TERMIN 1 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★

Zadatak 1.
Primjenom matematičke indukcije pokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}. \tag{1}$$

Rješenje

1. Dokažimo da tvrđenje (1) vrijedi za $n = 1$. Kako je $L = 1^2 = 1$ i $D = \frac{4 \cdot 1^3 - 1}{3} = 1$, vrijedi $L = D$.
2. Pretpostavimo da tvrđenje (1) vrijedi za $n = k$, $k > 1$, tj. da vrijedi

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{4k^3 - k}{3}.$$

3. Dokažimo da tvrđenje (1) vrijedi za $n = k + 1$, odnosno, dokažimo da vrijedi:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + \big(2(k+1) - 1\big)^2 = \frac{4(k+1)^3 - (k+1)}{3}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
L &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + \big(2(k+1) - 1\big)^2 \\
&= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 \\
&= \frac{4k^3 - k}{3} + (2k+1)^2 \\
&= \frac{4k^3 - k + 3 \cdot \big(4k^2 + 4k + 1\big)}{3} \\
&= \frac{4k^3 + 12k^2 + 11k + 3}{3} \\
&= \frac{4 \cdot \big(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\big) - k - 1}{3} \\
&= \frac{4\,(k+1)^3 - (k+1)}{3},
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

★★

Zadatak 2.
Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$25 \mid 81^n - 5n - 1. \tag{2}$$

Rješenje

1. Dokažimo da tvrđenje (2) vrijedi za $n = 1$. Kako je $81^1 - 5 \cdot 1 - 1 = 75$, vrijedi $25 \mid 75$.
2. Pretpostavimo da tvrđenje (2) vrijedi za $n = k$, $k > 1$, tj. da vrijedi

$$25 \mid 81^k - 5k - 1 \Rightarrow (\exists t \in \mathbb{N}) : 81^k - 5k - 1 = 25t.$$

3. Dokažimo da tvrđenje (2) vrijedi za $n = k + 1$, odnosno, dokažimo da vrijedi:

$$25 \mid 81^{k+1} - 5 \cdot (k + 1) - 1.$$

Kako je

$$\begin{aligned} D &= 81^{k+1} - 5 \cdot (k + 1) - 1 \\ &= 81 \cdot 81^k - 5k - 6 \\ &= 81 \cdot (81^k - 5k - 1 + 5k + 1) - 5k - 6 \\ &= 81 \cdot (81^k - 5k - 1) + 405k + 81 - 5k - 6 \\ &= 81 \cdot 25t + 400k + 75 \\ &= 25 \cdot (81t + 16k + 3), \end{aligned}$$

vidimo da vrijedi $25 \mid D$, jer je $81t + 16k + 3 \in \mathbb{N}$, čime je dokaz završen.

Zadatak 3.

Koliko racionalnih članova sadrži razvoj binoma $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

Rješenje

Iz binomne formule je

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\sqrt{2}^{100-k}\sqrt[4]{3}^{k}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}2^{\frac{100-k}{2}}3^{\frac{k}{4}}.$$

Da bi član u razvoju prethodnog binoma bio racionalan, potrebno je da vrijedi

$$2\,|\,100-k\ \wedge\ 4\,|\,k\ \Leftrightarrow\ 2\,|\,k\ \wedge\ 4\,|\,k\ \Leftrightarrow\ 4\,|\,k.$$

Kako $k\in\{0,1,2,\ldots,100\}$, uslov $4\,|\,k$ ispunjavaju brojevi $k=\{0,4,8,\ldots,96,100\}$. Ukupno imamo 26 brojeva k što znači da imamo ukupno 26 racionalnih članova početnog binoma.

★★

Zadatak 4.
Odrediti n u izrazu $(a+b)^n$ ako se binomni koeficijent jedanaestog člana odnosi prema koeficijentu devetog člana kao $7:15$.

