Задаци

1. Координата положаја материјалне тачке се мијења по закону $x = x_0 + kt^3$, $k = \frac{1}{6}\frac{m}{s^3}$

а) шта представља величина x_0?

б) како се мијења брзина мат. тачке током времена?

ц) како се мијења њено убрзање?

д) одредити v и a које она има у тренутку $t = 4s$.

а) x_0 - почетно растојање честице

$t = 0 \Rightarrow x = x_0$

б) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$

$v_x = \frac{d}{dt}(x_0 + kt^3)$

$= \cancel{\frac{dx_0}{dt}}^{0} + \frac{d}{dt}(kt^3) = k \cdot \frac{dt^3}{dt} = \boxed{3kt^2 = v_x}$

ц) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3kt^2) = 3k \cdot \frac{d}{dt} \cdot t^2 = 3k \cdot 2t = \boxed{6kt}$

д) $v(4) = 8\ m/s$

$a(4) = 4\ \frac{m}{s^2}$?

*Задатак: Координата положаја мат. тачке се мијења по закону $x = k_1 + k_2 t + k_3 t^3$, гдје је $k_1 = 8m$,

$k_2 = -5\ m/s$, $k_3 = 0{,}5\ \frac{m}{s^3}$. Колика је пројекција брзине у $t = 4s$?

↳ пројекцију на хор

2. Радијус вектор мат. тачке се мијења по закону $\vec{r} = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}$ гдје је $A = 1\ \frac{m}{s^3}$, $B = 3\ \frac{m}{s^2}$, $t = 1s$.

Наћи:

а) брзину материјалне тачке и интензитет брзине

корјен из збира квадр. пр.

$|\vec{a}| = 8{,}48\ \frac{m}{s^2}$

б) убрзање и интензитет убрзања — *

а) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}) = \frac{d}{dt}(At^3)\vec{i} + \frac{d}{dt}(Bt^2)\vec{j} =$

$= \underbrace{3At^2}_{v_x}\vec{i} + \underbrace{2Bt}_{v_y}\vec{j}$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(3At^2)^2 + (2Bt)^2} = 6{,}7\ \frac{m}{s}$

б) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(3At^2\vec{i} + 2Bt\vec{j}) = \underbrace{3A \cdot 2t}_{a_x}\vec{i} + \underbrace{2B}_{a_y}\vec{j} \Rightarrow$

$|\vec{a}| = \sqrt{(6At)^2 + (2B)^2} = \sqrt{36 + 36} = 8{,}48\ \frac{m}{s^2}$

3. Честица се креће у позитивном смјеру x-осе тако да јој се брзина мијења по закону $v = \alpha \cdot x^{\frac{1}{2}}$ (α - const.) Знајући да се у тренутку $t = 0$ она налазила у тачки $x = 0$, наћи:

а) брзину и убрзање у зависности од времена

б) средњ. брзину за вријеме за које је честица прешла првих s метара.

$v = \alpha \cdot x^{1/2}$, α = const.

$t = 0 \Rightarrow x = 0$

$v = \frac{dx}{dt}$ $\quad \alpha \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{dt}$

$dt = \frac{dx}{\alpha \cdot x^{\frac{1}{2}}} \Big/ \cdot \alpha$

$\alpha\, dt = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} \Big/ \int$

$\alpha \int dt = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$

$\alpha t = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

$\alpha t = 2x^{\frac{1}{2}} + C$

$c = 0$

$\alpha t = 2x^{1/2}$

$x^{1/2} = \frac{\alpha t}{2} \Big/ ^2$

$$\boxed{x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}}$$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2 t^2}{4}\right) = \frac{\alpha^2}{\cancel{4}_2} \cdot \cancel{2}t = \frac{\alpha^2 t}{2}$ ✓

$a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2 t}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{2}$ ✓

б) $v_{sr} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{1}{t_2 - t_1}}_{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \alpha^2 \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot$

$\frac{\alpha^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} t\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \left. \frac{\alpha^2}{2} \frac{t^2}{2} \right|_{t_1}^{t_2} = \underline{\frac{\alpha^2}{4(t_2 - t_1)} \cdot (t_2^2 - t_1^2)} \overset{?}{=}$

$= \frac{\alpha^2}{4\cancel{(t_2 - t_1)}} \cancel{(t_2 - t_1)}(t_2 + t_1) = \frac{\alpha^2 (t_2 + t_1)}{4}$

$t_1 = 0, \quad s = \frac{\alpha^2 t_2^2}{4} \Big/ \cdot 4$

$4s = \alpha^2 t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \frac{4s}{\alpha^2} \Rightarrow \underline{t_2 = \frac{2\sqrt{s}}{\alpha}}$

$v_{sr} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{2\sqrt{s}}{\alpha}\right)}{4} = \frac{\alpha\sqrt{s}}{2}$

$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}$

• Кад је $\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{v}}$

Кретање тијела које равномјерно кружи

05.02.2024.

Вјежбе

1. Тачка се креће у равни по закону $x(t)=\alpha t$ и $y(t)=\alpha t(1-\beta t)$ гдје су α и β поз. константе а t вријеме. а) Одредити једначину трајекторије и график, б) брзину и a у зависности од t в) и тренутак τ у којем вектор брзине заклапа са век. убрзања угао од $\pi/4$.

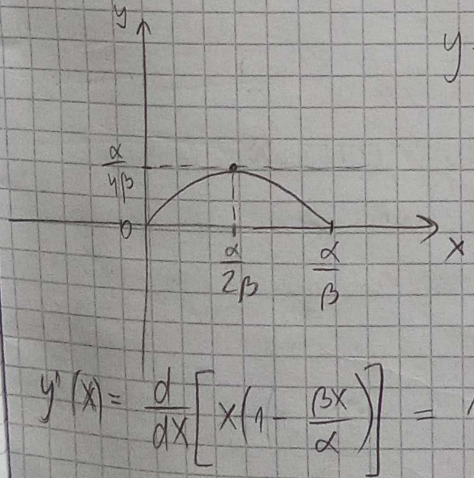
а) $y(x) = ?$

једн. трајек.

$$t=\frac{x}{\alpha} \Rightarrow y = \cancel{\alpha}\cdot\frac{x}{\cancel{\alpha}}\left(1-\beta\frac{x}{\alpha}\right) \Rightarrow \underline{y = x\left(1-\frac{\beta x}{\alpha}\right) = y(x)}$$

$$y=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \wedge 1-\frac{\beta x}{\alpha}=0$$

$$\frac{\beta x}{\alpha}=1 \Rightarrow x_2=\frac{\alpha}{\beta}$$



$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left[x\left(1-\frac{\beta x}{\alpha}\right)\right] = 1-\frac{2\beta x}{\alpha}$$ (гдје је први извод 0, то је екстрем)

$$y'(x)=0 \Rightarrow 0 = 1-\frac{2\beta x}{\alpha} \qquad \frac{2\beta x}{\alpha}=1 \Rightarrow x=\frac{\alpha}{2\beta}$$ и y

$$y_{max} = \frac{\alpha}{4\beta}$$

б) $\underline{x=\alpha t \qquad y=\alpha t(1-\beta)}$

$$v_x = \frac{dx}{dt}=\alpha, \quad v_y=\frac{dy}{dt}=\alpha-2\alpha\beta t$$

$$\boxed{v = \alpha\vec{i} + (\alpha-2\alpha\beta t)\vec{j}}$$

$$a=\frac{dv}{dt} = -2\alpha\beta\vec{j}$$?

?

б) $\vec{v}\cdot\vec{a} = |\vec{v}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\frac{\pi}{4}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2} = \sqrt{\alpha^2+\alpha^2(1-2\beta t)^2} = \boxed{\alpha\sqrt{1+(1-2\beta t)^2}}$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-2\alpha\beta)^2} = 2\alpha\beta$

$\vec{v}\cdot\vec{a} = (\alpha\vec{i} + \underbrace{\alpha(1-2\beta t)}_{\alpha-2\alpha\beta t}\vec{j})(-2\alpha\beta\vec{j}) = -2\alpha\beta\cdot\alpha(1-2\beta t) = \boxed{-2\alpha^2\beta(1-2\beta t)}$

$\cancel{2\alpha^2\beta}(1-2\beta t) = \cancel{\alpha}\sqrt{1+(1-2\beta t)^2}\cdot\cancel{2\alpha\beta}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\beta t - 1 = \sqrt{1+(1-2\beta t)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad /^2$

$(2\beta t-1)^2 = (1+(1-2\beta t)^2)\cdot\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{4}\,2}$

$4\beta^2t^2 - 4\beta t + \cancel{1} = \frac{1}{2}\underbrace{(2-4\beta t+4\beta^2t^2)}_{\cancel{1}-2\beta t+2\beta^2t^2}$

$2\beta^{\cancel{2}}t^{\cancel{2}} = \cancel{2\beta t}$

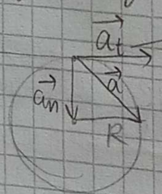
$\beta t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{\beta}}$

2. Тачка се креће по кружници брзином $v = \alpha t$ гдје је $\alpha = 0{,}5\ \frac{m}{s^2}$. Одредити a тачке у тренутку када је пређена пут од $n = 0{,}1$ ~~од~~ обима кружнице.

$v = \alpha t$

$\alpha = 0{,}5\ \frac{m}{s^2}$

$n = 0{,}1$



или $\vec{a}_\tau$

$s = n\cdot O = n\cdot 2R\pi$

$v = \frac{ds}{dt} = ds = v\,dt \,/\int$

$s = \int \alpha t\,dt + c^{\to 0}$

$s = \frac{\alpha t^2}{2}$ — пређени пут код крив. кретања са констант. α

$\underbrace{2Rn\pi}_{s} = \frac{\alpha t^2}{2} \quad /\cdot 2$

$4Rn\pi = \alpha t^2$

$t = \sqrt{\frac{4Rn\pi}{\alpha}}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_n)^2 + (a_\tau)^2}$$

$v = \alpha t$

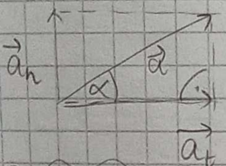
$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha \qquad a_n = \frac{v^2}{R}} \quad !$$

$$v = \alpha \cdot \sqrt{\frac{4n R\pi}{\alpha}}$$

$$a_n = \frac{\left(\alpha \cdot \sqrt{\frac{4nR\pi}{\alpha}}\right)^2}{R} = \boxed{4n\pi\alpha}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2 + (4n\alpha\pi)^2} = \boxed{0{,}8 \frac{m}{s^2}}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}$$



$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_n}{a_t}$$

??

3. Круто тијело ротира успоравајући се око непокретне осе са угаоним убрзањем које је сразмјерно $\sqrt{\omega}$, гдје је ω његова угаона брзина. Наћи средњу угаону брзину тијела за вријеме његове ротације, ако је у поч. тренутку угаона брзина била ω_0.

$\sqrt{\omega} \quad \omega_0$

$\alpha = -k \cdot \sqrt{\omega}$ (пошто тијело успорава иде минус)

$$\alpha \sim \sqrt{\omega}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -k \cdot \sqrt{\omega} \qquad \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -k\,dt \; / \int$$

$$\int \omega^{-\frac{1}{2}} d\omega = -k \int dt + C$$

$$2\omega^{\frac{1}{2}} = -kt + C$$

$$t = 0: \; 2\omega_0^{\frac{1}{2}} = 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 2\omega_0^{\frac{1}{2}}}$$

$$2\omega^{\frac{1}{2}} = -kt + 2\omega_0^{\frac{1}{2}} \; /:2$$

$$\omega^{\frac{1}{2}} = \frac{-kt + 2\omega_0^{\frac{1}{2}}}{2} \; /^2$$

$$\omega = \left(\frac{-kt + 2\omega_0^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\omega_0^{\frac{1}{2}} - \frac{kt}{2}\right)^2 = \omega$$

$$0 = w_0^{\frac{1}{2}} - \frac{kt}{2} \Rightarrow \boxed{t = \frac{2w_0^{\frac{1}{2}}}{k}}$$ → вријеме за које се тијело зауставило ?

$$w_{sr} = \langle w \rangle = \frac{\overbrace{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}^{\Delta\varphi}}{t_1 - t_0} =$$

$$w = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \left(v = \frac{ds}{dt}\right)$$

$$d\varphi = w \cdot dt = \left(w_0^{\frac{1}{2}} - \frac{kt}{2}\right)^2 dt$$

$$d\varphi = \left(w_0 - ktw_0^{\frac{1}{2}} + \frac{k^2t^2}{4}\right)dt \;\Big/ \int$$

нема никаквих информација о φ у задатку (почетни услови)

$$\varphi = \int w_0\,dt - \int \left(ktw_0^{\frac{1}{2}}\right)dt + \int \frac{k^2t^2}{4}dt + \cancel{C}$$

$$= \boxed{w_0 t - \frac{kw_0^{\frac{1}{2}}t^2}{2} + k^2\frac{t^3}{12}}$$

$$\langle w \rangle = \frac{w_0 \cdot \frac{2w_0^{\frac{1}{2}}}{k} - \cancel{k}\cdot w_0^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{4w_0}{k^{\cancel{2}}} + \frac{k^2}{12}\cdot\left(\frac{2w_0^{\frac{1}{2}}}{k}\right)^3 - 0}{\frac{2w_0^{\frac{1}{2}}}{k} - 0} = 0 \qquad t_0 = 0$$

$$\frac{\frac{2w_0^{\frac{3}{2}}}{k} - \frac{4w_0^{\frac{3}{2}}}{k} + \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{12}_3}\cdot\frac{\cancel{8}^{2}w_0^{\frac{3}{2}}}{k^{\cancel{3}}}}{\frac{2w_0^{\frac{1}{2}}}{k}} = 0 \qquad \frac{\frac{6w_0^{\frac{3}{2}} - 12w_0^{\frac{3}{2}} + 2w_0^{\frac{3}{2}}}{3\cancel{k}}}{\frac{2w_0^{\frac{1}{2}}}{\cancel{k}}} =$$

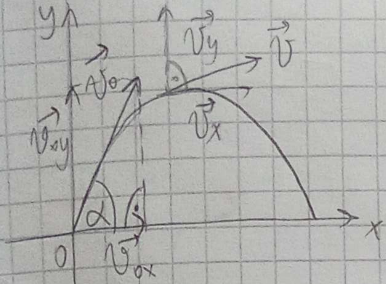
$$\boxed{\langle w \rangle = \frac{w_0}{3}} \qquad = \frac{-\cancel{4}^{2}w_0^{\frac{3}{2}}}{3\cancel{6}\,w_0^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3}\cdot w_0^2$$

4. Почетна брзина баченог камена је $10\frac{m}{s}$, а послије $0,5\,s$ v камена је $7\frac{m}{s}$. На коју највећу висину ће се попети камен?

$$v = v_0 - gt \qquad v = 7\frac{m}{s}$$

$$7\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s} - 9,81\frac{m}{s^2}\cdot 0,5\,s \quad \times$$

Ради се о косом хицу, јер лијева и десна страна нису једнаке!



$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} - gt$$ [illegible]

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2} = v_0^2 - 2gtv_0\sin\alpha + g^2t^2$$

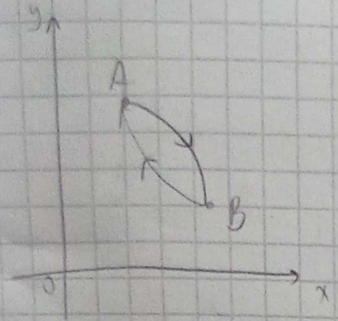
$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad \sin^2\alpha = ?$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gtv_0\sin\alpha + g^2t^2$$

$$2gtv_0\sin\alpha = v_0^2 - v^2 + g^2t^2$$

$$\sin\alpha = \frac{v_0^2 - v^2 + g^2t^2}{2gtv_0} = 0{,}77$$

$$h_{max} = 3\ m$$



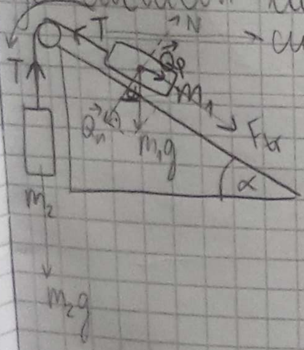
$A = \oint F_s\, ds = 0$

по затвореној путањи, рад је 0 и силе су конзервативне!

Вјежбе – динамика

12.03.2024.

1. Нагибни угао стрме равни је 30°. Однос маса тијела је $\frac{m_2}{m_1} = \mu = \frac{2}{3}$. Коефицијенти трења између m_1 и подлоге је $k_1 = 0{,}1$. Масе точка и нити су занемариве као и трење точка. Наћи интенз. и смјер убрзања тијела m_2 ако је систем почео да се креће из стања мировања.



→ силе затезања нити – 4

угао α

шаблон писања свих сила и њихових компоненти

$m_2 a = +m_2 g - T$

$m_1 a = T - F_{tr} - Q_p$

$F_{tr} = k \cdot N$ → нормална комп. силе која дјелује на тијело

$N = Q_N = m_1 g \cos\alpha$

$F_{tr} = k \cdot Q_N = k \cdot m_1 g \cos\alpha$

$Q_p = m_1 g \sin\alpha$

$2m_1 = 3m_2$

$m_2 = \frac{2m_1}{3}$

$(m_1 + m_2)a = m_2 g - \cancel{T} + \cancel{T} - F_{tr} - Q_p$

$= m_2 g - k \cdot m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha$

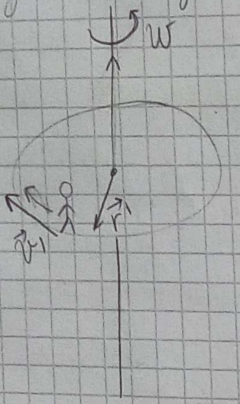
$= \frac{2m_1}{3} g - k \cdot m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha$

$\left(m_1 + \frac{2m_1}{3}\right)a = \frac{2m_1}{3} g - k m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha$

$\frac{5m_1}{3} \cdot a = \frac{2m_1}{3} g - k m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha$

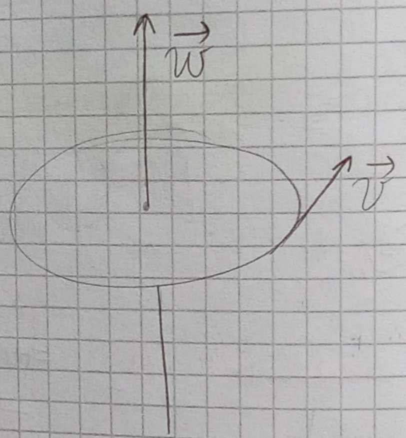
$a = \frac{3}{5} g\left(\frac{2}{3} - (k\cos\alpha + \sin\alpha)\right)$ $\left(a = 0{,}479 \frac{m}{s^2}\right)$

2. Човјек масе 60 kg креће се униформно (равномјерно) ободом хоризонталне кружне платформе. Полупречник платформе је 3mm и она ротира сталном брзином 1 rad/s, око вертикалне осе која пролази кроз њен центар. Одредити хоризонталну пројекцију силе којом платформа дјелује на човјека у систему везаном за платформу ако је резултанта сила инерције које дјелују на човјека једнака нули.



