara menjaju se i po intenzitetu i po pravcu, a jedan deo energije prelazi u toplostu. Znači, sudar dva tела je složen proces koji je teško pratiti u svim njegovim pojedinostima, pa se on zato proučava sa više ili manje pretpostavki koje olakšavaju postupak analize, naročito sa matematičke strane. Uslovi pod kojima se sudar dešava mogu da budu veoma različiti, na primer, međusobni položaj pravca kretanja tela pre sudara, uzajamni položaj težišta u odnosu na tačku dodira pri sudaru, oblik tela, elastične osobine tela itd. Detaljnije ćemo razmotriti tzv. *centralni sudar* dva tела, kod kojeg se tela pre sudara kreću duž prave koja prolazi kroz njihove centre.

Pri analizi sudara uzećemo da se mase pre i posle



$\frac{1}{2} m_1 v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_3^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ (39.2)

na kinetické energiije

zakon odrazanja održala je
- na osnovu zakona održa-
PRE SUĐARA SUĐAR ROSLE SUĐARA
 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ (39.1)

- na osnovu zakona o drža-
na slijedi 39.1. jednacine koje odredjuju kretanje kuglica su:
Centralni elastični sudar dve kuglice prikazan je
zakon odrazanja kuglina kretanja.

ne deljiv spojinske sile, sledi da za elastične sudare važi
kineticka energija. Kako i ovde važi pretpostavka da na teža
energiju teža. Dakle, za elastične sudare važi zakon odrazanja
potencijalna energija deformacijske ponovo prelazi u kineticku
potencijalnu energiju razdvajajući razdvajajući teža ukupna
vrijednost se teža razdvajajući. Pri razdvajanju teža ukupna
naprezanja koje su odgovore (repuživog) krankteru. Pod njihom
slledica elastičnih deformacija, javljaju se sile elastičnih
prelazi u potencijalnu energiju elastične deformacije. Kao po-
misu, pri čemu celokupna sile deo kinetickie energije ovih teža
a. Elastičan sudar. U sudarima ovе vrste teža se elastično defor-

zakon odrazanja kineticka energija. Takođe sudar zovemo neelastičan
obične energije, ukupna energija još je uvek sačuvana, ali ne
deo kinetickie energije prešao je u potencijalnu sile u drugi
- Kineticka energija teža promenila se pri sudaru, na primjer,
sudar razdvamo elastičan.

ukupna vrijednost pre i posle sudara ostala je jednaka. Takođe
čka energija je mogla preći sa jednog teža na drugog, ali nijesu
- Kineticka energija teža nije se pri sudaru promenila; kineti-
kod priznane zakona odrazanja energije razlikovati dva slučaja:
kretanja i energije. Pri tome zakon odrazanja kuglina
kuglina kretanja i energije. La posle sudara mogu se odrediti uz priznenu zakona o držanju
sudara ne menjaju i da su rezultate priznata pozantte. Rezultate te-

$$\frac{1}{2} m_2 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m_1 + m_2 = m_1 + m_2$$

$$v_1 = v_2$$

Ako kuglica mase m_1 udara u fiksnu platu ($v_2 = 0$; $m_2 >> m_1$) tada

(39.4)

$$\frac{1}{2} m_2 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

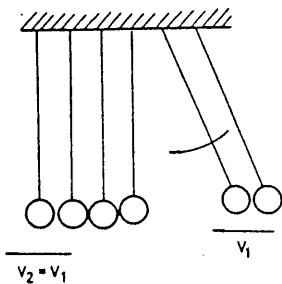
$$m_1 + m_2 = m_1 + m_2$$

$$v_1 = v_2$$

Iz jednacina (39.1) i (39.2) sledi da su rezultate kuglica pose

(39.3)

je deo kinetičkih energija tela pretvoren u drugi vid, odnosno



Sl. 39.2

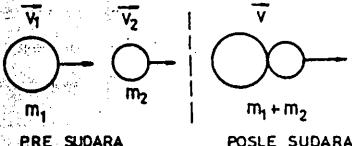
zbir kinetičkih energija pre sudara nije jednak zbiru kinetičkih energija posle sudara. Dakle, pri neelastičnom sudaru ne važi zakon održanja kinetičke energije.

Budući da na ovaj sistem od dva tела ne deluju sponjavašne sile, sledi da pri ovom sudaru važi zakon održanja količine kretanja.

U datom slučaju kuglice se nakon sudara kreću kao celina nekom brzinom v (sl. 39.3). Primenom zakona o održanju količine kretanja, dobija se

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad (39.5)$$

Iz izraza (39.5) sledi da je brzina obeju kuglicu posle sudara



Sl. 39.3

ca posle sudara

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (39.6)$$

U slučaju kada su mase kuglica jednake $m_1 = m_2$ sledi da je

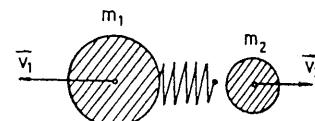
$$v = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \quad (39.7)$$

odnosno, zajednička brzina kuglica posle sudara je aritmetička

sredina brzine pre sudara.

40. UZMAK I MODERATORI

a. Uzmak. Poznato je da prilikom pucanja iz vatrenog oružja tane odleti na jednu, a oružje dobije tzv. uzmak u suprotnu stranu. Neka se, u opštem slučaju, dva tела mase m_1 i m_2 nalaze u miru, pri čemu je $m_1 > m_2$. Pod dejstvom unutrašnjih sila (eksplozija, sabijene elastične opruge) tala se rastave i dobijaju izvesne brzine \vec{v}_1 i \vec{v}_2 (sl. 40.1). Ukupna količina kretanja na početku kretanja bila je nula, pa se primenom zakona održanja količine kretanja dobija



$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \quad (40.1)$$

odnosno

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (40.2)$$

Kinetička energija koju dobije telo veće mase naziva se energija uzmaka. Početna kinetička energija takodje je bila jednaka nuli. No tokom delovanja opruge potencijalna energija opruge prešla je u kinetičku, pa je na osnovu (40.2) odnos kinetičkih energija nakon delovanja unutrašnjih sila dat sa

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 = \frac{m_2}{m_1} \text{ ili } E_1 = \frac{m_2}{m_1} E_2 \quad (40.3)$$

Na osnovu (40.3) proizilazi da je kinetička energija tela veće mase mnogo manja od kinetičke energije tela manje mase. Ova osobina uzmaka je veoma važna i značajna i u drugim oblastima fizike. Uzmak je veoma značajan i u nuklearnoj fizici pri tehnici detekcije nuklearnih čestica, zatim u slučajevima emisije fotona, itd.

b. Moderatori. Sudar i njegovi zakoni imaju značajnu primenu u nuklearnoj fizici i fizici elementarnih čestica. Ve-

166
Oma se često iz kinetičke sudara može izračunati masa, odnosno energija čestice. Isto tako zakoni sudara imaju bitnu ulogu u proracunu gubitka energije neutriona u materijalu (tzv. termalizacija neutriona), pa su zato važna kinoponeinta proračuna zaštite od neutriona i tzv. moderatori u reaktorima. Svakom fizičkom jezgri na uranu nastane, naiće, nekoliko neutriona koji i sami mogu da biti neutroni ili efikanski u cepanju jezgra urana treba ih usporiti, što se postiže uzastopanjem sudarića u atomskim jezgrima. Materijal koji služi za usporavanje zove se moderator. Iz nih vođenika jer jezgra vodonika, protoni, imaju gotovo istu masu kao neutrioni. Kako je takav moderator praktično neizvediv, ko-ristimo se vodom (H_2O) ili teškom vodom (D_2O), a vrlo jesto i rafitorim (C). Vazno svojstvo moderatora je, međutim, da njegova jezgra ne apsorbuju neutrone; ovo svojstvo ne zavisi od kisimetičkih svojstava moderatora.

U tom smislu najbolji moderator bi to je voda. Neutrini se rasprave u vodnim atovima, ali su jezgra materijala moderatori blizak po masi neutriona. U tom smislu jezgra materijala moderatori blizak po masi neutriona (amortizovan) oscilovanje. Svakog oscilatora sastoji se od dva identična fizička stanja sistema. To je vrimeenski interval koji protekne između dvaju oscilacija. Period oscilovanja T je vrime za koje telo izvrsti jednu oscilaciju. To je vrimeenski interval koji protekne između dvaju identična fizička stanja sistema. Frekvencija v ($v = 1/T$) je broj oscilacija u jedinici vremena.

Kružna frekvencija w je povezana sa frekvencijom v $w = 2\pi v = 2\pi/T$. Period oscilovanja T je vrime za koje telo izvrsti jednu oscilaciju. To je vrimeenski interval koji protekne između dvaju identična fizička stanja sistema. Frekvencija-oscilovanja v ($v = 1/T$) je broj oscilacija u jedinici vremena.

Elongacija x je ma koje rastojanje tela od ravnoteže nog polozaja.

Amplitudom naziva se maksimalna elongacija. Stoga je ukupni domen kretnja $2A$.

Opeti slučaj oscilatornog kretnja nije lako matematizirati. Zbog toga u ovom deliku analiziramo specijalnu vrstu oscilatornog kretnja koja se zove harmonijski matički interpretativi. Kod harmonijskog oscilatornog kretnja se sa vremenom po zakonu sinusasa ili kosinusasa, koja se menja sa specijalnom skokom harmonijskog oscilatornog kretnja u zove harmonijskim periodom. Kod harmonijskog oscilatornog kretnja se zove harmonijskim periodom. Matički interpretativi. Zbog toga u ovom deliku analiziramo specijalnu vrstu oscilatornog kretnja koja se zove harmonijskim periodom. A naziva se maksimalna elongacija. Stoga je ukupni domen kretnja $2A$.

X OSCILACIJE

veoma rasprostranjen oblik oscilovanja u prirodi.

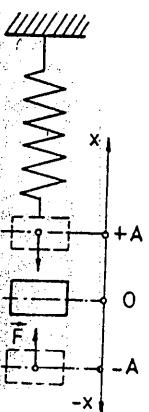
Kretanje ove vrste imamo približno ostvareno pri kretanju tela obešenog o jednu oprugu, u klačenju jednog klatna male amplitude i u kretanju balansnog točka u časovniku. Vibraции žica i vazdušnih stubova muzičkih instrumenata su ili harmonijska ili superpozicija harmonijskih kretanja. Isto tako harmonijski osciluju i atomi u rešetki čvrstog tela, te električno i magnetno polje kod svetlosnih talasa.

Iz ovoga se vidi da će proučavanje harmonijskog kretanja dati osnovu za proučavanje i razumevanje različitih delova fizike. Zbog toga navećemo nekoliko primera harmonijskog oscilovanja i oscilovanja bliskih harmonijskim.

41. PRIMERI HARMONIJSKIH OSCILACIJA

41.1. Oscilovanje tela obešenog o elastičnu oprugu

Oscilatorno kretanje može se javiti pod raznim okolnostima, ali je najčešći uzrok elastičnost tela. Kad se elastično telo deformatiše javlja se elastična sila koja teži da vrati telo u prvobitni oblik, odnosno u ravnotežno stanje. Pod uticajem takvih sile i inercije tela javlja se oscilatorno kretanje. Primer za ovakvo kretanje je telo obešeno o spiralnu oprugu (sl. 41.1). U ravnotežnom položaju je težina tela uravnotežena silom opruge. Kada se telo izvede iz ravnotežnog položaja, remeti se ravnoteža i javlja se sila koja teži da vrati telo u ravnotežni položaj. Pod uticajem ove sile telo će kretati se uklonjeno, pri čemu njegova potencijalna energija prelazi u kinetički. Kada telo dospe u ravnotežni položaj 0, prestaje dejstvo sile, ali usled inercije telo produžava kretanje i dalje nasuprot elastičnoj sili koja se javlja u suprotnom smeru i zaustavlja.



Sl. 41.1

vlja telo. Telo se dalje kreće usporeno do zaustavljanja, kada je kinetička energija opet prešla u potencijalnu (tačka A). Pošto ovoga menja se smer kretanja i pod sličnim okolnostima telo opet dolazi u početni položaj, ako nema gubitaka energije. Od ovog položaja kretanje se ponavlja više puta i tako nastaje oscilacija. Postoje i mnoge druge okolnosti pod kojima mogu da nastanu oscilacije. No kod svih oscilacija može se uočiti da se javlja sila koja je uvek orijentisana ka ravnotežnom položaju i vraća sistem u ravnotežni položaj. U ravnotežnom položaju ova sila jednaka je nuli.

Ako ograničimo naša razmatranja na sabijanje i istezanje opruge, gde je deformacija jednostavno pomeranje napadne tačke sistema, onda su sila i pomeranje povezani Hukovim zakonom (37.3)

$$\vec{F} = k \vec{x}$$

gde je k konstanta srazmernosti, koja se naziva konstantom sile i zavisi od elastičnih osobina materijala, x rastojanje (elongacija) ravnotežnog položaja, a F sila kojom se mora dejstvovati na elastično telo da bi se proizvelo pomeranje x . Stoga sila kojom elastična opruga vuče telo koje je za nju pričvršćeno ima oblik

$$\vec{F} = -k \vec{x}$$

(41.1)

i naziva se elastična ili restituciona sila. Znak minus u (41.1) pokazuje da vektor pomeraja \vec{x} i restituciona sila \vec{F} imaju isti pravac ali suprotan smer. Kada je telo ispod 0, $x < 0$, sila je usmerena naviše pa je njena projekcija na x -osu $F > 0$. Kada je telo iznad 0, $x > 0$ sila F je usmerena naniže tako da je njena projekcija $F < 0$. Uvek kada na sistem deluje elastična sila čiji je intenzitet linearno povećava sa rastojanjem elastičnog sistema od ravnotežnog položaja $F(x) = -kx$ oscilovanje se naziva harmonijskim.

Posmatrajmo ponovo spiralnu oprugu čija je konstanta sile k i dužina bez opterećenja l (sl. 41.2.a). Kada na oprugu obesimo telo mase m opruga će se istegnuti za Δl i zaustaviti u položaju kada elastična restituciona sila $P = -k\Delta l$ uravnoteži

od njegevog ravnoteznog polozaja. Slika F je centralna slika jer je stalan usmerena ka jednoj tacki koja je ovde ravnotezni polozi. Ako se telo stavi u pokret duž osi x, ono će oscilovati sa kružnom frekvencijom ω . Jedenacka kretanja kretaju se sa kružnom frekvencijom ω . Postoje dve centralne slike jedne ravnotezne slike i druga. Druga je prema II. Nutnovom zakonu (S1. 41.2) sa m i uvodjenjem da je $k/m = \omega_0$ dobija se jednačina Deobom (41.2) sa m i uvodjenjem da je $k/m = \omega_0$ dobija se jednačina odnosno

$$F = -kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (41.2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (41.3)$$

Uva jednacka kretanja je homogena diferencijalna jednackina drugog reda. Može se dokazati da se rešenje ovde jednackine može (41.4) zapisati u obliku

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (41.4)$$

Ako nadjeemo prvi i drugi izraz (41.4), vidjemo da rešenje (41.4) zadovoljava jednackinu (41.3).

God početna faza a opisuje položaj sistema u trenutku $t = 0$. Ako nadjeemo prvi i drugi izraz (41.4), vidjemo da rešenje (41.4) zadovoljava jednackinu (41.3).

Na sljediću sliku uporedimo grafikoni za elongaciju (41.6)

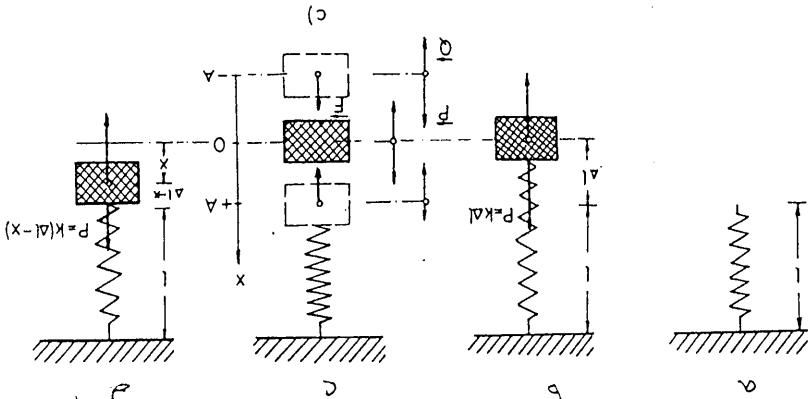
$$\frac{dx}{dt} = v = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (41.5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (41.6)$$

je sistem u amplitudi (tako $k = 0$, $\omega_0 = 1$, $a = 1$, $v_0 = 0$). Kako je kružna frekvencija data

Znaci da je rezultanta slika koja deluje na telo elastična rezistituciona slika oblika (41.1) i razmerna je pomjeranju x tela. Izbudzenje optuge sada je $A\omega_0$. Slika P kojom opisuju deluje na telo je $K(A\omega_0 - x)$ pa je rezultanta slika F koja dejstvuje na telo smanjije ravnoteznog položaja (S1. 41.2.c). Pretpostavimo da se izvodenjem tela iz ravnoteznog položaja telo takodje usmerava ka ravnoteznom položaju (S1. 41.2.d). Izbudjenje ravnoteznog položaja ravne slika P zajedno sa ostaje ista a slika P se povlači. tako da je rezultanta slika F takodje ravnotezna ka ravnoteznom položaju. Izbudjenje sa 0. Izbudjenjem telesa iz ravnoteznog položaja nanize, tezina Q ostaje ista a slika P se povlači tako da je rezultanta F = $P - Q$ usmerena ka ravnoteznom položaju. Zadnjem razmernim pomerenjem tako da je rezultanta slika P tezne položaj običajno običajno je sa 0. Izbudjenjem telesa iz ravnoteznog položaja jednacka je u ravnotezi i taj

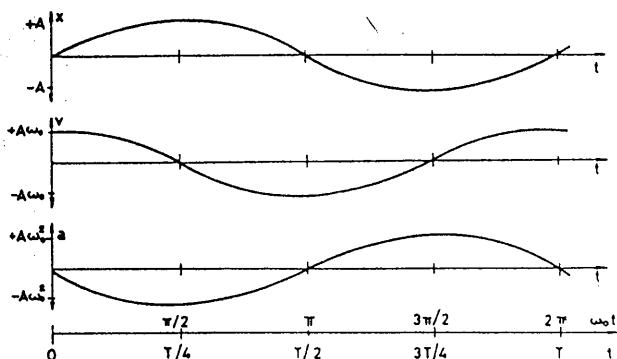
S1. 41.2



tezina tela Q = mg (S1. 41.2.b), tj. kada bude

$$mg = kA \quad$$

Postoje slika P suprotne smere od Q njihova rezultanta $F = P - Q$



Sl. 41.3

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{and} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (41.7)$$

sa

to je period harmonijskog oscilovanja

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (41.8)$$

Jednačina (41.4) može da se napiše u obliku

$$x = A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha) \quad (41.9)$$

Rešenje (41.9) je opšte rešenje jednačine harmonijskog oscilatora. Svako telo koje vremenski osciluje po izrazu (41.9) zove se **harmonijski oscilator**. Jednačinu harmonijskog oscilovanja (41.2) možemo napisati u obliku

$$mv \frac{dv}{dx} + kx = 0 \quad (41.10)$$

obzirom da je

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

Integraljem izraza (41.10) dobijamo

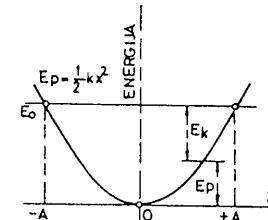
$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const.}$$

što zamenom izraza za x i v prema (41.4) i (41.5) daje

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 = \text{const.} = E_0 \quad (41.11)$$

Relacija (41.11) pokazuje da je zbir kinetičke i elastične potencijalne energije pri harmonijskom oscilovanju konstantan.

Značenje relacije (41.11) može se videti sa slike 41.4. Parabolična kriva u dijagramu energije E i rastojanja x predstavlja potencijalnu energiju, a prava paralelna sa x osom na rastojanju E_0 predstavlja ukupnu energiju (konstantu u izrazu 41.11). Kretanje harmonijskog oscilatora ograničeno je na prostor izmedju pravih $E_0 = 0$ (ose x) i



Sl. 41.4

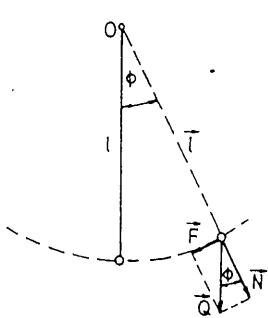
$E = E_0$, jer bi u protivnom sama potencijalna energija bila veća od ukupne. Telo koje harmonijski osciluje slično je dakle kretanju kuglice bez trenja po paraboličnom oluku visine E_0 . Kao što bi kuglica neprestano ostala unutar tako odredjene realne jame, tako za telo koje harmonijski osciluje možemo kazati da se nalazi unutar potencijalne jame. Pojam potencijalne jame često se koristi u kvantnoj mehanici.

41.2. Matematičko klatno

Matematičko klatno je materijalna tačka koja se u polju Zemljine teže može kretati na stalnom rastojanju od date tačke (tačke oslonca) (sl. 41.5). Kretanje klatna se može shvatiti kao kretanje po kružnom luku, te će jednačina kretanja prema osnovnoj jednačini za rotaciju (28.6) biti

$$M = I\alpha \quad (41.12)$$

gde je $I = ml^2$ - moment inercije, materijalne tačke u odnosu na osu koja prolazi kroz (0), a $\alpha = d^2\theta/dt^2$ - ugaono ubrzanje materijalne tačke. Kako sila \vec{Q} ima krak \vec{l} u odnosu na osu rotacije to je intenzitet momenata sile M jednak



Sl. 41.5

T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}} (1 + \frac{1}{4} \sin^2 \phi_0 + \frac{9}{64} \sin^4 \phi_0 + \dots) \quad (41.19)$$

(41.23)

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = - mgI_0 \quad (41.22)$$

Na osnovu (41.21) i (41.22) može se napisati

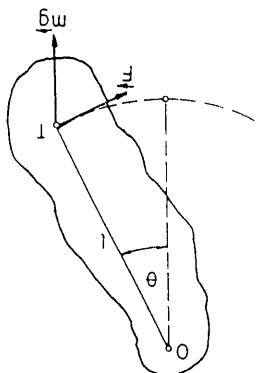
$$M = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (41.22)$$

luku, to je prema jednacini za rotacionu (28.6)

kako se kretanje klatna može shvatiti kao kretanje po krugnom

(41.21)

$$M = - mgI_0 \quad (41.20)$$



41.3. Fizicko klatno

gde je ϕ_0 maksimalna ugao na udaljenost (amplituda) od ravnoteze

kruto telo proizvoljno obliku koje se može slo-

bodno okretati oko čvrste horizontale osi predstavljajući fizicko

ko klatno. Kako se vidi sa slike

41.6., izvedemo li telo iz položaja

ja ravnoteze, tezina tada daje momenat sile koji nastoji telo da

vratiti u položaj ravnoteze. Taj momenat je jednak je

akao je ϕ malo, tada je $\sin \phi = \phi$, te jednacina (41.14) kretanja

IZRAS (41.18) pokazuje da period oscilovanja matematickog klatna ne zavisi od mase materijalne tacke i da razlikza amplitudu oscilovanja kada se tada oscilovanja. Za period oscilovanja amplitudu oscilovanja kada se razlikuju beskonacno reda, dobija se

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}} \quad (41.18)$$

se period oscilovanja matematickog klatna kako je prema (41.7) $w_0 = 2\pi/T$ to zamenom u (41.16) dobija

$$\phi = \phi_0 \sin(w_0 t + \alpha) \quad (41.17)$$

rezencije za elonagaciju može se napisati slijedno (41.4). Ostalo se ovde pojaviće ugašo ϕ umesto rastojanja x). Ostalo je jednacina (41.15) identična je sa jednacinom (41.3) (s tom raz-

$$w_0 = \frac{g}{l} \quad (41.16)$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{w_0^2}{l} \sin \phi = 0 \quad (41.15)$$

matematickog klatna postaje

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (41.14)$$

$$-\frac{d^2\phi}{dt^2} = m_l \frac{d\phi}{dt} - mg \sin \phi = m_l \frac{d\phi}{dt} \quad (41.13)$$

pa se jednacina (41.12) može napisati kao

$$= -mg \sin \phi = -F_t \quad (41.13)$$

$$M = l \times \ddot{\phi} = l\dot{\phi} \sin \phi = -l\dot{\phi} \sin \phi =$$

ili

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (41.24)$$

gdje je

$$\omega_0^2 = \frac{mgI}{I} \quad (41.25)$$

Opšte rešenje jednačine (41.24) je identično sa (41.17)

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (41.26)$$

Kako je prema (41.7) $\omega_0 = 2\pi/T$ to zamenom ω_0 u (41.25) dobija se period oscilovanja fizičkog klatna

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgI}} \quad (41.27)$$

Uvek je moguće podesiti dužinu matematičkog klatna tako da ono ima isti period oscilacije sa fizičkim klatnom (synchronous klatna). Tada je

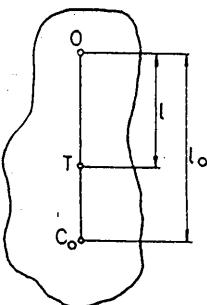
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgI}}$$

odakle je

$$l_0 = \frac{I}{mI} \quad (41.28)$$

Dužina l_0 definisana izrazom (41.28) zove se redukovana dužina fizičkog klatna. Fizičko klatno ponaša se dakle kao matematičko klatno čija je celokupna masa skoncentrisana na udaljenosti l_0 od ose

(sl. 41.7). Tačka C_0 na pravcu koji spaja osu oscilovanja O i težište T, a udaljena je l_0 od ose, zove se centar oscilacije fizičkog klatna. Osobina centra oscilacije je da telo, obešeno u toj tački, osciluje istim periodom kao i da je obešeno oko prvobitne ose.



Sl. 41.7

41.4. Torzionalno klatno

Torzionim klatnom se zove telo koje obešeno o elastičnu nit osciluje uvrtanjem niti. Moment elastične niti uvrnute za ugao ϕ je prema zakonu elastičnosti (38.5) u granicama deformacije

$$M = -c\phi \quad (41.29)$$

gde je c ~ torziona konstanta žice i ona je prema (38.6) jednaka $c = \pi R^4 G / 2l$, tj. zavisi od oblika i elastičnih osobina torzionate žice. Kako je prema (28.6) $M = I\alpha = I(d^2\phi/dt^2)$ to se diferencijalna jednačina (41.29) može napisati

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2 \phi = 0 \quad (41.30)$$

gdje je

$$\omega_0^2 = \frac{c}{I} \quad (41.31)$$

pa su izrazi za elongaciju i period oscilovanja analogno (41.17) i (41.18)

$$\phi = \phi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha); T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}} \quad (41.32)$$

Ako se na torzionalno klatno obesi telo nepravilnog oblika, iz perioda oscilovanja tog tela T i nekog pravilnog tela T_0 , može se odrediti moment inercije nepravilnog tela I iz formule

$$I = I_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \quad (41.33)$$

41.5. Primene klatna pri otkrivanju unutrašnjeg bogatstva Zemlje

Pored geografske širine i visine prema (22.40) na veličinu ubrzanja Zemljine teže utiče i zapreminska masa ($\rho = m/V$) Zemljine kore ili podzemnih sljjeva na jednom mestu. Ako se ispod zemlje nalazi neka veća šupljina ili veća količina podzemne vode ili nafte, na tim mestima ubrzanje će biti manje nego u okolini. Obrnuto, naslage tela veće zapreminske

Tako M ima periferiju brziniu R_w . Brzina v taki M odgovarajuće

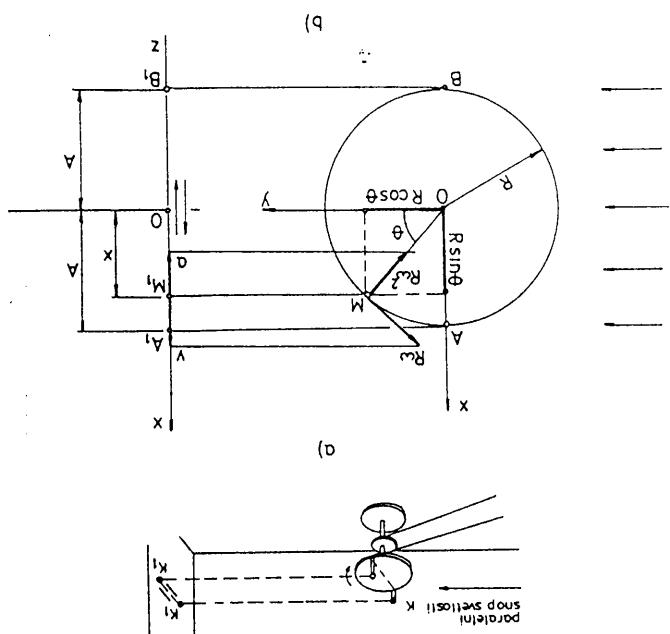
$$x = A \sin \omega t \quad (42.1)$$

Kako je kod jednolikog kretanja $\theta = \omega t$ i sa slike 42.1.b. $R = A$, to je

$$x = R \sin \theta$$

t, mrežno od početka kada je taka u 0, pomeraj x će biti t, mrežno od početka kada je taka u 0, pomeraj x će biti t, mrežno od početka kada je taka u 0, mrežno vremenom sa amplitudom A i kružnom frekvencijom ω . U ma kojem vremenom Mi iste kao i jednako taka kada se protot harmonijski kretanje Sada gemo pokazati da su jednako taka kretanje taka 0, prema dolje do B_1 i natrag do 0. za vreme od jednog perioda t, projekcija taka izvrsile jedan titeraj, tj. projekcija će se kretati od 0 do A_1 , pa natrag do 0, prema dolje do B_1 i natrag do 0.

SL. 42.1

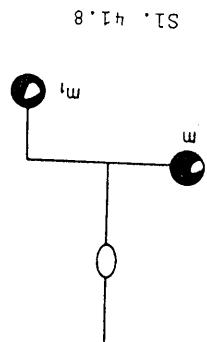


govara protom harmonijskom kretanju. Kada se izvrši jedan orbit

čili M na pravcu x izvodi oscilatorno kretanje koje treba da od izmedju taka A₁. Dok se taka M kreće po zakonu Z osciluje gore-dole. Projekcija materijalne taka M na kružnicu poluprečniku x = Reste i y = Reste, ne prekida po koordinatnim osama x (SL. 42.1.b.). Taka M kruži jednoliko po kružnici poluprečniku R (SL. 42.1.b.). Njasko poslužimo se sldećom geometrijskom interprezacijom. Neka cijeli posluži da je ovo oscilovanje možda harmonijska kretanje. Da bismo utvrdili da li je ovo oscilovanje se tamci-am, tj. ona os- projekcija ki, kuglice na zakuoni kreće se okrugliko. Kada se plota jednoliko okreće sa kuglicom k (SL. 42.1.a). Kada je uvršten stepenje po koordinatnim osama harmonijski osciluj. Da bi to bolje razumeli posmatramo kružnu plotu na kojoj je uvršten stepenje se taka jednoliko kreće po kružnički brzini. Njene projekci- među harmonijskoj jednolikog kružnog kretanja. Naime, ako nje nalaže situacije funkcijske pokazuje da može postotati viza- cijenica da se u izrazu za harmonijsko oscilova-

42. VELA IZMEDU HARMONIJSKOG OSCILOVANJA I RAVNOMERNOG

Izgina promene ubrzanja. Iz kretanja slike može se odrediti ve- urnutu eti se pomocijukojog ogledala. Koji uvrte zicu. Uzao za koliko je zica obe mase, pa se usled toga javlja sprge masa, deštao zemljine teze nije isto na zice nalaže mase različitim zapreminskim (SL. 41.8). Na mestima gde se ispod zem- koga nosi na krajevima dva teza m i m1 tankoj platiniskoj zicci visi laka slike vaga ili gravitacioni variometer. Na vrlo vanje lokalnih odstupanja ubrzanja upotrebljava se i Evesova bogastva unutrasnjosti Zemlje: ruda, soli, nafta. Za konstanto mogu lako zapaziti. To je našto veće razlike u vredno- izraza (41.18) i (41.27), tako da se i male razlike u vredno- rediti pomocijukog ili reverzibilnog klatna primenom kvarca površaju ubrzanje. Ubrazanje g se može veoma tachno od- mas od strednje zapreminske mase Zemljine kore ($\rho = 5,5 \cdot 10^{-3}$



projekciji vektora periferijske brzine $R\omega$ na pravac x , tj.

$$v = R\omega \cos \omega t = A\omega \cos \omega t \quad (42.2)$$

Ubrzanje tačke M jeste njeni radikalno ubrzanje $R\omega^2$, a njegova projekcija na pravac x je ubrzanje koje odgovara tački M_1 , tj.

$$a = -R\omega^2 \sin \omega t = -A\omega^2 \sin \omega t \quad (42.3)$$

Znak minus u (42.3) dolazi zbog toga što je ubrzanje a uvek suprotnog smera od x . Zamenom x iz jednačine (42.1) u jednačinu (42.3) dobija se

$$a = -x\omega^2 \quad (42.4)$$

Ubrzanje a definisano u (42.4) imaće i telo mase m koje osciluje na isti način kao i tačka M_1 .

Sila koja izvodi oscilovanje je

$$F = ma = -m\omega^2 x \quad (42.5)$$

Kako je m konstantno, a i ω ima konstantnu vrednost, tj.

$$m\omega^2 = k \quad (42.6)$$

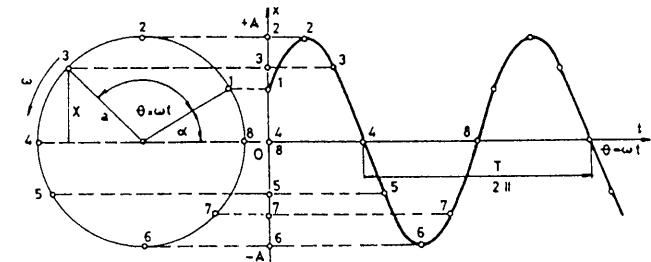
to relacija (42.6) dobija izgled

$$F = -kx \quad (42.7)$$

što je identično sa (41.1) za prosto harmonijsko kretanje. Dobijeni obrasci (42.1), (42.2), (42.4) i (42.7) identični su sa (41.4), (41.5) i (41.6), te zaista imamo pravo da prosto harmonijsko kretanje predstavimo projekcijom stalnog kružnog kretanja.

Veza izmedju ravnomenog kružnog kretanja i harmonijskog oscilovanja može se prikazati i grafički. Materijalna tačka (sl. 42.2) se kreće ravnomeno po krugu ($\omega = \text{const.}$) i njeni uzastopni položaji obeleženi su od 1-8. Projekcija ove tačke na pravac x , kao što smo videli, kreće se harmonijski po sinusnom zakonu, te je razumljivo da će grafikon ovakvog kretanja biti sinusoida (kosinusoida). Na slici 42.2. konstrui-

san je grafikon sinusne oscilacije $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ sa pomoć-



Sl. 42.2

nim krugom. Na apsidiu osu je naneseno vreme t , a na ordinatnu osu odgovarajuća elongacija x . Umesto vremena t na apsidiu osu se mogu nanositi uglovi θ , jer su oni proporcionalni vremenu ($\theta = \omega t$). Na grafikonu (sl. 42.1.c) su istovremeno naneseni i vreme t i ugao θ .

42.1. Superpozicija harmonijskih oscilacija.
Lisažuove figure

U odeljku 42. videli smo da ako se tačka jednolikom kreće po kružnici brzinom v , njene projekcije po koordinatnim osama, $x = R \sin \omega t$ i $y = R \cos \omega t$, harmonijski osciluju sa istom amplitudom i frekvencijom. Postavlja se pitanje: kako se kretanje dobije ako materijalna tačka vrši istovremeno dva harmonijska oscilovanja. Ako su ta dva kretanja sinhrona, iste frekvencije i amplitude i međusobno normalna, rezultanta kretanja biće onda kružnica. Međutim, oscilovanja se mogu razlikovati u amplitudi i frekvenciji, a mogu imati bitnu razliku u fazi. Zrači, imaćemo superpoziciju dve sasvim različite oscilacije

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1)$$

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

Gornje jednačine grafički su predstavljene dijagramima na sli-

kitih metoda.

*-----
je razloganje slobzenti obecitatiom ih kretanja na jednostavna pomodj optiz
dules Lisejous (1822-1880), francousk fizičar; proučavao

$$x = A_1 \sin \omega t; y = A_2 \sin (\omega t - \phi)$$

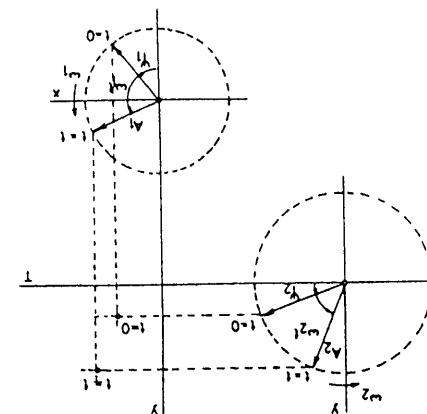
$$a. \quad w_1 = w_2 = \omega.$$

Razmotrijeemo neke najjednostavnije slučajevne:

dijusobno normalna pravaca.

putanjje koje slijedi čestica koja istovremeno osciluje u dva me-
vana krive koje su poznate pod imenom Lissajoue figuru. To su
kvencija, te o faznoj razlikici. Po pravilu to su veoma kompliko-
ta. Izgled rezultujue krive zavisite od odnosa amplituda i fre-
toci u vremenu $t = 0$ i u nekom projektivnom kasnijem vremenu
bezstice u svakom vremenu. Dijagram (sl. 42.3) pokazuje neen po-
polozaja čestice za x i y koordinatu može se orderediti polozaji

sl. 42.3



ci 42:3. Vertikalnim i horizontalnim projektovanjem orderedjenog

$$y^2 - \frac{A_2}{A_1} xy \cos \phi + \frac{A_2}{A_1} x^2 = A_2^2$$

odnosa

$$y = A_2 \left(\frac{A_1}{x} \cos \phi - \sqrt{1 - \frac{A_2^2}{x^2} \sin^2 \phi} \right)$$

tai objek, imamo

vu prikazanu gornju parametarskim objektom dovedemo u ekspliciti-
krive uvek preseci kuppe, tj. krive drugog reda. Ako naije krivi-
cke se pokazati da su u tom slučaju lissajoue
može se pokazati da su u tom slučaju lissajoue

sl. 42.4

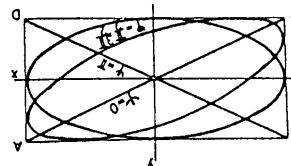


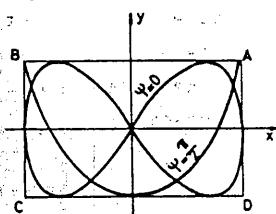
figura za taj slučaj prikazano je na sljedići 42.4.

tj. amplitudu i fazu se razlikuju. Nekoliko karakterističnih

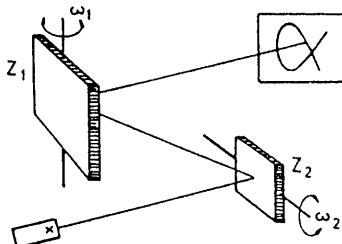
$$v_1 : v_2 = \omega_1 : \omega_2 = n_1 : n_2$$

Ta relacija važi za nedegenerisanu krivu, tj. za krivu bez šiljaka.^{*} Ako kriva ima šiljke,^{**} tada prebrojavanje treba načiniti tako da se dodiru računaju dvostruko, a šiljci samo jednom.

Najjednostavnije se demonstriraju Lisažuove krive katodnim osciloskopom. U tom slučaju dovodićemo naizmenične napone datih frekvencija na koordinatne ose osciloskopa i posmatrati rezultujuće kretanje svetleće tačke na ekranu. Vrlo jednostavan mehanički uredjaj za demonstraciju superpozicije harmonijskog oscilovanja je Pupov aparat. Taj uredjaj se sastoji od dva ogledala, Z_1 i Z_2 , od kojih prvo može rotirati oko vertikalne ose, a drugo oko horizontalne. Neka ogledalo Z_1 miruje, a ogledalo Z_2 rotira oko ose kružnom frekvencijom ω_2 (sl. 42.6). Tada reflektovani zrak opisuje vertikalnu ravan. Ako pak ogledalo Z_2 miruje, a ogledalo Z_1 rotira oko (vertikalne) ose, tada zrak opisuje horizontalnu ravan. Ako oba ogledala osciluju kružnim frekvencijama ω_1 i ω_2 , svetlosni zrak na zaklonu izvodi superponirano kretanje u obliku Lisažuove krive.



Sl. 42.5



Sl. 42.6

* Glatka kriva.

** Kriva sa prelomima.

43. PRIGUŠENE HARMONIJSKE OSCILACIJE

Do sada smo proučavali oscilovanje u idealnim uslovima, tj. kada nikakva sila (osim elastične) nije usporavala ni ubrzavala kretanje. Na svaki realni oscilatorni sistem deluje sila trenja koja koči kretanje i umanjuje energiju sistema tokom vremena. Prisustvo sile trenja smanjuje amplitudu oscilovanja koja će postepeno opadati. Ovakvo oscilovanje naziva se prigušeno oscilovanje.

Jednostavan slučaj prigušenog oscilovanja prikazan je na slici 43.1., gde sila viskoznog trenja prigušuje oscilovanje. Ta sila je kod malih brzina proporcionalna brzini kretanja i suprotnog je smera od smera brzine

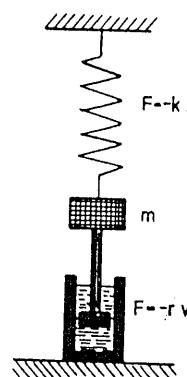
$$\vec{F} = -r\vec{v} \quad (43.1)$$

Ako se ograničimo na oscilovanje u smjeru ose x , jednačina kretanja oscilatornog sistema će biti

$$-kx - rv = ma$$

odnosno

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (43.2)$$



Sl. 43.1

Jednačina (43.2) razlikuje se od jednačine (41.2) pojavom dodatnog člana $r(dx/dt)$, od čije veličine zavisi i oblik rešenja. Ne ulazeći u matematičke detalje, razlikovaćemo tri slučaja:

1. malo prigušenje ($r < \sqrt{4km}$); telo i dalje osciluje sa nešto povećanim ali konstantnim periodom, pri čemu se amplitude neprestano smanjuju po eksponencijalnom zakonu

$$A = A_0 e^{-\alpha t} \quad (43.3)$$

što daje rešenje

$$x(t) = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \psi_1) \quad (43.4)$$

zlovanjā teži u beskonačnosti. Tački se slučaj naziva rezonančna.

(44.5) Postaje veoma mali. Za $w = w_0$ amplituda prijedavanje (44.5).

Kvenčići u prijedavanju periodične sile $F(t)$. Tada imenilac izraza frekvencijska oscilatora $w_0 = \sqrt{k/m}$ prijedavanju jednaka kružnoj frekvencijskoj.

Posebno je zanimljivo da vlastita kružna da se manjaju, a sa manjnjem se povećava.

frekvencijske prijedavne sile. Sa povremenim ovim razlikama amplitudu

čaju zavisiti od razlike sestavnih frekvencijskih oscilatora w_0 i tom izrazom (44.5). Vidimo da amplituda oscilovanja u ovom slu-

se menja i periodična sile, ali sa modifikacionom amplitudom da-

vidimo da materijalna takačka m osciluje istom frekvencijom kojom

$$A = \frac{F(0)}{\sqrt{w_0^2 - w^2}}$$

velike vrednosti t) ako je vrednost konstante A

jer je $k = m\omega_0$. Jednacina (44.4) biće identično zadovoljena (za

$$-\frac{m\omega^2}{2} A \cos \omega t = -m\omega A \cos \omega t + F(0) \cos \omega t \quad (44.4)$$

ili izraz (44.3) u (44.1) dobijamo ka koja osciluje sedi u sustini delovanje sile $F(t)$. Uvjetimo

rešenje (44.3) ima jednostavan fizikalni smisao: materijalna takačka

$$x = A \cos \omega t \quad (44.3)$$

frekvencijske oscilatora date izrazom $w_0 = \sqrt{k/m}$. Rešenje jednacine (44.1) pretpostavljava u po pravilu razliku od vlastite

gde je kružna frekvencijska u po pravilu razliku od vlastite

$$F(t) = F(0) \cos \omega t \quad (44.2)$$

karakter, tj. da se menja po zakonu na. jednostavnosti radi, pretpostavljeni da sile imao konstansni

sila $F(t)$ može imati prizvoljnu periodičnu zavisnost od vremena.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t) \quad (44.1)$$

Počekavši oscilovanje, jednacina takvoog oscilovanja će biti

je g osim elastične sile postoji još jedna spoljasnja sile koja,

počekavši oscilovanje (kvaziperiodično prijedavanje);

gdje je $a = x/2m$, $w_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} - \omega$, $a \omega = \sqrt{k/m}$ je frekvencijska nepriču-

đena u rezonansu s sile $F(t)$.

U deku 41. i 43. posmatrali smo oscilovanje pod de-

strukciju harmoničko oscilovanje, tj. takvo oscilovanje kod ko-

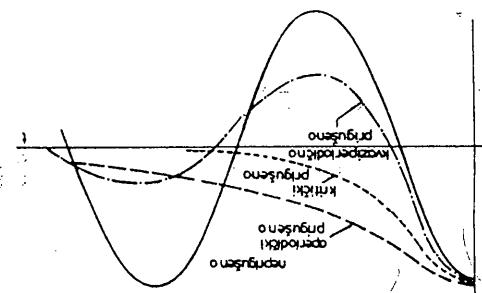
drugom sile do prijedavajuće oscilovanje. Sada ćemo posmatrati

zajedno sile sile sile sile (harmoničko oscilovanje), kao i kre-

stvom elastične sile (harmoničko oscilovanje) pod de-

44. PRIJEDAVNE OSCILACIJE. REZONANCIJA

SL. 43.2



43.2., zajedno sa neprijedavajućim situosidalačkim oscilovanjem.

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \quad (43.6)$$

Sva tri slučaja prijedavajućih oscilacija prikazana su na sljedi-

ćeju kretanje se eksponencijalno prijedavajuće po zakonu

3. aprikodno (neprikodno) prijedavanje ($r > \sqrt{k/m}$), u tom slu-

gde su B_1 i B_2 konstante;

a telo se vrage u ravnotežni položaj za najkratče vreme

stajte biti prikodno, elongacija se manjije eksponencijalno,

2. kritično prijedavanje ($r = \sqrt{k/m}$); kretanje u tom slučaju pre-

se negativno prijedavajuća (kvaziperiodično prijedavanje);

gdje je $a = x/2m$, $w_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} - \omega$, $a \omega = \sqrt{k/m}$ je frekvencijska nepriču-

đena u rezonansu s sile $F(t)$.

U deku 41. i 43. posmatrali smo oscilovanje pod de-

strukciju harmoničko oscilovanje, tj. takvo oscilovanje kod ko-

drugom sile do prijedavajuće oscilovanje. Sada ćemo posmatrati

zajedno sile sile sile (harmoničko oscilovanje), kao i kre-

stvom elastične sile (harmoničko oscilovanje) pod de-

i mi ćemo ga zbog njegove važnosti detaljnije proučiti. Ako je dakle delovanje sile sinhrono sa frekvencijom oscilatora, amplituda će biti veoma velika. Ovaj slučaj možemo ilustrovati primerom dečije ljudiške. Ako se ljudiška gura u pogodnim trenucima tako da sila svaki put deluje u smeru kretanja, amplituda ljudiške može dostići veoma velike vrednosti. U tom slučaju frekvencija delovanja sile je približno jednaka frekvenciji ljudiške. Izraz (44.5) pokazuje da će za tačno jednake vrednosti ω i ω_0 amplituda oscilovanja postati beskonačna, što je naravno nemoguće. U realnom slučaju, uvek su prisutne sile trenja tako da jednačinu (44.1) treba proširiti članom za silu otpora proporcionalnom brzini $v = dx/dt$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F(0) \sin \omega t \quad (44.6)$$

gde je r konstanta definisana u odjeljku 43. Rešenje jednačine (44.6) može se napisati u obliku

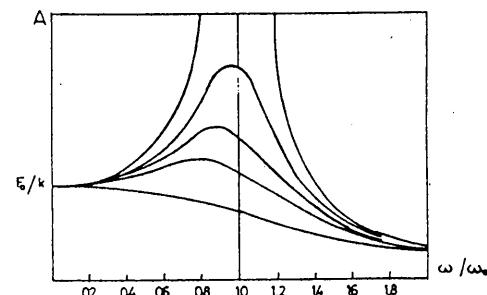
$$x = A \sin(\omega t - \psi)$$

gde je A amplituda data izrazom

$$A = \frac{F(0)}{\sqrt{r^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \quad (44.7)$$

Vidimo dakle da se u realnom slučaju (sile trenja su prisutne) rezonantna amplituda, izraz (44.7), razlikuje od izraza (44.5) za član $r^2\omega^2$, koji se javlja u imenocu. Na taj način rezonantna amplituda ne postaje neizmerno velika ni ako su ω i ω_0 međusobno jednake. Na slici 44.1. dat je grafički prikaz zavisnosti amplitude rezonancije od odnosa frekvencije ω i ω_0 i od konstante prigušenja. Svakoj vrednosti konstante r odgovara jedna kriva iz familije na slici. Za slučaj bez prigušenja amplituda je za $\omega = \omega_0$ neizmerno velika (gornja kriva), dok za slučaj aperiodičnosti ($r > \sqrt{4km}$, donja kriva) nema uopšte rezonancije. Rezonantni procesi su poznati u svim oblastima fizike i, opšta su pojava u prirodi, karakteristična za svaku oscila-

tornu pojavu: zvuk, elektromagnetne pojave, kvantnomehaničke pojave u atomskoj i nuklearnoj fizici itd. Rezonancijom se ob-

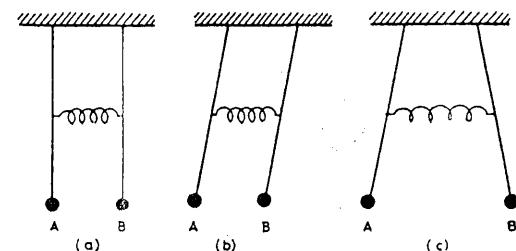


Sl. 44.1

jašnjavaju pojave i u mikro i u makro svetu. Rezonancija se, na primer, pojavljuje kod plime i oseke, emisije i prolaska infracrvenog zračenja kroz kristal, produkcije gama-zračenja apsorpcijom protona u atomskim jezgrima i konačno, kod medjudelovanja subnuklearnih elementarnih čestica. Rezonancija je dakle opšti fenomen, koji se javlja kod prirodnih pojava u svim dimenzijama.

44.1. Prenos energije kod rezonancije

Poučan primer rezonantnog prenosa energije sa jednog tela na drugo pružaju vezana klatna prikazana na slici 44.2.



