TERMIN 3 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★

Zadatak 1.
U skupu $\{-2,-1,0,1,2\}$ definisana je relacija ρ sa

$$x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x+y=0.$$

Ispitati osobine relacije ρ.

Rješenje

Ispitujemo redom sljedeće osobine relacije ρ:

(a) *refleksivnost*
Relacija je refleksivna ako vrijedi

$$\big(\forall x \in \{-2,-1,0,1,2\}\big) \;\; x\rho x \quad \Leftrightarrow \quad x+x=0.$$

Kontra primjerom pokazujemo da refleksivnost ne važi, jer za $x=2$ vidimo da $2\not\rho 2$ jer je $2+2\neq 0$.

(b) *simetričnost*
Relacija je simetrična ako vrijedi

$$\big(\forall x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}\big) \;\; x\rho y \quad \Rightarrow \quad y\rho x.$$

Kako vrijedi $x\rho y$, imamo da je $x+y=0$ pa zbog komutativnosti sabiranja važi da je $y+x=0$, odnosno $y\rho x$, pa je relacija ρ simetrična.

(c) *antisimetričnost*
Relacija je antisimetrična ako vrijedi

$$\big(\forall x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}\big) \;\; x\rho y \quad \wedge \quad y\rho x \quad \Rightarrow x=y.$$

Kontra primjerom pokazujemo da antisimetričnost ne važi, jer za $x=2$ i $y=-2$ vidimo da

$$2\rho-2 \quad \wedge \quad -2\rho, 2$$

ali je $2\neq -2$.

(d) *tranzitivnost*
Relacija je tranzitivna ako vrijedi

$$\big(\forall x,y,z \in \{-2,-1,0,1,2\}\big) \;\; x\rho y \quad \wedge \quad y\rho z \quad \Rightarrow \quad x\rho z.$$

Kontra primjerom pokazujemo da tranzitivnost ne važi, jer za $x=2$, $y=-2$ i $z=2$ vidimo da vrijedi

$$2\rho-2 \quad \wedge -2\rho 2$$

ali ne vrijedi $2\rho 2$ jer je $2+2\neq 0$.

Dakle, relacija ρ je simetrična, ali nije ni refleksivna, ni antisimetrična, ni tranzitivna.

★★

Zadatak 2.
U skupu $\mathbb{R}$ definisana je relacija ρ sa

$$x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 \leq 5.$$

Ispitati osobine relacije ρ.

Rješenje

Ispitujemo redom sljedeće osobine relacije ρ:

(a) *refleksivnost*
Relacija je refleksivna ako vrijedi

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x\rho x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x^2 \leq 5.$$

Kako je $x^2 - x^2 = 0 \leq 5$, relacija ρ je refleksivna.

(b) *simetričnost*
Relacija je simetrična ako vrijedi

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x\rho y \quad \Rightarrow \quad y\rho x.$$

Kontra primjerom pokazujemo da simetričnost ne važi, jer za $x = 2$ i $y = 5$ vidimo da vrijedi $2\rho 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2^2 - 5^2 \leq 5$. Sa druge strane, $5\not\rho 2$ jer je $5^2 - 2^2 = 21 > 5$.

(c) *antisimetričnost*
Relacija je antisimetrična ako vrijedi

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x\rho y \quad \wedge \quad y\rho x \quad \Rightarrow x = y.$$

Kontra primjerom pokazujemo da antisimetričnost ne važi, jer za $x = 2$ i $y = 1$ vidimo da je

$$2\rho 1 \quad \wedge \quad 1\rho 2,$$

ali je $2 \neq 1$.

(d) *tranzitivnost*
Relacija je tranzitivna ako vrijedi

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x\rho y \quad \wedge \quad y\rho z \quad \Rightarrow \quad x\rho z.$$

Kontra primjerom pokazujemo da tranzitivnost ne važi, jer za $x = 3$, $y = 2$ i $z = 1$ vidimo da vrijedi

$$3\rho 2 \quad \wedge \quad 2\rho 1$$

ali ne vrijedi $3\rho 1$ jer je $3^2 - 1^2 = 8 > 5$.

