Probni prvi kolokvijum iz Matematike 1 - verzija 1 - rješenja

04.12.2023.

Zadatak 1.
U kompleksnoj ravni predstaviti kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslov

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{6}.$$

Rješenje

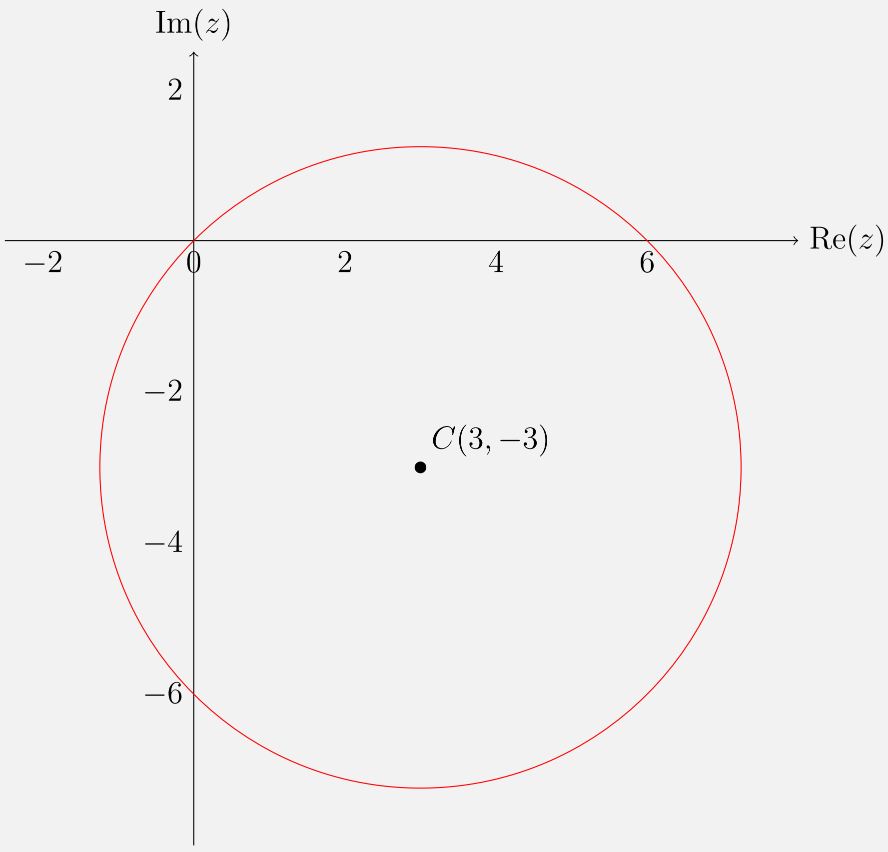
Neka je

$$z=x+yi,\ \ x,y\in\mathbb{R}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{6} \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi}\right)=\frac{1}{6} \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{Re}\left(\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{6} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{6} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{6} && \textbf{(1 bod)} \\
\Leftrightarrow\quad & x^2+y^2=6\,(x-y) \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-6x+y^2+6y=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-6x+9+y^2+6y+9=18 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-3)^2+(y+3)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2. && \textbf{(1 bod)}
\end{aligned}$$

Prethodna jednačina predstavlja jednačinu kružnice sa centrom u tački $(3,-3)$ i poluprečnikom dužine $3\sqrt{2}$.



(2 boda)

Zadatak 2.
Dat je polinom
$$P(x) = \sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k} x^k \cdot 2^{5-k}.$$
Odrediti nule polinoma $P(x)$.

Rješenje

Koristeći binomnu formulu
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
imamo da je
$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k} x^k \cdot 2^{5-k} \\ &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k \cdot 2^{5-k} - \binom{5}{0} \cdot x^0 \cdot 2^{5-0} \\ &= (x+2)^5 - 2^5. \end{aligned}$$
(1 bod)

Traženje nula polinoma $P(x)$ se svodi na rješavanje jednačine
$$\begin{aligned} & (x+2)^5 - 2^5 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+2)^5 = 2^5 \\ \Leftrightarrow \quad & x+2 = \sqrt[5]{2^5} \\ \Leftrightarrow \quad & x+2 = \sqrt[5]{2^5 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)}. \end{aligned}$$
Koristeći Muavrove formule, imamo da je
$$x+2 = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right) \right), \quad k \in [0,1,2,3,4]$$
(1 bod)

odakle dobijamo nule x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 polinoma $P(x)$:
$$\begin{aligned} x_0 + 2 &= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\cdot 0 \cdot \pi}{5}\right) = 2 \cdot \big(\cos(0) + i\sin(0)\big) = 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \\ x_1 + 2 &= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\cdot 1 \cdot \pi}{5}\right) = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2\right) + i \cdot 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ x_2 + 2 &= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\cdot 2 \cdot \pi}{5}\right) = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad x_2 = \left(2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2\right) + i \cdot 2\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\ x_3 + 2 &= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\cdot 3 \cdot \pi}{5}\right) = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad x_3 = \left(2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) - 2\right) + i \cdot 2\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) \\ x_4 + 2 &= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{2\cdot 4 \cdot \pi}{5}\right) = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 2i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad x_4 = \left(2\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) - 2\right) + i \cdot 2\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right). \end{aligned}$$
(2 boda)

Zadatak 3.
Ispitati algebarsku strukturu $(S, \cdot)$ gdje je

$$S = \left\{ \frac{1}{n} \quad | \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

a $\cdot$ standardna operacija množenja.