Sl. 44.2

Klatna su iste dužine i medijusobno su vezana elastičnom oporušom. Pređepostavimo da se klatno A (sl. 44.2.a) drži u mizu, a klatno B posle rati nadesno i zatim se oba klatna pusti. Kako su klatna obesene o kruće steplove umesto o nitii, kretanje jednog klatna preneće se preko opuge na drugo. Znaci na klatno A dešta kretanje izmedju dva oscilatorna sistema došlo do veoma efikasne izmenе energije. Kako je energija oscilovanja, to će klatne vodoravno manje kvadrirati amplitudu oscilovanja. Da je bliskost kompenzirati većom amplitudom oscilovanja, to će klatne sviđati prekveniciju batan uslov prelaska energije sa jednog sistema na drugi. Lako se vidi da će kod vezanih klatna prenos energije biti brži što je opreka vrtloga, tj. što je ujedna konstanta kveza. Ta pogava uže vezana samo za klatnu. Uopšte izmedju dva oscilatora bliske frekvencije prenosile se energija sa jednog oscilatora na drugi. Taj je proces biti brži nego u slugaju klatna sa sljedećim rezultatom.

44.2. Modulirano oscilovanje

Druge bitan uslov prelaska energije sa jednog sistema na drugi je ujedna konstanta kveza. Lako se vidi da će kod vezanih klatna prenos energije biti brži što je opreka vrtloga, tj. što je ujedna konstanta kveza. Ta pogava uže vezana samo za klatnu. Uopšte izmedju dva oscilatora bliske frekvencije prenosile se energija sa jednog oscilatora na drugi. Taj je proces biti brži nego u slugaju klatna sa sljedećim rezultatom.

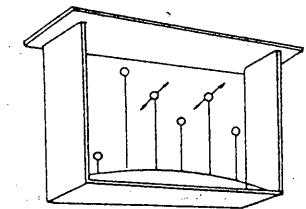
Druge bitan uslov prelaska energije sa jednog sistema na drugi je ujedna konstanta kveza. Lako se vidi da će kod vezanih klatna prenos energije biti brži što je opreka vrtloga, tj. što je ujedna konstanta kveza. Ta pogava uže vezana samo za klatnu. Uopšte izmedju dva oscilatorna sistema došlo do veoma efikasne izmenе energije. Kako je energija oscilovanja, to će klatne vodoravno manje kvadrirati amplitudu oscilovanja. Da je bliskost kompenzirati većom amplitudom oscilovanja, to će klatne sviđati prekveniciju batan uslov prelaska energije sa jednog sistema na drugi. Lako se vidi da će kod vezanih klatna prenos energije biti brži što je opreka vrtloga, tj. što je ujedna konstanta kveza. Ta pogava uže vezana samo za klatnu. Uopšte izmedju dva oscilatora bliske frekvencije prenosile se energija sa jednog oscilatora na drugi. Taj je proces biti brži nego u slugaju klatna sa sljedećim rezultatom.

Na razapetu nit (sl. 44.3) postavimo dva klatna jednake dužine, ali veoma različitih masa. Ako teže klatno za- sti do jame i klatno koge ga je počudilo na oscilovanje primilo se druga smrčila posle su kratko vreme neprovjelino oscilovala. Znaci da je klatno koge vremena povremeno dala klatnu period je isti kao i kod jednog jednog klatna. Oba klatna os- tategnuta i u istom smjeru, druga kogja klatna povremeno nije do pomerenje u istom smjeru. Gde je klatnina dala jednako poter- ja oscilovanja ne prenositi sa jednog klatna na drugo. I edan je možemo ustanovačiti da postoji dva posebna razina kada se energet- cilatora bliske frekvencije. Posmatrajuci klatna (sl. 44.2)

SL. 44.3. Juče samo kretalo klatno, a sva su klatna nekog vremena vidljivo da oscili- na sve njih postepeno prenosil. Na- teže, jer se energija drugog klatna klatna pomaknuti iz položaja ravno- držao klatno. Vidjemo da će se svakog klatno sleva. Zaljubljamo klatno na različite, osim za ne. Na sljedići 4.3. to su drugo i dva klatna koga imaju jednake duži- dužine klatna su različite, osim za joj viši nekolicinu klatna iste mase.

ekspozicijom. Na veliki stalak (sl. 44.3) razapnimo nit na ko- gji je blisko streljivac. U to čemo se lako uveriti sljedećim načinom prenosu energije sa jednog oscilatornog sistema na drugu- zonantni prenos energije između dva klatna. Bitan uslov re- dok klatno A ne stane. Tako ćamo periodičnu razmenu, ići re- naku provodnicu amplitudi klatna B. Proces se dalje održi u energiji preneta je na klatno A, kogje sada ima amplitudu jed- suprotom smjeru. Klatno A postepeno prenosi energiju na B sve nako provodnicu amplitudi klatna B. Proces se dalje održi u energiji preneta je na klatno B, kogje sada ima amplitudu jed- tpeeno smaržuje. U trenutku kada se B zauštavlji, sva njegova oscilovanje daje klatno B, tako da se amplituda klatna B pos- sa postepenim povlačanjem amplitude. Energiju potrebnu za ovu govoj pritrošnji frekvenciji. Tako klatno A postigne da osciluje periodična prilunda slijedi je frekvenciju vrlo bliska nje- preneće se preko opuge na drugo. Znaci na klatno A dešta kretanje izmedju dva oscilatorna sistema došlo do veoma efikasne izmenе energije. Kako je energija oscilovanja, to će klatne vodoravno manje kvadrirati amplitudu oscilovanja. Da je bliskost kompenzirati većom amplitudom oscilovanja, to će klatne sviđati prekveniciju batan uslov prelaska energije sa jednog sistema na drugi. Lako se vidi da će kod vezanih klatna prenos energije biti brži što je opreka vrtloga, tj. što je ujedna konstanta kveza. Ta pogava uže vezana samo za klatnu. Uopšte izmedju dva oscilatora bliske frekvencije prenosile se energija sa jednog oscilatora na drugi. Taj je proces biti brži nego u slugaju klatna sa sljedećim rezultatom.

Dužine klatna su različite, osim za klatno kogja imaju iste mase. Dužine klatna su različite, osim za klatno kogja imaju iste mase.



Pređepostavimo da se klatno A (sl. 44.2.a) drži u mizu, a klatno B posle rati nadesno i zatim se oba klatna pusti. Kako su klatna obesene o kruće steplove umesto o nitii, kretanje jednog klatna preneće se preko opuge na drugo. Znaci na klatno A dešta kretanje izmedju dva oscilatorna sistema došlo do veoma efikasne izmenе energije. Kako je energija oscilovanja, to će klatne vodoravno manje kvadrirati amplitudu oscilovanja. Da je bliskost kompenzirati većom amplitudom oscilovanja, to će klatne sviđati prekveniciju batan uslov prelaska energije sa jednog sistema na drugi. Lako se vidi da će kod vezanih klatna prenos energije biti brži što je opreka vrtloga, tj. što je ujedna konstanta kveza. Ta pogava uže vezana samo za klatnu. Uopšte izmedju dva oscilatora bliske frekvencije prenosile se energija sa jednog oscilatora na drugi. Taj je proces biti brži nego u slugaju klatna sa sljedećim rezultatom.

tne restitucione sile kojom dejstvuje opruga.

Ako uz vezana klatna postavimo matematičko klatno jednakog perioda oscilovanja kao svako od nevezanih klatna, uočićemo zanimljivu činjenicu. Pre svega, uporedimo li frekvenciju oscilovanja klatna pod b. i c. sa oscilovanjem kontrolnog klatna frekvencije ω , zapazićemo da je frekvencija ω_1 istofaznog oscilovanja nešto manja od kontrolne frekvencije ω , dok je frekvencija protivfaznog oscilovanja ω_2 nešto veća od ω , tj.

$$\omega_2 > \omega > \omega_1$$

Bilo koje oscilovanje vezanih klatna može se prikazati kao zbir dva osnovna oscilovanja frekvencije ω_1 i ω_2 . Ako su amplitude tih oscilovanja jednake, a oscilovanje se odvija u smeru ose x, možemo pisati

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) = \\ &= 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{aligned}$$

Dobijeni izraz za elongaciju složenog oscilovanja možemo opisati na ovaj način. Kada klatno izvodi istovremeno oba oscilovanja (x_1 i x_2), ono osciluje kružnom frekvencijom $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Kako su ω_1 i ω_2 veoma bliski, frekvencija ω je bliska onoj kojom slobodno osciluje svako od vezanih klatna. Tu smo činjenicu uočili ranije. S druge strane, amplituda tog oscilovanja se menja vrlo polagano, sa vremenom po zakonu $A \cos((\omega_2 - \omega_1)/2)t$. Frekvencija te promene je veoma mala, jer su ω_1 i ω_2 bliski. Kažemo da klatno izvodi modulirano oscilovanje, gde je oscilovanje jednom osnovnom frekvencijom (visokom) modulirano promenljivom amplitudom niske frekvencije. U akustici se modulirano oscilovanje zvuka pod uticajem dva izvora bliske frekvencije naziva udarima.

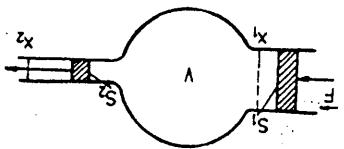
XI MEHANIKA TEČNOSTI I GASOVA

Tečnosti i gasovi, kao tela koja mogu da "teku" jednim imenom se nazivaju fluidi. Za razliku od čvrstog tela koje ima stalan oblik i zapreminu, tečno telo ima odredjenu zapreminu, a oblik se formira prema obliku suda u kojem se nalazi, dok gasovito telo nema ni odredjen oblik niti zapreminu, već zauzima ceo prostor koji mu je ostavljen na raspolaganju. Iako se tečnosti i gasovi veoma mnogo razlikuju postoji niz osobina koje su zajedničke i za tečnosti i za gasove.

Mehanika fluida se može podeliti na hidromehaniku (koja proučava tečnosti) i aeromehaniku (koja proučava gasove). U zavisnosti od vrste kretanja mehanika fluida deli se na statiku i dinamiku. Statika proučava ravnotežu fluida, dok dinamika proučava njihovo kretanje pod dejstvom datih sila.

45. AGREGATNA STANJA

Čiste supstance se u prirodi javljaju u tri agregatna stanja: čvrstom, tečnom i gasovitom. Svako od ovih stanja karakteriše specifičan raspored atoma, odnosno molekula, što uslovjava njihove osobine. U čvrstom telu se javlja uredjenost višeg reda, jer je kinetička energija čestica (molekula, atoma ili jona) veoma mala. Privlačne sile između čestica su znatno jače, čestice ne mogu da se kreću, već pravilno osciluju oko svojih strogo određenih položaja ravnoteže. Čvrste supstance se u prirodi javljaju kao kristalne sa tačno određenom unutrašnjom strukturu, i kao amorfne bez unutrašnje uredjenosti. Kod tečnosti, za razliku od čvrstih tela, atomi nemaju strogo određene položaje ravnoteže u prostoru, već se kreću jedan u odnosu na drugi, ali tako da je srednje rastojanje između njih približno kao kod čvrstih tела. Gasovi se u prirodi nalaze u obliku dvo i više atomnih molekula (sem plemenitih gasova). Privlačne sile između molekula gase su neznatne, tako da su molekuli gasa praktično slobodni i kreću se u prostoru na velikom



SL. 46.1

$$A_1 = F_{x1} = P_{1x1} \quad (46.3)$$

težiniu tečnosti i pretpostava je na malači u suđu prizvoljnoj obliku sa dva cilindra (SL. 46.1), od težine same tečnosti u tečnosti može da potiče pritisak na nekom mestu u tečnosti, a tome samu težinu tečnosti da je tečnost nesvezljiva (V = const.). SL. 46.2.

$$P = \frac{F}{S}; F = PS \quad (46.2)$$

Ako je pritisak konstantan u svakoj tački površi, jednacina (46.1) svedi se na

$$1 P_a = 1 N/m^2. \quad \text{Pritisak je skalarna veličina i izražava se u } P_a \text{ (Paskal).}$$

$$P = \frac{DS}{DF} \quad (46.1)$$

je na površinu nekog tela i elementarne površine DS. Pritisak definisemo kao odnos normalne sile DF, koja deluje na karakteristične stanje fluida, a koja se zove pritisak. Veličina koja karakteriše da se umesto sile koristi fizika površine. Zato je neophodno da se umesto sile koristi fizika površine u prostoru samo ako ista deluje na konaku deo njihove razine u prostoru. Posto fluidi nemaju stalni oblik mogu da se pomene

46. PRITISAK I HIDROSTATICKI PRITISAK

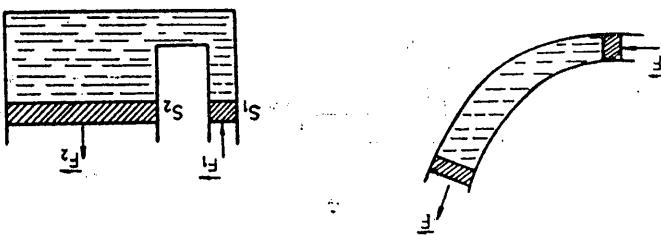
A. STATIKA TEČNOSTI I GASOVA

izmedju molekula nalaziči izuzetno velik prazan prostor, raslojanju jedan od drugog. Gasovi su veoma stisljivi, jer se

je pritiso red današnje i posvetio se problemu filozofije i morala. Uz to da je pritisak (zakon pritiska u fluidima, hidraulički presel) i pritisak. Prvi deo izložba Paskal je posvetio matematički teorema (teorema o polumjedniku) i praktički rezultat, pritisak je

* Bliske Pascalt (1623-1662), pravnekt matematik, fizik i tečnost. Po Paskalovom zakonu (46.6) pritisak $P = F/S_1$ preza za multijekacijsku silu. Klijip malog preskaka S_1 deluje silom F_1 čija praktične prime re Paskalovog zakona. Ovaj uredjaj sluzi hidrauličnu presu (SL. 46.3) je jednostenavna ilustracija

SL. 46.3



SL. 46.2

Na osnovu (46.6) sledi Paskalov zakon: Pritisak koji se spolja vrati menjati smjer, pravac i intenzitet silje (SL. 46.2). Na taku težast prenositi se kroz nju nezamjenjivo. Pritisak u zatvorenom svu stranu poglednako. Znaci, pomoci tečnosti u zatvorenom svu moguće je

$$P_1 = P_2 \quad (46.6)$$

$$S_{1x1} = S_{2x2} \quad (46.4)$$

(46.5)

$$S_{1x1} = S_{2x2} \quad (46.4)$$

$$A_2 = A_1 = P_2 S_{2x2} \quad (46.4)$$

Kako zapremina pomerenje tečnosti u pravom cilindru S_{1x1} mora biti za neku dužinu x_2 . Na klijipu površine S_2 se vrši isto rad površine S_2 , koji će se zbog nestisljivosti tečnosti pomjeriti polozaj, te će vršiti pritisak na zidove svuda i na drugi klijip Slobodni tečnosti će pod pritiskom P_1 morati da se pomere iz svog

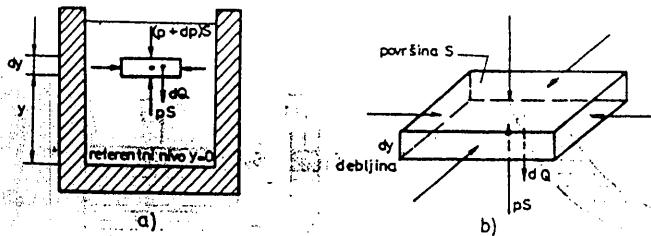
(46.4)

(46.4)

nosi se kroz tečnost na sve strane, pa i na klij velikog preseka S_2 , na koji sada deluje ukupna sila $F_2 = pS_2$. Očito je prema (46.6) $F_1/S_1 = F_2/S_2$, pa je

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} \quad (46.7)$$

Gravitaciono polje deluje na svaku česticu tečnosti. Jasno je onda da u tečnostima postoji pritisak koji se javlja usled težine same tečnosti. Svaki delić tečnosti svojom težinom vrši pritisak na deliće koji se nalaze ispod njega, tako da pritisak raste sa dubinom. Ako tečnost smatramo nestišljivom, onda će i njena zapreminska masa ρ biti konstantna pri stalnoj temperaturi. U takvim uslovima može se lako doći do zakona po kome pritisak u nekoj tečnosti raste sa dubinom. Posmatrajmo elemenat fluida u obliku prizme visine dy i baze S (sl. 46.4.a).



Sl. 46.4

Ako sa ρ označimo zapreminsku masu fluida, tada je masa posmatranog elementa fluida jednaka $\rho S dy$, a težina $\rho g S dy$. Sile koje deluju na posmatrani element fluida prikazane su na slici 46.4.b. Horizontalne sile koje deluju na strani elementa fluida međusobno se poništavaju. Vertikalne sile prema dole na gornjoj bazi i prema gore na donjoj bazi deluju normalno na površinu elementa. Prema dole deluju sile $(p + dp)S$ i težina elementa $dQ = \rho g S dy$, a prema gore sila pS . Kako element miruje, mora biti ispunjen uslov da je $\sum F_i = 0$, odnosno

ili

$$pS - (p + dp)S - \rho g S dy = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \quad (46.8)$$

Izraz (46.8) predstavlja diferencijalnu jednačinu za promenu pritiska sa dubinom. Njeno rešenje je linearna funkcija. Integralimo li jednačinu (46.8) u granicama od p_1 do p_2 za p od y_1 do y_2 za y dobiceemo

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad (46.9)$$

Za slučaj prikazan na slici 46.5., gde se tečnost nalazi u otvorenoj posudi, položaj 1 neka bude proizvoljna tačka u posudi, a položaj 2 neka bude površina posude. Tada je $p_2 = p_0$, $p_1 = p$, a $y_2 - y_1 = h$ dubina na kojoj merimo pritisak. Tada jednačina (46.9) postaje

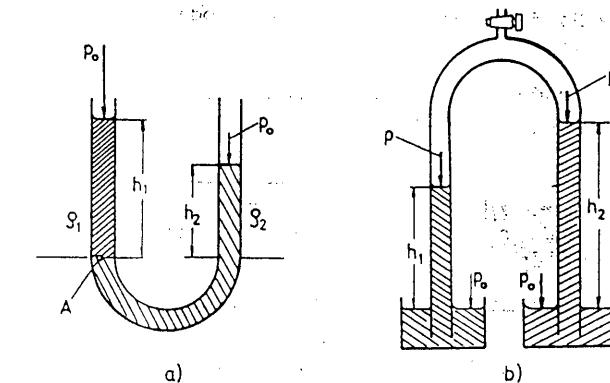
$$p_0 - p = -\rho gh$$

odnosno

$$p = p_0 + \rho gh \quad (46.10)$$

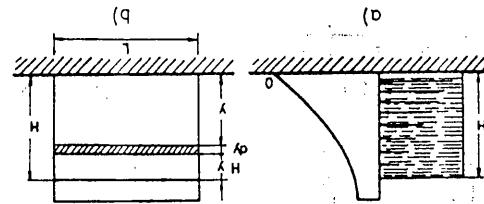
Jednačina (46.10) predstavlja izraz za veličinu hidrostatskog pritiska u fluidu.

Posluži jednačine za hidrostatski pritisak (46.10), možemo izračunati zapreminske mase fluida u spojenim posudama. Ako se u posudi u obliku slova U (sl. 46.6.a) nalaze dve tečnosti koje



Sl. 46.6

* p_0 je atmosferski pritisak.



lu koja deluje na branu visine H je srednje (SL. 46.7).

Pomocu (46.10) možemo izračunati i horizontalnu srednjicu (46.11).

Prema, podesimo $P_0 = P + \rho_1 g h_1 = P + \rho_2 g h_2$, odakle sledi izraz:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

ime u celi, plus hidrostatski pritisak stvara tehnost visine H . Prema sto je u ravnoteci sa pritiskom P_0 koji deluje na slobodne površine tehnosti u obliku parabole. Koji deluje na slobodne površine tehnosti u obliku parabole je $P_0 + \rho_2 g h_2$. U tom položaju atmosfera deluje na srednjicu cevima penje do nekog visina h_2 . U tom položaju atmosfera deluje na srednjicu cevima potopljenim u tehnosti. Deljim jedinim izvlačenjem razdruha mešaju korišti se okrenuta u cev (hidrometar) (SL. 46.6.b) sa zaredjivanjem zapreminske mase tehnosti koji se sku masu druge tehnosti.

Zapreminske mase imat će iz (46.11) izračunate zapreminstvo vrednosti $\frac{P_2}{P_1} = \frac{h_2}{h_1}$ da je te- tji. Zapreminske mase se odnose obrnutu visinama, tako da je te-

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{h_2}{h_1} \quad (46.11)$$

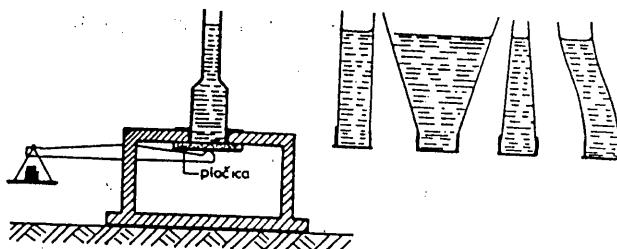
Kako je atmosferski pritisak P jednak sa obe strane to je

$$P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2$$

je jednaku. Ako su h_1 i h_2 visine odgo arajućih tehnosti, tada je na granici tehnosti (tacka A na SL. 46.6.a) pritisak biti iz-

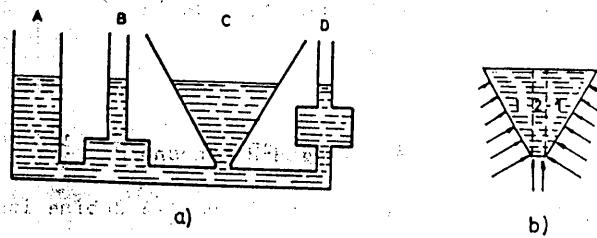
se ne mešaju (npr. ziva i voda) zapreminske mase ρ_1 i ρ_2 , tada

otuda i pritisak na dno, jer je S isto u svim slučajevima



Sl. 46.8

($F = pS$). Ako se izvestan broj sudova različitih oblika medju-sobno poveže, kao na slici 46.9.a. tečnost koja se sipa u njih



Sl. 46.9

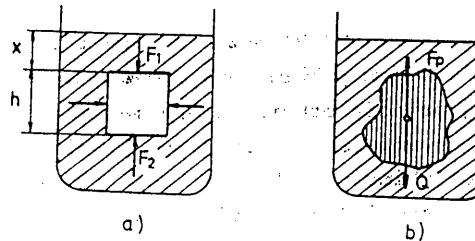
imaće isti nivo u svakom sudu. Na prvi pogled bi izgledalo, na primer, da bi na dno suda C trebalo da dejstvuje veći pritisak nego na dno suda B i da bi tečnost iz C trebalo da prelazi u B. Međutim, kako prema (46.10) pritisak zavisi samo od visine, to će u svim sudovima tečnost na dno suda delovati istom silom, bez obzira što su količine tečnosti u sudovima različite. Na prvi pogled ovakva pojava je paradoksalna, te se zato naziva hidrostaticki paradox.

Rodrobnije objašnjenje može da bude korisno u razumevanju ove pojave, jer se radi o rasporedu sila. Tako kod

suda C (sl. 46.9.b) sile kojima zidovi dejstvuju na tečnost prikazane su strelicama i svuda su normalne na zidove suda. Te sile mogu se razložiti na horizontalne i vertikalne komponente. Težinu tečnosti u odeljcima obeleženim sa 1 uravnotežuju vertikalne komponente ovih sila. Ostaje da težina tečnosti u odeljku obeleženom sa 2 vrši samo pritisak na dno suda. Na isti način može se analizirati raspored sila kod svakog suda bez obzira na oblik.

47. POTISAK. ARHIMEĐOV ZAKON

Na sva tela potopljena u tečnost deluje sila koja je suprotnog smera od gravitacione i koja teži da istisne telo iz tečnosti. Ova sila zove se potisak. Potisak je posledica činjenice da hidrostaticki pritisak raste sa dubinom. Kvalitativno, potisak možemo objasniti na primeru prikazanom na slici 47.1. Predmet u obliku kocke uronjen je u tečnost. Sile priti-



Sl. 47.1

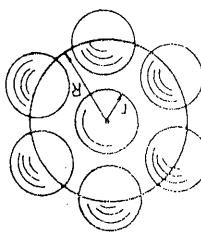
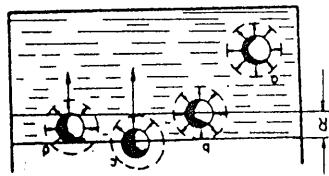
ska koje deluju sa bočne strane se poništavaju, tako da ostaje dejstvo vertikalnih sile pritiska F_1 i F_2 . Kako se donja osnova na koju deluje sila F_2 nalazi na većoj dubini, to je i hidrostaticki pritisak na nju veći. Prema tome, na telo će delovati rezultanta sile, sila potiska F_p , prema gore koja je jednaka razlici sile F_2 i F_1 , tj.

$$F_p = F_2 - F_1 \quad (47.1)$$

naú d < R (npr. molekuli c i d, sl. 48.2.) priváčne súle ne-
molekuli nazáze u bázinu slobodne površine tehnosti na rastoj-
sivých stranach molekula (npr. molekuli a i b, sl. 48.2.). Ako sa
molekulárnych súl a jednako je náleží, keď one delju sime trično sa
dne površine tehnosti na rastojanju d > R rezultanta súch medju-
ene súle susedních molekula. Ako sa molekuli nazáze súpod slobo-

sl. 48.2

sl. 48.1



súkromi molekuli u untrásnosti tehnosti (sl. 48.2) delju priváča-
vá súbra sa nazáva súbra molekulárnych dejstiev (sl. 48.1). Na-
odgovára súberi tróstrukcie poluprenicka molekula x (R = 3x).
Viaciných súla organického súberom poluprenicka R, koxi približne
nám brzo opada. Smara sa da je dejstivo medju molekulárnych pri-
smestene u prostoru. Dejstivo medju molekulárnych súla sa rastoj-
je drie molekule tehnosti na stále u zájazdnom rastojanju, gusťo
izmedju molekula tehnosti delju súbrane súle ko-

48. Površinskí Nápon

ová zaključci väze i za nehomogenu telu ako sa rázuna sa nícho-
voj súbraním súbraním masom p. Znáti, brod može da plíva-
po površiu vode ako mu je súbrana súbraním masa manža od
zábraníského mase vode.

1. telo plíva na površinu p < p_f, teda je Q < p_f
2. telo lebdi ako je p_f = p_f, teda je Q = p_f
3. telo plíva na površinu p < p_f, teda je Q < p_f

pozrite si základné vzorce a formule zo základnej učebnice fiziky. Umiestnenie zakona o dĺžke súbraním a súbraním. U miesteniu je postavte zakona o dĺžke súbraním a súbraním. Ak je matematik, akhmed (287-212), godine pre n.e.), grécky matematik,

č. 47.5) može sa zaključiť da: telo priváčno gubí deci svoje težine. Analízou súbraním

$$Q_{ef} = Q - F_p = Vg(p_f - p) \quad (47.5)$$

chýmedovo zakona (47.4) dôležitou je faktívna težina tela závisi len na súčinu Ar-
duhu. Na telo priváčano na silici 47.1.b. delju súbra potiska p
samo u tehnosti nágo i u bielej kôfem flúidu, na prímer, na vaze
ová princíp zove Aribimedovo zakon. Potisk, naravivo, ne postoji
čin da odreďi precentat zlatu u kruni karla Habsburga. Zato sa
súbra tehnost. Ová princíp okremi je Aribimed koxi je tráži na-
súbra telo súbraním a težnosť súbrat a súbrige težnosť kôfku težnosť isti-
jedná (47.4) može sa izbereť i na ová názin:

Analíza koxu smo dali za kôfku vaze i za telo má kôfko obzíka
F_p = p_fV = qV \quad (47.4)

činu istisnute tehnosti, a usmerená je súprotno od súle težine
čku zárojenu u tehnosti delju súbra potiska koxa je jednaka te-
te tehnosti koxa imá istu zárojenu kôfkom istisn-
kôfke, to preto p_fs = Vp_fs = Vp_f(x + h)s = Vzárojna
kako je p_f = a zábraníská težina tehnosti, a hs = Vzárojna

$$F_p = p_0 s \quad (47.3)$$

te je prema (47.1) súbra potisku
F₂ = p₂s = [p₀ + p_g(x + h)]s \quad (47.2)

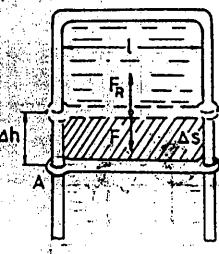
$$F_1 = p_1 s = (p_0 + p_{g(x)})s \quad (47.1)$$

s, može sa napísati da je
prema relacijsama (46.2) i (46.10), ako je površina osnovy kôfky

će se poništavati, jer više ne deluju simetrično. U ovom slučaju veći broj molekula deluje iz unutrašnjosti tečnosti i rezultanta je upravljenja prema unutrašnjosti tečnosti i to normalno na površinu tečnosti. Usled toga tečnost teži da smanji svoju slobodnu površinu, pa se ponaša kao zategnuta membrana i teži da zauzme sferni oblik. Ova slobodna površina se može povećati ulaganjem rada ΔA . Rad ΔA je upravo srazmeran novonastaloj površini ΔS , tj.

$$\Delta A = \gamma \Delta S \quad (48.1)$$

gde je γ konstanta srazmernosti i naziva se koeficijent površinskog napona. Izvršeni rad ΔA ekvivalentan je povećanju potencijalne energije granične površine. Znači, površinski napon se suprotstavlja povećanju slobodne površine tečnosti, usled čega tečnost teži da zauzme najmanju površinu koja odgovara minimumu potencijalne energije. Koeficijent površinskog napona može se eksperimentalno izmeriti, pomoću pravougaonog rama od žice



(sl. 48.3) sa pokretnim krajem AB. Premaže li se ram sapunicom, obrazovaće se unutar okvira opna. Rezultanta sile dejstva površinskog napona F_R povlači pokretnu stranu rama AB na gore kako bi opna smanjila površinu. Dejstvom sile F može se savladati sila površinskog napona F_R i uspostaviti ravnoteža. Pomeranjem pokretne strane AB, dužine l na putu Δh sile F izvrši rad

$$Sl. 48.3 \quad \Delta A = F \Delta h \quad (48.2)$$

Obzirom da tečna opna ima dve površine (prednju i zadnju) na kojoj deluje površinski napon, to se rad sile F odnosi na dvostruku promenu površine, tj. $\Delta S = 2l\Delta h$. Prema tome, imajući u vidu obrasce (48.1) i (48.2), sledi da je rad

$$F \Delta h = \gamma 2l \Delta h \quad (48.3)$$

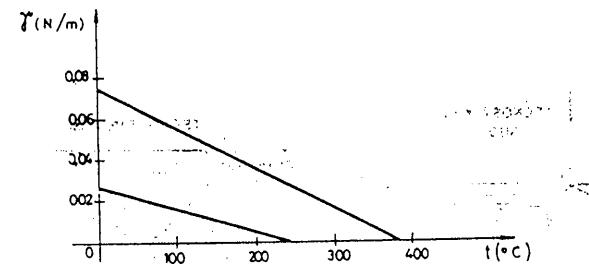
odnosno

$$\gamma = \frac{\Delta A}{\Delta S} \quad \text{ili} \quad \gamma = \frac{F}{2l} \quad (48.4)$$

Znači da se koeficijent površinskog napona γ prema (48.4) može definisati kao rad potreban da se slobodna površina tečnosti poveća za jedinicu ili kao sila koja deluje na jedinicu dužine kraja površine opne tečnosti. Koeficijent površinskog napona u SI se izražava kao J/m^2 ili N/m .

Površinski napon zavisi od prirode tečnosti i od temperature. S povišenjem temperature površinski napon opada i na kritičnoj temperaturi će biti jednak nuli. Ova činjenica se objašnjava time što na kritičnoj temperaturi nestaju razlike izmedju tečnog i gasovitog stanja. Na slici 48.4. prikazana je zavisnost koeficijenta površinskog napona od temperature za vodu i alkohol.

Kada se govori o površinskom naponu mora se voditi računa i o materijalu sa kojim se graniči tečnost, jer obzirom na objašnjenje ovog efekta, jasno je da će broj i vrsta molekula iznad granične površine uticati na vrednost koeficijenta γ .

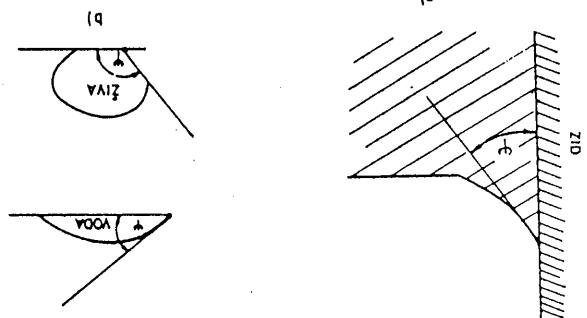


Sl. 48.4

Ako nije posebno naglašeno, vrednosti površinskog napona se odnose na savršeno čiste tečnosti u dodiru sa vazduhom.

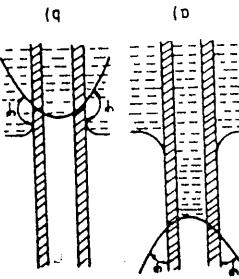
Rastvorene supstance dejstvuju na površinski napon dvojako. Većina rastvorenih supstanci, a naročito elektroliti, nagomilavaju se pri rastvaranju u dubini rastvora i povećavaju površinski napon, pošto sada na molekule na površini iz dubine tečnosti dejstvuju ne samo sile molekula rastvarača, nego

Medjutim, izvane susstancje koje u sebi sadrže radikalne kovjete ne nerastvorljiv u vodi, zaneti hidrofobni, na primjer, žućne površinske sile rasstvarljive su u vodi, a kada je voda u kontaktu s kvalitativno dobroj vodama, izgubljuje sposobnost da rastvara kvalitativnu vodu.



SL. 49.3

Potpuno kvasenje (vod - staklo), a kada je $\theta = 180^\circ$ potpuno nekvasenje (ziva - staklo).



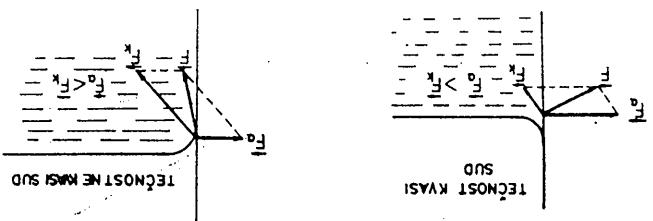
Direktna posledica opšteine pojave na granicičnoj vlastnosti tečnosti je kapijalarnost. To je pojava da se tečnost u usklim

kapilarnim cevima (precnik manji od 1 mm) ne ponasa po zakonu sponjenih sudova, već je iznad istog složenosti povišene kapilare (SL. 49.4). U zavisnosti da li je tečnost kvasila zid kapilare ili nije, ako tečnost kvasila zid u zidovima kapijalare, nivo tečnosti će visiti od nivoa tečnosti u sudu (kapillarna atraktivacija) ili kada zidove kapilare, nivo u kapijalarnoj sluzbi suviše visi (kapillarna deprivacija) (SL. 49.4.b.).

Analizirajući slučaj kada tečnost potpuno kvasi zid kapijalare, očigledno je da se tada tečnost u kapijalari penje. Teme-

ntost se penje u kapijalari sve do tečnost povišene u kapijalari. Ako je tečnost u kapijalari zid granicu zida naziva se granicni ugao (SL. 49.3.a). Taj ugao zaklapa zid čvrstog tela sa tangenčnu površinu tečnosti uz ne kvasi čvrsto telo (na primjer, voda i staklo), a kada je $\theta < 90^\circ$ tečnost menjače u slučaju kada je $\theta > 90^\circ$, kada se da tečnost kvasi malina je na granicu površinu tečnosti. Ova se površina naziva malinsku.

SL. 49.1



SL. 49.2

49.1. i 49.2.). Rezultanta sila kohesije F_k i athesije F_a normale kapijalima zladaču athesione silje. Od onosa ovih sila zavise efekti koji nastaju, ne samo z bog privlačenja izmedju molekula tečnosti i čvrstog tela. Privlačne sile medju molekulama iste verzste se zovu kohesijskim silama. Među različitim molekulama tečnosti z bog uzajamnog dejstva izmedju različitih kvalitativnih sile se javlja privlačenje sila privlačenja molekula tečnosti i čvrstog tela, na primjer, žućne površine na granicičnoj vlastnosti.

49. UTICAJ MOLEKULARNIH SILA NA OBILIK POVERŠINE NA GRANICI TEČNOSTI I ČVRSTOG TEŁA. KAPIJALARNOŠT

Osim je omogućeno dejstvo lipaze na masti, zadržani kiselečna omogućuje stvaranje finih emulzija u crevima površinske naputi, snizavajući površinsko napona pod uticajem kiselećne ili saputi, nagomilavaju se na površini i snizavaju su nerastvorljiv u vodi, zaneti hidrofobni, na primjer, žućne površinske sile rasstvarljive su u vodi, a kada je voda u kontaktu s kvalitativno dobroj vodama, izgubljuje sposobnost da rastvara kvalitativnu vodu.

pona F koja deluje po obimu meniska ne izjednači sa težinom Q stuba tečnosti u kapilari (sl. 49.5), tj.

$$F = Q \quad (49.1)$$

Kako sila površinskog napona deluje po obimu meniska uz kapilaru, čiji je obim $2\pi r$, to je ukupna sila koja dejstvuje duž celog obima (prema 48.4) $F = \gamma 2\pi r$. Težina stuba tečnosti visine h u kapilari je $Q = mg$. Kako je $m = \rho V = \rho \pi r^2 h$ to je $Q = \rho g r^2 \pi h$. Prema jednačini (49.1) biće

$$2\pi r \gamma = \rho g r^2 \pi h \quad (49.2)$$

odakle je

$$\gamma = \frac{1}{2} \rho g h r \quad (49.3)$$

Izraz (49.3) može da se koristi za određivanje koeficijenta površinskog napona merenjem visine stuba tečnosti h

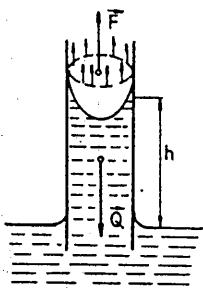
Sl. 49.5

kao i poluprečnika kapilare r .

Kapilarne pojave imaju veliki značaj u prirodi, tehnici i svakodnevnom životu. Kapilarne sile dejstvuju pored sila osmoze pri penjanju biljnih sokova od korena prema listu. Ulje se širi na vodi usled molekularnih sila koje dejstvuju između molekula vode i ulja i gradi pri tome jedan vrlo tanak sloj koji se pod dejstvom sila površinskog napona može razvući i do debljine monomolekularnog sloja ulja. Na pojavi kvašenja i nekvašenja zasniva se u tehnici tehnološki postupak flotacije.

50. ZEMLJINA ATMOSFERA I TEŽINA VAZDUHA

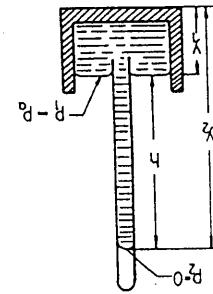
Pod Zemljinom atmosferom podrazumeva se vazdušni omotač koji je opkoljava. Danas se poždano zna da je debljina Zemljine atmosfere ispod 200 km, jer na toj visini veća sateliti mogu da lete bez znatnog otpora vazduha. Smatra se da oko 99,999% ukupne mase atmosfere (oko $5,1 \cdot 10^{18}$ kg) nalazi



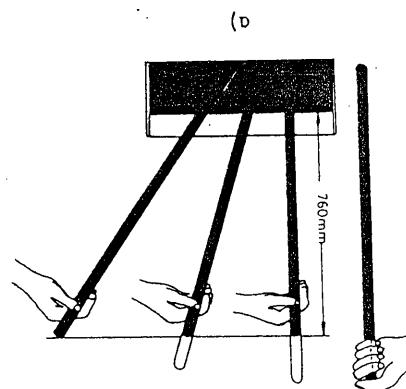
unutar 90 km iznad Zemljine površine. Sa stanovišta održavanja života atmosfera ima veoma važnu ulogu. Ona snabdeva živi svet kiseonikom za disanje, ugljen-dioksidom za fotosintezu u zelenim biljkama, ozonskim slojem kao zaklonom od smrtonosnih ultravioletnih zraka, padavinama (kiša, sneg itd.), koje natapaju kontinente i izolacijom od hladnog svemira.

Gasovi koji čine atmosferu podvrgnuti su dejstvu sila Zemljine teže. Nasuprot ovom dejstvu, usled haotičnog kretnja molekula, gas teži da se po celom prostoru ravnomerno rasporedi. Kao rezultanta dejstva ova dva suprotna procesa uspostavlja se izvesna termodinamička ravnoteža, pri kojoj pritisak i zapreminska masa gasa opadaju sa porastom visine. Zemljina atmosfera je smeša gasova koja (na nivou mora) sadrži 78% azota, 21% kiseonika, 0,9% argona, 0,02% ugljendioksida itd.

Temperatura atmosfere zavisi od stepena apsorpcije Sunčevog zračenja i od načina prenošenja energije (elektromagnetsko zračenje, konvekcija, isparavanje itd.) izmedju okeana, atmosfere i površine kontinenata. Zbog toga temperatura nije konstantna, nego se menja sa visinom, geografskom širinom, godišnjim dobom, oblačnošću i sl. Znatna varijacija temperature sa visinom čini jedan od osnova za podelu atmosfere u slojeve. Na slici 50.1., koja predstavlja približni temperaturni profil atmosfere, prikazano je nekoliko slojeva. Sloj najbliži površini Zemlje naziva se troposfera, gde temperatura opada sa visinom prosečno za oko $-9,8 \text{ K/km}$. Troposfera sadrži oko 90% ukupne mase atmosfere i u njoj se javljaju usled konvekcije vertikalna i horizontalna strujanja. Najveći deo atmosferske vode (oblaka) se nalazi u ovom sloju. Visina troposfere se kreće oko 16 km u tropskim oblastima, odnosno 10 km na većim geografskim širinama. Iznad ovih visina temperatura za kratko ostaje konstantna (tropopauza), a onda počinje da raste sa visinom u sloju koji se zove stratosfera. Kako temperatura raste sa visinom vertikalno mešanje je vrlo sporo, pa stratosfera predstavlja stabilan deo atmosfere. Materijali ubaćeni u stratosferu ostaju na datoј visini godinama, iako se za to vreme mogu preneti mnogo puta oko



SL. 51.1



matematički.

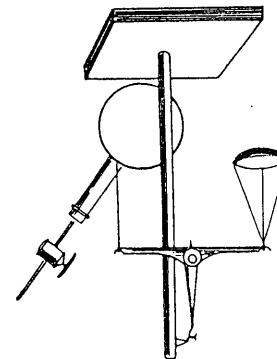
Ewangelista Torricelli (1608-1647) izumljao je prvi barometar, prikazan je na slikici 51.1.a. Toričeli je uzeo stakleni izmerilo Toričeli 1643. Godine. Taj eksperiment, koji je temelj task se naziva atmosferski pritisk. Njega je prvi dokzao na njih vrši određen pritisk usled sputne težine. Taj pritisk se naziva atmosferski pritisk. Sva teža na Zemlji zarađena su u atmosferu koja

51. ATMOSFERSKI PRITISK

stoji je $1/766$ deo zapećinske mase.

morat će $P = 1,29 \text{ kg/m}^3$. Vazduha mase se okreće negdovači od pritiska. Znajući m i V minsku mase manju, odnosno da za da je razredjenom gasu zapreminu, ostala nepromenjuena, to izlazi kako je zapremina gasa (balona) sto znači da gas ima svoju masu. titi tako da tegovi prevagnu, lako je ravnoteža će se postati vina zatvoriti. Balon će postati ma. Zatim se pomognu vakuum pumpu razvedi vazduh u baloni i sl-

SL. 50.2

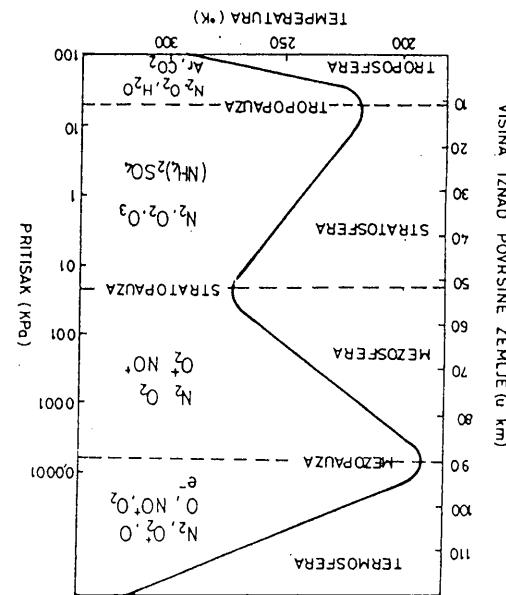


Zemljine kugle visinski vetrovima. Vazduh u stratosferi je vr-

okazi se za jedan krak poluge terazija i uravnoteži sa tegovičnom aerodinamikou masu. Stakleni balon sa otvorom slaviniom taj nacijin sto gemo pomoći osjetljivim terazija (SL. 50.2) Da gasovi imaju svoju težinu možemo se uveriti na jonsferom.

Kojima dolazi do ionizacije gase, pa se taj sloj ponekad naziva da rasete sa visinom i penje se do vrlo visokih vrerdnosti, prije toga u sljedećem sloju, termosferi, temperatira nagla povećanje dostize najnizku taku (oko 180 km visini od oko 90 km - mezoatmosfera). U Zemljije (stratosfera). Međutim, iznad te visine temperatura ne 50 km, gde dostigne vrerdnosti slične temperaturama na površi Zemlje (stratosfera). Temperatura stratosfere rasete do visine od pridjeliže lako u nju. Temperatura stratosfere rasete ne propisuje iz troposfere ne propisuje

SL. 50.1



nu cev zatopljenu na jednom kraju, napunio je živom do vrha i zatim uronio u posudu sa živom. Živa se u cevi nije spustila na nivo žive u posudi, nego je ostala na visini h odprilike 760 mm. Označimo li razlike žive u posudi i cevi sa y , odnosno y_2 (sl. 51.1.b), tada prema (46.10), za tačku na dnu posude važi

$$p_1 + \rho gy_1 = p_2 + \rho gy_2$$

Leva strana je hidrostatički pritisak koji dolazi od žive u posudi, a desna hidrostatički pritisak koji dođe od žive u praznoj cevi. Gornja jednačina pokazuje da su ti pritisci u ravnoteži, jer živa u posudi miruje. Spoljašnji pritisak p_1 je međutim atmosferski pritisak p_0 , dok je $p_2 = 0$, jer je cev iznad žive prazna. Prema tome je

$$p_0 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho gh \quad (51.1)$$

gde je ρ - zapreminska masa žive, a h visina stuba žive u cevi koja je nezavisna od položaja cevi (sl. 51.1.a). Na osnovu izraza (51.1) dobijena je vrednost atmosferskog pritiska na nivou mora $p_0 = 101\ 337\ Pa$.

Sa povećanjem nadmorske visine menja se i atmosferski pritisak. Pretpostavimo da na površini Zemlje pritisak ima vrednost p_0 , a zapreminska masa vazduha neka je ρ_0 . Pritisak se menja po zakonu

$$dp = - \rho g dh \quad (51.2)$$

Ako pretpostavimo da je atmosfera izotermna, tj. da se temperatura ne menja sa visinom h , (što je gruba aproksimacija) tada je

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (51.3)$$

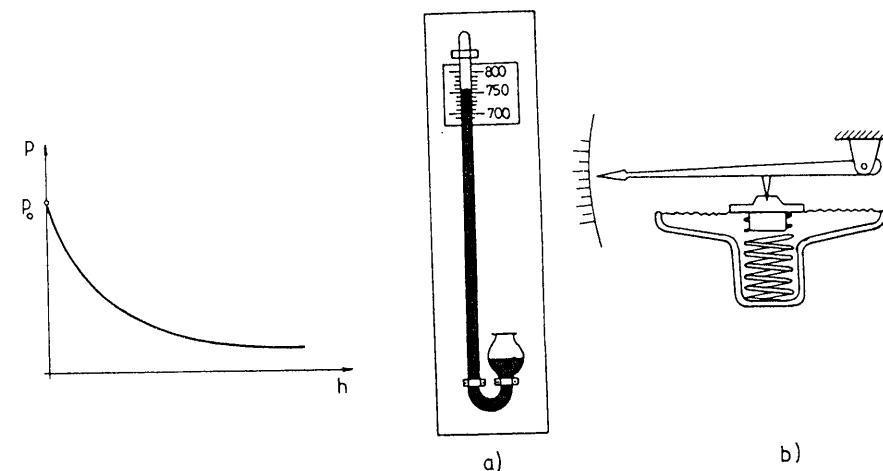
Kombinacijom (51.2) i (51.3) dobija se

$$dp = - \frac{\rho_0}{p_0} \rho g dh \quad (51.4)$$

što integraljenjem daje tzv. barometarsku formulu

$$p = p_0 e^{-(\rho_0 / p_0)gh} \quad (51.5)$$

Dobijena formula (51.5) pokazuje da se atmosferski pritisak smanjuje eksponencijalno sa povećanjem visine (sl. 51.2). Instrumenti



Sl. 51.2

Sl. 51.3

kojima se meri atmosferski pritisak nazivaju se barometri. U upotrebi su najčešće dva tipa i to barometar sa životinjom (sl. 51.3.a) i metalni koji se zove aneroid (sl. 51.3.b). Barometri odnosno barografi koji služe za merenje visine, zovu se altimetri i imaju osim skale za pritisak i skalu za visinu.

52. PRITISAK GASA. MANOMETRI

Usled haotičnog kretanja, stalni sudari molekula gasa sa zidom suda uzrok su pritiska gasa na zid ili na biljku koju površinu unutar gasa. Pritisak gase zavisi od broja sudara u jedinici vremena, tj. od zapreminske mase i od temperaturu na kojoj se nalazi. Instrumenti za merenje pritiska nazivaju se manometri. U upotrebi su najčešće otvoreni, zatvoreni i metalni manometar.

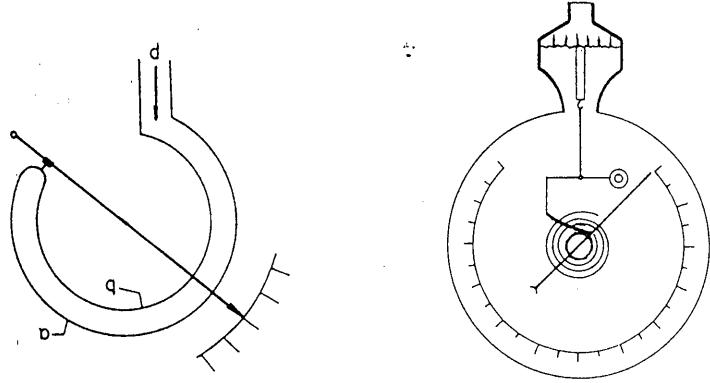
Otvoreni manometar sastoji se od jedne otvorene

aparat, pa se proučava sa vise liži manje detektovatki kofte ola onim granama fizike, koje koriste veoma komplikovan matematik u kretanju. Treba pri tome imati u vidu da ova oblast prijeda u ovom emu poglaviju analizirati svojstva fluida

B. DINAMIKA TEHNIČI | GASOVA

Veoma niski pritisci mere se pomogu ionizacionih vakuum-metara. Burdonov manometar koristi se za merenje velikih pritisa. cevi prenosil se na kazaljku koja na skali pokazuje pritisk. Da na nizu deluje i veci pritisk. Pomeranje slobodnog kraka je spoljasnja strana, cevi a veci površine od unutrašnjosti strane cevi eliptičnog poprečnog preseka i nastoji da je ispravi, jer 52.3) pritisk deluje sa unutrašnje strane elastične metalne žice pritisk, kod manometra na čevi (burdonov manometar) (sl. 52.3).

