TERMIN 3 - zadaci za samostalan rad

★ ★ ★

Zadatak 1.
Dokazati da je sa

$$\mathcal{A}\left(a,b,c\right)=\left(a-b+2c\right)+\left(a+b+2c\right)x+cx^2$$

definisano linearno preslikavanje $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2\left[x\right]$ i odrediti njegovu matricu u odnosu na standardne baze ovih prostora.
Pokazati da je preslikavanje regularno i odrediti njemu inverzno preslikavanje.

★ ★ ★

Zadatak 2.
Odrediti matricu prelaska sa baze

$$\mathcal{B}_G=\left\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,0,1)\right\}$$

na bazu

$$\mathcal{B}_F=\left\{(1,2,1,1),(0,1,2,1),(2,1,1,2)\right\}.$$

★ ★ ★ ★

Zadatak 3.
Dat je skup $S=\left\{1,x-2,(x-2)^2\right\}$ u prostoru $\mathbb{R}^3\left[x\right]$.

a) Dokazati da je skup S baza prostora $\mathbb{R}^3\left[x\right]$.

b) Naći matricu prelaska sa baze S na bazu $B=\left\{1,x,x^2\right\}$.

c) Napisati vektor x^2+2x+1 u bazi S.

★ ★ ★ ★

Zadatak 4.
Neka su

$$\overrightarrow{a}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix},\ \overrightarrow{b}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\ \text{ i } \overrightarrow{c}=\begin{bmatrix}-5\\4\\0\end{bmatrix}.$$

Odrediti bazu B_N prostora $\mathbb{R}^3$ u odnosu na koju je

$$\left[\overrightarrow{a}\right]_{B_N}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\ \left[\overrightarrow{b}\right]_{B_N}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\ \text{ i } \left[\overrightarrow{c}\right]_{B_N}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

★ ★ ★ ★

Zadatak 5.
Naći matricu linearnog operatora $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ u bazi $\left\{(0,0,3),(1,1,0),(1,2,3)\right\}$ ako je

$$\mathcal{A}\left(1,0,0\right)=\left(3,2,1\right),\ \ \mathcal{A}\left(0,1,0\right)=\left(0,0,0\right)\ \text{ i } \mathcal{A}\left(0,0,1\right)=\left(0,0,0\right).$$

★ ★ ★ ★

Zadatak 6.
Neka je $\mathcal{P}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ortogonalno projektovanje na yz ravan. Odrediti matricu operatora $\mathcal{P}$ po bazi $B'=\{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 7.
Dat je linearni operator $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definisan sa

$$\mathcal{A}(a,b,c)=(2a-11b+6c,a-7b+4c,2a-b).$$

Odrediti matricu operatora $\mathcal{A}$ po kanonskoj bazi i po bazi $B'=\{(2,3,5),(0,1,2),(1,0,0)\}$.

★★★

Zadatak 8.
Upotrebom Kroneker-Kapelijeve teoreme riješiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} 3x+2y-4z=1 \\ 3x-2y+\ \ z=2 \\ \ \ x+2y-2z=-1 \end{cases}.$$

Da li vektor kolone slobodnog člana pripada prostoru kolona matrice sistema?

★★★★

Zadatak 9.
Neka je

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti skup svih vektora $\overrightarrow{b}$ za koje sistem $A\cdot\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ ima rješenje. Ukoliko je taj skup potprostor, odrediti jednu njegovu bazu.

b) Provjeriti da li vektor $\overrightarrow{b}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pripada skupu iz prethodne tačke pa, ako se ispostavi da pripada, odrediti sva rješenja odgovarajućeg sistema $A\cdot\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$.

★★★★

Zadatak 10.
Upotrebom Kroneker-Kapelijeve teoreme ispitati prirodu rješenja sistema linearnih jednačina u zavisnosti od parametara a i b:

$$\begin{cases} ax_1-\ 3x_2+\ 5x_3+\ 7x_4=1 \\ 2ax_1-2bx_2+\ 2x_3+\ 3x_4=a \\ 2x_1-\ bx_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}.$$