

33) КРЕТАЊЕ ТАЛАСА КРОЗ ЕЛАСТИЧНУ СРЕДИНУ

- Јављ је постојање еластичне средине где свака честица средине осцилује
- Кроз средину се преноси енергија.
- Разликујемо :
 - трансверзални (попречни)
 - лонгитудинални (уздужни)

λ - таласна дужина

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T}}$$
 фазна брзина таласа
(брзина којом се талас крети)

- ТАЛАСНА ДУЖИНА - растојање између две еластичне честице које су у истој фази осциловања.

$$\xi(o,t) = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

$$\xi(x,t) = A \sin [\underbrace{\omega(t - tx)}_{\text{фаза}}] = A \sin [\omega(t - \frac{x}{v})]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\xi(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

таласни број

$$\xi(x,t) = A \sin(\omega t + kx)$$

(ако се креће ка негативном дијелу осе)

ТАЛАСНИ ФРОНТ - геометријско мјесто тачака до којих су осцилације дошле.

РАВНИ ТАЛАС - узалко су таласне површине равне

СФЕРНИ ТАЛАС - ил-сфере

34) ТАЛАСНА ЈЕДНАЧИНА

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{таласна једначина})$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = -Ak^2 \sin(\omega t + kx) = -k^2 \xi(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + kx) = -\omega^2 \xi(x,t)$$

$$\xi = \frac{-1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{T}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}} \quad \blacksquare$$

34

- Укажице се равни талас протиче у произвољном смеру који са осима x, y, z замиња улове d, z, μ тада једначина има облик:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

- Чим то можемо записати постоји Лапласови оператор:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\xi(\vec{r}, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

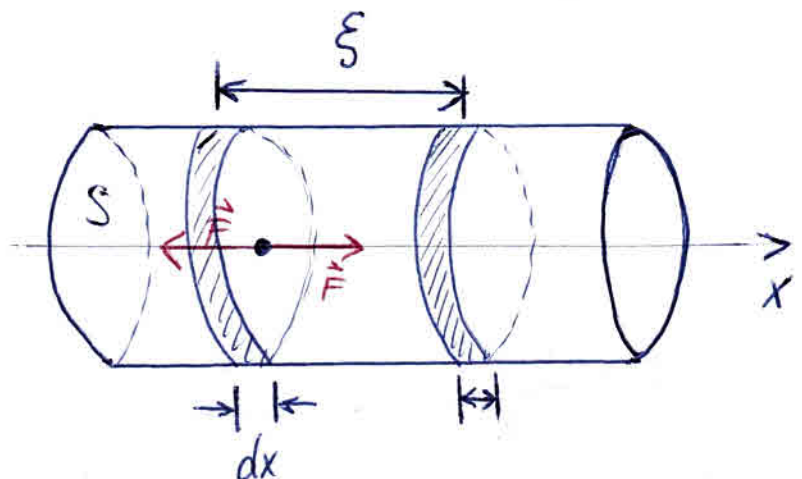
За равни талас

$$\xi(x, \vec{r}) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

35 БЗИНА ПРОСТ ИРАЊА ТАЛАСА

ξ - деформација густог
сине F

Из њиху ће се
кретати нормално
талас.



Јошмо елементау задреду

$$dV = S dx$$

-Релативна деформација:

$$\delta = \frac{d\xi}{dx}$$

На основу Хуковог закона:

$$F = ES \frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{dF}{dx} = ES \frac{d^2\xi}{dx^2} \quad (1)$$

$$dm = \rho dV = \rho S dx$$

ρ - густина

II б.з.

$$F = ma$$

$$dF = \rho S dx \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$\frac{dF}{dx} = \rho S \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad (2)$$

Из (1) и (2)

$$ES \frac{d^2\xi}{dx^2} = \rho S \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \left(\frac{\rho}{E} \right) \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

удаља

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

брзина

36) ЕНЕРГИЈА МЕХАНИЧКОГ ТИЛАСА

- При кретању тиласа кроз неку средину преноси се енергија у смеру тиласа (кретања).

$$E_1 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$\Delta V = \Delta S v \Delta t$ (сле масеници су подужене у овој зајрацини)