Sl. 52.2
branu i prenosil se na kazaljku, koja na bazu darenju skazi pokaziva se još i apsolutni pritisk, dok se razlikuje



manometra sa membranom (sl. 52.2) pritisk gasa potiskuje membranu sačinjeni potrebno. Kod metala saka metalični manometri sačinjeni potrebno. Kod metala saka praksi se najviše upotrebljavaju za merenje priti-

$$P - P_0 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho gh$$

Sl. 52.3
cevi kofte sadrži zivu (sl. 52.3). Jeden kraj cevi stanju pritisk gasa u zatvorenom kraku p1 tada je manometarski pritisk

mina zavisi od pritiska p koji se meri. Ako je u zatvorenom kraku nalazi se izvesna kolicina gasea čija zaprema (sl. 52.1.c) i sluzi za merenje pritiska veci od atmosferskog. Zatvoreni manometar ima jedan krak cevi zatvoren

du otvorenog manometra.

Po izmerenjem visine h moguce je da se izmeri pritisk p, pomoz

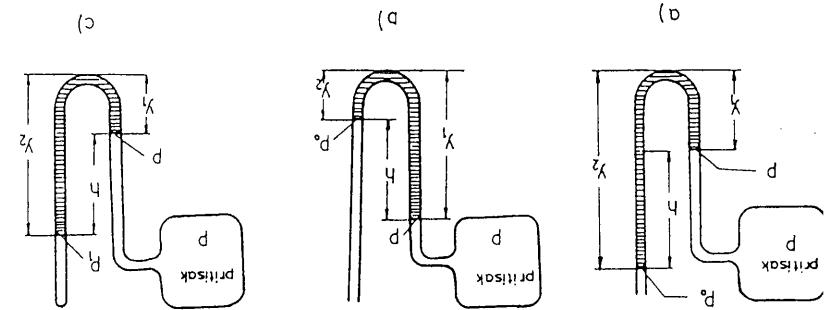
$$P_0 - P = \rho gh \quad (52.2)$$

Ako je p < P0 (sl. 52.1.b), odgovarajuce ravnoteza nastupa kada je p - P0, koja se cita na manometru, naziva manometarski pritisk. Veza p naziva se jos i apsolutni pritisk, dok se razlike

$$P - P_0 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho gh \quad (52.1)$$

p + ρgy1 = P0 + ρgy2
- cevi vazduh se ne uspostavi ravnoteza. Tada je uslova ravnoteze na dnu tada pritisk u sudu potiskuje zivu u odgovarajucem kraku sve ne nizega deluje atmosferski pritisk P0. Ako je P > P0 (sl. 52.1) spaja se sa sudom u kojem se pritisk p meri, a drugi je otvoren

Sl. 52.1

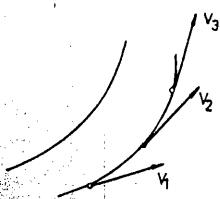


kšavaju proces analize.

Tečnosti i gasovi imaju zajedničko svojstvo da im je kohezija mala. Zbog toga se njihovi molekuli mogu lako pokretati. Zajedničko im je i svojstvo da se pritisak u tečnosti i gasovima prenosi podjednako na sve strane, zatim svojstvo potiska itd. Bitna je razlika konstantnost zapremine tečnosti, a promenljivost zapremine gasova što je isticano kod razgraničenja hidro i aerostatike. Obzirom da se kod strujanja gasova njeva zapremina malo menja, uvećemo i za njih pretpostavku o stalnosti zapremine, što će omogućiti zajedničko proučavanje hidro i aerodinamičkih pojava.

53. STRUJANJE FLUIDA. JEDNACINA KONTINUITETA

U mehanici čvrstog tela smo izučavali kretanje celog tela u odnosu na neki referentni sistem. Pri pomeranju fluida delovi fluida se kreću jedni u odnosu na druge i treba uvesti nove veličine za opisivanje ovakvog tipa kretanja. Zato ćemo pretpostaviti da je fluid nestišljiv i definisati pojma strujne linije i strujne cevi. Strujne linije ili strujnice su zamišljene linije duž kojih se kreću čestice fluida. Strujne linije možemo egzaktnije definisati kao krive linije kod kojih je tangenta u svakoj tački fluida kolinearna sa vektorom brzine (sl. 53.1). Strujnim linijama se, uistvari, opisuje trenutni raspored brzina delića fluida. Brzina čestice duž strujne linije menja se po veličini i po pravcu. Ako se svaka čestica koja se nadje u strujnoj liniji, nastavlja kretati u pravcu strujne linije kao i prethodna čestica, ili ako se slika strujnih linija u toku vremena ne menja, onda se za takvo strujanje kaže da je *stacionarno*. Drugim rečima, kod stacionarnog strujanja strujne linije se ne menjaju tokom vremena i poklapaju se sa putanjom čestica fluida. Stacionarni tok ne znači da menja brzina jedne čestice fluida u raznim tačkama



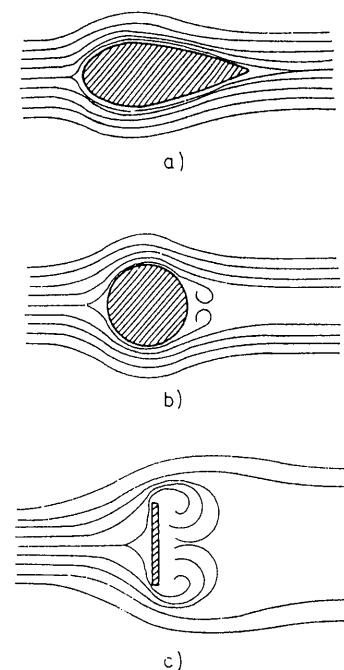
Sl. 53.1

strujnih linija u toku vremena ne menja, onda se za takvo strujanje kaže da je *stacionarno*. Drugim rečima, kod stacionarnog strujanja strujne linije se ne menjaju tokom vremena i poklapaju se sa putanjom čestica fluida. Stacionarni tok ne znači da menja brzina jedne čestice fluida u raznim tačkama

strujne linije. Zakrivljene strujne linije upravo opisuju takve promene.

Svaki fluid može strujati (proticati) stacionarno ako su ispunjeni opšti uslovi: da je brzina dovoljno mala i da su prepreke takve da ne uzrokuju suviše nagle promene brzine. Ako ovi uslovi nisu ispunjeni, strujanje fluida znatno je složenije i naziva se *turbulentno strujanje*.

Delovanje prepreka na oblik strujnica prikazan je na slici 53.2. Oblik strujnica zavisi od oblika tela, pa strujnice imaju najpravilniji oblik kod tela u obliku ribe (sl. 53.2.a). Međutim, kod tela oblika lopte, strujnice imaju savim drugi oblik (sl. 53.2.b). Iza tela nastaju vrtlozi (turbulencija), te strujnice nisu više paralelne. Naročito veliki vrtlozi nastaju kod ravne ploče (sl. 53.2.c).



Sl. 53.2
stalna.

Strujanje idealnog fluida je uvek stacionarno jer je, kao što ćemo kasnije videti, unutrašnje trenje bitan preduslov za stvaranje vrtloga.

Strujna cev je deo fluida ograničen strujnim linijama. Iz ove definicije sledi da čestice fluida ne mogu da prolaze kroz omotač strujne cevi, te je broj delića u cevi stalan.

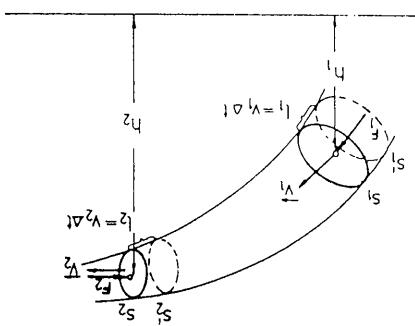
Uvećemo još i pojam *idealnog fluida*. Idealnim fluidom zvaćemo neprekidnu sredinu koja je nestišljiva i kreće se bez unutrašnjeg trenja. Zapreminska masa idealnog fluida je

izčar je znamenite porodice matematika.
„Dantel Bernoulli (1700-1782), slavjeočki matematik je iz-

$$(54.3) \quad E_p = \frac{1}{2} \rho g h_1^2 - \frac{1}{2} \rho g h_2^2$$

na presečima S_2 i S_1
Promjena potencijalne energije dolazi od razlike visine fluida

$$(54.2) \quad E_k = \frac{1}{2} \rho V_2^2 - \frac{1}{2} \rho V_1^2$$



gde je h - razlika visina
tada je promena kinetičke energije jednaka
etku bila V_1 , a na kraju V_2 ,
ako je brzina strujanja na po-
gde je p - zapreminska masa.

$$(54.1) \quad = \rho S_2 V_2^2 - \rho S_1 V_1^2$$

$$\Delta m = \rho S_1 V_1^2 =$$

$$V_1 = V_2 = \Delta m/p, t.j.$$

na oba preseka iznositi
nosti Δm . Zapremina tog delića
 S_2 (brzinom V_2) uske strujine cevi (sl. 54.1) protekne masa teče-
Neka za vreme at kroz presek S_1 (brzinom V_1) i kroz
integral ilji Bernulijeva jednacina.

nije vazi zakon organizacija ukupnog pritiska (zbir statičkog, dinamičkog i visinskog), koji je poznat pod nazivom Bernulijev
teže (strujanje je stacionarno), tada duž svake strujine li-
ako se idealan fluid nalazi u polju iste Zemljine

54. BERNULIJeva JEDNACINA

na kontinuiteta zadovoljava ilji savim ilji pridilzno.
od atmosferskog pritiska. U praksi kod većine strujanja jednaci-
krila pri umerenim brzinama nadpritisak ispod krila je svega 1%
činjenica u celini i na mestu označeno
sa 1 pomakne za okređeni pomak
neštisljivo fluida (sl. 53.3). Ako se fluid na mestu označeno
kretnja povećava iljeffekti trengija.

* Onde i u daljem tekstu pogovorit ćemo o veličini pritiskak od-
nose se isključivo na statički pritiskak p.

Prvi stacionarnom strujanju jednacina (53.2) je is-

je brzina veća.
šira. Znaci, u strujnoj cesti pritiskak je manji na mestima gdje
la, pa je jasno da je pritiskak veći tamo gdje je strujna cev
suženja strujne cesti, a to znaci da u tom smjeru deštavuje si-
cevi brzina se smanjuje. Prema tome, fluid se ubrzava u mjeru
povećava brzina fluida i obrnuti, povećavanjem pravokutnika
za bilo koja dva preseka. Ostala, uzavaranjem strujne cesti
na svim mestima toku fluida. Jednacina (53.2) može da se dobije
je da je prizvod iz preseka strujne cesti i brzine strujanja isti
dobjena jednacina predstavlja jednaciju kontinuiteta koja pokazu-

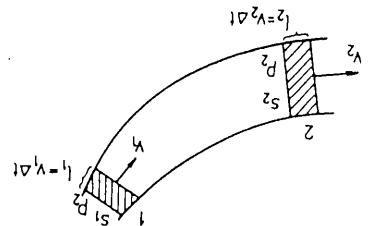
$$(53.2) \quad S_1 V_1 = S_2 V_2 = SV = \text{const.}$$

Kako je fluid nestisljivo zadržava stalnu zapreminu te je $V_1 = V_2$,

$$(53.1) \quad V_2 = S_2 V_2$$

$$V_1 = S_1 V_1$$

ili, tada će se koljčina fluida
sa 1 pomakne za okređeni pomak
nestisljivo fluida (sl. 53.3). Ako se fluid na mestu označeno
ja za vreme at prvične kroz povr-
pomak l_2 . Zapremina tehnosti, ko-
čenom sa 2 fluid je se pomak za
pomak u celini i na mestu ozna-
šene S_1 i S_2 , može se naprasti
ja za vreme at prvične kroz povr-
pomak l_2 . Zapremina tehnosti, ko-
čenom sa 2 fluid je se pomak za
pomak u celini i na mestu ozna-
šene S_1 i S_2 , može se naprasti
kao



na zakonitost kretanja zavisiti kako od vrste fluida tako i
čije stacionarnom strujanju stisljivih fluida jednacina kontinuiteta
stacionarnog strujanja proizlaziti. Međutim, dok je pri ne-
kao posledica međumolekularnih privlačnih sila. Uticaj ovog tre-
nja na zakonitost kretanja zavisiti kako od vrste fluida tako i
u realnim fluidima uvek postoji nutritansije treninge

Prema (54.2) i (54.3) promena energije uočene zapremine fluida iznosi

$$\Delta E = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m g h_1 \quad (54.4)$$

Prema zakonu održanja energije, promena energije ΔE mora da bude jednaka radu spoljašnjih sila. Spoljašnje sile koje na fluid deluju su sile pritiska $F_1 = p_1 S_1$ i $F_2 = p_2 S_2$ te je rad ovih sile

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= F_1 l_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \Delta V \\ \Delta A_2 &= -F_2 l_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t = -p_2 \Delta V \end{aligned} \quad (54.5)$$

Znak minus kod ΔA_2 uzet je zbog toga što je smer sile pritiska F_2 suprotan smeru pomeranja fluida. Na osnovu (54.5) ukupan rad je

$$\Delta A = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \quad (54.6)$$

gde je ΔV zapremina fluida.

Energetski bilans fluida zahteva da ukupan rad bude jednak promeni kinetičke i potencijalne energije, što prema (54.4) i (54.6) daje

$$p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m g h_1$$

Podelimo li gornju jednačinu sa ΔV , uzimajući u obzir da je $\rho = \Delta m / \Delta V$ i prebacimo li sve članove sa istim indeksima na jednu stranu, dobijamo

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \quad (54.7)$$

Kako se indeksi 1 i 2 mogu odnositi na bilo koje oivoljne preseke S , to jednačina (54.7) može da se napiše kao

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const.} \quad (54.8)$$

Jednačina (54.8) naziva se Bernulijeva jednačina za strujanje

idealnog fluida. Ona govori o raspodeli pritiska duž strujne cevi i može se iskazati: *kod stacionarnog strujanja nestišljivog fluida bez unutrašnjeg trenja, zbir statičkog p , visinskog $\rho g h$ i dinamičkog $\rho v^2/2$ pritiska duž uske strujne cevi ostaje stalan.*

Jednačina (54.8) je izvedena aproksimativno, tj. pod pretpostavkom da je brzina v_1 jednaka u svim tačkama preseka S_1 odnosno v_2 kod S_2 , što nije tačno kada se radi o realnim fluidima. Kod realnih tečnosti zbog trenja, devijacije strujnika i dr. brzine nisu iste u svim tačkama jednog preseka, pa se za Bernulijevu jednačinu uvođe različite korekcije koje uzimaju u obzir ovu činjenicu. Naime, ako se debljina strujne cevi smanjuje, brzine tačaka na presecima S_1 i S_2 će se sve manje razlikovati. U graničnom slučaju kada se strujna cev svede na struju liniju, Bernulijeva jednačina postaje tačna. Prema tome, Bernulijeva jednačina kod realnih fluida ne odnosi se na struju cev, već na struju liniju, u tom smislu što za svaku struju liniju na desnoj strani jednačine (54.8) стоји druga konstanta.

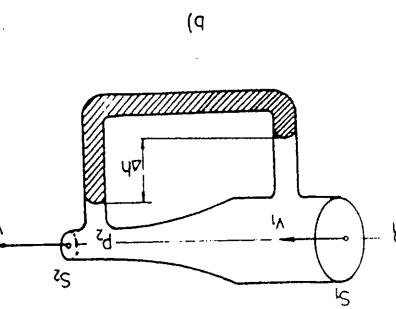
Potrebno je da se napomene da Bernulijeva jednačina važi i za stišljive fluidne, ako su svi ostali uslovi ispunjeni, samo se ona ne može više izraziti u navedenom obliku već u integralnom.

55. PRIMENA BERNULIJEVE JEDNAČINE

a. Brzina isticanja. Toricelijeva teorema. Na slici 55.1. prikazano je isticanje fluida iz suda, koji je napunjen fluidom do visine h , kroz pukotinu koja se nalazi na dnu suda. Neka je S_1 površina poprečnog preseka suda, a S_2 površina otvora kroz koji ističe tečnost i neka su v_1 i v_2 brzine u tačkama 1 i 2. Brzina v_2 naziva se brzinom isticanja. Primenjujući Bernulijevu jednačinu (54.7) na tačke 1 i 2 i uzimajući dno suda kao referentni nivo dobijamo

$$p + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

ili



je na slikci 55.3.a. To je cev nejednakog preseka pomoću koje se b. Venturijeva cev. Presek Venturijeve cevi prikazan.

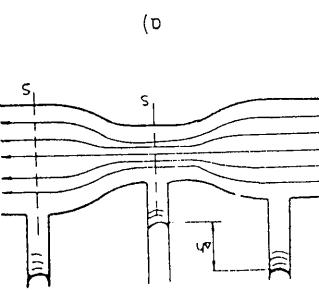
$$Q = SKV = SK \sqrt{2gh}$$

Za isticanje fluida iz suda kroz otvor protiv pritiska oblikova površine s i koeficijenta kontrakcije k protok Q biće dat izrazom

$$S_k = \left(\frac{h}{d} \right)^2 S = 0,65 S$$

čim je sa površinu krugnog bočnog otvora. Kao označene suženja otvora (vena contracta). Ako označeni poprečni presek S_k koji se naziva rasponje izrađujući manji rasponje da se smanjuje još za kartko proizvaja da se spusti ispod otvora celi, brzina postavljena je manja. Usled zbijanja strujnih linija viseći ispod otvora celi, brzina postavljena tehnosti u boči dok nivo tehnosti u boči ne dođe ispod nje ističe konstantnom brzinom sve

55.2). Kako je viseća stuba u ovoj boči konstantna, tehnost je viseće stubova tehnosti konstruisana je tzv. Martotova boča (sl. 55.2). Na osnovu izvedene zavisnosti brzine isticanja od



$$V_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)} = \sqrt{2gh}$$

ili nakon srednjivanija dobija se brzina isticanja V_1

$$\frac{P_0}{2} + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho gy_1 = P_0 + \rho gy_2$$

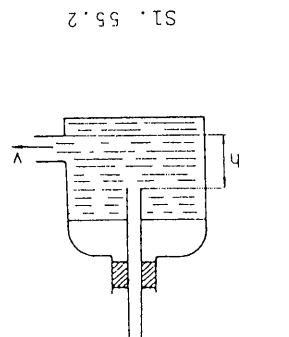
dou suđa kao referenti nivo

ti za takke 1 i 2 da je (zanešenje) brzina v_2 i uzimajući sud prikazan na slikci 55.1.b. na osnovo (54.7) može se napisati otvore na bočnim zidovima na visini h ispod površine. Tako za ogranicena samo na otvor na dušu pod imenom Torricelijeva i na rizeli, pa je poznat pod imenom Torricelijeva teorema. Ona nije organizovana pod istim nazivom (55.1) izveo je 1644. Godine Torricelijeva pada sa viseće h. Izraz (55.1) je 1644. godine Torricelijeva isticanja je ista kao i brzina ma koje se slobođenje dobija amu

$$V_2 = \sqrt{2gh} \quad (55.1)$$

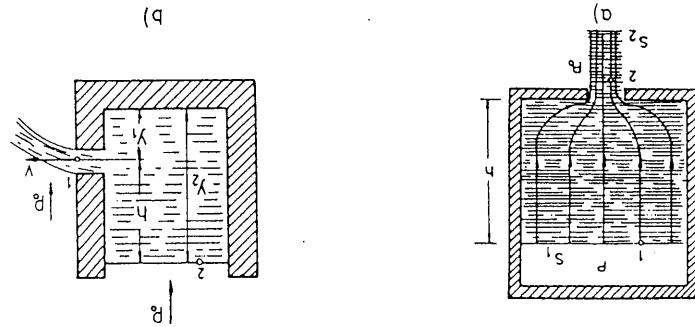
brzini isticanja od V_2 i može se zanemariti, te iz poslednje jednacine dobijaamo je atmosferski pritisak, tj. $P = P_0$ pa je $P - P_0 = 0$. Pretpostava je takođe da je $S_1 > S_2$. Tada je prema (53.2) V_1 mnogo manje od V_2 i može se zanemariti, te iz poslednje jednacine dobijaamo

$$sl. 55.1$$



$$sl. 55.2$$

ra onda je



kada je sud otvoren prema atmosferi to u obe takke 1 i 2 dešlu-

$$V_2 = \frac{2}{2} \frac{P - P_0}{\rho} + 2gh$$

može se meriti količina protekla tečnosti u jedinici vremena. Venturijeva cev ima niz praktičnih primena u obliku dvostrukog trubu prikazane na slici 55.3.b. Primenom Bernulijevih jednačina na strujnu linijsku koja prolazi kroz presek S_1 i S_2 dobija se za horizontalnu strujnu linijsku

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (55.2)$$

odnosno

$$p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) \quad (55.3)$$

Kako je prema jednačini kontinuiteta

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 \quad (55.4)$$

to je prema (55.3) i (55.4)

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} \quad (55.5)$$

Količina protekla tečnosti u jedinici vremena (protok) je

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S_1 v_1 = K \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \quad (55.6)$$

gde je

$$K = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2}}$$

Razliku pritisaka Δp merimo na manometru. Ako je ρ_0 zapreminska masa tečnosti u manometru, biće

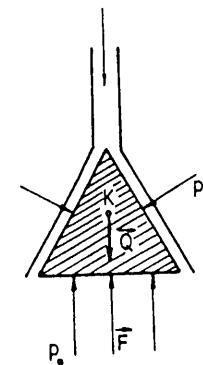
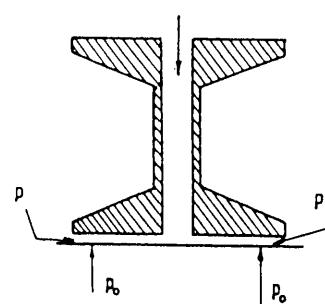
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_0 g \Delta h \quad (55.7)$$

gde je Δh - razlika nivoa tečnosti u manometru.

Venturijeva cev služi za merenje protoka fluida u mnogim uređajajima (Venturijev vodomjer).

c. Aerodinamički paradoks. Duvamo li kroz kalem od konca,

stavljujući uz kalem parče hartije (sl. 55.4.a), primetićemo



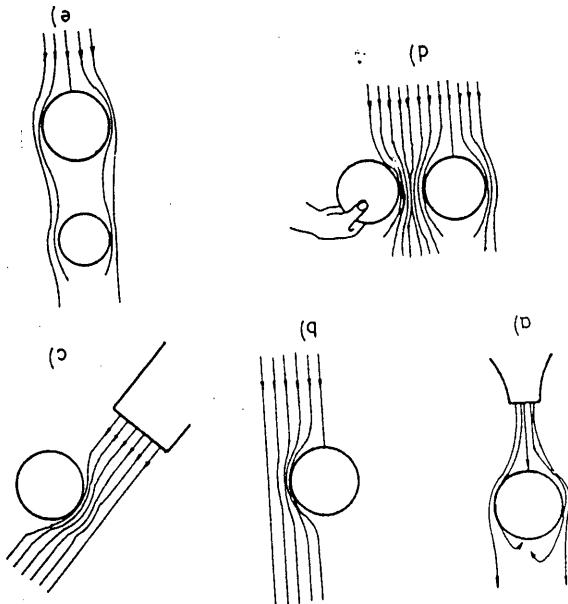
Sl. 55.4

da hartija neće odleteti već će ostati priljubljena uz kalem. Isti slučaj dogodiće se ako u levak (sl. 55.4) stavimo kupa od hartije. Ako kroz levak jako duvamo, kupa neće pasti usled svoje težine već će da se obrće i ostaje priljubljena uz levak. Za oba ogleda važi isto objašnjenje. Povećanjem preseka strujne cevi naglo se smanjuje brzina fluida (vidi 53.2). Na osnovu Bernulijevih jednačina (55.2) vidimo da se zbog toga naglo smanjuje pritisak p na mestu proširenja. Zbog toga razlika pritisaka $p_0 - p$ drži tela u strujnoj cevi.

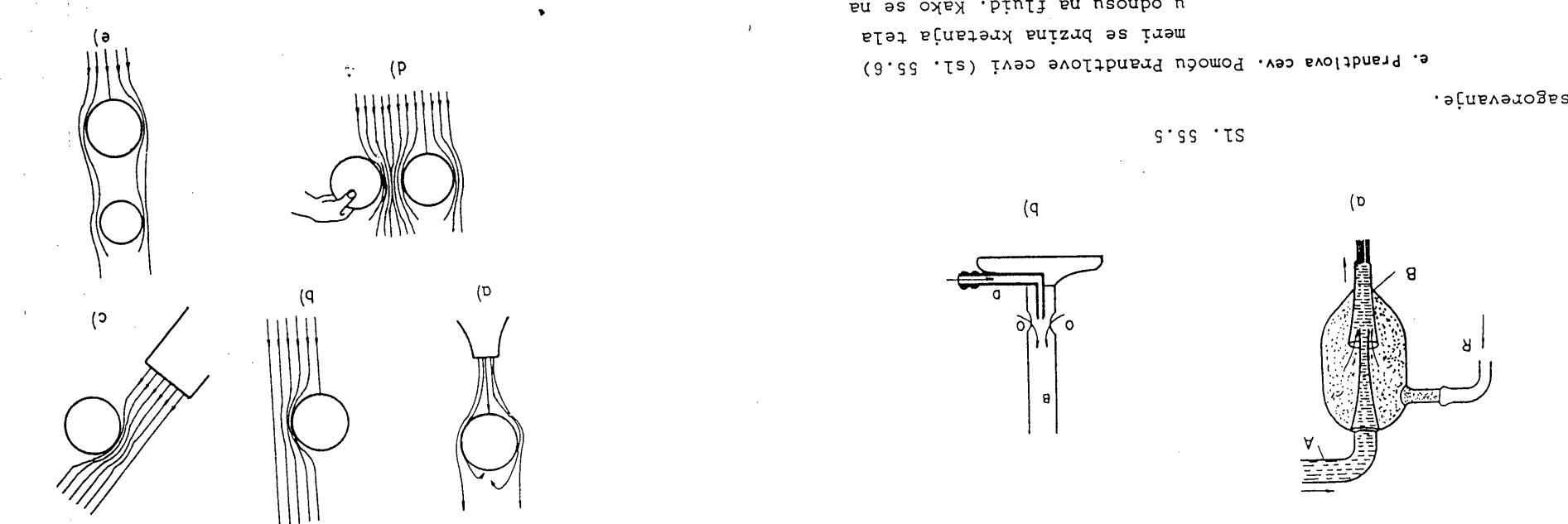
d. Bunzenov šmrk (sl. 55.5.a) sastoji se od jedne zatvorene posude u koju ulazi cev A koja je sužena pri kraju. Natu cev nadovezuje se druga cev B sa proširenim otvorom. Kad kroz cev A struji voda, na mestu suženja brzina se naglo povećava, tako da pritisak padne ispod atmosferskog. Zbog toga se kroz cev R može usisavati iz nekog suda vazduh ili tečnost koji zajedno sa vodom izlaze iz šmrka.

Na istom principu radi i Bunzenov plamenik (sl. 55.5.b). On se sastoji od jedne cevi B koja ima sa strane otvore O. U cev B ulazi tanja cev D koja na kraju ima uzanu diznu. Kroz diznu velikom brzinom izlazi gas usled čega se stvara

ru oko loptice vazduh se kreće brzinom v. Iza loptice brzina podprtisak, te vazduh kroz otvor o ulazi i omogućuje potpuno



227

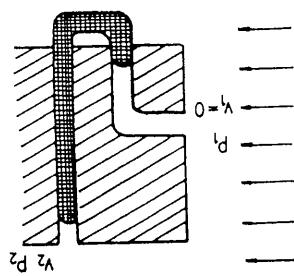


226

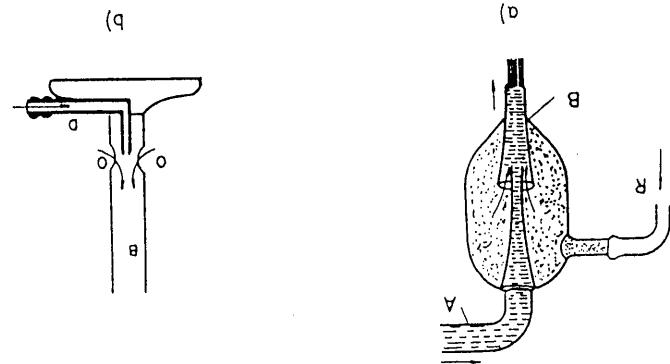
podprtisak, te vazduh kroz otvor o ulazi i omogućuje potpuno
sagorevanje.
e. Prandtlova cev. Pomogu prandtlove cevi (sl. 55.6)
meriti se brzina kretanja te la
u odnosu na fluid. Kako se na
mesetu i fluid zavstavlja, Ber-
noulli jeva jednačina za ovaj
slučaj glasi
 $P_1 = P_2 + \frac{\rho V_1^2}{2}$ (55.8)
odakle je brzina fluida u od-
nosu na mereni uređaj
f. Loptica koja lebdi, u vertikalnoj strujici vazduha
velike brzine pazušnici prihvame stonotensku lopticu. Struja
vazduha je "usisati", i nakon toga loptica će ostati da lebdi
u strujici vazduha. Objasnjenje za ovu pojavu može da se na sljedi-

55.7.a. Kad lopticu pridržavamo strujici vazduha u uskom prostoru
u strujici vazduha. Objasnjenje za ovu pojavu može da se na sljedi
velike brzine pazušnici prihvame stonotensku lopticu. Struja
vazduha je "usisati", i nakon toga loptica će ostati da lebdi
u strujici vazduha. Objasnjenje za ovu pojavu može da se na sljedi

$$sl. 55.6 \quad V_2 = \sqrt{\frac{2dp}{\rho}} \quad (55.9)$$



sl. 55.5



isključivo pod dejstvom spoljnih sila. Međutim, na tenuo-

DO sada smo posmatrali fluid (tehnosti i gasove)

56.1. Viskoznost

56. STRUJANJE REALNOG FLUIDA

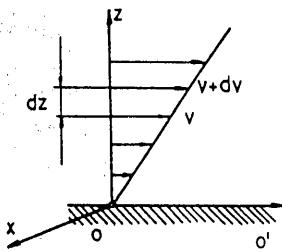
va privlačenje i odbijanje deviju loptica (sl. 55.7.d. i e.).
duhu (sl. 55.7.b) ili visi u vazduhu (sl. 55.7.c) ili se odigra-
jednak pričisci sa obo strane, te loptica miruje lebdeći u vaz-
duhu (sl. 55.7.a). Kad se jednom loptica nadje u strujici vaz-
duha uspostavlje se simetrično poloje strujanja. Na lopticu deluju
stviju usisavajuće. Kad se jednom loptice (ili ma. koga drugog tela) de-
zi koji se javlja u izloptice (ili ma. koga drugog tala) de-
pričisk, tako da razliku pričiska vidi lopticu unazad. Vrlo
(kad brzina raste pričisk opada) u izloptice se javlja smanjenje
vazduha je veća nego ispred, pa prema Bernoullijevoj jednačini

sl. 55.7

isključivo pod dejstvom spoljnih sila. Međutim, na tenuo-

sti i gasove deluju i druge sile koje dolaze od molekularne strukture fluida. Ove sile uzrokuju već poznate površinske pojave kod mirovanja fluida, a kod kretanja uzrokuju unutrašnje trenje.

Unutrašnje trenje ili viskoznost možemo zamisliti kao silu trenja kojom se jedan sloj tečnosti u kretanju tare o drugi. Molekuli svakog sloja deluju na susedan sloj silama koje su na tim udaljenostima po pravilu privlačne. Te sile nastoje da uspore i spreče medjusobno kretanje slojeva, odnosno deluju kao unutrašnje trenje. Viskoznost srećemo i kod gasova i kod tečnosti. Viskozone sile javljaju se i izmedju različitih materijala te utiču na otpor koji se javlja pri kretanju tela kroz fluid. Kretanje fluida sa unutrašnjim otporom prikazuje sl. 56.1.



Sl. 56.1

Posmatramo laminarno (slojevito) kretanje fluida preko ravne površine OO' . Brzina fluida koji dodiruje površinu OO' je ravna nuli, dok dalji slojevi imaju sve veće brzine. Kako gornji delovi fluida imaju veću brzinu od onih ispod, izmedju njih se javlja trenje, tj. javlja se sila tako usmerena da koči slojeve koji se brže kreću, odnosno ubrzava one slojeve koji se sporije kreću. Ova sila naziva se sila viskoznog trenja. Veličina ove sile koja se opire relativnom kretanju bilo koja dva sloja upravo je srazmerna dodirnoj površini S izmedju slojeva i gradijentu brzine dv/dz ^{*}, tj.

$$F = \eta S \frac{dv}{dz} \quad (56.1)$$

Jednačina (56.1) predstavlja Njutnov zakon viskoznog trenja. Ovaj zakon važi za sve homogene tečnosti, ali ne i za suspenzije i koloidne rastvore koji se stoga nazivaju "nenjutnovske" tečnosti. Konstanta proporcionalnosti η naziva se koeficijent

* Gradijent brzine dv/dz je promena brzine po jedinici dužine u pravcu normalnom na tok fluida.

viskoznosti. On predstavlja veličinu karakterističnu za svaku tečnost. Iz jednačine (56.1) sledi da je

$$\eta = \frac{F/S}{dv/dz} \quad (56.2)$$

Ako se sve veličine u jednačini (56.2) izraze u jedinicama SI-sistema dobija se jedinica koeficijenta viskoznosti pascal-sekunda ($Pa \cdot s$). Pascal-sekunda je dinamička viskoznost homogenog fluida koji laminarno struji, u kojem izmedju dva ravna paralelna sloja sa razlikom u brzini od 1 metru u sekundi na rastojanju od 1 metru nastaje napon smicanja od 1 paskala. Koeficijent izražen u pascal-sekundama naziva se apsolutni ili dinamički koeficijent viskoznosti. Pored ovog koeficijenta definiše se i koeficijent kinematičke viskoznosti v deobom dinamičkog koeficijenta sa zapreminskom masom,

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Jedinica koeficijenta kinematičke viskoznosti u SI-sistemu je m^2/s . Kvadratni metar u sekundi je kinematička viskoznost homogenog fluida koja je dinamička viskoznost 1 pascal-sekunda, a zapreminska masa 1 kilogram po kubnom metru.

Sa porastom temperature koeficijent viskoznosti tečnosti brzo opada, u proseku 2-2,5% po stepenu. Nasuprot tomu kod gasova viskoznost raste sa temperaturom. Ovo se objašnjava intenzivnjim kretanjem molekula gasa, tj. njihovim učestalom prelascima iz jednog sloja fluida u drugi. Prema rezultatima molekularno-kinetičke teorije gasova koeficijent viskoznosti gasova η je veličina upravno srazmerna kvadratnom korenu iz absolutne temperature.

U praksi se viskoznost nekih tečnosti, na primer ulja za podmazivanje strojeva, izražava pomoću tzv. SAE jedinica. Ulje viskoznosti 10 SAE jedinica ima koeficijent viskoznosti od $10-22 \text{ Pa} \cdot \text{s}$; 20 SAE jedinica odgovara koeficijentu od $23-30 \text{ Pa} \cdot \text{s}$; 30 SAE jedinica koeficijentu od $36-43 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ itd. Tačne vrednosti koeficijenta viskoznosti za tečnosti date su tablici 56.1. Jasno je da je za idealan fluid $\eta = 0$, dok bi

* SAE - Society of Automotive Engineering.

usavrstio je hidraulicni kodnicu.

* Isteakao se radovatma iz primene hidrodinamike. Medju pronalascima
zad. Obsorune Reynolds (1842-1912), engleski fizikar i pronala-

ovačko napisana Bernoulli jeva jednacina kaze da je za proticanje

$$P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1) + \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) \quad (56.4)$$

Napisimo Bernoulli jevu jednaciju (54.7) u obliku

če viti nego kod realnih fluida.
otuda je rad potreban za proticanje realnih fluida cevi.
u jecnacini koja opisuje proticanje realnih fluida kroz cevi.
u kao viskoznost. Delovanje tih sila mora se dokle pokazati
realne fluidne deljine i medjumekularene sile koje se manifestuju
u obzir da na fluid deluje istakujivo sila teze. Međutim, na
idealnog fluida kroz cev. Kod izvodjenja te jednacine uzeli smo

Bernoulli jeva jednacina (54.8) opisuje proticanje

56.3. Bernoulli jeva jednacina za reline, teknosti

stvom proticanja zato veoma mnogo koristi u praksi.
eksperimentalo ih je jednostavnije realizovati. Ovit se svod
možemo izvesti i na modelima koji imaju isti Reynolds broj, a
prečnik cevi. Na taj način spaktivane posavu pri proticanju
nasas se jednako, bez obzira na fluid koji protice, brzinu ili
preslikavanja. Svako proticanje sa sistem Rejholdsovim brojem po
značaj Rejholdsovog broja ogleda se narocito kod tzv. terijek

$$V > 1,39 \text{ m/s}$$

$$V > 2000 \cdot 181 \cdot 10^{-2}$$

$\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$, $D = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$) kod brzine
medjutim, granicna prestanka stacionarnog strujanja pri
proticanju vazduha kroz silu cev hiljada tek ($n = 181 \cdot 10^7 \text{ Pa.s}$).
Medjutim, granicna prestanka stacionarnog strujanja

$$V < 0,1 \text{ m/s}$$

$$N_R = \frac{10^3 \cdot V \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{0,001} < 2000$$

i21

231

230

tice kroz cev prečnika 2 cm, strujanje stacionarno ako je
turbulentno. Tako je, na primjer, za vodu pri 20°C, koja pro-
ti način proticanja se mesaju. Za N_R iznad 3000 stacionarni i turbulen-
ti. Za vrednosti N_R između 2000 i 3000 proticanje stacionar-
ve dolazak rezistencijevog broja $N_R < 2000$ proticanje stacionar-
ti. bezdimenzionalna veličina. Eksperiment pokazuje da je za
veća od one pri zidovima cevi. Rejholdsov broj je isti broj,
proticanja kroz cevi, jer je brzina proticanja u sredini cevi
treba napomenuti da je brzina u izrazu (56.3) prosjena brzina

$$N_R = \frac{PV}{D}$$

56.2. Rejholdsov broj. Preslikavanje

Fluid	n Paskal-sekunda
vazduh	0,000018
zlicinovo ulje	1,1
glicerin	1,1
alkohol	0,0013
voda	0,0011
etar	0,00025

TABLE 56.1.

Protiv za idealno kruuto telo bi to $n = \infty$.

idealne tečnosti kroz cev potrebna razlika pritisaka ($p_1 - p_2$) koja ide na savladjivanje razlike u visinama i hidrodinamičkog pritiska. Međutim, viskoznost takođe stvara otpor proticanju fluida, te će biti potrebna veća razlika pritisaka ($p_1 - p_2$) da se uz iste uslove pomakne realna tečnost, nego da se pomakne idealna tečnost. To povećanje razlike pritisaka ogledaće se u pojavi jednog dodatnog člana u jednačini (56.4). Za specijalan slučaj cilindrične cevi preseka D i dužine L kroz koju protiče fluid jednolikom brzinom v (tj. $v_1 = v_2$) taj dodatni član iznosi

$$p = f \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} v^2 \quad (56.5)$$

pa Bernulijeva jednačina u tom slučaju glasi

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) + f \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} v^2 \quad (56.6)$$

Faktor f je bezdimenzionala veličina koja zavisi od Rejnoldsovog broja N_R , a naziva se faktor trenja. Za stacionarno strujanje ($N_R < 2000$) je

$$f \approx \frac{64}{N_R} \quad (56.7)$$

a za turbulentno strujanje f opada nešto sporije sa porastom N_R . Faktor f u izrazu (56.7) važi samo za glatke cevi.

56.4. Proticanje fluida kroz uske cevi. Poazejev zakon

Posebno važan slučaj viskoznog kretanja fluida je proticanje kroz cevi. Teoriju ovog procesa dao je Poazej*, pa se i jednačina koja objašnjava proticanje naziva Poazejeva jednačina. Da bi se ova jednačina izvela posmatra se laminarno proticanje nestišljivog fluida kroz cev dužine l i poluprečnika R, a pod dejstvom razlike pritisaka ($p_1 - p_2$) (sl. 56.2). Da bi proticanje bilo laminarno, potrebno je da cev bude dovoljno uzana, a brzina proticanja relativno mala, odnosno da razlika pritisaka ne bude suviše velika. Pri ovakovom kretanju

* Jean Poiseuille (1799-1869), francuski fizičar i filozof.

tečnosti može se zamisliti da se tečnost deli u cilindrične slojeve koji se kreću u istom smeru, ali različitim brzinama jedan u odnosu na drugi. Ova brzina raste od zidova, gde je nula, ka osi cevi, gde je maksimalna. Neka jedan takav cilindrični sloj na rastojanju r ima brzinu v. Na ovaj cilindar deluje viskozna sila, koja prema jednačini (56.1), iznosi

$$F = \pi r l \frac{dv}{dr}$$

Kako je pritisak definisan kao sila po jedinici površine, to je sila koja deluje na fluid i pokreće ga

$$F = \pi r^2(p_1 - p_2)$$

Kada je kretanje stacionarno, tj. kada se tečnost protičući kroz cev ni na jednom mestu ne ubrzava, sila pritisaka mora biti u ravnoteži sa silom viskoznog trenja. Kako ubrzanja nema, zbir sila koje deluju na posmatran sistem jednak nuli

$$\pi r^2(p_1 - p_2) = \pi r l \frac{dv}{dt}$$

ili

$$- 2\pi l dv = (p_1 - p_2) r dr$$

Nakon integracije dobija se

$$v = - \frac{p_1 - p_2}{4\pi l} r^2 + \text{const.} \quad (56.8)$$

Integraciona konstanta određuje se iz početnih uslova, gde je za $r = R$, $v = 0$. Kada se uzme u obzir početni uslov, izraz (56.8) glasi

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\pi l} (R^2 - r^2) \quad (56.9)$$

Jednačina (56.9) daje zavisnost brzine kretanja sloja tečnosti od rastojanja r od ose cevi. Raspodela brzine je parabolična kao što je prikazano na slici 56.2. Da bi se odredila ukupna količina tečnosti koja protekne kroz cev za vreme t mora se izvršiti integracija svih elemenata (od 0 do R) površine $2\pi r dr$ (sl. 56.2)

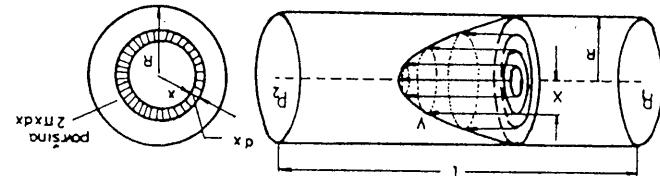
234

valdov (ostatnju) prototipni viskozimeter (sl. 56.4).
ve se prototipni viskozimeter. U praksi se najčešće koristi ost-
ve odrediti koefficijent viskoznosti. Uredaj za ovu merenje zo-
nog fluida (sl. 56.3.b). Promocije posazuje jednacine (56.10) moze
slučaj i debljine fluida (bez viskoznosti) (sl. 56.3.a) i visko-
talog poprečnog preseka. Ovaj stavlja se može pokazati na horizont-
nalnoj cevi sa manometrima kroz koju ističe tečnost iz suda za
pad pritisaka čak i kod viskozne sredine. Stoksovi zakon
Prema (56.8) sledi da kod viskozne fluida postoji
(npr. alkohola).

čanjia krvi kroz kapilarne i faktora koji utiču na sluzene kapilare
je do ovog zakona došao zapravo fiziotekniki spitanjem
čevi R⁴, gradjenu pritisaka ap/1 duž cevi i vremenu proticanja
kroz tanku cev upravno razmerna etvrtom stepenu poluprečnika
jednacina (56.10) pokazuje da je zapremina fluida koja protekne
ovo je posazujev zakon, koji važi samo za nestisljive fluid.

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4 t}{8l n} = \frac{\pi A p R^4 t}{8l n} \quad (56.10)$$

Sl. 56.2
mata tečnosti V koja protekne kroz cev poluprečnika R i dužine
l za vreme t



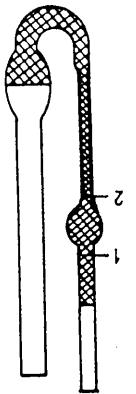
Zamenom izraza za brzinu (56.9) i integracijom dobija se zape-
r

$$V = \int_0^{2\pi R t} 2\pi R^2 dx$$

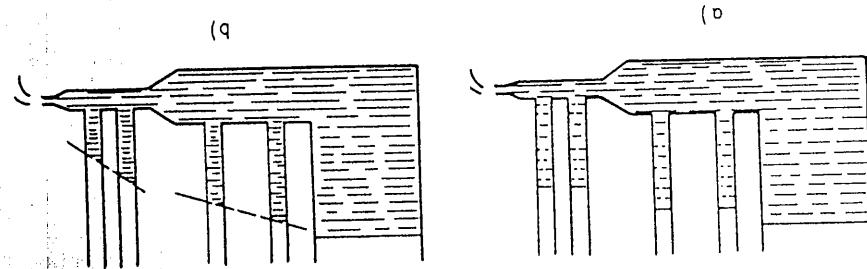
srazmerna pravom stepenu brzine kretanja te la
ja daje da je slika otpora sredine (unutrasnje gorenja) upravo
nema vrtloga, taj otpor potiče od slika viskozne trenja. Teori-
por sredine. Ako je brzina kretanja te la mala i ako pri kretanju
kada se neko teleo kreće kroz fluid, naliči na ot-

56.5. otpor viskozne sredine. Stoksovi zakon

Sl. 56.4



Sl. 56.3



235

$$F = kv$$

gde je k koeficijent srazmernosti koji zavisi od oblika i dimenzija tela koje se kreće, kao i od koeficijenta viskoznosti sredine. Stoks* je odredio ovu konstantu za tela sfernog oblika i dobio je

$$k = 6\pi\eta r$$

gde je η koeficijent viskoznosti, a r poluprečnik kuglice koja se kreće. Sila otpora sredine, prema tome, dobija oblik

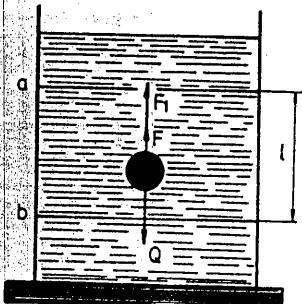
$$F = 6\pi\eta rv \quad (56.11)$$

Ovo je Stoksova formula, koja primenjena na kretanje kuglice u viskoznoj sredini, omogućuje određivanje koeficijenta viskoznosti te sredine.

Posmatrajmo slobodno padanje kuglice mase m i radijusa r u viskoznoj sredini η (sl. 56.5). Na nju dejstvuju tri sile: težina Q , sila potiska F_p i sila otpora sredine F (Stoksova sila). Rezultujuća sila R koja dejstvuje na kuglicu je

$$R = Q - (F + F_p)$$

Ukoliko početna brzina kuglice nije velika, posle prelaska puta od oko jednog santimetra u fluidu može se smatrati da je brzina kretanja kuglice v postala konstantna veličina. Tada se kuglica kreće bez ubrzanja, tj. ubrzanje kuglice je nula, pa mora biti



Sl. 56.5
i $R' = 0$, te je

$$Q = F + F_p \quad (56.12)$$

*Georg Stokes (1819-1903), irski matematičar i fizičar, poznat po svojim radovima iz teorijske hidrodinamike i fluorescencije.

Na osnovu Njutnovog zakona je

$$Q = mg = \rho V g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$$

a na osnovu Arhimedovog zakona

$$F_p = m_1 g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 g$$

gde je ρ zapreminska masa kuglice, a ρ_1 zapreminska masa tečnosti. Zamenom odgovarajućih veličina u jednačinu (56.12) dobija se

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = 6\pi\eta rv + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 g$$

odnosno

$$\eta = \frac{2r^2 g (\rho - \rho_1)}{9v} \quad (56.13)$$

Merenjem vremena padanja kuglice τ na dužini l dobija se brzina $v = l/\tau$. Ako se merenja izvode uvek sa kuglicom istog (poznatog) poluprečnika r i na istoj dužini padanja l pogodno je da se izrašči (56.13) prepiše u obliku

$$\eta = k(\rho - \rho_1)\tau \quad (56.14)$$

gde je

$$k = 2r^2 g / 9l$$

te da se merenjem vremena padanja kuglice τ određuje koeficijent viskoznosti za razne tečnosti. Ovo je princip rada Hopolyerovog (Höpler) viskozimetra.

56.6. Dinamički potisak

Tela koja su lakša od vode plivaju po površini. Isto tako se i tela koja su lakša od vazduha podižu u visinu. Sila koja ih podiže je potisak, koji je jednak težini istisnutog fluida. Ta se sila naziva i staticki potisak, a dolazi od toga što hidrostatički pritisak u fluidu raste s dubinom. Međutim, avion koji leti ne održava se zbog statickog potiska: avion koji se ne kreće odmah padne. Prema tome, uzrok potisku

Dakle, pritišak je iznad valjka veći od pritiška ispod valjka, valjku - s gornje strane valjka manja je nego s donje strane. fliudu (vazduhu) - što je ekvivalentno kretanju fliuida prema polako se kretala niz kosinu. Relativna brzina valjak od pripisa ti ogleđdom prikazanu na slici 56.7. Lagani valjak u homogenom prostoru je iznad valjka prema zivu se magnitovu efekat. Tu gemo posavu jednostavno istrojava u homogenu struju tehnosti (ili se jednoliko kreće po fliudu) u homogenu struju tehnosti (ili se jednoliko kreće po fliudu) pojava de na rotirajući cilindar koji je urotjen deluje slična normalna na nemetani smjer homogenog strujanja na

gde je L dužina valjka, a p zapreminska masa fliida.

$$F_L = \rho VL^2 \quad (56.16)$$

U brzinom v slična potiska F normalna na smjer strujanja iznositi je prepreke. Za valjku prepreku koja rotira u fliudu koji se krejanja. Za valjku prepreku koja rotira u fliudu koji se krejanja. Na prepreku je deaktivati slična normalna na smjer nemetanje strujice i zavojne razlike u prepreke. Prema Bernoullijevoj jednoliko kreće postotjati obi strane prepreke, vrednosti $F \neq 0$ znači razliku brzina strujanja s prepreke, vrednosti kako cirkulacija meri nemetiju strujanja oko

jednaka po ma koji je zatvoreno kruivoj oko osi valjka. Cirkulacija je dakle razlikita od nule i jednaka po svakoj kružici proizvoljnoj radijusa. Može se pokazati da će ona biti

$$F = \int v^2 ds = \frac{K}{x} \int ds = \frac{K}{x} 2\pi x = 2\pi K$$

zato, to je znoj putanjii radijusa x. Kako brzina loma smjer tangente na kružici, to je vode kroz otvor na drugu bazu, razmotrimo cirkulaciju po kružici. (Tako kružno strujanje opazamo, npr. pri isticanju valjka. da brzina strujanja opada linijama s udaljenoscu od osi

$$v = \frac{K}{x}$$

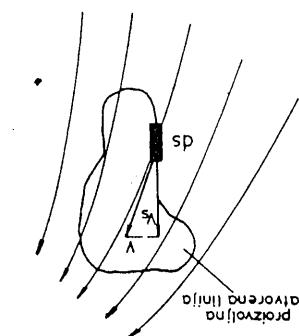
i lako se vidi da je skoznom fliudu, brzina strujanja fliida sledeći obrtanje valjka mo, s druge strane, valjak koji se okreće oko svoje osi u viši lacija pri simetričnom strujanju očito je jednaka nulli. Uzm-

strane tele različita od brzine fliida s druge strane. Cirkulacija značenje cirkulacije je u tome što ona meri asimetriju fizičko strujanja, tj. koliko je, na primjer, brzina fliida s jedne

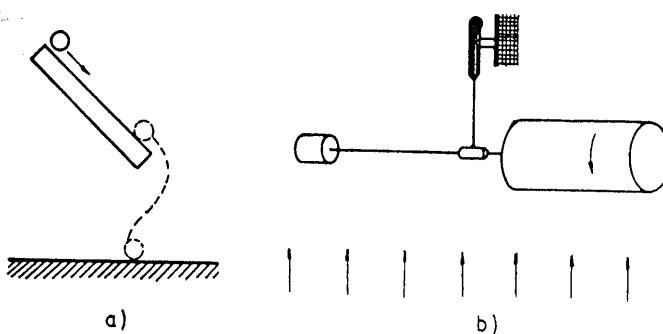
$$I = \int v \cdot ds = \int v^2 ds \quad (56.15)$$

nog proizvoda $v \cdot ds$ gemo cirkulaciju definisati kružnim integralom skalar-

SL. 56.6



komponente brzine fliida u smjeru elementa ds (SL. 56.6). Tada će element zatvoren kružni polj u fliida koji se kreće, a v^2 raketrisati veličinom koji je gemo nazvat cirkulacija. Neka je trični tok superponiramo kružni tok. Taj gemo kružni tok kroz mrežu matematički dobiti tako da na provodnicu sime-oko te la mrežu za dinamički potisk. Asimetričan tok fliida gore, odgovor na jednoliku postotjati rezultanta slična prema Bernoullijevoj jednoliku postotjati rezultanta slična prema brzina protičanja iznad te la veća od one ispod te la, tada će obi strane ponistiava. Međutim, ako je tok fliida takav da je akо je kretanje fliida simetrično prema te lu, pritišak se s tivno kretanje prema fliida deluje tzv. hidrodinamicki pritišak. Prema Bernoullijevoj jednoliku na te lo koji se relata ovu vrstu potiska nazvat dinamički potisk.



