ТЕРМИН 6, ЗАДАТАК 14

28.08.2023. (2. a)

За квадратне матрице A и B вриједи $AB - BA = E$.
Доказати да вриједи $A^n B - BA^n = nA^{n-1}$.

Доказ ћемо извести примјеном принципа математичке индукције.

1° база индукције: $n = 1$

- потребно је доказати да вриједи

$$A^1 B - BA^1 = 1 \cdot A^{1-1}$$

$\Leftrightarrow AB - BA = E$, што вриједи из услова задатка

2° индукцијска претпоставка: $n = k$

- вриједи: $A^k B - BA^k = kA^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}$

3° индукцијски корак: $n = k+1$

- треба доказати да вриједи:

$$A^{k+1} \cdot B - B \cdot A^{k+1} = (k+1) A^{k+1-1}$$

$$A^k \cdot AB - BA \cdot A^k = (k+1) A^k$$

Како је $AB - BA = E$ имамо да је $AB = E + BA$

па је:

$$L = A^k \cdot (E + BA) - BA \cdot A^k =$$

$$= A^k + A^k \cdot BA - BA \cdot A^k$$

На основу индукцијске претпоставке имамо да је

$$A^k B - BA^k = kA^{k-1} \quad \text{па је}$$

$$A^k B = BA^k + kA^{k-1} \quad \text{па је сада}$$

$$L = A^k + (BA^k + kA^{k-1}) \cdot A - BA^{k+1}$$

$$= A^k + \cancel{BA^{k+1}} + kA^k - \cancel{BA^{k+1}}$$

$$= A^k + kA^k$$

$$= (k+1) \cdot A^k,$$ што је требало доказати.