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \rho \Delta V \quad (\text{укупна енергија})$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \Delta V$$

- Густина енергије : $\frac{\Delta E}{\Delta V} = \epsilon$ $\epsilon = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$

- Сила тиласа : $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \Rightarrow$

$$P = \frac{\epsilon \Delta V}{\Delta t} = \frac{\epsilon S v \Delta t}{\Delta t}$$

$P = S v \epsilon$

- Интензитет тиласа :

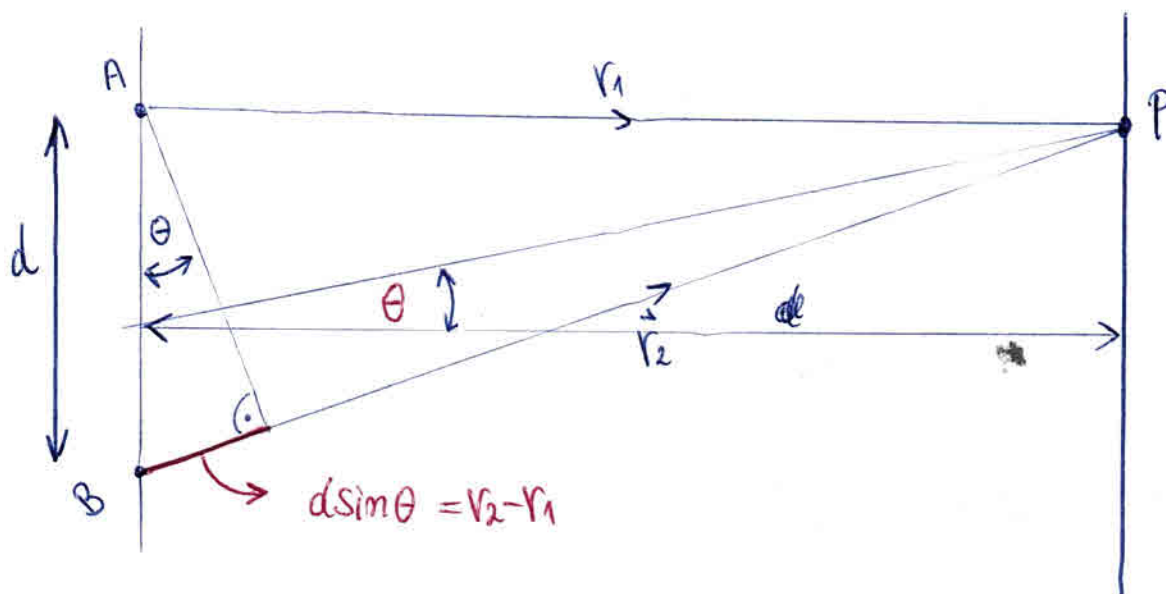
$$I = \frac{\Delta E}{S \Delta t}$$

$I = v \epsilon$

37) СУПЕРПОЗИЦИЈА ТАЛАСА

КОХЕРЕНТНИ ТАЛАСИ - имају константне разлике у фазама во времену

ИНТЕРФЕРЕНЦИЈА - Настаје при суперпозицији кохерентних таласа (таласе таласа)



$$\xi_1 = A \sin \omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right)$$

$$\xi_2 = A \sin \omega \left(t - \frac{r_2}{v} \right)$$

$$\Delta \Phi = \omega (r_2 - r_1) / v = k (r_2 - r_1)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \Rightarrow \xi = A \left[\sin \omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right) + \sin \omega \left(t - \frac{r_2}{v} \right) \right]$$

$$[\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}]$$

$$\xi = \underbrace{2A \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2}}_{\text{резултатна амплитуда}} \sin \left[\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} \right]$$

