TERMIN 6 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★ K1 03.12.2020. ⑧

Zadatak 1.
Izračunati

a)
$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix};$$

b)
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}.$$

Rješenje

Vrijedi

a)
$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 4 & 6 & 8\\3 & 6 & 9 & 12\\4 & 8 & 12 & 16\end{bmatrix}.$$

b)
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}30\end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.
Odrediti realan parametar a tako da matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

bude regularna.

Rješenje

Matrica je regularna ako i samo ako je vrijednost njene determinante različita od nule. Kako je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3.$$

Kako je $\det A = -3 \neq 0$ za svako $a \in \mathbb{R}$, matrica A je regularna za svako $a \in \mathbb{R}$.

Zadatak 3.
Da li sistem

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

ima netrivijalno rješenje? Obrazložiti odgovor.

Rješenje

Dati sistem je homogen. Provjerićemo vrijednost determinante sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 15.$$

Kako je determinanta sistema različita od nule, sistema nema netrivijalno rješenje sistema, odnosno jedino rješenje sistema je

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)\,.$$

Zadatak 4.

Data je matrica

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&4&0\\1&2&1\end{bmatrix}.$$

Naći matricu X tako da je $X\cdot A=E$.

Rješenje

Kako je $X=A^{-1}$, izračunaćemo inverznu matricu korišćenjem Gaus-Žordanove metode:

$$\begin{aligned}
\left[A\mid E\right]&\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&1&0&0\\1&4&0&0&1&0\\1&2&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{I_v\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+II_v\\ I_v\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+III_v}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&1&0&0\\0&\frac{7}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{II_v\cdot 2\\ III_v\cdot 2}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&1&0&0\\0&7&-3&-1&2&0\\0&3&-1&-1&0&2\end{array}\right]\xrightarrow{II_v\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)+III_v}\\
&\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&1&0&0\\0&7&-3&-1&2&0\\0&0&\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&-\frac{6}{7}&2\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{I_v\cdot\frac{1}{2}\\ II_v\cdot\frac{1}{7}\\ III_v\cdot\frac{7}{2}}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&0\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{III_v\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+I_v\\ III_v\cdot\left(\frac{3}{7}\right)+II_v}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&0&\frac{7}{2}&\frac{9}{2}&-\frac{21}{2}\\0&1&0&-1&-1&3\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right]\xrightarrow{II_v\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+I_v}\\
&\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&5&-12\\0&1&0&-1&-1&3\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right]\to\left[E\mid A^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Dakle,

$$X=\begin{bmatrix}4&5&-12\\-1&-1&3\\-2&-3&7\end{bmatrix}.$$

Zadatak 5.
Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} -\ t+\ \ x-\ \ y-\ \ z=0 \\ -\ t+2x-3y+2z=0 \\ \ \ \ t+2x-\ \ y-2z=0 \\ -5t+3x-2y-7z=0 \end{cases}.$$

Rješenje

Dati sistem je homogen. Provjerićemo vrijednost determinante sistema:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -5 & 3 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

Kako je determinanta sistema različita od nule, sistema nema netrivijalno rješenje sistema, odnosno jedino rješenje sistema je

$$(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)\,.$$

Zadatak 6.
U zavisnosti od parametara $a, b \in \mathbb{R}$ diskutovati i riješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ a^2x_1 + b^2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

Rješenje

Za rješavanje sistema ćemo koristiti Kramerov metod:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & 1-a \\ a^2 & b^2-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & 1-a \\ b^2-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)\left(1-a^2\right) - (1-a)\left(b^2-a^2\right) = (b-a)(1-a)\left[(1+a)-(b+a)\right]$$
$$= (b-a)(1-a)(1-b),$$
$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & b^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = D = (b-a)(1-a)(1-b).$$

Razlikujemo dva slučaja:

1. $D \neq 0 \iff a \neq 1 \ \wedge \ b \neq 1 \ \wedge \ a \neq b$
   U ovom slučaju sistem ima jedinstveno rješenje:
$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \frac{D_{x_3}}{D}\right) = \left(\frac{0}{(b-a)(1-a)(1-b)}, \frac{0}{(b-a)(1-a)(1-b)}, \frac{(b-a)(1-a)(1-b)}{(b-a)(1-a)(1-b)}\right) = (0,0,1).$$

2. $D = 0 \iff a = 1 \ \vee \ b = 1 \ \vee \ a = b$
   Razlikujemo više podslučajeva:

   (a) $a = 1 \ \wedge \ b \neq 1$
   Početni sistem je sada:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + b^2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (b-1)\,x_2 = 0 \\ \left(b^2-1\right)x_2 = 0 \end{cases}.$$
   Kako je $b \neq 1$ iz druge jednačine imamo $x_2 = 0$, što zadovoljava i treću jednačinu. Iz prve jednačine imamo
$$x_1 + x_3 = 1 \ \Rightarrow \ x_1 = 1 - x_3,$$
   odakle dobijamo da je sistem u ovom slučaju neodređen i njegovo rješenje je
$$(x_1, x_2, x_3) = (1-t, 0, t), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

   (b) $b = 1 \ \wedge \ a \neq 1$
   Početni sistem je sada:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ a^2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (a-1)\,x_1 = 0 \\ \left(a^2-1\right)x_1 = 0 \end{cases}.$$
   Kako je $a \neq 1$ iz druge jednačine imamo $x_1 = 0$, što zadovoljava i treću jednačinu. Iz prve jednačine imamo
$$x_2 + x_3 = 1 \ \Rightarrow \ x_2 = 1 - x_3,$$
   odakle dobijamo da je sistem u ovom slučaju neodređen i njegovo rješenje je
$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 1-t, t), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

   (c) $a = b = 1$
   Početni sistem je sada:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$
   Dobijamo da je sistem u ovom slučaju neodređen i njegovo rješenje je
$$(x_1, x_2, x_3) = (t, u, 1-t-u), \ \ t, u \in \mathbb{R}.$$

(d) $a = b \ \wedge \ a \neq 1 \ \wedge \ b \neq 1$

Početni sistem je sada:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + \ ax_2 + x_3 = 1 \\ a^2x_1 + a^2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (a-1)\,x_1 + (a-1)\,x_2 = 0 \\ \left(a^2-1\right)x_1 + \left(a^2-1\right)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Kako je $a - 1 \neq 0$, drugu jednačinu možemo pomnožiti sa $\frac{1}{a-1}$ nakon čega dobijamo:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ \left(a^2-1\right)x_1 + \left(a^2-1\right)x_2 = 0 \end{cases}$$

odakle je $x_2 = -x_1$. Uvrštavanjem $x_2 = -x_1$ u preostale dvije jednačine vidimo da treća jednačina vrijedi, dok je iz prve jednačine $x_3 = 1$ pa je sistem i u ovom slučaju neodređen i njegovo rješenje je

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, 1)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 7.
Neka su $A, E \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ako je

$$(A+E)^3 = O,$$

dokazati da je A regularna matrica.

Rješenje

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
&(A+E)^3 = O\\
&(A+E)\cdot(A+E)\cdot(A+E) = O\\
&\left(A^2 + E\cdot A + A\cdot E + E^2\right)\cdot(A+E) = O\\
&\left(A^2 + 2A + E\right)\cdot(A+E) = O\\
&A^3 + 2A^2 + E\cdot A + A^2\cdot E + 2A\cdot E + E^2 = O\\
&A^3 + 3A^2 + 3A + E = O\\
&A\cdot\left(A^2 + 3A + 3E\right) = -E
\end{aligned}$$

Na osnovu Koši-Binjeove teoreme imamo da je

$$\det A\cdot\det\left(A^2+3A+3E\right) = \det(-E).$$

Kako je

$$\det(-E) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n$$

imamo da je

$$\det A\cdot\det\left(A^2+3A+3E\right) = (-1)^n.$$

Pošto je

$$(-1)^n = \pm 1 \neq 0$$

vrijedi $\det A \neq 0$ pa je matrica A regularna, što je trebalo dokazati.

Zadatak 8.
Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odrediti A^{2021}.

Rješenje

<u>*Prvi način:*</u>
Koristeći binomnu formulu imamo da je

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^n \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k \cdot (2E)^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^0 \cdot 2^n \cdot E^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix} \cdot 2^{n-k} \cdot E^{n-k} \\
&= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \begin{bmatrix} 2^{k-1+n-k} & 2^{k-1+n-k} \\ 2^{k-1+n-k} & 2^{k-1+n-k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot E \\
&= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} & 0 \\ 0 & \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 2^n - 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^n + 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^n + 2^{2n-1} - 2^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

U ovom rješenju smo iskoristili identitete

$$X^0 = E, \ \sum_{k=0}^{n} = 2^n \text{ i } X \cdot E = X.$$

Sada je jasno da je

$$A^{2021} = \begin{bmatrix} 2^{4041} + 2^{2020} & 2^{4041} - 2^{2020} \\ 2^{4041} - 2^{2020} & 2^{4041} + 2^{2020} \end{bmatrix}.$$