Dakle, relacija ρ je refleksivna, ali nije ni simetrična, ni antisimetrična, ni tranzitivna.

Zadatak 3.
Naći inverznu funkciju za $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x$.

Rješenje

Kako je $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ i $f(x) = x$, zaključujemo da je $f^{-1}(x) = x,\ \ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

★★

Zadatak 4.
Neka su $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ i $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ preslikavanja definisana na sljedeći način:

$$f(x) = x^2 - 9 \text{ i } g(x) = x + 3.$$

Ispitati injektivnost i sirjektivnost preslikavanja $f \circ g$.

Rješenje

Preslikavanje $f \circ g$ definišemo kao:

$$f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ \ (f \circ g)(x) = (x+3)^2 - 9 = x^2 + 6x.$$

Primijetimo da navedeno preslikavanje ima dvije nule definisane u skupu $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x+6) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = -6 \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da za dvije različite vrijednosti $x_1 = 0, x_2 = -6 \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2) = 0$, pa smo ovim pronašli kontra primjer na osnovu kog zaključujemo da injektivnost ne vrijedi.
Kako je preslikavanje $f \circ g$ kvadratna funkcija ona ima svoj ekstrem. Primijetimo da je

$$(f \circ g)(x) = (x+3)^2 - 9 \geq -9$$

pa je kodomen preslikavanja $f \circ g$ podskup skupa $[-9, +\infty)$.
Dakle, ako uzmemo proizvoljno $y \in \mathbb{Z}$ takvo da je $y < -9$, dobićemo da ne postoji $x \in \mathbb{Z}$ takvo da je $(f \circ g)(x) = y$. Neka je

$$y = -10 = (f \circ g)(x) = x^2 + 6x.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x + 10 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ovim smo pronašli kontra primjer na osnovu kog zaključujemo da preslikavanje $f \circ g$ nije ni sirjekcija.

★★

Zadatak 5.

Odrediti domen D i ispitati sirjektivnost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$$

Rješenje

Pri određivanju domena, uzimamo u obzir dva uslova:

(a) $1 + \ln x \neq 0 \;\Rightarrow\; \ln x \neq -1 \;\Rightarrow\; x \neq e^{-1}$,

(b) $x > 0$.

Iz prethodnih uslova zaključujemo da je domen

$$D = \left(0, e^{-1}\right) \;\cup\; (e^{-1}, +\infty).$$

Da bi funkcija f bila surjektivna, potrebno je da važi

$$(\forall y \in \mathbb{R}) \;\; (\exists x \in D) \;\; y = f(x).$$

Odavde je

$$\begin{aligned}
& y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \\
\Leftrightarrow \quad & y \cdot (1 + \ln x) = 1 - \ln x \\
\Leftrightarrow \quad & y + y \cdot \ln x - 1 + \ln x = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \ln x \cdot (1 + y) = 1 - y \\
\Leftrightarrow \quad & \ln x = \frac{1 - y}{1 + y} \\
\Leftrightarrow \quad & x = e^{\frac{1-y}{1+y}}
\end{aligned}$$

Primijetimo da je $y = -1 \in \mathbb{R}$. Međutim, za $y = -1$ vidimo da ne postoji $x \in D$ takvo da je $y = f(x)$ pa funkcija f nije sirjektivna.

★ ★ ★

Zadatak 6.
U skupu $\mathbb{C}$ data je relacija
$$z_1 \rho z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2).$$
Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i odrediti $C_{2e^{\frac{i\pi}{3}}}$.

Rješenje

Da bi relacija bila relacija ekvivalencije, mora da bude refleksivna, simetrična i tranzitivna, pa ispitujemo:

(a) *refleksivnost*
Relacija je refleksivna ako vrijedi
$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \rho z \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z).$$
Prethodna jednakost očigledno vrijedi.

(b) *simetričnost*
Relacija je simetrična ako vrijedi
$$(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \quad z_1 \rho z_2 \quad \Rightarrow \quad z_2 \rho z_1.$$
Kako vrijedi $z_1 \rho z_2$, imamo da je $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ tj. $\mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(z_1)$, odnosno $z_2 \rho z_1$, pa je relacija ρ simetrična.