Rješenje

k-tom članu u razvoju binoma odgovara binomni koeficijent $\binom{n}{k+1}$ pa iz uslova zadatka imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{10}}{\binom{n}{8}} = \frac{7}{15} \quad &\Leftrightarrow \quad 15 \cdot \frac{n!}{10! \cdot (n-10)!} = 7 \cdot \frac{n!}{8! \cdot (n-8)!} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{15}{10 \cdot 9 \cdot 8! \cdot (n-10)!} = \frac{7}{8! \cdot (n-8) \cdot (n-9) \cdot (n-10)!} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{15}{10 \cdot 9} = \frac{7}{(n-8)(n-9)} \\
&\Leftrightarrow \quad 15 \cdot (n-8)(n-9) = 630 \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 - 8n - 9n + 72 = 42 \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 - 17n + 30 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (n-15)(n-2) = 0.
\end{aligned}$$

Odavde dobijamo $n = 15$ ili $n = 2$. Kako je $n \geq k$, $n = 2$ ne uzimamo u obzir pa je $n = 15$.

★

Zadatak 5.

Pronaći koeficijent uz $\dfrac{1}{x^{17}}$ u razvoju binoma

$$\left(\frac{1}{x^3} - x^4\right)^{15}.$$

Rješenje

Iz binomne formule je

$$\left(\frac{1}{x^3} - x^4\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{15-k} (-x^4)^k = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{-3\cdot(15-k)} \cdot (-1)^k \cdot x^{4k} = \sum_{k=0}^{15} (-1)^k \cdot \binom{15}{k} x^{-45+3k+4k}.$$

Član koji sadrži $\dfrac{1}{x^{17}}$ ispunjava uslov $-45 + 3k + 4k = -17$ odakle je $7k = 28$ tj. $k = 4$.

Koeficijent uz $\dfrac{1}{x^{17}}$ je $(-1)^4 \cdot \dbinom{15}{4} = \dfrac{15!}{4! \cdot 11!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11!} = 1365.$

★ ★ ★

Zadatak 6.
Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{n+1}-1\right). \tag{3}$$

Rješenje

1. Dokažimo da nejednakost (3) vrijedi za $n=1$. Kako je $L = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ i $D = 2 \cdot (\sqrt{1+1}-1) = 2 \cdot (\sqrt{2}-1) < 2 \cdot \left(\frac{3}{2}-1\right) = 1$, vrijedi $L > D$.
2. Pretpostavimo da tvrđenje (3) vrijedi za $n = k$, $k > 1$, tj. da vrijedi
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{k+1}-1\right).$$
3. Dokažimo da tvrđenje (3) vrijedi za $n = k+1$, odnosno, dokažimo da vrijedi:
$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{(k+1)+1}-1\right).$$
Vrijedi
$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &> 2\left(\sqrt{k+1}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$
Sada je dovoljno dokazati da vrijedi
$$\begin{aligned} & 2\left(\sqrt{k+1}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\left(\sqrt{(k+1)+1}-1\right) \\ \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+2} - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{k+1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \cdot (k+1) + 1 > 2\sqrt{(k+2)(k+1)} \\ \Leftrightarrow \quad & 2k + 3 - 2\sqrt{(k+2)(k+1)} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (k+2) + (k+1) - 2\sqrt{(k+2)(k+1)} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right)^2 > 0, \end{aligned}$$
što vrijedi za svako $k \in \mathbb{N}$, jer je $\sqrt{k+2} > \sqrt{k+1}$, čime je dokaz završen.