Sl. 56.7

što rezultuje u sili koja gura valjak pod dasku. Još ćemo očitije prikazati Magnusov efekat pomoću kanala za vetar. Valjak na slici 56.7.b. može da se vrti oko svoje horizontalne ose koja je pričvršćena na vertikalnu osu. Zavrtimo valjak oko vlastite ose i postavimo ga u homogenu struju vazduha. Magnusova sila gura valjak normalno na smer strujanja vazduha i on se počne okretati oko vertikalne osovine.

Na sličnom principu deluje i avionsko krilo. Krilo ima takav oblik da je strujanje vazduha ispod krila sporije nego iznad krila. Ta nesimetrija u strujanju daje rezultujuću силу prema gore (pritisak ispod krila je veći) što pri velikim brzinama podigne avion.

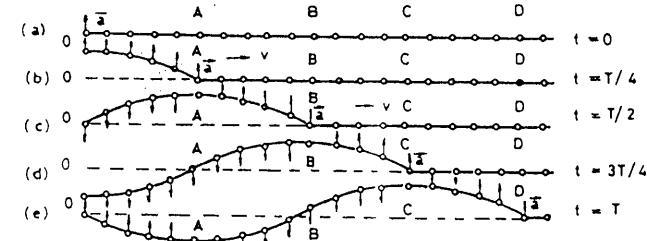
XII TALASNO KRETANJE

57. PROSTIRANJE TALASA U ELASTIČNOJ SREDINI

Ako se jedna tačka elastične sredine izvede iz ravnotežnog položaja počeće da osciluje i energiju oscilovanja će predati delićima svoje okoline. Ovakvo širenje oscilatornog poremećaja u elastičnoj sredini naziva se talasom. Pri prostiranju talasa kroz elastičnu sredinu se ne premeštaju delići sredine, već oni samo osciluju oko svojih ravnotežnih položaja, a kroz sredinu se prenosi energija talasa.

Ako je pravac oscilovanja delića normalan na pravac prostiranja talasa, talas je *transverzalan*, a ako delići osciluju duž pravca prostiranja talasa, talas je *longitudinalan*. Transverzalni talasi se mogu javiti samo u onim sredinama u kojim postoje elastične sile smicanja (kod čvrstih tela). U tečnim i gasovitim sredinama se prenose samo longitudinalni talasi, koji se prostiru razredjivanjem i zgušnjavanjem sredine.

Na slici 57.1. je prikazan jedan niz čestica (npr. niz atoma u čvrstom telu) i na njemu će detaljnije biti razmo-



Sl. 57.1

tren mehanizam prostiranja transverzalnih talasa. Deo (a) iste slike prikazuje ravnotežne položaje čestica. Ako se pod dejstvom sile čestica 0 pomeri naviše iz ravnotežnog položaja, ona će,

$$c = \frac{I}{A} = \nu_2$$

(57.2)

tzv. fazna brzina) je
laciju, tj. za vreme T. Znaci, brzina prostiranja poramegaj
lazi put od jedne talasne duzine dok deljici izvrsi jednu osci-
losti fazici naziva se talasnom duzинom λ . Talasi potreba da
lasa.) Rastojanje izmedju dva najblizaca koji osciluju u
stavnosti miemo razmatrati samo prostiranje harmonijske jedno-
ne moraju ukuci da budu harmonijski, ali zbrog matematike jedno-
prije emu se faze poslednjih razlikuju. (Talasi, naravno,

$$y_i = Y_i^0 \sin(\omega t + \phi_i)$$

se polozaji (elongacija) svakog deljica moze opisati jednacijom
talas vrsti harmonijske oscilacije oko ravnotezenog polozaja, te
svaka talaka elastiine sredine duz koje se prostire
se duz niza kao longitudinalan talas.

ovako razredjivane i zgušnjavane i razredjivana (potrebe) kretanje
slo, u obenom nizu, do zgušnjavanja i razredjivanja estica.
vci prostiranja talasa. Kod ove vrste talasa, zbrog toga bi do-
tudinalnih talasa, kod kojih se oscilovanje estica vrsti u pra-
na isti nacin moze se prikazati i prostiranje Longi-

$t = 3T/4$ i $t = T$, koji su dati na slici 57.1.d. i.e.
c in mogu da se objasne potrebanje izuzetica posle vremena
prostiranja u svu ravnotezeni polozaj, tj. posle vremena $t = T/2$,
nakon sto su dosigle svoja maksimalna udaljenja. Kada estica
kretanje ka ravnotezenom polozaju, a za njom i usedene estice
vanja estice 0. Posle ovog vremena estica 0 postigne svoje
sle kojeg nastaje ovo stanje iznositi etvertinu perioda T oscil-
acioni u javlja se potrebeni prikazan kao 57.1.b. Vreme po-
da estica 0 dosigne maksimalno udaljenje (amplituda njenog
stica za slobom povlasti usedenu itd. Posle izvesnog vremena, ka-
s obzirom na inertiju, sa izvesnim zakasanjem. Ova, pak, je-
zbroj medusobnog delovanja poveći sa slobom usedenim esticu, ali

$$Y = Y_0 \sin \omega t$$

kretanje (42.1)

predstaviti pozantim sinusnim zakonom za proti harmonijsko
takve oscilacije se mogu bez obzira kucav se talas obrnuti,
dejstvom talasne potrebe oscilacije harmonijske oscilacije.

Predpostavimo da svaka talaka elastiine sredine pod

talasa.

talas apsorbuje se u elastiine sredine priemcu slabim ampli-

uzev do kraja elastiine sredine. Ustvari, energija koju prenositi

na onaj talas koji se prostire u istom smeru i pravcu, idealo-

progressivni talas, kako sam naziv kazet, odnosit se

58. JEDNACINA PROGRESIVNOG TALASA

elastiine sredine do koji je stigao talast front moze biti smarati nout

opisati pomocu Hagensoveg principa, koji glasi: "Sakna talaka

proces prostiranja talasa jesti se ednostavno moze

stu gemo se organizeti na izuzavanje ravni talasa.

od izuzora i sferni talas se moze smatrati ravni. U deljem tek-

ravan, talas se naziva ravni talasom. Na velikoj udaljenosti

izuzora, te talasni front imo oblik sfera. Ako je talasni front

izuzora, onj sredini se talas ravnomerni prostire u svim pravcima, isto

ni. Potrebe za naziva se talasni frontom. U homogenoj i izotrop-

povrsina koja spa ja talaka do koji je stigao talas-

da protekne vreme $\tau = x/c$, što znači da delić na mestu x u odnosu na talasni izvor kasni u fazi oscilovanja. Tada će udaljenje čestica od ravnotežnog položaja (elongacija) y biti funkcija vremena t i mesta u prostoru, pa možemo napisati

$$y = y_0 \sin(\omega(t - \tau)) \text{ ili } y = y_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{c})) \quad (58.1)$$

Ovde se predpostavlja da se pri prostiranju talasa ne vrši apsorpcija energije u elastičnoj sredini i da amplituda y_0 oscilacije ostaje konstantna. Uvodeći zamenu na osnovu (57.2) može se jednačina (58.1) napisati u obliku

$$y = y_0 \sin(\omega t - \frac{\omega T}{\lambda} x) \text{ ili } y = y_0 \sin(\omega(t - \frac{T}{\lambda} x)) \quad (58.2)$$

Jednačina (58.2) predstavlja jednačinu progresivnog talasa, tj. ravnog harmonijskog talasa koji napreduje duž x ose. Vidimo da je talasna jednačina periodična funkcija i od vremena t i od rastojanja x . Analogno, jednačina talasa koji se kreće u suprotnom pravcu ima oblik

$$y = y_0 \sin(\omega(t + \frac{T}{\lambda} x))$$

Zamenom $\omega = 2\pi/T$ i uzimajući da je brzina talasa $c = \lambda/T$ jednačina (58.2) dobija oblik

$$y = y_0 \sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})) \text{ ili } y = y_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)) \quad (58.3)$$

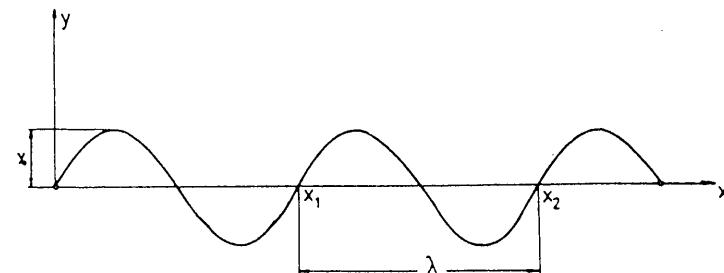
U relacijama (58.1) i (58.3) vezani su prostor i vreme te pojavi talasnog kretanja možemo posmatrati ili u jednoj tački prostora kada posmatramo promenu elongacije u toku vremena ili, pak, možemo u datom trenutku posmatrati raspodelu faza oscilacije u prostoru.

Ako fazu talasa* u jednačini (58.2) napišemo u obliku

$$\phi = \frac{\omega T x}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} x \quad (58.4)$$

* U jednačini (58.2) fazom talasa se osim argumenta sinusne funkcije $(\omega t - \omega T x / \lambda)$ ponekad zove i veličina $\phi = \omega T x / \lambda$.

i ako grafički predstavimo jednačinu (58.2) (sl. 58.1) vidimo



Sl. 58.1

da je za dve tačke, na primer, na mestima x_1 i x_2 , fazna razlika

$$\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \quad (58.5)$$

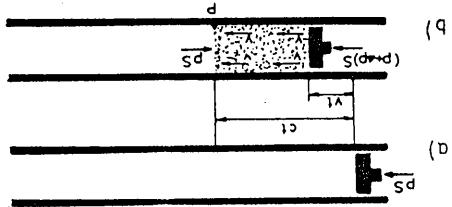
Ako je fazna razlika $\Delta\phi$ umnožak bilo kog celog broja k ($k = 1, 2, 3, \dots$) i 2π , tj. $\Delta\phi = 2\pi k$, kaže se da delići osciluju u fazi. U fazi oscilovanja delići su na rastojanju $x_2 - x_1 = k\lambda$, za $k = 1$ to rastojanja je $x_2 - x_1 = \lambda$. Delići osciluju u suprotnoj fazi ako je

$$\Delta\phi = (2k - 1)\pi$$

U suprotnoj fazi osciluju delići koji se nalaze na rastojanju $x_1 - x_2 = (2k - 1)(\lambda/2)$. Za $k = 1$ to rastojanje je $x_2 - x_1 = \lambda/2$

58.1. Brzina širenja poremećaja u elastičnoj sredini

U delu 57. rečeno je da se mehanički talas javlja u elastičnoj sredini kada se u njoj izvrši neki poremećaj, odnosno elastična deformacija, koja izaziva oscilovanje nekog dela elastične sredine. Tako se nastali talas izvesnom brzinom prostire kroz elastičnu sredinu. Pri tome se čestice sredine ne premeštaju već samo osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. Zbog toga je važno razlikovati *brzinu prostiranja talasa c* i *čestičnu brzinu v* delića sredine kroz koju se kreće talas. Osim



b. Brzina sirenja longitudinalnih poremećaja. Fluid (tečnost udesno sa brzinom v (SL. 58.3)). Nakon vremena t = 0 klijp na levoj strani ćevi pomakne se tiskom p. U vremenu $t = 0$ klijp na levoj strani ćevi pomakne se (ili gas) zapreminske mase ρ nalazi se u čevi preseka S pod pravim ugлом.

$$c = \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \sqrt{\frac{0,06/6}{60}} = \sqrt{0,001} = 77,5 \text{ m/s}$$

Prema (58.8) je

od 60 N . Kolika je brzina sirenja transverzalnog talasa u zici?

Prije, čeljaka zica dužine 6 m i mase 60 g zategnutu je sliom.

Kao što smo već rekli ovački talasi se prostiru samo u čvrtim telima.

dini kreću istom brzinom.

Prema (58.8) sledi da brzina protiranja ne zavisi od amplitude sredine i da se svaki mehanički talasi u okređenom elastičnom serijama mase po jednako dužine. To znati da je brzina osočna ili talasne dužine talasa, već samo od slike zatezanja zice i

$$(58.8) \quad c = \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

tegutne zice

dobjija se brzina protiranja transverzalnog poremećaja duž zaređene mase.

$$F \frac{c}{\rho} t = \mu ct v$$

jer je na pogetu zica mirovala. Izdardajuće (58.6) i (58.7)

$$(\mu ct v)$$

masom μ . Prema tome je promena koliki je sirenja za premećajem za koju se porumećaj pomakao, pomaknući linijarnom zaređenom zlicu.

zaloga uobičajeni smo da postoji razlika u mehaničku sirenja transverzalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu i longitudinalnih porumećaja.

zalogu uobičajeni smo da postoji razlika u mehaničku sirenja transverzalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu i longitudinalnih porumećaja.

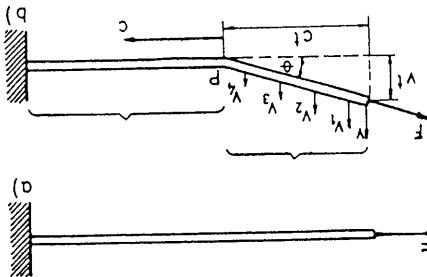
$$(Fsin\theta)t = F \frac{c}{\rho} t \quad (58.6)$$

Prema tome transverzalni impuls je

$$sin\theta = \tan\theta = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}$$

Transverzalna komponenta sile je $Fsin\theta$. Za male uglove je transverzalnom smjeru (masa), transverzalna komponenta brzine. Komponenta sile (vreme) jednak promjeni koliki je sirenja u lasa okređeno iz tog da je transverzalni impuls (transverzalni rezinu sirenja porumećaja c kod transverzalnog ta-

mećaja, a bestiča na desnom kraju zice miruju. Zice bestiče se kreću brzinom v normalno na smjer sirenja porumećuju se krajem i delu koji miruje (SL. 58.2.b). Na levom kraju rezinom c do takve p na zici, koji označava granicu delu zice brzina se kreće i delu koji miruje (SL. 58.2.b). Na levom kraju zice bestiča se kreće izvrsimo transverzalni porumećaj bro- sa po jednici dužine) u koje je zategnuto sliom f. U vremenu t = 0 na levom kraju zice izvrsimo transverzalni porumećaj bro- stičnu zicielasticno uzle linijske mase (produzna masa; ma-



a. Brzina sirenja transverzalnih porumećaja. Posmatrajući elastičnu sirenja tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

zalogu i longitudinalnih porumećaja, pa gemo zato i izrazite za zalogu uobičajeni tih porumećaja izvesti za svaki od njih posebno.

levo od tačke P kreću sa brzinom v , a desno od P miruju. Granična tačka P pokreće se udesno sa brzinom c . Tu ćemo brzinu izračunati tako da izjednačimo longitudinalni impuls i promenu količine kretanja.

Longitudinalnu količinu kretanja (tj. longitudinalnu komponentu količine kretanja) dobićemo ako uočimo da se u cilindru za vreme t pomakao deo fluida unutar valjka visine ct , a baze S . Tako je promena količine kretanja u longitudinalnom smeru

$$(\rho ctS)v$$

Longitudinalnu komponentu impulsa izračunaćemo tako da rezultantu silu koja dejstvuje normalno na klip pomnožimo vremenom t . Ta sila jednaka je povećanju pritiska Δp · površina klipa S . Prema tome, longitudinalni impuls je $\Delta p St$. Izračunaćemo Δp iz činjenice da se početna zapremina fluida Sct smanjila pomakom klipa za iznos Svt . Ako sa K označimo stišljivost fluida definisanu kao

$$K = \frac{1}{\Delta p} \frac{\Delta V}{V}$$

tada je

$$K = \frac{1}{\Delta p} \frac{Svt}{Sct}$$

odnosno

$$\Delta p = \frac{1}{K} \frac{v}{c}$$

Primenom zakona (15.10) o jednakosti impulsa i promene količine kretanja je

$$\Delta p St = \frac{1}{K} \frac{v}{c} St = \rho ct Sv$$

odnosno, brzina prostiranja longitudinalnog poremećaja u fluidu

$$c = \sqrt{\frac{1}{K\rho}} = \frac{\Delta p}{\rho v} \quad (58.9)$$

* Sa leve strane klipa, zbog smanjene zapremine, deluje pritisak ($p + \Delta p$); sa desne strane pritisak p . Prema tome je rezultantna sila što deluje sa leve strane jednaka $\Delta p S$.

Longitudinalni poremećaj se prostire dakle brže u fluidu male stišljivosti (tečnosti), ali i male zapreminske mase. Ipak stišljivost po pravilu preteže, pa se longitudinalni poremećaji (npr. zvuk) šire brže u tečnosti nego u gasu. Izraz $\Delta p/\rho v$ za brzinu širenja poremećaja pokazuje da je širenje poremećaja tih brže što je brzina pomaka čestica v u fluidu manja. Ako umesto stišljivosti K u izrazu (58.9) uzmemos njenu recipročnu vrednost $B = 1/K$, dobićemo izraz za brzinu c u obliku

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (58.10)$$

gde je B modul elastičnosti. Da se pokazati da je modul elastičnosti fluida

$$B = \kappa p \quad (58.11)$$

gde je $\kappa = c_p/c_v$ odnos masenih količina topote pri konstantnom pritisku i konstantnoj zapremini (tzv. adijabatska konstanta). Prema (58.10) i (58.11) brzina prostiranja longitudinalnog poremećaja u slučaju gasova je

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad (58.12)$$

Za vazduh pri normalnim uslovima (dvoatomni gasovi O_2 i N_2) je $\kappa = 1,4$, $p = 101325 Pa$ i $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$, pa je prema (58.12) brzina prostiranja longitudinalnog talasa

$$c = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 101325}{1,29}} = 331 \text{ m/s}$$

što odgovara brzini zvuka. Izraz (58.9) važi za širenje longitudinalnog poremećaja u fluidu. Za čvrsta tela, na primer, za štap stalnog preseka izradjen od materijala zapreminske mase ρ i Jungovog modula elastičnosti E pri istezanju važi da je brzina širenja longitudinalnog poremećaja

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (58.13)$$

Tako, na primer, brzina prostiranja longitudinalnih talasa kroz čelik, kod koga je $E = 20,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ i $\rho = 7,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$w = kC$$

gde smo sa u označili kružnu frekvenciju

$$y_1 = y_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t); y_2 = y_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Talasni broj je dakle broj talasa na 2nd jedinica dužine. Uz

$$k = \frac{\lambda}{2}$$

Uvećemo sada tзв. talasni broj k izrazom

$$y_1 = y_0 \cos \frac{\lambda_1}{2} (x - c_1 t); y_2 = y_0 \cos \frac{\lambda_2}{2} (x - c_2 t) \quad (58.15)$$

Kako je kosinus parna funkcija (prijesto se da je $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$), izraz (58.14) se mogu napisati u obliku

$$y_1 = y_0 \cos \frac{\lambda_1}{2} (c_1 t - x); y_2 = y_0 \cos \frac{\lambda_2}{2} (c_2 t - x) \quad (58.14)$$

Radi jednostavnosti posmatrajmo samo dva kosinusa-
spozivnici sredini. Neka je y_0 amplituda svakog talasa i neka
na talasu različite talasne dužine kreće se krepku duž x osi u de-
strukciji sredini. Izdvojimo samo dva kosinusa-

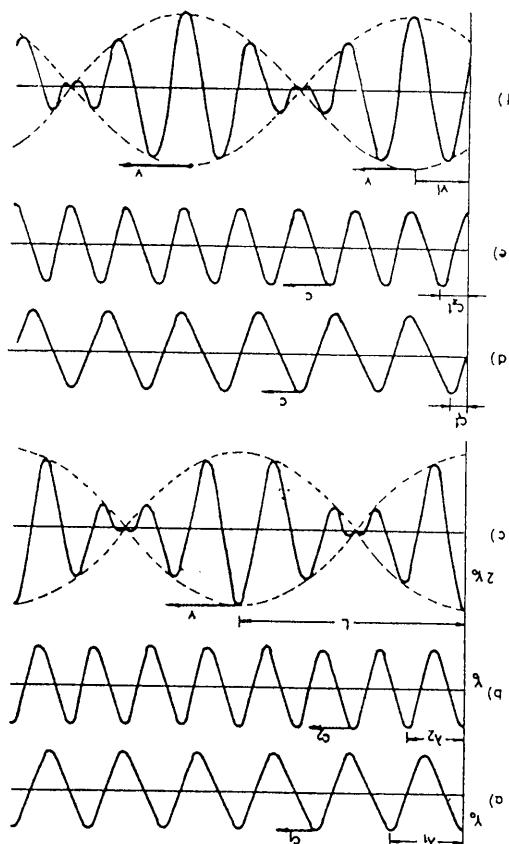
brzina, pa će se i oblik talasa menjati.
Talasi različite talasne dužine kreće se dakle sa različitim
disperzijom, brzina slijedila talasa zavisiti od talasne dužine.
Takva sredina se zovе redisperzija. Međutim, ako je sredina
renja talasa ne zavisi od talasne dužine, onosno frekvencije.
oblik se ne menjа sa vremenom. U tom slučaju dakle brzina slij-
duje sredini različitih amplituda i talasni dužina (furi-je-
nsnih) talasa različitih amplituda i talasni dužina (ili kosi-
nu red). Ako se svi talasi kreće sa istom brzinom c, talasni
iz matematike znamo da se talas svakog oblika mo-
že smatrati superpozicijom izvesnog broja sinusnih (ili kosi-
nja c2 > c1. U trenutku t = 0, kao što je pokazano na sljedi-
ćem dijagramu (58.13) iznos c = 5200 m/s, a kroz vodu, za koju je

58.2. Grupa i fazna brzina

$$E_v = 2,1 \cdot 10^9 N/m^2 \text{ i } \rho = 10^3 kg/m^3, v = 1450 m/s.$$

rezultanta pomerenja je u ovoj takki 2γ₀. Slika 58.4.c. prikazuje rezultantni talasi oblik u trenutku t = 0. Pomerenje u sva-
zu

$$S1. 58.4$$



U ovom trenutku talasi su u fazи u koordinatnom početku i re-
zultantni oblici su

$$y_1 = y_0 \cos k_1 x; y_2 = y_0 \cos k_2 x$$

58.4.a. i b., talasni oblici su
uzmimo da je talasna dužina $\lambda_2 < \lambda_1$, ali da je brzina prostite-
nja $c_2 > c_1$. U trenutku t = 0, kao što je pokazano na sljedi-
ćem dijagramu (58.13) iznos c = 5200 m/s, a kroz vodu, za koju je

koj tački je $y_1 + y_2$. Talasi se slažu i formiraju niz grupa, označenih isprekidanim linijama koje ih obuhvataju i koje se nazivaju *obvojnica* grupe. Sa kretanjem individualnih talasa nadesno kreću se i grupe.

Delovi (d), (e) i (f) sa slike 58.3. prikazuju individualne talase i rezultantni talas u kasnijem trenutku t. Za to vreme gornji talas pomerio se za $c_1 t$, a donji talas za rastojanje $c_2 t$. Sa kretanjem talasa menja se, kao što se vidi, struktura grupe. Na primer, svaka grupa ima pozitivni maksimum na svojoj sredini na delu (c) i negativni maksimum na delu (f) slike. Obvojnica grupe, međutim, zadržava svoj oblik i ma koja izabrana tačka obvojnica, kao što je ona gde je jedan maksimum, kreće se brzinom v koja se naziva *grupnom brzinom*. Brzina c pojedinih sinusnih talasa naziva se njihovom *faznom brzinom*, pošto se može smatrati kao brzina kretanja tačke konstantne faze. Na slici 58.4. grupna brzina veća je od bilo koje fazne brzine. Razliku između fazne i grupne brzine izračunaćemo uz pomoć slike 58.4. Pitamo se najpre koliko mora proći vremena t pre nego što se sinusoida koju opisuju delovi (a), (b) i (c) na slici ne ponovi. Drugim rečima u kojem će vremenu t kosinusni talasi imati opet maksimum u koordinatnom početku ($x = 0$)? Ovo vreme mora da bude takvo da talas više frekvencije ω_2 načini jednu potpunu oscilaciju više od talasa niže frekvencije ω_1 , ili kada fazni ugao bržeg talasa predje fazni ugao sporijeg talasa za 2π . Kako su jednačine kretanja čestica u koordinatnom početku ($x = 0$) date sa

$$y_1 = y_0 \cos \omega_1 t \quad i \quad y_2 = y_0 \cos \omega_2 t$$

to je vreme t definisano uslovom

$$\omega_2 t = \omega_1 t + 2\pi$$

Talasi će dakle opet biti u fazi nakon vremena

$$t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

Brži talas će načiniti tačno jednu oscilaciju više od sporijeg i u koordinatnom početku opet ćemo imati isti oblik talasa kao

u trenutku t = 0.

Izračunaćemo sada brzinu kretanja grupe, tj. grupnu brzinu. Grupa nije sa vremenom menjala oblik; sve tačke na obvojnici kreću se istom brzinom. Neka je u trenutku t = 0 obvojnica jedne grupe imala maksimum u koordinatnom početku ($x = 0$) (c). Nakon vremena t taj se maksimum pomakao za dužinu L. U toj tački su oblici talasa koji su bili u fazi u času t = 0 na crtežima (a) i (b) ponovo u fazi. Njihove jednačine su

$$y_1 = y_0 \cos k_1 x \quad i \quad y_2 = y_0 \cos k_2 x$$

Dužinu x = L koju je prevadio maksimum grupe u vremenu t dobijemo iz uslova da je

$$k_2 L = k_1 L + 2\pi; \quad L = \frac{2\pi}{k_2 - k_1}$$

jer su u tački x = L (crtež c.) posle isteka vremena t komponentni talasi (a. i b.) opet u fazi. Pošto se grupa pomera za rastojanje $L = 2\pi/(k_2 - k_1)$ u vremenu $t = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$, grupna brzina v je

$$v = \frac{L}{t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$$

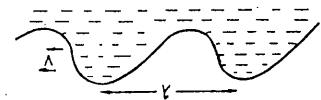
Ako se dva kosinusna talasa na slici 58.3. razlikuju samo beskonačno malo u brzini i talasnoj dužini, važi da je grupna brzina

$$v = \frac{d\omega}{dk}$$

Kako je fazna brzina c data izrazom $c = v\lambda = \omega/k$, vidi se razlika između fazne i grupne brzine. Fazna i grupna brzina se podudaraju jedino u slučaju da fazna brzina c ne zavisi od talasne dužine ($c = \text{const.}$ tj. nema disperzije). Tada je

$$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} = c$$

Ako bi oba kosinusna talasa na slici 58.3. imala istu brzinu c, rezultantni talas na delu (c) kretao bi se tom brzinom bez promene oblika.



čekanje na vibracije u rezonansu sredine. Kao rezultat ovog se procesa, vibracija sredine se prenosi preko tla i zraka do svih drugih tlačnih struktura. Tako se energetički položaj tlačne strukture u zraku menjava, što rezultira razlikom u obliku i smeru vibracija tlačne i zrakove strukture.

Kao rezultat ovog, vibracija sredine se prenosi preko tlačne strukture u zraku do svih drugih tlačnih struktura. Tako se energetički položaj tlačne strukture u zraku menjava, što rezultira razlikom u obliku i smeru vibracija tlačne i zrakove strukture.

58.3. Tlasi na površini tehnosti

U rezonansu sredine, tlasi se prenose preko tlačne strukture u zraku do svih drugih tlačnih struktura. Tako se energetički položaj tlačne strukture u zraku menjava, što rezultira razlikom u obliku i smeru vibracija tlačne i zrakove strukture.

U rezonansu sredine, tlasi se prenose preko tlačne strukture u zraku do svih drugih tlačnih struktura. Tako se energetički položaj tlačne strukture u zraku menjava, što rezultira razlikom u obliku i smeru vibracija tlačne i zrakove strukture.

$$\omega = \frac{k_2 - k_1}{w_2 - w_1} = 6 \text{ [cm/s]}$$

$$\omega_1 = c_1 k_1 = \frac{\pi}{2} \text{ [s}^{-1}\text{]} ; \quad \omega_2 = c_2 k_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{4} \text{ [cm}^{-1}\text{]} ; \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{3} \text{ [cm}^{-1}\text{]}$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ cm. Tada je}$$

$\omega_1 = c_1 k_1 = \frac{\pi}{2} \text{ [s}^{-1}\text{]} ; \quad \omega_2 = c_2 k_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ [s}^{-1}\text{]}$

ili su tlasi za koje je $c_1 = 2 \text{ cm/s}$, $c_2 = 3 \text{ cm/s}$, $\lambda_1 = 4 \text{ cm}$ i $\lambda_2 = 3 \text{ cm}$. Tada je

ili su tlasi za koje je $c_1 = 2 \text{ cm/s}$, $c_2 = 3 \text{ cm/s}$, $\lambda_1 = 4 \text{ cm}$ i $\lambda_2 = 3 \text{ cm}$. Tada je

58.4. Energija tlasi

na sredinu prenosi energiju.

Rekli smo da se kod tlasi prenosi energija.

Ovakav tlasi se naziva stoga težinski tlasi. Brzina težinske

na ovaj tlasi tada dominiraju uticajem gravitacione sila.

Gravitaciona sila manja od fazne brzine,

je putem zvučnih talasa od zvučnih izvora (muzički instrumenti, zvučnici i dr.) do uha, ili kada putem elektromagnetskih talasa od Sunca stiže do nas najveći deo Sunčeve energije.

Brzina prenošenja energije putem talasa jednaka je brzini samog talasa, dok čestice sredine ostaju na mestu i ne putuju sa energijom, kao što je to slučaj kod translatornog kretanja tela.

Proizvod iz gustine energije ρ i brzine talasa c predstavlja onu količinu energije (protok) I , koja u jedinici vremena protekne kroz jedinicu površine normalne na pravac proširjanja

$$I = \rho c \quad (58.18)$$

ili zamenom izraza (58.17) dobija se:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_0^2 c \quad (58.19)$$

Izraz (58.19) omogućuje da se izračuna onaj protok energije I koji se prenosi talasnim kretanjem. Protok energije I se izražava u jedinicama W/m^2 . Kod zvučnih talasa I se naziva intenzitet (jačina) zvuka.

Ako se talas širi kroz štap dužine L , tada je energija talasa po jedinici dužine

$$\frac{E}{L} = 2\pi^2 \nu^2 y_0^2 \left(\frac{m}{L} \right) = 2\pi^2 \nu^2 y_0^2 \mu \quad (58.20)$$

gde je μ ranije definisana masa po jedinici dužine. Izračunamo sada snagu talasa, tj. brzinu kojom talas prenosi energiju. Vreme za koje talas predje dužinu L , krećući se brzinom c , jednako je

$$t = \frac{L}{c}$$

pa je snaga talasa

$$P = \frac{E}{t} = \frac{2\pi^2 \nu^2 y_0^2 m}{L/c} = 2\pi^2 \nu^2 y_0^2 \mu c \quad (58.21)$$

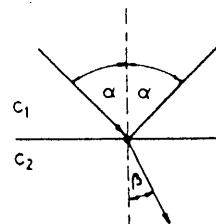
Prema (58.21) sledi da je brzina prenosa energije duž štapa je-

dnaka proizvodu energije po jedinici dužine i brzine širenja talasa.

59. OSNOVNE OSOBINE TALASNOG KRETANJA

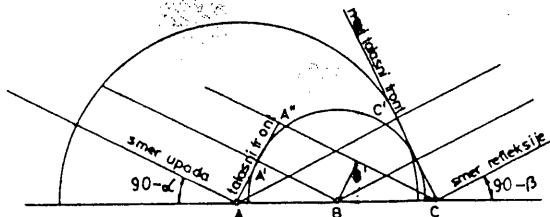
59.1 Odbijanje i prelamanje talasa

Kada ravan talas naiđe na granicu dve sredine u kojima su brzine prostiranja talasa različite (sl. 59.1), deo talasa će se odbiti (reflektovati) od granične površine, a deo prelomiti (refraktovati) i preći u drugu sredinu sa promjenjenom brzinom.



Sl. 59.1

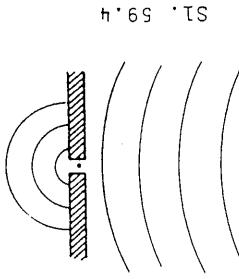
a. Odbijanje (refleksija) talasa
Posmatrajmo ravan talas koji pada na ravnu površinu pod uglom $90^\circ - \alpha$ (sl. 59.2). Neka talas polazi iz velike daljine i neka se širi po liniji koja se može smatrati pravom i koja se zove *talasni front*. Talasni front rav-



Sl. 59.2

nog talasa na slici 59.2. predstavljaju pravci AA'A'' i BB'. U momentu kada je talasni front AA'A'' u tački A već došao do ravne površine ABC, deo fronta u A' i A'' još se širi u sredini, tako da A' stigne u B sa zakašnjnjem, a deo A'' stigne u C sa još većim zakašnjnjem. U času kada je talas stigao do C, deo talasa u B i A emitovao je prema Hajgensovom principu sferne

mo na takvim pukotinama čije su di-
menzije istog reda većine kao i
taksa dužina talaša. Ova pobjava
je u Hājgensovog principa, jer tako
se kvalitativno može opisati pomo-
ću Hājgensova principa, jer tako



59.2. Difrakcija talaša

Difrakcijom talaša se naziva sposobnost talaša da
se siri i iz neke prepreke sa pu-
kotinom (sl. 59.4).

(59.1)

$$\sin \alpha = \frac{AC}{C_1}$$

$$\sin \beta = \frac{AC}{C_2}$$

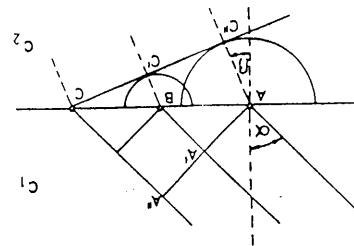
pa se može napisati

$$\sin \alpha = \frac{AC}{C_1} \quad \text{i} \quad \sin \beta = \frac{AC}{C_2}$$

ranja talaša grade se normalom u redini I i III, tada je
lazi do loma. Ako sa a i B označimo uglove koji pravci proti-
lazeći podudaraju, jer im je stranica AC zajednička, stranice AC i
mak ugla fronta odbijenog talaša. Nime, trougao ABC je ed-
jeli jednak, pa se može reći:

Tada između dolaska talašnog fronta do talaša A, B i C postoji
I siri sa brzином c₁, a u donjoj II brzинom c₂. Neka je c₁>c₂.

59.3



b. Prelamajte talaša

Navedeni zaključci predstavljaju zakone reflektije.

2. pravci upadnog i odbojnog talaša leže u istoj ravni.

1. upadni ugao a jednak je ugлу odbijanja (reflektije) B i

dje jednak, pa se može reći:

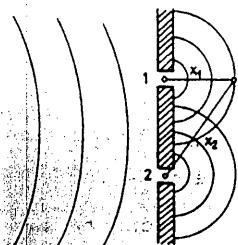
vi kod A" i C" su pravci. Pravci tome su i uglovi kod A i C tako-
su jednak po definiciji (jednaki predjeli putevi), a uglo-
mak ugla fronta odbijenog talaša pravači razni refleksije ABC jed-
ako je ugao fronta upadnog talaša od bija (reflektije) tako da
je ugao fronta odbijenog talaša je normalan na novi talašni front.
takvu C. Smjer streneva talaša je normalan na novi talašni front.
Na sljedićem, to je zalednička tangenta koja prolazi kroz
3. A. Novi talašni front je normalna elementima tala-
sa. Na sljedićem, to je zalednička tangenta koja prolazi kroz
čaka A i B podjelu streneva talaši do udaljenosti AC", odnosno BC".
odredjene vrijeme razmak. Dok talašni front dodje do C, iz te-
asnostiima A" B odnosno A" C talašnog fronta u C pravma onima u
asnostiima A" B odnosno A" C talašnog fronta do talaša A, B i C

i pukotini postaje izvor novog talasa koji zaobilazi prepreku.

59.3. Interferencija talasa

Ako se dva talasa sretnu u nekom delu elastične sredine, elongaciji delića će doprineti oba talasa i nastaje rezultujući talas kao superpozicija (zbir) dva primarna talasa. Kao rezultat ovakvog slaganja (interferencije) talasa često se javlja pojava da na nekim mestima delići osciluju jače, a na drugim slabije. Interferencija se javlja samo u slučaju slaganja talasa koji imaju stalnu faznu razliku. Ovakvi talasi se nazivaju *koherentnim*.

Radi jednostavnosti, posmatraćemo interferenciju dva koherentna talasa koji imaju istu frekvenciju i osciluju u istim pravcima. Ovakvi talasi se mogu, na primer, dobiti propuštanjem jednog talasa kroz dve pukotine (sl. 59.5).



Sl. 59.5

Posmatraćemo oscilovanje delića koji se nalaze na rastojanju x_1 od prve i x_2 od druge pukotine. Na osnovu izraza (58.2), jednačine primarnih talasa koji stižu do ovog mesta će biti

$$y_1 = y_0 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1); \quad y_2 = y_0 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2) \quad (59.2)$$

Faze ovih talasa možemo napisati u obliku

$$\phi_i = \frac{2\pi}{\lambda} x_i \quad (59.3)$$

Jednačinu oscilovanja uočene tačke dobijemo linearnim sabiranjem dva primarna talasa. Matematički ćemo ovo sabiranje najjednostavnije izvesti na taj način što ćemo oscilacije prikazati pomoću rotirajućih vektora \vec{y}_i , čiji je intenzitet jednak amplitudi, a ugaona brzina jednaka frekvenciji. U ovakvoj reprezentaciji se elongacija dobija kao projekcija vektora

\vec{y}_i na \vec{z}_0 osu (sl. 59.6).

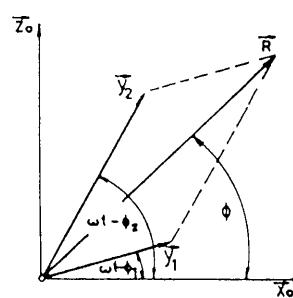
$$\begin{aligned} y_i &= \vec{y}_i \cdot \vec{z}_0 = y_0 \cos(\frac{\pi}{2} - \omega t + \phi_i) = \\ &= y_0 \sin(\omega t - \phi_i) \end{aligned} \quad (59.4)$$

Vektor koji predstavlja rezultantno oscilovanje \vec{R} dobijemo prema zakonima vektorske algebre

$$\vec{R} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \quad (59.5)$$

Dužina vektora R (tj. amplituda rezultantnih oscilacija) će biti

$$\begin{aligned} R^2 &\equiv R_0^2 = \\ &= 2y_0^2 |1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)| \end{aligned} \quad (59.6)$$



Sl. 59.6

Dobijeni rezultat pokazuje da amplituda oscilovanja uočene tačke ne zavisi samo od amplitude primarnih talasa, već i od njihove fazne razlike. Analiziraćemo uticaj fazne razlike na rezultujuću amplitudu. Ako medju talasima postoji fazna razlika

$$\Delta\phi = \pm 2k\pi (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (59.7)$$

rezultujuća amplituda će biti maksimalna

$$R_0^2 = 4y_0^2 \quad (59.8)$$

Fazna razlika (59.7) javlja se na onim mestima kod kojih je putna razlika

$$|x_1 - x_2| = k\lambda \quad (59.9)$$

Ako je putna razlika izmedju dva primarna talasa jednaka celobrojnom umnošku talasne dužine, amplituda rezultujućih oscilacija će biti maksimalna.

Ako je fazna razlika izmedju primarnih talasa jednak

$$\Delta\phi = \pm (2k + 1)\pi \quad (59.10)$$

ga potpuno ponisti, a ne da ga polarizacije.

ni ja poklapa sa pravcem prostiranja, pa prepreka moze samo da biti polarizovan. Ovo je i razumljivo jer mu se smjer oscilovanje prostiranju oscilacija. Znaci, longitudinalni talas ne moze crevati, onda dasice bez obzira na polozaj koji osciluju u pravcu njem, izazvali longitudinalne talase koji osciluju u pravcu Ako bi u crevu, nizmenjenim zatrzanjem i otpustata-

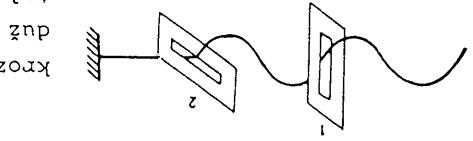
pukotinu opste re moze da projde.

pravcu pukotine. Ako lezi normalno na pukotinu onda talas kroz crev i pravac prostiranja talasa - polarizacija ravan - lezi u nu samo u tom sluazu, ako ravan u kojoj leze pravci oscilacija je talas linearno polarizovan on prolazi nesmetano kroz pukotinu transverzalni talas kazemo da je linearno polarisan. Znaci, ako nog crev, tako da se izazuje negativni smetnju oscilovanju gume- uta u gao 1/2, onda je ona znatno smetnju u polozaju i zaokre- lozaj 2, koji je u odnosu na prvu dasicu u polozaju postavljeni smetnje oscilovanju. Ako se druga dasica postavi u po- vresiti se paralelan oscilacija creva, vidimo da se negativni prve dasice u polozaju 1, ta- ko da je pukotinu oscilacija creva, vidimo da se negativni prve dasice u polozaju 1, ta-

SL. 59.7. (ravan crevna na slici). Postavljaj-

talas koji osciluje u jednom ravanu dasice formiraju transverzalni kroz pukotinu dasice se crevo provode neka se crevo provode rati transverzalni i longitudinalni.

Za razmernije polarizacije potrebno je ovaj oglled.

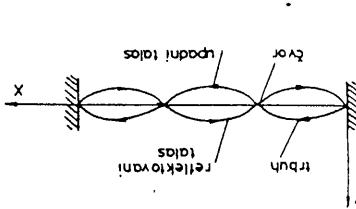


59.4. Polarizacija talasa

$$|x_1 - x_2| = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (59.11)$$

Parnom umnosku polovine talase duzinе.

dobijaju na onim mestima na kojima je putna razlika jednak ne- amplituda oscilovanja je biti jendaka nulli. Nulte amplitude se



a. Stojeci transverzalni talas

je kada se u njoj izazove transverzalna deformacija, priroda re- refleksija je u tom predstavljanju na krajevima (SL. 60.1).

Kada imamo zitnu refleksiju na krajevima (SL. 60.1) staje izvor novih talasa.

refleksiju predstavljanje talasa, pri demu takva refleksija po- i potoku je koherenčnih izvora. Stojeci talasi se ostvaruju i sivina talasa koji se kredu istim pravcem, a suprotnim smerom Stojeci talasi nastaju interferencijom dva progrete sivina talasa koji se kredu istim pravcem, a suprotnim smerom refleksiju predstavljanje talasa funkcija. Ako je neko odatle da budu situacija funkcija. Ata se talasa moramo bratit predma uslovima u kojima se vrsti oscilovanje. Ako se radi o biti uvezete među da dva krajia (dvorot na krajevima) predstavlja da se radi o stojecem talasa suprotiranog od dva progresa-

60. STOJECI TALASI

suprotnom fazom, superpozicija će ovde biti razlika dva talasa, što smo videli iz graničnih uslova. Naime u tački u kojoj je pričvršćena žica (koordinatni početak $x = 0$) elongacija je u svakom času jednaka nuli. Jedini način da to postignemo je da uzmemo razliku dva talasa, reflektovanog i upadnog

$$y = y_2 - y_1 = y_0 |\sin(\omega t + \phi) - \sin(\omega t - \phi)|$$

Uz korišćenje trigonometrijske relacije

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (60.1)$$

dobićemo sledeći rezultat

$$y = 2y_0 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t = A \cos \omega t \quad (60.2)$$

gde je $A = |2y_0 \sin 2\pi(x/\lambda)|$.

Superpozicijom smo dakle dobili novi talas, koji se, međutim, ne ponaša kao talasi što smo ih do sada upoznali. Za razliku od njih, talas prikazan izrazom (60.2) *ne putuje*. Vidimo naime, da kod novog talasa neke tačke uvek osciluju sa maksimalnom amplitudom, a neke uopšte ne osciluju. Te se tačke ne pomiču nego ostaju uvek na istom mestu. Zato takav talas zovemo *stojeći talas*. Tačke maksimalne amplitude zovemo *trbusima* stojećeg talasa, a tačke u kojima nema oscilovanja zovemo *čvorovima*. Iz izraza (60.2) lako se vidi da su trbusi tamo gde prostorni deo (sinusna funkcija $\sin 2\pi x/\lambda$) ima ekstremum, a čvorovi tamo gde je ta funkcija ravna nuli. Dakle, uslov koji određuje položaj trbuha (uz $k = 0, 1, 2, \dots$) je

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ odnosno } x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (60.3)$$

dok je uslov koji određuje položaj čvorova

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = 2k \frac{\pi}{2}, \text{ odnosno } x = 2k \frac{\lambda}{4} \quad (60.4)$$

Trbusi su dakle u tačkama neparnog multipla celog pozitivnog broja k i četvrtine talasne dužine ($x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4$ itd.), a

a čvorovi u tačkama parnog multipla ($x = 0, \lambda/2, 2\lambda/2, 3\lambda/2$ itd.).

Razmak izmedju dva susedna trbuha iznosi prema (60.3)

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2} \quad (60.5)$$

a izmedju dva susedna čvora prema (60.4)

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{4} \quad (60.6)$$

Znači, čvorovi i trbusi se izmenjuju naizmenično na rastojanju $\lambda/2$ (sl. 60.1). Rastojanje izmedju trbuha i čvora je $\lambda/4$.

Upadni i reflektovani talas daje dakle interferencijom stojeći talas. Tamo gde se amplitude talasa sabiraju (trbusi), interferencija je *konstruktivna*, a gde se poništavaju (čvorovi), interferencija je *destruktivna*.

Stojeći talas se ne kreće i prema tome ne prenosi nikakvu energiju. Kako postoje samo tačke koje uvek ili samo osciluju ili samo miruju, a to oscilovanje je uvek simetrično, rezultantni srednji tok energije kroz svaku tačku jednak je nuli. Stojeći talas, naravno, ima energiju, ali je ne prenosi iz jedne tačke prostora u drugu.

Razlika izmedju stojećeg i progresivnog talasa saстојi se u tome što progresivni talas ima amplitude jednakve veličine i dostiže ih periodično u vremenu (ne istovremeno). Amplitude stojećeg talasa su različitih dužina, ali se sve dostižu u istom trenutku vremena, pa zato izgleda da talas стоји.

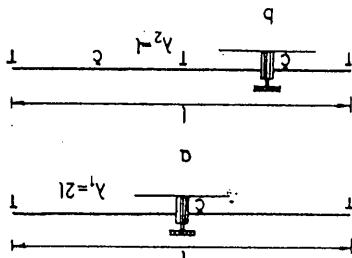
b. Stojeci longitudinalni talas

Analogno, kao kod transverzalnog talasa i kod longitudinalnog talasa doći će pri određenim uslovima do stojećeg talasa. Stojeci talas longitudinalnog talasa prikazan je pomoću uređaja prikazanom na slici 60.2. Dugačka spiralna opругa pričvršćena je čvrsto sa desne strane na zid (tačka A), a sa leve na vibrator koji osciluje uz pomoć ekscentra.

ječi talas biće dat sa na oba kraja opurge, izraz za sto- ni talas. Kako i ovde imamo čvor tputno analognu ono za transverzal- gog longitudinalnog talasa bice po- materijaka obrada stojeci

stap osciljije sljedećom višom harmoničkom frekvenciju $\nu = C/l$, prijevrsiti u takki koja odgovara petrini dužine (sl. 60.4.b), i dužina stapa, a c približna štirenja stapa u stazu. Ako se stap osnovna frekvencija oscilovanja stapa ednaka je C/l , gde je stojeci talas sa vodom u sredini i s trbušima na krajevima. Osnova prema kojom klasifikujemo dužinu ose, uspostavljene se podudamo (sl. 60.4.a), na primjer, trčanjem mokrom jelenom.

SL. 60.4



pri oscilovanju stapa. Ako stap prijevrsimo u sredini i onda stojeci longitudinalni talas može se posmatrati i

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$$

vezicija

gde je l dužina opurge, a k pozitivni celi broj. Svakom od ovih

$$\nu_1 = \frac{C}{l}, \quad \nu_2 = \frac{2C}{l}, \quad \dots, \quad \nu_k = \frac{kC}{l}$$

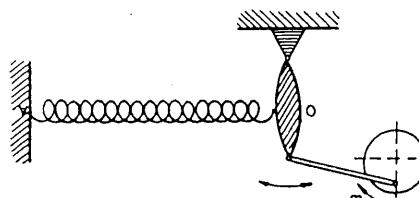
ili bilo koju vrdenost, nego samo one ordedjenje izrazima gde je l dužina opurge, a k pozitivni celi broj. Svakom od ovih

velastitih nadejna oscilovanja prispada ordedjena velastita frek- gde je l dužina opurge, a k pozitivni celi broj. Svakom od ovih

velastitih nadejna oscilovanja prispada ordedjena velastita frek-

nosti prenositi kao zgušnjavanje i razredjivanje zavojja opurge. Kad talas stigne na denst kraj, reflektuje se i superpozicijom s upadnutim talasom daje stojeci talas. Razlika je jedino u tome da mirovati, dok je u trbušima amplituda oscilovanja biti manji. Opet je postojati čvorovi, tj. tačke u kojima je spira- sto su na zici talasi bilj transverzalni, a ovde su longitudinalni. Kad talas stigne na denst kraj, reflektuje se i razredjivanje zavojja opurge.

