TERMIN 1 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★★

Zadatak 1.
Ispitati da li je

$$F = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = f(0) + 1 \right\}$$

vektorski prostor sa standardnim operacijama.

Rješenje

Neka je $f \in F$ proizvoljna funkcija. Tada je neutralni element u odnosu na operaciju sabiranja funkcija $g \in F$ takva da za svako $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) + g(x) = f(x),$$

odakle dobijamo da je $g(x) = 0, \ \ (\forall x \in \mathbb{R})$ nula element, odnosno nula funkcija.
Kako je $g(0) = 0$ i $g(1) = 0$, očigledno je da funkcija g ne zadovoljava uslov

$$g(1) = g(0) + 1,$$

pa samim tim funkcija g ne pripada skupu F.
Kako nije ispunjeno svojstvo $(S3)$ zaključujemo da skup F nije vektorski prostor sa standardnim operacijama.

★★

Zadatak 2.
Ispitati da li je skup
$$U = \left\{ A \in \mathcal{M}_2 \mid \det(A) = 0 \right\}$$
vektorski potprostor od $\mathcal{M}_2$.

Rješenje

Neka su
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Kako je $\det(A) = \det(B) = 0$, matrice A i B pripadaju skupu U.
Međutim, kako je
$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
vrijedi $\det(A + B) = 1 \neq 0$.
Stoga, zaključujemo da $A + B \notin U$, pa U nije vektorski potprostor od $\mathcal{M}_2$.

★★

Zadatak 3.
U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ odrediti vrijednosti parametra $h \in \mathbb{R}$ za koje su vektori

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix} \text{ i } \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h+1 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni.

Rješenje

Vektori $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ i $\overrightarrow{v_3}$ su linearno nezavisni ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & 2h \\ 0 & -h & 3h+1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3h + 1 + 2h^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2h^2 + 3h + 1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (h+1) \cdot (2h+1) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & h \neq -1 \ \wedge \ h \neq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, $h \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$.

★★

Zadatak 4.
Ispitati da li matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

generišu prostor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Rješenje

Kako su matrice A_1, A_2, A_3 i A_4 iz prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ čija je dimenzija 4, one će generisati ovaj prostor ako i samo ako su linearno nezavisne. Da bismo ispitali linearnu nezavisnost ove četiri matrice, koristićemo stepenastu formu:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1\cdot(-1)+R_2 \\ R_1\cdot(-1)+R_3 \\ R_1\cdot(-1)+R_4}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2\cdot(-2)+R_3 \\ R_2+R_4}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_4} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Vidimo da prethodna matrica ima pun rang, pa su stoga matrice A_1, A_2, A_3, A_4 linearno nezavisne i samim tim generišu prostor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

★ ★ ★

Zadatak 5.
Neka je U potprostor prostora $\mathbb{R}^4$ generisan vektorima

$$u_1 = (1,2,0,-1), u_2 = (0,3,1,2) \text{ i } u_3 = (-1,1,1,3),$$

a W potprostor prostora $\mathbb{R}^4$ generisan vektorima

$$w_1 = (1,1,1,1), w_2 = (0,1,1,2) \text{ i } w_3 = (-1,0,0,1).$$

Odrediti po jednu bazu za vektorske prostore U, W, $U+W$ i $U \cap W$.

Rješenje

Da bismo odredili bazne vektore potprostora U i V, koristićemo stepenastu formu:

$$U : \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\cdot(-1)+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$W : \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\cdot(-1)+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz stepenastih formi, dobijamo baze potprostora U i W:

$$B_U = \{(1,2,0,-1),(0,3,1,2)\} \ \text{ i } \ B_W = \{(1,1,1,1),(0,1,1,2)\}.$$

Da bismo odredili bazu potprostora $U+W$ koristimo činjenicu da je prostor $U+W$ generisan baznim vektorima prostora U i W, pa iz stepenaste forme:

$$U+W : \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\cdot(-1)+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_4]{R_2\cdot 3+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+R_4}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\to R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dobijamo jednu bazu potprostora $U+W$:

$$B_{U+W} = \{(1,2,0,-1),(0,-1,1,2),(0,0,1,2)\}.$$

Da bismo odredili bazu potprostora $U \cap W$, pretpostavićemo da je (a,b,c,d) skup svih vektora koji se nalaze u presjeku potprostora U i W. Tada postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ odnosno $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\begin{aligned}
& (a,b,c,d) = \alpha\cdot(1,2,0,-1) + \beta\cdot(0,3,1,2) = \gamma\cdot(1,1,1,1) + \delta\cdot(0,1,1,2) \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha\cdot(1,2,0,-1) + \beta\cdot(0,3,1,2) = \gamma\cdot(1,1,1,1) + \delta\cdot(0,1,1,2) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta - \gamma - \delta = 0 \\ \beta - \gamma - \delta = 0 \\ -\alpha + 2\beta - \gamma - 2\delta = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \alpha + 3\beta - \delta = 0 \\ -\alpha + \beta - \delta = 0 \\ -2\alpha + 2\beta - 2\delta = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -\alpha + \beta - (\alpha + 3\beta) = 0 \\ -2\alpha + 2\beta - 2(\alpha + 3\beta) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0 \\ -4\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \beta = -\alpha, \ \ \gamma = \alpha, \ \ \delta = -2\alpha.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
U \cap W &= \alpha\cdot(1,2,0,-1) - \alpha\cdot(0,3,1,2) \\
&= \alpha\cdot(1,-1,-1,-3) \\
&= Lin\{(1,-1,-1,-3)\},
\end{aligned}$$

pa je jedna od baza potprostora $U \cap W$:

$$B_{U\cap W} = \{(1,-1,-1,-3)\}.$$

★ ★ ★

Zadatak 6.
Dati su potprostori W_1 i W_2 vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$

$$W_1 = \{(a,b,c) \mid a+b+c=0\}, W_2 = \{(a,b,c) \mid a=c\}.$$

a) Da li važi $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$?

b) Da li važi $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$?

c) Odrediti potprostor W_3 takav da važi $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_3$ i $\mathbb{R}^3 = W_2 \oplus W_3$.

Rješenje

Odredimo potprostore W_1 i W_2 kao lineale nad vektorima iz vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{(a,b,c) \mid a+b+c=0\} \\
&= \{(a,b,-a-b)\,,\ \ a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a \cdot (1,0,-1) + b \cdot (0,1,-1)\,,\ \ a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= Lin\,\{(1,0,-1)\,,(0,1,-1)\}\,, \\
W_2 &= \{(a,b,c) \mid a=c\} \\
&= \{(a,b,a)\,,\ \ a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a \cdot (1,0,1) + b \cdot (0,1,0)\,,\ \ a,b \in \mathbb{R}\} \\
&= Lin\,\{(1,0,1)\,,(0,1,0)\}\,.
\end{aligned}$$

Odavde dobijamo da su baze potprostora W_1 i W_2

$$B_{W_1} = \{(1,0,-1)\,,(0,1,-1)\} \ \text{ i } \ B_{W_2} = \{(1,0,1)\,,(0,1,0)\}\,.$$

a) Da bismo odredili potprostor W_1+W_2 koristimo činjenicu da je prostor W_1+W_2 generisan baznim vektorima prostora W_1 i W_2, pa iz stepenaste forme:

$$W_1+W_2 : \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\cdot(-1)+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\cdot(-1)+R_4} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+R_4} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $dim\,(W_1+W_2) = 3$ i kako su bazni vektori potprostora W_1 i W_2 iz skupa $\mathbb{R}^3$, zaključujemo da vrijedi $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$.

b) Da bi vrijedilo $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$, potrebno je da vrijedi

$$dim\,(W_1+W_2) = dim\,(W_1) + dim\,(W_2)\,.$$

Međutim, kako je $dim\,(W_1+W_2) = 3$ i kako je $dim\,(W_1) = dim\,(W_2) = 2$, zaključujemo da jednakost $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ ne vrijedi.
Lako se pokazuje da je $dim\,(W_1 \cap W_2) \ = \ 1$. Geometrijski gledano, potprostori W_1 i W_2 su dvije različite ravni u prostoru, koje pritom prolaze kroz koordinatno ishodište (jer svaki potprostor sadrži nula vektor). Kako je presjek dvaju takvih ravni prava, ova prethodna konstatacija dobija i geometrijski smisao. Algebarski, presjek potprostora W_1 i W_2 se određuje na isti način kao u prethodnom zadatku.