Zadatak 7.
Dokazati da za svaki prirodan broj $n > 8$ vrijedi

$$3^n > n^4. \tag{4}$$

Rješenje

1. Dokažimo da nejednakost (4) vrijedi za $n = 9$. Kako je $L = 3^9$ i $D = 9^4 = \left(3^2\right)^4 = 3^8$, vrijedi $L > D$.
2. Pretpostavimo da tvrđenje (4) vrijedi za $n = k$, $k > 9$, tj. da vrijedi
$$3^k > k^4.$$
3. Dokažimo da tvrđenje (4) vrijedi za $n = k + 1$, odnosno, dokažimo da vrijedi:
$$3^{k+1} > (k+1)^4\,.$$
Vrijedi
$$L = 3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k^4.$$
Sada je dovoljno dokazati da vrijedi
$$\begin{aligned} & 3k^4 > (k+1)^4 \\ \Leftrightarrow\quad & \left(\frac{\sqrt[4]{3}k}{k+1}\right)^4 > 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt[4]{3}k > k+1 \\ \Leftrightarrow\quad & k \cdot \left(\sqrt[4]{3} - 1\right) > 1 \\ \Leftrightarrow\quad & k > \frac{1}{\sqrt[4]{3}-1} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}+1}{\sqrt[4]{3}+1} \\ \Leftrightarrow\quad & k > \frac{\sqrt[4]{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ \Leftrightarrow\quad & k > \frac{\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3}+1}{2} \end{aligned} \tag{5}$$
Kako je
$$\frac{\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3}+1}{2} < \frac{\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[4]{3^4}+1}{2} = \frac{3+3+3+1}{2} = 5$$
i kako je $k > 9$, zaključujemo da nejednakost (5) vrijedi za svako $k > 9$, čime je dokaz završen.

★★★★

Zadatak 8.
Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\left(2i-1\right)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}. \tag{6}$$

Rješenje

1. Dokažimo da tvrđenje (6) vrijedi za $n = 1$. Kako je $L = \cos x$ i $D = \dfrac{\sin\left(2x\right)}{2\sin x} = \dfrac{2\sin x \cos x}{2\sin x} = \cos x$, vrijedi $L = D$.
2. Pretpostavimo da tvrđenje (6) vrijedi za $n = k$, $k > 1$, tj. da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \cos\left(2i-1\right)x = \frac{\sin 2kx}{2\sin x}.$$

3. Dokažimo da tvrđenje (6) vrijedi za $n = k+1$, odnosno, dokažimo da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \cos\left(2i-1\right)x = \frac{\sin\big(2(k+1)x\big)}{2\sin x}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{i=1}^{k+1} \cos\left(2i-1\right)x \\
&= \sum_{i=1}^{k} \cos\left(2i-1\right)x + \cos\Big(\big(2(k+1)-1\big)\,x\Big) \\
&= \frac{\sin 2kx}{2\sin x} + \cos\big(\left(2k+1\right)x\big) \\
&= \frac{\sin 2kx + 2\sin x\cos\big(\left(2k+1\right)x\big)}{2\sin x}
\end{aligned} \tag{7}$$

Korištenjem adicione formule

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin\left(\alpha+\beta\right) + \sin\left(\alpha-\beta\right)\big)$$

u izrazu (7) dobijamo:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\sin 2kx + 2\cdot\frac{1}{2}\Big(\sin\big(x+(2k+1)x\big) + \sin\big(x-(2k+1)x\big)\Big)}{2\sin x} \\
&= \frac{\sin 2kx + \sin\big(\left(2k+2\right)x\big) + \sin\left(-2kx\right)}{2\sin x} \\
&= \frac{\sin 2kx + \sin\big(2\left(k+1\right)x\big) - \sin 2kx}{2\sin x} \\
&= \frac{\sin\big(2(k+1)x\big)}{2\sin x},
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

★ ★ ★ ★

Zadatak 9.
Izračunati
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Rješenje

Vrijedi:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big((n+1)-(k+1)\big)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \left(2^{n+1} - 1\right).
\end{aligned}$$

★ ★ ★ ★ ★

Zadatak 10.
Izračunati
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Rješenje

Vrijedi:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} \\
&= n \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \right) \\
&= n \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + 2^{n-1} \right) \\
&= n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} + 2^{n-1} \right) \\
&= n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)!}{(k-1)!(n-1-k)!} + 2^{n-1} \right) \\
&= n \left((n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!\big((n-2)-(k-1)\big)!} + 2^{n-1} \right) \\
&= n \left((n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} + 2^{n-1} \right) \\
&= n \left((n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} + 2^{n-1} \right) \\
&= n \big((n-1) \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1} \big) \\
&= n \cdot 2^{n-2} \cdot (n-1+2) \\
&= n(n+1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$