резултатна амплитуда

- Максимално збјачање:

$$\frac{\kappa d \sin \theta}{2} = n\pi$$

$$\Delta r = d \sin \theta = \frac{2n\pi}{\kappa} = n\lambda$$

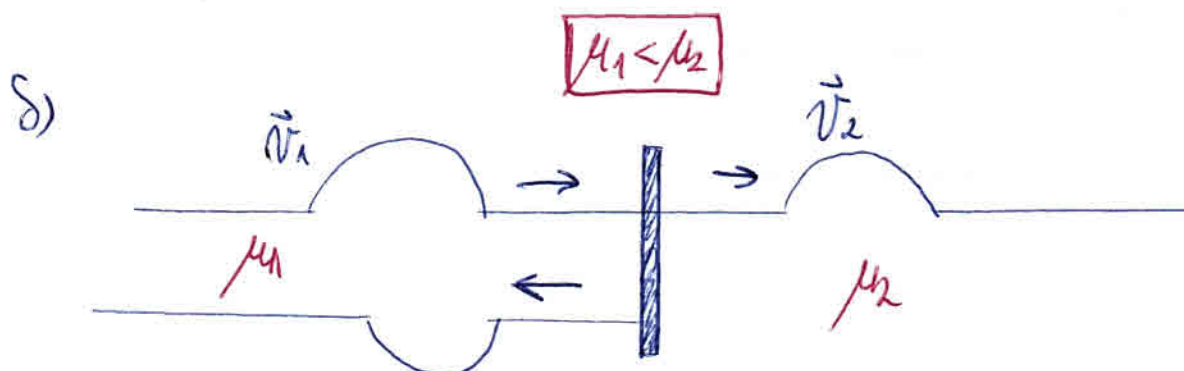
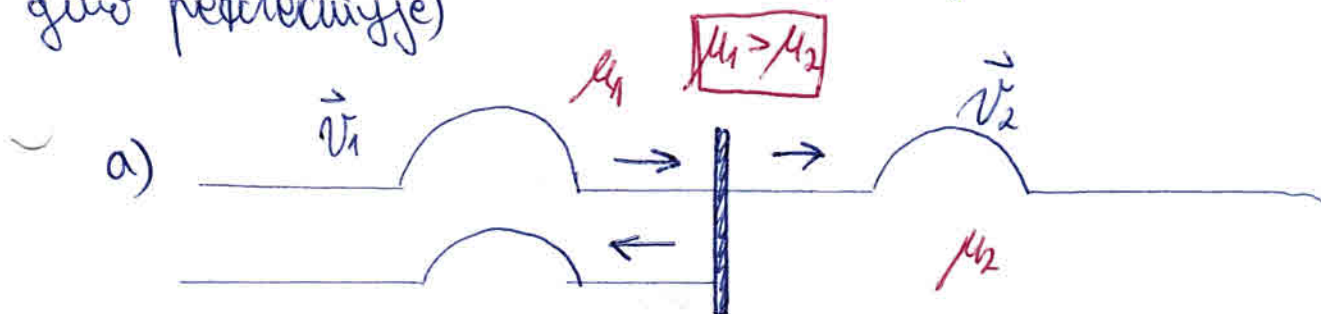
$$\boxed{\Delta r = n\lambda}$$

- Максимално гашење:

$$\boxed{\Delta r = (2m+1)\lambda}$$

38) ПРЕЛАМАЊЕ И РЕФЛЕКСИЈА ТАЛАСА

- Преламбање настаје при проласку таласа из једне средине у другу (при чему се део таласа преламба а део рефлектује)



$$\xi_u(x,t) = A_u \sin \omega(t - \frac{x}{v_1})$$

$$\xi_r(x,t) = A_r \sin \omega(t - \frac{x}{v_1})$$

$$\xi_p(x,t) = A_p \sin \omega(t - \frac{x}{v_2})$$

39) Стојећи ТАЛАС

- Стојећи талас настаје при интерференцији два таласа једнаких амплитуда и фреквенција који се крећу истим смером, али различитим правцима.

$$\xi_u(x,t) = A \sin(\omega t - kx)$$

$$\xi_r(x,t) = A \sin(\omega t + kx)$$

Стојећи талас не преноси енергију!

$$\xi = \xi_u + \xi_r = A [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)]$$

$$[\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}]$$

$$\xi = A 2 \sin(\omega t - \cancel{kx} + \omega t + \cancel{kx}) \cos(\omega t - kx - \omega t + kx)$$

$$\xi = 2A \sin(2\omega t) \cos(2\cancel{kx})$$

Убовови ТАЛАСА - мјеста где је амплитуда једнака 0.

$$\cos kx = 0$$

$$x_n = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$$

40) Група и фазна брзина таласа

$$\xi = A \sin(\omega(t - \frac{x}{v}))$$

→ фазна брзина таласа

дисперзивне средине - оне код којих је брзина таласа зависи од таласне дужине таласа

- у дисперзивним срединама таласи се суперпозирају у вез група (таласних пакета) који се крећу групном брзином.

