PROGRAMIRANJE I

P-01: Brojevni sistemi i konverzije

prof. dr **Dražen Brđanin**
2023/24

P-01: Brojevni sistemi i konverzije

- **Sadržaj predavanja**
  - brojevni sistemi (pozicioni i nepozicioni)
  - binarni, oktalni, heksadekadski brojevni sistemi
  - konverzija u dekadski brojevni sistem
  - konverzija iz dekadskog brojevnog sistema
  - konverzija B/O/H $\leftrightarrow$ B/O/H

Brojevni sistem

- **Brojevni sistem**

  = **JEZIK nad skupom CIFARA**

  = **formalni matematički sistem za reprezentaciju brojeva**

- Svaki brojevni sistem ima:
  - **alfabet** (azbuku) = **neprazan skup cifara**
  - **gramatiku** (sintaksu) = **skup pravila prema kojima se formiraju složene konstrukcije (brojevi)**

- Svi poznati brojni sistemi mogu da se svrstaju u dvije grupe:
  - **nepozicioni** = težina cifre (njen udio u cjelokupnoj vrijednosti broja) je uvijek ista i ne zavisi od pozicije (mjesta) na kojoj se ona nalazi u broju
  - **pozicioni (težinski)** = "težina" cifre zavisi od njene pozicije (mjesta) u broju

Nepozicioni brojevni sistemi

- **NEPOZICIONI brojevni sistem**

  Težina cifre (njen udio u cjelokupnoj vrijednosti broja) je uvijek ista i ne zavisi od pozicije na kojoj se ona nalazi u broju.

- **RIMSKI brojevni sistem** – najpoznatiji nepozicioni brojevni sistem
  - **alfabet:** {I, V, X, L, C, D, M}

    I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000
  - **gramatika:**
    - cifre se ređaju slijeva udesno prema vrijednosti, od najveće do najmanje

      npr. MMXV = 1000 + 1000 + 10 + 5 = 2015
    - niz istih cifara (maksimalno tri iste cifre) u broju ima vrijednost jednaku njihovom zbiru

      npr. XX=20 XXX=30 CC=200 CCC=300 MM=2000 MMM=3000
    - umjesto četiri iste cifre koristi se subtraktivna notacija – ispred veće cifre stavlja se manja, a njihova vrijednost jednaka je razlici teže i lakše cifre

      npr. IV=4 IX=9 XL=40 XC=90 CD=400 CM=900

Nepozicioni brojevni sistemi

Primjeri:

dekadski	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rimski	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

dekadski	11	19	20	21	30	40	50	60	90	100
rimski	XI	XIX	XX	XXI	XXX	XL	L	LX	XC	C

dekadski	101	119	190	200	300	400	500	501	900	1000
rimski	CI	CXIX	CXC	CC	CCC	CD	D	DI	CM	M

Veliki rimski brojevi:

- nadvlačenje cifre ekvivalentno je množenju sa 1000

  npr. $\overline{\mathrm{X}} = 10.000$ $\overline{\mathrm{XX}} = 20.000$ $\overline{\mathrm{M}} = 1.000.000$

Nepozicioni brojevni sistemi

Razlomci u rimskoj notaciji:

- brojna osnova za izražavanje razlomaka je 12 (jer je 12=2*2*3)

npr. 1/12 =	**.**		(unca)
2/12 = 1/6	**..**	ili **:**	
3/12 = 1/4	**...**	ili ∴	
4/12 = 1/3	**....**	ili **::**	
5/12 =	**:·:**		
6/12 = 1/2	**S**		(semis)
7/12 = 1/2+1/12	**S·**		
8/12 = 1/2+1/6	**S:**		
...			
12/12 = 1	**I**		

Pozicioni brojevni sistemi

- **POZICIONI (TEŽINSKI) brojevni sistem**

  Težina cifre (njen udio u cjelokupnoj vrijednosti broja) zavisi od njene pozicije u broju.