SL. 60.2



opurge, koja harmonički osciluje. Oscilovanje se zatim po op-

$$y = 2Y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \cos \frac{\pi t}{T} \quad (60.7)$$

60.1. Uticaj graničnih uslova na talasnu dužinu stojećih talasa

Ako se stojeći talasi ostvaruju refleksijom na granicama elastične sredine, izmedju dimenzija sredine i talasne dužine stojećih talasa uvek postoji odredjena matematička povezanost. Ovu vezu ćemo ispitati na jednostavnim primerima sa jednom dimenzijom. Za refleksiju talasa važi pravilo da se faza talasa obrće pri odbijanju od sredine sa većom zapreminskom masom. U ovom slučaju se na mestu refleksije javlja čvor. Kada se talas odbije od redje sredine, faza se ne obrće i na mestu refleksije se javlja trbuš.

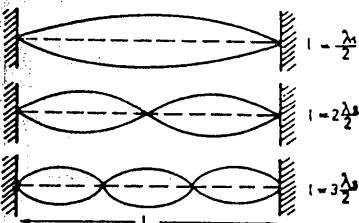
1. Oscilovanje žice utvrđjene na krajevima

U ovom slučaju se na krajevima elastične sredine javljaju čvorovi, te se na njoj mogu ostvariti stojeći talasi prikazani na slici 60.5.

Izmedju dužine žice i talasne dužine stojećih talasa postoji zavisnost

$$l = k \frac{\lambda}{2} \quad (60.8)$$

($k = 1, 2, 3, \dots$)



Sli. 60.5

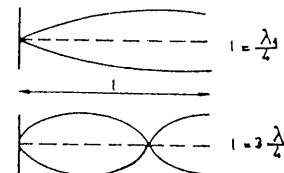
Za $k = 1$ kaže se da žica osciluje u osnovnom tonu, dok se oscilacije sa $k = 2, 3, 4, \dots$ nazivaju višim harmonikama.

2. Oscilovanje elastične šipke pričvršćene na jednom kraju

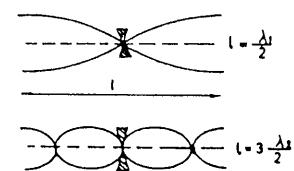
U ovom slučaju se na jednom kraju šipke stvara čvor, a na drugom kraju trbuš stojećeg talasa. Stojeći talasi na ovakvoj šipki su predstavljeni na slici 60.6.

Veza izmedju dužine šipke i talasne dužine stojećih talasa data je izrazom

$$l = (2k - 1) \frac{\lambda}{4} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (60.9)$$



Sli. 60.6



Sli. 60.7

3. Oscilovanje šipke pričvršćene u sredini

Kod ovako pričvršćene šipke na krajevima se stvaraju trbusi, a u sredini čvor stojećeg talasa, kao što je prikazano na slici 60.7.

Dužina šipke je povezana sa talasnom dužinom stojećeg talasa sledećom relacijom

$$l = (2k - 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (60.10)$$

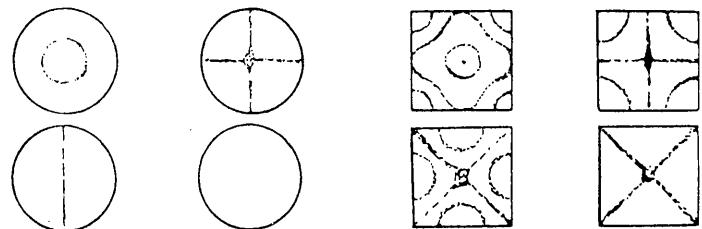
4. Oscilovanje vazdušnih stubova

Oscilovanje vazdušnih stubova principijelno je isto kao i kod štapova. U vazdušnim stubovima se mogu obrazovati samo longitudinalni stojeći talasi ukoliko se gas nalazi u cewima. Cev sa vazdušnim stubom može biti otvorena na jednom kraju (sl. 60.8) ili otvorena na obe krajeve (sl. 60.9). Izgled nastalog longitudinalnog stojećeg talasa prikazan je isprekidanim linijama. Vidimo da se kod cevi sa jednim otvorenim krajem uvek na otvorenom kraju formira trbuš, a na zatvorenom čvor stojećeg longitudinalnog talasa. Ovakav slučaj oscilovanja odgovara oscilovanju elastične šipke pričvršćene na jednom kraju, pa se na oscilovanje može primeniti jednačina (60.9) $l = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}$. Ako je cev otvorena na obe krajeve onda se na otvorima obrazuju trbusi longitudinalnog stojećeg talasa.

Zamjenom mesta čvorova i trbuha ovaj sljedeći može se svestiti na osnovu čijevi oscilovanje učice učvršćene na krajevima.

Na dva je vise pravaca, ovo oscilovanje je znatno složenije. Na pločama se obrazuje dvodimenzionalni stojeci talas, koji se može

SL. 60.10

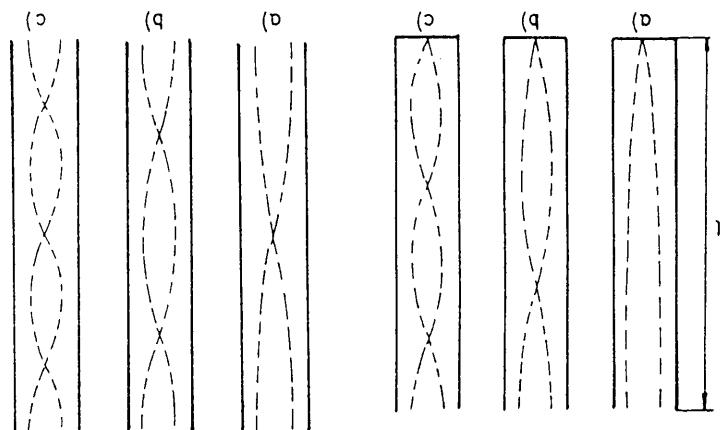


jača mogu takođe da osciliuju. Obzirom da se oscilacija vrše ploče i membrane napravljene od elastičnog materijala

5. Oscilovanje ploča i membrane

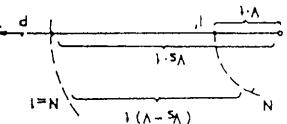
pa se na oscilovanje može primeniti jednačina (60.8) $\ddot{v} = \frac{k^2}{\rho} v^2$.

SL. 60.8



čijevi oscilovanje zice učice učvršćene na krajevima.

SL. 61.1



da je x_0 osa spađa posmatrača i izvor (SL. 61.1). Za $v > 0$ izvor
se kreće ka posmatraču, a za $v < 0$ se kreće od posmatrača. Prema tome
emitivana talasa će za vreme t premašiti izvor. Put v^2 , poslednji, N-ti
talas se u tom trenutku nalazi kod izvora koji je za vreme t
premašio put v^2 . Poslednji, N-ti
talas će u tom trenutku nalazi premašiti izvor (SL. 61.1). Za $v > 0$ izvor
se kreće ka posmatraču, a za $v < 0$ se kreće od posmatrača. Prema tome
ide x_0 osa spađa posmatrača i izvor (SL. 61.1). Za $v > 0$ izvor
(61.3).

$$\ddot{v} = Vx_0$$

Neka se izvor kreće u odnosu na sredinu ploče.

$$V_s = \lambda_s V_x$$

si od ploče izvora, već je određena gustinom i elastičnost
osobinama sredine. Ako sa V_s označimo frekvenciju talasa u sredini, ploču talasa možemo napisati kao

$$V_0 = \frac{v}{N}$$

ti. neka osciliuje sa frekvencijom

Neka talasi izvor napravi N oscilacija za vreme t,

a. Posmatrac miruje, a izvor se kreće u odnosu na sredinu

ili.

dva slučaja Doprerovalo efekta u neelativističkoj apriksimaciji, sredine koja prenosi talas i talasnoj izvora. Razmotriteemo talasa koji meri posmatrac zavisiti od relativne ploče posmatrača. Doprerovalo efektom se naziva pojava da frekvencija

61. DOPEROV EFEKT

na kvadrantim i kružnim pločama.

Na sljediću 60.10. prikazani su neki primjeri čvoranja. Jedan, jer na drugim mestima gde se vrši oscilovanje biva odbija, posebe lakin istinu parabom. Prav se skuplja na čvoranju linijski poslednji vidičiako se ploča postavi u horizontalni položaj,

fronta je, znači $(v_s - V)t$, te je talasna dužina u elastičnoj sredini

$$\lambda_s = \frac{(v_s - V)t}{N} \quad (61.4)$$

Na osnovu (61.2) i (61.4) dobijamo

$$v_s = \frac{v_s N}{(v_s - V)t} = v_0 \left(1 - \frac{V}{v_s}\right)^{-1} \quad (61.5)$$

ako je

$$\frac{V}{v_s} \ll 1 \quad (61.6)$$

(brzina izvora je daleko manja od brzine talasa) добићемо

$$v_s \approx v \left(1 + \frac{V}{v_s}\right) \quad (61.7)$$

Posmatrač registruje veću frekvenciju od v_0 ako se izvor kreće ka njemu, a manju ako se izvor udaljava od njega. Ovakvu pojavu može da primeti posmatrač koji sluša sirenu voza koji prolazi pored njega.

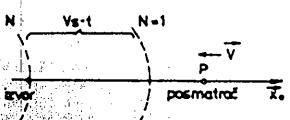
b. Izvor miruje a posmatrač se kreće u odnosu na sredinu

Predpostavimo da se posmatrač približuje talasnom izvoru brzinom $\vec{V} = -V\hat{x}_0$ (sl. 61.2).

Ka posmatraču se kreće N emitovanih talasa za vreme t , koji u prostoru zauzimaju dužinu $x = v_s t$. Brzina ovih talasa u odnosu na posmatrača je $v_p = v_s + V$, te svih N talasa stižu do posmatrača za vreme

$$\tau = \frac{x}{v_p} = \frac{v_s t}{v_s + V} \quad (61.8)$$

Prema tome, posmatrač meri frekvenciju



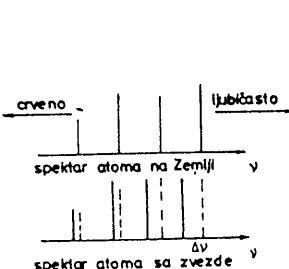
Sl. 61.2

$$v_p = \frac{N}{\tau} = \left(1 + \frac{V}{v_s}\right) v_0 \quad (61.9)$$

Vidimo da smo za slučajeve a. i b. dobili različite rezultate, što je posledica nerelativističke aproksimacije. U okviru relativističke teorije se za oba razmatrana slučaja dobijaju identični izrazi, te se na osnovu Doplerovog pomaka ne može ustanoviti da li se izvor ili posmatrač kreće u odnosu na sredinu.

c. Crveni pomak i kosmološka hipoteza velikog praska

Kako svetlost ima talasnu prirodu, Doplerov efekat se javlja i pri merenju frekvencije (boje) svetlosti. Poznato je da pobudjeni atomi emituju karakteristične linijske spekture i u spektru svakog atoma se mogu prepoznati određene karakteristične boje. Ako se vrsta atoma čiji smo spektar na Zemlji upoznali, nalazi na nekoj udaljenoj zvezdi, karakteristične linije u njegovom spektru će se pomeriti u zavisnosti od brzine zvezde u odnosu na Zemlju (sl. 61.3).



Sl. 61.3

Rezultati kombinovanih astronomskih merenja pokazuju da je relativan crveni pomak proporcionalan udaljenosti zvezde od Zemlje

$$\frac{\Delta v}{v} \approx R_Z \quad (61.10)$$

Ovi rezultati ukazuju na to da se brzina udaljavanja zvezda od Zemlje povećava sa njihovim rastojanjem od Zemlje. Navedeni eksperimentalni rezultati su osnova danas široko

a boju tona njegevoj vise
redjije osnovni harmonicki,
tenzitet. Visejnu tona od-
likuje visejna, boja i in-
62.1.b). Kod tona se raz-
zvuk se naziva ton (sl.).

nih visejih harmonika, takav
osnovne frekvencije i nje-

62.1.a). Ako je akustični spektar diskretn, tj. sastavljen od
sve frekvencije od v1 do v2), takav se zvuk naziva šum (sl.).

Ako je akustični spektar neprekidan (zastupljene

dejci na ton i šum.

spektar zvaka. U zavisnosti od karaktera ovog spektra, zvuk se
v2, v3, ... ovaj skup frekvencija oredjuje tzv. akustični

slaganja vise harmoničkih oscilacija čije su frekvencije v1,
prostog harmoničkog oscilovanja, već se javlja kao rezultat
zvaka, u opštem slučaju ne predstavlja prenosnje

iznad 20 kHz nazivaju se ultrazvuci tlačni ultrazvuk.

ispod 20 Hz nazivaju se infruzvuci tlačni infruzvuk, a oni
će se od oko 20 Hz do oko 20 kHz.

Talas je frekvencija u zvuku kroz koju se ostvarjuju sluhu kre-
nasem uhu. Osege frekvencija kroz koju se ostvarjuju u

vazduha i ono kao promena pritisaka deštive i razredjivanje
čilacije izazivaju naizmjenično zgušnjavanje i razredjivanje

zvucnih izvor se uvek nalazi u stanju oscilovanja. Njegove os-
dina kroz koju se zvuk prenosi. Za vreme dok proizvodi zvuk

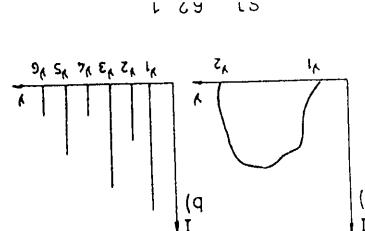
se akustika. Da bi nastao zvuk, potrebam je zvučni izvor i sre-
dišta opšteh fizikalnih zakona, a oblast koga to proučava naziva

centrino zvučne pojave. U fizici se ove pojave posmatraju sa gled-
večijeg uha naziva se zvukom. To je fizioloski osegač po kojem

dini, najčešće vazduhu, koga kao talasno kretanje dolazi do eo.
Mechanik oscilovanje u bilo kojoj elastičnoj sre-

62. ZVUK

XIII AKUSTIKA



se naziva "polupravikom sumnja". Sem navedenog, hipoteza velič-
stavačka ima još značajniju eksperimentalanu potvrda i pre-
stavlja nadjprihvatljivu teoriju o nastanku svemira.

$$ct = R^{\frac{1}{2}} \quad (61.12)$$

Kako se u svemiru ni jedno telo ne može kretnati
većom brzinom od brzine svetlosti c, provizord

tekući od trenutka veličke praska. Zato se u okviru ove teorije
je galaksija brzine vospreda na rasponje $R^{\frac{1}{2}}$, tj. vreme pro-
gde je $t = 10^{10}$ godina. Ovičledno i predstavlja vreme za koje
vazdušna stresedna univerzuma.

$$R^{\frac{1}{2}} = vt \quad (61.11)$$

zvezda i galaksija dobijen je empirijski zakon
vanjem merenja rasponja i Doplerovog efekta za veličinu
u saglasnosti sa rezultatima merenja crvenog pomaka. Kompano-
najveću udaljenost dospeći delovi sa nadjvećom brzinom, što je
početne brzine, koga su zadrzale i do danas, stalno se uđaju-
ko nastale materije su u trenutku stvaranja dobijali različite
kolosalnom eksplozijom jedne jedine tacke prostora. Delovi ova-
ja tvrđi da je celokupna visejna koga dana posmatramo nastala
prihvocene kosmoloske hipoteze veličke praska ("big bang"), ko-

harmonici. Ton čija je osnovna frekvencija mala, izaziva osećaj niskog tona (bas, bariton). Ako je frekvencija osnovnog tona velika, ovaj ton će biti visok (sopran).

Brzina prostiranja zvuka dobija se prema obrascima (58.12) i (58.13) kao brzina prostiranja longitudinalnih talasa. Prema tome, za čvrsta i tečna tela važi da je brzina $c = \sqrt{E/\rho}$, a za gasove $c = \sqrt{\rho k / \rho}$. Kako se zapreminska masa ρ kod gasova u znatnoj meri menja sa temperaturom, to se menja i brzina c . Brzina na nekoj temperaturi t može se izračunati preko relacije

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

gde je c_0 brzina zvuka na 0°C . Jasno je da brzina zvuka u gasovima zavisi i od pritiska p . Prema relaciji za brzinu zvuka u čvrstim i tečnim telima može se izračunati modul elastičnosti nekog tela ako se izmeri brzina zvuka u tom telu. Isto tako rastojanja izmedju tela u prirodi, dubina mora, udaljenost plovnih objekata i dr. može se meriti pomoću brzine za koje se echo nekog signala vrati.

Ostale osobine zvuka, kao što su interferencija, difrakcija, stopeći talasi, Doplerov efekat i dr., odredjene su u okviru opštih osobina mehaničkih talasa.

62.1. Jačina zvuka. Jedinice

Jačina (intenzitet) zvuka I definiše se kao energija koju u jedinici vremena prenese zvučni talas kroz jedinicu površine normalnu na pravac prostiranja talasa. Kako uho, a i drugi instrumenti, ne reaguju na sam pritisak p već na promenu pritiska Δp , jer se pri prostiranju zvučnih talasa elastična sredina zgušnjava i razređuje, to je jačina zvuka kroz gas povezana sa amplitudom oscilovanja pritiska Δp relacijom

$$I = \frac{(\Delta p)^2}{2\rho v} \quad (62.1)$$

gde je ρ zapreminska masa (gasa), a v brzina zvuka.

Jedinica za jačinu zvuka je W/m^2 .

Često se radi širine područja, u kojem se meri jačina zvuka I , umesto same jačine zvuka definiše nivo šuma (buke) L relacijom

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (62.2)$$

gde je I_0 proizvoljna referentna jačina zvuka uzeta kao

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

što odgovara odprilike najslabijem zvuku koji osetljivo uho može čuti (granica čujnosti). Jedinica za nivo šuma zove se decibel*, a obeležava se sa db . Decibel je bezdimenziona jedinica definisana relacijom (62.2). Zvuk čija jačina iznosi 10^{-12} W/m^2 ima dakle nivo šuma od 0 decibela; zvuku jačine 1 W/m^2 odgovara nivo šuma od 120 decibela itd. Nivoi šuma za neke tipične zvuke dati su u sledećoj tablici:

IZVOR ŠUMA	NIVO ŠUMA (db)
granica čujnosti	0
šuštanje lišća	10
šaputanje	20
tiho sviranje radija u kući	40
običan govor	65
gust ulični promet	70
udaranje čekićem po nakovnju	95
granica bola	120

Zanimljivo je uočiti da ljudsko uho čuje različito tonove koji objektivno, prema relaciji (62.2), imaju istu jačinu. Moramo

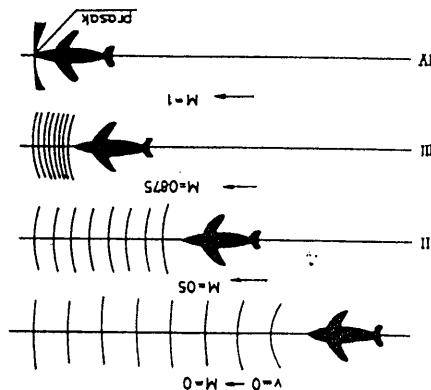
* Ranije je nivo šuma bio definisan u belima relacijom (62.2). Kako se ta jedinica pokazala prevelikom, uveden je decibel. Ime bel dobila je jedinica po Alexandru Grahamu Bellu (1847-1922), američkom fizičaru, izumitelju telefonijske.

obliku slova U) (sl. 62.4.a) udari, na njenim krajevima se ja-
ako se zvuka viliška (čelična šipka savijena u

zonančije razmotrićemo u slučaju zvuknih talasa.
ki sistem osciluje sa maksimalnom amplitudom. Ovaj efekat re-
zultira sponstvenoj frekvencijskoj mehaničkoj sistemu. Tada mehanič-
ki je da ista nastaje ako je frekvencijska prilunda sile je-
dakako sponstvenoj frekvencijskoj mehaničkoj sistemu. Tada mehanič-
čeno je da ista nastaje ako je frekvencijska prilunda sile je-

62.3. Rezonancija u akustici

SL. 62.3



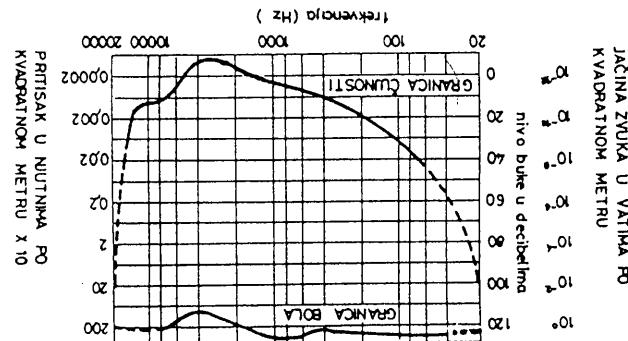
talasa za razlike vrednosti M .
ne zvuka. Na slici 62.3. prikazano je nagomilavanje zvuknih
a Machov broj 2 ako može postići dva puta veću brzinu od brzi-
a Machov broj 1 ako može postići dva puta veću brzinu od brzi-
priimek, avion ima Machov broj 1 ako može postići dva puta veću
meri. Machov broj je adme izmedju brzine atoma i brzine zvuka. Tako, na
Macroatom brojem (M), a aparat za pokazivanje brzina zvou se maho-
va zvukom udar. Iz tih razloga brzina aviona se izazava i tzv.
nom se zauže duka slična strahovitom udaru groma. To se naz-
pozemegon i pretvara se u zvukni talas. Istovremeno pod avio-
treneku snazan pritisak vazdušnog talasa na klijunu aviona je
dačje rezultirajuemo instrumentima. Iako subjektivna jačina raste
koju registrujemo instrumentima, jačina zvuka je ujedno i objektivnu

1200 km/h avion dostiže brzinu zvuka i probija barjeru. U tom
zid ili barjeru komprimovanog vazduha pred njim. Sa održiće
tiskivanje vazdušnih talasa jedne na drugu, dok se ne stvoriti
javiči ispred aviona. Sa površinom vazduha struji oko profila po-
krilo vrši pritisak na vazduh z bogatog zraka talas zgnutog vazduha
zina od brzine zvuka broda koji plovi). Kod zrana manjih br-
ne gledajući s pravca broda koji plavi). Kad zrano sobom i sa stra-
sim (sljedno talasima koji se može videti pred sobom u tala-
kad avion leti, potiskuje pred sobom vazduh u tala-
barjeru.

udara koji nastaje prilikom probijanja zvunog zida ili zvunog
zvuka (nadzvučnim brzinama) javlja se narodita pojava zvunog
kod aviona koji se kreću brzinama većim od brzine

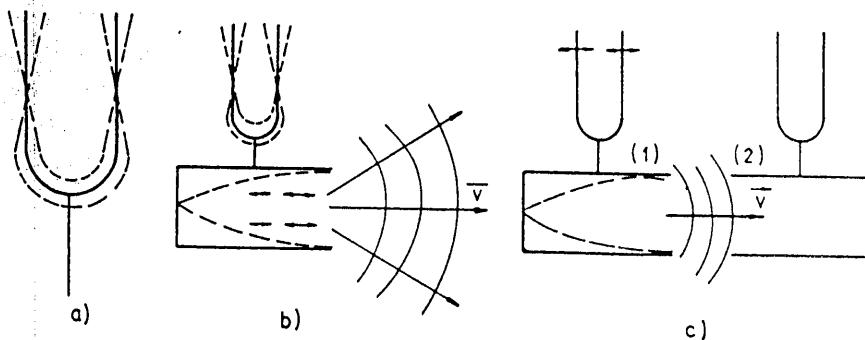
62.2. Zvuna barjera

SL. 62.2



62.2. Zvuna barjera
medju granice ujnosti i granice bole prikazana je na slici
sa objektivnom, ta zavisnost nije linearna. Područje zvuka iz-
dačje rezultirajući jačinu zvuka, koji je način objektivnu

vljaju trbusi transverzalnog stojećeg talasa od kojih je jedan

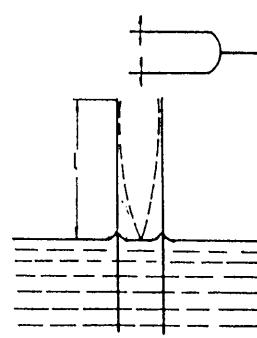


Sl. 62.4

prikazan na slici. Izmedju ta dva trbuha nalaze se dva čvora, a na donjem savijenom kraju viljuške opet se nalazi trbuš talasa. Na tom mestu je utvrđena drška koja se pri oscilovanju viljuške diže i spušta. Ako se zvučna viljuška stavi na ploču stola tako da njena drška dodiruje površinu stola oscilacije će se prenositi i na sto. Oscilacije koje izaziva zvučna viljuška u ploči stola su prinudne oscilacije, jer je ploča priznudjena da osciliše u ritmu u kojem osciliše sama viljuška. Isti efekat dobiće se ako se zvučna viljuška stavi na gornju stranu rezonatora (kutija koja je otvorena sa jedne strane) (sl. 62.4.b). Pod njenim uticajem u vazdušnom stubu rezonatora obrazuje se stojeći talas. Ako je frekvencija oscilovanja zvučne viljuške jednaka osnovnom tonu ili nekom višem harmoniku rezonatora nastaje efekat rezonancije. U ovom slučaju se zvuk viljuške čuje više puta pojačan, jer je viljuška manje površine od rezonatora. Ulogu prinudne sile ovde ima zvučna viljuška, a mehanički sistem na koji ona deluje je rezonator. Pored navedenog primjera za rezonanciju navešćemo još jedan. Dve zvučne viljuške iste frekvencije sa rezonatorima postave se jedna prema drugoj, kao na slici 62.4.c. Ako jedna od njih osciliše, onda će putem zvučnog talasa od rezonatorskog sistema

ma (1) doći do rezonantnog oscilovanja vazdušnog stuba i viljuške sistema (2), tako da je postignuta veza ova dva sistema. Ako viljušku sistema (1) dodirnemo rukom da bismo zaustavili njeni oscilacije, čućemo da druga viljuška i dalje zvuči.

Akustička rezonancija može da se postigne, takodje, pomoću zvučne viljuške i vazdušnog stuba, čija visina može da se menja (sl. 62.5). Oscilacije zvučne viljuške pobudjuju na oscilovanje vazdušni stub u cevi.

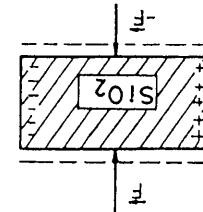


Sl. 62.5

instruments. Tako violine, gitara i dr., imaju rezonatorsku kutiju sa otvorom prema žicama, kako bi se osnovni ton i svi viši harmonici pojačali. U zavisnosti od tog pojačanja violina ili gitara je manje ili više kvalitetna. Kod saksofona i trube ulogu rezonatora igra levak i vazdušni stub u njemu.

62.4. Ultrazvuk

Ultrazvukom nazivamo područje longitudinalnih oscilacija frekvencije iznad 20 kHz, koje ljudsko uho više ne čuje. Premda nema principijelne razlike između zvuka i ultrazvuka, ipak činjenica da ultrazvučni talasi imaju veoma visoku frekvenciju oscilovanja daje ultrazvuku posebna svojstva. Najčešći je način dobijanja zvuka pomoću tzv. piezoelektričnih i magnetostrikcijskih metoda.



potencijski u magnetostriktivni generator u kojem se izazivaju pr-sipka neprestano nosi (i iznos) u magnetnoj polje, ona se ova polava nazvana magnetostriktivom. No, umesto da se takva materijali u jake magnetnom polju uglavnom skragaju, pa je mo u jake magnetno polje. Ustanovljeno je, namen, da se ovakvi ferromagnetični materijali kao sto su, na primjer, gvozdje, klobati, trazvuka je metoda magnetostriktivne. Uzene je polava da neki trazvuka omogućuju da se dešovi ljudskog organizma posmatraju na ultrasonogramu. Deناس se vrši eksperimenti lečenja gluvog i u tehnici se ultrazvuk primenjuje za aktivaciju su- raka primenom ultrazvuka.

teku, količi u mraču, te obilazi svaku prepreku. Nadjeno je tek 1945. godine da objasne let i dobro orijentacijsu sljepog granicu čunjnosti daleko veću nego dovek, a biologima je uspeo neke životinje, kao na primjer psi, imaju goranju

kratnog varenja metala, za merenje morskih dubina itd. Pljuna u metalu, za sprijavajuće varova kod autogeneraži u tehnici se ultrazvuk primenjuje za aktivaciju pro-

streti, pod kožu bez ostređenja tkiva. Releksiona svesna uode lekovit pod kožu bez oboleženja tkiva. Ultrazvuk ne deluje streno na bolesti i životinjski organizam. Ultrazvuk premanija lekovita, postoji raspršava vlastiku prihvatu kođe razvija mučacije. Danas ultrazvuk ima veliku primenu kod prizvaja razrađuju crvena krvina zraca, ubijaju mikroorganizme i ziva mnoge biloške, hemijske i fizikalne promene. Ultrazvuni teže ultrazvuk posleduje mnoge hemijske reakcije, te izaziva mnoge karakteristika ultrazvuka proizasla

je negova vlastika prima u tehnici, a narodito u medicini. Upravo iz ovih karakteristika ultrazvuka proizasla razliku od čunjnog zvuka, i ja je apsorpcija ovde relativno slaba.

razlike od čunjnog zvuka, i ja je apsorpcija ovde relativno slaba. druga strane, gasovi ovaj zvuk veoma intenzivno apsorbuju, a punu zvuk visokih frekvencijsa, a mnogo lakše čujni zvuk. Sa 3. tehnosti, narodito voda, relativno slabu apsor-

canja izvenskih materijala; snopova i mole se lako fokusirati, pa i reflektovati na granice i lase se smjeravati u okređenom pravcu u vidu uskih mnogo bolje i lakše usmjeravati, ovaj zvuk se može

vezati sa tim i lase se mnogo manje od čunjnog zvuka; 1. negove frekvencije su neuportedivo veće, pa u odlikuje specijalnim osobinama:

ultrazvuk se, inče, u poređenju sa čunjnim zvukom, potiče elastična deformacija usled elektro-

trina polarizacija (sl. 62.6).

potencijski u magnetostriktivni generator u kojem se izazivaju pr-sipka neprestano nosi (i iznos) u magnetnoj polje, ona se ova polava nazvana magnetostriktivom. No, umesto da se takva materijali u jake magnetnom polju uglavnom skragaju, pa je mo u jake magnetno polje. Ustanovljeno je, namen, da se ovakvi ferromagnetični materijali kao streljivo da menjaju svoju dužinu ako ih unosi- jedna od veoma povoljnich metoda za dobijanje ul-

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{3300} = 2,0,002 = 1,325 \text{ MHz}$$

ako na plastiči vlastada napon frekvencije za plastičnu debeljinu $\lambda = 2 \text{ mm}$ rezonantna frekvencija postoji brzina zvuka u kvarcu iznos $c = 5300 \text{ m/s}$ to je, na primjer, cijeli je i prizvodi ultrazvunice talasne amplitude. Kako zonanicija. U tom slučaju, usled rezonancije, plastičica jaka osnovna (mekanikom) frekvencija zvuka nastupa rezonancija. Kada se frekvencija rezonančnog zvuka na poljotu sa sponstve- SL. 62.6 u kojiji se nalazi mehaničke oscilaci- cije, a inje da osciluje i stvara u sredini deluje i samo polje, tj. kvarc po- debeljini istom frekvencijom kojim plastičica od kvartače je menjati svoju visoke frekvencije. U ovakvom polju se postiže obimni efekat stavljajući em plastično do njemu slijom, može- trična polarizacija (sl. 62.6).

silom izvrsi elastična deformacija usled elektro- krištala, kao kvart, senjtova so i dr. (zgaduo orezanim) piezoelektrični efekat je polava da se na nekih silom izvrsi elastična deformacija usled elektro- krištala, kao kvart, senjtova so i dr. (zgaduo orezanim) silom izvrsi elastična deformacija usled elektro- krištala, kao kvart, senjtova so i dr. (zgaduo orezanim)

da se slepi miševi orijentišu pomoću zvuka koji sami proizvode. Najintenzivniji tonovi koje oni proizvode leže baš u ultrazvučnom području (izmedju 35 i 70 kHz) te se ovi odbijaju od predmeta i time upozoravaju slepog miša da se u blizini nalazi prepreka.

62.5. Akustičnost dvorana. Akustični filtri

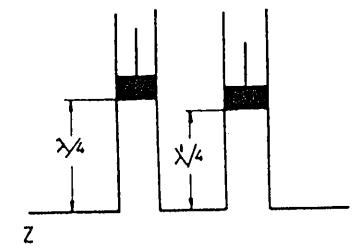
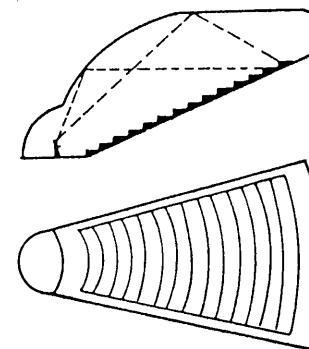
Ako se izvor zvuka nalazi u zatvorenoj prostoriji, slušalac neće čuti samo zvukove koji dolaze direktno iz izvora, nego i sve one koji su u uho došli nakon refleksije od zidova prostorije. Intenzitet reflektovanog zvuka zavisi od veličine i oblika prostorije, a isto tako i od materijala od kojeg su načinjeni zidovi.

Ako izvor kontinuirano emituje zvučne talase, tada refleksijom može nastati stojeći talas. Neka mesta u prostoriji podudaraće se sa čvorovima, a neka sa trbusima stojećeg talasa. U nekim će se, dakle, mestima zvuk čuti jače, a u nekim slabije. Kako pak različiti materijali različito reflektuju talase raznih frekvencija, zvuk koji će se čuti u dvorani imaće ne samo izmenjen intenzitet, nego i promenjenu boju, koja, kao što znamo, zavisi od kombinacije viših harmonika.

Da bi se sprečila pojava deformacija zvuka zidovi se pokrivaju materijalom koji manje reflektuje, a više apsorbuje zvučnu energiju. Tako, na primer, u koncertnim dvoranama orkestar je smešten u naročitoj školjki koja ima oblik paraboličnog ogledala (sl. 62.7). Svod dvorane je zaobljen zato da bi reflektovani zvuk došao do poslednjeg mesta u dvorani, gde su sedišta smeštena amfiteatralno.

Katkada je poželjno da se u dатој mešavini tonova isključe, odnosno oslabi, određena frekventna (tonska) područja, dok se ostatak zvuka slobodno prenosi. Najčešće se smanjuje jačina visokih frekvencija, čime zvuk dobija u mekoći. Princip delovanja akustičnog filtra prikazan je na slici 62.8. Taj princip se zasniva na delovanju stojećih talasa. Zvuk iz izvora

prolazi kroz cev Z, na koju su normalno postavljene začepljene



Sl. 62.7

cevi različite dužine. Zvuk se od čepa reflektuje i vrti u cev, gde interferira sa upadnim talasom. Neka je λ talasna dužina tona koji želimo da oslabimo. Razmotrimo slučaj kada se čep u normalnoj cevi nalazi na udaljenosti $\lambda/4$ od cevi kojom prolazi zvuk iz izvora. Dodatni put koji predje reflektovani talas iznosi $(\lambda/4) + (\lambda/4) = \lambda/2$, tj. reflektovani talas nadje se u protivfazi s talasom zvuka iz izvora. Tako ta dva talasa slabe. Kroz cev Z će dakle proći zvuk u kojem će dati ton (frekvencija) biti znatno oslabljen, odnosno, ako je refleksija bila približno potpuna, onda gotovo poništen.

TERMOFIZIKA

286

ljenog celi (sl. 63.1). Taj se instrument sastoji od staklenege
Najobitaniji termometar je onaj sa tehnologiju u sklopu
če se koristi u oblasti visokih temperatura.

termometar) vrlo su postojani, ali imaju malu taknost i najčeš-
tije su tropski. Termometri napravljeni od vrvistih tela (metali
termometri sa teknosću (Hg, alkohol i dr.) praktični su i pri-
težom. Gasići termometri (H_2 , He) su vrlo osjetljivi i tanki.
metri. Oni se delje na termometre sa gasom, teknosću i vrvistim
uxedjaji koji su se mjeri temperaturna zarađuju se tempro-
ma koristi se za merenje temperature u okređenom intervalu.
utopci, boja usijanog vlakna itd. Svi navedenim osobinama
premijina tehnost, pritisak gasea pri statiku zapremini, lektrič-
koje se menjaju sa temperaturom su, na primjer, dužina šipke, za-
u posebnih polozaja. Takeve jednostavne mjerljive fizikalne
na, tj. telo se povratkom na početnu temperaturu mora vratiti
dužinu elastične optuge i sl. Ta osobina mora biti i reverzibil-
sile upotrebljiti osobinu tela koja se menjala sa silom, na primjer,
koje se menjaju sa temperaturom, silino kao što smo za merenje
ture moramo da klete pronadji neke mjerljive fizikalne tele
utvrđimo eksaktnu metodu za njeno merenje. Za merenje tempera-
premet da lje razmatranja, miemo se za sada zadovoljiti da
njene merenje. Dok je eksaktna definicija pojma temperatute
jam temperatute moramo tada definisati i pronadji metodu za
kao osnovna način u Internacionom sistemu (IS) mera, po-
zarejanosti nekog tela vana fizika veličina, čija se jedini-
raturoma. Kako je temperaturna, tj. stepen topлотnog stanja lje
liko veća ukoliko se radi o veoma visokim i veoma niskim tempe-
je procena izvrsena na bazi fizioloskog oseljaja. Greska je u to-
na temperaturu našeg tela. Pri tome možemo i da pogresimo, jer
redimo stepen topлотnog stanja lje zarezjanosti tela u odnosu
ono vrelo, toplo ili hladno. Pri tom ocenjujani mi istvarili po-
kad dodirnemo neko telo, možemo da kazemo da je

63.1. Temperatura. Termometri

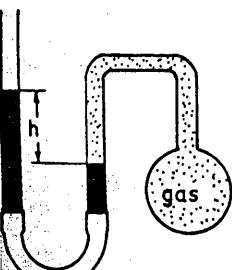
I TEMPERATURA I TOPLOTA

287

dopusta, ali sa daleko manjom (češto zanemarljivo) erovano-
pri spajanju tela sa raznim temperaturama. Statistička fizika
takve fizike ovaj zakon previdja samo najverovatniji proces
pravan akro se posmatra veliki broj molekula. Sa stanovaštva sta-
ki zakon koji glasi: "toplotna prelaz u toplofleg na hidratne telo" is-
stanovaštva statističke fizike. Tako je, na primjer, termodinamika
strogoj zakonima termodinamičku prelazu sa mikrofizičkom stanov-
mikrofizičkoj stanovštvi. Naime, proces koji se oviđaju prema
kazano da termodinamicki zakoni mogu svoju opravdanost i sa
da odgovara užičkoj mikrofizičkoj veličinu. Na ovaj način je po-
fizike se makrofizičke veličine povezuju sa rednihim rednos-
sprovesti strogo mehanički determinizam. U okviru statističke
da se sistem jestičica nadje u okređenom stanju i ne može se
todata. U okviru ovih metoda se može izraziti samo verovatno-
se problem kretanje velikog broja estičica opisuje statističkim me-
mogu okređiti, a i matematička slожnost problema zatvara da
se radi o ogromnom broju estičica njihovi početni uslovi se ne
sovitoj fazai može opisati zakonima klasione fizike. No, kako
masa, brzina itd. u principu se kretanje svakog molekula u ga-
veličine objasne pomocu osobina pojedinich molekula kao što su
sne sa mikrofizičkog aspekta, te da se makrofizičke mjerljive
ma, logično se javila težnja da se termodinamicki zakoni obje-
se materija sastoji od velikog broja delića, molekula ili ato-
ne povezuje ih sa strukturon materije. No, kada je dokazano da
kroz fizičke koje je nazvana termodinamika. Ona operiše sa ma-
kuška struktura materije. Sva ova otkrivena rezultirala u
ki rad okrivljen je pre nego što je bila pozantata atomsko-mole-
izučavanjem toplotnih pojava. Veliki broj zakonitosti poveza-
ki radi sa primoredajom toplofleg i prevaranjem toplofleg u mehanič-
Deo fizike sa kojim smo se sada upoznati bavi se

rezervoara koji je vezan sa uskom staklenom kapilarom konstantnog preseka. U rezervoaru se nalazi tečnost, po pravilu živa ili obojeni alkohol (za niske temperature). Kapilara je evakuisana, a njen gornji kraj zatopljen. Skala uz kapilaru služi za merenje temperature. Pri zagrevanju tečnost se više širi od stakla, te male promene zapremine tečnosti u rezervoaru prouzrokuju znatne promene nivoa tečnosti u kapilari. Ako je širenje tečnosti proporcionalno temperaturi, onda će promena nivoa tečnosti u kapilari biti srazmerna promeni temperature. Gornje granice mernog intervala kod termometra sa tečnošću su ograničene tačkom ključanja tečnosti. Da bi se povećao merni opseg, odnosno povećala temperatura tačke ključanja tečnosti u termometru, u prostor iznad tečnosti se ubacuje gas pod visokim pritiskom.

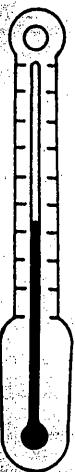
Sl. 63.1



Sl. 63.2

Sem opisanog termometra u upotrebi su i druge vrste termometara zasnovane na različitim principima. Nabrojaćemo neke od njih bez detaljnije analize, jer će ista biti trećirana u odgovarajućim poglavljima.

Gasni termometar. Ovaj termometar zasniva se na osobinama širenja gasova pri zagrevanju. Izgled gasnog termometra sa konstantnom zapreminom prikazan je na slici 63.2. gde je sud sa gasom vezan za živin manometar. Radi održavanja stalne zapremine gasa, koji se pri zagrevanju širi, jedan kraj manometra je pokretan čime se može nivo žive u drugom manometarskom kraku uvek dovesti na isti početni nivo. Kod ovih termometara promena pritiska gasa sa temperaturom je pravilnija nego kod širenja

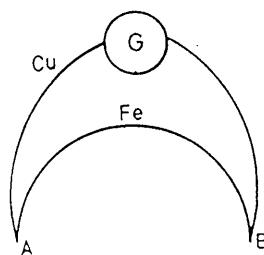


tečnih tела. Stoga gasni termometar ima veliku pouzdanost. Osnovni parametar kod gasnog termometra je pritisak date količine gasa pri stalnoj zapremini.

Metalni termometar. Kada se dva metala različitih koeficijenata širenja spoje tako da čine jednu pravu šipku (bimetalični štap), onda se ova šipka pri promeni temperature krivi i to tako, da pri zagrevanju metal sa većim koeficijentom širenja dodje sa spoljašnje strane krivine (ispupčena strana). Pri hladjenju se dogadja obrnuto. Bimetalični termometar koji funkcioniše na opisan način prikazan je na slici 63.3. Ovakve bimetalične šipke (gvoždje i cink, ili čelik i mesing itd.) služe, pored merenja temperature i za regulisanje temperature u raznim aparatima koji se zagrevaju električnom strujom (bojler, štednjak, pegla i dr.).

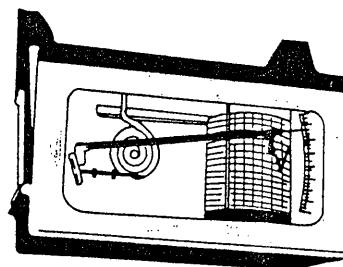
Sl. 63.3

Termoelement. Kada se dva različita metala, na primer, gvoždje i bakar, vežu u kolo kao na slici 63.4., pri čemu sa slojevi A i B na različitim temperaturama, onda će kroz kolo (termospoj) teći struja koju pokazuje galvanometar. Jedan spoj termoelementa (npr. spoj A) drži se na stalnoj temperaturi (smeša vode i leda), a drugi spoj (spoј B) u sredini čija se temperatura meri. Skala galvanometra izbaždarena je tako da odmah očitavamo temperaturu. Termoelementi omogućuju precizno merenje temperature.



Sl. 63.4

Pirometri. Pirometri su instrumenti koji mere temperaturu na principu detektovanja zračenja zagrejanog tela pomoću termoelementa. Intenzitet zračenja raste sa temperaturom. U praktici se koriste i optički pirometri, čiji se rad zasniva na činjenici da

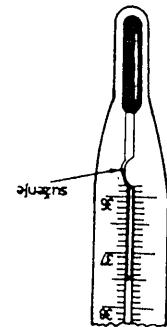


izmetravaju služi termograf (sl. 63.6). On se sastoji od spiraLINE za crtanje digitalnog termodrama temperature u nekom vremenskom

času sa sobom stапиće zbrog površinskih napona. Kada temperatura pada alkohol povlači se iz stапићa, a kada temperatura raste, alkohol prolaže u stапић. Kad temperatura raste, alkohol se razvija i maskimalan termometer, samo je punjen alkoholom i u njemu se razvija konstrukcija na isto vrijeme. Takav je termomjer konstrukcijom načinju teperature u nekom proteklom vremenu. Načinjuje termomjer pokazuje

termometar (sl. 63.5).

Načinjuje konstrukciju je i lekarski ovom principu rezervor. Na stala živa u čevi vratiča u rezervor. Na termomjer se mora stresiti kako bi se zao-terenacijonalnom sistemu jedinica temperatura se mjeri u apsolutu-temperaturu. Pri ponovnom merenju načinjuje termomjer. Zatočaći stabljični pokazuje svučinu prekine. Hladjenju, živa u rezervoru se skupi a hladjenju, prije rezervora cev je suzena, tako da izlazi sluzi nam maksimalni termomjer. Kod ovog termomjera na vaku toku 24 časa, što je narodito važno u meteorologiji. U tu svrhu tij najveću temperaturu u nekom vremenskom razmaku, na primjer, u maksimalni i minimalni temperaturi. Često je potrebno zna-



či da je frekvencijska najintenzivnije delja spektra toplotnog zračenja razmjerena temperaturi (vidi 63.33).

bar i matematičar, posao po radiotraču u termodijsinici i elektronagraditizu. William Thomson, lord Kelvin (1824-1907), engleski fizik,

radio se izradom meteorooloških instrumenata. Izumitelj izvinog termometra. Gabriel Daniel Fahrenheit (1686-1736), nemacki fizik,

izdava, jedan od osnivača metalografije. René Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757), francuski fizik,

jedinstvo za temperaturu - nazvana Celsiusova stepen (°C). Nade nulu. Podzemou ovog nastojanja na 100 jedinica dolaska razlike je oblikovalo je temperaturu kliničku vode brojem 100, a temperaturu maznih Anders Celsius (1701-1744), švedski fizik i astronomin,

Pokazalo se da za razne gaseove ekstrapolisanje krizi

prekazan na sljedi 63.7.

medju pritiskom Pa i Pm. Kao rezultat merenja dobijeno građevine sve dok u termomjeru možemo registrirati bilo kakvu razliku iz-evačišta i merenje ponoviti. Ovakva merenja čemo ponavljati

ki klinička vode (Pa). Nakon toga čemo termomjer deljimo i mrežemo pritiskak gase na takki razinjenja vode (Pm) i na tak-

termomjer čemo hapuhiti i redjenom koljicnom gase

metra (sl. 63.2) izvedemo sljedeći eksperiment:

ovakve temperaturske skale možemo doći ako pomognemo gashnoj noj klevinovo] skali i izrazava se u jediniciama Kelvin (K). Do

terenacionalnom sistemu jedinica temperatura se mjeri u apsolutu-peraturu umesto ovih, projekcionih temperaturskih skala, u In-

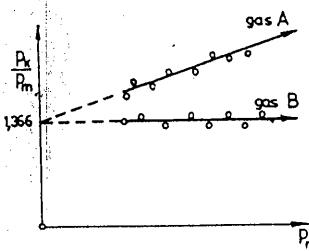
mirova, Farenhajtova[***]. Da bi se jednostavnije merila, tem-ture predlagane razlike skale i jedinice (Celsiusova, Reo-

sa od ostalih fizikalnih pojava. Zbrog togda su za merenje tempera-

Dugo se smatrao da je temperatura veličina nezavisi-63.2. temperaturske skale

čak, koji se okreće pomolu satnog mehanizma. Tačka se na kazaljku koja crta digitalnog namotanom na va-re rasete, a kod pada temperatupe skuplja. Ove promene preno-čevi koja je napunjena zivom. Tačka se kod porasta temperatu-re rasete, a kod pada temperatupe skuplja. Ove promene preno-

ve do $p_m = 0$ daju uvek istu graničnu vrednost 1,36609. Ova granična vrednost se tada koristila za definiciju apsolutne temperaturske skale relacijom



Sl. 63.7

$$\frac{T_k}{T_m} = \lim_{p_m \rightarrow 0} \frac{P_k}{P_m} = \\ = 1,36609 \pm 0,00004$$
(63.1)

Da bi stepeni Kelvi-

nove skale (K) imali istu vrednost kao i stepeni Celzijusove skale ($^{\circ}C$) definiciji (63.1)

dodata je uslov $T_k - T_m = 100$, odakle se za tačku mržnjenja vode dobija vrednost $T_m = 273,16 K$. Zbog veze

$$T(K) = 273,16 + t(^{\circ}C)$$
(63.2)

očigledno je da se nula ovako definisane temperaturske skale nalazi na $t = -273,16 ^{\circ}C$ i kasnije ćemo videti da je to najniža moguća temperatura.

63.3. Toplota i masena količina toplove

Toplota je jedan od različitih vidova energije. Iz prakse znamo da se toplotna energija dobija u različitim fizičkim i hemijskim procesima. Od fizičkih procesa najznačajniji su trenje i proticanje električne struje kroz provodnik, a od hemijskih - različite hemijske reakcije.

Ako dva tela različitih temperatura dovedemo u kontakt, primetićemo da temperatura hladnjeg tela raste, a toplijeg opada. Ovaj proces trajaće sve do te temperature oba tela ne izjednače. Opisanu pojavu karakterišemo tako, što kažemo da je izmedju tela došlo do razmene izvesne količine toplove. Istovremeno, ova pojava nam može poslužiti za definisanje pojma količine toplove.

Kao što je poznato, temperatura je mera unutrašnje

energija tela, tj. mera ukupne energije kretanja njegovih sastavnih delova (atoma ili molekula)^{*}. To znači da promena temperature dvaju tela u toplotnom kontaktu ne označava ništa drugo do razmenu unutrašnje energije izmedju njih. Toplige telo predaje deo svoje unutrašnje energije hladnjem telu. Predati deo unutrašnje energije naziva se *količina toplove*, tako da na osnovu svega iznetog možemo reći da količina toplove predstavlja onaj deo unutrašnje energije tela koje ono razmeni u kontaktu sa drugim telom.

S obzirom da je toplota specifičan oblik energije logično je da se kao i mehanička energija može meriti u džuliama (J).