$R = 3\ \cancel{mm}$

$\omega = 1\ rad/s$



$F_{inc} = F_{cf} + F_{cor}$ Кориолисова сила

$$\boxed{F_{cf} = m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

$$\boxed{F_{cor} = -2m(\vec{\omega}\times\vec{v})}$$

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})}$$

$$F_{cf} = -\left[m(\vec{\omega}(\cancel{\vec{\omega}\cdot\vec{r}}) - \vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\right]$$

$$F_{cf} = mr'\omega^2 \ ; \ F_{cor} = -2m\omega v' \sin 90^\circ = -2m\omega v'$$

$$F_{cf} + F_{cor} = 0$$

$$m\omega^2 r' - 2m\omega v' = 0$$

$$\cancel{m}\omega^2 r' = 2\cancel{m}\cancel{\omega} v'$$

$$v' = \frac{\omega r'}{\ldots}$$

$R = r'$

$m\cdot a' =$

$F = m\cdot$

3. Честиц...

xOy

$2\vec{i} - 3\vec{j}$

једна

4. На дугу ... почиње ... у тренутку ... односа

$\boxed{R = r' = 3\,m}$

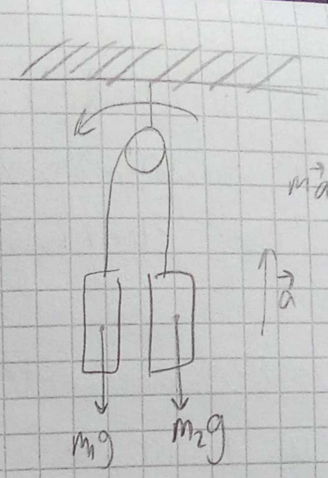
$m \cdot a' = \sum_i F_i + \cancel{F_{inc}}^{\,0}$

$F = m \cdot a' = m \cdot a$

$F = m \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{m}{\cancel{R}} \frac{\omega^2 R^{\cancel{2}}}{4}$

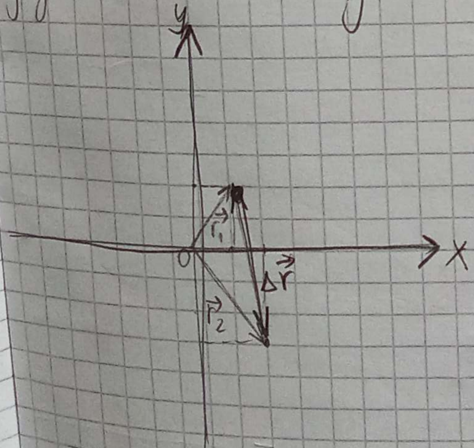
$\boxed{F = \frac{m \omega^2 R}{4} = 45\,N}$

*



$m\vec a = \sum_i \vec F_i + \vec F_{inc}$

3. Честица се помјерила по некој трајекторији у равни xOy из тачке 1 у тачку 2, гдје је $\vec r_1 = \vec i + 2\vec j$, а $\vec r_2 = 2\vec i - 3\vec j$. На њу су притом дјеловале силе од којих је једна $F = 3\vec i + 4\vec j$. Нађи рад силе F.



$\Delta\vec r$ - вектор помјераја

$\vec r_2$ - резултантни вектор

$\vec r_1 + \Delta\vec r = \vec r_2 \qquad \Delta\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$

$\Delta\vec r_1 = \vec i + 2\vec j - 2\vec i + 3\vec j = \boxed{-\vec i + 5\vec j}$

$A = \vec F \cdot \Delta\vec r$

$A = (3\vec i + 4\vec j)\cdot(-\vec i + 5\vec j) = \overset{-3}{-3\vec i\vec i}$

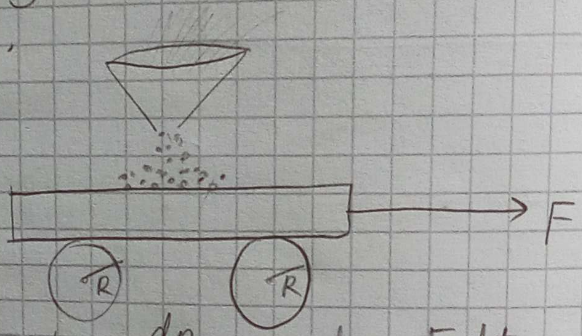
$15\vec i\vec j_{0} - 4\vec i\vec j_{0} = \cancel{\vec i\vec j} + \overset{20}{20\vec j\vec j}$

$\boxed{A = -17\,J}$

4. На дугу платформу на точковима масе $m_0 = 500\,kg$ почиње удесно да дјелује константна сила од 300 N. У моменту покретања платформе из непокретног стања почиње убацивање пијеска на платформу

конст. интензитетом $\sigma = 30\ kg/s$. У тренутку $t = 6s$
од почетка кретања одредити:
а) убрзање платформе
б) кинетичку енергију платформе са убаченим пијеском
ц) ако точкови платформе имају полупречник $R = 0,2\ m$ и котрљају се без клизања, колико износи њихова угаона брзина у том тренутку? (Губитке на трење занемарити).

$m_0 = 500\ kg$



а) $a = ?$ $E_k = ?$ $\omega = ?$

$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$

$F = \frac{dp}{dt}$ $\quad dp = F dt$

$p = m \cdot v \ / \frac{d}{dt}$

$m \cdot a = \frac{dp}{dt}$ $\quad m dv = F dt$

$dp = m \cdot dv$

$m = m_0 + \sigma t$ $\quad m \cdot v = F \cdot t + \cancel{C}^{0}$

$m \cdot v = F \cdot t$

$\frac{dp}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt}$ $\quad v = \frac{F \cdot t}{m}$

$\frac{F \cdot t}{m_0 + \sigma t} = v = \frac{30\cancel{0}N \cdot \cancel{6}s}{\cancel{68}\cancel{0}} = 2,65$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{F \cdot t}{m_0 + \sigma t}\right) = \frac{F(m_0 + \sigma t) - F \cdot t \cdot \sigma}{(m_0 + \sigma t)^2} = \frac{F m_0 + \cancel{F\sigma t} - \cancel{F\sigma t}}{(m_0 + \sigma t)^2}$

$$\boxed{a = \frac{F \cdot m_0}{(m_0 + \sigma t)^2} = 0,32\ \frac{m}{s^2}}$$

б) $E_k = \frac{(m_0 + \sigma t) \cdot \left(\frac{F \cdot t}{m_0 + \sigma t}\right)^2}{2}$

$E_k = 2382,35\ J$ (са убаченим пијеском)

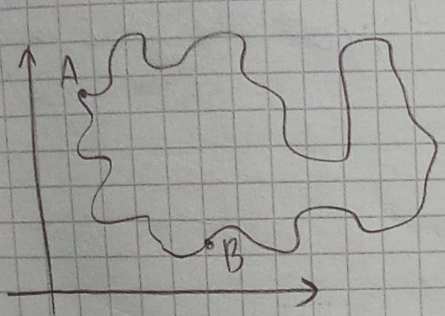
$$v = \omega R$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{F \cdot t}{m_0 + 6t}\right) = \frac{F \cdot t}{R(m_0 + 6t)}$$

$$\boxed{\omega(t = 6\,s) = 13{,}24\ rad/s}$$

14.03.2024.

Предавање



$$A = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

* Гравитационо поље је конзервативно поље
* Сила трења је дисипативна сила!

$$\boxed{F_{el} = -kx}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_{el}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\, dx = \frac{1}{2} k (x_1^2 - x_2^2)$$

$$-k \cdot \frac{x^2}{2} \quad \frac{-k(x_2^2 - x_1^2)}{2} = \frac{-k \cdot -(x_1^2 - x_2^2)}{2} = \frac{k(x_1^2 - x_2^2)}{2}$$

Ако одаберемо да је крајња тачка у координатном почетку, тј. $x_2 = 0$

$$A = \frac{1}{2} k x_1^2$$

Закони одржања

потребно да се ријеши питање везано за „bungee jumping"
-година симетрије у Космосу (сјна симетрија, огледалска симетрија)

1) За

Физика вјежбе

13.03.2024.

ЗОИ и ЗОЕ

1. На честицу масе m која мирује у тренутку $t=0$ почне дјеловати сила која зависи од времена као $\vec{F} = \vec{b}t(\tau - t)$. Наћи: а) импулс честице по престанку дјеловања силе; б) дужину пута који честица пређе за вријеме дјеловања силе

$\boxed{b, \tau - \text{const.}}$

а) $\vec{p} = m\cdot\vec{v} \;/\; \frac{d}{dt}$ $\qquad \vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\cdot\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\cdot\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$$F = bt(\tau - t)$$

$$dp = F\cdot dt$$

$$dp = bt(\tau - t)\,dt \;/\int$$

$$\int dp = \int bt(\tau - t)\,dt \Rightarrow p = \int(b\cdot t\tau - bt^2)\,dt \Rightarrow$$

$$p = \int bt\tau\,dt - \int bt^2\,dt = b\tau\frac{t^2}{2} - b\frac{t^3}{3} + \cancel{C} \to 0$$

* Напомена: C тежи нули јер нису задати почетни услови у задатку (тј. што се тиче константе, немамо почетни услов)

$$p(t) = b\tau\frac{t^2}{2} - b\frac{t^3}{3}$$

τ – вријеме дјеловања силе

t – промјенљива

$$p(\tau) = b\tau\frac{\tau^2}{2} - \frac{b\tau^3}{3} = \frac{3b\tau^3 - 2b\tau^3}{6}$$

$\boxed{p(\tau) = \frac{b\tau^3}{6}}$ Тражени импулс је $\frac{b\tau^3}{6}$.

б) $\vec{p} = m\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$ $\qquad \vec{v} = \frac{b\tau\frac{t^2}{2} - \frac{bt^3}{3}}{m} = v(t)$

$$\boxed{s(t) = \int v(t)\,dt =} \int\left(\frac{b\tau t^2}{2m} - \frac{bt^3}{3m}\right)dt = \int\frac{b\tau t^2}{2m}\,dt - \int\frac{bt^3}{3m}\,dt \Rightarrow$$

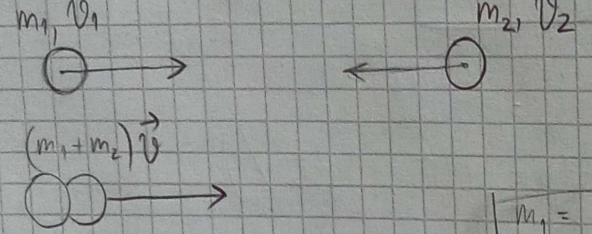
$$= \frac{b\tau}{2m}\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{b}{3m}\cdot\frac{t^4}{4} + \cancel{C} \to 0$$

$$s(\tau) = \frac{b\tau}{2m}\cdot\frac{\tau^3}{3} - \frac{b}{3m}\cdot\frac{\tau^4}{4} = \frac{b\tau^4}{6m} - \frac{b\tau^4}{12m} = \boxed{\frac{b\tau^4}{12m}}$$

Тражена дужина пута је $s(\tau) = \frac{b\tau^4}{12m}$.

2. Двије куглице од воска чије су масе m_1 и m_2 крећу се у сусрет једна другој брзинама v_1 и v_2 и нееластично се сударају. Израчунати количину топлоте Q која се ослобађа у овом судару ако је $m_1 = 50g$, $m_2 = 20g$, $v_1 = 0,5\frac{m}{s}$, $v_2 = 0,1\frac{m}{s}$.

нееластичан = пластичан судар



$Q = ?$

$m_1 = 50\cdot10^{-3}kg = 5\cdot10^{-2}kg$
$m_2 = 20\cdot10^{-3} = 2\cdot10^{-2}kg$
$v_1 = 0,5\frac{m}{s}$ $v_2 = 0,1\frac{m}{s}$

ЗОИ: $\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p}$

ЗОЕ: (Постоји само кин. енергија): $E_{k_1} + E_{k_2} = E_k + Q$ ослобођена топлота

* Напомена: Дио енергије се утрошио на топлотну енергију па је зато тражимо

ЗОИ:

$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v$

$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2}$

ЗОЕ:

$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} + Q \quad /\cdot 2$

$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = (m_1+m_2)v^2 + 2Q$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = \cancel{(m_1+m_2)}\cdot\frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} + 2Q$$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = \frac{m_1^2v_1^2 + 2m_1v_1m_2v_2 + m_2^2v_2^2}{m_1+m_2} + 2Q$$

$$2Q = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - \frac{m_1^2v_1^2 + 2m_1v_1m_2v_2 + m_2^2v_2^2}{m_1+m_2}$$

$m_1+m_2=7\cdot10^{-2}\,kg$ $\quad m_1v_1^2=5\cdot10^{-2}kg\cdot\left(0,5\frac{m}{s}\right)^2=1,25\ N\cdot s$

$m_2v_2^2=2\cdot10^{-2}kg\cdot\left(0,1\frac{m}{s}\right)^2=0,02\ N\cdot s$

$$2Q=1,25+0,02-\frac{6,25\cdot10^{-2}+2\cdot10\cdot10^{-4}\cdot0,05+0,04\cdot10^{-2}}{7\cdot10^{-2}}$$

$$2Q=1,27-\frac{6,25\cdot10^{-2}+10^{-4}+0,04\cdot10^{-2}}{7\cdot10^{-2}}$$

$$2Q=1,27-\frac{6,29\cdot10^{-2}+10^{-4}}{7\cdot10^{-2}}$$

$1,43\cdot10^{-5}\cdot10^{2}=1,43\cdot10^{-3}$

$$2Q=1,27-(0,89+0,00143)$$

$$2Q=1,27-0,89143$$

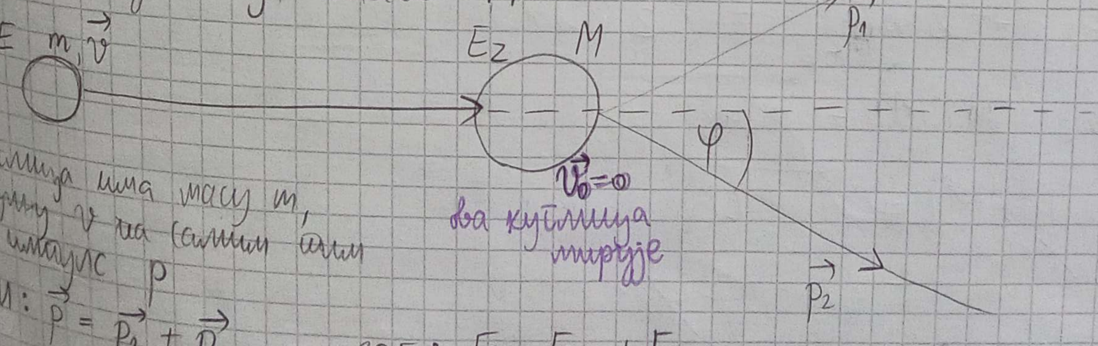
$$2Q=0,37857$$

...

?

$Q=2,57\ mJ$

3. Куглица масе m има кинетичку енергију E и еластично се расије на другој мирујућој куглици масе M, при чему друга куглица одскочи под углом φ у односу на правац упадне куглице. Колику енергију је стекла куглица масе M?



-Куглица има масу m, брзину v на самим оси и импулс p

ва куглица мирује

ЗОИ: $\vec p=\vec p_1+\vec p_2$

$\vec p_2=\vec p-\vec p_1$

$\vec v_1=\vec p-\vec p_2$

ЗОЕ: $E=E_1+E_2$

$E_2=?$

$E_2=E-E_1$ $\quad \vec p=m\cdot\vec v+\cancel{M\cdot\vec v_0}=m\cdot\vec v$

$\vec{p_1} = m\vec{v_1}$ $\vec{p_2} = M_2\vec{v_2}$

$E = \frac{mv^2}{2}$, $p = m \cdot v$

$v = \frac{p}{m}$

$E = \frac{\cancel{m} \cdot \frac{p^2}{\cancel{m^2}}}{2} = \frac{p^2}{2m}$ $p = \sqrt{2mE}$ (релација између кин. енергије и импулса)

$p_1 = \sqrt{2mE_1}$, $p_2 = \sqrt{2mE_2}$ E_2 нам се тражи

$p^2 = 2mE$

$\vec{p_1}\vec{p_1} = (\vec{p} - \vec{p_2})^2 = \vec{p}\vec{p} + \vec{p_2}\vec{p_2} - 2\vec{p}\vec{p_2}$?