3 4 7 2

Cifra NAJVEĆE težine
Most Significant Digit

Cifra NAJMANJE težine
Least Significant Digit

- Svi pozicioni brojevni sistemi mogu da se svrstaju u dvije grupe:
  - **sa brojnom osnovom** (bazom)
    - npr. dekadski (10), binarni (2), oktalni (8), heksadekadski (16), ...
  - **bez brojne osnove**
    - npr. faktoradiks

Pozicioni brojevni sistemi

- **Pozicioni brojevni sistem sa brojnom osnovom karakterišu:**
  - **baza** / **osnova** (***base*** / ***radix***)
    - uobičajene oznake: $\boldsymbol{b}, \mathbf{B}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{r}$
    - baza je (tipično) prirodan broj veći od 1 ($\boldsymbol{b} > \mathbf{1}$)
  - **alfabet** / **azbuka**
    - neprazan skup sa $\boldsymbol{b}$ cifara za reprezentaciju brojeva

$$A=\{0, 1, 2, \dots , b-1\}$$

Baza (*b*)	Brojni sistem	Alfabet (*A*)
2	Binarni	**{0, 1}**
3	Ternarni	**{0, 1, 2}**
8	Oktalni	**{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}**
10	Dekadski (decimalni)	**{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**
16	Heksadekadski (heksadecimalni)	**{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}**

Pozicioni brojevni sistemi

- **Reprezentacija cijelih brojeva**
  - Broj S u brojnom sistemu sa osnovom b predstavlja se kao **niz** (vektor) **cifara** iz alfabeta A:

$$S_b=(c_{n-1}c_{n-2}\dots c_1c_0)_b$$

Primjeri:

$(11011001)_2$	ili kraće	11011001_2	
$(7305)_8$	ili kraće	7305_8	
$(A01)_{16}$	ili kraće	$A01_{16}$	
$(9265)_{10}$	ili kraće	9265	baza 10 se podrazumijeva i ne piše

  - Cifra c_i na poziciji i $(0 \le i < n)$ ima **težinu** (**pozicionu vrijednost**) b^i.
  - Uzastopne pozicije imaju težine jednake uzastopnim vrijednostima stepena osnove

$$b=2 \qquad \dots\ 2^{n-1}\ \ 2^{n-2}\ \dots\ 2^2\ \ 2^1\ \ 2^0$$

$$b=8 \qquad \dots\ 8^{n-1}\ \ 8^{n-2}\ \dots\ 8^2\ \ 8^1\ \ 8^0$$

$$b=10 \qquad \dots\ 10^{n-1}\ \ 10^{n-2}\ \dots\ 10^2\ \ 10^1\ \ 10^0$$

Konverzija u dekadski BS

- **Dekadski ekvivalent cijelog broja**

$$S_b \rightarrow S_{10}$$

$$(c_{n\text{-}1}c_{n\text{-}2}\ldots c_1c_0)_b = c_{n\text{-}1}\cdot b^{n\text{-}1} + c_{n\text{-}2}\cdot b^{n\text{-}2} + \ldots + c_1\cdot b^1 + c_0\cdot b^0 =$$
$$= c_{n\text{-}1}\cdot b^{n\text{-}1} + c_{n\text{-}2}\cdot b^{n\text{-}2} + \ldots + c_1\cdot b + c_0 = S_{10}$$

$$\boxed{S_{10} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot b^i}$$

Primjeri:

$(305)_8 = 3\cdot 8^2 + 0\cdot 8^1 + 5\cdot 8^0 = 3\cdot 64 + 0\cdot 8 + 5\cdot 1 = 192 + 5 = 197 = (197)_{10}$

$(A10)_{16} = A\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 0\cdot 16^0 = 10\cdot 256 + 1\cdot 16 + 0\cdot 1 = 2560 + 16 = 2576 = (2576)_{10}$

Konverzija u dekadski BS

- **Reprezentacija razlomljenih brojeva**
  - Razlomljeni broj ima:
    - cjelobrojni dio sa $\boldsymbol{n}$ cifara,
    - decimalnu tačku, i
    - decimalni dio sa $\boldsymbol{m}$ cifara

$$(\underbrace{c_{n-1}c_{n-2}\cdots c_1c_0}_{\text{cjelobrojni dio}} \overset{\text{decimalna tačka}}{.} \underbrace{c_{-1}c_{-2}\cdots c_{-m}}_{\text{decimalni dio}})_b$$