c) da bi zbir potprostora W_1 i W_3 odnosno W_2 i W_3 bio direktan, neophodno je da budu ispunjeni uslovi

$$dim\,(\mathbb{R}^3) = dim\,(W_1) + dim\,(W_3) \ \text{ i } \ dim\,(\mathbb{R}^3) = dim\,(W_2) + dim\,(W_3)\,.$$

Kako je $dim\,(\mathbb{R}^3) = 3$ i kako je $dim\,(W_1) = dim\,(W_2) = 2$, zaključujemo da je $dim\,(W_3) = 1$.
Pošto je dovoljno odrediti samo jedan potprostor W_3 prostora $\mathbb{R}^3$ takav da vrijede pomenuti uslovi, pokušajmo sa

$$W_3 = Lin\,\{(1,0,0)\}\,.$$

Da bismo provjerili da li je vektor $(1,0,0)$ linearno nezavisan sa baznim vektorima potprostora W_1 i W_2 koristićemo stepenastu formu:

$$W_1+W_3 : \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\cdot(-1)+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix},$$

$$W_2+W_3 : \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\cdot(-1)+R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix}.$$

Ispostavlja se da potprostor W_3 zadovoljava početne uslove pa je $W_3 = Lin\,\{(1,0,0)\}$ jedno od beskonačno mnogo rješenja ovog zadatka. Da bismo odredili sve potprostore W_3 koji zadovoljavaju početne uslove, mogli bismo posmatrati W_3 kao lineal nad proizvoljnim vektorom (a,b,c) pa iz stepenaste forme ili determinante doći do dva uslova koje (a,b,c) mora da zadovoljava.

★ ★ ★ ★

Zadatak 7.

Neka je W skup svih matrica reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$ koje komutiraju sa matricom $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Ispitati da li je W potprostor prostora $M_3(\mathbb{R})$. Ako jeste, odrediti mu bazu i dimenziju.

Rješenje

Kako je

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ M \in \mathcal{M}_3 \mid \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot M = M \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Odavde dobijamo sistem 9 linearnih jednačina sa 9 nepoznatih:

$$\begin{cases} 2a+g &= 2a+3c \\ 2b+h &= b \\ 2c+i &= a+b+4c \\ d+g &= 2d+3f \\ e+h &= e \\ f+i &= d+e+4f \\ 3a+4g &= 2g+3i \\ 3b+4h &= h \\ 3c+4i &= g+h+4i \end{cases}.$$

Iz pete jednačine dobijamo $h=0$, pa uvrštavanjem u drugu jednačinu dobijamo $b=0$. Samim tim, osma jednačina vrijedi pa je možemo izbaciti iz sistema.
Iz prve jednačine dobijamo $g=3c$, što zadovoljava posljednju jednačinu pa je možemo izbaciti iz sistema. Dobijamo

$$\begin{cases} i &= a+2c \\ d &= 3c-3f \\ d &= -e-3f+i \\ 3i &= 3a+6c \end{cases}.$$

Kako su prva i posljednja jednačina ekvivalentne, izjednačavanjem druge i treće jednačine dobijamo

$$3c-\cancel{3f} = -e-\cancel{3f}+a+2c \quad \Rightarrow \quad e=a-c,$$

pa je konačno

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 3c-3f & a-c & f \\ 3c & 0 & a+2c \end{bmatrix}, \ a,c,f \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} + f \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ a,c,f \in \mathbb{R} \right\} \\
&= Lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Kako je W lineal nad tri linearno nezavisna vektora, on je potprostor prostora $\mathcal{M}_3$. Baza prostora W je

$$B_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

a $dim\,(W)=3$.

★★★★

Zadatak 8.