(c) *tranzitivnost*
Relacija je tranzitivna ako vrijedi
$$(\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}) \quad z_1 \rho z_2 \ \wedge \ z_2 \rho z_3 \quad \Rightarrow \quad z_1 \rho z_3.$$
Imamo da je $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ i $\mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(z_3)$ pa je $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(z_3)$ odakle zaključujemo da je $z_1 \rho z_3$ čime je tranzitivnost dokazana.

Ovim smo pokazali da je ρ relacija ekvivalencije.
Odredimo sada klasu ekvivalencije $C_{2e^{\frac{i\pi}{3}}}$. Vrijedi:
$$\begin{aligned}
C_{2e^{\frac{i\pi}{3}}} &= \left\{ z \in \mathbb{C} : 2e^{\frac{i\pi}{3}} \rho z \right\} \\
&= \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \mathrm{Re}(z) \right\} \\
&= \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right) = \mathrm{Re}(z) \right\} \\
&= \left\{ z \in \mathbb{C} : 2\cos\frac{\pi}{3} = \mathrm{Re}(z) \right\} \\
&= \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 1 \right\} \\
&= \left\{ 1 + yi, \quad y \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Dakle, u klasi kompleksnog broja $2e^{\frac{i\pi}{3}}$ se nalaze svi kompleksni brojevi z čiji je realni dio jednak 1.

★ ★ ★

Zadatak 7.
Neka je preslikavanje

$$f : A \to B, \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$$

dato izrazom

$$f(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Odrediti najveće moguće skupove A i B tako da preslikavanje f bude:

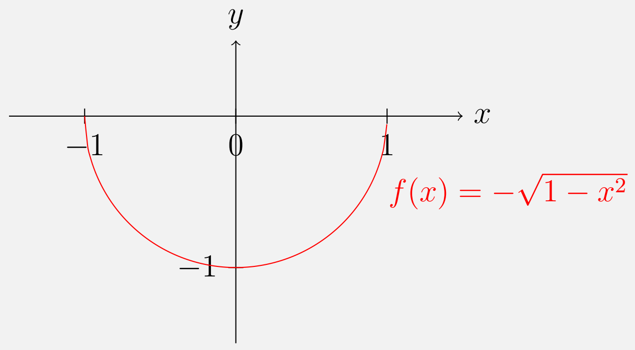
(a) injektivno,

(b) sirjektivno,

(c) bijektivno.

Rješenje

Odredimo prvo domen A_0 i kodomen B_0 preslikavanja f bez restrikcija.
Funkcija f je definisana ako i samo ako je $1 - x^2 \geq 0$ odakle zaključujemo da je $A_0 = [-1, 1]$.
Za $x \in [-1, 1]$ imamo da je $x^2 \in [0, 1]$ pa je $1 - x^2 \in [0, 1]$, odnosno $\sqrt{1 - x^2} \in [0, 1]$ pa je $f(x) = -\sqrt{1 - x^2} \in [-1, 0]$. Odavde je $B_0 = [-1, 0]$.
Na narednoj slici prikazan je grafik funkcije $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.



(a) Odredimo skupove A i B tako da preslikavanje f bude injektivno.
Funkcija f je injekcija ako i samo ako vrijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \;\; f(x_1) = f(x_2) \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = x_2.$$

Imamo da vrijedi

$$-\sqrt{1 - x_1^2} = -\sqrt{1 - x_2^2} \;\; \Rightarrow \;\; 1 - x_1^2 - 1 - x_2^2 \;\; \Rightarrow \;\; x_1^2 = x_2^2 \;\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Odavde zaključujemo da je $x_1 = x_2 \;\; \vee \;\; x_1 = -x_2$. Dakle, ako postoje $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $x_1 = -x_2$, funkcija f neće biti injektivna. Stoga, potrebno je suziti domen tako da x_1 i x_2 ne budu istog znaka. Odavde je $A \subseteq \mathbb{R}^+$ ili $A \subseteq \mathbb{R}^-$.
Konačno, $A_{max} = [-1, 0]$ ili $A_{max} = [0, 1]$ i $B_{max} = [-1, 0]$.