$p_1^2 = p^2 + p_2^2 - 2pp_2\cos\varphi$

$p_2^2 = p_1^2 - p^2 + 2pp_2\cos\varphi$ $p_2^2 = 2ME_2$

$2ME_2 = 2mE_1 - 2mE + 2 \cdot \sqrt{2mE} \cdot \sqrt{2ME_2} \cdot \cos\varphi$

$2ME_2 = 2m\underbrace{(E_1 - E)}_{-E_2} + 2\sqrt{4mMEE_2} \cdot \cos\varphi$ $E - E_1 = E_2$

$E_1 - E = -E_2$

$2ME_2 = -2mE_2 + 2\sqrt{4mMEE_2}\cos\varphi$

$2ME_2 + 2mE_2 = 2\sqrt{4mMEE_2}\cos\varphi$

$\cancel{2}E_2(m+M) = \cancel{2}\sqrt{4mMEE_2}\cos\varphi$

$E_2(m+M) = \sqrt{4mMEE_2}\cos\varphi \quad /^2$

$E_2^{\cancel{2}}(m+M)^2 = 4mME\cancel{E_2} \cdot \cos^2\varphi$

$\boxed{E_2 = \frac{4mME\cos^2\varphi}{(m+M)^2}}$

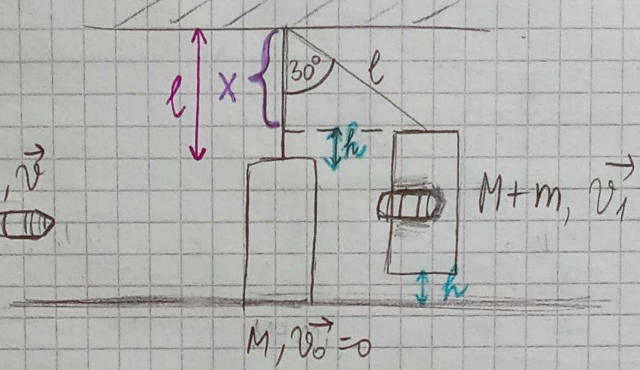
4. Метак масе 10g који лети хоризонтално забије се у комад дрвета масе 5kg који виси о танкој и нерастегљивој нити дужине $l = 0,4\,m$. Услед овог удара цијели систем бива изведен из равнотежног положаја за угао од 30°. Одредити брзину метка непосредно прије удара о дрво и губитак енергије при удару.

$m = 10g = 0,01\,kg$

$M = 5\,kg$

$l = 0,4\,m$

$\alpha = 30^\circ$



$v = ?$

$l = x + h \qquad h = l - x$

$x = l\cos 30^\circ \qquad h = l - l\cos 30^\circ = l(1-\cos 30^\circ)$

ЗОИ: $m\vec{v} = (m+M)\vec{v_1}$

$m\vec{v} = m\vec{v_1} + M\vec{v_1}$

$\vec{v} = \dfrac{m\vec{v_1} + M\vec{v_1}}{m}$

$\vec{v} = \dfrac{(m+M)\,\vec{v_1}}{m}$

$\boxed{\vec{v} = \dfrac{1,025 \cdot 5,01}{0,01} = 513,5\,\dfrac{m}{s}}$

ЗОЕ: $\dfrac{\cancel{m+M}}{2} v_1^2 = \cancel{(m+M)}gh$?

$\dfrac{v_1^2}{2} = gh$

$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{\underbrace{2g\cdot l}_{7,848}(\underbrace{1-\cos 30^\circ}_{0,1339})} =$

$= \sqrt{1,0508} = \boxed{1,025\,m/s}$

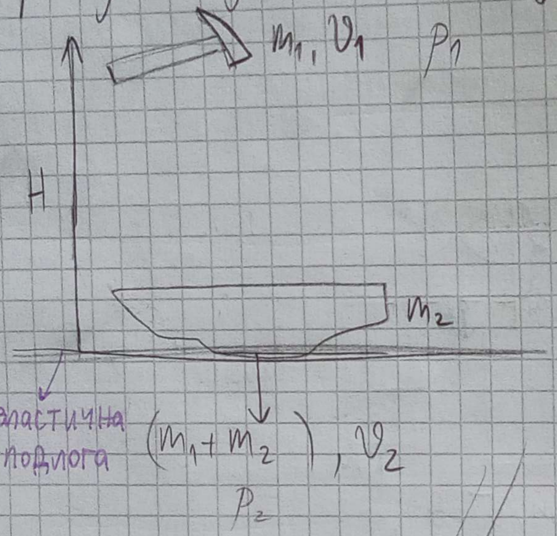
$E_1 = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{0,01\cdot(513,5)^2}{2} = 1318\,J$

$E_2 = \dfrac{(m+M)v_1^2}{2} = \dfrac{5,01\cdot(1,025)^2}{2} = 2,6\,J$

$\boxed{\Delta E = E_1 - E_2 = 1318\,J - 2,6\,J = 1315,4\,J}$

Тражена брзина је $513,5\,\frac{m}{s}$, а губитак енергије при удару је 1315,4 J.

5. Чекић масе $m_1 = 100$ kg падне са висине $H = 3$ m на наковањ масе $m_2 = 500$ kg који се налази на еластичној подлози. Послије удара чекића о наковањ они се заједно крећу надоље. Колика је почетна брзина наковња?



$v_2 = ?$

Чекић слободно пада, па је

$$v_1 = \sqrt{2gH} = 7,67\ \frac{m}{s}$$

ЗОИ: $p_1 = p_2$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

$$m_1 \sqrt{2gH} = (m_1 + m_2) v_2$$

$$v_2 = \frac{m_1 \sqrt{2gH}}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{767}{600} = 1,27\ \frac{m}{s}}$$

26.03.2024. Вјежбе - динамика ротационог тијела

Формуле (понављање):

$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}$ - ЦЕНТАР МАСЕ

$\vec{L}$ - момент импулса $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$\vec{M}$ - момент силе $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (еквивалентно $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

$d\vec{L} = \vec{M}\,d\vec{t}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const. \Leftrightarrow \vec{M} = 0$ ЗАКОН ОДРЖАЊА МОМЕНТА ИМПУЛ... (ЗОМИ)

$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ момент инерције

$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$ (Други Њутнов закон за ротацију) (АНАЛОГИЈА $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$)

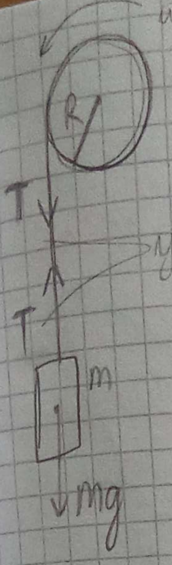
$I \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{L} = I \cdot \vec{w}$ ($\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ аналогија)

$\boxed{I_A = I_C + md^2}$ → Штајнерова теорема

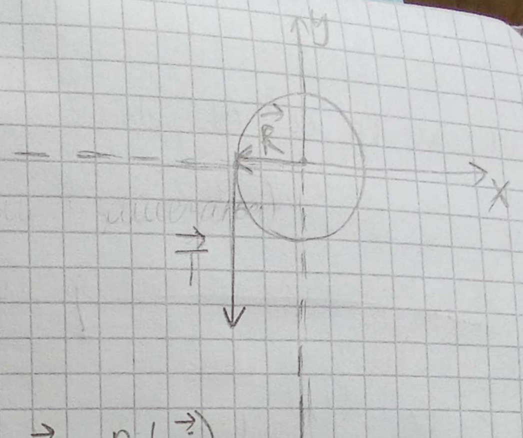
$E_k = E_{k_r} + E_{k_t} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I \cdot w^2}{2}$

1. Точак радијуса R и момента инерције I монтиран је на хоризонталној осовини. Око точка је намотан конопац а на њему виси тијело масе m. Одредити линијско убрзање тијела, угаоно убрзање точка и напетост нити (T).

препоставимо смер



унутрашња особина конца
(сила затезања)



$a = ?$ $T = ?$
$\alpha = ?$

$a_t = \frac{dv}{dt}$

$v = \omega \cdot R$

$\vec{R} = R(-\vec{i})$

$\vec{T} = T(-\vec{j})$

може се мешати и R и r

$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} = I \cdot \alpha \cdot \vec{k}$

$a_t = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha$

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{R} \times \vec{T}$

$RT\vec{k} = I \cdot \alpha \cdot \vec{k}$

$a = R \cdot \alpha$

$\vec{M} = R \cdot T (-\vec{i}) \times (-\vec{j}) \vec{k}$

$\boxed{\alpha = \frac{a}{R}}$!

$RT = I \cdot \alpha$

$\vec{M} = RT\vec{k}$ момент силе точка

$T = \frac{I \alpha}{R}$ угаоно убрзање

$\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} - T}$ једначина кретања

$\boxed{T = \frac{I \cdot a}{R^2}}$

$ma = mg - \frac{Ia}{R^2}$

$ma + \frac{Ia}{R^2} = mg$

$a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mg$

$\boxed{a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R^2}}}$ линијско убрзање

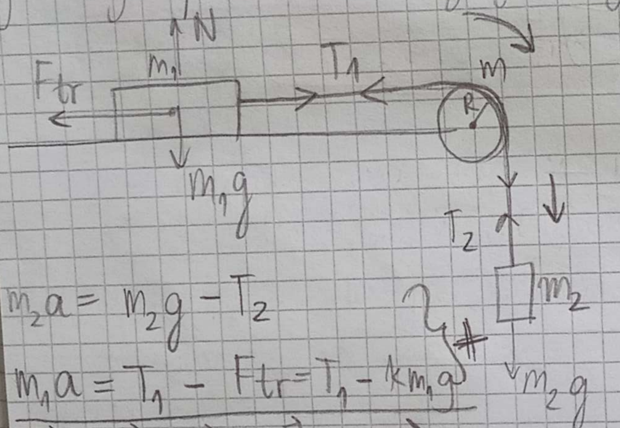
$\boxed{\alpha = \frac{a}{R} = \frac{mg}{R\left(m + \frac{I}{R^2}\right)}}$ угаоно убрзање

$\boxed{T = \frac{I}{R^2} \cdot \frac{mg}{m + \frac{I}{R^2}}}$ сила затезања нити, m - масе нити

2. У систему приказаном на слици познате су масе тијела m_1 и m_2, коефицијент трења између тијела m_1 и хоризонталне равни је k, а маса котура је m и може се сматрати хомогеним диском. Нит по котуру не клизи. У тренутку $t=0$ тијело масе m_2 почиње да се спушта. Занемарујући масу нити и трење у оси, наћи:

а) Убрзање тијела масе m_2

б) Рад силе трења која дјелује на тијело масе m_1 у току првих t секунди од почетка кретања.



$F_{tr} = k \cdot N$

$m_2 a = m_2 g - T_2$

$m_1 a = T_1 - F_{tr} = T_1 - k m_1 g$

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}, \quad \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$

$M = RT_2 - RT_1$

$I \cdot \alpha = R(T_2 - T_1)$

а) $m_1 a + m_2 a = T_1 - m_1 g k + m_2 g - T_2$

$a(m_1 + m_2) = + m_2 g - m_1 g k - (T_2 - T_1)$

$a(m_1 + m_2) = m_2 g - m_1 g k - \frac{I\alpha}{R}$

$a(m_1 + m_2) = m_2 g - m_1 g k - \frac{I a}{R^2}$

$$a\left(m_1+m_2+\frac{I}{R^2}\right) = m_2 g - m_1 g k$$

$$\boxed{I=\frac{1}{2}mR^2} \rightarrow \text{диск}$$

$$a\left(m_1+m_2+\frac{m}{2}\right) = m_2 g - m_1 g k$$

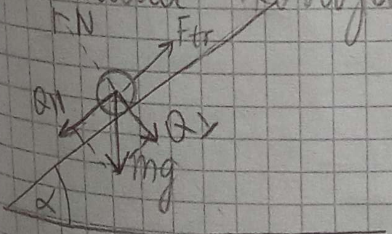
$$a=\frac{m_2 g - m_1 g k}{m_1+m_2+\frac{m}{2}} \qquad \vec{a} = \frac{(m_2 - m_1 k)}{\left(m_1+m_2+\frac{m}{2}\right)}\vec{g}$$

б) $A_{tr} = -F_{tr}\cdot s$

$$s=\frac{1}{2}at^2$$

$$A_{tr} = -k m_1 g\cdot \frac{1}{2}at^2 \quad \dots \quad A_{tr} = -\frac{k m_1 g^2 (m_2 - m_1 k)\, t^2}{2\left(m_1+m_2+\frac{m}{2}\right)}$$

3. Хомогена лопта котрља се без клизања низ стрму раван нагибног угла α. Одредити: убрзање лопте и коефицијент трења при којем неће бити клизања.



$Q_\perp$, $Q_\parallel$
N P

$v_{CM} = \omega\cdot R$

$a_{CM} = \alpha\cdot R$

$Q_\parallel = mg\sin\alpha$

$Q_\perp = mg\cos\alpha - N$

За лопту где је оса ротације кроз центар: $I=\frac{2}{5}mR^2$

Једначина кретања лопте:

$m\cdot a = Q_\parallel - F_{tr}$ $\qquad \vec{M}=\vec{R}\times\vec{F}$, $\vec{M} = I\cdot\vec{\alpha} = I\alpha\vec{k}$, $M = R$

$ma = mg\sin\alpha - F_{tr}$

$\vec{M} = RF_{tr}\vec{k}$ $\quad \vec{M}=\vec{R}\times\vec{F}$ $\qquad F_{tr} = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I}{R}\cdot\frac{a}{R} = \frac{Ia}{R^2}$

$I\alpha = RF_{tr}$ $\qquad F_{tr} = \frac{2}{5}m\cancel{R^2}\cdot\frac{a}{\cancel{R^2}} = \frac{2}{5}ma$

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{2}{5}ma$$

$$ma + \frac{2}{5}ma = mg\sin\alpha \qquad F_{tr} = \frac{2}{\cancel{5}} m \cdot \frac{\cancel{5}}{7} g\sin\alpha$$

$$\frac{7}{5}\cancel{m}a = \cancel{m}g\sin\alpha \qquad F_{tr} = \frac{2}{7} mg\sin\alpha$$

$$\boxed{a = \frac{5}{7} g\sin\alpha}$$

$$F_{tr_{max}} = k \cdot N = mgk\cos\alpha$$

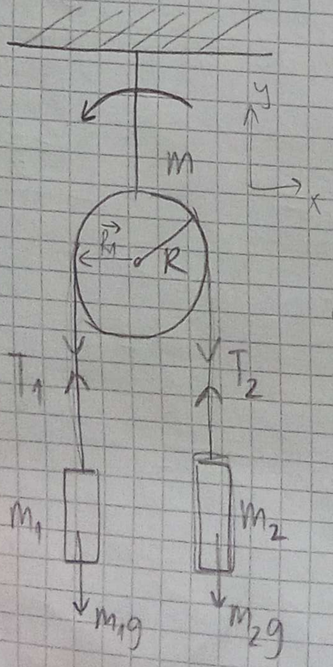
$$F_{tr} < F_{trmax}$$

$$\frac{2}{7}\cancel{mg}\sin\alpha < k\cancel{mg}\cos\alpha$$

$$\frac{2}{7}\sin\alpha < k\cos\alpha$$

$$\frac{2}{7}tg\alpha < k \qquad \boxed{k > \frac{2}{7}tg\alpha}$$

4. У систему приказаном на слици наћи угаоно убрзање диска и однос сила затезања у вертикалним дијеловима конца. Познате су масе тијела m_1 и m_2, маса диска m и његов радијус R.



$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T_1 \\ m_2 a &= T_2 - m_2 g \end{aligned}\right\} + \quad \text{(једначине кретања)}$$

$$a(m_1 + m_2) = m_1 g - T_1 + T_2 - m_2 g$$

$$a(m_1 + m_2) = m_1 g - m_2 g - (T_1 - T_2)$$

$$T_1 - T_2 = m_1 g - m_2 g - (m_1 + m_2)\underbrace{a}_{R\alpha}$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 a$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 g - m_1 a}{m_2 g + m_2 a} = \frac{m_1(g-a)}{m_2(g+a)}$$

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}, \quad \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} = I\alpha\vec{k}$$

$$\vec{M_1} = \vec{R_1} \times \vec{T_1}, \quad \vec{M_2} = \vec{R_2} \times \vec{T_2}$$

$$\vec{M_1} = R(-\vec{i}) \times T_1(-\vec{j}) = RT_1\vec{k}$$

$$\vec{M_2} = R\vec{i} \times T_2(-\vec{j}) = -RT_2\vec{k}$$

$$\sum_i \vec{M_i} = \vec{M_1} + \vec{M_2} = RT_1\vec{k} - RT_2\vec{k} = R(T_1 - T_2)\vec{k}$$

$$I \cdot \alpha = R(T_1 - T_2)$$

$$\frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \alpha = \cancel{R}(T_1 - T_2)$$

$$mR\alpha = 2(T_1 - T_2) \Rightarrow \alpha = \frac{2(T_1 - T_2)}{mR}$$

$$\alpha = \frac{2(m_1 g - m_2 g - (m_1 + m_2)R\alpha)}{mR} \quad \ldots$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2(m_1 - m_2)g}{R(m + 2m_1 + 2m_2)}} \qquad a = \alpha \cdot R \text{ и уврстити у } \frac{T_1}{T_2}$$

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{(m + 4m_2)}{(m + 4m_1)}}$$

$$\frac{dw}{dk} = \frac{dk}{dk} \cdot v + k \cdot \frac{dv}{dk}$$

$$v = f(\lambda) \Rightarrow \frac{dv}{d\lambda}$$

v_g - групна брзина

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

Вјежбе.

1. Нека тачка осцилује по закону $x = x_0 \sin(wt + \varphi_0)$ $x_0 = 7\,mm$, $w = 3/4\ rad/s$, $\varphi_0 = 30°$. За које ће најкраће вријеме тачка да буде највише удаљена од равн. положаја?