Neka je T_S skup svih vektora $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ iz $\mathbb{R}^3$ za koje linearni sistem

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = a \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 = b \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = c \end{cases}$$

ima rješenje.

a) Dokazati da je T_S potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

b) Odrediti jednu bazu i dimenziju tog potprostora.

Rješenje

Za rješavanje prethodnog sistema jednačina koristićemo matrični metod:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 & b \\ 5 & 3 & -2 & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_1\cdot 2+R_3]{R_1\cdot(-4)+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & a \\ -11 & -7 & 0 & -4a+b \\ 11 & 7 & 0 & 2a+c \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & a \\ -11 & -7 & 0 & -4a+b \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+c \end{array}\right]$$

Posljednji red prethodne matrice odgovara jednačini sistema

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -2a + b + c.$$

Prethodna jednačina ima rješenje ako i samo je

$$-2a + b + c = 0.$$

Odavde je sada:

$$\begin{aligned} T_S &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid -2a + b + c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2a - b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

a) Kako je skup T_S lineal nad dva linearno nezavisna vektora, on je potprostor prostora $\mathbb{R}^3$.

b) Jednu od baza potprostora T_S čitamo direktno iz lineala:

$$B_{T_S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Iz baze vidimo da je $dim\,(T_S) = 2$.

★★★★

Zadatak 9.

Neka je formiran skup matrica $U_q = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A \right\}$, za neki realni broj q. Dokazati da za slučajeve

a) $q = 0$,

b) $q = 2$,

c) $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

skup U_q generiše vektorski potprostor od $\mathbb{R}^{2\times 2}$ i za svaki od ovih slučajeva odrediti jednu bazu ovih potprostora.

Rješenje

Kako je

$$\begin{aligned} U_q &= \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qa & qb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

a) Za $q = 0$ dobijamo sistem:

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ a+b &= 0 \\ c+d &= 0 \\ c+d &= 0 \end{cases}.$$

Nakon izbacivanja suvišnih jednačina dobijamo da je $b = -a$ i $d = -c$ pa je

$$\begin{aligned} U_q &= \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ c & -c \end{bmatrix}, \ a,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ a,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \right\} \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da je skup U_q vektorski potprostor prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$, a baza potprostora U_q u ovom slučaju je

$$B_{U_0} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Za $q = 2$ dobijamo sistem:

$$\begin{cases} a+b &= 2a \\ a+b &= 2b \\ c+d &= 0 \\ c+d &= 0 \end{cases}.$$

Nakon izbacivanja suvišnih jednačina dobijamo da je $b = a$ i $d = -c$ pa je

$$\begin{aligned} U_q &= \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ c & -c \end{bmatrix}, \ a,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ a,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \right\} \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da je skup U_q vektorski potprostor prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$, a baza potprostora U_q u ovom slučaju je

$$B_{U_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) Za $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ dobijamo sistem:

$$\begin{cases} a+b &= qa \\ a+b &= qb \\ c+d &= 0 \\ c+d &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-q)\,a+b &= 0 \\ a+(1-q)\,b &= 0 \\ c+d &= 0 \\ c+d &= 0 \end{cases}.$$

Prethodni homoegni sistem se može podijeliti u dva podsistema homogenih jednačina, pri čemu se posljednja jednačina sistema može izbaciti jer je identična pretposljednjoj. Homogeni sistem

$$\begin{cases} (1-q)\,a+b &= 0 \\ a+(1-q)\,b &= 0 \end{cases}$$

nema netrivijalno rješenje jer je determinanta homogenog sistema

$$\begin{vmatrix} 1-q & 1 \\ 1 & 1-q \end{vmatrix} = (1-q)^2 - 1 = 1 - 2q + q^2 - 1 = q \cdot (q-2)$$

jednaka nuli ako i samo ako je $q = 0$ ili $q = 2$. Međutim, kako je $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, prethodni homogeni sistem ima samo trivijalno rješenje, pa je $a = b = 0$ i $d = -c$. Sada dobijamo da je

$$\begin{aligned} U_q &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{bmatrix},\ c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ +c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Lin \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \right\} \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da je skup U_q vektorski potprostor prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$, a baza potprostora U_q u ovom slučaju je

$$B_{U_q} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

★★★★★

Zadatak 10.