(b) Odredimo skupove A i B tako da preslikavanje f bude sirjektivno.
Funkcija f je sirjekcija ako i samo ako vrijedi

$$(\forall y \in B) \;\; (\exists x \in A) \;\; y = f(x).$$

Imamo da vrijedi

$$y = -\sqrt{1 - x^2}, \;\; y < 0 \;\; \Rightarrow \;\; y^2 = 1 - x^2 \;\; \Rightarrow \;\; x^2 = 1 - y^2 \;\; \Rightarrow \;\; x = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

Odavde zaključujemo da za svako $y \in [-1, 0]$ postoji $x \in [-1, 1]$ takvo da je $y = f(x)$.
Konačno, $A_{max} = [-1, 1]$ i $B_{max} = [-1, 0]$.

(c) Odredimo skupove A i B tako da preslikavanje f bude bijektivno.
Funkcija je bijekcija ako i samo ako je injekcija i sirjekcija.
Dakle, $A_{max} = [-1, 0]$ ili $A_{max} = [0, 1]$ i $B_{max} = [-1, 0]$.

★★★★

Zadatak 8.
U skupu $\mathbb{R}^2$ definisana je relacija ρ sa

$$(x,y)\rho(a,b) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=\frac{(a-1)^2}{16}+\frac{(b-1)^2}{25}.$$

Ispitati da li je ρ relacija ekvivalencije. Ukoliko jeste, odrediti $C_{(1,1)}, C_{(5,1)}$ i dati geometrijsku interpretaciju relacije ρ.

Rješenje

Da bi relacija bila relacija ekvivalencije, mora da bude refleksivna, simetrična i tranzitivna, pa ispitujemo:

(a) *refleksivnost*
Relacija je refleksivna ako vrijedi

$$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ \ (x,y)\rho(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}.$$

Prethodna jednakost očigledno vrijedi.

(b) *simetričnost*
Relacija je simetrična ako vrijedi

$$\left(\forall (x,y),(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\ \ (x,y)\rho(a,b) \quad \Rightarrow \quad (a,b)\rho(x,y).$$

Kako vrijedi $(x,y)\rho(a,b)$, imamo da je

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=\frac{(a-1)^2}{16}+\frac{(b-1)^2}{25} \quad \Rightarrow \quad \frac{(a-1)^2}{16}+\frac{(b-1)^2}{25}=\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25},$$

odnosno $(a,b)\rho(x,y)$, pa je relacija ρ simetrična.

(c) *tranzitivnost*
Relacija je tranzitivna ako vrijedi

$$\left(\forall (x,y),(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2\right)\ \ (x,y)\rho(a,b)\ \wedge\ (a,b)\rho(c,d) \quad \Rightarrow \quad (x,y)\rho(c,d).$$

Imamo da je

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=\frac{(a-1)^2}{16}+\frac{(b-1)^2}{25} \quad \wedge \quad \frac{(a-1)^2}{16}+\frac{(b-1)^2}{25}=\frac{(c-1)^2}{16}+\frac{(d-1)^2}{25}$$

odakle je

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=\frac{(c-1)^2}{16}+\frac{(d-1)^2}{25}.$$

Sada zaključujemo da je $(x,y)\rho(c,d)$ čime je tranzitivnost dokazana.