Poznato je da se temperatura nekog tela menja ako mu se dodaje ili oduzima toplota. Ova promena temperature ne zavisi samo od količine toplove predate nekom telu, nego i od mase i prirode tog tela. Zagrevanjem tela iste mase, ali različitih materijala (gvožđe, olovo, staklo) može se zapaziti da su za jednak povišenje temperature potrebne različite količine toplove. Količina toplove ΔQ koja promeni temperaturu nekog tela od t_1 do t_2 proporcionalna je masi tela m i razlici temperatura $\Delta t = t_2 - t_1$, tj.

$$\Delta Q = cm\Delta t$$
(63.3)

Faktor proporcionalnosti c naziva se *masena količina toplove* i karakteristična je veličina za svako telo. Ako se u jednačini (63.3) uvede da je $m = 1 kg$, $\Delta t = 1 K$, dobija se

$$\Delta Q = c$$

što znači da je masena količina toplove tela c brojno jednaka količini toplove koju treba dovesti jedinici mase nekog tela, da bi jaj se temperatura povišila za jedinicu. Iz (63.3) sledi

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta t}$$
(63.4)

^{*} Treba napomenuti da ovo kretanje nije obavezno haotično (ovaj termin je odomaćen u literaturi) kao kod gasova i tečnosti. U čvrstim telima, pravilne geometrijske strukture, kretanje je oscilatorno i vrše ga atomi (molekuli) oko svojih ravnotežnih položaja.

u ostalim dimenzija moze zanemariti.

drum pravcu. Tada govorimo o linijarnom stresenju, jer se stresenje ge dve, tada se stresenje vrsstich te la moze posmatrati samo u jednoj dimenziji, ako je jedna dimenzija te la zatno veca od drugih. Medjutim, neki su podjednako u svim pravim nizhova zapremina, tj. te la se stice podjednako u svejim pravim

63.4. Stresenje vrsstich te la pri zagrevanju

mocu vodenog kalorimetra.

na koliciina toploste vrsstich i tehnikh te la moze da se meri po jedinici. Mase na koliciina toploste izrazava se u J/kg: Mase koju je potrebanu njemu dovesti da bi mu se temperatura povisila ti. Toplotni kapacitet te la brojno je jednak koliciini toploste

$$C_k = \frac{dt}{dq} = mc$$

C. Njegova vrednost se odredjuje iz (63.5), dokle je odnos q/dt koji se toplotni kapacitet te la i oblezava se sa tagenu vrednosti mase nekoliko toploste na datoj temperaturi. mase nekolike toploste u intervalu at, a jednacina (63.5) prema tome, jednacina (63.4) definise ustvari srednju vrednost

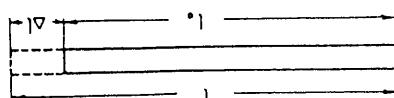
$$\bar{q} = m \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$$

te la mase m od temperaturu t1 do t2 glasi a relacija za koliciunu toploste, potrebnu za zagrevanje nekog

$$c = \frac{mdt}{dq}$$

pri datoj temperaturi. Ova fizicka velicina se definise od temperaturi, pa se uvek govorii o mase noj koliciini toploste te c mase smaratati konstantnom, tj. za male intervale temperaturu. Medjutim, mase na koliciina toploste zavisit će nekoj pokazunju (63.8). Eksperiment pokazuje da je da posledice duzine za tu temperaturu at i potresi i proporcionalno je potresi tu temperaturu at = t - to duzina stepa gde je a terminski koeficijent linearnog stresenja. S obzirom da je

$$dt = t_2 - t_1 \quad \Delta t = \Delta t_0 \quad t_1, t_2$$



Izraz (63.4) vazzi samo u slucaju kada se mase na koliciina toploste sa porastom temperaturu at = t - to duzina stepa gde se prav meniti za $\Delta t = t_2 - t_1$ (sl. 63.8). Eksperiment pokazuje da posledice duzine za tu temperaturu at = t - to duzina stepa gde se prav meniti za $\Delta t = t_2 - t_1$, tj.

$$t_2 = t_1 + \Delta t \quad (63.7)$$

Izraz (63.7) i (63.8) vase samo prilazno kada se radi o malom opsegu temperatu. Ako se zeli postigli veci vred slaganje obrascu (63.8) sa empirijaskim podacima na mase kojoj temperaturi mora se ordeniti veliki broj konstanti. A. Tada se izraz (63.8) zamjenjuje jednajm redom obliku

$$t = t_0(1 + \alpha t + \alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3 + \dots) \quad (63.9)$$

gde al/10 predstavlja relativno izduzenje stipe. Prema (63.10), dhosti a su veoma male, reda velicine 10^{-5} do 10^{-6} K-1. Jer je koeficijent a nezavisan od izbora jedinice duzine. Vred produziti za a metara, step duz 1 kilometer za a kilometer, ponu. To znači da je se step duzine 1 metra zagrevanje za 1 K a predstavlja relativno izduzenje po jednom temperatom stepe al/10. Prema (63.10),

$$a = \frac{\Delta t}{\Delta l/10}$$

Iz izraz (63.7) sledi da je

$$t = t_0(1 + \alpha t + \alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3 + \dots) \quad (63.9)$$

(63.8) sa empirijaskim podacima na mase kojoj temperaturi mora se ordeniti veliki broj konstanti. A. Tada se izraz (63.8) zamjenjuje jednajm redom obliku

$$t = t_0(1 + \alpha t) \quad (63.8)$$

$$\Delta t = \alpha t_0 \Delta t$$

gde je a terminski koeficijent linearnog stresenja. S obzirom da je

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (63.7)$$

NEKA DUZINA STAPA PRI TEMPERATURI $t_0 = 0^\circ C$ ZNOSI

sl. 63.8. Eksperiment pokazuje da posledice duzine za tu temperaturu at = t - to duzina stepa gde se prav meniti za $\Delta t = t_2 - t_1$ (sl. 63.8).

Izraz (63.4) vazzi samo u slucaju kada se mase na koliciina toploste sa porastom temperaturu at = t - to duzina stepa gde se prav meniti za $\Delta t = t_2 - t_1$.

(63.8) to širenje se može predstaviti kao

$$a = a_0(1 + \alpha t) \text{ i } b = b_0(1 + \alpha t) \quad (63.11)$$

gde koeficijent α ima istu vrednost u oba pravca. Kako je površina pravougaone ploče $S = ab$, to je

$$ab = a_0 b_0 (1 + \alpha t)^2$$

ili

$$S = S_0(1 + 2\alpha t + \alpha^2 t^2) \quad (63.12)$$

gde je S_0 površina ploče na $0^\circ C$, a S površina na $t^\circ C$.

Kako je koeficijent α veoma mali, to se kvadrat $\alpha^2 t^2$ može zanemariti, te je

$$S = S_0(1 + \beta t) \quad (63.13)$$

Sl. 63.9

gde je $\beta = 2\alpha$ novi koeficijent koji se zove *termički koeficijent površinskog širenja*.

Istim rezonovanjem, zanemarujući višestepene male veličine α , možemo doći do zakona za zapreminske širenje, posmatrajući paralelopiped čije su ivice a, b, c .

$$V = V_0(1 + \gamma t) \quad (63.14)$$

gde je $\gamma = 3\alpha$ *termički koeficijent zapreinskog (kubnog) širenja*.

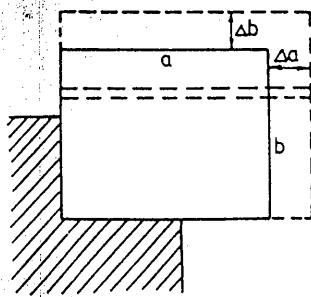
63.5. Širenje tečnih tela pri zagrevanju

Tečnosti, kao i gasovi, nemaju staljan oblik već uvek zauzimaju oblik suda u kojem se nalaze. Zato kod njih možemo govoriti samo o zapreminskom širenju pri zagrevanju. Za širenje tečnosti pri zagrevanju važi aproksimativno da je

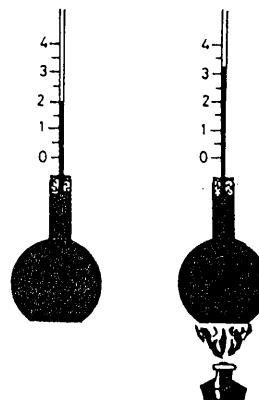
$$V = V_0(1 + \gamma_t) \quad (63.15)$$

gde je γ koeficijent zapreminskog širenja tečnosti.

Širenje tečnosti pri zagrevanju može se prikazati pomoću staklenog balona, napunjenog tečnošću, kroz čiji je



zapušać provučena staklena cevčica (sl. 63.10). Kada se balon



Sl. 63.10

zagrevanje uočiće se podizanje vode u cevčici. Kako se pri ovom zagrevanju širi i balon, to u ovakvim slučajevima važnu ulogu igra razlika zapreminskog koeficijenta širenja tečnosti (γ_t) i materijala od kojeg je napravljen balon (γ_b). Ako je $\gamma_t > \gamma_b$ nivo tečnosti će se penjati u cevčici pri zagrevanju. Kada je $\gamma_t < \gamma_b$ nivo tečnosti u cevčici će se spuštati. U graničnom slučaju, kada je $\gamma_t = \gamma_b$ nivo tečnosti u cevčici se neće pomjeriti. Kada se tečnost u balonu zagreje do neke temperature t , onda će njena zapremina porasti prema (63.15) na $V_t = V_0(1 + \gamma_t t)$, a zapremina balona na $V_b = V_0(1 + \gamma_b t)$. Ako je $\gamma_t > \gamma_b$, prividno povećanje zapremine iznosi

$$V_t - V_b = V_0(\gamma_t - \gamma_b)t \quad (63.16)$$

gde je $\gamma_t - \gamma_b$ prividni koeficijent širenja tečnosti. Prema (63.16) sledi da merenjem razlike $V_t - V_b$ može da se odredi koeficijent širenja neke tečnosti γ_t ako je poznat koeficijent γ_b za materijal balona.

Kako je promena zapremine tečnih tela pri zagревa-

u balonu ostao nepromenjen. Zapravljana gasa se zagrevanje pod iz polozaja 1 premesti u polozaj 2. Pri tome je pritisak gase 1. Gas u balonu se pritiskom zagrevanja siri, te se kap zive vazduha jednom kapi zive, koja se u pocetku nalazi u polozaju vazduh pod atmosferskim pritiskom i odvoden je od spoljasnjeg cemo pomoci sladecem ogleda. U balonu (sl. 63.14) se nalazi promenu, zapravljene pri konstantnom pritisaku pokazuje

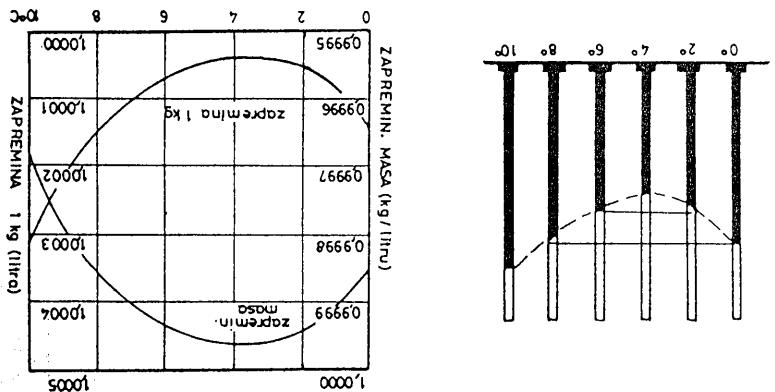
te ih opisuju razliciti fizicki zavodi. Tako su sirenja pri stanom i promenljivom pritisaku razlicita, mora pratiti ne samo temperaturu i zapravljana, vec i pritisak. Pravilne menjaj i pritisak, to se kod gasova pri promeni za-mo o zapravljokom sirenji. Kako se kod gasova pri promeni sa-kod gasova kao i kod tehnosti moze se govoriti sa-

63.6. Sirenje gasova pri zagrevanju

zavodnost promene zapravljene i zapravljene mase sa temperaturom.

SL. 63.13

SL. 63.12



sirenja vode u tom temperaturnom području negativan. Iznad 40°C vode je pri 40°C. Iz tog razloga jezera i reke lede se na površini, a ne na dubini. Na sljedićem 63.13. prikazana je grafika vode je sirenja vodene zapravljene em siri. Prema tome, najveća zapravljena masa

(1791-1820), preuskrati fizickim, proporcionalno masama kvaliteta, to jest
* Petre Louis Duong (1785-1868) i Aleksis-Therese Petit
zapravljivo uobičajeno ponasanje vode smanjuje se sa porastom temperaturu (sl. 63.12). To znači da je koeficijent zapravljivog dužju od 0 do 40°C zapravljivo ponasanje vode. U temperaturnom području skupljaju ne vazi u potpunosti za vodu. Zbrog toga je djenju skupljaju se tela pri zagrevanju siri, a pri hlađenju da sirenje balona pri tome nemaknove utičaja.

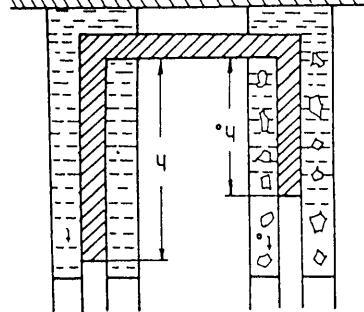
$$\frac{p_0}{h_0} = \frac{1 + \gamma t}{1 -}$$

Merenjem ho, h i tome se iz (63.18) ordediti y,
 $p_0 h_0 = p_h$

$\frac{p_0}{h_0} = \frac{1 + \gamma t}{1 -}$ Stavljanje u izraz (63.15) $V_0 = m/p_0$ ska mase na temperaturi t. Stavljanje u izraz (63.17) dobija se gde je $p_0 = m/V_0$ zapravljenska mase na 0°C, a $p = m/V$ zapravljena

nog delja u-cevi, mora biti po zakonu o spomenim sudovima voa levo i desno obvezimo sa ho i h, razmjeru od horizontala-od nivoa tehnosti u cevi rezagregacione kupatila. Ako visine ni-zapravljenska mase postaje manja) tako da je biti na visem nivou kupatilo zagrevava, tehnost se u tom kraku u-cevi siri (jen na oba kraaka. Kad se desno stajati na istom nivou u zakonu o spomenim sudovima tyla ista tehnost je po je temperatura u oba kupatila ista tehnost je po prirodi nizaze u vodenim ku-racima (sl. 63.11). Ako stavlja se u u-cev ići se se koeficijent ordjenje-koje ne dolazi u obzir siri-je sirenja tehnosti kod njene suda. Tehnost ići je sirenja voda u obzir siri-

nju znato veća kod vrvstih-tela, dilion i peti dali su jedu metodu za ordjenje-sirenja zapravljena tehnosti kod njene sirenja voda u obzir siri-



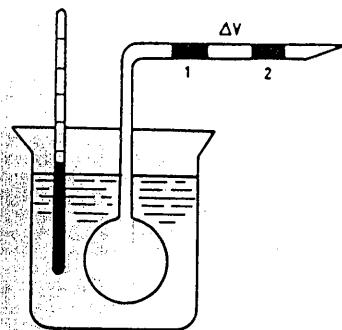
većala za ΔV , te se može napisati da je

$$V_t = V_0(1 + \gamma t) \quad (63.18)$$

gde je V_0 zapremina na temperaturi $0^\circ C$, a V_t zapremina na temperaturi $t^\circ C$. Veličina γ zove se *zapreminski koeficijent širenja* i za sve gasove ima približno istu vrednost koja iznosi

$$\gamma = \frac{1}{273,15} = 0,0036604^\circ C^{-1} \quad (63.19)$$

Na osnovu (63.19) može se reći da svi gasovi pri povećanju te-

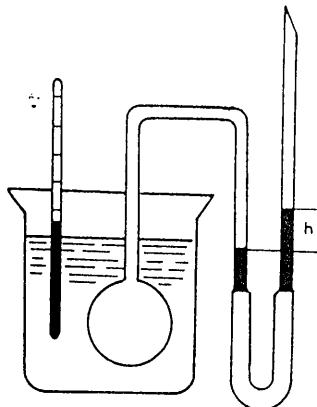


Sl. 63.14

temperature za $1^\circ C$ povećaju svoju zapreminu za $1/273$ deo one zapremine koju gas ima na $0^\circ C$.

Promena pritiska pri konstantnoj zapremini može se pokazati pomoću aparature prikazane na slici 63.15.

Gas se nalazi u balonu koji je spojen sa otvorenim živinim manometrom, čiji su kraci spojeni gumenim crevom tako da se desni krak može dizati i spuštati. Na početku merenja živa u oba manometarska kraka stoji na istoj visini. Zagrevanjem vode u sudu istovremeno se zagreva i gas u balonu usled čega se pritisak gasa povećava, što se manifestuje izdizanjem žive za h u desnom kraku manometra. Dižući desni krak može se podešiti da živa stoji u levoj cevi uvek na istoj visini kako



Sl. 63.15

bi zapremina gasa ostala nepromenjena. Pri tome gas u balonu nije više pod početnim atmosferskim pritiskom p_0 nego pod pritiskom $p_0 + h$, gde je h razlika visine živinog i stuba u manometru koja odgovara povećanju pritiska Δp . Ovo povećanje pritiska Δp pri konstantnoj zapremini srazmerno je temperaturi, te se može izraziti kao

$$p_t = p_0(1 + \gamma t) \quad (63.20)$$

gde je p_0 pritisak gasa na $0^\circ C$, a p_t pritisak istog gasa na temperaturi $t^\circ C$, a γ termički koeficijent pritiska. Koeficijent γ ima praktično istu vrednost ($1/273$) kao i koeficijent zapreminskog širenja.

Relacije (63.18) i (63.20) predstavljaju Gej-Lisakov zakon, koji se može formulisati i ovako: *svi gasovi imaju isti termički koeficijent γ* .

63.7. Prenošenje toplote

U prirodi se toplota stalno prenosi sa jednog mesta na drugo. Taj prelaz toplote odvija se spontano sa jednog tela na drugo i to sa toplijeg na hladnije, tim brže što je veća razlika temperature između dva tela. Toplotno zračenje je nevidljivo za naše oko, ali se može osjetiti njegovo dejstvo. Pri analizi procesa prenošenja toplote mogu se uočiti tri principijelno različita načina: provodjenje, konvekcija (strujanje) i zračenje.

a. Provodjenje toplote

Ako se jedan kraj nekog tela zagreva, može se na drugom kraju tela izmeriti porast temperature. Taj porast nije jednak za sva tela. Za metalna tela je povećanje temperature nezagrevanog kraja veoma primetno, dok je za staklo i drvo, na primer, ovaj efekat znatno manji.

Znači, možemo razlikovati materijale koji dobro provode toplotu (topluti provodnici) i one koji slabo provode toplotu (topluti izolatori). Kod ovog mehanizma prenošenja toplote ne pomeraju se delovi tela, već se prenošenje toplote

Za gresje na voda u kotlu centralnog gresjanja prenositi toploputu tako da se isto istražuje da li se isto istražuje da li se toploputa prenositi takav način prenosenja toploute, pri čemu se toploputa prenositi

b. Prenosenje toploote konvekcijom

$$\Delta Q = \dot{A} S \frac{L}{t_2 - t_1} \quad (63.23)$$

pa je u stacionarnim stanju, provedena kočićna toploputa

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{L}{t_2 - t_1} \quad (63.22)$$

no duž šipke, te je

u stacionarnom stanju temperatura se menja linear-

MATERIAL	α u $[KJ/m^2K]$
drvo	0,004-0,012
vuna	0,004
pluta	0,004
beton	0,084
staklo	0,084
led	0,17
argon	0,0016
kiseonički	0,0023
vasduh	0,0024
vodonički	0,014
helečium	0,014

bezne materijale dat je u sledećoj tablici:

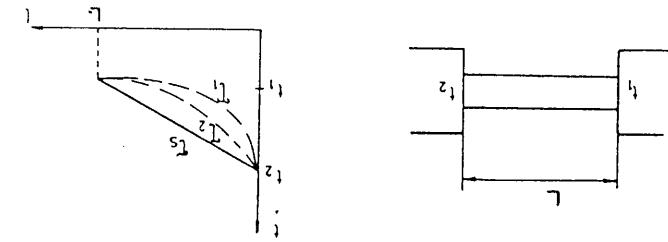
ste materijala i veoma malo se menjaju sa temperaturom. Među se koefficijent toploote provedljivosti zavisi od vr-

edje je u koefficijent toploote provedljivosti, a dt/dx je gradijent temperature

$$\frac{dQ}{dt} = -\dot{A} S \frac{dx}{dt} \quad (63.21)$$

toploote koja prodje kroz step u jedinici vremena iznosi
izjelu i step prelazi u stacionarno toplootto stanje. Kočićna svakom mestu x menjati. Posle vremena t_g temperatura se ustvari funkciji od vremena t. Do vremena t_g temperatura će se na-
ći 63.17. Na toj sličci je predstavljena raspodjela temperature duž stepa, dobijemo zavisnost koja je grafički prikazana na slj-
ako nizom termometra merimo raspodjelu temperature razne čvrste materije cijela

SL. 63.16 SL. 63.17



je $t_1 < t_2$, kako je to prikazano na slići 63.16.
sa telom temperaturu t_2 , a drugi sa telom temperaturu t_1 (gde
dažine L i preseka S, pri čemu jedan kraj stepa spoji se
kušage da ovu površinu opisemo kvantitativno. Posmatracemo step
ostvaruje interakciju delića, koji vrše termičko kretanje. Po-

pokretanjem toplog materijala (fluida), zove se konvekcija ili strujanje. Razlikujemo prirodnu konvekciju, pri kojoj se topli materijal kreće sam od sebe zbog razlike u zapreminskoj masi i prisilnu konvekciju, pri kojoj se materijal prisilno kreće, na primer, delovanjem pumpe i sl. Očito je da je konvekcija toplo-te moguća samo kod fluida.

Matematička teorija topotne konvekcije nije jednostavna i izlazi iz okvira ovog udžbenika. Konvekcija topote između površine jedne odredjene temperature t_1 i fluida druge temperature t_2 koji je dodiruje zavisi od niza faktora, na primer:

- da li je površina ravna ili zakrivljena,
- da li je površina horizontalna ili nije (uticaj gravitacije),
- od zapreminkse mase, viskoznosti, masene količine topote i topotne provodljivosti fluida koji dodiruje površinu,
- da li je proticanje fluida laminarno ili turbulentno, itd.

U praksi konvekciju topote izračunavamo tako da koeficijent konvekcije h definišemo jednačinom

$$q = hS\Delta t \quad (63.24)$$

gde q predstavlja topotu koju površina S dobije ili izgubi konvekcijom u jedinici vremena ako izmedju površine i konvekcionog fluida vlada razlika u temperaturi Δt . Veličina q (prenos topote kroz datu površinu u jedinici vremena) naziva se još i struja topotne konvekcije. Teorijske teškoće proračuna konvekcije svode se sada na proračun, odnosno na eksperimentalno utvrđivanje koeficijenta h . Njegova vrednost, na primer, za konvekciju strujanjem vazduha pri atmosferskom pritisku kroz horizontalnu ploču (strujanje prema gore) iznosi $2,5 \cdot 10^{-3} (\Delta t)^{1/4}$, dok na primer, za vertikalnu ploču iznosi $1,75 \cdot 10^{-3} (\Delta t)^{1/4}$. Za vertikalnu ili horizontalnu cev prečnika D koeficijent h iznosi $4,2 \cdot 10^{-3} (\Delta t/D)^{1/4}$. U svim prethodnim slučajevima dimenzija koeficijenta h iznosi $kJ/sm^2 K$.

Primer. Neka u sobi vlada temperatura od $25^\circ C$, a na otvorenom $-15^\circ C$. Koliko se topote prenese kroz jediničnu površinu staklenog prozora debelog $2 mm$? Topotna provodljivost stakla je $0,084 \text{ } kJ/sm^2 K$.

Lako možemo uočiti da temperaturska razlika između obe strane stakla nije $40^\circ C$, nego znatno manja. Šta više, dodirnemo li jednog hladnog dana unutrašnju i spoljašnju stranu stakla, videćemo da su njihove temperature podjednake. Prema tome, predpostavićemo da je temperatura stakla konstantna, tako da su (a) konvekcija topote u sobi, (b) provodjenje topote kroz staklo i (c) konvekcija topote u spoljnoj atmosferi jednake. Ako je temperatura stakla $t = (25^\circ - 15^\circ)/2 = 5^\circ C$, tada je temperaturska razlika između stakla i vazduha u sobi i izvanje jednaka i iznosi $20^\circ C$. Koeficijent konvekcije topote u oba slučaja je

$$\begin{aligned} h &= 1,75 \cdot 10^{-3} (20)^{1/4} \text{ } kJ/sm^2 K \\ &= 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ } kJ/sm^2 K \end{aligned}$$

Pomoću jednačine (63.24) dobije se količina topote prenesena po jedinici površine (m^2) u toku jedne sekunde

$$q/S = 3,7 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 74 \cdot 10^{-3} \text{ } kJ/sm^2$$

Kod tako hladnog dana hermetički zatvoren prozor površine $1 \text{ } m^2$ preda konvekcijom okolnoj atmosferi oko $265 \text{ } kJ$ na sat.

Zahvaljujući konvekciji razni vetrovi u atmosferi prenose topao vazduh sa jednog na drugo mesto Zemljine površine. Kod okeana i mora Golfskom strujom prenosi se topota sa ekvatora na velike daljine površinskim strujanjem morske vode, dok se sa druge strane, hladna voda kreće po dnu okeana i mora u suprotnom smeru. Rashladjivanje reka, jezera i mora putem prirodne konvekcije vode postoji samo iznad temperature od $4^\circ C$. Usled anomalije termičkog širenja vode (sl. 63.12) se izdizanje toplije vode (vode manje zapreminske mase) na površinu zaustavlja kada se voda ohladi na $4^\circ C$. Na toj temperaturi zapreminska masa vode je maksimalna. Zbog toga sloj vode te temperature

apšorbuję zračenje i najbolje emituje zračenje. Zbog toga je

sljoga, te odavde možemo zaključiti da površina koja najbolje kon (63.25) možemo primitivit i na unutrašnjosti stranu površinske no apšorbiju, avojojmo zamisljenom površinom (sl. 63.18), za-ako površinski sloj materijala koji emituje, odnos- se od temperaturu t i tlašne dužine x.

$$\text{Koefficijenti a, x i t u jednadžbi (63.27) kod jednog tlača zavi-} \\ \text{a + x + t = 1} \\ (63.27)$$

bije

$$a = \frac{W_a}{W_t}; x = \frac{W_x}{W_t}; t = \frac{W_t}{W_t} \\ (63.26)$$

x i koefficijenta propusnosti (transparencije) t definisane kao uvođenjem koefficijenta apšorpcije a, koefficijenta refleksije

$$\frac{W_a}{W_t} + \frac{W_x}{W_t} + \frac{W_t}{W_t} = 1$$

i li

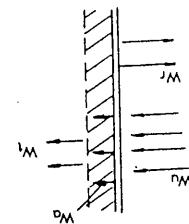
$$W_t = W_a + W_x + W_t \\ (63.25)$$

prođe kroz telo (W_t^2), te prema zakonu održanja energije važi delimično apšorbije (W_a), delimično reflektije (W_t) i delimično ukupna energija W_t koja pada na površinu tlače se vredinje tlača.

samo od temperaturu tlača, već i od drugih fizikalih osobina pod u vidu topločnog zračenja. Izračena topločna energija ne zavisi nom kretanjem molekulija materije jedan deo svake energije zrače viđ elektromagnetskog zračenja i ima tlašnu privredu. Topločno zračenje je vrem slučaju se toploča prenositi zračenjem. Topločno zračenje je tlačkoja su izolovana bezvazdušnim prostorom - vakuumom. U oz poznatu je da se toploča razmenjuje i između dva

c. Zračenje

nomen omogućuje život u vodi i pri veoma niskim temperaturama. kao toplotni izolator zanato usporava brzinu hladjenja. Ovaj fe-ces traže dok se goranj sloj vode ne zaledi. Tada ledena kora ostaje na du a gornji slojevi nastavljaju da se hlađe. Ovaj pro-



relativna emisija sposobnost tlač je ednaka koefficijentu ap- sorpcije a.

jan je po radiotima o kinetičkoj teoriji gaseva.
** Ludvig Boltzman (1844-1906), austrijski fizik, jedan od najznačajnijih naučnika epohe koja je prethodila kuantnoj fizici. Znata tlač.
na Svetlosti u Beču. Ekspozitortalno je otvorio zagon zračenja crnog želje Stefan (1835-1893), slovenski fizik, profesor

površine (2) se može (zaneamravući transparenciju) naplatiti Energijska kća pada u jedinici, vremenom na jedinicu je se nalaze na temperaturna t₁ i t₂ (sl. 63.19). ispitacemo razmenu topločne energije između dvaju površine ko- zračenja za ovu zakone emisije topločnog zračenja uvegove površine i može biti između 0 i 1, 0 < e < 1.

$$W_t = e \sigma T^4 \quad (63.29)$$

obliku

Emisiona moć bilo kojeg tlača se može napisati u

$$gdje je e = 5,7 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4 tlač. Stefan-Boltzmannova konstanta. \quad (63.28)$$

$$W_e = \sigma T^4 \quad (63.28)$$

članovim zakonom.

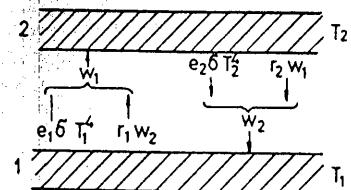
* Ukučana emisija moć crnog tlač je dana Stefan - Boltzmannovim zakonom.

telo apsolutno termopropusljivo tako je t = 1, a = 0 i x = 0 onda je ako je t = 1, a = 0 i x = 0 onda je se naziva apsolutno belim tlačom. platu koja na njuča nadije. To telo je t = 0 odjela (reflektuje) svu točenje. Telo za koje je x = 1, a = 0 t = 0 naziva se apsolutno crnito tlačom jer apšorbuje sve zračenje. Telo za koje je a = 1, t = 0 naziva se apsolutno sorpcije a.

obliku

$$W_1 = e_1 \sigma T_1^4 + r_1 W_2 \quad (63.30)$$

Slično je energija koja pada na površinu (1) data sa



Sl. 63.19

$$W_2 = e_2 \sigma T_2^4 + r_2 W_1 \quad (63.31)$$

Znači, brzina prenošenja topotne energije izmedju ove dve površine je

$$\begin{aligned} W_2 - W_1 &= \\ &= \sigma(T_2^4 - T_1^4) \cdot f(e_1, e_2) \end{aligned} \quad (63.32)$$

gde je f funkcija emisionih

moci koju nismo napisali eksplisitno.

Prema Stefan-Bolcmanovom zakonu kolicina emitovane topotne energije raste veoma brzo s temperaturom. Tako, na primer, blok bakra pri $100^\circ C$ ($373 K$) emituje odprilično $0,03$ vata sa svakog cm^2 svoje površine. Već pri temperaturi od $500^\circ C$ ($773 K$) svaki cm^2 emituje $0,5$ vata, a kod $1000^\circ C$ ($1273 K$) čak 4 vata. Ova izračena energija po pravilu je mešavina velikog broja talasnih dužina. Međutim, za svaku temperaturu postoji odredjena talasna dužina λ_m oko koje se emituje najveći deo energije. Ta je talasna dužina obrnuto proporcionalna temperaturi, što je dato tzv. Vinovim* zakonom

$$\lambda_m T = \text{const.} \quad (63.33)$$

Vrednost konstante zavisi od izbora jedinica. Za λ u santimetrima, a T u K , vrednost konstante iznosi $0,5099 \text{ cm} \cdot K$. Iz toga proizilazi da se, na primer, pri temperaturi $300^\circ C$ najviše energije emituje sa talasnom dužinom od oko $9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ (9μ), što je znatno ispod vidljive svetlosti ($0,4 \mu$ - $0,8 \mu$), dakle u području infracrvene svetlosti.

* Wilhelm Wien (1864-1928), nemacki fizicar. Za radove iz termodinamike i teorije zračenja dobio je Nobelovu nagradu 1911.

I Stefan-Bolcmanov i Vinov zakon posledica su opšteg Plankovog* zakona zračenja, koji ćemo proučavati na drugom mestu.

d. Njutnov zakon hladjenja

Ako razlika u temperaturi tela t i okoline t_s nije velika (provodjenje se svede na najmanju meru, a prenos topote vrši konvekcijom) brzina kojom telo gubi toplotu, tj. brzina kojom mu se smanjuje temperatura linearno je zavisna od razlike $t - t_s$. To je uočio Njutn te se ovaj zakon po njemu i zove.

Matematički se ovaj Njutnov empirijski zakon hladjenja može napisati u obliku

$$\frac{dt}{d\tau} = -k(t - t_s) \quad (63.34)$$

Odakle se integracijom dobija

$$\ln(t - t_s) = -k\tau + C \quad (63.35)$$

Ako u (63.35) uvrstimo početni uslov da je za $\tau = 0$, $t = t_0$ (početna temperatura tela), dobijamo za konstantu integracije vrednost

$$C = \ln(t_0 - t_s) \quad (63.36)$$

pa zakon hladjenja u konačnom obliku glasi

$$t = t_s + (t_0 - t_s) \cdot e^{-k\tau} \quad (63.37)$$

II KINETIČKA TEORIJA TOPLOTE

64.1. Atomsko-molekulski sastav materije

Počev od 18. veka, zahvaljujući uglavnom razvoju eksperimentalnih metoda hemije i fizike, došlo se do niza otkrića (Braunovo kretanje, difuzija, Daltonov i Faradejev zakon), koja su ukazivala na to da se materija sastoji od delića koji

* Max Planck, (1858-1947) Nobelovac, jedan od osnivača kvantne mehanike

odavde je mase molekula $M_m = M_u$.

Relativna molekulска маза (M_r) је неимовинан број који одава угљенитког изотопа C-12. На овој ове дефиниције је $M_r = 12$ мазе пакају колико је пута пресечна маза неког изотопа C-12.

мазе атома нормалне изотопске смеђе кога је у првотд налази.

$A = A_u$. Просечна маза атома неког елемената предавају уредноста масе масе једнака је мазе атома једног атома.

Relativna atomска маза је доказана је да је она једнака мазе атома $C-12$, али је она једнака $1/12$ мазе елемената веда као и као мазе једног атома.

Сује колико је пута пресечна маза атома једнака $1/12$ мазе елемената веда од једног ато-

мског изотопа угљенитка C-12. Маза једнака $1/12$ мазе елемената веда од једног ато-

мског изотопа угљенитка C-12, али је она једнака $1,66 \cdot 10^{-24}$ г.

* Relativna atomска маза (A) је неимовинан број, који пока-

јује нормалне изотопске смеђе кога је у првотд налази.

Нека је у мази м одредјене суспстанце назади коли-

дефиниције (одредјене) скупине тајкић естетика.

тога могу бити атоми, молекули, Јони, електрони итд., али пак

тако да је оптеребљава мол, елементарне јединице се моралу највећи;

тако да је количина спротивне (гравитација) система који садржи толико елемен-

таја. Количина спротивне (гравитација) система који садржи толико елемен-

таја да је за основну једињину за количину сусплане узме

је да је мазе рагунати са појединачним атомима али молекули-

тако да је мазе рагунати са којом се ради. Јасно

после одредјивања тачних relativnih atomskih

надежије стабилнији од атома.

који су у земаљским усlovима тајкоје стабилни, али дакле ма-

настаже везивањем свега око стотинак врста атома у молекуле,

огроман број различитих облика материје, које срећемо на Земљи,

хваднујући разграничитим системима у хемији пакају је да

кељине, покренула је развој сазнанија о структуре материје. За-

дискретнији делова, који одредјују карakterистике макрофизичке

единице да материја најве континуума, већ да се састоји од

ка материје антички филозоф Демокрит дао је име атом. Оtkриće

је у земаљским условима стабилни, овим делегима који представи-

$$M = \frac{m}{n}$$

је моларна тит молска маза M те сусплане

зар, професор у Торонту. Увојајуја са атомској молекулама.

* Амбеде Augardao дј кваренга (1776-1856), титигије кејтији

$$M_a = A_u \cdot n_m = M_u \quad (64.3)$$

једињијом, тј.

ујем рељативне атомске A молекулске мазе са атомском мазеом

маза једног атома n_a односно молекула n_m мозе се добити монре-

$$1 u = (1 \text{ g mol}^{-1})/N_A = 1,660565 \cdot 10^{-24} \text{ g} \quad (64.2)$$

$$1 u = (10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})/N_A = 1,660565 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (64.2)$$

важи у једног првок атомске мазене једињије дефиниције. Као најмања мазе атома је молекула она се обично је назада површини, онда би на сваки cm^2 досјло око 10^{14} молекула. Објектив молекулаја, спуштање равномерно распореди по величини молекула. Кодико је велики овај број илустровавају првомером. Један мол зрања пријења је магао бије првокији површину првомером. Кодико је велики овај број илустровавају следећим

$$N_A = (6,022045 \pm 0,000031) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (64.1)$$

наши

вередност, одредијена разлиџитим експерименталним методама, из-је највиша Augardaoј број је онакав се обично са N_A . Нежеља је једињији (атома, молекула, Јона, електрона итд.). Тада је маза једнада молскији мази она је садржати је број елементар-је

ако се узме број колико елемент је једињи је

$$1 \text{ i } 2 \cdot 15,999 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \text{ i } 2 \cdot 15,999 \text{ kg mol}^{-1}.$$

који је разликују молекула (молекулу кисеоника-једињака 02) је $2 \cdot 15,999 \text{ g mol}^{-1}$ атома (атом кисеоника-једињака 0) $15,999 \text{ g mol}^{-1}$ је $2 \cdot 15,999 \cdot 10^{-3}$ атома (атом кисеоника-једињака 0) $15,999 \text{ kg mol}^{-1}$. Тако је моларна маза кисеониковији је децимала једињица g mol^{-1} . Тако је моларна маза кисеониковији је децимала једињица kg/mol је $15,999 \text{ kg mol}^{-1}$. Употребије је

Za određenu vrstu supstance, odnosno vrstu jedinki molarna masa M_r , izražena u jedinicama $gmol^{-1}$ ili $kg kmol^{-1}$ je konstantna veličina, a brojno jednak relativnoj atomskoj masi A_r , odnosno relativnoj molekulskej masi M_r , tj.

$$M(gmol^{-1}) = A_r \text{ odnosno } M(gmol^{-1}) = M_r$$

Zamjenom A_r i M_r u (64.3) sa M sledi da se masa atoma ili molekula može izračunati preko izraza

$$\mu_a = Mu \text{ ili } \mu_m = Mu \quad (64.4)$$

Tako, na primer, za atom vodonika (H) relativna atomska masa iznosi $A_r = 1,008$, a molska masa je $M = 1,008 g mol^{-1} = 1,008 kg kmol^{-1}$, pa je masa atoma vodonika prema (64.3)

$$\mu_a = A_r u = 1,008 \cdot 1,660565 \cdot 10^{-27} = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$$

a prema (64.4)

$$\mu_a = Mu = 1,008 \cdot 1,660565 \cdot 10^{-27} = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$$

Za molekul vodonika (H_2) relativna molekulska masa iznosi $M_r = 2,016$ a molska masa je $M = 2,016 g mol^{-1} = 2,016 kg kmol^{-1}$ pa je masa molekula vodonika prema (64.3) i (64.4)

$$\mu_m = M_r u = 2,016 \cdot 1,660565 \cdot 10^{-27} = 3,34 \cdot 10^{-27} kg$$

$$\mu_m = Mu = 2,016 \cdot 1,660565 \cdot 10^{-27} = 3,34 \cdot 10^{-27} kg$$

Ako uzmemo m grama neke supstance i ako je M njena molska masa, onda će broj molova n koji se nalazi u masi m biti

$$n = \frac{m}{M}$$

Može se pokazati da mol bilo kojeg gasa pri normalnim uslovima ($t = 273 K$ i $p = 101325 Pa$) zauzima istu zapreminu i da je kod svih gasova ista. Tako, na primer, znajući da N molekula ($1 mol$) ima masu za H_2 od $m = 2,016 \cdot 10^{-3} kg$ i zapreminsku masu pri normalnim uslovima $\rho = 0,08987 \cdot 10^{-3} kg/dm^3$, a za azot (N_2) $m = 28,00 \cdot 10^{-3} kg$ i $\rho = 1,2505 kg/dm^3$ daje preko relacije $\rho = m/V$ tražene zapremine

$$\text{Za vodonik: } V = \frac{m}{\rho} = \frac{2,016 \cdot 10^{-3}}{0,08987 \cdot 10^{-3}} \approx 22,4 dm^3 = 22,4 l$$

$$\text{Za azot: } V = \frac{m}{\rho} = \frac{28,00 \cdot 10^{-3}}{1,2505 \cdot 10^{-3}} \approx 22,4 dm^3$$

Iste vrednosti, $22,4 dm^3$, dobili bismo i za druge gasove. Dakle, mol ma kog gasa pri normalnim uslovima zauzima zapreminu od $22,4 dm^3$ (ili $22,4 l$). Tu zapreminu obeležavamo sa V_0 i nazivamo molarnom zapreminom i njena tačna vrednost iznosi

$$V_0 = 22,415 dm^3 = 22415 cm^3 = 22,4 \cdot 10^{-3} m^3 \quad (64.5)$$

Pri normalnim uslovima u jedinici zapremine bilo kog gasa uvek imamo

$$L = \frac{N_A}{V_0} = \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{22415} = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ molekula/cm}^3$$

Broj L naziva se Lošmitovim brojem.

Kako je većina gasova u molekularnom stanju, izuzev plemenitih (He, Ne, Kr, Cs, Ar i dr.) koji su u atomskom stanju, to ćemo pod nazivom molekul podrazumevati, ukoliko to drugačije nije naglašeno i atome (jednoatomski molekul).

64.2. Osnovne pretpostavke kinetičke teorije toplote

U osnovi kinetičke teorije toplote leže sledeće pretpostavke:

a. Sva tela se sastoje od ogromnog broja stabilnih malih delića (molekula).

b. Molekuli se u telima stalno kreću. Ovo kretanje je neuredjeno (haotično) i na njega se može uticati samo promenom temperature tela. Ovakvo kretanje molekula se naziva termičkim kretanjem. Na postojanje termičkog kretanja molekula ukazuju makroskopske pojave, kao što je širenje gasa po celoj zapremini zatvorenog suda, kretanje molekula vazduha u atmosferi i pored stalnog dejstva gravitacione sile, itd. Termičko kretanje molekula u tečnostima je otkrio botaničar Braun * pos-

* Robert Brown (1773-1853), škotski botaničar.

narodom utvrđito je da je hlor hemijski element i otkrio je bor.
ska sa vlastnom takom da se balonom popre u visinu od 100 m. Zajedno sa The-
spasavaju gašova. Eksperimentalo je učinkovito adaptirale atmosferske pribit-
osim pomeđu zrakova o strelju gašou postavio je u zrakove o spremištu skam
*** Joseph Gay-Lussac (1778-1850), francuski fizikar i hemičar.

*** Edme Marotot (oko 1620-1684), francuski fizikar.

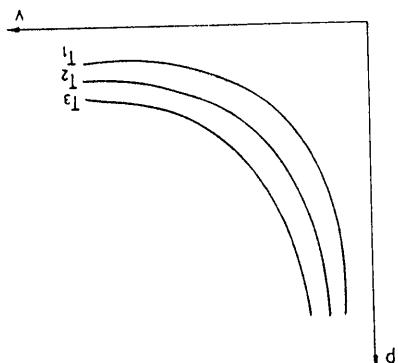
*** Robert Boyle (1627-1691), irski fizikar i hemičar; osim za-
kom o streljivosti gase aktno je i ulogu kiseonika pri gorjenju.

$$V = V_0(1 + \gamma t) \quad (\text{pri } n \neq \text{const.}) \quad (64.7)$$

temperaturam, tj.

a. Zapravljena date količina gase pri stalnom pritisku peline se menja sa
stantnoj zapremine date. Količine gase određene je Gej-Lissaku-
ture pri konstantnom pritisku i pritisku od temperaturu pri kon-
stantnoj zapremini (koje smo već spomenuli u 63.5):
vim zakonima (koje smo već spomenuli u 63.5):

2. Gej-Lissakovii zakoni. Zavisnost zapremine od tempera-
tuke i zapremine, zadržavajući pri tome istu temperaturu. Kriva
prelazi različite pritis-
stvari i procese pri kojem gas
predstavlja zapravo okre-
svaka kriva u dijagramu
na sljedi 64.1. predstavlja
određeno stanje gasea,
ka trecu u P-V diagramu
dnapinom (64.6). Kako sva-
bola iz familiјe date je-
dne na jednakostrana hipere-
temperaturi odgovara okre-
rature. Premda tome, svakoj
ni (64.6) zavis od tempe-
nosti konstante u jednaci-
nosti u suspendovanu jendakostranu
jednakina (64.6) predstavlja u tzv. P-V dijagramu jendakostranu
ova definicija predstavlja Bojl - Marototu zakon. Matematički
jednakuci pod mikroskopom polenovo prav suspendovan u tehnost. Po njemu je ovo kretanje, koje nastaje zbrog udara molekula te-
nosti u suspendovane delice, nazvano Branović kretanje. U
čvrstom agregatnom stanju se terminski kretanje ogleda u oscil-
lacijsama medijusobno vezanih molekula oko ravnoteznog položaja.



1. Bojl-Marototu zakon. Pri konstantnoj temperaturi, zape-
gasova pri ovakvom uslovima, otkriveni su sledeći zakoni:
pri niskim pritiscima i visokim temperaturama svaki
činim sudarom.

Onovne zakonitosti ponasanja gasova se mogu naći u
mnoge osobine materije u gasovitom stanju.
Kinetička teorija veoma jednostavno mogla upotrebljujemo
gasova razlikuju samo po masama. Ovo je razlog zbroj koji je
molekule objasniti prostom prepostavkom da se molekuli razlikuju
neimarjivo. To znati da se veliki broj fizikalnih osobina gasova
daju molekula velika, pa je dejstvo medijumolekularnih sile za-
u gasovitom agregatnom stanju su rastojanja izme-
du molekula.

64.3. Idealan gas. Jedenacina stanja idealnog gasea
molekularni sile zavis od rastojanja medju molekulama.
razlike izmedju materije u raznim agregatnim stanjima (gasovi-
tipa molekula i od medijumolekularnog rastojanja. Kvilitativne
lacijama medijusobno vezanih molekula oko ravnoteznog položaja.
čvrstom agregatnom stanju se terminski kretanje ogleda u oscil-
nosti u suspendovane delice, nazvano Branović kretanje. U
materijal pod mikroskopom polenovo prav suspendovan u tehnost. Po njemu je ovo kretanje, koje nastaje zbrog udara molekula te-
meru pritisku ili, prioritudo iz pritiska i zavremene određene količine ga-
mit date količine gasa koja je određena problemom matematikom, je obrnutu spra-
vila pri stalnoj temperaturi je konstantna, tj.

$$\bar{P}V = \text{const.} \quad (\bar{z}a \quad n = \text{const.} \quad \bar{t} = \text{const.}) \quad (64.6)$$

gde je V_0 zapremina gasa na 0°C , V je zapremina gasa na temperaturi t , a $\gamma = 1/273,15$ termički koeficijent širenja gasa. Iz (64.7) sledi da je

$$\gamma = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta t} \quad (64.8)$$

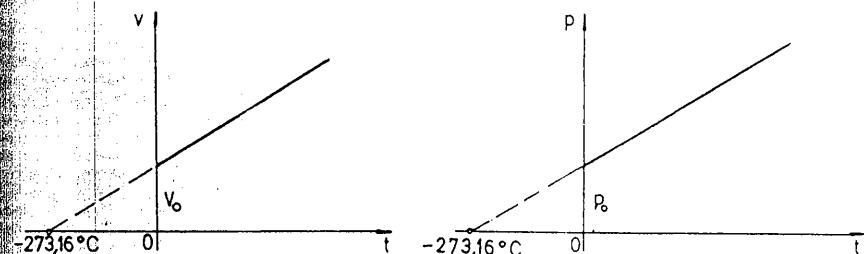
Prema (64.8) proizilazi da svi gasovi pod stalnim pritiskom pri povećanju temperaturi za 1°C , povećavaju svoju zapreminu za $1/273$ deo one zapremine koju je gas imao na 0°C . Promena stanja gasa koja se vrši pri stalnom pritisku predstavlja izobarni proces ($p = \text{const.}$).

b. Pritisak date količine gasa pri stalnoj zapremini linearno se menja sa temperaturom, tj.

$$p = p_0(1 + \gamma t) \quad (\text{pri } n \text{ i } V = \text{const.}) \quad (64.9)$$

gde je p_0 pritisak gasa na 0°C , p je pritisak gasa na temperaturi t , a $\gamma = 1/273,15$ termički koeficijent pritiska. Promena stanja gasa koja se vrši pri stalnoj zapremini predstavlja izohorni proces ($V = \text{const.}$).

Grafički prikaz relacija (64.7) i (64.9) očigledno predstavljaju prave (sl. 64.2. i 64.3.) koje presecaju apsispisu u tački $t = -273,15^\circ\text{C}$. Temperatura od $-273,15^\circ\text{C}$ predstavlja



Sl. 64.2

Sl. 64.3

početak Kelvinove skale, kao što smo rekli u poglavlju 63.2. Gej-Lisakovi zakoni delimično nam objašnjavaju zašto je to najniža moguća temperatura. Na osnovu (64.9) vidimo da idealan gas na

ovoј temperaturi ne vrši pritisak na zid suda. Kako je pritisak posledica udara molekula o zidove suda, sledi da se na ovoj temperaturi zaustavlja haotično kretanje molekula u prostoru. Prividna "besmislica" koja sledi iz (64.7), da gas na najnižoj temperaturi gubi zapreminu posledica je prepostavke o "idealnom" gasu čiji delići nemaju zapreminu.

Prema jednačinama (64.6), (64.7) i (64.9) sledi da je stanje gasa odredjeno sa četiri parametra: količinom gase n , temperaturom T , pritiskom p i zapreminom V . Veza izmedju ovih veličina data je u matematičkom obliku

$$F(n, p, V, T) = 0 \quad (64.10)$$

i predstavlja opšti oblik funkcije stanja gasa. Praktično se kod čvrstih i tečnih tela ne uzimaju u obzir svi ovi parametri, ali kod gasova svaka promena jedne od ovih veličina izaziva znatnu promenu drugih. Prema tome, kada se funkcija (64.10) odredi odredjeni su i zakoni po kojima se ponašaju gasovi.

Sada ćemo, polazeći od navedenih zakona, izvesti jednačinu gasnog stanja koja povezuje sva četiri parametra u jednačini (64.10).

Neka su p_0 i V_0 pritisak i zapremina odredjene količine gasa na temperaturi 0°C . Ako se na toj temperaturi promeni pritisak, od p_0 na p , onda će se promeniti i zapremina od V_0 na V . Kako je ova promena izotermска ($T = \text{const.}$) po Bojl-Mariottovom zakonu biće

$$p_0 V_0 = p V' \quad (64.11)$$

Zagreje li se sada gas od 0°C na $t^\circ\text{C}$, pri stalnom pritisku p ($p = \text{const.}$), gas će se širiti te će prema Gej-Lisakovom zakonu biti

$$V = V'(1 + \gamma t)$$

odnosno

$$V' = \frac{V}{1 + \gamma t} \quad (64.12)$$

odnosno

odnosno za proizvodju kočnitu od u moloua gase

$$PV = RT$$

$$(64.17)$$

jednacina gasnog stanja

$$R = (8,31441 \pm 0,00026) J/mol K$$

Sada se za 1 mol bilo kolicina gase moze prema (64.16) napisati

vom R i njeni tachna eksperimentala vrednosti iznosil

Prema tome velicina P_0V_0/T_0 jednaka je za sve gasove i predstavljaju

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{101,325 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273,15} = 8,314 J/mol K$$

Ako se uzme 1 mol nekog gase pri $P_0 = 101,325 \text{ Nm}^{-2}$, $V_0 =$

vrednost konstante u izrazu (64.16) zavisi od kočnine gase.

$$PV = \text{const}. T$$

$$(64.16)$$

odnosno

$$\frac{P}{T} = \text{const}.$$

ne gase velicina PV/T ostaje nepromenjena, tj.