  - Cifra c_i na poziciji $\boldsymbol{i}$ ($-m \le i < n$) ima **težinu** (**pozicionu vrijednost**) b^i.
  - Uzastopne pozicije imaju težine jednake uzastopnim vrijednostima stepena osnove

$$b=2 \qquad 2^{n-1}\ 2^{n-2}\ \cdots\ 2^2\ 2^1\ 2^0\ 2^{-1}\ 2^{-2}\ \cdots\ 2^{-m}$$

$$b=8 \qquad 8^{n-1}\ 8^{n-2}\ \cdots\ 8^2\ 8^1\ 8^0\ 8^{-1}\ 8^{-2}\ \cdots\ 8^{-m}$$

Konverzija u dekadski BS

- **Dekadski ekvivalent razlomljenog broja**

$$S_b \rightarrow S_{10}$$

$$(c_{n-1} \cdots c_1 c_0 \,.\, c_{-1} \cdots c_{-m})_b = c_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0 + c_{-1} \cdot b^{-1} + \ldots + c_{-m} \cdot b^{-m}$$

$$\boxed{S_{10} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot b^i}_{\text{cjelobrojni dio}} + \underbrace{\sum_{i=-m}^{-1} c_i \cdot b^i}_{\text{decimalni dio}} = \sum_{i=-m}^{n-1} c_i \cdot b^i}$$

Primjeri:

$(1011.101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3} = 8+2+1 + 0.5+0.125 = 11+0.625 = 11.625$

$(305.2)_8 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0.125 = 192 + 5 + 0.25 = 197.25$

Konverzija iz dekadskog BS

- **Konverzija iz dekadskog BS u BS sa proizvoljnom osnovom**

$$\boldsymbol{S_{10} \rightarrow X_b}$$

  - Pretpostavimo da imamo broj u dekadskom BS: $\boldsymbol{S_{10}=(s_{n-1}s_{n-2}\ldots s_1s_0)_{10}}$
  - Njegov ekvivalent u BS sa osnovom $\boldsymbol{b}$ je: $\boldsymbol{X_b=(x_{m-1}x_{m-2}\ldots x_1x_0)_b}$

$$S_{10} = X_b = x_{m-1}b^{m-1} + x_{m-2}b^{m-2} + \cdots + x_2b^2 + x_1b + x_0 \quad / : b$$

$$\frac{S_{10}}{b} = x_{m-1}b^{m-2} + x_{m-2}b^{m-3} + \cdots + x_2b + x_1 + \frac{x_0}{b}$$

$$\frac{S_{10}}{b} = Int(\frac{S_{10}}{b}) + \frac{x_0}{b} \Rightarrow \frac{x_0}{b} = \frac{S_{10}}{b} - Int(\frac{S_{10}}{b}) \quad / \cdot b$$

MOD = ostatak dijeljenja

$$\boxed{x_0 = S_{10} - b \cdot Int(\frac{S_{10}}{b}) = Mod(\frac{S_{10}}{b})}$$

Najlakša cifra u ciljnoj reprezentaciji

Konverzija iz dekadskog BS

- Dalje važi:

$$Int(\frac{S_{10}}{b}) = x_{m-1}b^{m-2} + x_{m-2}b^{m-3} + \cdots + x_2 b + x_1$$

- Slično određivanju x_0, može se odrediti i x_1:

$$S_{10}^{'} = Int(\frac{S_{10}}{b}) = x_{m-1}b^{m-2} + x_{m-2}b^{m-3} + \cdots + x_2 b + x_1 \quad \Big/ : b$$

$$\frac{S_{10}^{'}}{b} = x_{m-1}b^{m-3} + x_{m-2}b^{m-4} + \cdots + x_2 + \frac{x_1}{b}$$

$$\boxed{x_1 = S_{10}^{'} - b \cdot Int(\frac{S_{10}^{'}}{b}) = Mod(\frac{S_{10}^{'}}{b})}$$

- Postupak se nastavlja sve dok se ne odrede sve cifre $x_2 \cdots x_{m-1}$

Konverzija iz dekadskog BS

- Primjer konverzije: $25_{10} = X_3$

1. korak: $25:3 = 8$ ost: $1 = x_0$

2. korak: $8:3 = 2$ ost: $2 = x_1$

3. korak: $2:3 = 0$ ost: $2 = x_2$

4. korak: $0:3 = 0$ ost: $0 = x_3$

...