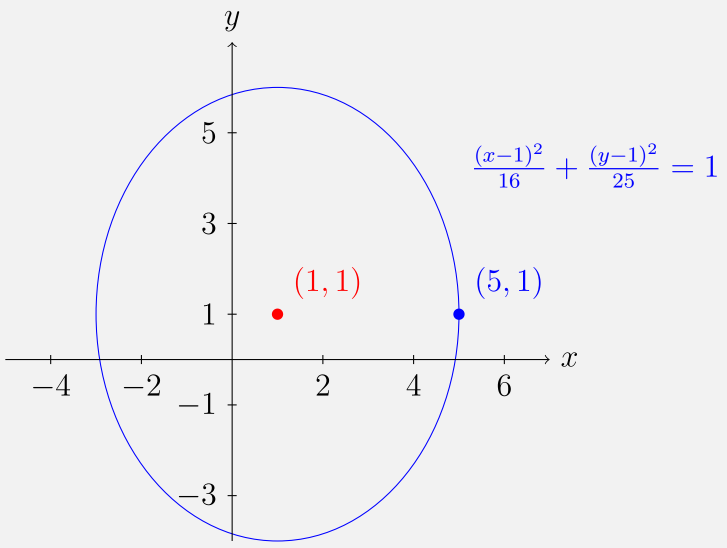
Ovim smo pokazali da je ρ relacija ekvivalencije.
Odredimo sada klasu ekvivalencije $C_{(1,1)}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
C_{(1,1)} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (1,1)\rho(x,y)\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(1-1)^2}{16}+\frac{(1-1)^2}{25}=\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=0\right\}\\
&= \left\{(1,1)\right\}.
\end{aligned}$$

Odredimo i klasu ekvivalencije $C_{(5,1)}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
C_{(5,1)} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (5,1)\rho(x,y)\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(5-1)^2}{16}+\frac{(1-1)^2}{25}=\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1\right\}.
\end{aligned}$$

Geometrijski, klase su elipse sa žižom u tački $(1,1)$, te poluprečnicima dužine 4 i 5. Klase $C_{(1,1)}$ i $C_{(5,1)}$ su prikazane na narednoj slici.



★ ★ ★ ★

Zadatak 9.
Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definisana je sa

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Ispitati bijektivnost funkcije f i odrediti f^{-1} ukoliko postoji.

Rješenje

Prvi način:
Uzmimo smjenu

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

Kako je

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \frac{1}{x^2}$$

imamo da je

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

pa je preslikavanje f definisano sa

$$f(t) = t^2 - 2.$$

Prethodno preslikavanje nije ni injektivno, jer je npr.

$$f(-1) = f(1) = -1 \not\Rightarrow \; -1 = 1$$

ni sirjektivno, jer npr. za $y = -3 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvo da je

$$x^2 - 2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm i \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Samim tim, preslikavanje f nije bijektivno pa ne postoji ni inverzno preslikavanje f^{-1}.

Drugi način:
Primijetimo da je

$$f\left(1 + \frac{1}{1}\right) = f(2) = 1^2 + \frac{1}{1^2} = 2 \;\; \wedge \;\; f\left(-1 + \frac{1}{(-1)}\right) = f(-2) = (-1)^2 + \frac{1}{(-1)^2} = 2.$$

Dakle $f(2) = f(-2)$ pa preslikavanje f nije injektivno pa samim tim ni bijektivno ni invertibilno.
Na sličan način možemo pokazati da preslikavanje nije ni sirjektivno.

Zadatak 10.
Neka je $S = (-4, -2) \subset \mathbb{R}$ i ρ relacija na skupu S koja je definisana na sljedeći način:

$$(x, y) \in \rho \;\Leftrightarrow\; \frac{y-x}{2} \geq \frac{1}{2x+2y}.$$

Ispitati refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost relacije ρ.

Rješenje

U startu vidimo da se nakon množenja početne nejednakosti sa 2 relacija svodi na:

$$x\rho y \;\Leftrightarrow\; y - x \geq \frac{1}{x+y}.$$

Ispitujemo redom sljedeće osobine relacije ρ:

(a) *refleksivnost*
Relacija je refleksivna ako vrijedi

$$\big(\forall x \in (-4,-2)\big)\;\; x\rho x \;\Leftrightarrow\; x - x \geq \frac{1}{x+x} \;\Leftrightarrow\; 0 \geq \frac{1}{2x} \;\Leftrightarrow\; x < 0$$

Kako je $x \in (-4, -2)$, vrijedi $x < 0$ pa je samim tim relacija ρ refleksivna.