41) Звук

- Механички лонгитудинални талас
[20 - 20000 Hz]

- Акустика - наука која изучава звук

инфразвук : $f < 20 \text{ Hz}$

ултразвук : $f > 20000 \text{ Hz}$

- Код звука разликујемо : шум и тон.

- Брзина звука кроз материјале:

$$v_z = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- и кроз гас:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

γ - адијабатска константа

- Објективна јачина звука : $[W/m^2]$

$$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

- Субјективна јачина звука : $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$

уни јачина

- Сусјективна јакина се мјери у децибелима [dB]

④2 Доплеров ефекат

Појава да се фреквенција таласа мијења у случају да се извор и пријемник таласа релативним кретањем један у односу на други помера се Доплеров ефекатом.

1) Извор се креће

$$f = \frac{u}{u - u_i} f_0$$



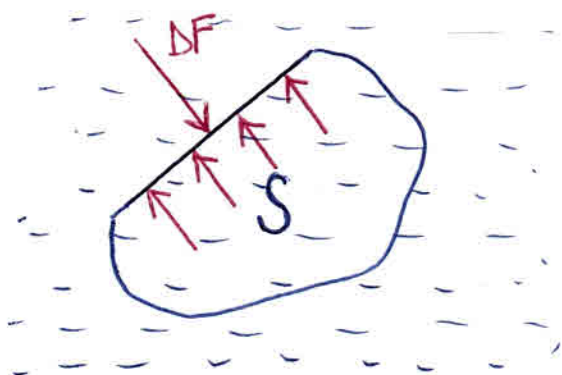
2) Пријемник се креће

$$f = \frac{u + u_p}{u} f_0$$

3) Оба се крећу

$$f = \frac{u + u_p}{u - u_i} f_0$$

43) Притисак флуида



- Притисак на зид посуде потиче од удара молекула о зид.

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad [\text{Pa}]$$

(средња притисак)

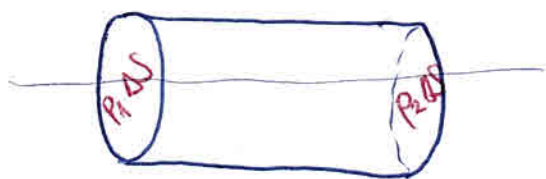
$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \Rightarrow$$

$$p = \frac{dF}{dS}$$

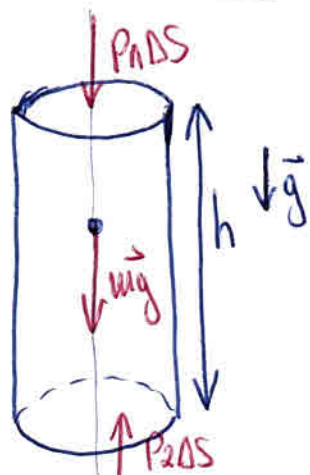
$$d\vec{F} = -p dS$$

Хидростатички притисак - притисак у течности која мирује.

- Вриједности хидростатичког притиска не зависе од оријентације површине на коју се односи.