Iz izraza (64.14) izlazi da pri promeni stanja oredjenje kočniti

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0V_0}{T_0}$$

i21

$$PV = P_0V_0 \frac{T}{T_0}$$

staje

kako je $\gamma = 1/273,15 = 1/T_0$, a $T = 273,15 + t$ izraz (64.13) postaje

$$PV = P_0V_0(1 + \gamma t)$$

odnosno

$$P_0V_0 = P \frac{1 + \gamma t}{V}$$

Zamenom V u jednacini (64.11) dobija se

$$PV = nRT$$

$$(64.18)$$

$$PV = M RT$$

$$(64.19)$$

64.4. osnova jednacina kinetike teorije gaseva.

jednacina (64.18) pozata je pod imenom klapetrovova jednacina

$$PV = M RT$$

$$(64.19)$$

u termodynamiku.

„Rudolf Clausius (1822-1888), nemacki fizik, jedan od os-

* Emile Clapeyron (1799-1864), francuski fizik i inženjer,

jedan od osnivača termodinamike.

„Jem obliku) od strane Klauszusa 50-tich godina XIX veka.

„Dlak funkcijs F. Osnovne jednacina bila je izvedena (u sadas-

translatornog kretanja nizgavich molekulama, tj. da je konkretn

ravisanost izmedju pritisaka gase i srednje kinetičke energije

osnova jednacina kinetike teorije idejalnog gase upravo da je

$$P = f(E)$$

$$(64.20)$$

nog kretanja gasenih molekula E, tj.

sa mora biti funkcijs f srednje kinetičke energije translator-

energije translatornog kretanja nizgavich molekulama. Zbog toga pritisak ga-

la zavisi od brzine nizgavog kretanja, a to zavisi i od kinetike

zahvaljujući udarima molekulama o zidove suda. Sila udara moleku-

lovljen toplotnim površinom zida ova sila je očigledno

predstavljeni pritisak gase. Na taj način pritisak gase je us-

se obratno na jedinici površine zida ova sila je očigledno

ke, relativno velike sila koja je normalna na zidove suda. Ako

nog broja molekula zidovi suda tripe skoro neprekidno dejstvo ne-

slabom silom koja je normalna na zid nekom relativno

suda. Prvi savakom udaru molekuli deluju na zid nekom relativno

tizno kretaju. U procesu tog kretanja molekuli udaraju o zidove

dišta molekularno kinetike teoriju, skup molekula koji se har-

gas koji se nalazi u sudu predstavlja, sa time

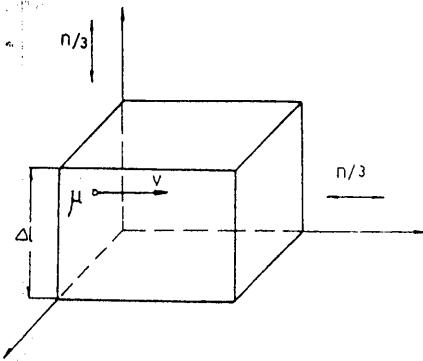
Daltonov zakon

64.4. osnova jednacina kinetike teorije gaseva.

jednacina (64.18) pod imenom klapetrovova jednacina

stacija izdelovanog gase.

Mi ćemo izvesti osnovnu jednačinu na primeru kada se gas nalazi u sudu u obliku kocke sa ivicom dužine Δl (sl. 64.4).



Sl. 64.4

Sila Δf kojom molekul deluje na zid suda označimo sa Δf a sa Δt vreme trajanja sudara tada će sa glasno zakonu promene količine kretanja impuls sile biti jednak promeni količine kretanja

$$\Delta f \cdot \Delta t = 2\mu v \quad (64.21)$$

Sila Δf kojom molekul deluje na zid traje kratko, samo i momentu udara. Ostali, i pri tom veliki deo vremena izmedju dva uzastopna sudara molekul ne deluje na taj zid. Ako sa Δt označimo vreme izmedju dva uzastopna sudara posmatranog molekul o isti zid, za to vreme molekul će preći dve dužine ivice kocke ($2\Delta l$). Zbog toga će srednja sila \bar{F} delovanja molekula za vreme Δt na zid biti znatno manja od stvarne sile Δf . Očigledno je da će vrednost impulsa srednje sile biti jednak vrednosti impulsa trenutne sile

$$\bar{F} \Delta t = \Delta f \Delta t = 2\mu v \quad (64.22)$$

Kako se molekul kreće konstantnom brzinom, vreme izmedju dva uzastopna sudara Δt biće

$$\Delta t = \frac{2\Delta l}{v} \quad (64.23)$$

te izraz za srednju силу (64.22) kojim jedan molekul deluje na zid kocke dobija oblik

$$\bar{F} = \frac{\mu v^2}{\Delta l} \quad (64.24)$$

Ako sa n' označimo ukupan broj molekula u kocki, izmedju dve paralelne stranice kocke će se kretati $n' = n/3$ molekula (jer su svih pravci kretanja ravnopravni). U principu, svaki od n' molekula može imati drugačiju brzinu, te se ukupna sila na posmatrani zid može napisati kao

$$\bar{F} = \frac{\mu}{\Delta l} \sum_{i=1}^{n'} v_i^2 \quad (64.25)$$

Uvodeći definiciju srednje vrednosti kvadrata brzine molekula

$$\bar{v}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n'} v_i^2}{n'} \quad (64.26)$$

za ukupnu srednju silu dobijamo izraz

$$\bar{F} = \frac{\mu n}{3\Delta l} \bar{v}^2 \quad (64.27)$$

pa pritisak na zid suda možemo izraziti kao

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{\mu n}{3\Delta l^3} \bar{v}^2 \quad (64.28)$$

Kako je $\Delta l^3 = V$, a broj molekula u jedinici zapremine je $n_0 = n/V$, sledi

$$p = \frac{n_0}{3} \mu \bar{v}^2 \quad (64.29)$$

Ako sa

$$\bar{E}_\tau = \frac{\mu \bar{v}^2}{2} \quad (64.30)$$

označimo srednju kinetičku energiju translatornog kretanja molekula i ovu veličinu uvrstimo u (64.29) dobijemo osnovnu jed-

akčinu kinetičke teorije gasova

$$P = \frac{2}{3} N \bar{v}_e^2$$

$$(64.31)$$

Vidimo da se u njoj makrofizička veličina pritisak izražava kao srednja vrerdnost mikrofizičke veličine, kinetičke energije molekula. Možeće jednacina (64.31) sa molarnom zapreminom V_0 i izmjeniču u obzir da u molarnoj zapremini imamo $N_0 V_0 = N$ molekula, dobijamo

$$PV_0 = \frac{2}{3} N \bar{v}_e^2$$

Na osnovu opte jednacine gasnog stanja izraz (64.32)

$$(64.32)$$

$\frac{e^2}{N} = \frac{2}{3} R T$

$$\frac{e^2}{N} = \frac{2}{3} k T$$

manovom konstantom i uobičajeno je da se (64.33) piše u obliku

$$(64.34)$$

64.5. Raspoloživa energija po stepenima slobođe
a. Broj stepeni slobođe mehaničke sistema
64.5. Raspoloživa energija po stepenima slobođe

gde su P_i parcijalni pritisici, \bar{v}_i . Pritisici k_{ij} bi vršile po
jedine komponente smese kada bi se u suđu nalazile same i u is-
toj koordinati kao u smesi. Zakon (64.36) se zove Daltonovim za-
konom i tvrdi da je da je za idealne gaseove pritisak smese jednak zbiru
vseih koordinata koje određuju polazaj sistema. Izračunagemo broj ste-
penih koordinata u prostoru u kojem se naziva broj neza-

b. Projekti slobođe mehaničke sistema

penti slobođe za različite mehaničke sisteme.

1. Materijalna takva u prostoru
na takva u prostoru ista je stepena slobođe. Stepeni slobođe
tri koordinatne (x, y, z), te prema gornjoj definiciji materijal-

2. Dve materijalne takve sa stalnim međusobnim raspodjelj-
em temperature, a ne i od mase molekula.

3. Stepeni slobođe mehaničke sistema se naziva broj ste-
penih koordinata koje određuju polazaj sistema. Izračunagemo broj ste-
peni slobođe za različite mehaničke sisteme.

4.5. Raspodjela energije po stepenima slobođe

na parcijalnih pritisaka gaseova koji ihine smiju.

5. Konstanta tvrdi da je da je za idealne gaseove pritisak smese jednak zbiru
takva u prostoru u kojem se naziva broj neza-

projekti slobođe mehaničke sistema

suda može da se napravi u obliku

6. Srednju kinetičku energiju, pritisak k_{ij} smesa vrši na zidove

posto svih molekula na datoj temperaturi imaju istu

$$n_0 = n_{01} + n_{02} + \dots \quad (64.35)$$

ukupan broj molekula prve vrste, n_{01} molekula druge vrste, itd.

* Kvantna mehanička pokazuje da i na absolutnoj temperaturi molekula je postoji nekočno mnoštvo rotacionih tipa i naziva se nulto osjetljivoće.

ulto osjetljivoće je postoji nekočno mnoštvo rotacionih tipa i naziva se nulto osjetljivoće.

Pretpostavimo da smes gasa u jedinici zapremine

raslojene su u zidove sude.

o na gasunu smesu da bi izracunali pritisak k_{ij} gasuna smesa

Daltonov zakon. Pokusamo da zakon (64.31) primeni-
emperaturu, a ne i od mase molekula.

Treba da podučemo da $\frac{e^2}{N} = \frac{2}{3} k T$ isto samo od apsolutne
temperaturice, a nizica temperaturice ne može da postoji.

a ovaj temperaturi prestaje kretanje molekula, te je jasno
da se temperatura $T = 0$ zove apsolutnom nullom temperaturskie skale.
energijske molekula. Na osnovu (64.34) možemo lako videti zašto
temperaturice. Vidimo da je temperatura mera rednjeg kinetičke
Dobijena jednacina nam daje mikrofizičko značenje

$\frac{e^2}{N} = \frac{2}{3} R T$

Količnik $R/N_A = k = 1,38 \cdot 10^{-23} [J/K]$ se naziva Bolt-
mannovom konstantom i uobičajeno je da se (64.33) piše u obliku

$\frac{e^2}{N} = \frac{2}{3} R T$

Na osnovu opte jednacine gasnog stanja izraz (64.32)

$$(64.32)$$

$PV_0 = \frac{2}{3} N \bar{v}_e^2$

$\frac{e^2}{N} = \frac{2}{3} R T$

izražava kao srednja vrerdnost mikrofizičke veličine, kinetičke
energije molekula. Možeće jednacina (64.31) sa molarnom zapre-

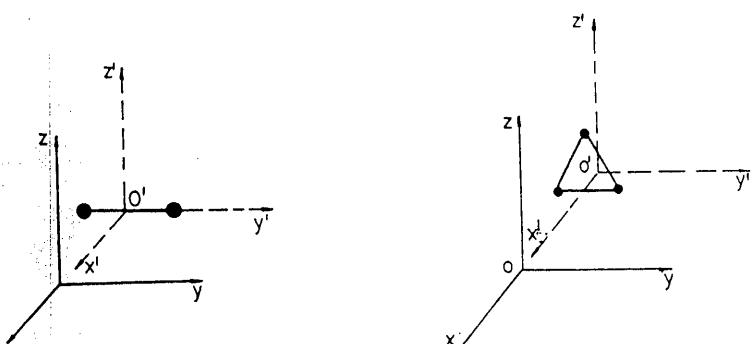
mijom V_0 i izmjeniču u obzir da u molarnoj zapremini imamo $N_0 V_0 =$

N molekula, dobijamo

$$(64.31)$$

3. Sistem od tri i više materijalnih tačaka na stalnom medjusobnom rastojanju

Položaj ovakvih sistema ćemo opisati sa koordinatama masa u koji stavljamo početak O' sistema i sa uglovi-
(θ , ϕ , ψ) koji opisuju rotaciju sistema u odnosu na sistem
(sl. 64.6). Znači, ovaj sistem ima tri translaciona i tri



Sl. 64.5

Sl. 64.6

rotaciona stepena slobode.

Kako je 99,9% mase atoma skoncentrisano u jezgru, čiji je poluprečnik veoma mali ($R \approx 10^{-15} \text{ m}$), možemo atome u daljem smatrati materijalnim tačkama.

Na osnovu do sada izloženog, jednoatomni molekul će imati tri translaciona stepena slobode, dvoatomni molekul će imati pet stepeni slobode, a troatomni i višeatomni molekul će imati šest stepeni slobode.

b. Raspodela energije po stepenima slobode

U prethodnim razmatranima smo, polazeći od pretpostavke da su kod haotičnog kretanja molekula sva tri pravca ravноправna, za energiju jednoatomnih molekula dobili rezultat (64.34). Kako pri kretanju molekula nijedna vrsta kretanja ne ma veću verovatnoću od ostalih, prirodno je zaključiti da se ukupna energija ravnomerno raspodeljuje po stepenima slobode,

tj. da na svaki stepen slobode dolazi prosečno ista energija $\bar{\epsilon}'$.

Na osnovu ove prepostavke i rezultata (64.34) možemo zaključiti da je prosečna energija po stepenu slobode jednak

$$\bar{\epsilon}' = \frac{1}{2} kT \quad (64.37)$$

pa prema tome, molekul sa i stepeni slobode ima srednju kinetičku energiju

$$\bar{\epsilon} = i\bar{\epsilon}' = \frac{i}{2} kT \quad (64.38)$$

64.6. Unutrašnja energija i masena količina toplote idealnog gasa

Unutrašnjom energijom idealnog gasa se naziva zbir energija kretanja pojedinih molekula.

Unutrašnja energija jednog mola gasa je

$$U_M = N_A \bar{\epsilon} = \frac{i}{2} RT \quad (64.39)$$

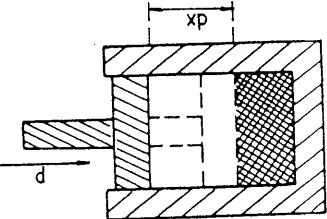
a unutrašnja energija m grama gasa molekulske mase M je

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT \quad (64.40)$$

Vidimo da unutrašnja energija idealnog gasa zavisi od broja stepeni slobode molekula i i od absolutne temperature T . Možemo još zapaziti da se u okviru našeg modela idealnog gasa vrsta gasa zadaje sa dva parametra: molekulskom masom M i brojem stepeni slobode i .

a. Masena količina toplote idealnog gasa

Pri zagrevanju gasa se ne mora sva količina doveđene toplote Q trošiti na povećanje temperature gasa, jer usled zagrevanja gas može da se širi i da vrši rad. Zato kada se govori o masenoj količini toplote gasova, treba da se precizira pod kojim uslovima gas prima toplotu. Iz tih razloga se za gaze posebno definišu molarna masena količina toplote za zagre-



míčeno i na vřesně rada $p dV$.

S1. 64. 9.

$$dQ = dU + p dV$$

$$(64.46)$$

trásné energií gasa du a dešti-
deštního troši na pověgané unu-
loté dle se prí bavkvi uslovíma
ukupna kolíčina top-

$$= p dV$$

$$(64.45)$$

síle

sdu vřisí rad protiv spojásné
prí sítrení gas u

on ce se prí zágrevanu sítřiti (S1. 64.7).

Ako gas zágrevalo prí stánom spojásném prítisku

2. Zágrevanje prí $p = \text{const}$.

$$C_V = \frac{\dot{m}}{2} R$$

$$(64.44)$$

za molarnu masenu kolíčinu toploote ($C_V = M C_V$) za zágrevanje prí
stánu zápremiňi dobjá se konáno

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\dot{m}}{2} R$$

kako iz (64.40) sledí da je

$$C_V = \frac{1}{2} \frac{dU}{dt}$$

$$(64.42)$$

Ako se (64.41) zamení u (63.5), dobjá se

$$dQ = dU$$

$$(64.41)$$

kolíčina toploote Q se troši na pověgané unutrásné energií
pod ovím uslovom gas ne može da vřisí rad i dovedena

1. Zágrevanje prí $V = \text{const}$.

loté za zágrevanje prí stánu prítisku (C_P).

vanije prí stánu zápremiňi (C_V) i molarna masena kolíčina top-

VRSTA MOLEKULA	$C_V \approx 4i \text{ [J/mol K]}$	$C_p \approx 4(i+2) \text{ [J/mol K]}$
jednoatomni	12	20
dvoatomni	20	28
tro- i višeatomni	24	32

Rezultati koji su prikazani u gornjoj tabeli, dobijeni su na prostom modelu gasa koji molekulsku strukturu opisuje samo preko molarne mase M i broja stepeni slobode i , očigledno neće biti u saglasnosti sa eksperimentalnim rezultatima u onim oblastima temperatura gde unutrašnja struktura molekula gasa igra značajnu ulogu. Najbolja slaganja sa eksperimentima se dobijaju u oblasti srednjih temperatura ($150^\circ < T < 400^\circ$). Videćemo kasnije da sami molekuli ne primaju energiju kontinuirano, već samo u strogo određenim količinama koje su jednake razlici izmedju energetskih nivoa molekula. Takođe ćemo pokazati da se molekuli mogu pobuditi i u vibraciona stanja, što nam sve pokazuje da zakon o ravnomernoj raspodeli energije po stepenima slobode ima vrlo ograničenu važnost.

64.7. Maksvelov zakon raspodele brzina

Kao što smo ranije rekli, molekuli idealnog gasa se kreću u svim pravcima i međusobno interaguju elastičnim sudarima. Zbog velikog broja molekula ne može se izračunati kako će se menjati brzina jednog molekula tokom vremena, niti se može reći kolika će biti tačna brzina molekula u određenom vremenskom trenutku. Međutim, metodama statističke fizike Maksvel^{*} i Boltzman su uspeli da izračunaju verovatnoću da deo ukupnih molekula gasa na datoj temperaturi T ima brzinu u intervalu od v do $v + dv$.

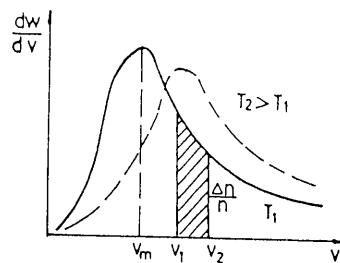
* James Clark Maxwell (1831-1879), engleski fizičar. Osim radova u kinetičkoj teoriji gasova, Maksvel je svojim poznatim jednačinama postavio okvire klasične elektrodinamike i osnovao elektromagnetnu teoriju svetlosti.

Ako ukupan broj molekula u gasu označimo sa n , tada ovu verovatnoću možemo da napišemo u obliku

$$dW \equiv \frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi} \cdot \alpha^3} v^2 e^{-(v^2/\alpha^2)} dv \quad (64.53)$$

gde je $\alpha = \sqrt{2kT/\mu}$. Količnik dW/dv nazivamo gustinom verovatnoće i on određuje verovatnoću po jedinici intervala brzine.

Zavisnost gustine verovatnoće od brzine molekula je prikazana na slici 64.8., za razne vrednosti temperature T .



Sli. 64.8

Analiziraćemo nekoliko osobina raspodele brzina.

1. Najverovatniju brzinu (polozaj maksimuma krivih prikazanih na slici 64.8.) možemo izračunati iz uslova

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{dW}{dv} \right) = 0 \quad (64.54)$$

i dobićemo rezultat

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} \equiv \alpha \quad (64.55)$$

Pri datoј temperaturi T će najveći broj molekula imati brzinu v_m . Možemo primetiti da prikazana raspodela brzina nije simetrična oko v_m . Površina sa desne strane od v_m je uvek veća od površine sa leve strane, što znači da na datoј temperaturi uvek imamo u gasu veći broj molekula sa brzinom $v > v_m$, nego sa $v < v_m$.

2. Najverovatniji broj molekula Δn koji će od ukupno n molekula na temperaturi T imati brzinu izmedju v_1 i v_2 može se izračunati kao

$$\frac{\Delta n}{n} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dW}{dv} dv \quad (64.56)$$

na osnovu

te izrazjma

zina

govera strafirana površina izmēđu V_1 i V_2 .

6.

Da bismo dobjeli predstavu o tipičnoj brzini molekula

$$a < \nabla < \sqrt{V}$$

(64.61)

na osnovu kojih možemo napisati kvazitativni izraz

$$\nabla = \frac{\sqrt{a}}{2} = 1,13a; \sqrt{V^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} a^3 = 1,22a \quad (64.60)$$

$$(\nabla^2)^{1/2} = \left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} V_i^2} \right]^{1/2}$$

i koren iz srednje kvadrata brzine

$$\nabla = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} V_i^2}$$

5. Zbog nesimetričnosti krive (sl. 64.8) srednja brzina razlikuje da vrednost maksimuma opada kao $1/V$ sa porastom temperature.

$$\left[\frac{dV}{dW} \right]_{\max} = \frac{e^{\frac{1}{V}}}{\sqrt{2\pi}}$$

4. Iz izrazza (64.55) vidimo da se polozaj maksimuma brzine v vrednosti (64.55) i tada smo dobiti rezultat maksimuma možemo izracunati ako u formulu (64.53) uvrstimo umesto maksimove raspodelite menjaju sa temperaturom kao T . Vrednost maksimuma ne, ali i ih daleko najviše imaju sa brzinom oko V_m .

3. Sa sljedećem (64.8. vidimo da $dW/dV + 0$ samo za $V + 0$ i $V + \infty$. Na osnovu ovе osobine možemo zaključiti da na datori temperaturi molekulji idealing gase mogu imati sve moguće brzine, ali i ih daleko najviše imaju sa brzinom oko V_m .

Na sljedici 64.8. brojnoj vrednosti ovog integrala od-

* Stern, otto (1888-1969) nemacki fizik,

-

načinovanički brzini V_m za datu temperaturu centralne zice.

ca (atom, molekul) skupljaju na onom mestu as koje odgovara

Eksperiment sterna je pokazao da se najviše esti-

$$V = \frac{AS}{4R^2} \quad (64.65)$$

atomu po formuli

Iz pređenog puta i ugaone brzine računa se brzina

$$AS = R \cdot a \quad (64.64)$$

me at prelazi put

stantnom brzinom w , svaka tako na spoljasnjem cilindru za vre-

AKO se ceo sistem rotira oko centralne zice sa kon-

$$At = \frac{V}{R} \quad (64.63)$$

od centralne zice do filma za vrste

na providnom filiju. Ovi atomi stizu

spoljasnjem cilindru gdje se takože

ma. Atomski sredra se registruju na

je atome sredra sa razlike brzina

zagrevaju električnom strujom i emituju

se posredstvom platinika zica koja se

Dak osje cilindra nalazi

da je prikazana na sljedići 64.9.

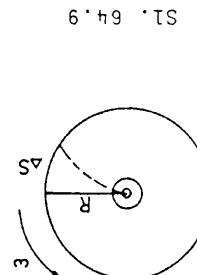
(64.53) izveo je Stern 1920. Godine. Šema nizgovanog merenja repre-

Pri eksperimentu dokaz valjanosti relacijske

64.8. eksperimentalna potvrda Maksvelove raspodelite brzine

$$= 5800 \text{ km/h}$$

$$(64.62)$$



Sl. 64.9

$$a = \sqrt{\frac{2RT}{N}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 300}{2 \cdot 6 \cdot 10^3}} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (64.62)$$

nu molekulu vodonika na temperaturi $T = 300 \text{ K}$.

kula na sobinu temperatura izračunagemo načinovaničku brz-

64.9. Boltzmanova raspodela energije u gasu

Boltzman je Maksvelovoj raspodeli brzina dao oblik koji se pokazao prikladnijim za upotrebu i u drugim granama fizike, pre svega u elektrotehnici. Boltzman je umesto brzine u Maksvelovoj raspodeli (64.53) koristio energiju. Tako je dobio nov izraz za raspodelu energije koji je neposrednije povezan s jednim od temeljnih makroskopskih veličina u gasu, njegovom temperaturom. Za raspodelu energije u gasu temperature T izračunao je Boltzman izraz^{*}

$$dW(\epsilon) = W(\epsilon)d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/kT} d\epsilon \quad (64.66)$$

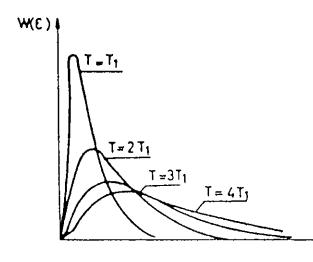
gde je $dW(\epsilon)$ verovatnoća da čestica u gasu ima energiju u intervalu $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$, tj. u okolini vrednosti ϵ . Broj čestica u energetskom intervalu $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ dat je izrazom

$$dN = NW(\epsilon)d\epsilon$$

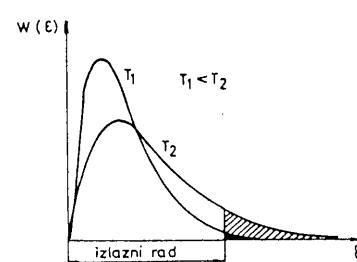
gde je N ukupan broj čestica u gasu. Zanemarimo li konstantne faktore u (64.66), onda je pri datoј temperaturi T funkcija verovatnoće $W(\epsilon)$ proizvod dva faktora, koji oba zavise od energije i to tako da jedan raste s energijom ($\epsilon^{1/2}$), a drugi još brže sa energijom opada ($e^{-\epsilon/kT}$). Delovanje tih dvaju faktora daje oblik krivulja raspodele na slici 64.10.a. Boltzmanova raspodela (64.66) predstavlja dakle skup krivih odredjenih parametrom T . Lako se uočava da su raspodele koje odgovaraju višim temperaturama T izduženije prema višim energijama. Pri višoj temperaturi T broj molekula sa većom energijom je veći. U svakom slučaju, vidi se da nema molekula sa energijom nula, dok broj molekula velike energije naglo opada. Značajno je napomenuti da zakon raspodele energije (64.66) nije ograničen samo

* Iz (64.66) sledi Maksvelova raspodela kada je $\epsilon = 1/2(\mu v^2)$, tj. kada je ϵ kinetička energija. Prema tome, Boltzmanova raspodela je opštija od Maksvelove, jer u Boltmanovoj teoriji ϵ ne mora da bude samo kinetička energija, već bilo koja energija koju čestica poseduje.

na molekule u gasu. Pri kraju XIX i u početku XX veka, fiziča-



a)



b)

Sl. 64.10

ri su uočili da se i elektroni, nosioci električne struje u metalima, mogu tretirati poput gasa, te da Boltzmanovom raspodelom možemo objasniti emisiju elektrona iz užarenih metala, (katoda), tzv. termojonsku emisiju. Da bi izašli iz metala, elektroni moraju savladati određen otpor, tj. utrošiti neki rad. Za to im je potrebna određena energija koju nazivamo izlazni rad. Neka je ta energija ϵ_{iz} (sl. 64.10.b). Pri nižoj temperaturi T_1 malo će elektrona imati energiju veću od ϵ_{iz} . S druge strane, poraste li temperatura na T_2 , broj elektrona koji imaju energiju veću od ϵ_{iz} naglo će porasti.

64.10. Srednja dužina slobodnog puta. Difuzija

Ako prihvatimo da se molekuli kreću haotično vrlo velikim brzinama (vidi (4.62)), postavlja se pitanje koliki put oni prelaze izmedju dva uzastopna sudara?

Jasno je da se dužina ovog puta (koji se naziva slobodan put) menja od sudara do sudara, ali se može izračunati srednja dužina slobodnog puta koju molekuli prosečno predaju izmedju dva uzastopna sudara.

Da bi procenili ovu veličinu, prvo ćemo izračunati koliko sudara trpi u jedinici vremena molekul koji se kre-

neće nam dati novi podatke o strukturi materije, niti će se termočinamika približiti izučavanju toplotnih osobina materije termodinamike i za pravaranje te energije u razne oblike. Dakle mo da definisemo neke opte zakonitosti vezane za energiju te riti unutrašnju strukturu materije koju ispitujemo i pokusage novišta karakteristike za termočinamiku. Potpunoemo zanemar

65.1. OSNOVI FIZIKI TERMODINAMIKE

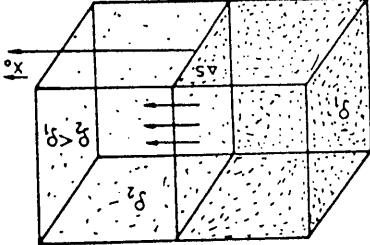
$$(64.74)$$

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{V}$$

gent difuzije može naprasti u obliku uslova pod kojim gasi vrši difuziju. Za idealan gas se koeficijente. Koeficijent difuzije zavisi od vrste gase i od fizikalizde je A_p/A_x gradijent zapreminske mase i D koeficijent difuzije

$$(64.73)$$

$$\frac{dM}{dt} = - D \frac{\partial \rho}{\partial x} A_S$$

veličina je data formулom
SL. 64.12

definise kao masa gase AM
koja za jedinicu vremena
prodiše kroz površinu AS. Ova
definise kroz površinu AS, ovak
Brzina difuzije
lu površinu AS (SL. 64.12).
emo difuziju gase kroz ma-
opisali ovu posmatrati-
lazi. Da bi kvantitativno
zapremini u kojoj se gase na-
ja gase ne izjednaci u celoj
kog kretanja molekula. Ovaj proces se vrši dok se koncentraci-
difuzija se naziva prenosenje gase usled termič-

SL. 64.12

je brzina termičke ekspanzije gaseova daleko manja od srednje
brzine samih molekula.

1. Difuzija

veoma jesti dozivljavaju međusobne sudeće i to je razlog što
možemo uočiti da molekuli pri hotočnom kretanju

bijamo rezultat $T = 10^{-6}$ m.
Za ranije razmatran primjer za molekul vodonika do-

$$T = \frac{V}{\pi} = (4\sqrt{2} \pi n)^{-1} \quad (64.72)$$

iz formule

Srednju dužinu slobođenog puta \bar{L} emo izračunati

izvijava 1,4.10⁹ sudara.

pa se dobija rezultat koji pokazuje da molekuli u sekundi do-

$$n_0 = 3.10^25 \text{ m}^{-3}; x = 10^{-10} \text{ m}; V = 10^3 \text{ m}^3 \quad (64.71)$$

koje se pojavljuju u (64.70) su

izvijava na temperaturi $T = 300$ K. Brojne vrednosti veličina izrađene broj sudara koji molekul vodonika do-

dobjeni rezultat treba pomnožiti sa N_A .
Ako se uzme u obzir kretanje i ostalih molekula,

$$v = \frac{dL}{dt} = 4n_0 \pi^2 \bar{V} \quad (64.70)$$

mena

molekula, što znaci da je traženi broj sudara u jedinici vre-

$$n = n_0 \cdot 4\pi^2 \bar{V} \quad (64.69)$$

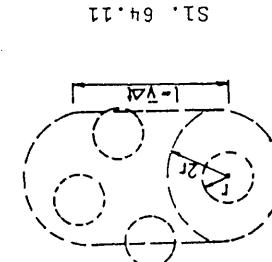
U ovu zapremini ukupno ima

$$L = \sqrt{Vt} \quad (64.68)$$

gde je

$$V = 4\pi^2 \bar{V} \quad (64.67)$$

ze u zapremini
ti sa svim molekulama koji se nalazi
smatran molekul za vreme at sudari-
u tom slučaju će se po-



mo svih ostalih mrtviju (SL. 64.11)

Li imaju iste poluprečnike i da osim molekula koji posmatra-
je brzinu termičke ekspanzije gaseova daleko manja od srednje

bazirati na našim saznanjima o toj strukturi, već će rešavati pitanja vezana za transformaciju energije u razne vidove i u mehanički rad. Ova oblast fizike bazira na uopštenim rezultatima brojnih eksperimenata koji su formulisani u vidu osnovnih principa termodinamike. Pre nego što se upoznamo sa samim principima, upoznaćemo se sa osnovnim pojmovima termodinamike, jer mnogi termini koji se koriste u svakodnevnom životu i u fizici imaju specifična, precizno definisana značenja u termodinamici.

1. **Termodinamički sistem.** Termodinamičkim sistemom nazivamo određenu količinu materije ograničenu zatvorenom površinom. Sistem je izolovan ako ne prima, niti odaje energiju.

2. **Termodinamička ravnoteža sistema.** Sistem se nalazi u stanju termodinamičke ravnoteže ako sve tačke sistema imaju istu temperaturu. Posle dovoljno dugog vremena izolovan sistem dolazi u stanje termodinamičke ravnoteže.

3. **Termodinamičko stanje sistema.** Stanje termodinamičkog sistema definiše neka međuzavisnost u skupu njegovih osnovnih fizičkih karakteristika.

4. **Parametri sistema.** Stanje sistema se određuje pomoću nekoliko fizičkih parametara. Osnovni parametri su T , p , V i m . Za idealan gas ovi parametri figurišu u jednačini stanja. Složeniji oblici materije se obično opisuju sa još nekoliko parametara stanja (npr. nanelektrisanje je parametar nanelektrisanih sistema).

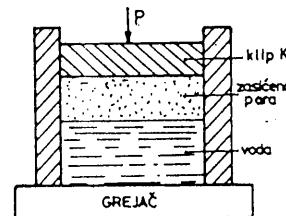
5. **Okolina sistema.** Okolinu sistema čine svi sistemi sa kojima posmatran sistem razmenjuje energiju. Prenošenje energije preko granice sistema može da se vrši na dva načina: protokom toplote i vršenjem rada.

6. **Termodinamički proces.** Ako se bar jedan od parametara sistema menja, sistem se nalazi u termodinamičkom procesu.

7. **Reverzibilni i irreverzibilni procesi.** Reverzibilan je takav termodinamički proces koji se završava time što se sistem zajedno sa svojom okolinom vraća u početno (polazno) stanje. Ako se posmatran sistem zajedno sa svojom okolinom po zavr-

šetku procesa ne vraća u početno stanje, onda takav proces nazivamo irreverzibilnim. Navedene definicije reverzibilnosti, odnosno irreverzibilnosti zahtevaju, svakako, izvesna dopuška objašnjenja. Očigledno je da su mogući slučajevi kada mi po sopstvenoj volji možemo učiniti neki proces reverzibilnim ili irreverzibilnim, tj. završiti ga tako što ćemo sistem vratiti u početno stanje ili ga nećemo vratiti u početno stanje. Ovakvi slučajevi ipak nisu tipični za dublje shvatanje prirode termodinamičkih procesa. U sistemima sa ogromnim brojem čestica (a takve izučava termodinamika) postoji sponatana težnja ka irreverzibilnosti. Moglo bi se navesti mnogo primera koji ilustruju ovu tvrdnju, ali ćemo navesti samo jedan, koji je vrlo ilustrativan. Neka je jedna polovina staklenog suda napunjena belim, a druga crnim prahom i neka su oni razdvojeni pokretnom pregradom. Ako uklonimo pregradu i počnemo da trešemo posudu crni i beli prah će se izmešati i dati sivu boju. Proces trešenja posude možemo izvoditi beskonačno dugo, ali se sistem nikada neće vratiti u početno stanje, tj. u stanje u kome su crni i beli prah grupisani svaki u svojoj polovini suda. Ovaj tip irreverzibilnosti je posledica činjenice da u procesu učestvuje ogroman broj čestica belog i crnog praha. Ako bismo, na primer, u istoj posudi imali dva crna i dva bela klikera u početku, oni bi se trešenjem izmešeli, ali bi se tokom daljeg trešenja vrlo često dogadjalo da se početno stanje ponovi: beli klikeri bi bili na drugoj strani, a crni na drugoj.

Može se reći da su realni termodinamički procesi uvek nepovratni i da se samo približno mogu učiniti reverzibilnim. Primer približno reverzibilnog procesa je ilustrovан na slici 65.1.



Sl. 65.1

Kada je temperatura grejača veća za dT od temperature posmatranog sistema, koji čine voda i zasićena para, toplota prelazi sa grejača u sistem i odredjena količina vode

(65.4)

$$Q + A = \Delta U$$

se (65.3) píše u žednostavničem obliku

Diferentni merenje nultarafning energije srazitlo bit merenje energije saček od rezistačka kofic sačinjavajući sistem. Suma svih energija da je razliku od mehaničke, gde je razliku posmatran sistem. Zbroj se vrši na posmatranom teku, u termodynamički je usvojen kon-

venčića da je rad pozitivan ako ga vrši posmatran sistem. Zbroj se prvi princip termodynamike, gde je razliku posmatran kada

(65.5)

$$Q = A + \Delta U = A + U_2 - U_1$$

Ako sistem dovedemo kolicitanu toplofu Q, ona će se delom trošiti na rad sistema, a delom na posrednje unutrasnje energije sistema.

Sada ćemo sa još nekoliko aspekata razmotriti prvi princip termodynamike. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je podvezan sa definicijom unutrasnje energije sistema,

namjake je datom stanju može direktno izmjeriti. Prvi princip termodi-

nju. To, međutim, ne znaci da se unutrasnja energija sistema

energija je osobina sistema u definisanom termodynamičkom sta-

prijevodu na definiciju mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

energija je definicija mjeri. Kao što smo ranije rekli, unutrasnja

formule (65.6)).

Bešto se u termodinamickim problemima promene spod-

$$Q + A = AE_p + AE_k + AU \quad (65.3)$$

rgija usled dovođenja redjene kojeljine toplofe Q.)

temu se ne vrši makrofizički rad, ali mu se i pak povećava srednje kinetičke energije molekula sistema i okoline; na sis- sa okolnom temperaturom T₂ (T₁ < T₂), vršiće se izjednačavanje sa energijom toplofe Q. (Ako se sistem nalazi na temperaturi T₁, u dodiru se energija termodynamikog sistema može povećati i dovođenjem Sada ćemo uzeti u obzir već pomenu tu činjenicu da

$$E = E_p + E_k + U \quad (65.2)$$

li deo energije sistema gemo nazvati unutrasnjom energijom U. E_p, koji sistem poseduje u polju sponjasnje sile. Preostala jedna se kreće kao celina) i sponjasnu potencijalu ener- duje kada se sponjasnu količinu E_k (energiju koju sistem pose- Iz ukupne energije sistema gemo izdvojiti sponjas-

$$A = AE \quad (65.1)$$

Prvi princip termodynamike je upostejene veze izme- dju rada i energije, koji smo upoznali u mehaniči.

65.2. Prvi princip termodynamike

kada se sistem nalazi u okređenom termodynamičkom stanju, trasična molekulama, potencijalima medju molekulama (E = E_c), itd.). Unutrasnja samicu molekula, energiju mirovanja atoma (E_m), kretanje svih vidovih energetičkih u sistemu (energiju termičkog sistema čine svih vidova energija u sistemu. Unutrasnju energiju siste- ma će ostati neizmenjena.

grječak i trenutku kada sistem vrati u početno stanje, okoliša govo temperaturu. Sada će toplofa sa sistemom i površajuci njene hantze vršeci pri tome rad na nasem sistemu i površajuci njene se pretisak na klijip k površa za dp, klijip će poveći da se vrši na posmatranom teku, u termodynamički je usvojen kon-

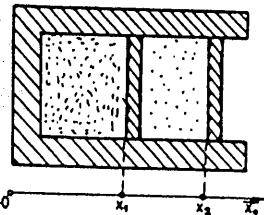
za prethodno navedeno paru, te se klijip k polako podiže. Ako

dobijen na račun količine topline koja je ušla u sistem. Drugim rečima, "perpetuum mobile" prve vrste, tj. mašina koja bi vršila rad bez utroška topline, odnosno energije, ne može da postoji. Ovo je takođe jedna od mogućih verbalnih formulacija prvog principa termodynamike.

65.3. Promena gasnog stanja i izvršeni rad

a. Rad gase pri promeni stanja

Neka se gas nađe u stanju 1 sa zapreminom V_1 kada se klip nalazi na mesto x_1 (sl. 65.2). Ako sada gas proizvodnjim procesom prelazi u stanje 2 u kojem ima zapreminu V_2 (klip se pomera na mesto x_2), izvršen rad će biti jednak



Sl. 65.2

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} p S dx \quad (65.6)$$

ili uz smenu $S dx = dV$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (65.7)$$

U opštem slučaju, pritisak na neki način zavisi od zapremine i oblik funkcije $p(V)$ zavisi od vrste procesa kom gas prelazi iz početnog u krajnje stanje. Sada ćemo razmotriti nekoliko načina promene gasnih stanja i izračunaćemo izvršen rad.

b. Izotermni proces

Kod ovakve promene gasnog stanja ne menja se temperatura gase, $T = \text{const.}$, pa se zavisnost pritiska od zapremine dobija iz opšte jednačine gasnog stanja

$$p = \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT$$

(65.8)

Kada se (65.8) uvrsti u (65.7), za izvršeni rad se dobija izraz

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (65.9)$$

c. Izobarni proces

Kod ovog procesa se ne menja pritisak gase ($p = \text{const.}$), te se u izrazu (65.7) p može izvući ispred integrala, što daje rezultat

$$A = p(V_2 - V_1) \quad (65.10)$$

d. Izohorni proces

Kod ovog procesa zapremina gase ostaje konstantna ($V = \text{const.}$). Znači, $dV = 0$, pa je i izvršen rad jednak nuli.

e. Adijabatski proces

Kod adijabatske promene gasnog stanja sistem ne razmenjuje toplotu sa okolinom. Ovaj proces se može matematički definisati relacijom $dQ = 0$, pa se iz prvog principa termodynamike dobija veza izmedju izvršenog rada i promene unutrašnje energije

$$dA = pdV = -dU \quad (65.11)$$

Pošto je $dU = (m/M)C_VdT$, relacija (65.11) prelazi u

$$pdV = -\frac{m}{M} C_V dT \quad (65.12)$$

Ako sada p izrazimo iz opšte jednačine gasnog stanja, добићemo

$$\frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = -\frac{m}{M} C_V dT \quad (65.13)$$

što integracijom daje

$$T \cdot V^{R/C_V} = \text{const.} \quad (65.14)$$

no na sljedić 65.3. i 65.4.

pod odgovarajućih kriterijih $p = f(V)$, kao što je to predstavljeno u ovakvim dijagramima se rad može predstaviti kao površina izostavljena od zapečaćene termodynamičkih procesa. Na ovaj način se predstavlja sistem razvijen u prostoru s koordinatama V i p .

f. Predstavljanje rada na PV dijagramu

$$A = \frac{M}{R T_1} \left[\frac{V_2}{V_1} - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right] \quad (65.19)$$

pa se za izvrseni rad konzumu dobija izraz

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad (65.18)$$

odakle je

početne i krajuće zapečaćene sisteme iskoristilemo izraz (65.16),

$$A = \int_{T_1}^{T_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} M C_V dT = \frac{M}{R} C_V (T_1 - T_2) \quad (65.17)$$

početne i krajuće temperature sistema

rad može tako izračunati (korisćenjem (65.12)) u funkciji

trebana za izračunavanje rada kod adijabatskih procesa. Ovaj zapečaćene gase pri adijabatskoj promjeni stanja i bilo nam po-

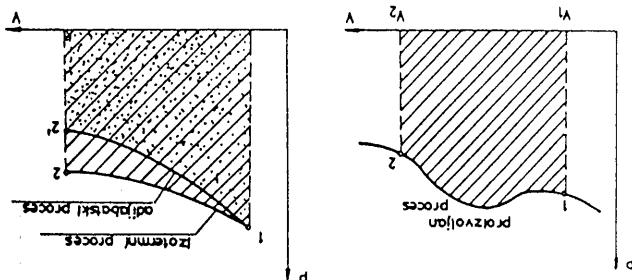
formulu (65.16) pokazuje zavisnost temperature

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (65.16)$$

zelacijsa (65.14) se može napisati u obliku

$$\frac{C_V}{R} = \frac{C_p}{C_p - C_V} = \frac{C_V}{C_p} = \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{1}{y - 1} \quad (65.15)$$

kako je



SL. 65.3

SL. 65.4

65.4. Drugi princip termodynamike

Možemo postaviti obrnut problem i pitati se da li je kompleten preteoritet u radu sistema, a da se dovodi sistem, može se određena koljčina toploote Q, koja se ne utrašnja komponentu preteoritetu u radu sistema, a da je preteoritet u radu sistema ne promeni. Na osnovu prvega principa termodynamike (tj. sistem je preteoritet u radu sistema, a da je preteoritet u radu sistema ne promeni) može se zakoniti da je moguće akro se unutrašnja energija o držanju energije), to je moguće akro se unutrašnja energija u sistemu usled dovođenja toploote ne menja, jer je za komponentu preteoritetu u radu sistema, a da se dovodi sistem, može se određena koljčina toploote Q, koja se ne utrašnja komponentu preteoritetu u radu sistema, a da je preteoritet u radu sistema ne promeni (Q2 - U1) i u okolini (Q).

Možemo postaviti preteoritet u sistemu (U2 - U1) da je preteoritet u sistemu (Q2 - Q1). To znači da se rad (koji je svaki molekul u potpunosti preteoritet u toplootu, tj. neuredjenje kretanja molekula u sistemu (U2 - U1)) i u okolini (Q).

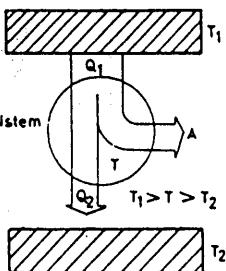
uvrk u potpunosti preteoritet u toplootu, tj. neuredjenje kretanja molekula u sistemu zajeđnički pomeraju u određenom pravcu) može predaže okoljni sistem. To znači da se rad (koji je svaki molekul u sistemu zajeđnički pomeraju u određenom pravcu) može predaže energiju sistema, a delimično se kao toplotna energija (-Q)

da rad izvršen na sistemu (-A) delimično prelazi u unutrašnju iz prvega principa termodynamike se može zaključiti

da rad izvršen na sistemu (-A) delimično prelazi u unutrašnju iz prvega principa termodynamike se može zaključiti predaže okoljni sistem. To znači da se rad (koji je svaki molekul u sistemu zajeđnički pomeraju u određenom pravcu) može predaže energiju sistema, a delimično se kao toplotna energija (-Q)

da rad izvršen na sistemu (-A) delimično prelazi u unutrašnju

Ovaj stav je jedna od mogućih formulacija drugog principa termodynamike. Zaključili smo da se povećanje energije neuredjenog termičkog kretanja molekula ne može u potpunosti pretvoriti u uredjeno kretanje molekula, tj. u rad.



Sl. 65.5

Na osnovu rada toplotnih mašina možemo drugi princip termodynamike formulisati i na sledeći način: *nije moguće dobiti rad samo na račun hladjenja jednog toplotnog izvora*. Mašina koja bi radila na račun hladjenja samo jednog toplotnog izvora se naziva *perpetuum mobile druge vrste*. Na osnovu slike 65.5. možemo videti da bi ovakva mašina mogla da radi ako bi se sistem mogao hladiti na taj način što predaje toplotu rezervoарu koji je topliji od njega (npr. da toplotu vraća nazad u rezervoар na temperaturi T_1). Nemogućnost rada *perpetuum mobilea* druge vrste se može iskazati jednostavnim stavom: *Toplota ne može spontano preći sa hladnjeg na toplije telo*.

65.5. Kružni procesi

U praksi se pretvaranje toplotne u mehanički rad uvek vrši u periodičnom procesu u kojem se jedan termodinamički sistem periodično vraća u početno stanje. Svaki proces u kojem se sistem vraća u svoje početno stanje naziva se *kružnim procesom ili ciklusom*. U pV ravni se kružni proces predstavlja kao na slici 65.6.

Iz navedenog sledi da sistem može da vrši rad samo ako je u kontaktu sa dva toplotna rezervoara na različitim temperaturama T_1 i T_2 (sl. 65.5).

Iz rezervoara T_1 sistem prima izvesnu količinu toplotne Q_1 , deo toplotne pretvara u rad A , a deo Q_2 odbaciće u procesu hladjenja sistema, tj. predaje ga rezervoарu na temperaturi T_2 .

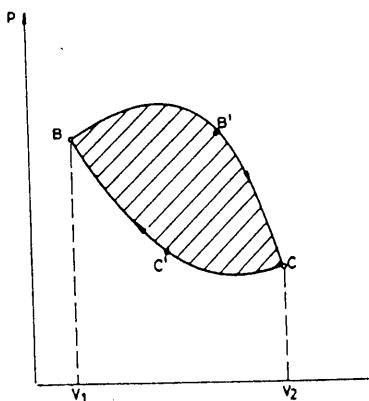
Na osnovu rada toplot-

Pretpostavimo da se proces odigrava u smeru kazaljke na časovniku. Rad koji sistem izvrši pri širenju je pozitivan $A_1 > 0$ i srazmeran je površini $V_1 BB'CV_2$ na slici 65.6.

Pri sabijanju se na sistemu vrši rad $A_2 < 0$, koji je proporcionalan površini $V_2CC'BV_1$. Ukupan rad $A = A_1 - A_2$ je, prema tome, proporcionalan šrafiranoj površini na slici 65.6.

Iz prvog principa termodynamike ćemo izračunati od čega zavisi ukupno izvršen rad u ovom procesu. Pri prelazu iz B u C sistem prima količinu toplotne Q_1

$$Q_1 = A_1 + U_C - U_B \quad (65.20)$$



Sl. 65.6

toplove Q_2

$$- Q_2 = - A_2 + U_B - U_C \quad (65.21)$$

pa je ukupan rad dat sa

$$A = A_1 - A_2 = Q_1 - Q_2 \quad (65.22)$$

Ukupan rad sistema koji prolazi kroz proces, predstavljen na slici 65.6. je pozitivan i jednak je razlici primljene i otpuštene količine toplotne. Ovakav ciklus se naziva *direktnim ciklусом* i predstavlja rad neke toplotne mašine koja prima količinu toplotne Q_1 , odbaciće toplotu Q_2 i pri tome vrši pozitivan rad A .

Koefficijentom korisnog dejstva toplotne mašine naziva se veličina

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (65.23)$$

na zasnovniku (Sl. 65.7).

Ciklus je obratanako tečje nasuprot smjeru kazaljke

posedno za različite konkretnie cikluse.