(b) *simetričnost*
Relacija je simetrična ako vrijedi

$$\big(\forall x, y \in (-4,-2)\big)\;\; x\rho y \;\Rightarrow\; y\rho x.$$

Kako je $x\rho y$, imamo da je

$$y - x \geq \frac{1}{x+y}.$$

Međutim, to ne implicira da vrijedi

$$x - y \geq \frac{1}{y+x} \;\Leftrightarrow\; y\rho x.$$

Uzmimo da je $x = -\frac{7}{2} \in S$ i $y = -\frac{5}{2} \in S$. Tada je

$$\left(-\frac{7}{2}\right)\rho\left(-\frac{5}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) \geq \frac{1}{\left(-\frac{5}{2} - \frac{7}{2}\right)} \;\Leftrightarrow\; 1 \geq \frac{-1}{6}.$$

Međutim, sa druge strane ne vrijedi

$$\left(-\frac{5}{2}\right)\rho\left(-\frac{7}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; -\frac{7}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) \geq \frac{1}{\left(-\frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right)} \;\Leftrightarrow\; -1 \geq \frac{-1}{6}.$$

Ovim smo pronašli kontra primjer i dokazali da simetričnost ne vrijedi.

(c) *antisimetričnost*
Relacija je antisimetrična ako vrijedi

$$\big(\forall x, y \in (-4,-2)\big)\;\; x\rho y \;\wedge\; y\rho x \;\Rightarrow x = y.$$

Dakle, imamo da vrijedi

$$y - x \geq \frac{1}{x+y} \;\wedge\; x - y \geq \frac{1}{y+x}.$$

Kontra primjerom pokazujemo da antisimetričnost ne važi, jer za $x = -\frac{17}{8} \in S$ i $y = -\frac{18}{8} \in S$ vidimo da je

$$\left(-\frac{17}{8}\right)\rho\left(-\frac{18}{8}\right) \;\Leftrightarrow\; -\frac{18}{8} - \left(-\frac{17}{8}\right) \geq \frac{1}{\left(-\frac{17}{8} - \frac{18}{8}\right)} \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{8} \geq \frac{-8}{35}$$

i

$$\left(-\frac{18}{8}\right)\rho\left(-\frac{17}{8}\right) \;\Leftrightarrow\; -\frac{17}{8} - \left(-\frac{18}{8}\right) \geq \frac{1}{\left(-\frac{18}{8} - \frac{17}{8}\right)} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{8} \geq \frac{-8}{35},$$

ali kako je $-\frac{17}{8} \neq -\frac{18}{8}$, zaključujemo da antisimetričnost ne vrijedi.

(d) *tranzitivnost*
Relacija je tranzitivna ako vrijedi

$$\big(\forall x, y, z \in (-4,-2)\big)\;\; x\rho y \;\wedge\; y\rho z \;\Rightarrow\; x\rho z.$$

Kontra primjerom pokazujemo da antisimetričnost ne važi, jer za $x = -\frac{17}{8} \in S$, $y = -\frac{18}{8} \in S$ i $z = -\frac{19}{8} \in S$ vidimo da je

$$\left(-\frac{17}{8}\right)\rho\left(-\frac{18}{8}\right) \;\Leftrightarrow\; -\frac{18}{8} - \left(-\frac{17}{8}\right) \geq \frac{1}{\left(-\frac{17}{8} - \frac{18}{8}\right)} \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{8} \geq \frac{-8}{35}$$

i

$$\left(-\frac{18}{8}\right)\rho\left(-\frac{19}{8}\right) \;\Leftrightarrow\; -\frac{19}{8} - \left(-\frac{18}{8}\right) \geq \frac{1}{\left(-\frac{18}{8} - \frac{19}{8}\right)} \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{8} \geq \frac{-8}{37}.$$

Međutim

$$\left(-\frac{17}{8}\right)\not\rho\left(-\frac{19}{8}\right) \;\Leftrightarrow\; -\frac{19}{8} - \left(-\frac{17}{8}\right) \not\geq \frac{1}{\left(-\frac{17}{8} - \frac{19}{8}\right)} \;\Leftrightarrow\; \frac{-2}{8} \not\geq \frac{-8}{36}.$$

Dakle, relacija ρ je refleksivna, ali nije ni simetrična, ni antisimetrična, ni tranzitivna.