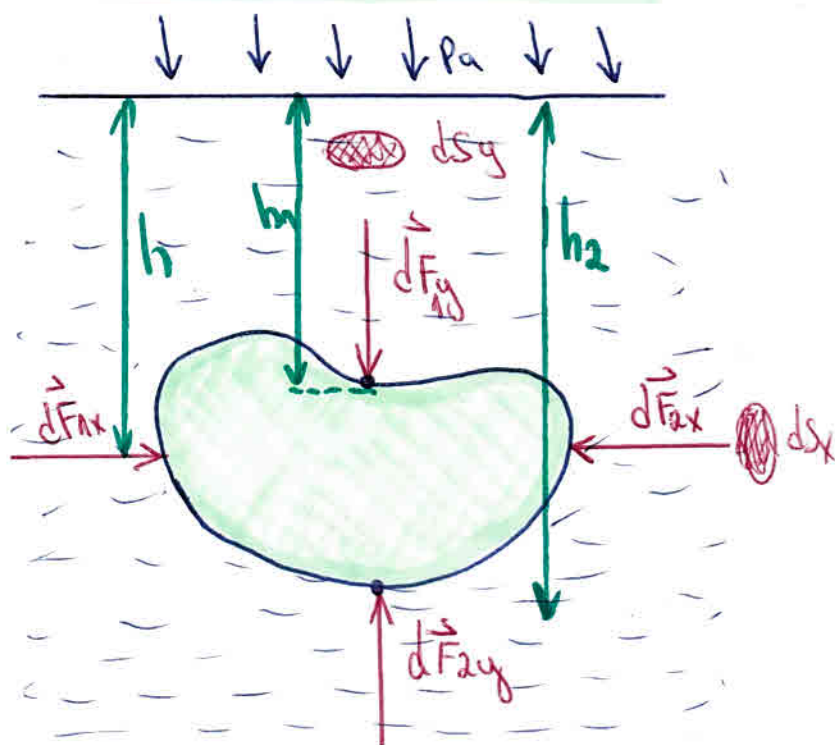
$$P_1 = P_2 = \text{const.}$$



$$P_2 = P_1 + \rho g h$$

- хидростатички притисак 43

44 АРХИМЕДОВ ЗАКОН



$$d\vec{F}_{1x} = d\vec{F}_{2x}$$

(компоненты по x!)

$$dF_{1y} = (p_a + \rho g h_1) dS_y$$

$$dF_{2y} = (p_a + \rho g h_2) dS_y$$

$$dF_p = dF_{2y} - dF_{1y}$$

(сила выталкивания)

$$dF_p = \rho g (h_2 - h_1) dS_y$$

Заменяем высоту

$$(h_2 - h_1) dS_y = H dS_y = \Delta V$$

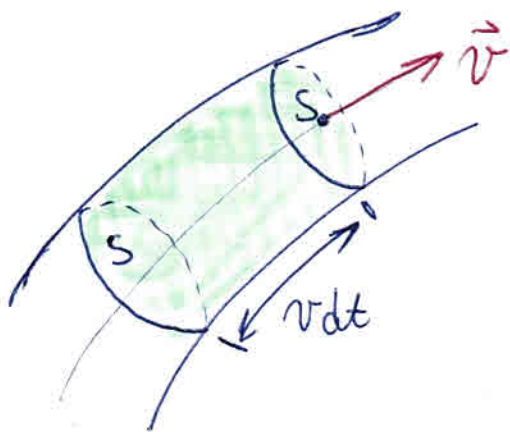
$$\boxed{dF_p = \rho g \Delta V} \quad (\text{сила выталкивания})$$

(связано со сменой объема)

- Сила выталкивания является величиной постоянной.

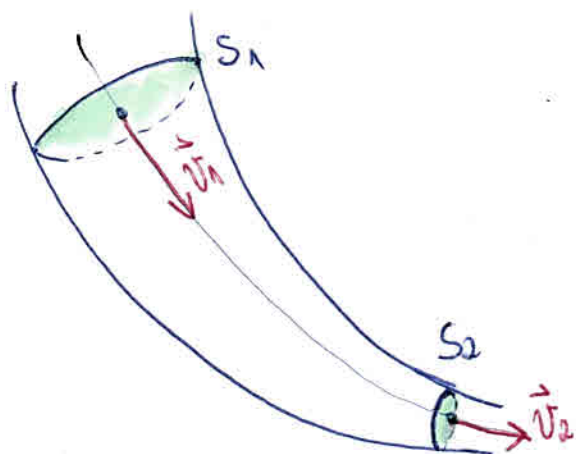
$$\begin{cases} G > F_p & - \text{тонет} \\ G = F_p & - \text{нейтральность} \\ G < F_p & - \text{плывет} \end{cases}$$