Rješenje:

$$25_{10} = 0221_3 = 221_3$$

Provjera:

$$221_3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 =$$
$$= 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 =$$
$$= 18 + 6 + 1 = 25$$

Algoritam za konverziju:

1. $i \leftarrow 0$
2. ponavljaj
   - 2.1. $x_i \leftarrow$ MOD(S,b)
   - 2.2. $S \leftarrow$ INT(S/b)
   - 2.3. $i \leftarrow i+1$

   sve dok je S>0

$19_{10} = ?_2$

19 : 2

9	1
4	1
2	0
1	0
0	1

$19_{10} = 10011_2$

Konverzija iz dekadskog BS

- **Konverzija decimalnog broja u BS sa proizvoljnom osnovom**

$$S_{10} \rightarrow X_b$$

  - Pretpostavimo da imamo decimalni broj u dekadskom BS: $S_{10}=(0.s_{-1}s_{-2}\ldots s_{-n})_{10}$
  - Njegov ekvivalent u BS sa osnovom b je: $X_b=(0.x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-m})_b$

$$S_{10} = X_b = x_{-1}b^{-1} + x_{-2}b^{-2} + \cdots + x_{-m}b^{-m} \quad \Big/ \cdot b$$

$$b \cdot S_{10} = \underbrace{x_{-1}}_{\boxed{\text{cjelobrojni dio}}} + \underbrace{x_{-2}b^{-1} + \cdots + x_{-m}b^{-m+1}}$$

$$b \cdot S_{10} = x_{-1} + \underbrace{0.x_{-2}x_{-m}}_{\boxed{\text{Postupak množenja sa bazom nastavlja se sve dok je decimalni dio različit od nule}}}$$

Konverzija iz dekadskog BS

- Primjer konverzije: $\mathbf{0.375_{10} = X_2}$

1. korak: $\mathbf{0.375*2 = 0.750 = 0 + 0.750 \quad \boldsymbol{x_{-1}} = 0}$

2. korak: $\mathbf{0.750*2 = 1.500 = 1 + 0.500 \quad \boldsymbol{x_{-2}} = 1}$

3. korak: $\mathbf{0.500*2 = 1.000 = 1 + 0.000 \quad \boldsymbol{x_{-3}} = 1}$

4. korak: $\mathbf{0.000*2 = 0.000 = 0 + 0.000 \quad \boldsymbol{x_{-3}} = 0}$

...

Rješenje:

$$\mathbf{0.375_{10} = 0.0110_2 = 0.011_2}$$

Provjera:

$$\mathbf{0.011_2 = 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 2^{-2} + 2^{-3} =}$$

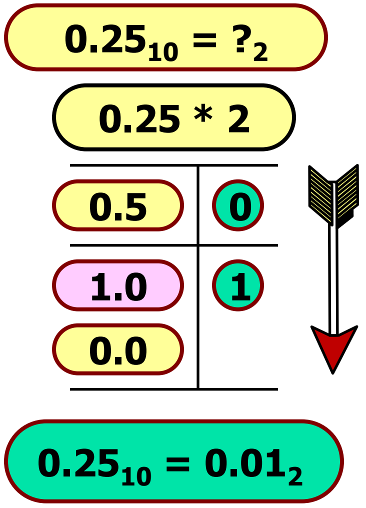
$$\mathbf{= 1/4 + 1/8 = 0.25 + 0.125 =}$$

$$\mathbf{= 0.375}$$

Algoritam za konverziju:

1. $i \leftarrow -1$
2. ponavljaj
   - 2.1. $x_i \leftarrow \mathrm{INT}(S*b)$
   - 2.2. $S \leftarrow S*b - x_i$
   - 2.3. $i \leftarrow i-1$

   sve dok je S>0



Konverzija iz dekadskog BS

- Primjer konverzije:

$19.25_{10} = ?_2$

19 : 2	
9	1
4	1
2	0
1	0
0	1

$19_{10} = 10011_2$

0.25 * 2	
0.5	0
1.0	1
0.0	

$0.25_{10} = 0.01_2$

$19.25_{10} = 10011.01_2$

Brojanje u različitim BS

$$10_r = 1 \cdot r^1 + 0 \cdot r^0 = r_{10}$$

0
1
2
…
r-1
10
11
…

Dekadski	Binarni	Oktalni	heksadekadski
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11

Konverzija B/O/H $\leftrightarrow$ B/O/H

- **Konverzija** **između BS sa različitim osnovama ($\neq$10)**
  - **Indirektna**

$$S_p \leftrightarrow S_{10} \leftrightarrow S_q$$

Primjer konverzije:

$$\mathbf{1101_2 = ?_8}$$

$$\overset{3\,2\,1\,0}{\mathbf{1101_2}} \mathbf{= ?_{10}} \qquad \mathbf{1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8+ 4+ 1 = 13_{10}}$$

13 : 8

1	5
0	1

$$\mathbf{13_{10} = 15_8}$$

$$\boxed{\mathbf{1101_2 = 15_8}}$$

Konverzija B/O/H $\leftrightarrow$ B/O/H

- **Konverzija između BS sa različitim osnovama (≠10)**
  - **Direktna**

$$S_p \longleftrightarrow S_q$$

$$q = p^n, \quad n > 1$$

Svaka cifra u BS sa osnovom q može da se reprezentuje sa n cifara u BS sa osnovom p.

Primjer: **kvaternarni** (q=4) $\leftrightarrow$ **binarni** (p=2)

dec	kvat.	bin.
0	0	00
1	1	01
2	2	10
3	3	11

dec	kvat.	bin.
4	1 0	01 00
5	1 1	01 01
6	1 2	01 10
7	1 3	01 11

dec	kvat.	bin.
8	2 0	10 00
9	2 1	10 01
1 0	2 2	10 10
1 1	2 3	10 11

Konverzija B/O/H ↔ B/O/H

Primjer: **oktalni** (q=8) ↔ **binarni** (p=2)

oct.	bin.
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Svaka oktalna cifra može da se reprezentuje jednom **binarnom trijadom** i obrnuto.

$$10101_2 = ?_8$$

$$\underbrace{0\,1\,0}_{2}\;\underbrace{1\,0\,1}_{5}$$

$$10101_2 = 25_8$$

$$257_8 = ?_2$$

$$\overbrace{0\,1\,0}^{2}\;\overbrace{1\,0\,1}^{5}\;\overbrace{1\,1\,1}^{7}$$

$$257_8 = 10101111_2$$

Konverzija B/O/H $\leftrightarrow$ B/O/H

Primjer: **heksadekadski** (q=16) $\leftrightarrow$ **binarni** (p=2)

Svaka heksadekadska cifra može da se reprezentuje jednom **binarnom tetradom** i obrnuto.

1 1 0 | 1 1 0 1 | 0 1 0 1 | . 0 1 1 0 | 1$_2$ **= ?** $_{16}$

6 D 5 6 8

1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 . 0 1 1 0 1 $_2$ **= 6 D 5 . 6 8** $_{16}$

hex.	bin.
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Konverzija B/O/H $\leftrightarrow$ B/O/H

Primjer: **heksadekadski** (q=16) $\leftrightarrow$ **oktalni** (p=8)

$$657_8 = ?_{16}$$

$$\overbrace{110}^{6}\,\overbrace{101}^{5}\,\overbrace{111}^{7}$$

$$\underbrace{1}_{1}\,\underbrace{1010}_{A}\,\underbrace{1111}_{F}$$

$$657_8 = 1AF_{16}$$

$$2BC_{16} = ?_8$$

$$\overbrace{0010}^{2}\,\overbrace{1011}^{B}\,\overbrace{1100}^{C}$$

$$\underbrace{001}_{1}\,\underbrace{010}_{2}\,\underbrace{111}_{7}\,\underbrace{100}_{4}$$

$$2BC_{16} = 1274_8$$