<u>*Drugi način:*</u>
Primijetimo da je:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ A^2 = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, \ A^3 = \begin{bmatrix} 36 & 28 \\ 28 & 36 \end{bmatrix}, \ A^4 = \begin{bmatrix} 136 & 120 \\ 120 & 136 \end{bmatrix}, \ A^5 = \begin{bmatrix} 528 & 496 \\ 496 & 528 \end{bmatrix} \ldots$$

Primijetimo da se prilikom stepenovanja matrice A dobijaju jednaki brojevi i na glavnoj i na sporednoj dijagonali. Stoga, pretpostavimo da je

$$A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{bmatrix}.$$

Takođe, primijetimo da je

$$a_n - b_n = 2^n \text{ i } a_n + b_n = 2^{2n}.$$

a rješavanjem ovog sistema dobijamo da je

$$a_n = \frac{2^{2n} + 2^n}{2} = 2^{2n-1} + 2^{n-1} \ \text{ i } \ b_n = \frac{2^{2n} - 2^n}{2} = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$$

pa pretpostavljamo da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Da bismo ovo pokazali, koristićemo princip matematičke indukcije.

1. Pokažimo da tvrđenje
$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ 2^{2n-1} - 2^{n-1} & 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{bmatrix}$$
vrijedi za $n = 1$.
Kako je
$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{2\cdot 1-1} + 2^{1-1} & 2^{2\cdot 1-1} - 2^{1-1} \\ 2^{2\cdot 1-1} - 2^{1-1} & 2^{2\cdot 1-1} + 2^{1-1} \end{bmatrix},$$
baza indukcije vrijedi.

2. Pretpostavimo da tvrđenje vrijedi za $n = k$, odnosno da vrijedi
$$A^k = \begin{bmatrix} 2^{2k-1} + 2^{k-1} & 2^{2k-1} - 2^{k-1} \\ 2^{2k-1} - 2^{k-1} & 2^{2k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Dokažimo da tvrđenje vrijedi i za $n = k + 1$, tj. dokažimo da vrijedi
$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{2(k+1)-1} + 2^{(k+1)-1} & 2^{2(k+1)-1} - 2^{(k+1)-1} \\ 2^{2(k+1)-1} - 2^{(k+1)-1} & 2^{2(k+1)-1} + 2^{(k+1)-1} \end{bmatrix}.$$

Kako je
$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{bmatrix} 2^{2k-1} + 2^{k-1} & 2^{2k-1} - 2^{k-1} \\ 2^{2k-1} - 2^{k-1} & 2^{2k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot \left(2^{2k-1} + 2^{k-1}\right) + 2^{2k-1} - 2^{k-1} & 2^{2k-1} + 2^{k-1} + 3 \cdot \left(2^{2k-1} - 2^{k-1}\right) \\ 3 \cdot \left(2^{2k-1} - 2^{k-1}\right) + 2^{2k-1} + 2^{k-1} & 2^{2k-1} - 2^{k-1} + 3 \cdot \left(2^{2k-1} + 2^{k-1}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \cdot 2^{2k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} & 4 \cdot 2^{2k-1} - 2 \cdot 2^{k-1} \\ 4 \cdot 2^{2k-1} - 2 \cdot 2^{k-1} & 4 \cdot 2^{2k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{2(k+1)-1} + 2^{(k+1)-1} & 2^{2(k+1)-1} - 2^{(k+1)-1} \\ 2^{2(k+1)-1} - 2^{(k+1)-1} & 2^{2(k+1)-1} + 2^{(k+1)-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

★★★★

Zadatak 9.
Ispitati algebarsku strukturu $(X,*)$ gdje je X skup kvadratnih matrica takvih da je

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

i operacija $*$ standardno množenje matrica.

Rješenje

1. *Zatvorenost* $(\forall A, B \in X) \quad A \cdot B \in X$
   Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} b & b & b & \dots & b \\ b & b & b & \dots & b \\ b & b & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   Tada je

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & b & b & \dots & b \\ b & b & b & \dots & b \\ b & b & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \dots & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} \\ \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \dots & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} \\ \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \dots & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} & \dots & \underbrace{ab+ab+\dots+ab}_{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} nab & nab & nab & \dots & nab \\ nab & nab & nab & \dots & nab \\ nab & nab & nab & \dots & nab \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nab & nab & nab & \dots & nab \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   Kako je $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, imamo da je $nab \in \mathbb{R}$, a kako je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $n > 0$, imamo da je $nab \neq 0$, čime je zatvorenost dokazana.