$x = x_0 \sin(wt + \varphi_0)$,

$\sin(wt + \varphi_0) = 1 \qquad x = x_0$

$\sin 90° = 1 \qquad wt + \varphi_0 = 90° \qquad wt = 90° - \varphi_0 = 60°$

$1\,rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)° \qquad 1° = \frac{\pi}{180}\,rad$

$wt = \left(60 \cdot \frac{\pi}{180°}\right) rad = 1{,}05\,rad$

2. Једначина осцилаторног кретања неког тијела има облик $x = x_0 \sin(wt + \varphi_0)$ гдје је $x_0 = 4\,m$, $w = 0{,}52\ rad/s$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}\,rad$. Одредити: а) период осциловања б) највећу брзину в) највеће убрзање при кретању

а) $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{0{,}52\ rad/s} = 12{,}08\,s$

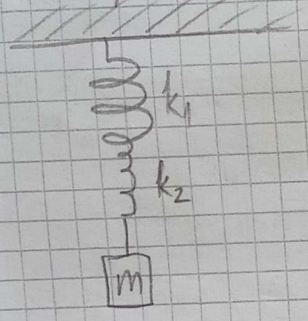
б) $v_{max} = ? \qquad v = \frac{dx}{dt} = x_0 w \cos(wt + \varphi_0)$

$$v_{max} = x_0 \omega = 2,08$$

в) $a = \frac{dv}{dt} = \ldots$ (задатак)

Нађи

3. Период осциловања тијела масе $m = 60\,g$ објешено о двије опруге које су спојене једна за другу. Константа еластичности једне опруге је $k = 0,1\ \frac{N}{cm}$, $k_2 = 0,2\ \frac{N}{cm}$. Масе опруга према маси тијела занемарити.



$$F = -kx$$

$$ma = mg - kx \qquad (a = 0)$$

$$mg = kx$$

$$mg = k_1 x_1 \qquad mg = k_2 x_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_1 = \frac{mg}{k_1} \qquad x_2 = \frac{mg}{k_2}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 \cdot k_2} mg \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 \cdot k_2} \rightarrow \frac{1}{k}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} = 0,6\,s$$

4. Танак хомоген штап $\overline{БА}$ дужине $l = 3,27\,m$ објешен је крајем Б о осовину око које се може обртати у вертикалној равни, тако да се налази у положају стабилне равнотеже. Одредити:

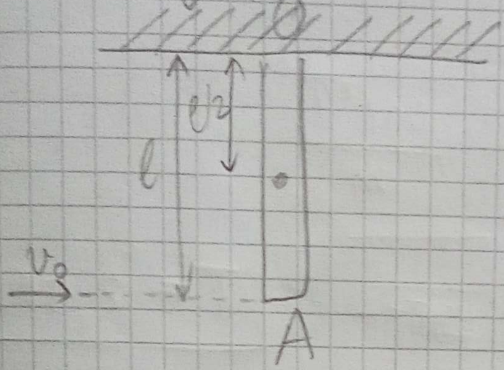
(статичан)

а) v_0 коју треба дати доњем крају штапа A да би он дошао у хоризонтални положај а) Период осциловања оваквог система за врло мале амплитуде, моменти инерције штапа масе m и дужине l у односу на осу која пролази нормално кроз његов крај.

$\overline{OA}$

$l = 3,27\,m$

$I = \frac{ml^2}{3}$



$$\frac{I\omega_0^2}{2} = mg\frac{l}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{l} \quad \left(\frac{v}{R}\right)$$

аналогија

$$\frac{m\cancel{l^2}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2}{\cancel{l^2}} = mg\frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{m}v_0^2}{6} = \cancel{m}g\frac{l}{2}$$

* овде имамо ротациону компоненту кин. енергије

$$v_0^2 = 3gl \Rightarrow v_0 = \sqrt{3gl} = \boxed{9,8\,\frac{m}{s}}$$

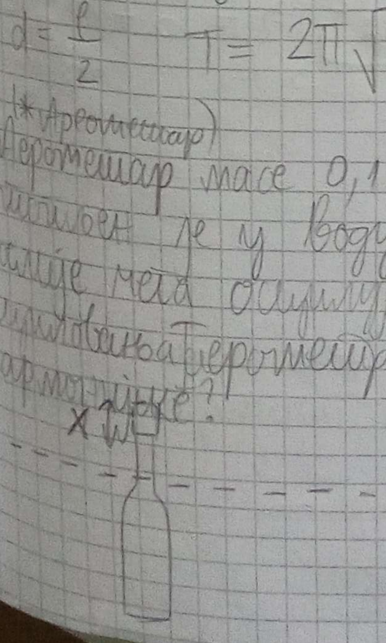
б) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ → или r → период осциловања физичког клатна

d у формули је као у Штајнеровој теореми

$d = \frac{l}{2}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{3}\cdot\frac{2}{mgl}} = 2,96\,s$

(* Ареометар)

5. Ареометар масе 0,1 kg и полупречника цеви $r = 4,5\,mm$ постављен је у воду. Ареометар се гурне наниже, после чега осцилује слободно. Колики је период осциловања ареометра ако су његове осцилације хармонијске?



x - померај

* у овом задатку је хармонијско осциловање

$$\Delta V = S\cdot x = r^2\pi\cdot x$$

$$F_p = \rho V g = \underbrace{\rho g r^2\pi}_{\text{константе}} x = kx$$

$k = \rho g r^2 \pi$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$ma + kx = 0 \;/ : m$

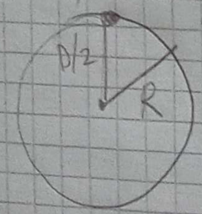
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho g r^2 \pi}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{\rho g r^2 \pi}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g \pi r^2}} \qquad \boxed{T = 2,51\,s}$$

6. Обруч пречника D=0,565 m окачен је о клин у зиду и изводи осцилације малих амплитуда у равни паралелној зиду. Одредити период осциловања.

$D = 0,565\,m$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

* Користимо Штајнерову теорему

$$d = \frac{D}{2}$$

$$I_0 = mR^2$$

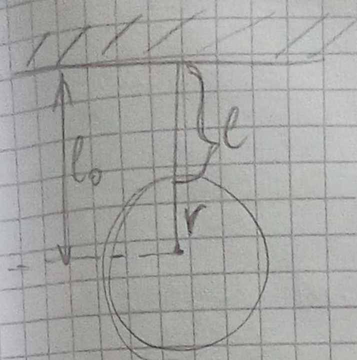
$$\boxed{I = I_0 + md^2} \Rightarrow I = I_0 + m\left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$m\left(\frac{D}{2}\right)^2 + m\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{mD^2}{2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mD^2}{2}}{mg\frac{D}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{g}} = \boxed{1,508\,s}$$

7. Куглица радијуса 5 cm обешена је о нит дужине 10 cm. Колика је грешка ако је апроксимирано тачкастим клатном дужине 15 cm? (математичким)

Тежиште = центар масе тијела



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} = \boxed{0{,}777\ s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad \underline{d = l_0}$$

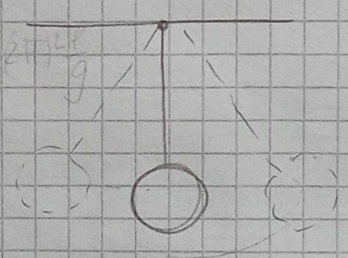
$$I = \frac{2}{5}mr^2 + ml_0^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mr^2 + ml_0^2}{mgl_0}} = 0{,}794\ s$$

$$\delta T = \frac{\Delta T}{T} = \frac{T - T_0}{T_0}\cdot 100\% = 2{,}15\%$$

8. Израчунати потребну дужину математичког клатна тако да оно приликом осциловања пролази кроз равнотежни положај у временским интервалима од 1 s.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \boxed{t = 1\ s}$$



$T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}$

За 2 s тијело направи пуну осцилацију

$T = 2\ s$

$$\boxed{l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 0{,}994\ \frac{m}{s}}$$

Вјежбе – таласи

*Кроз чврста тијела таласи се простиру најбрже

1. На једном крају моста дужине $s = 400\,m$ удари се чекићем. На другом крају моста звук кроз гвожђе мије се за $\Delta t = 1{,}1\,s$ брже него кроз ваздух. Одредити модул еластичности гвожђа од ког је начињен мост. Густина гвожђа износи $\rho = 7{,}89\,g/cm^3$, а брзина звука кроз ваздух $v_v = 340\,\frac{m}{s}$.

$s = 400\,m$

$\Delta t = 1{,}1\,s$

$\rho = 7{,}8\,g/cm^3 = 7800\,kg/m^3$

$v_v = 340\,\frac{m}{s}$

$v_g = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ → Јунгов модел еластичности (за само чврста тијела)

$E = v_g^2 \rho \qquad v_g = ?$

$v_g = \frac{s}{t_g}, \quad t_g = ?$

$\Delta t = t_v - t_g$

$t_v = \frac{s}{v_v} = 1{,}18\,s$

$t_g = t_v - \Delta t = 0{,}08\,s$

$v_g = \frac{400\,m}{0{,}08\,s} = 5000\,\frac{m}{s}$

$E = \left(5000\,\frac{m}{s}\right)^2 \cdot 7800\,\frac{kg}{m^3} =$

$= 1{,}95 \cdot 10^{11}\,\frac{N}{m^2}$

2. На растојању $s = 500\,m$ пуцањ се чује $\tau = 1{,}47\,s$ послије бљеска експлозије. Одредити притисак ваздуха ако је густина ваздуха на том притиску $\rho = 1{,}22 \cdot 10^{-3}\,g/cm^3$, а за ваздух је $\chi = 1{,}40$. Колика је температура ваздуха ако се зна да је на $t_0 = 0°C$ брзина простирања звука $c_0(t_0 = 0°C) = 331\,\frac{m}{s}$?

γ или k (каппа грч.), $pV^{\gamma} = const.$

γ – адијабатска константа

$c=\sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}}$ $\quad c=\frac{s}{\tau}=\frac{500\,m}{1,47\,s}=340,14\,\frac{m}{s}$

$p=\frac{c^2\rho}{\gamma}=100\,812,12\,\frac{kg}{m\cdot s^2}$ ~ Pa

$\frac{N}{m^2}=\frac{kg\,\frac{m}{s^2}}{m^2}=\frac{kg}{ms^2}$

$p\approx 10^5\,Pa$

$pV=nRT$ – једначина гасног стања

$pV=\frac{m}{M}RT \Rightarrow p=\frac{m}{V}\frac{RT}{M}$, $\frac{m}{V}\to\rho$

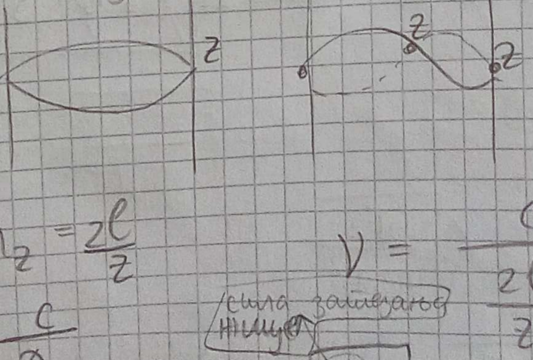
$c=\sqrt{\frac{\gamma \cancel{\rho} RT}{\cancel{\rho} M}} \Rightarrow c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

$c_0=\sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$ ÷

$\frac{c}{c_0}=\sqrt{\frac{T}{T_0}} \Rightarrow \frac{c^2}{c_0^2}=\frac{T}{T_0}$

$T=T_0\frac{c^2}{c_0^2}$ $\boxed{T\approx 288\,K}$

3. Жица дужине $l=50\,cm$ даје основни тон фрекв. $\nu_1=240\,Hz$. Колика је минимална фреквенција тона када се ова жица при непромењеној сили затезања скрати за $\Delta l=20\,cm$



$l=50\,cm$

$\nu_1=240\,Hz$

$\Delta l=20\,cm$

$l=z\cdot\frac{\lambda_z}{2} \Rightarrow \lambda_z=\frac{2l}{z}$

$\lambda=\frac{c}{\nu}$; $\nu=\frac{c}{\lambda}$

$\boxed{z=1}$ → подразумевамо основни тон

$\nu=\frac{c}{\frac{2l}{z}}=\frac{zc}{2l}$

сила затезања жице

$c=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$, $\mu=\frac{m}{l}$ (маса по јединици дужине, подужна маса)

$\nu=\frac{z}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ // у општем облику

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \\ \nu_2 &= \frac{1}{2(l-\Delta l)}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{aligned}\right\} : \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\frac{1}{l}}{\frac{1}{l-\Delta l}} = \frac{l-\Delta l}{l} \Rightarrow \nu_2 =$$

4. Танка метална жица затегнута је силом F_1 између 2 непомична ослонца. Ову жицу треба заменити са другом од истог материјала али троструког пречника. Колико пута треба да се промени сила затезања F_2 да не би дошло до промене фреквенције?

$d_2 = 3d_1$

$l = z\frac{\lambda_z}{2} \Rightarrow \lambda_z = \frac{2l}{z}$ (услов за формирање стојећих таласа)

$\lambda_z = \frac{c}{\nu}$

$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{l}$

$\nu = \frac{c}{\lambda_z} = \frac{zc}{2l} \Rightarrow \nu_1 = \nu_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2$

$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot l \Rightarrow \mu = \frac{\rho S l}{l} \Rightarrow \boxed{\mu = \rho \cdot S}$

$S = r^2\pi = \left(\frac{d}{2}\right)^2\pi = \frac{d^2}{4}\pi$

$\boxed{\mu = \rho\pi\frac{d^2}{4}}$ $\quad c_1 = c_2 \quad$ $c = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}}$

$c_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\rho\pi d_1^2}} \quad c_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\rho\pi d_2^2}}$

$\sqrt{\frac{4F_1}{\rho\pi d_1^2}} = \sqrt{\frac{4F_2}{\rho\pi 9 d_1^2}} \Rightarrow F_1 = \frac{F_2}{9} \Rightarrow \boxed{F_2 = 9F_1}$

5. Возило које се креће према препреци производи звук фреквенције $\nu = 1000\ Hz$, а региструје одбијени звук фреквенције $\nu'' = 1100\ Hz$. Колика је брзина кретања возила ако је брзина звука у ваздуху $c = 340\ \frac{m}{s}$? Колика би била регистрована фреквенција звука ν_2 ако би се возило удаљавало од препреке? Правац кретања у оба случаја је нормалан на препреку. *Доплеров ефекат

$\nu = 1000\ Hz$

$\nu'' = 1100\ Hz$

$c = 340\ \frac{m}{s}$

v_p – брзина пријемника

v_i – брзина извора

ν – фрекв. извора

$$\boxed{\nu' = \frac{c \pm v_p}{c \mp v_i}\,\nu}$$

1° (посматрач мирује) $v_p = 0$

извор се приближава посматрачу

$$\nu' = \nu \frac{c}{c - v}$$ → извор звука се приближава посматрачу

2° $v_i = 0$

$$\nu'' = \nu' \frac{c + v}{c}$$ → посматрач се приближава звучном извору

$$\nu'' = \nu \frac{c}{c - v} \cdot \frac{c + v}{c} = \nu \frac{c + v}{c - v}$$

$$\nu'' c - \nu'' v = \nu c + \nu v \Rightarrow v(\nu + \nu'') = c(\nu'' - \nu)$$

$$v = \frac{\nu'' - \nu}{\nu'' + \nu} \cdot c = 16{,}2\ \frac{m}{s}$$

3° $\nu_1 = \nu \dfrac{c}{c+v}$ → извор се удаљава од посматрача

$\nu_2 = \nu_1 \dfrac{c-v}{c}$

$\nu_2 = \dfrac{c-v}{c+v}$ $\boxed{\nu_2 = 909\ Hz}$

6. Звучни талас фреквенције $\nu = 500\ Hz$ таласне дужине $\lambda = 0,7\ m$, и амплитуде $y_0 = 0,25\ mm$ простире се у ваздуху. Одредити брзину простирања звука и максималну брзину осциловања дјелића ваздуха.

$\nu = 500\ Hz$

$\lambda = 0,7\ m$

$y_0 = 0,25\ mm$

$\boxed{c = \lambda \cdot \nu = 350 \frac{m}{s}}$

$y = y_0 \sin\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ $\nu = \dfrac{1}{T}$

$y = y_0 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{Tc}\right)$ $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = c \cdot T$

$\boxed{y = y_0 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)}$

$v = \dfrac{dy}{dt} = y_0 \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right) \cdot 2\pi\left(\dfrac{1}{T}\right)$

$v = y_0 \dfrac{2\pi}{T} \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

$v = y_0 2\pi\nu \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$ 1

$v_{max} \Rightarrow \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right) = 1 \Rightarrow v_{max} = y_0 2\pi\nu$

$\boxed{v_{max} = 0,787 \frac{m}{s}}$

запреминска маса = густина

7. Дубина мора мјери се помоћу еха. Коефицијент стишљивости воде је $k = 4,6 \cdot 10^{-10} \frac{m^2}{N}$, а запреминска маса морске воде је $\rho = 1,03 \cdot 10^3\ kg/m^3$. Колико износи дубина мора h ако је вријеме протекло од

тренутка стварања звука до њеног регистровања $\Delta t = 2,5\ s$?

$$c = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$$ → модуо стишљивости

$$k = \frac{1}{E_v} \qquad c = \sqrt{\frac{1}{k\rho}}$$

$$h = c \cdot \frac{\Delta t}{2} = \sqrt{\frac{1}{k\rho}}\,\frac{\Delta t}{2} \approx \boxed{1816\ m}$$

8. Два воза се крећу један у сусрет другом брзинама $v_1 = 20\ \frac{m}{s}$ и $v_2 = 15\ \frac{m}{s}$. Први од њих производи звук фреквенције $\nu = 600\ Hz$. Одредити фреквенцију звука којег путник у другом возу чује пре и после сусрета возова. Брзина звука у ваздуху је $340\ \frac{m}{s}$.

$v_1 = 20\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 15\ \frac{m}{s}$

$\nu = 600\ Hz$

$c = 340\ \frac{m}{s}$

$\boxed{\nu' = 665,625\ Hz}$ → приближавају се

$\boxed{\nu' = 541,7\ Hz}$ → удаљавају се

T_0 / R

R – универзална константа → $8,312 \frac{J}{molK}$

23.04.2024.