Neka je S m-dimenzionalni potprostor n-dimenzionalnog vektorskog prostora V, pri čemu je $m < n$. Dokazati da postoji baza prostora V u kojoj se ne nalazi nijedan vektor iz S.

Rješenje

Neka je

$$B_S = \{\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{s_3}, \ldots, \overrightarrow{s_m}\}$$

jedna baza m-dimenzionalnog prostora S.

Kako je S potprostor vektorskog prostora V, postoje linearno nezavisni vektori $\overrightarrow{v_{m+1}}, \overrightarrow{v_{m+2}}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ koji su linearno nezavisni sa svim vektorima iz potprostora S. Na osnovu toga, možemo formirati bazu vektorskog prostora V:

$$B_V = \{\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{s_3}, \ldots, \overrightarrow{s_m}, \overrightarrow{v_{m+1}}, \overrightarrow{v_{m+2}}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}.$$

Međutim, u bazi B_V vektorskog prostora V, prvih m vektora pripadaju potprostoru S vektorskog prostora V. Da bismo pokazali da postoji baza prostora V u kojoj se ne nalazi nijedan vektor iz S, potrebno je da pronađemo skup n linearno nezavisnih vektora takvih da generišu vektorski prostor V i da pritom niti jedan od n vektora ne pripada potprostoru S.

Posmatrajmo skup

$$S' = \{\overrightarrow{s_1} + \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{s_2} + \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{s_3} + \overrightarrow{v_n}, \ldots, \overrightarrow{s_m} + \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{v_{m+1}}, \overrightarrow{v_{m+2}}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}.$$

Jasno je da nijedan vektor iz skupa S' ne pripada prostoru S, jer je vektor $\overrightarrow{v_n}$ linearno nezavisan sa vektorima $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{s_3}, \ldots, \overrightarrow{s_m}$.

Da bismo pokazali da je skup S' ujedno i baza vektorskog prostora V, potrebno je da pokažemo da su vektori iz skupa S' linearno nezavisni.

Posmatrajmo linearnu kombinaciju

$$\alpha_1 \cdot (\overrightarrow{s_1} + \overrightarrow{v_n}) + \alpha_2 \cdot (\overrightarrow{s_2} + \overrightarrow{v_n}) + \alpha_3 \cdot (\overrightarrow{s_3} + \overrightarrow{v_n}) + \cdots + \alpha_m \cdot (\overrightarrow{s_m} + \overrightarrow{v_n}) + \alpha_{m+1} \cdot \overrightarrow{v_{m+1}} + \alpha_{m+2} \cdot \overrightarrow{v_{m+2}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 \cdot \overrightarrow{s_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{s_2} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{s_3} + \cdots + \alpha_m \cdot \overrightarrow{s_m} + \alpha_{m+1} \cdot \overrightarrow{v_{m+1}} + \alpha_{m+2} \cdot \overrightarrow{v_{m+2}} + \cdots + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}. \tag{2}$$

Kako su vektori $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{s_3}, \ldots, \overrightarrow{s_m}, \overrightarrow{v_{m+1}}, \overrightarrow{v_{m+2}}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ linearno nezavisni, jednačina (2) će biti zadovoljena ako i samo ako su odgovarajući skalari uz prethodne bazne vektore jednaki 0. Dakle imamo da je

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \cdots = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m + \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \cdots + \alpha_n = 0$$

odakle dobijamo da je

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \cdots = \alpha_n = 0,$$

što nakon uvrštavanja u jednakost (1) implicira linearnu nezavisnost vektora $\overrightarrow{s_1} + \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{s_2} + \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{s_3} + \overrightarrow{v_n}, \ldots, \overrightarrow{s_m} + \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{v_{m+1}}, \overrightarrow{v_{m+2}}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$.

Stoga, skup S' je baza vektorskog prostora V u kojoj se ne nalazi nijedan vektor iz potprostora S, čime je ovaj dokaz završen.