

TERMIN 6 - zadaci za samostalan rad



Zadatak 1.

Odrediti sopstvene parove matrica

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$



Zadatak 2.

Realna simetrična matrica A reda 3 ima spektar $\{1, 2, 3\}$ a sopstveni vektori $(1, 0, -1)$ i $(1, 0, 1)$ odgovaraju sopstvenim vrijednostima 1 i 2 redom. Odrediti matricu A .



Zadatak 3.

Da li se operator

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, x + y)$$

može dijagonalizovati?



Zadatak 4.

Polinom

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$$

je karakteristični polinom matrice A . Odrediti matricu A ako je $\text{Lin}\{(-1, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$ njen sopstveni prostor koji odgovara manjoj sopstvenoj vrijednosti, dok je $\text{Lin}\{(1, 1, 1)\}$ sopstveni potprostor koji odgovara većoj sopstvenoj vrijednosti.



Zadatak 5.

Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

naći A^{100} .



Zadatak 6.

Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti

a) spektar i geometrijske višestrukosti sopstvenih vrijednosti matrice $3A^{-1} + 2I$,

b) prostor vrsta matrice $3A^{-1} - I$,

gdje je I odgovarajuća jedinična matrica.

★ ★ ★

Zadatak 7.

Matrica A ima sopstvene vrijednosti $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = 3$ kojima odgovaraju sopstveni vektori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Izračunati:

a) $A^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$,

b) $A^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$, ako je poznato da $0 \notin \sigma A$.

★ ★ ★

Zadatak 8.

Dokazati da je svaka matrica projektovanja singularna.

★ ★ ★ ★

Zadatak 9.

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- a) Odrediti sopstvene vrijednosti matrice A i njihove algebarske višestrukosti.
- b) Za svaku sopstvenu vrijednost matrice A naći vrijednost parametara a i b za koje te sopstvene vrijednosti imaju geometrijsku višestrukost 1.
- c) Za koje vrijednosti parametara a i b se matrica A može dijagonalizovati?

★ ★ ★ ★

Zadatak 10.

Matrica $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ima sopstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 = -1$ kojima odgovaraju sopstveni vektori

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- a) Odrediti sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore matrice $B = A^9 + I$.
- b) Odrediti matricu B .