Вјежбе
Хидродинамика

ЈЕДНАЧИНА КОНТИНУИТЕТА:

$S \cdot v = const.$

БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА:

$$\underbrace{\frac{\rho v^2}{2}}_{\text{динамички притисак (притисак услијед кретања)}} + \underbrace{\rho g h}_{\text{висински притисак}} + \underbrace{p}_{\text{хидростатички притисак}} = const.$$

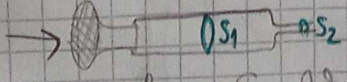
(3 вриједности притиска)

хидростатички притисак (притисак услијед мировања – ХИДРОСТАТИКА)

1. Површина попречног пресјека шприце је $S_1 = 1,2\ cm^2$, а површина попр. пресјека њеног отвора је $S_2 = 1\ mm^2$. За које вријеме ће вода из шприце истећи ако на клип дјелује сила $F = 5N$ и при томе га помјери за $h = 4\ cm$? Шприца је у хориз. положају, стишљивости воде занемарити.

$S_1 = 1,2\ cm^2$
$S_2 = 1\ mm^2$
$F = 5\ N$
$h = 4\ cm$
$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$

$t = ?$



$S_1 \cdot h = S_2 \cdot v_2 \cdot t$

$t = \frac{S_1 h}{S_2 v_2}$

v_2 – брзина истицања

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$S_1 v_1 = S_2 v_2$

v_1 – брзина истицања, и брзина опадања нивоа воде

$p_1 = p_a + \frac{F}{S_1}$

$p_2 = p_a$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \cancel{p_a} + \frac{F}{S_1} = \cancel{p_a} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \frac{F}{S_1} = \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$v_1 = \frac{S_2 v_2}{S_1}$$

$$\frac{F}{S_1} + \frac{1}{2}\rho \frac{S_2^2 v_2^2}{S_1^2} = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\frac{F}{S_1} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho \frac{S_2^2 v_2^2}{S_1^2}$$

$$\dots \qquad v_2^2 = \frac{2FS_1}{\rho(S_1^2 - \cancel{S_2^2}^{*})}$$

$^*S_2$ занемарујемо јер $S_1 >> S_2$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1}} \qquad t = \frac{S_1 h}{S_2} \cdot \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1}} \qquad \boxed{t = 0{,}53\,s}$$

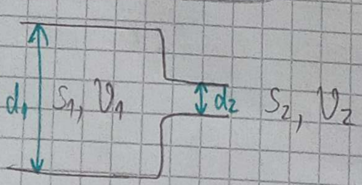
2. Кроз хоризонталну цијев пречника $d_1 = 4\,cm$ која је на једном крају сужена тако да јој пречник износи $d_2 = 2\,cm$ протиче вода. Одредити:
а) брзину протицања и притисак воде у проширеном дијелу цијеви ако је брзина протиц. воде кроз сужени дио цијеви $v_2 = 10\,\frac{m}{s}$, а притисак $p_2 = 10^5\,Pa$.

$d_1 = 4\,cm$
$d_2 = 2\,cm$
$v_2 = 10\,\frac{m}{s}$
$p_2 = 10^5\,Pa$
$\rho_0 = 1000\,\frac{kg}{m^3}$

$$\frac{d_1^2}{\cancel{4}}\cancel{\pi} v_1 = \frac{d_2^2}{\cancel{4}}\cancel{\pi} v_2$$

$$d_1^2 v_1 = d_2^2 v_2$$

$$\boxed{v_1 = \frac{d_2^2 v_2}{d_1^2} = 5\,\frac{m}{s}}$$



$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2$$

$S_1 v_1 = S_2 v_2$

$v_1 = ?,\ p_1 = ?$

$S = r^2\pi \Rightarrow S_1 = \frac{d_1^2}{4}\pi,\ S_2 = \frac{d_2^2}{4}\pi$

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\boxed{p_1 = 137\ 500\ Pa}$$

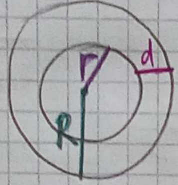
3. Куглу од гвожђа густине $\rho = 7{,}4 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ и полупречника $r = 10\,cm$ треба обложити плутом густине $\rho_2 = 0{,}2 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ тако да кугла буде до пола урођена у воду. Одредити дебљину слоја плуте

$\rho_1 = 7{,}4 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$

$r = 10\,cm$

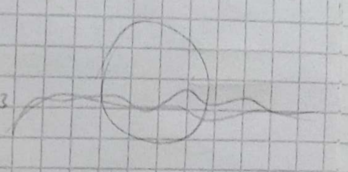
$\rho_2 = 0{,}2 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$

$d = ?$ $\qquad \rho_v = 1000 \frac{kg}{m^3} =$



$R = r + d$

$d = R - r$



$F_p = mg = \rho_v V g$ – сила потиска

$$F_p = \rho_v V g = \rho_v \cdot \frac{4}{3}(r+d)^3 \pi \cdot g \Rightarrow F_p = Q_1 + Q_2$$

$$\cancel{\frac{4}{3}\pi} \rho_v R^3 \cancel{g} = \cancel{\frac{4}{3}\pi} r^3 \rho_1 \cancel{g} + \cancel{\frac{4}{3}\pi} d^3 \rho_2 \cancel{g}$$

$$\rho_v R^3 = r^3 \rho_1 + (R^3 - r^3)\rho_2$$

$$\rho_v R^3 = r^3 \rho_1 + R^3 \rho_2 - r^3 \rho_2$$

$$\rho_v R^3 - \rho_2 R^3 = r^3(\rho_1 - \rho_2)$$

$$R^3 = \frac{r^3(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_v - \rho_2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{r^3(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_v - \rho_2}} \Rightarrow R = r \cdot \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_v - \rho_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

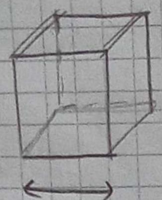
$$r + d = r \cdot \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_v - \rho_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$d = r\left[\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_v - \rho_2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \qquad d = 10{,}8\,m$$

4. Посуда у облику коцке ивице $a = 1m$ је евакуисана.
а) Којом силом атмосф. притисак ($p_a = 760\,mmHg$) дјелује на једну страну коцке?
б) Ако се коцка напуни водом, којом силом вода дјелује на 1 страну коцке?

а) $a = 1\ m$

$p_a = 760\ mmHg$



a

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S$$

?

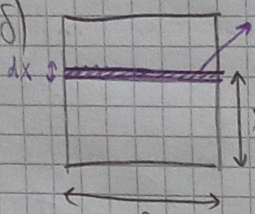
$$p_a = \rho_{Hg} \cdot g h$$

$$F = \rho_{Hg} \cdot g \cdot \underbrace{h}_{=a} \cdot S = \rho_{Hg} \cdot g \cdot a \cdot a^2 \quad 1$$

$$F = \rho_{Hg} \cdot g = 13600\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} = \boxed{101\ kN}$$

$$\rho_{Hg} = 13600\ \frac{kg}{m^3}$$

б)



$F = ?$

$$dF = p_0 \cdot dS \qquad dS = dx \cdot a \qquad \rho_0 \text{ - густина воде}$$

$$dF = \rho_0 g x \cdot a\, dx \,/ \int$$

$$F = \rho_0 g a \cdot \int_0^a x\, dx = \rho_0 g \cdot a \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \rho_0 g \cdot a \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$F = \rho_0 g \cdot \frac{a^3}{2} \qquad \boxed{F = 4{,}9\ kN}$$

5. (ИСПИТНИ ЗАДАТАК) На сеоском домаћинству урађен је пластични суд који је спојен на олуке крова тако да скупља кишницу. Базен има облик цилиндра висине $h = 1{,}2\ m$ и пречника $D = 1{,}5\ m$. На дну базена се налази отвор на који се може спојити пластично цријево $d = 5\ cm$. Израчунати:

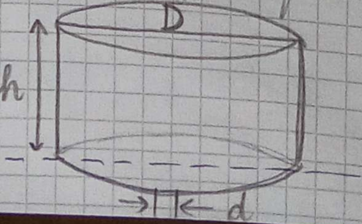
а) брзину опадања нивоа воде у базену од нивоа напуњености базена, тј. израчунати зависност $v = v(h)$? Сматрати кишницу идеалним флуидом као и да је кретање флуида стационарно.

$h = 1{,}2\ m$

$D = 1{,}5\ m$

$d = 5\ cm = 5 \cdot 10^{-2}\ m$

$v_1 = v_1(h) = ?$



$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad p_1 = p_2 = p_a$$

1 - базен
2 - цријево
v_1 - брзина нивоа опадања воде у базену
v_2 - брзина истицања воде из цријева

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 \cancel{+ p_1} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \cancel{p_2}$$

$h_1 = h, \quad h_2 = 0$ } постављањем референтног нивоа

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g h_2}^{\,0}$$

$$S_1 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi, \quad S_2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$$

$$D^2 v_1 = d^2 v_2 \Rightarrow \underline{v_2 = \frac{D^2 v_1}{d^2}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho} v_1^2 + \cancel{\rho} g h = \frac{1}{2}\cancel{\rho} \cdot \frac{D^4 v_1^2}{d^4}$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + g h = \frac{1}{2}\frac{D^4 v_1^2}{d^4}$$

$$gh = \frac{1}{2}\frac{D^4 v_1^2}{d^4} - \frac{1}{2} v_1^2$$

$$gh = \frac{1}{2} v_1^2 \left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right) \Big/ \cdot 2$$

$$2gh = v_1^2\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$$

$$v_1^2 = \frac{2gh}{\frac{D^4}{d^4} - 1} = \frac{2gh}{\frac{D^4 - d^4}{d^4}} = \frac{2ghd^4}{D^4 - d^4}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{d^4\, 2gh}{D^4 - d^4}} = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - \cancel{d^4}^{\,*}}}$$

* d^4 занемарујемо јер $d^4 \ll D^4$

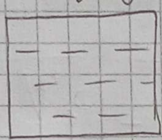
$$v_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{D^2} = \boxed{0{,}539 \text{ cm/s}}$$

Вјежбе - Термодинамика

30.04.2024

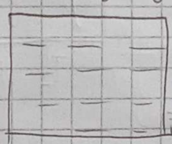
1. У посуди запремине 30 l налази се идеалан гас на темп. 0°C. Када је дио гаса пуштен, притисак је опао за $\Delta p = 79$ kPa. Наћи масу испуштеног гаса ако је густина при нормалним условима $\rho_0 = 1,3\ \frac{g}{l}$, $T_0 = 273$ K и $p_0 = 101\ 325$ Pa.

$1°$ случај



V, p

$2°$ случај



V, $(p-\Delta p)$

$V = 30\ dm^3$

$t = 0°C$

$\Delta p = 79$ kPa

$\rho_0 = 1,3\ \frac{g}{l}$

$T_0 = 273$ K

$p_0 = 101\ 325$ Pa

$pV = nRT$

$1°\ pV = \frac{m}{M}RT$

$$2°\ (p-\Delta p)\cdot V = \frac{m - \Delta m}{M}RT$$

промјена масе

$\boxed{\Delta m = ?}$

$$\cancel{pV} - \Delta pV = \cancel{\frac{m}{M}RT} - \frac{\Delta m}{M}RT$$

$$\Delta pV = \frac{\Delta m}{M}RT \Rightarrow \Delta m = \frac{MV\Delta p}{RT}$$

$\boxed{M = ?}$

$$pV = \frac{m}{M}RT \ /:V$$

$$p = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} \Rightarrow p = \rho\frac{RT}{M}$$

$\boxed{T = T_0}$

$$p_0 = \rho_0\frac{RT_0}{M}$$

$$M = \frac{\rho_0 RT_0}{p_0}$$

$$\Delta m = \frac{\rho_0\frac{\cancel{RT_0}}{p_0}\cdot V\cdot\Delta p}{\cancel{RT}} \Rightarrow \Delta m = \frac{\rho_0}{p_0}\cdot V\cdot\Delta p = 30,4\ g$$

$$\Delta m = \frac{\rho_0}{p_0}\cdot V\cdot\Delta p = [redacted]$$

$$= \frac{1,3\ \frac{g}{\cancel{l}}}{101\ 325\ \cancel{Pa}}\cdot 30\ \cancel{l}\cdot 79\ 000\ \cancel{Pa} =$$

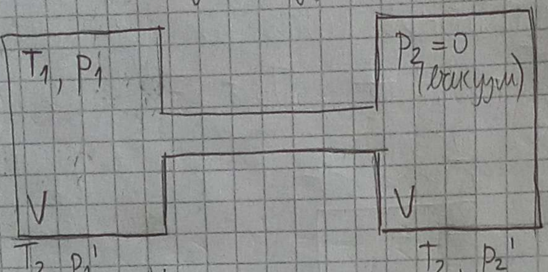
$= 30,40\ g$

вакуум $\Leftrightarrow p = 0$

може бити и ≥

2. Двије једнаке посуде спојене су помоћу цијеви са вентилом кроз који прелази гас из једне у другу при разлици од $\Delta p > 0,11$ MPa. На почетку је у једној посуди био идеалан гас на температури $t_1 = 27°C$ и под притиском

$p_1 = 101{,}3$ kPa, а у другој је владао вакуум. Затим су обе посуде загрејане до температуре $t_2 = 107\,^\circ C$. Колики је притисак у посуди у којој је био вакуум?



$P_2' = ?$

$pV = nRT \qquad n = \frac{pV}{RT}$

1° $n_1 = \frac{p_1 V}{RT_1}$, $n_2 = 0$ (јер је $p_2 = 0$)

2° $n_1' = \frac{p_1' V}{RT_2}$, $n_2' = \frac{p_2' V}{RT_2}$

$n_1 + n_2 = n_1' + n_2'$

$n_1 = \frac{p_1' V}{RT_2} + \frac{p_2' V}{RT_2} \Rightarrow \frac{p_1 \cancel{V}}{\cancel{R}T_1} = \frac{p_1' \cancel{V}}{\cancel{R}T_2} + \frac{p_2' \cancel{V}}{\cancel{R}T_2} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_1'}{T_2} + \frac{p_2'}{T_2}$

$\Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_1' + p_2'}{T_2}$

$\frac{p_1'}{T_2} = \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2'}{T_2} \; / \cdot T_2 \qquad p_1' = \frac{p_1}{T_1} T_2 - p_2'$

$p_1' = p_2' + \Delta p$

$p_2' + \Delta p = \frac{T_2}{T_1} p_1 - p_2'$

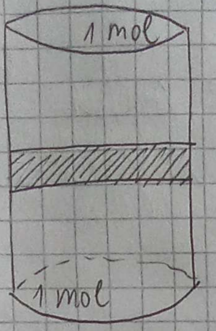
$2p_2' = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \Delta p$

$p_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{T_2}{T_1} p_1 - \Delta p\right)$

$p_2' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{107\,^\circ\cancel{C}}{27\,^\circ\cancel{C}} \cdot 101\,300 \text{ Pa} - 110\,000 \text{ Pa}\right)$

$\boxed{p_2' \approx 145\,724 \text{ Pa}}$

3. У вертикалном цилиндру затвореном са оба краја налази се масивни клип у чије се обе стране налази по 1 mol ваздуха. У равнотежном стању на $T = 300$ K запремина горњег цилиндра је 4 пута већа од запремине доњег цилиндра. На којој температури ће однос њих запремина бити једнак 3?

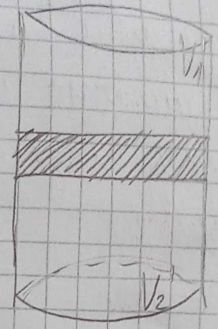


$T = 300\,K$

$V_1 = 4V_2$

$V_1 = \eta V_2$

$\boxed{\eta = 4}$



$p_1 V_1 = RT$

$p_2 V_2 = \eta RT$

$p_1 V_1 = p_2 V_2$

$p_1 \eta \cancel{V_2} = p_2 \cancel{V_2}$

$\boxed{p_2 = \eta p_1}$

$\boxed{F = p \cdot S}$

$\boxed{\eta' = 3}$ $\quad V_1' = \eta V_2' \quad T' = ?$

$p_1' V_1' = RT'$

$p_2' V_2' = RT'$

$p_1' V_1' = p_2' V_2'$

$p_1 \cdot \eta \cancel{V_2'} = p_2' \cancel{V_2'}$

$\boxed{p_2' = \eta' p_1'}$

$450\,K \cdot \frac{1{,}25}{}$

$p_1 S + mg = p_2 S \,/ : S$

$p_1 + \frac{mg}{S} = p_2 \quad (1)$

$p_1' S + mg = p_2' S \,/ : S$

$p_1' + \frac{mg}{S} = p_2' \quad (2)$

$(1)-(2): \quad p_1 - p_1' = p_2 - p_2'$

$p_1 - p_1' = \eta p_1 - \eta' p_1'$

$p_1 - \eta p_1 = p_1' - \eta' p_1'$

$p_1 (1-\eta) = p_1' (1-\eta')$

$\boxed{p_1' = \frac{p_1 (1-\eta)}{1-\eta'}}$

$V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$

$V_1 + \frac{V_1}{\eta} = V_1' + \frac{V_1'}{\eta'}$

$V_1 \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) = V_1' \left(1 + \frac{1}{\eta'}\right)$

$\boxed{V_1' = \frac{V_1 \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)}{1 + \frac{1}{\eta'}}}$

$p_1' V_1' = RT'$

$\frac{p_1 (1-\eta)}{1-\eta'} \cdot V_1 \cdot \frac{1 + \frac{1}{\eta}}{1 + \frac{1}{\eta'}} = RT'$

$T' = \underbrace{\frac{p_1 V_1}{R}}_{T} \cdot \left(\frac{1-\eta}{1-\eta'}\right) \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{\eta}}{1 + \frac{1}{\eta'}}\right)$

$T' = T \cdot \left(\frac{1-\eta}{1-\eta'}\right) \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{\eta}}{1 + \frac{1}{\eta'}}\right) \Rightarrow T \approx \boxed{422\,K}$

4. Сматрајући да температура, моларна маса и гравитационо убрзање не зависе од висине, наћи разлику висина на којима се густина ваздуха разликује:

а) e пута e – Ојлеров број

б) 1%

$$pV = nRT \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \qquad p = \underbrace{\frac{m}{V}}_{\rho} \cdot \frac{RT}{M} \qquad p = \rho \frac{RT}{M}$$

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

а) $p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}\cdot h}$ – зависности притиска од висине

$$\rho = \underbrace{\frac{M}{RT}\cdot p_0}_{\rho_0} e^{-\frac{Mg}{RT}\cdot h}$$

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT}\cdot h} \Rightarrow \rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{Mg}{RT}\cdot h}$$

$$\rho(h_1) = \rho_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h_1} \qquad \frac{\rho_1}{\rho_2} = e \qquad \frac{\cancel{\rho_0} e^{-\frac{Mg}{RT}h_1}}{\cancel{\rho_0} e^{-\frac{Mg}{R}h_2}} = e$$

$$\rho(h_2) = \rho_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h_2}$$

$$e^{-\frac{Mg}{RT}h_1} \cdot e^{\frac{Mg}{RT}h_2} = e \qquad \frac{Mg}{RT}(h_2 - h_1) = 1$$

$\boxed{\text{б) - задатак}}$

$$e^{-\frac{Mg}{RT}h_1 + \frac{Mg}{RT}h_2} = e \qquad h_2 - h_1 = \frac{RT}{Mg}$$

$$e^{\frac{Mg}{RT}(h_2 - h_1)} = e \qquad \Delta h = \frac{RT}{Mg} \approx 8\ km$$

МОЛЕКУЛАРНО-КИНЕТИЧКА ТЕОРИЈА ГАСОВА

- Највјероватнија брзина (добијамо је из ф-је расподјеле):

$$v_n = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad v_{sr} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

k_b – Болцманова константа

5. У суду запремине $V = 1\ cm^3$ концентрација молекула водоника на притиску $p = 1\ bar$ износи $n_0 = 8\cdot10^{24}/m^3$.
а) Колика је температура гаса?
б) Колика је средња квадратна брзина молекула гаса?
ц) За колико је потребно повисити притисак гаса да би се средња квадратна брзина његових молекула удвостручила?