45) ЈЕДНАЧИНА КОНТИНУИТЕТА



$$Q = \frac{S v \Delta t}{\Delta t} = S v$$

$$S_1 v_1 \rho \Delta t = S_2 v_2 \rho \Delta t$$



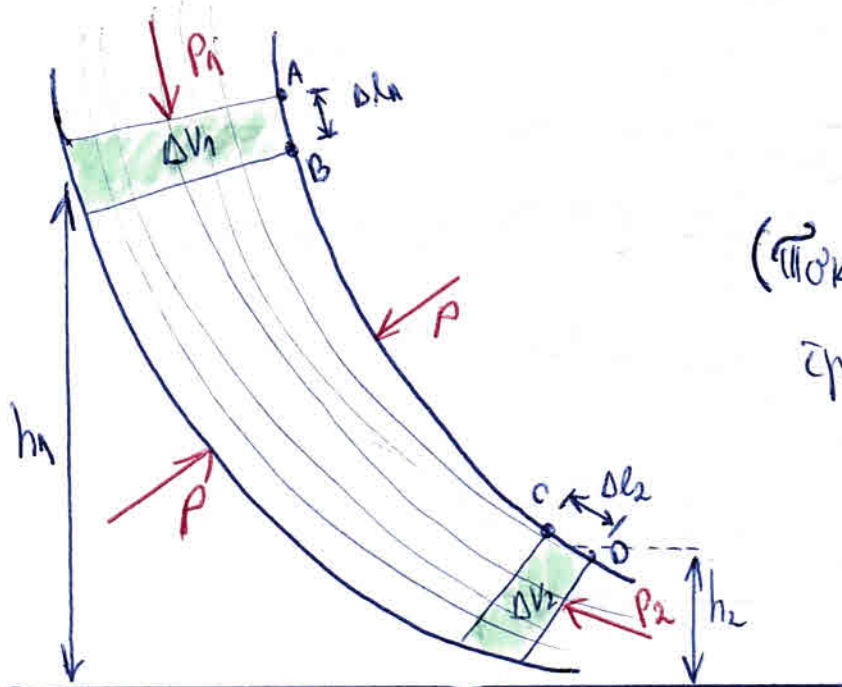
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const.}$$

$$S v = \text{const.}$$

(једначина континуитета)

- Ци флуиди који се крећу брзином мањом од брзине звука могу се сматрати нестисљивим.

46) БЕРНОЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА



(Потек енергије у тропицауном пољу)

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V \quad (\text{Зато не изменился})$$

Узметы А и В:

$$\begin{cases} E_{k1} = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} = \rho \frac{\Delta V_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2 \\ E_{p1} = \Delta m g h_1 = \rho \Delta V_1 g h_1 = \rho \Delta V h_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{k2} = \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} = \rho \Delta V_2 \frac{v_2^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 \\ E_{p2} = \Delta m g h_2 = \rho \Delta V_2 g h_2 = \rho \Delta V h_2 \end{cases}$$

$$A_1 = F_1 l_1$$

$$A_1 = p_1 S_1 l_1$$

$$\begin{cases} A_1 = p_1 V & /: V \\ A_2 = p_2 V & /: V \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta E = E_2 - E_1 \\ \Delta A = A_2 - A_1 \end{cases}$$

$$\Delta E = E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p1}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1 \quad /: V$$

$$\boxed{\Delta E = \Delta A}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1$$

