TERMIN 4 - zadaci za samostalan rad

★ ★ ★

Zadatak 1.
Dopuniti skup vektora $\{(1,1,1,2),(1,2,3,-3)\}$ do ortogonalne baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$.

★ ★ ★

Zadatak 2.
Neka je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odrediti baze fundamentalnih potprostora matrice A pa provjeriti da li su ispunjeni odgovarajući uslovi njihove ortogonalnosti.

★ ★ ★

Zadatak 3.
Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & 1 & b \\ -2 & -2 & c \end{bmatrix}.$$

Odrediti $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da matrica A ima ortogonalne kolone.

★ ★ ★ ★

Zadatak 4.
Odrediti jednu ortonormiranu bazu prostora kolona matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a onda odrediti ortogonalnu dopunu od $C(A)$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 5.
Da li postoji ortogonalna matrica $Q \in \mathcal{M}_3$ čija je prva kolona $\overrightarrow{q_1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}^T$? Obrazložiti odgovor.

★ ★ ★ ★

Zadatak 6.
Neka je

$$V = Lin\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Odrediti ortonormiranu bazu prostora $V^{\perp}$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 7.
Odrediti ortogonalnu projekciju i ortogonalnu komponentu vektora $\overrightarrow{x} = (4,-1,-3,4)$ na potprostor generisan vektorima $\overrightarrow{a} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{b} = (1,2,2,-1)$ i $\overrightarrow{c} = (1,0,0,3)$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 8.
Odrediti matricu ortogonalnog projektovanja na prostor $Lin\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

★★★★★

Zadatak 9.
Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odrediti projekcije vektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ na potprostore $N(A)$ i $C\left(A^T\right)$.

★★★★★

Zadatak 10.
Neka je $\mathbb{R}_2(x)$ vektorski prostor realnih polinoma stepena ne većeg od 2 i neka je u tom vektorskom prostoru skalarni proizvod definisan sa

$$\big(p(x), q(x)\big) = \int_0^{+\infty} e^{-x} p(x) q(x)\ dx.$$

Odrediti ortonormiranu bazu tog prostora pomoću Gram-Šmitovog postupka ortogonalizacije polazeći od standardne baze tog prostora $\left\{1, x, x^2\right\}$.