$V = 1\ cm^3$

$p = 1\ bar = 10^5\ Pa$

$n_0 = 8\cdot10^{24}/m^3$

R - универзална гасна константа $= 8{,}31\ \frac{J}{molK}$

а) $n_0 = \frac{N}{V}$

$pV = NkT \quad p = \frac{N}{V}kT \quad p = n_0 kT \Rightarrow T = \frac{p}{n_0 k} = \frac{10^5\ Pa}{8\cdot10^{24}\frac{1}{m^3}\cdot 1{,}38\cdot10^{-23}\frac{J}{K}}$

$= \frac{10^5\cdot10^{-1}}{8\cdot1{,}38} \approx \boxed{889\ K}$

б) $\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 329\ \frac{m}{s}$

ц) $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = 2 \quad pV = nRT \Rightarrow RT = \frac{pV}{n}$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{3pV}{nM}}\ RT \quad \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = 2 \quad \boxed{\frac{p_2}{p_1} = 4}$

6. На којој температури је средња квадратна брзина молекула водоника за $\Delta v = 400\ \frac{m}{s}$ већа од његове највјероватније?

$\Delta v = 400\ \frac{m}{s}$

$v_n = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

$T = ?$

$\Delta v = \bar{v} - v_n = \sqrt{\frac{3RT}{M}} - \sqrt{\frac{2RT}{M}}$

$\Delta v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} - \sqrt{\frac{2RT}{M}}\ /^2$

$\Delta v^2 = \frac{3RT}{M} - 2\sqrt{\frac{3RT}{M}\cdot\frac{2RT}{M}} + \frac{2RT}{M}$

$\Delta v^2 = \frac{5RT}{M} - 2\sqrt{\frac{6R^2T^2}{M^2}}$

$\Delta v^2 = \frac{5RT}{M} - 2\sqrt{6}\frac{RT}{M}$

$\Delta v^2 = \frac{RT}{M}(5 - 2\sqrt{6})$

$\boxed{T = 399\ K}$

7. За t = 17°C израчунати средњу квадратну брзину и средњу кинетичку енергију транслаторног кретања молекула кисеоника.

$t = 17°C$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 475\ \frac{m}{s}$$

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\langle E_K \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot \frac{3kT}{\cancel{m}} = \frac{3}{2} kT$$

$$\langle E_K \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle E_{Ki} \rangle = \frac{3}{2} NkT$$

$$\langle E_K \rangle = \frac{i}{2} NkT$$

i → степен слободе

3 - степен слободе

минималан број параметара да опишемо неки систем

Вјежбе (Наставак термодинамике) 08.05.2024.

1. Одредити моларну масу гаса ако је за загријавање 0,5 kg тог гаса за $\Delta T = 10K$ у изобарном процесу потребно $\Delta Q = 1,48\ kJ$ топлоте више него при изохорном процесу.

$m = 0,5\ kg$

$\Delta T = 10K$

$\Delta Q = 1,48\ kJ$

$M = ?$

$$\underset{\text{изобарни}}{Q_1} = \underset{\text{изохорни}}{Q_2} + \Delta Q$$

$$Q_1 = nC_p\Delta T$$

$$Q_2 = nC_v\Delta T$$

$$nC_p\Delta T = nC_v\Delta T + \Delta Q$$

$$n\Delta T(C_p - C_v) = \Delta Q$$

$$C_p - C_v = R$$

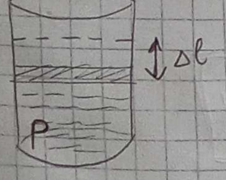
$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma \text{ (адијабатски процес/ адијабатска константа)}$$

$$n\Delta T R = \Delta Q$$

$$n = \frac{\Delta Q}{R\Delta T} \qquad n = \frac{m}{M} \Rightarrow M = \frac{R\Delta T m}{\Delta Q}$$

2. Одредити израз за рад који изврши n молова гаса при изобарном, изохорном, изотермном и адијабатском процесу.

$A = F \cdot s$ — рад није тотални диференцијал



$$\delta A = F \cdot dl = p \cdot S \cdot dl$$

$$\boxed{\delta A = p\,dV}$$

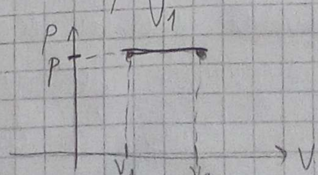
1° ИЗОХОРНИ $V = const.$

$$\delta A = 0 \Rightarrow A = 0$$

2° ИЗОБАРНИ $p = const.$

$$A = \int p\,dV = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$$

$$= p\Delta V$$



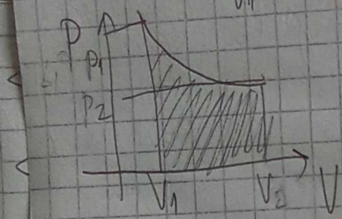
-Род је површина испод ове праве

3° ИЗОТЕРМНИ ($T = const.$)

$pV = const.$ $\quad (pV = nRT) \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$

$\delta A = p\,dV = \frac{nRT}{V} \cdot dV \;/\int$

$A = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \cdot \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = nRT(\ln V_2 - \ln V_1) = \boxed{nRT \ln\frac{V_2}{V_1}}$



4° АДИЈАБАТСКИ: $\Delta Q = 0$

$pV^{\gamma} = const.$ $\quad pV = nRT \quad p = \frac{n}{V}RT \Rightarrow \frac{nRT}{V} \cdot V^{\gamma} = const.$

$\Rightarrow p = \frac{const}{V^{\gamma}}$

$p_1 V_1^{\gamma} = pV^{\gamma} \Rightarrow p = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}}$

$\delta A = p\,dV = p_1 V_1^{\gamma} \frac{dV}{V^{\gamma}} \;/\int$

$A = p_1 V_1^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = p_1 V_1^{\gamma} \cdot \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\Big|_{V_1}^{V_2} \qquad V_1^{1-\gamma} = \frac{V_1}{V_1^{\gamma}}$

$A = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{1-\gamma}\left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right] = \frac{p_1 V_1^{\cancel{\gamma}}}{1-\gamma} V_1^{\cancel{1-\gamma}}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right]$

$= \frac{p_1 V_1}{1-\gamma}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right] = \boxed{\frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]}$

4. Идеални гас са константом адијабате γ експандиран је по закону $p = \alpha V$, где је α - const. Почетна запр. се у току ширења повећала η пута

Одредити промјену унутр. енергије, извршени рад и моларни топлотни капацитет.

$p = \alpha V, \ \alpha - const.$

$V_1 = \eta V_0$

$C_p - C_v = R$

$\frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow C_p = \gamma C_v$

$R = \gamma C_v - C_v = C_v(\gamma - 1)$

$$\boxed{C_v = \frac{R}{\gamma - 1}}$$

$\Delta V = nC_v \Delta T = nC_v(T_1 - T_0)$

$pV = nRT, \ p = \alpha V$

$\alpha V^2 = nRT \Rightarrow T = \frac{\alpha V^2}{nR}; \ T_0 = \frac{\alpha V_0^2}{nR},$

$T_1 = \frac{\alpha V_1^2}{nR} = \frac{\alpha \eta^2 V_0^2}{nR}$

$\Delta U = nC_v\left(\frac{\alpha \eta^2 V_0^2}{nR} - \frac{\alpha V_0^2}{nR}\right) = \frac{nC_v}{nR}\alpha V_0^2(\eta^2 - 1)$

$\Delta U = \frac{R}{(\gamma - 1)R}\alpha V_0^2(\eta^2 - 1)$

$$\boxed{\Delta U = \frac{\alpha V_0^2}{\gamma - 1}(\eta^2 - 1)}$$

$\delta A = p dV$

$\delta A = \alpha V dV$

$A = \int_{V_0}^{V_1} \alpha V dV = \alpha \frac{V^2}{2}\Big|_{V_0}^{V_1} = \frac{\alpha}{2}(V_1^2 - V_0^2) = \frac{\alpha}{2}\cdot(\eta^2 V_0^2 - V_0^2)$

$$\boxed{A = \frac{\alpha}{2}V_0^2(\eta^2 - 1)}$$

1. закон термодинамике

$C = \frac{\delta Q}{n dT}$ $\qquad \delta Q = dU + \delta A$

$\delta Q = nC_v dT + p dV$

$\delta Q = nC_v dT + \alpha V dV$

$pV = nRT, \ p = \alpha V$

$\alpha V^2 = nRT \qquad 2\alpha V dV = nR dT \qquad \alpha V dV = \frac{nR}{2} dT$

$\delta Q = nC_v dT + \frac{nR}{2} dT = n\left(C_v + \frac{R}{2}\right) dT \qquad \boxed{C = C_v + \frac{R}{2}}$

Двоатомни идеални гас са константом адијабате $\gamma = 1,4$ изводи кружни процес. Почетно стање гаса је p_0, V_0, T_0. Прво се притисак утростручи, $p_1 = 3p_0$, при $V = const.$ Затим се адијабатски експандира при $p \to p_0$, а затим изобарно до почетне запремине $V_2 \to V_0$.

а) Нацртати pV дијаграм

б) Одредити запр. на крају адијабатског процеса

в) Одредити темп. на крају и почетку процеса

г) Колики је укупан рад у процесу?

$\gamma = 1,4$

p_0, V_0, T_0

$p_1 = 3p_0, \; V = const.$

$p \to p_0$

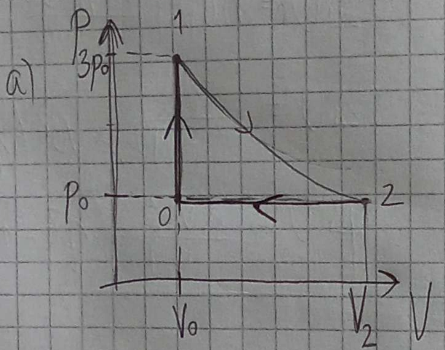
$V_2 \to V_0$

$0 \to 1 \quad p_1 = 3p_0$

$1 \to 2 \quad p_2 \to p_0$

$2 \to 0 \quad V_2 = V_0$

а)



б) $pV^\gamma = const.$

$3p_0 V_0^\gamma = p_0 V_2^\gamma$

$V_2^\gamma = 3 V_0^\gamma \; / ^{1/\gamma}$

$V_2 = 3^{1/\gamma} V_0 = \boxed{2,2\, V_0}$

в) $0 \to 1 \quad V = const.$

$\frac{p}{T} = const.$

$\frac{p_0}{T_0} = \frac{3p_0}{T_1}$

$T_1 = 3T_0$

$2 \to 0 \quad p = const.$

$\frac{V}{T} = const. \qquad \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_0}{T_0}, \; V_2 = 2,2 V_0 \qquad \frac{2,2 \cancel{V_0}}{T_2} = \frac{\cancel{V_0}}{T_0}$

$\boxed{T_2 = 2,2 T_0}$

г) $dU = 0 \;\Rightarrow Q = A$

$A = Q_{01} + Q_{12} + Q_{20}$

$A = nC_v(T_1 - T_0) + nC_p(T_0 - T_2)$

$A = nC_v 2T_0 - 1,2 nC_p T_0$

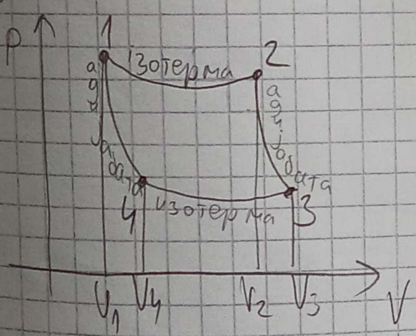
$$A = 2nC_vT_0 - 1{,}2n(R - C_v)T_0 = 2nC_vT_0 - 1{,}2nRT_0 + 1{,}2nC_vT_0 =$$

$$= 3{,}2nC_vT_0 - 1{,}2nRT_0 = nT_0(3{,}2C_v - 1{,}2R) = \frac{p_0V_0}{RT_0}(3{,}2\underbrace{C_v}_{\frac{R}{\gamma-1}} - 1{,}2R)$$

$$\boxed{A = p_0V_0\left(3{,}2\frac{1}{\gamma-1} - 1{,}2\right)}$$

6. Молекул водоника врши Карнов циклус. Одредити коефицијент корисног дејства η ако се при адијабатском ширењу 2 тачке запр. гаса повећа 2 пута б) p опадне 2 пута

$\eta = ?$



$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{Q^+ - |Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+}$$

Q^+ → доведена топлота

$1 \to 2$: $T = const.$ $Q_{12} = A_{12} = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$

$V_2 > V_1 \Rightarrow Q_{12} > 0 \to$ довођење t

$2 \to 3$: $Q_{23} = 0$

$3 \to 4$: $Q_{34} = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$

$V_4 < V_3 \Rightarrow Q_{34} < 0$

$4 \to 1$: $Q_{41} = 0$

$$\eta = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}$$

(користимо релацију $TV^{\gamma-1} = const.$)

$2 \to 3$: $T_1V_2^{\gamma-1} = T_2V_3^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_3^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$

$4 \to 1$: $T_2V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_4^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}}$

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} \qquad \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \ln\frac{V_3}{V_4} = \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{\cancel{nR}T_2 \cancel{\ln\frac{V_3}{V_4}}}{\cancel{nR}T_1 \cancel{\ln\frac{V_2}{V_1}}} \qquad \boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

a) $\dfrac{V_3}{V_2} = 2 = n$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1}}$$

б) $p_2 = n p_3$

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma}$$

$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma} \ldots$$

Оптика - вјежбе

15.05.2024.

Фотометрија

флукс: $\Phi = \frac{dQ}{dt}$ [W] → ват → објективна величина

[lm] → лумен (субјективна величина)

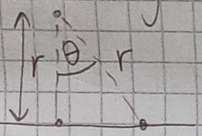
$\lambda = 555\ nm \Rightarrow 1W = 683\ lm$

$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \left[\frac{W}{sr}\right]$ $\left[\frac{lm}{sr}\right] = [cd]$ → стерадијан

$\Phi = 4\pi I$

освјетљај (освјетљеност): $E = \frac{d\Phi}{dS} \left[\frac{W}{m^2}\right] = \left[\frac{lm}{m^2}\right] = [lx]$ лукс

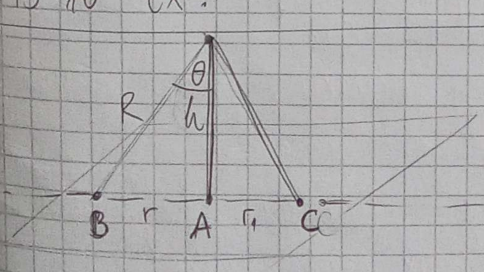
за тачкасти свјетлосни извор: $E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\theta$



1. Изотропни тачкасти свјетлосни извор налази се изнад равни стола на висини $h = 2m$. Освјетљеност стола у тачки А која се налази тачно испод свјетлосног извора је $E_A = 20 \cdot 10^4\ lx$..

а) Колика је освјетљеност E_B оних тачака стола које су од тачке А удаљене на растојању $r = 1m$?

б) У којим тачкама стола освјетљеност E_C износи $15 \cdot 10^4\ lx$?