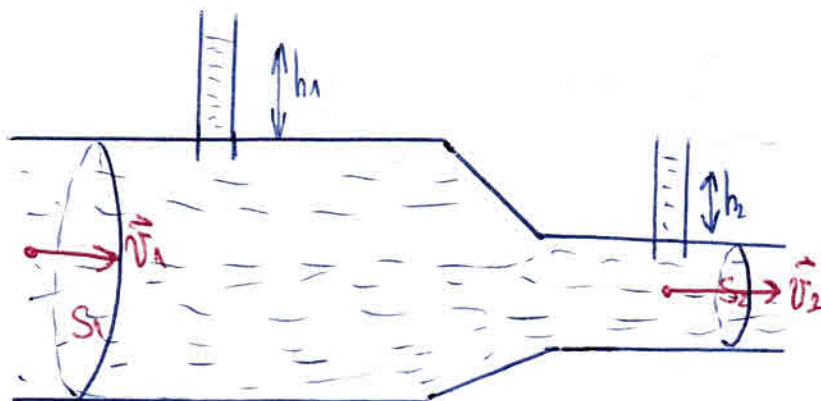
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2$$

$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}}$$

(Бернуллиева једначина)

47) ВЕНТУРИЈЕВА ЦИЈЕВ

$$\rho \frac{1}{2} v_1^2 + p_1 = \rho \frac{1}{2} v_2^2 + p_2$$



48) УНУТРАШЊЕ ТРЕЊЕ КОД ФЛУИДА - ВИСКОЗНОСТ

- Вискозност је унутрашње трење код флуида.

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dx} \quad (\text{сила трења}) \quad [\text{N Pa s}]$$

η - коефицијент вискозности

→ зависи од природе течности и температуре

ЛАМИНАРНО ПРОТИЦАЊЕ - код малих брзина, слојеви се не мijeшају (субинертно)

ТУРБУЛЕНТНО ПРОТИЦАЊЕ - долази до снажних мijeшања флуида

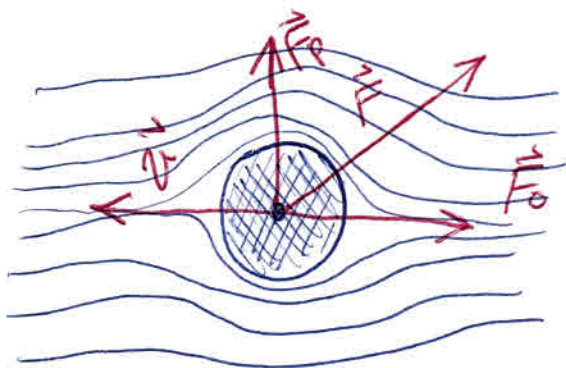
$$Re = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (\text{Reynoldsov број})$$

$Re < 2000 \rightarrow$ слојно

$Re > 3000 \rightarrow$ турбулентно

$2000 < Re < 3000$ (прелазно)

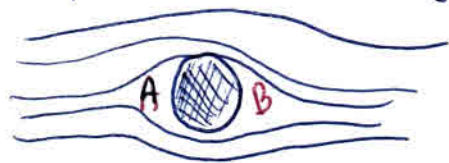
49) Отпор сферичне



\vec{F}_0 - сила лезног отпора

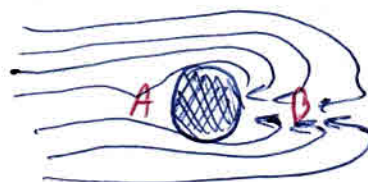
\vec{F}_p - сила притиска

а) кретање кроз идеалну течност



$$P_A - P_B = \frac{\rho v^2}{2}$$

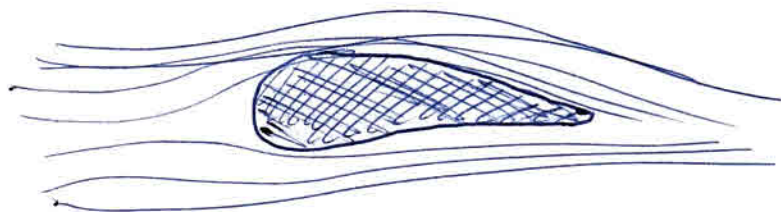
б) - и реалну течност



$$P_A = P + \frac{\rho v^2}{2}$$

Стоксов закон:

$$F = 6\pi\eta r v$$



(најмањи отпор)

50) Ширење чврстих тијела при загревавању

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t)$$

α - ширински коефицијент
линеарног ширења

L_0 - дужина на 0°C

$$S = S_0 (1 + 2\alpha t) = S_0 (1 + \beta t)$$

β - шир. - и - површини
ширења

$$V = V_0 (1 + 3\alpha t) = V_0 (1 + \gamma t)$$

γ - шир. - и - запрем.
ширења.