Rješenje

1. *Zatvorenost* $(\forall x, y \in S) \ \ x \cdot y \in S$
   Neka je
   $$x = \frac{1}{m} \text{ i } y = \frac{1}{n},$$
   pri čemu je $m, n \in \mathbb{N}$. Tada je
   $$x \cdot y = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{m \cdot n}.$$
   Kako je $m \cdot n \in \mathbb{N}$ vidimo da zatvorenost vrijedi.

2. *Komutativnost* $(\forall x, y \in S) \ \ x \cdot y = y \cdot x$
   Kako je $S \subset \mathbb{Q}$ i kako je množenje brojeva u skupu $\mathbb{Q}$ komutativna operacija, komutativnost vrijedi i u skupu S.

3. *Asocijativnost* $(\forall x, y, z \in S) \ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
   Kako je $S \subset \mathbb{Q}$ i kako je množenje brojeva u skupu $\mathbb{Q}$ asocijativna operacija, asocijativnost vrijedi i u skupu S. **(1 bod)**

4. *Neutralni element* $(\exists!\, e \in S) \ (\forall x \in S) \ \ x \cdot e = e \cdot x = x$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e \in S$ tako da je
   $$x \cdot e = x.$$
   Kako je $x > 0$, zaključujemo da je $e = 1$.
   Pošto $e = 1 \in S$, jer za $n = 1$ broj $\frac{1}{n} \in S$, zaključujemo da je $e = 1$ neutralni element. **(1 bod)**

5. *Inverzni element* $(\exists\, y \in S) \ (\forall x \in S) \ \ x \cdot y = y \cdot x = e$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $y \in S$ tako da je
   $$\begin{aligned} & x \cdot y = e \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$
   Primijetimo da za npr. $x = \frac{1}{2}$ imamo da je
   $$y = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \notin S$$
   pa smo ovim pronašli kontra primjer sa kojim smo pokazali da ova algebarska struktura nema inverzni element.

Dakle, $(S, \cdot)$ je komutativni monoid. **(1 bod)**

Zadatak 4.
Data je matrica
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Ispitati da li homogeni sistem
$$A \cdot A^T \cdot X = O$$
ima netrivijalno rješenje, gdje je
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ i } O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje

Imamo da je
$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -5 \\ -4 & 16 & -4 \\ -5 & -4 & 5 \end{bmatrix}. \qquad (\mathbf{1\ bod})$$
Kako je sistem $A \cdot A^T \cdot X = O$ homogen, imaće netrivijalno rješenje ako i samo ako je $\det\left(A \cdot A^T\right) = 0$. **(1 bod)**
Imamo da je
$$\begin{aligned} \det\left(A \cdot A^T\right) &= \begin{vmatrix} 10 & -4 & -5 \\ -4 & 16 & -4 \\ -5 & -4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 10 \cdot \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 16 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 10 \cdot (80 - 16) + 4 \cdot (-20 - 20) - 5 \cdot (16 + 80) \\ &= 640 - 160 - 480 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (\mathbf{1\ bod})$$
Dakle, dati homogeni sistem ima netrivijalno rješenje. **(1 bod)**

Napomena:

U zadatku se nije tražilo rješenje sistema, ali da jeste, morali bismo da riješimo sistem
$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -5x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Množenjem prve jednačine sa $-\frac{4}{5}$ i sabiranjem sa drugom, te sabiranjem prve i treće jednačine dobijamo da je sistem ekvivalentan sistemu:
$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -12x_1 + \frac{96}{5}x_2 &= 0 \\ 5x_1 - 8x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Nakon množenja druge jednačine sa $-\frac{5}{12}$ dobijamo da su druga i treća jednačina ekvivalentne, pa se sistem svodi na:
$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 8x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednačine dobijamo da je
$$x_2 = \frac{8}{5}x_1$$
pa uvrštavanjem x_2 u prvu jednačinu dobijamo
$$\begin{aligned} & 5x_3 = 10x_1 - 4x_2 \\ \Leftrightarrow \quad & 5x_3 = 10x_1 - 4 \cdot \frac{8}{5}x_1 \\ \Leftrightarrow \quad & 5x_3 = \frac{50 - 32}{5}x_1 \\ \Leftrightarrow \quad & x_3 = \frac{18}{25}x_1. \end{aligned}$$
Uzimanjem $x_1 = t$ kao slobodne realne promjenljive, dobijamo da je rješenje sistema
$$(x_1, x_2, x_3) = \left(t, \frac{8}{5}t, \frac{18}{25}t\right).$$