$E_A = \frac{I}{h^2}$

$E_B = \frac{I}{R^2} \cos\theta, \ \cos\theta = \frac{h}{R}$

а) $E_A = \frac{I}{h^2} \cos\theta, \ \theta = 0°$

$E_B = \frac{I}{R^2} \cdot \frac{h}{R} = \frac{Ih}{R^3}$

$$A = 2nC_vT_0 - 1{,}2n(R - C_v)T_0 = 2nC_vT_0 - 1{,}2nRT_0 + 1{,}2nC_vT_0 =$$

$$= 3{,}2nC_vT_0 - 1{,}2nRT_0 = nT_0(3{,}2C_v - 1{,}2R) = \frac{p_0V_0}{RT_0}(3{,}2C_v - 1{,}2R)$$

$$C_v \to \frac{R}{\gamma - 1}$$

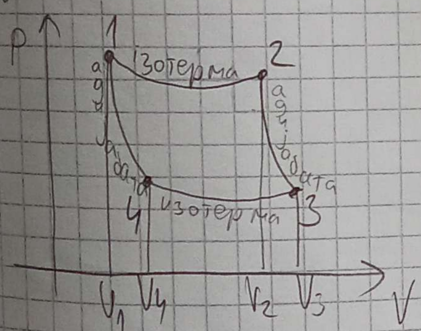
$$\boxed{A = p_0V_0\left(3{,}2\frac{1}{\gamma-1} - 1{,}2\right)}$$

6. Молекул водоника врши Карноов циклус. Одредити коефицијент корисног дејства η ако се а) при адијабатском ширењу 2 тачке запр. гаса повећа 2 пута б) p смањи 2 пута

$\eta = ?$

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{Q^+ - |Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+}$$

$Q^+ \to$ доведена топлота



$1 \to 2$: $T = const.$ $Q_{12} = A_{12} = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$

$V_2 > V_1 \Rightarrow Q_{12} > 0 \to$ довођење t

$2 \to 3$: $Q_{23} = 0$

$3 \to 4$: $Q_{34} = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$

$V_4 < V_3 \Rightarrow Q_{34} < 0$

$4 \to 1$: $Q_{41} = 0$

$$\eta = 1 - \frac{|Q^-|}{Q^+} = 1 - \frac{nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}$$

$2 \to 3$: $T_1V_2^{\gamma-1} = T_2V_3^{\gamma-1} \Longrightarrow$ (користимо релацију $TV^{\gamma-1} = const.$) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_3^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$

$4 \to 1$: $T_2V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1} \Longrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_4^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}}$

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} \qquad \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \ln\frac{V_3}{V_4} = \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{\cancel{nR}T_2 \cancel{\ln\frac{V_3}{V_4}}}{\cancel{nR}T_1 \cancel{\ln\frac{V_2}{V_1}}} \qquad \boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

a) $\frac{V_3}{V_2} = 2 = n$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1}}$$

б) $p_2 = n p_3$

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma}$$

$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma} \ldots$$

Оптика - вјежбе

15.05.2024.

Фотометрија

флукс: $\Phi = \frac{dQ}{dt}$ $[W]$ → ват → објективна величина

$[lm]$ → лумен (субјективна величина)

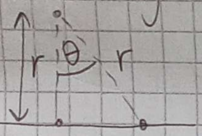
$\lambda = 555\ nm \Rightarrow 1\ W = 683\ lm$

$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}\left[\frac{W}{sr}\right]$ $\quad \left[\frac{lm}{sr}\right] = [cd]$ → стерадијан

$\Phi = 4\pi I$

освјетљај (освјетљеност): $E = \frac{d\Phi}{dS}\left[\frac{W}{m^2}\right] = \left[\frac{lm}{m^2}\right] = [lx]$ лукс

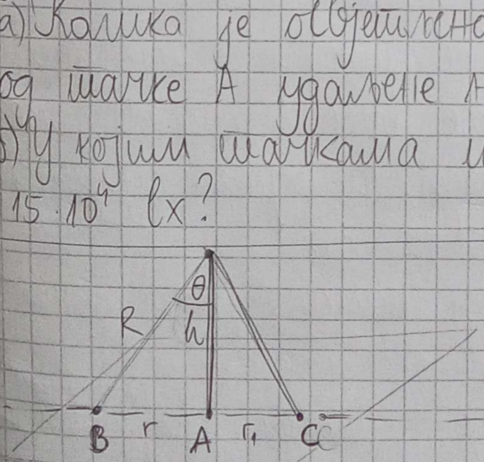
за тачкасти свјетлосни извор: $E = \frac{I}{r^2}\cdot\cos\theta$



1. Изотропни тачкасти свјетлосни извор налази се изнад равни стола на висини $h = 2m$. Освјетљеност стола у тачки A која се налази тачно испод свјетлосног извора је $E_A = 20\cdot10^4\ lx$..

а) Колика је освјетљеност E_B оних тачака стола које су од тачке A удаљене на растојању $r = 1m$?

б) У којим тачкама стола освјетљеност E_C износи $15\cdot10^4\ lx$?



$$E_A = \frac{I}{h^2}$$

$$E_B = \frac{I}{R^2}\cos\theta,\ \cos\theta = \frac{h}{R}$$

$$E_B = \frac{I}{R^2}\cdot\frac{h}{R} = \frac{Ih}{R^3}$$

а) $E_A = \frac{I}{h^2}\cos\theta,\ \theta = 0°$

$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$R^3 = (h^2 + r^2)^{3/2}$$

$$E_A h^2 = I \;/ \cdot h \Rightarrow E_A h^3 = Ih$$

$$E_B = \frac{E_A h^3}{\left(\sqrt{h^2+r^2}\right)^3} = \left(\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}\right)^3 \cdot E_A$$

$$\boxed{E_B = 14{,}23 \cdot 10^4 \ lx}$$

б) $$E_C = \frac{h^3 E_A}{\left(\sqrt{h^2+r_1^2}\right)^3}$$

$$\frac{E_C}{E_A} = \frac{h^3}{\left(\sqrt{h^2+r_1^2}\right)^3}$$

$$\left(\frac{E_C}{E_A}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{h}{\sqrt{h^2+r_1^2}} \Rightarrow \sqrt{h^2+r_1^2} = \frac{h}{\left(\frac{E_C}{E_A}\right)^{\frac{1}{3}}} \Bigg|^2$$

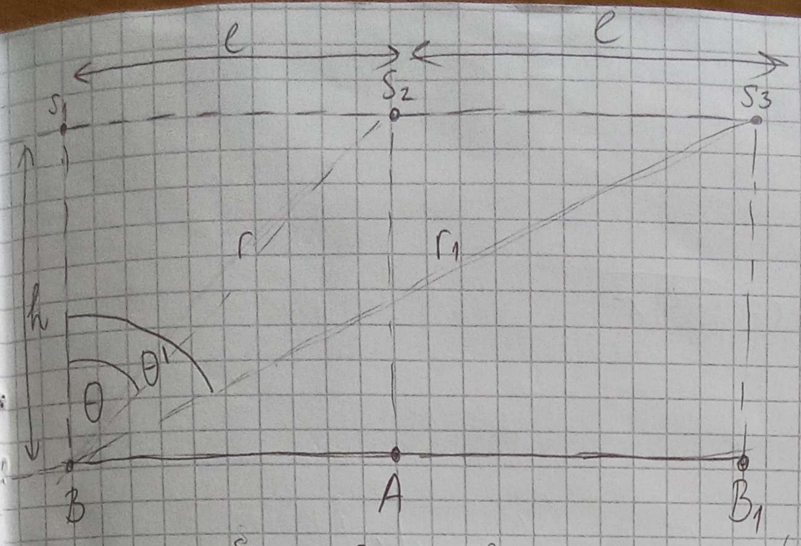
$$r_1 = h\left[\left(\frac{E_C}{E_A}\right)^{2/3} - 1\right]^{1/2}$$

$$\boxed{r_1 = 91{,}6 \ cm}$$

2. Хоризонтална плоча освијетљена је помоћу 3 идентичне сијалице јачине од по 500 cd, које висе изнад плоче дуж исте праве на висини $h = 8$ m. Растојања сусједних сијалица су једнака и износе $l = 20$ m.

а) Колика је освијетљеност плоче у тачки A која лежи вертикално испод средње сијалице?

б) Колика је освијетљеност плоче у тачки која лежи вертикално испод једне од крајњих сијалица?



a) $E_A = E_A^{S_1} + E_A^{S_2} + E_A^{S_3} = E^{S_2} + 2E^{S_1(S_3)}$

$E_A^{S_2} = \frac{I}{h^2}$

$E_A^{S_1(S_2)} = \frac{I}{r^2}\cos\theta$, $\cos\theta = \frac{h}{r} \Rightarrow E_A^{S_1(S_3)} = \frac{Ih}{r^3}$

$E_A = \frac{I}{h^2} + \frac{2Ih}{r^3}$, $r^2 = h^2 + l^2 \Rightarrow r^3 = (h^2+l^2)^{3/2}$

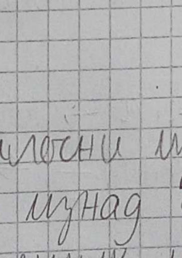
$E_A = \frac{I}{h^2} + \frac{2Ih}{(h^2+l^2)^{3/2}} \sim 17,22\, lx$

б) $E_B = E_B^{S_1} + E_B^{S_2} + E_B^{S_3}$

...

$E_B = E_{B_1}$

3. Изотропан тачкасти свјетлосни извор јачине $I = 100\,cd$ налази се на висини $h = 2m$ изнад површине стола кружног облика, чији полупречник износи $R = 1m$. Израчунати укупан свјетлосни флукс који пада на површину стола.



$E = \frac{I}{r^2}\cos\theta$

$E = \frac{d\Phi}{dS} \Rightarrow d\Phi = E\,dS$

произвољан прстен (површина) x

по којој ћемо интегралити

$$ds = 2\pi x\,dx$$

$$d\Phi = E\,ds = \frac{I}{r^2}\cos\theta\, 2\pi x\,dx$$

$$\cos\theta = \frac{h}{r} \Rightarrow r^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow r = \sqrt{h^2+x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

$$d\Phi = \frac{I}{h^2+x^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}\, 2\pi x\,dx = 2\pi I h \cdot \frac{x}{(h^2+x^2)^{3/2}}\,dx \;/\!/\int$$

$$\Phi = 2\pi I h \int_0^R \frac{x\,dx}{(h^2+x^2)^{3/2}} = \left(\begin{matrix} h^2+x^2 = t^2, & x=0 \Rightarrow t = h \\ \cancel{2}x\,dx = \cancel{2}t\,dt, & x = R \Rightarrow t = \sqrt{h^2+R^2} \end{matrix} \right)$$

$$= 2\pi I h \int_h^{\sqrt{h^2+R^2}} \frac{t\,dt}{(t^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi I h \int_h^{\sqrt{h^2+R^2}} \frac{dt}{t^2} = 2\pi I h \left(-\frac{1}{t} \Big|_h^{\sqrt{h^2+R^2}} \right)$$

$$\Phi = 2\pi I \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} \right)$$

$$\underline{\Phi = 66{,}3 \text{ lm}}$$

Интерференција свјетлости (сабирање свјетлости)

- конструктивна и деструктивна
- кохерентни таласи

путна разлика: $\delta = k\cdot\lambda \rightarrow$ појачавање

$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow$ слабљење

4. На дебелу стаклену плочу покривену врло танком опном од материјала чији је индекс преламања $n = 1{,}4$, пада паралелан сноп зрака монохроматске свјетлости таласне дужине $\lambda = 0{,}6\ \mu m$ под углом $\alpha = 60°$. Одбијена свјетлост услијед интерференције максимално је ослабљена.

Колика је дебљина опне? Индекс преламања стакла је 1,5.

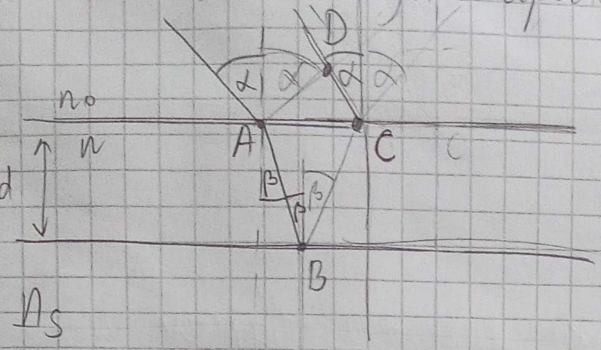
$n = 1,4$

$\lambda = 0,6\,\mu m$

$\alpha = 60^\circ$

$n_s = 1,5$

$d = ?$



$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = \delta$$ } може се користити и без доказа

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$d = \frac{2k+1}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\lambda$$

$k = 0 \Rightarrow d = 0,136\,\mu m$

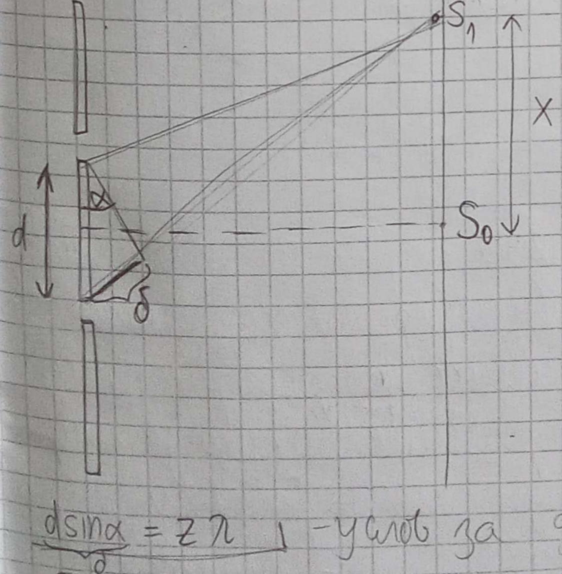
$k = 1 \Rightarrow d = 0,41\,\mu m \ldots$

Дифракција свјетлости (савијање свјетлости)

- услов да уопште дође до дифракције
- Хајгенсов принцип

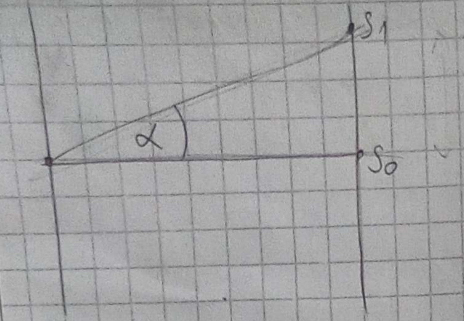
зарез на дифр. решетки = пукотина

$d = \frac{1}{100}$



$\underbrace{d\sin\alpha}_{\delta} = z\lambda$ | - услов за дифракцију

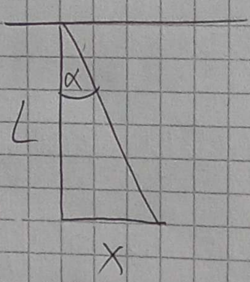
$(\delta = d\sin\alpha)$



5. Дифракциона решетка која на сваком милиметру има 75 зареза, освјетљава се монохроматском свјетлошћу таласне дужине 500 nm. При томе на екрану који се налази на растојању L од решетке се виде свијетле пруге на једнаким растојањима једна од друге. Растојање између централне и 2. свијетле пруге износи 11,25 cm. Одредити растојање L.

$\lambda = 500\ nm = 500 \cdot 10^{-6}\ m$

$d = \frac{1}{75}\ mm$



$L = ?$

$x = 11{,}25\ cm = 112{,}5\ mm$

Поновити апроксимације малих углова!

$z = 2$

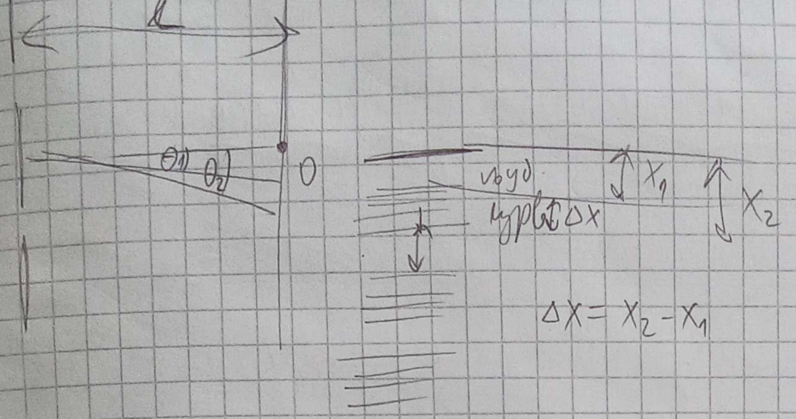
$tg\alpha = \frac{x}{L}$ $\quad \boxed{\sin\alpha \approx tg\alpha}$, за мало α

$$\frac{x}{L} = \frac{z\lambda}{d} \Rightarrow L = \frac{xd}{z\lambda} = 1{,}5\ m$$

6. Оптичка решетка која има 250 зареза по милиметру је освијетљена снопом бијеле свјетлости која пада окомито на решетку. Иза решетке је застор који се налази на удаљености 1,5 m од решетке. Колика је ширина тамне пруге на застору између спектара пруге 1. и 2. реда?

$d = \frac{1}{250}\ mm$ $\quad L = 1{,}5\ m$ $\quad \lambda_{љубичаста} = 400\ nm$

$\lambda_{црвена} = 760\ nm$



$\Delta x = x_2 - x_1$

$z_{црв.} = 1$

$z_{људ.} = 2$

$z\lambda = d\sin\theta$

за црвену: $z = 1$, $\lambda_{црв}$, $\theta = \theta_1$

$z\lambda_{cr} = d\sin\theta_1 = d\,tg\theta_1$; $tg\theta_1 = \frac{x_1}{L}$

за људ.: $z = 2$, $\lambda = \lambda_{људ}$, $\theta = \theta_2$ ...

$\Delta x = 15\ mm$

22.05.2024. Вјежбе

1. Полупречник кривине удубљеног (конкавно) огледала је $R = 0{,}4\,m$. Наћи положај предмета тако да његов лик буде стваран (реалан) и увећан 2 пута.