Brojna vrednost koeficijenta korišnog dejstva se izračunava

$$Na \text{ sljicanu nacin}$$

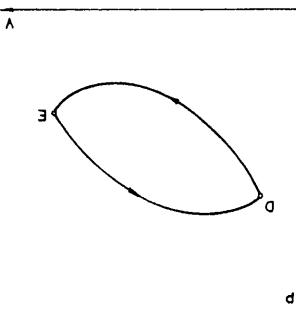
$$\text{se izrakunati da je ukupno iz-}$$

i kod direktnih ciklusa, može

vrednost rad negativan

- A = Q₂ - Q₁ (65.24)

Sl. 65.7
Količinu topote -Q₁.
i predaće topiljem rezervoaru
rezervoara količinu topote Q₂
da (-A) odzima od hladnjeg
dstavljaju rad raspladane masine
Ovaj ciklus pre-



a. Karnov ciklus

* Karnov je konstruisao jedan kružni proces pomognu-
kog se relativno jednostavno može izrakunati koeficijent ko-
risnog dejstva za idealnu topotnu masinu.
Po definiciji idejna topotna masina radi po po-
vratnom kružnom procesu bez gubitka energije. Ciklus koji je
dve adiabate, kao što je to prikazano na slici 65.8.
Karno predstavlja rad ovе masine sastoji se od dve izotermne
staniče su izstavljene sa topotnim rezervoarom na temperaturi T_a i
gas u kontaktu sa topotnim rezervoarom na temperaturi T_b i
prelaz iz stanja 1 u stanje 2. Kod ovog prelaza je
čine Karnov ciklus:

Posebnoemo analizirati pojedine procese koji

činu topote Q_a i pretevara je u rad A₁₂. Kako je proces izo-
varski izotermalni sa topotnim rezervoarom na temperaturi T_a i
gas u kontaktu sa topotnim rezervoarom na temperaturi T_b i
prelaz iz stanja 1 u stanje 2. Kod ovog prelaza je

terman (U₂ = U₁),

$$A_{12} = Q_a = \frac{M}{R} T_a \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (65.25)$$

te (65.27) možemo prepišati u obliku

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_b}{T_a} \quad (65.30)$$

$$T_a V_{2-1} = T_b V_{3-1}; T_a V_{3-1} = T_b V_{4-1} \quad (65.29)$$

$$T_1 = T_2 = T^a; T_3 = T^b = T^b \quad (65.28)$$

prelazi iz stanja 1 u stanje 2 i iz stanja 3 u

$$T^2 V_{2-1} = T^3 V_{3-1}; T^4 V_{3-1} = T^1 V_{4-1} \quad (65.27)$$

su adiabatski, te na osnovu (65.16) možemo napisati

prelazi iz stanja 2 u stanje 3 i iz stanja 4 u

.

va unutrasnja energija do potencije vrednosti.

Prvi ovom procesu se na gasu vrši rad -A₁₂ i time mu se poveća-

toplotno izoluje i adiabatski se sabija do potencije stanja.

Prelaz iz stanja 4 u stanje 1. Sistem se u treci 4

toplotno izoluje i adiabatski se sabija do potencije stanja.

Prelaz iz stanja 4 u stanje 3 u

toplotnom rezervoaru

plotne -Q_b, koji sistem predaže

-A₃₄, koji je jehanak količini to-

pri tome se na gasu vrši rad

stanja 4 se izotermno sabija.

Vodi u kontakt sa topotnim re-
zervoarom na temperaturi T_b i do

stanje 4. Sistem se u stanju 3 do-

prelaz iz stanja 3 u

toplotno izoluje i do stanja 3 se siri adiabatski. Pri tome

prelaz iz stanja 2 u stanje 3. Sistem se u stanju

trasiće energije.

vrši rad A₂₃ na razdušujuće unu-

ostanje 4.

vrši rad A₂₃ na razdušujuće unu-

ostanje 4.

vrši rad A₂₃ na razdušujuće unu-

Traženi koeficijenti korisnog dejstva na osnovu (65.23), (65.25), (65.26) i (65.30) možemo napisati u obliku

$$\eta = 1 - \frac{Q_b}{Q_a} = 1 - \frac{T_b}{T_a} = \frac{T_a - T_b}{T_a} \quad (65.31)$$

Koeficijent korisnog dejstva za idealnu topotnu mašinu zavisi samo od razlike temperatura topotnih rezervoara. Koeficijent korisnog dejstva je jednak jedinici samo ako je temperatura hladnjeg rezervoara $T_b = 0$ (kasnije ćemo videti da se temperatura $T = 0$ nikada ne može dostići).

Kod rada realnih topotnih mašina se deo topote nepovratno gubi u okolini, koja se ne vraća u početno stanje zajedno sa mašinom. Rad ovih mašina zbog toga opisuju nepovratnim ciklusima za koje je zbog pomenutih gubitaka

$$\eta < \frac{(T_a - T_b)}{T_a} \quad (65.32)$$

te je u opštem slučaju koeficijent korisnog dejstva

$$\eta < \frac{(T_a - T_b)}{T_a} \quad (65.33)$$

b. Klauzijus - Klapajronova jednačina

Kao ilustraciju primene Karooovog ciklusa izvešćemo Klauzijus - Klapajronovu jednačinu. Posmatraćemo termodinamički sistem koji se sastoji od tečnosti i zasićene pare zatvorene u sudu. Pritisak zasićene pare se naziva *naponom pare* i poznato je da napon pare raste sa temperaturom.

Klauzijus - Klapajronova jednačina određuje nagib tangente krive $p = f(T)$, tj. veličina dp/dT . Da bismo izračunali ovu veličinu provešćemo gore definisan sistem kroz Karooov ciklus. Zbog malih promena Δp i ΔT izoterme i adijabate možemo približno aproksimirati pravim linijama (sl. 65.9).

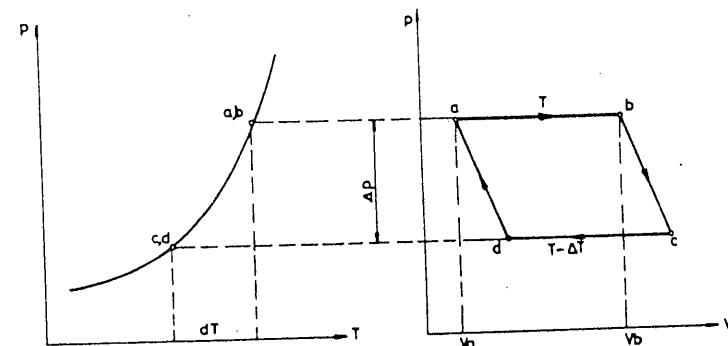
Opisaćemo procese koji se odigravaju u pojedinim fazama Karooovog ciklusa:

Prelaz iz stanja a u stanje b. Sistem u kontaktu sa rezervoarom na temperaturi T prima količinu topote Q_1 i širi

se izotermno. Pri ovom prelazu se m gramma tečnosti pretvara u vodenu paru, pa je

$$Q_1 = m\lambda \quad (65.34)$$

gde je λ latentna topota isparavanja (količina topote koja je potrebna da se 1 kilogram tečnosti prevede u gasovito agregatno stanje).



Sl. 65.9

Prelaz iz stanja b u stanje c. Sistem se adijabatski širi, vrši rad na račun svoje unutrašnje energije, te mu se temperatura smanjuje za ΔT .

Prelaz iz stanja c u stanje d. sistem se izotermno sabija na temperaturi $T - \Delta T$. Na njemu se vrši rad i on predaje topotu topotnom rezervoaru.

Prelaz iz stanja d u stanje a. Sistem se vraća u početno stanje adijabatskom kompresijom.

Ukupan izvršeni rad je približno jednak površini paralelograma prikazanog na slici 65.9.

$$A \approx \Delta p(v_b - v_a) \quad (65.35)$$

Kako se u procesu a → b, m gramma tečnosti pretvara u paru, može se napisati

izmaju identičan smisao, tj. da predstavljaju kolike u toploće
Pretpostavimo sada da toploće Q_1 i Q_2 u (65.43) odakle se dobija

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

$$1 - \frac{Q_1}{T_1} < 1 - \frac{Q_2}{T_2}$$

nova (65.23) se (65.41) može napraviti u obliku

gde znak jednakoosti vazi samo za reverzibilne procese. Na os-

$$n < \frac{T_1}{T_2}$$

stva za direktni ciklus može napraviti u obliku
Ved smo pokazali da se koeficijent korisnog de-

65.6. Klauzijusova negednackina. Entropija

$$\frac{dP}{dT} = \frac{p}{T} (V^p - V^T)$$

odakle se za $\Delta T + 0$ dobija traženi nagib tangente

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{p}{T}$$

Smenom (65.37) i (65.34) u (65.38) dobijamo

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{\Delta P}{\Delta T}$$

(65.23) je rezultata (65.31), možemo napraviti
Na osnovu definicije koeficijenta korisnog dečstva

$$A = \Delta P (V^p - V^T)$$

Znaci, izvršen rad je proporcionalno jednaku

mjena tečnosti.

gde je V^p specifična zapremina par, a V^T je specifična zapre-

$$V^p - V^T = m(V^p - V^T)$$

$$\int \frac{dp}{T} = \int \frac{dp}{a} + \int \frac{dp}{b} = 0$$

za prvu putanju dobijamo

(65.46) (65.10) je primenjeno klausijuosovu jednackinu na putanje aa"ba.

emo jedan povratin krozni proces razbiti na tri dela (sl.).

treći definisemo fizicku veličinu koja se zove entropija. Privatno

klausijuosovu nejednackinuemo koristiti da matema-

$$\int \frac{dp}{T} \leq 0$$

va nejednackina se piše u integracionom obliku
viti kao zbir intenzitetsimilnih izotermnih procesa, klausijuosovu
za protivoljnim ciklus, koji se uvek može predstaviti

$$\int \frac{dp}{T} \leq 0$$

zine toploće Q_1 , klausijuosova nejednackina se piše u obliku
kontaktu sa vise toplothin rezervoara T_1 od kojih prima kolici
u sistem slučaju, ako je sistem tokom ciklusa u

lotna rezervoara.

slučaj ciklusa kod kojeg je sistem u kontaktu sa samo dva top-
loči od nule. Nejednackinu (65.44) smo izvezeli za specijalan
na toplost, koji je sistem trvari da zbir redukovanih kolici
te. klausijuosova nejednackina redukovano klausijuosovu
kolinskih i nazivamo redukovano klausijuosovo toplo-

$$Q_1 + Q_2 \leq 0$$

koju sistem prima od hladnjaka. Uz ovakvo tumačenje klausiju
toplota Q_1 i Q_2 u formulji (65.43), treba izvršiti zamenu
nejednackine

$Q_1 + -Q_2$, time se dobija matematička formulacija klausijuosove

toploća Q_1 i Q_2 u formulji (65.43), treba izvršiti zamenu

$$\int \frac{dQ}{T} = \int_a^{a''} \frac{dQ}{T} + \int_{a''}^b \frac{dQ}{T} + \int_b^a \frac{dQ}{T} = 0 \quad (65.47)$$

odakle sledi

$$\int_a^{a'} \frac{dQ}{T} + \int_{a'}^b \frac{dQ}{T} = \int_a^{a''} \frac{dQ}{T} + \int_{a''}^b \frac{dQ}{T} \quad (65.48)$$

Relacijom (65.48) dokazali smo da nezavisno od vrste povratnih procesa kojima prelazimo iz stanja a u stanje b integral

$$\int_a^b \frac{dQ}{T}$$

ima uvek istu vrednost koja zavisi samo od osobina stanja a i b . Ovu osobinu stanja ćemo nazvati entropijom i označićemo je slovom s .

Na osnovu gornje definicije možemo napisati

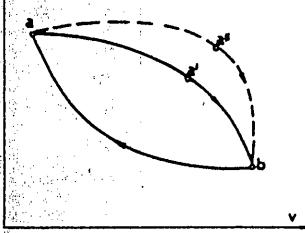
$$s_b - s_a = \int_{a_{rev}}^b \frac{dQ}{T} \quad (65.49)$$

Iz formule (65.49) možemo zaključiti da ako izolovani sistem ($dQ = 0$) izvrši ma kakav reverzibilni proces, entropija sistema se ne menja, tj. za reverzibilni proces je $\Delta s = 0$.

Pretpostavimo sada da je u ciklusu na slici 65.10. deo procesa $b \rightarrow a$ nepovratan. Tada, na osnovu Klauzijusove nejednačine dobijamo

$$\int_{a_{rev}}^b \frac{dQ}{T} + \int_{b_{irev}}^a \frac{dQ}{T} < 0 \quad (65.50)$$

odakle sledi zakon promene entropije za ireverzibilne procese



Sl. 65.10

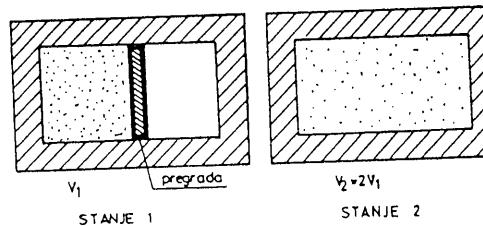
$$s_a - s_b > \int_{b_{irev}}^a \frac{dQ}{T} \quad (65.51)$$

Primenom formule (65.51) na izolovan sistem ($dQ = 0$) dobijamo rezultat $\Delta s > 0$. Vidimo da u izolovanom sistemu za bilo koji termodynamički proces važi relacija

$$\Delta s > 0 \quad (65.52)$$

koja predstavlja matematičku formulaciju drugog principa termodynamike. U izolovanom sistemu se odvijaju samo takvi procesi kod kojih se entropija sistema ne smanjuje. Iz ovog +em+va možemo zaključiti u kom pravcu teku prirodni procesi bez spoljašnje intervencije. U prirodi se spontano odigravaju takvi procesi kod kojih entropija raste.

Bez dokaza ćemo navesti još jednu osobinu formalno definisane entropije. Entropija ima tu osobinu da je aditivna funkcija stanja. To znači da ako imamo sistem od dva podsistema koji imaju entropije s_1 i s_2 , ukupna entropija sistema će biti $s = s_1 + s_2$. Sada ćemo na jednom jednostavnom primeru pokazati da se u prirodi spontano odigravaju takvi procesi kod kojih entropija raste. Posmatraćemo adijabatsko širenje gase u slobodan prostor (sl. 65.11).



Sl. 65.11

nje 2. Pokazaćemo da je $s_2 > s_1$.

Kako je proces koji vodi iz stanja 1 u stanje 2 nepovratan, promenu entropije za ovaj proces ne možemo direktno izračunati jer je ona definisana samo nejednačinom (65.51). Zato ćemo promenu entropije $\Delta s = s_2 - s_1$ izračunati iz jednog povratnog procesa koji teče od stanja 2 ka stanju 1. Neka to

prvoje prinicipa termodinamike je tada

izad - A i on odaje količinu toploste -Q, pri čemu je $dU = 0$. Iz
budu izotermno sabijanje gasea. U tom procesu se na gasu vrši

odakle je

$$dA = dP$$

iz

$$S_1 - S_2 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dA}{PdV} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{P}$$

Zamenom pritisaka iz opte žednacine gasnog stanja

$$(65.54)$$

Posto smo dobili rezultat koji je negativan, za-

$$S_1 - S_2 = \frac{M}{R} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{ln 0,5} \quad (65.55)$$

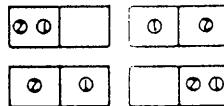
izvodi

Ovu, prividno paradoskalanu, situaciju smo razu-
zjemo da je i taj obrnut proces mogu i donekle verovatan.
da sud na sljici 65.11. sadrži samo nekojko molekulu, zaklju-
či sa termodinamickog stanovista je nemogu. No, ako zamislimo
vraga u manju zapreminu V₁), bi povećavao entropiju sistema
i sa istim procesom (gas se iz zapremine V₂ spontano
verovatnije odgovara tom makrofizičkom stanju.

da je i taj obrnut proces mogu i donekle verovatan.
da je kvantitativno objasnjenje najverovatniji smjera proce-
sa, a da odgovara jutrišnji smjer odigravajući termodinamicki procesa,
samo najverovatniji smjer odigravajući termodinamicki procesa,
meti tako ako se setimo da termodinamicki zakoni određuju
da je i taj obrnut proces mogu i donekle verovatan.

a. Statističko tumačenje entropije. Bolzmanova jednačina
relacijsom (65.49) formala smo definisali posam
mo na fizikalni smisao entropije.

sa tri kuglice. U ovom slučaju imamo osam mikrostanja i svako
na sljici 65.14. prikazana su mikrostanja modela



sljici 65.12. prikazana su mikrostanja

nočama su prikazana na sljici 65.13.

sljici 65.12.

nača sa savojim termodinamickim revovat-

rovatnog 1/4. Odgovarajuća makrostanja

su u slučaju i svako od njih ima ve-

prepotostavci ova mikrostanja se ostvar-

sistema sa dve kuglice. Prema nasoj

mikrostanja opisivati samo brojem kuglica u pregradama. Na

čemo opisati brojem i vrstom kuglica u pregradama, dok ćemo

u dve pregrade jedne kuglice. Mikrostanja ovog prototog sistema

u dve pregrade jedne kuglice stavljati

mikrostanja. U nasem modelu gemo numeričane kuglice stavljati

trudnije čemo ilustrovati na jednom uprošćenom modelu mikro i

ogroman. Da bi ilustrovali onos mikro i mikrostanja navедene

obično je da je u praktičnom slučaju imao avio projek

je sa količko mikrostanja se može ostvariti dato mikrostanje.

Termodinamicka verovatnoga mikrostanja W odredju-

mikrofizičkih stanja koji odgovara tom makrofizičkom stanju.

verovatnoga makrofizičkog stanja sistema opisuje preko broja

komponenta brzina po jedinici molekula. Jasno je

da se ista vrednost ove veličine može dobiti velikim brojem

zavisit od srednje vrednosti kvadrata brzine molekula. Jasno je

da je da se jedno mikrostanje sistem je može izmeriti putem

parametra sistema (p, V, T, itd.) koji se mogu izmeriti. Oči-

Makrofizičko stanje sistema je određeno formom

ma imaju istu verovatnogu.

nača ostvaruju slučaju i da sva stanja izolovanog mikrostane-

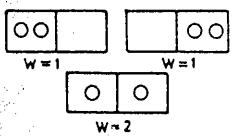
otičnosti kretanja molekula može tviditi da se sva mikrostane

klij da se mikrostanje sistema ne može tacno odrediti. Zbog ha-

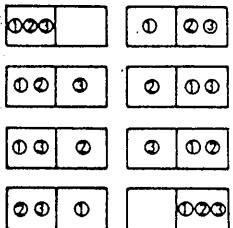
brzina i uprzanjima svih beskica sistema. Već smo ranije re-

mikrostanje sistema je određeno sa koordinatama,

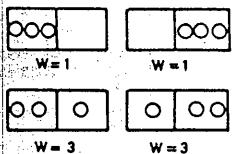
1. Mikro i mikrostanja sistema i posam
termodinamicka verovatnog



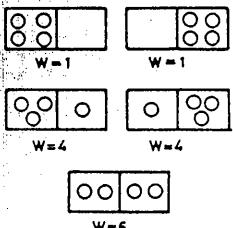
S1. 65.13



S1. 65.14



S1. 65.15



S1. 65.16

Izolovanim fizičkim sistemima odvijaju spontano takvi procesi koji povećavaju vrednost termodinamičke verovatnoće sistema. Ako se podsetimo da drugi princip termodinamike tvrdi da svi procesi u prirodi teku u pravcu povećanja entropije s , jasno

mikrostanje ima verovatnoću $1/8$.

Makrostanje sistema sa tri kuglice ilustruje slika 65.15.

Uporedjenjem sistema sa dve i tri kuglice već možemo da zaključimo da se termodinamička verovatnoća ravnotežnih stanja (stanja kod kojih imamo isti broj kuglica u obe pregrade) povećava sa brojem kuglica. Ovo se još jasnije vidi na primeru sistema sa četiri kuglice. Ovaj sistem ima 16 mikrostanja kojima odgovaraju makrostanja prikazana na slici 65.16.

Viđimo da je za ovaj sistem termodinamička verovatnoća za ravnotežno stanje šest puta veća nego termodinamička verovatnoća za neravnotežno stanje (sve kuglice u istoj pregradi).

Ako dosadašnja razmatranja ekstrapoliramo na slučaj realnih sistema koji imaju ogroman broj molekula, jasno nam je da je termodinamička verovatnoća ravnotežnih stanja daleko veća od termodinamičke verovatnoće neravnotežnih stanja. U mehanički smo rekli da svi procesi u prirodi vode ka ravnotežnim stanjima. Kako ravnotežnim stanjima odgovara veća vrednost termodinamičke verovatnoće W , možemo zaključiti da se u

izolovanim fizičkim sistemima odvijaju spontano takvi procesi koji povećavaju vrednost termodinamičke verovatnoće sistema. Ako se podsetimo da drugi princip termodinamike tvrdi da svi procesi u prirodi teku u pravcu povećanja entropije s , jasno

nam je da izmedju s i W treba da postoji neka matematička veza. Oblik ove veze možemo naslutiti ako se podsetimo da je s aditivna funkcija stanja, dok je verovatnoća W multiplikativna funkcija stanja.

$$s = s_1 + s_2 \quad W = W_1 \cdot W_2 \quad (65.56)$$

Uporedjenjem gore navedenih formula možemo zaključiti da je veza izmedju entropije i termodinamičke verovatnoće oblika

$$s = k \ln W \quad (65.57)$$

Koefficijent proporcionalnosti u jednačini (65.57) je Boltmanova konstanta i čuvena Boltmanova jednačina daje matematičku vezu izmedju makrofizičke veličine s i statističke veličine W

$$s = k \cdot \ln W \quad (65.58)$$

Na osnovu Boltmanove jednačine možemo zaključiti da je entropija sistema mera za neuredjenost sistema i ona se povećava ako se sistem približava ravnotežnom stanju. Kako se entropija zatvorenog sistema tokom vremena povećava, entropija je i mera starosti nekog fizičkog sistema. Ako uočimo da sistem u termodinamičkom ravnotežnom stanju ne može da izvrši rad, možemo zaključiti da je entropija mera i za radnu sposobnost sistema.

65.7. Nernstova teorema

Videli smo da je entropija sistema povezana sa termodinamičkom verovatnoćom makrostanja. Takođe znamo da termodinamička verovatnoća pokazuje koliko je sistem uredjen. Sto je sistem uredjeniji, često makrostanje se može ostvariti sa manje mikrostanja, znači ima manju termodinamičku verovatnoću.

Nernst je formulisao teoremu prema kojoj je sistem najuredjeniji na temperaturi apsolutne nule ($T = 0$) i tada se svako makrostanje može ostvariti samo jednim jedinim mikrostanjem. Znači, za $T = 0$ je $W = 1$.

* NERNST, Hermann (1864-1941) nemački fiziko-hemičar

$\frac{d}{dt} + F$

nađem rastojanjia x . Znaci, $m \ddot{x}$ molekularna sile $F = F_x + F_y$ + F_z je

čavljia snazna odbojna sile F_y , koja se brozo povećava sa smanje-

nja x elektronski oblici molekula potinju da se dodiruju, te se

momenata molekula. Dakle im smanjenu medijumolekularnog rastojaja-

na sile medju molekulima. Ova sile F_y je posledica dipolnog
na rastojanje $x = 3d$, postepeno se čavljia elektricna privlač-
je interakcija (sila) zanemarljiva. Kada se molekuli privlače
rastojanjima $x > d$ (d je prenik molekula), medju molekulima
izdine 10^{-10} m. Kako je ceo molekul strukturu dimenzija r eda
či stabljinu, elektricno neutralnu strukturu stvaraju-
čezgara se raspolođuje negativan elektronski oblik stvaraju-
veličine 10^{-14} m i koja su pozitivno nadelektrisana. Oko ovih
lijen od nekoliko atomskih čezgara koji imaju prebitke reda
sile, navodjeno osnovne osobine molekula. Molekuli su sastav-
Da bi bar kvalitativno razumeći medijumolekulare

lekularnih sile i hajdinog termičkog kretanja.

tečno i vrsto) može razumeti iz istovremene dejstva medju-
osobina materije, postojanje tri agregatna stanja (gasovito,

prvo gemo išpijati kako se jedna od najmarkantijih
upoznajemo sa osnovnim karakteristikama medju-
u zemaljskim uslovima.

66.1. Medijumolekulare sile i agregatna stanja materije

IV REALNI GASOVI, TEČNA I VRSATA TELA

u blizini apsolutne nule masena koljina toploće priblizno je-
du težu prizmi, dovolj do zanatnog površanju temperature, jer je
rjaski dostici, jer i beskonacno mala koljina toploće dQ , ko-
vidimo da se apsolutna nula temperaturske skale ne može ni teo-
dnaka nuli.

$$dT = \frac{dQ}{mc}$$
 (65.4)

bez dokaza ove teoreme gemo razmotriti njenje načva-
zniće posledice. Na osnovu Bolčmanove jendančine možemo zaklju-
čiti: da je na apsolutnoj nuli temperaturske skale entropija

znaci masena koljina toploće tela teži nuli kada

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_V = 0$$
 (65.63)

za masenu koljiju toploće vazi relacija

na strana čve jendančine takodje težila nuli, neophodno je da
jeva strana jendančine (65.61) ge takodje težiti nuli. Da bi de-

$$\lim_{T \rightarrow 0} s_T = 0$$
 (65.62)

valju oko apsolutne nule, Kako je
postavljati zagrevanje tela u veoma uskom temperaturskom inter-
valu sada da je temperatura T teži nuli, sto znaci da gemo
Na osnovu tregje principa termodinamike $s_0 = 0$,

$$s_T - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{C_V dT}{T}$$
 (65.61)

dobjamo

$$dQ = C_V dT$$
 (65.60)

Kako je za jedan mol

$$s_T - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{dQ}{T}$$
 (65.59)

Promena entropije je biti

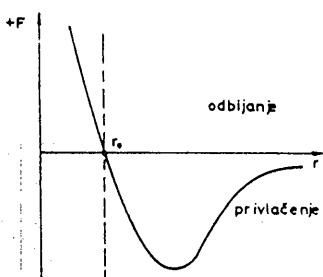
ne toploće teža u blizini apsolutne nule posmatracemo zagrevaju-

da bismo videli koljike su vrednosti masene koljini-
je jendog mola materije pri statnoj zapremini od 0 do T ste-
ne toploće teža u blizini apsolutne nule posmatracemo zagrevaju-

1. Masena koljina toploće teža u blizini apsolutne nule
na koji nadijan ovaj princip utiče na doslednost temperatuve $T=0$.

na kojim posledice. U sledeci alineji gemo pokazati kako je
sistema jendanča nuli. Ovaj stav se desto naziva i trećim prin-
cipom termodinamike. U sledeci alineji gemo pokazati kako je
zavoj posledice. Na osnovu Bolčmanove jendančine možemo zaklju-
čiti: da je na apsolutnoj nuli temperaturske skale entropija

ima znatno složeniji karakter nego sile koje smo do sada upoznali. (One su uglavnom opadale sa kvadratom rastojanja.) Radi detaljnijeg izučavanja ove sile potrebno je znati zakone koji uslovjavaju strukturu molekula i atoma, tj. zakone kvantne mehanike. Mi ćemo se ovde zadržati samo na kvalitativnom prikazivanju medjumolekularne sile.



Sl. 66.1

Na osnovu do sada rečenog se tipična medjumolekularna sila u funkciji medjumolekularnog rastojanja može prikazati kao na slici 66.1.

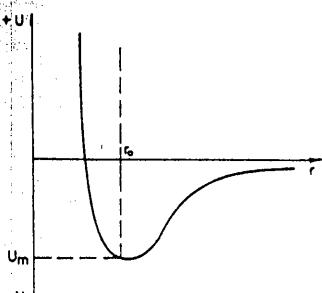
Rastojanje r_0 na slici 66.1. odgovara ravnotežnom položaju dva molekula na temperaturi apsolutne nule (kada je termičko kretanje odsutno). Za silu prikazanu na slici 66.1. potencijalna energija se menja sa rastojanjem, kao što je prikazano na slici 66.2.

Imajući u vidu medjumolekularnu potencijalnu energiju, ukupna energija molekula može se napisati kao

$$\epsilon = \epsilon_k + U \quad (66.1)$$

gde je $\epsilon_k = (i/2)(kT)$ kinetička energija termičkog kretanja (ovde je i broj stepeni slobode molekula).

Deo prostora u kome molekul ima negativnu potencijalnu energiju naziva se potencijalnom jamom. Ako se molekul nadje u potencijalnoj jami (u blizini drugog molekula) sa kinetičkom energijom $\epsilon_k < |U|$, imaće negativnu ukupnu energiju i naći će se u vezanom stanju. Par molekula iz vezanog stanja može izaći ako im se poveća temperatura, jer tada postaje $\epsilon_k > |U|$ i oni



Sl. 66.2

se mogu medjusobno udaljiti.

a. Slučaj niskih temperatura ($kT \ll |\epsilon_m|$)

Na niskim temperaturama molekuli nemaju dovoljno kinetičke energije da savladaju privlačne medjumolekularne sile i oni ostaju u vezanom stanju. Pod ovakvim uslovima se nalazi materija u čvrstom agregatnom stanju, a termička energija se manifestuje u oscilacijama molekula oko ravnotežnog položaja.

b. Slučaj visokih temperatura ($kT \gg |\epsilon_m|$)

Na visokim temperaturama je medjumolekularna potencijalna energija zanemarljiva, te se molekuli kreću slobodno, nezavisno jedan od drugog. Pod ovakvim uslovima se materija nalazi u gasovitom agregatnom stanju.

c. Slučaj srednjih temperatura ($kT = |\epsilon_m|$)

Molekuli imaju dovoljno energije da medjusobno izmenju mesta, ali im srednje medjusobno rastojanje ostaje konstantno. U ovakvim uslovima se materija nalazi u tečnom agregatnom stanju.

U navedenim primerima smo pokazali da agregatno stanje materije zavisi od temperature i od dubine medjumolekularne potencijalne jame. U ovom kvalitativnom opisu nismo eksplicitno istakli da na agregatno stanje utiče i spoljašnji pritisak, jer se povećanim atmosferskim pritiskom molekuli mogu zgusnuti i na taj način se može povećati efekt medjumolekularnih sile.

Očigledno je da će na sobnoj temperaturi u gasovitom agregatnom stanju biti materije sa malim $|\epsilon_m|$, dok će na istoj temperaturi materije sa velikim vrednostima $|\epsilon_m|$ biti u čvrstom stanju.

66.2. Realni gasovi. Jednačina van der Valsa

Ako gasove ispitujemo pri višim pritiscima i nižim temperaturama uočićemo veća odstupanja od jednačine gasnog sta-

$p + p_u = p_u$, gde je p_u unutrasnji pritiskak
zakona (64.6). Znaci, u unutrasnjosti gase vladala pritiskak $p_u = p$ zausteti manju zapremenu nego sto to sledi iz Boj-Mariotovog vlastne sile. Usled ovih slika gas je pri spoljasnjem pritisku

Na rastojanima $x = 3d$ medju molekulama vladaju pri-
medjumolekularne sile

$$p(v - \frac{m}{M} b) = \frac{M}{m} RT \quad (66.4)$$

je zanemarjivo

SL. 66.3 treba unutrasnjosti za zapremunu u svim sluzajevima u kojima b niti rametra (molekulskom masom M , zapreminom molekula v i jaciti gaseologicu stanja. Ova jednackina datu vrstu gase opisuje sa tri parametra (m , M i v) te razne temperatue. Iznad izotermne T van der Waalsove izoterme se prakticno poklapaju sa Boyle-Marlotovim izotermama,

Na sljici 66.4. praktizane su van der Waalsove izoterme

nom medjumolekularne sile a .

Jednackina (66.9) se zove van der Waalsovu jednackinu

$$p + \frac{m^2}{M^2} \frac{v^2}{a} + \left(v - \frac{m}{M} b \right) = \frac{M}{m} RT \quad (66.9)$$

dobjemo konacno

$$V_0^2 = \frac{m}{M^2} V^2 \quad (66.8)$$

Ako u (66.7) izvrsimo smenu

$$p + \frac{V_0^2}{a} \left(v - \frac{V_0}{m} b \right) = \frac{M}{m} RT \quad (66.7)$$

stanja molemo napisati u obliku

$$p_u = \frac{V_0}{a} ; \quad a = \frac{m}{N^2} \quad (66.6)$$

gde je V_0 zapremina jednog molekula. Osigledno je da vrrendost a , te gemo da unutrasnjji pritiskak dobiti izraz a , laronge privaljenja. Uticaj ovih slikaemo opisati parametrom unutrasnjeg pritiska treba da zavisi od jake inje medjumolekula, te gemo da unutrasnjji pritiskak dobiti izraz

$$p_u = n_0 = \left(\frac{V_0}{N} \right)^2 \quad (66.5)$$

molekula po jedinicu zapremine n_0

unutrasnjji pritiskak se povecava sa kvadratom broja

gasova smjako konacnu zapremiju da izmadiju ujich deljini medjumom-
objasnitmo ova ostupanja treba da uzmemu u obzir da molekuli
nja (64.19), koju smo izveli za idealne gaseove. Ako zelimo da
gasova imaju konacnu zapremiju da izmadiju ujich deljini medjumom-

a. Korekcija jedinicne gasove stanjia na konacnu
zapremenu molekula

Iekularne sile.

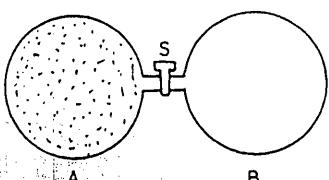
gasova imaju konacnu zapremiju da izmadiju ujich deljini medjumom-
objasnitmo ova ostupanja treba da uzmemu u obzir da molekuli
odjasnimo da su srednje raspoređeni u prostoru u jednakim
razmerama (64.6). Znaci, u unutrasnjosti gase vladala pritiskak $p_u = p$ zausteti manju zapremenu nego sto to sledi iz Boj-Mariotovog

jednoznačna. Pored ove osobine, duž ovih krivih se u određenoj oblasti zapremina povećava sa pritiskom. Obe ove osobine krivih sa maksimumom ne mogu predstavljati fizičku realnost i očigledno je da van der Valsova teorija nije primenljiva za temperature niže od T_K .

Izoterma T_K (izoterma sa prevojnom tačkom K), se naziva *kritičnom izotermom* a odgovarajuća temperatura *kritičnom temperaturom*. Koordinate prevojne tačke (kritične tačke) na ovoj izotermi nazivaju se *kritičnim pritiskom*, odnosno *kritičnom zapreminom*. O fizičkom značenju ovih veličina ćemo govoriti nešto kasnije.

66.3. Džul-Tompsonov efekat

Džul i Tompson su ispitivali da li se menja temperatura gasa pri adijabatskoj ekspanziji gasa u prazan prostor (sl. 66.5).



Sl. 66.5

da je unutrašnja energija gasa tokom ekspanzije konstantna ($U_1 = U_2$). Polazeći od ovog zaključka ispitaćemo da li se kod ovakve ekspanzije menja temperatura idealnog gasa.

Unutrašnja energija idealnog gasa je data sa

$$U_i = \frac{m}{M} C_V T \quad (66.10)$$

te vidimo da ako je $U_1 = U_2$, tada je i $T_1 = T_2$.

Znači, idealan gas tokom adijabatske ekspanzije u prazan prostor ne menja svoju temperaturu (ne pokazuje Džul-Tompsonov efekat).

Unutrašnja energija realnog gasa se može napisati u obliku

$$U_R = \frac{m}{M} C_V T + U \quad (66.11)$$

gde je U medjumolekularna potencijalna energija.

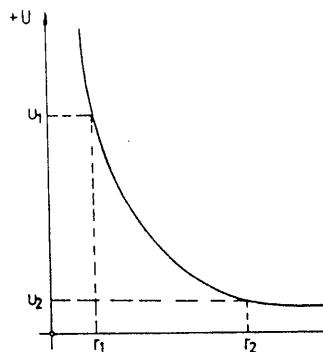
Kako se unutrašnja energija gasa pri Džulovom širenju ne menja, sledi

$$\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) + U_2 - U_1 = 0 \quad (66.12)$$

Znači, kod realnog gasa usled promene potencijalne energije pri širenju može doći do promene temperature pri Džulovom širenju.

Sada ćemo pokazati kako zavisi predznak promene temperature od vrednosti koeficijenata a i b u van der Valsovog jednačini.

a. Koeficijent a se može zanemariti ($a \approx 0$)



Sl. 66.6

Ovaj uslov je ispunjen ako su medjumolekularne privlačne sile zanemarljive. Uz ovu pretpostavku medju molekulima vladaju samo odbojne sile, te je medjumolekularna potencijalna energija uvek pozitivna i opada sa rastojanjem (sl. 66.6). Kako se pri ekspanziji medjumolekularno rastojanje povećava, biće

$$U_2 < U_1, \text{ tj. } U_2 - U_1 < 0 \quad (66.13)$$

* JOLLE, Jana (1818-1889), aforatio mechanické ekvivalenčné toplove

peratúrom inverzíe.

ma se nazýva takom inverzíe ī ona ī e ordjenia pritiskom ī tem-
pri Dzuľovom súrenju ne menja. Stanje gasa pri ovakvím usloví-
re jeednak. Pri ovakvím uslovíma se temperatúra reálnich gasova
slúčaj kada je uticaj koeficienta ī b na promenu temperatu-
uticaj a na promenu temperatu. Postoži ī treći, speciálan,
ta koeficienti ī b i u van der Valsovo īmá oba
medžumolekulárnič súla. Naravno, u náviedem brojú eksperimenta-
efekat. Samo postojanje efekta je dôkazané dôkaz za postojanie
na slúčaj a uticaj medžumolekulárnič súla na Dzuľ-Tompsonovu

Pod tăkama a. i b. mi smo razmatrali dva ekstre-
mat.

dan protor, hladí, t.j. pokazuje pozitívnu Dzuľ-Tompsonovu efek-
zultat $T_2 - T_1 < 0$. Ako je koeficient b u van der Valsovo je
dôchini zanemarjiv, gas se pri adiabatskoj ekspanzii u pre-
zultat $T_2 - T_1 > 0$. Ako je koeficient b u van der Valsovo je
pa se na osnovu (66.12) dôjde re-

$$U_2 - U_1 > 0 \quad (66.14)$$

$$-U_2 < -U_1, \text{ t.j.}$$

je

ní vysí pod ovakvím uslovíma, bi-
ako se Dzuľovo súre-

rasťojaním (sl. 66.7).
uvek negatívna ī súrenju se sa
technická samé privláčne súle, po-
ako medžu molekuláma
molekulá, t.j. odbojne súle medžu molekuláma.

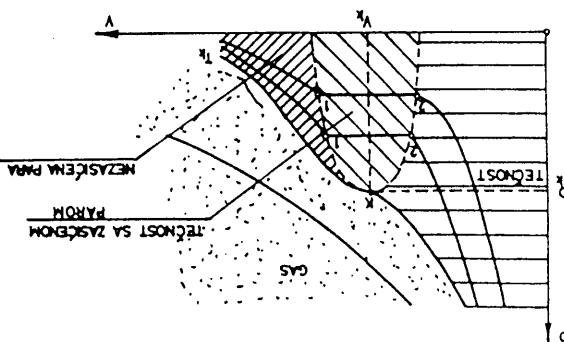
Pri ovakvím uslovíma se mogu zanemariťi dímenzié-
va i kaze se da pokazuje negatívnu Dzuľ-Tompsonovu efekat.
kod koficijent b se može zanemariťi (b + 0)
te se z (66.12) dôjde da je $T_2 - T_1 > 0$. Znáci pri uslovíma
b. Koeficijent b se može zanemariťi ($b + 0$)

gasovitom stanju.

a. Iznad kritične izotermu se sústancia nálaži
stične oblasti:

i kritične izotermu možemo PV dijagram podleži na káratekteri-
kriju koficijentu a kritičnej teploty. Pomocou ove kritice
bilina. Ako tăkce 1 i 2 na svim izotermama povezemo, dobijemo
najprvem u započinje u tăkci 1, a u tăkci 2 je sav gas
ces kondenzácijs započinje bez povreda pritiska. Pro-
zasičene pare súrenjuje zapreminu bez povreda pritiska. Pro-
dejova se vysí kondenzácijsa gasa. Nastala smeša tehnosti i
se prevára u tečno agregátu stanje i duž tih horizontálnich
zontálnim) delovím. Ispod kritične izotermu gas potejde da
slázu sa van der Valsovim izotermama, aži ispod te kritice se
umešto kritičich sa makróm aži ispod te kritice se
slázu sa van der Valsovim izotermama, aži ispod te kritice se

SL. 66.8



66.4. Eksperimentálne izotermu. Kriticka tăkce

Ako na reálnom gasu izvrsímo izotermu kompreziju
na raznúm temperatúram, u PV dijagramu gemo dobiti kritice koficijent b se može zanemariťi (b + 0)

66.4. Eksperimentálne izotermu. Kriticka tăkce

b. Izmedju tačaka 1 i kritične izoterme se nalazi oblast nezasićene pare.

c. Izmedju tačaka 1 i 2 nalazi se smeša tečnosti i zasićene pare.

d. Od koordinatnog početka da tačke 2 supstanca se nalazi u tečnoj agregatnoj fazi.

Sa slike 66.8. vidimo da se ove oblasti spajaju u kritičnoj tački. Na kritičnoj tački nestaju razlike izmedju tečne i gasovite faze i materija lako prelazi u bilo koje od tih agregatnih stanja.

Parametri kritičnog stanja imaju sledeće osobine:

- a. Gas čija je temperatura viša od T_K ne može se pretvoriti u tečno stanje.
- b. Pritisak zasićene pare ne može biti veći od p_K .
- c. Zapremina tečne faze ne može biti veća od V_K .

66.5. Dijagram stanja. Trojna tačka

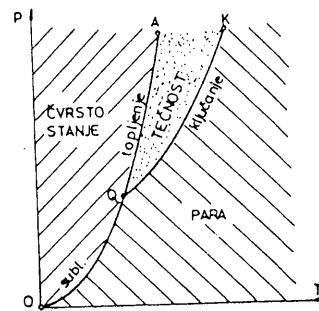
Malo pre smo videli da jedna supstanca, zavisno od pritiska i temperature, može biti u tri agregatna stanja. Takođe smo pokazali da postoje odredjene vrednosti pritiska i temperature na kojima se supstance nalaze u ravnoteži u dva agregatna stanja.

Medutim, postoji i jedna vrednost pritiska i temperature na kojoj se sve tri faze supstance mogu javiti istovremeno. Ova tačka se naziva *trojnom tačkom*. Zavisnost ravnotežnih stanja jedne supstance izmedju dve faze najčešće se prikazuje na pT dijagramu. Ovakav grafikon (sl. 66.9) se zove *dijagramom stanja*.

Deo krive OQ predstavlja parove temperature i pritiska pri kojima se supstanca nalazi u ravnoteži izmedju čvrstog i gasovitog agregatnog stanja.

Temperatura na kojoj supstanca prelazi iz čvrstog u gasovito stanje naziva se *temperaturom sublimacije*. Deo krive

OQ je označen sa "subl" jer predstavlja zavisnost tačke sublimacije od pritiska.



Sl. 66.9

ova dva agregatna stanja su u ravnoteži na tački ključanja. Znači, ovaj deo krive pokazuje kako se menja tačka ključanja u funkciji od pritiska.

Duž dela krive OQK se zasićena para nalazi u ravnoteži sa čvrstom, odnosno sa tečnom fazom. Pritisak zasićene pare (napon pare) ne zavisi od zapremine, već samo od temperature. Smanjenjem zapremine supstance, deo zasićene pare se kondenzuje ali pri tome ne menja pritisak,

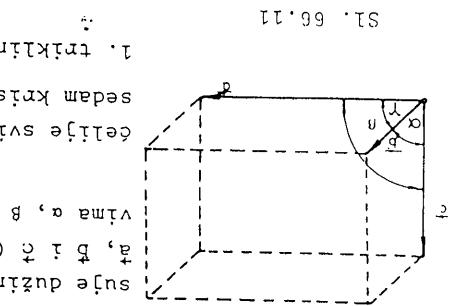
66.6. Toplotra pretvaranja

Pri faznom prelazu se menja energetsko stanje materije. Da bi se ostvario fazni prelaz iz čvrstog u tečno, odnosno iz tečnog u gasovito stanje, treba materiji dodati izvesnu količinu toplote. Ova toplota se ne troši na povećanje temperature tela, već na slabljenje i razbijanje medjumolekularnih veza.

Na slici 66.10. prikazano je kolike količine toplote treba dovoditi ledu da bi se pretvorio prvo u tečno, a potom u gasovito agregatno stanje. Od -20°C do 0°C , temperatura leda se linearno povećava sa dovedenom količinom toplote. Na 0°C led počinje da se topi i temperatura leda (od toplote)

do ogromnog broja sitnih kristala i njihova struktura se ne vi-
di makroskopski. Njihova kristalna struktura se moze orderediti
u resetki periododichno ponavljaj u svim pravcima. Elementarni ras-
pored atomi kog i se ovako periododichno ponavljaju zove se elementar-
nom kristalnom delijom (sl. 66.11).

Kao sto smo rekli, kod kristala se raspored atomi
zracenja na kristalu.
samo mikrofizickim procesima, kao sto je, na primjer, rasejanje
u resetki periododichno ponavljaj u svim pravcima. Elementarni ras-
pored atomi kog i se ovako periododichno ponavljaju zove se elementar-
nom kristalnom delijom (sl. 66.11).



Elementarna delija se opisuje duzinama stranica paralelopipeda
vima a, b i c (periodi identnosti) i uglo-
vima α , β i γ izmedju tih stranica.
Prema obliku elementarne delije u jedinici
celesti svih se kristali mogu svrstati u
sedam kristalografskih sistema:

1. triklinični

sl. 66.11

3. rombični

5. romboedralni

6. heksagonalni

7. kubni

a = b = c a = b = y = 90°

a = b = c a = b = y = 90°

a = b = c a = b = y = 90°

a = b = c a = b = y = 90°

a = b = c a = b = y = 90°

a = b = c a = b = y = 90°

la, staklo, plastifene mase i sl.
da se nazivaju amorfni tezina. Primer za amorfna telja su smo-
i njima raspored atoma statistički kao kod tehnosti i gasova,
ako ćvrste telja nemaju uređenu strukturu, već je

kristalni u kojima je redjenost molekula očuvana
do makroskopskih razmara se monokristal. Monokristal
i mazu pravilnu geometrijsku formu zavisi od simetrije
kristala u kojima je redjenost molekula strukture.

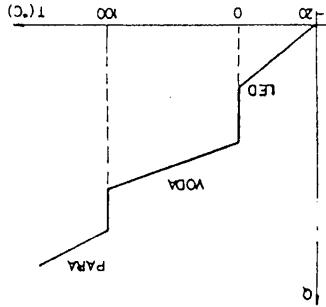
(indeks prelamanja, električni otpor i dr.) menjaju sa prome-
njom pravaca u odnosu na uređenu strukturu.
urđenosti kristali pokazuju antrozropicu čitavog niza
molekula koji se periodično ponavljaju u prostoru. Usled ove
kristalno stanje se odlikuje redjenim rasporedom

66.7. Kristalno i amorfno stanje
toplotne pretvaranje oslobadaju.
gasni prelaz vesi u smernu gas-teknost+vrsto stanje, tada se
tiskan od temperaturе na kojoj se vrši fazni prelaz. Ako se
sve topotne pretvaranja zavisite od spoljasnjeg pri-
toplotne sublimacije a.

sovitu fazu topota a, a za prelaz iz vrste u gasovitu fazu
nije definisane se topota topjenja a, za prelaz iz tečne u ga-
siti koljenju topote Q = ma. Za prelaz iz vrstog u tečno sta-
da bi promenili agregatno stanje mjerama upstance treba utro-
staviti fazu topota Q = ma, a za prelaz iz gasovitu fazu
stane jeemo označiti sa a. Znaci,

SL. 66.10 materije da promeni agregatno
j u treba dovesti jedinicu mase
Koljenju topote ko-
menja sve dok se sva voda ne pre-
tvari u gasovitu fazu.

še vode i zasigene pare se ne
ces koljenja i temperatura sme-
plote, a na 100°C započinje pro-
nearno sa dovedenom koljenjem to-
ra vode se do 100°C površavaju i
da se sav led ne istopi. Kad-
te dok se sav led ne istopi, ka-
nosu smese leda; vode) se ne menjaju dovedenom koljenom toplo-
ja



66.8. Osnovni tipovi kristala

Kristali se često dele i po tome kakve se čestice nalaze u čvorovima rešetke i kakav je dominantni tip veze koja održava kristal. Prema ovim osobinama kristale delimo na sledeće vrste

a. Jonski kristali. U čvorovima rešetke ovih kristala se nalaze pozitivni ili negativni joni koji su medjusobno povezani privlačnim elektrostatičkim silama. Tipičan primer ovakvih kristala je kristal NaCl.

b. Atomski kristali. U čvorovima rešetke atomskega kristala nalaze se neutralni atomi koji su medjusobno povezani tzv. homeopolarnim ili kovalentnim vezama. Ovakva povezanost atoma i molekula se može protumačiti kvantno-mehaničkim silama sparivanja. Tipični predstavnici ove vrste kristala su diamant i grafit.

c. Metalni kristali. U čvorovima kristalne rešetke metalnih kristala nalaze se čvrsto povezani joni metala, dok se elektroni iz spoljašnjih omotača metalnih atoma odvajaju od tih jona i mogu slobodno da putuju kroz kristalnu rešetku.

d. Molekularni kristali. U čvorovima kristalne rešetke ove vrste molekula nalaze se molekuli koji su medjusobno povezani električnom dipol-interakcijom. Ova veza je relativno slaba i ovi kristali su skloni raspadanju. Tipični predstavnici ovakvih kristala su parafin i naftalin.

1. I. Bikit
"Opšta fizika" I deo, Izd. "Prirodno-matematički fakultet", Novi Sad, 1981.
2. N. Cindro
"Fizika 1.", Izd. "Školska knjiga", Zagreb, 1980.
3. S.E. Friš, A.V. Timorjeva
"Kurs opšte fizike", Izd. "Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije", Beograd, 1969.
4. F.W. Sears
"Mehanika, talasno kretanje i toplofa", Izd. "Naučna knjiga", Beograd, 1962.
5. V. Vučić, D. Ivanović
"Fizika", Izd. "Naučna knjiga", Beograd, 1967.
6. I. Janić
"Fizika", Izd. "Prirodno-matematički fakultet", Novi Sad, 1971.
7. ***
"Berkeley Physics Course", "McGraw-Hill, New York, 1964.
8. D.O. Hughes, J.L. Latham
"Physics for Chemists and Biologists", Butterworts, London, 1968.
9. A. Kitaigorodsky
"Introduction to Physics", Izd. "Mir", Moskva, 1976.
10. C.A. Zisman, O.M. Todes
"Kurs obšće fizike", Izd. "Nauka", Moskva, 1972.

22. D. Tuhtar
"Zagađenje zraka i vode", Izd. "Sujetlosti", Sarajevo, 1979.

21. N. Činđro, P. Čolić
"Fizika", Izd. "Školska knjiga", Zagreb, 1979.

20. M. Westphal
"Fizika", Izd. "Prosveta", Beograd, 1961.

19. S. Šljivić
"Uvod u fiziku", Izd. "Naučna knjiga", Beograd, 1961.

18. V. Kržić
"Technika fizika", Izd. "Školska knjiga", Zagreb, 1963.

17. M. Arsić, M. Gik, S. Mišović et al
"Fizika za učile škole", Izd. "Savremena administracija", Beograd, 1982.

16. H. Pašić
"Fizika za studente medicine, stomatologije i veterinarne", Izd. "Začuđ za izdavaču udžbenika", Sarajevo, 1974.

15. M. Pavlović, S. Stojanović
"Fizika za III razred srednjeg PO za prirodno-matematičke struke", Izd. "Koča Kolarou", Zrenjanin, 1979.

14. A. Beiser
"Perspectives of Modern Physics", McGraw-Hill Kogakusha", Tokyo, 1969.

13. A.J. Wallon
"Three Phases of Matter", McGraw-Hill, London, 1976.

12. B.M. Javorški, A.A. Pišnški
"Osnovat fizika", Izd. "Nauka", Moskva, 1974.

11. A.N. Remizov
"Kurs fizike", Izd. "Viščaja škola", Moskva, 1976.