Глава 2

Линеарни оператори

2.1 Линеарна пресликавања векторских простора

1. Нека је дат векторски простор V над пољем $\mathbb{F}$ и нека је $a \in V$ неки фиксан вектор. Дефинишимо пресликавање $\varphi : V \mapsto V$ са $\varphi(v) = a \times v$. Провјерити да ли је φ линеарни оператор. Ако јесте, одредити му матрицу у односу на канонску базу.

2. Нека је дат векторски простор V над пољем $\mathbb{F}$ и нека је $a \in V$ неки фиксан вектор. Ако је пресликавање $\varphi : V \mapsto V$ задато са $\varphi(v) = (v \cdot a) \cdot v + (v \times a) - 2v$. Провјерити да ли је φ линеарни оператор па ако јесте одредити му матрицу у односу на канонску базу.

3. Доказати да је пресликавање $\varphi : P_3(\mathbb{R}) \mapsto P_3(\mathbb{R})$ задато са $\varphi(p)(t) = p(t-1)$ линеарни оператор. Одредити матрицу пресликавања φ у канонској бази $\{v_i(t) = t^i : i = \overline{1,4}\}$.

4. Нека је $d : P_3(\mathbb{R}) \mapsto P_3(\mathbb{R})$ линеарни оператор задан са

$$d(p)(t) = t \cdot p'(t).$$

Одредити пресликавање d^n.

5. Нека су X_1 и X_2 потпростори реалног простора X и нека је на $X_1 \oplus X_2$ пресликавање p_1 задано са

$$p_1(x_1 + x_2) = x_1, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2.$$

Доказати да је

(a) p_1 линеарно пресликавање,

(b) $p_1 + p_2 = id$, гдје је p_2 пресликавање задано на $X_1 \oplus X_2$ са

$$p_1(x_1 + x_2) = x_1, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2.$$

(c) $p_i^2 = p_i, i = \overline{1,2}$.

(d) Наћи матрицу пресликавања p_1 по базама $B_{X_1} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ и $B_{X_2} = \{e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_n.\}$

6. Нека је на векторском простору $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ задано пресликавање

$$\tau(A) = tr(A).$$

Доказати да је τ линеарни оператор.

2.2 Језгро и слика линеарног оператора

1. Одредити језгро оператора из задатка 1.2.

2. Нека је $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ матрица пресликавања $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ по базама

$B_{\mathbb{R}^4} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и $B_{\mathbb{R}^3} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Одредити језгро пресликавања, а затим одредити матрицу пресликавања по базама $B_{\mathbb{R}^4} = \{e_1, e_2, e_3, a\}$ и $B_{\mathbb{R}^3} = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$, ако је a вектор који генерише језгро.

3. (30.01.2017.) Нека су P и Q, тим редом, потпростори векторских простора V и W над истим пољем K и нека је V коначнодимензион. Ако је

$$\dim P + \dim Q = \dim V,$$

доказати да постоји линеарни оператор $\mathcal{L} : V \mapsto W$ за који је $Ker\mathcal{L} = P$ и $Im\mathcal{L} = Q$. Дати детаљно објашњење.

4. (15.06.2016. К2) Одредити $a, b \in \mathbb{R}$ тако да за линеарно пресликавање $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ дато матрицом $F = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{bmatrix}$ у канонској бази вриједи $(4, 3, 4) \in Im(f)$.

5. Нека су V, W и Z векторски простори. Доказати:

   (a) $dim(V + W) \leq dimV + dimW$,

   (b) Ако су $f, g : V \mapsto W$ линеарни оператори онда важи

   $$r(f + g) \leq r(f) + r(g),$$

   (c) Ако су $f : V \mapsto W$ и $g : W \mapsto Z$ линеарни оператори тада важи

   $$r(g \circ f) \leq min\{r(f), r(g)\}.$$