З могућности:

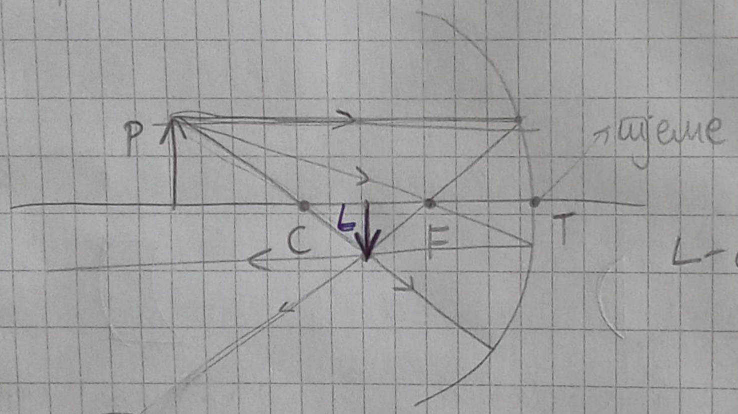
P – предмет

L – лик

(F) жижна је $\frac{1}{4}$ ~~полу~~пречника

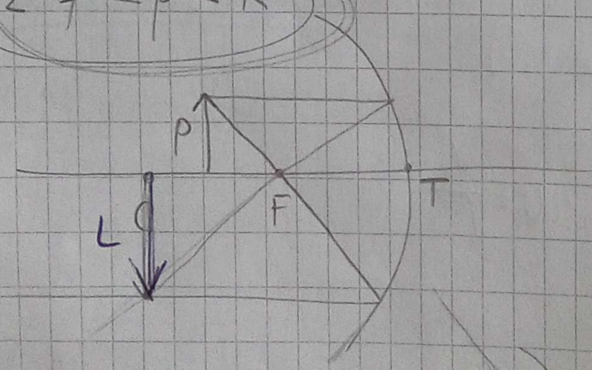
2 зрака су потребне за конструисање лика

1° $p > R$

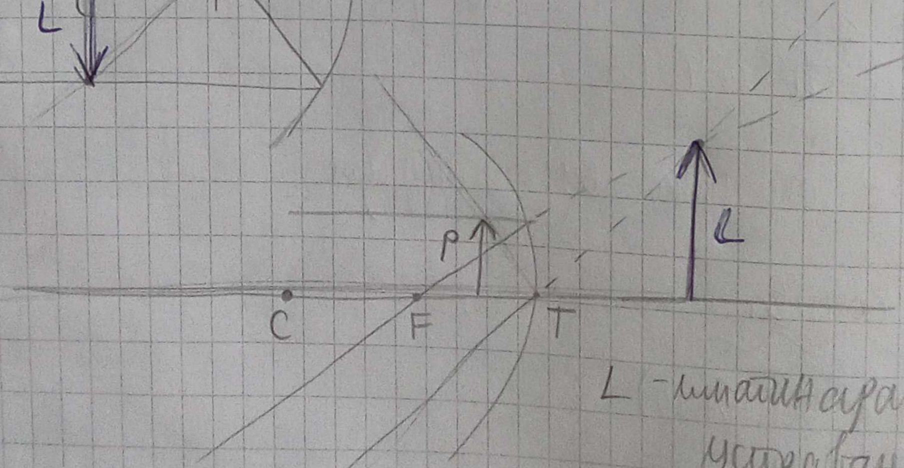


L – обрнути, реалан, умањен

2° $f < p < R$



3°



L – имагинаран, увећан, усправан

$u = 2$

$u = \frac{L}{P}$ (однос лика и предмета)

$= \frac{l}{p} = 2$

$l = 2p \;;\; f = \frac{R}{2}$

ЈЕДНАЧИНА КОНКАВНОГ ОГЛЕДАЛА:

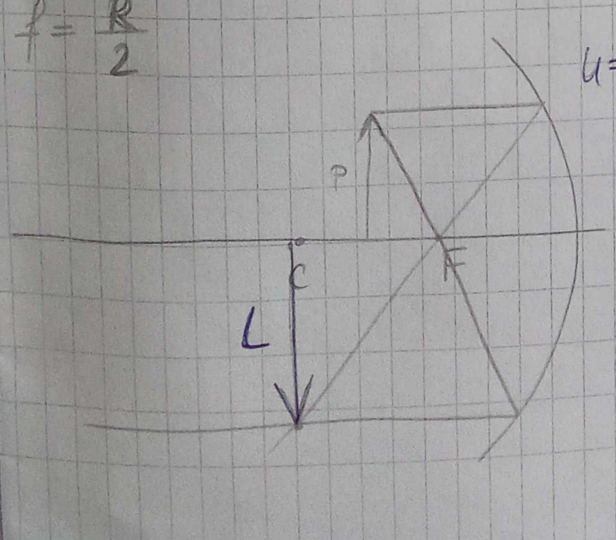
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2p} = \frac{2}{R} \qquad \frac{3}{2p} = \frac{2}{R} \Rightarrow p = \frac{3R}{4} = 0{,}3\,m$$

$$\boxed{l = 0{,}6\,m}$$

2. Лик који се добија конкавним (удубљеним) сферним огледалом k пута је већи од самог предмета. Ако се огледало помери за a дуж оптичке осе лик ће поново бити већи од предмета као у 1. случају. Одредити полупречник кривине огледала. (r)

$f = \frac{R}{2}$



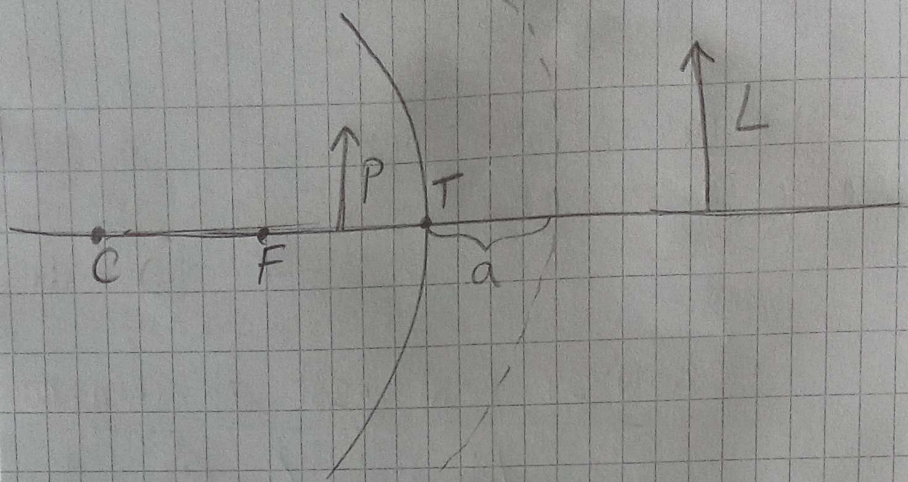
$$u = \frac{L}{P} = \frac{l_1}{p_1} = k \Rightarrow l_1 = k p_1$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{kp_1} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{k+1}{kp_1} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

12 – 92°



$$p_1 - p_2 = a \Rightarrow p_2 = p_1 - a$$

$$u = k = \frac{l_2}{p_2} \Rightarrow l_2 = kp_2$$

$$-\frac{1}{l_2} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$ (минус кад је имагинаран лик)

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{kp_2} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

$$\boxed{R = ka}$$

$$\frac{k-1}{kp_2} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

$$\boxed{\frac{k-1}{k(p_1-a)} = \frac{2}{R}} \quad (2)$$

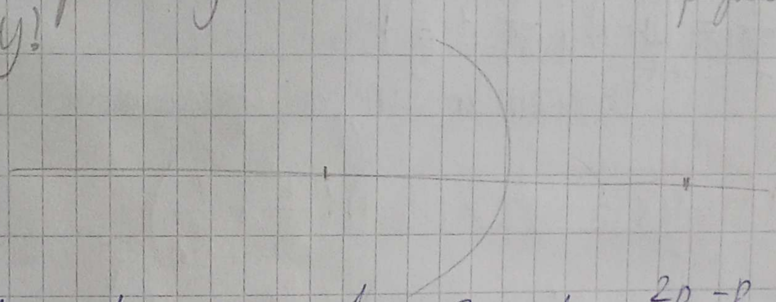
$$\frac{k+1}{kp_1} = \frac{k-1}{k(p_1-a)}$$

$$p_1 = \frac{a(k+1)}{2} \Rightarrow у\ (1)$$

$$\frac{k+1}{k \cdot \frac{a(k+1)}{2}} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{2}{ka} = \frac{2}{R}$$

3. Обе стране једне сферне површине полупречника кривине $R=28$ cm дјелују као огледала, и са једне и с друге стране овог огледала постављен је по један свијетли предмет (вертикално) на подједнаком растојању $p=34$ cm од огледала. Висина предмета испред удубљене стране огледала је $P=2,8$ cm. Колика треба да буде висина предмета P' који се налази испред испупчене стране да би ликови оба предмета имали исту висину?



$p = p'$

$L = L'$

издубљено огледало: $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} = \frac{2p-R}{Rp} \Rightarrow$

$l = \frac{Rp}{2p-R}$ | $u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p} \Rightarrow L = P\frac{l}{p} = P\cdot\frac{R\cancel{p}}{(2p-R)\cdot \cancel{p}} \Rightarrow$

$\boxed{L = 1,96 \text{ cm}}$ $L = L'$

испупчено огледало: $\frac{1}{p'} - \frac{1}{l'} = -\frac{2}{R} \Rightarrow l' = \frac{Rp}{2p+R}$

$u = \frac{L'}{P'} = \frac{l'}{p'} \Rightarrow P' = L'\cdot\frac{p'}{l'}$

$P' = Lp\frac{2p+R}{Rp} \Rightarrow \boxed{P' = 6,7 \text{ cm}}$

4. Танко сочиво има у ваздуху жижну даљину $f_1 = 62$ cm, а у води $f_2 = 160$ cm. Израчунати индекс преламања n_1 између ваздуха и стакла.

релативни индекс преламања

ако је индекс преламања стакло-вода $n_2 = 1,32$

$$n_1 = \frac{n_{стакло}}{n_{ваздух}} = ? \qquad n_2 = \frac{n_{стакло}}{n_{вода}} \qquad n = \frac{c}{v}$$

ОПТИЧАРСКА ЈЕДНАЧИНА СОЧИВА:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

релативни индекс преламања

1) ваздух: $\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

2) вода: $\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} \Rightarrow f_1 n_1 - f_1 = f_2 n_2 - f_2 \quad \ldots$$

$$\boxed{n_1 = 1,83}$$

4. Одредити полупречник кривине танког сабирног симетричног сочива од флинт стакла индекса преламања $n = 1,75$ ако то сочиво даје троструко увећан лик $u = 3$ када се светли предмет налази удаљен 10 cm од његовог оптичког центра

симетрично $\rightarrow R_1 = R_2$

$$u = \frac{l}{p} \Rightarrow l = up = 3p$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = (n-1)\frac{2}{R}$$

$$\frac{2}{R}(n-1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{3p} = \frac{4}{3p}$$

$$R = \frac{3p(n-1)}{2} = \boxed{11,25\ cm}$$

5. Два сабирна сочива жижних даљина $f_1 = 10$ cm, $f_2 = 16$ cm постављена су тако да им се главне оптичке осе поклапају, а растојање између њих износи $d = 40$ cm. На којим растојањима p_1 и p_2 између сочива треба поставити свијетли предмет тако да ликови које дају оба сочива имају исту величину?

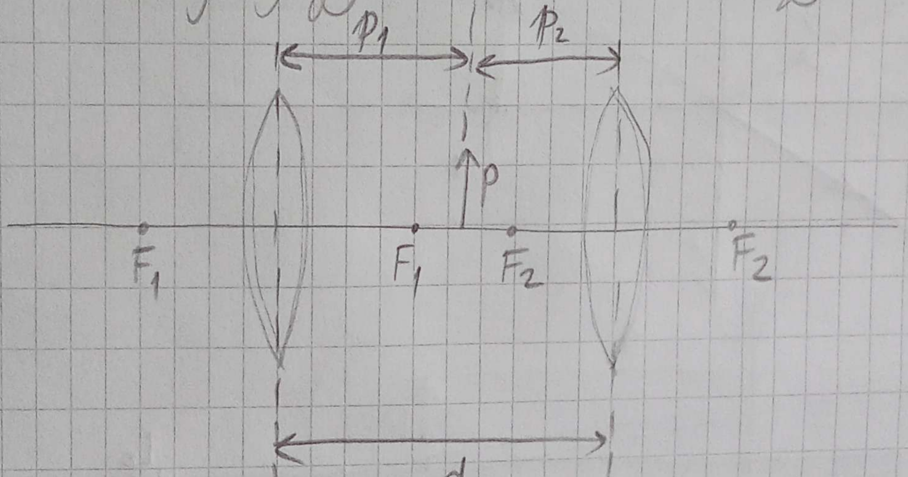
$f_1 = 10$ cm

$f_2 = 16$ cm

$d = 40$ cm

$L = L'$

$p_1, p_2 = ?$



$$d = p_1 + p_2$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f_1}; \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{l_2} = \frac{p_2 - f_2}{p_2 f_2}}$$

$$u = \frac{L_1}{p_1} = \frac{L_2}{p_2} = \frac{l_1}{p_1} = \frac{l_2}{p_2}$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{p_2}{l_2 p_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{\cancel{p_2}}{p_1} \cdot \frac{p_2 - f_2}{\cancel{p_2} f_2} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{p_1}\left(1 + \frac{p_2 - f_2}{f_2}\right) = \frac{1}{f_1}$$

$$p_1 = d - p_2$$

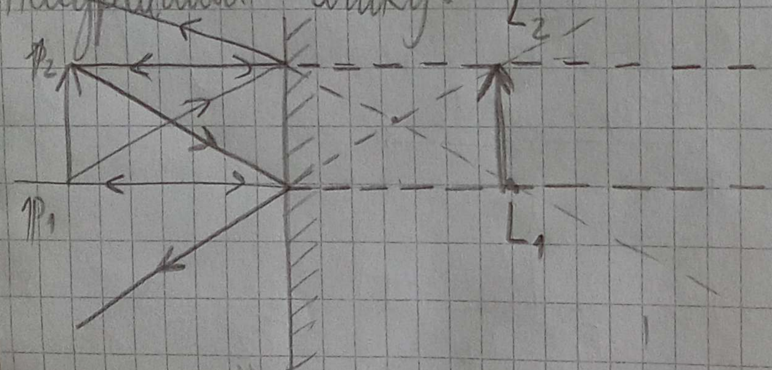
$$\frac{1}{d - p_2}\left[\frac{\cancel{f_2} + p_2 - \cancel{f_2}}{f_2}\right] = \frac{1}{f_1}$$

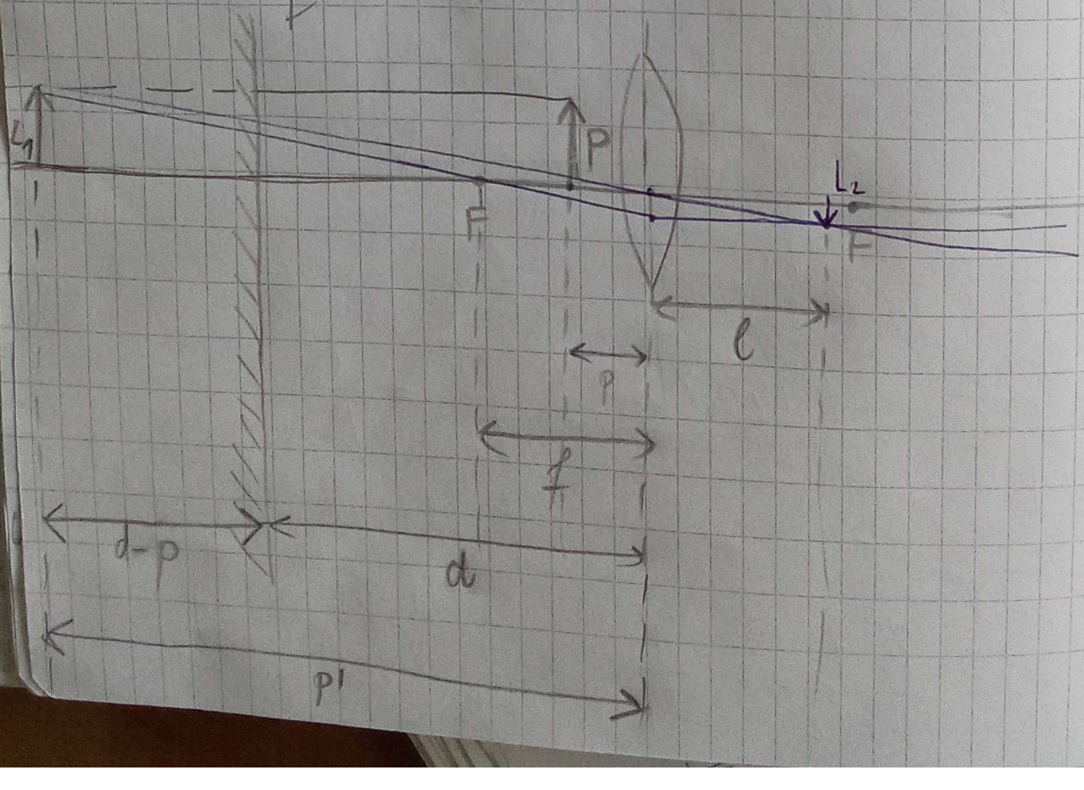
$$\frac{1}{d-p_2}\cdot\frac{p_2}{f_2}=\frac{1}{f_1}$$

$$d-p_2=\frac{f_1 p_2}{f_2} \quad \ldots \quad p_2=\frac{d f_2}{f_1+f_2}=\boxed{24{,}6\ cm}$$

$$p_1=d-p_2=15{,}4\ cm$$

6. Танко сабирно сочиво има жижну даљину $f=40\,cm$. На растојању $p=20\,cm$ налази се предмет величине $P=1\,cm$. На растојању $d=80\,cm$ од сочива са исте стране где и предмет постављено је равно огледало. Одредити положај и величину реалног лика. Нацртати слику!





$$p' = d + (d-p) = 2d - p$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p'} = \frac{p'-f}{p'f} \Rightarrow \ell = \frac{fp'}{p'-f} =$$

$$= \frac{f(2d-p)}{2d-p-f} = 56\ cm$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\ell}{p'} \Rightarrow L_2 = \frac{\ell}{p'} L_1$$

$$L_1 = P$$

$$L_2 = \frac{\ell}{p'} P \qquad \boxed{L_2 = \frac{\ell}{2d-p} P = 0{,}4\ cm}$$