2. *Komutativnost* $(\forall A, B \in X) \quad A \cdot B = B \cdot A$
   Neka su opet matrice A i B kao iz prethodnog dokaza zatvorenosti. Tada je

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{bmatrix} b & b & b & \dots & b \\ b & b & b & \dots & b \\ b & b & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \dots & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} \\ \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \dots & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} \\ \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \dots & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} & \dots & \underbrace{ba+ba+\dots+ba}_{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} nba & nba & nba & \dots & nba \\ nba & nba & nba & \dots & nba \\ nba & nba & nba & \dots & nba \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nba & nba & nba & \dots & nba \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Kako je množenje realnih brojeva komutativno, tj. kako je $nab = nba$, komutativnost vrijedi.

3. *Asocijativnost* $(\forall A, B, C \in X)\ \ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
   Kako je množenje svih kvadratnih matrica asocijativna operacija i kako su matrice A, B i C kvadratne, asocijativnost vrijedi.

4. *Neutralni element* $(\exists!\, M \in X)\ (\forall A \in X)\ \ A \cdot M = M \cdot A = A$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $M \in X$ tako da je $A \cdot M = A$.
   Neka je
$$M = \begin{bmatrix} m & m & m & \dots & m \\ m & m & m & \dots & m \\ m & m & m & \dots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & \dots & m \end{bmatrix}.$$
   Kako je
$$\begin{aligned} & A \cdot M = A \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} nam & nam & nam & \dots & nam \\ nam & nam & nam & \dots & nam \\ nam & nam & nam & \dots & nam \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nam & nam & nam & \dots & nam \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & nam = a \\ \Leftrightarrow \quad & m = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$
   neutralni element je matrica
$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$
   Primijetimo da matrica E ne pripada skupu X te stoga jedinična matrica nije neutralni element u ovom slučaju.

5. *Inverzni element* $(\exists\, P \in X)\ (\forall A \in X)\ \ A \cdot P = P \cdot A = M$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $P \in X$ tako da je $A \cdot P = M$
   Neka je
$$P = \begin{bmatrix} p & p & p & \dots & p \\ p & p & p & \dots & p \\ p & p & p & \dots & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & p & p & \dots & p \end{bmatrix}.$$
   Kako je
$$\begin{aligned} & A \cdot P = M \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} nap & nap & nap & \dots & nap \\ nap & nap & nap & \dots & nap \\ nap & nap & nap & \dots & nap \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nap & nap & nap & \dots & nap \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & nap = \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow \quad & p = \frac{1}{n^2 a}, \end{aligned}$$
   inverzni element je matrica
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{n^2a} & \frac{1}{n^2a} & \frac{1}{n^2a} & \dots & \frac{1}{n^2a} \\ \frac{1}{n^2a} & \frac{1}{n^2a} & \frac{1}{n^2a} & \dots & \frac{1}{n^2a} \\ \frac{1}{n^2a} & \frac{1}{n^2a} & \frac{1}{n^2a} & \dots & \frac{1}{n^2a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n^2a} & \frac{1}{n^2a} & \frac{1}{n^2a} & \dots & \frac{1}{n^2a} \end{bmatrix}.$$

Dakle, algebarska struktura $(X, \cdot)$ je Abelova grupa.

Zadatak 10.
Ako su A i B kvadratne matrice takve da je $A^2 = A$, $B^2 = B$ i $(A+B)^2 = A+B$ dokazati da je tada $AB = BA = O$.

Rješenje

Vrijedi:

$$\begin{aligned} & (A+B)^2 = A+B \\ \Leftrightarrow \quad & (A+B)\cdot(A+B) = A+B \\ \Leftrightarrow \quad & A^2 + BA + AB + B^2 = A+B. \end{aligned}$$

Kako je $A^2 = A$ i $B^2 = B$ imamo da je

$$BA + AB = O \tag{1}$$

Množenjem izraza (1) matricom A sa lijeve strane, uz korištenje uslova $A^2 = A$, dobijamo:

$$\begin{aligned} & ABA + AAB = AO \\ \Leftrightarrow \quad & ABA + A^2B = O \\ \Leftrightarrow \quad & AB = -ABA \qquad (2) \end{aligned}$$

Sa druge strane, množenjem izraza (1) matricom A sa desne strane, uz korištenje uslova $A^2 = A$, dobijamo:

$$\begin{aligned} & BAA + ABA = OA \\ \Leftrightarrow \quad & BA^2 + ABA = O \\ \Leftrightarrow \quad & BA = -ABA \qquad (3) \end{aligned}$$

Iz izraza (2) i (3) imamo da je

$$AB = BA = -ABA$$

pa uvrštavanjem u izraz (1) dobijamo

$$\begin{aligned} & BA + BA = O \\ \Leftrightarrow \quad & 2BA = O \\ \Leftrightarrow \quad & BA = O \\ \Rightarrow \quad & AB = O. \end{aligned}$$

Dakle, $AB = BA = O$, čime je dokaz završen.