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$$

51) Ширење гасова при загревавању

- Гасови се шире по закону

$$V = V_0 (1 + \gamma t)$$

$$\gamma = \frac{1}{273,15^\circ\text{C}}$$

(конста за све гасове)

• изобарски процес

$$p = p_0 (1 + \gamma t)$$

p_0 - притисак на 0°C

$$\gamma = \frac{1}{273,15}$$

$V = \text{const.}$ изохорски процес (49)

$$\blacksquare V = V_0 \left(1 + \frac{1}{273} t \right) = V_0 \left(\frac{273+t}{273} \right) = V_0 \frac{T}{T_0}$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$\boxed{\frac{V}{T} = \text{const}, \quad p = \text{const.}} \quad (\text{Гей-Люссак закон})$$

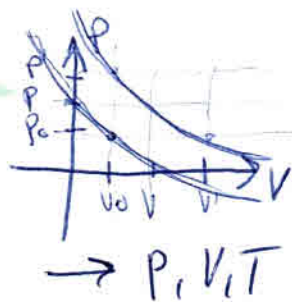
$$\blacksquare p = p_0 \left(1 + \frac{1}{273} t \right) = p_0 \left(\frac{273+t}{273} \right) = p_0 \frac{T}{T_0}$$

$$\boxed{\frac{p}{T} = \text{const}, \quad V = \text{const}} \quad (\text{Шарль закон})$$

$$\blacksquare \boxed{pV = \text{const}, \quad T = \text{const.}} \quad (\text{Бойль-Мариотт закон})$$

52) УРАВНЕНИЕ ГАСНОР СТАНА

Нека је у сугу : p_0, V_0, T_0
задрживањем и савијањем



$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ pV &= NkT \\ R &= 8,314 \text{ [J/Kmol]} \end{aligned}$$

$$V' = \frac{V_0}{T_0} T, \quad p = \text{const.}$$

$$p' = \frac{p_0}{T_0} T, \quad V = \text{const.}$$

$$pV = p_0 V' = p' V_0$$

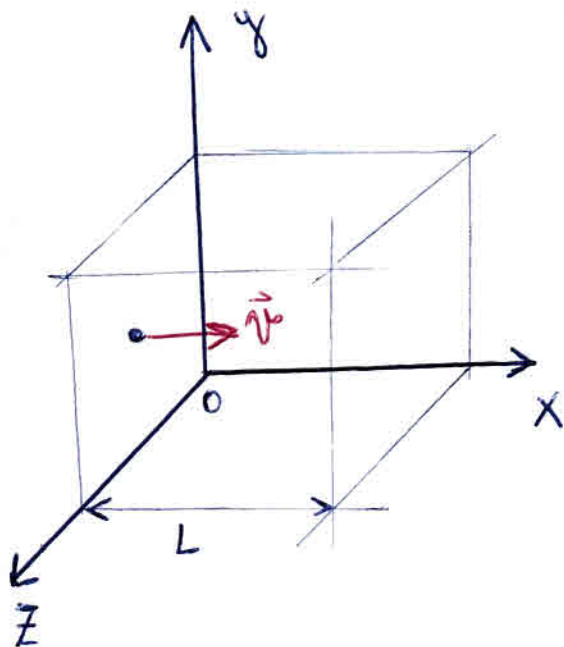
$$pV = \text{const.}$$

$$p_0 V_0 = \frac{p_0 V_0}{T_0} T$$

$$\boxed{\frac{pV}{T} = \text{const.}}$$

КЛАПЕРОНОВА
УРАВНЕНИЕ

53) КИНЕТИКА ТЕОРИЈА ГАСОВА



$$p = m v$$

Δp - промена судора

$$\Delta p = m v - (-m v)$$

$$\Delta p = 2m v$$

$$\Delta t = \frac{2 \Delta L}{v}$$

$$\Delta F \Delta t = 2m v$$

$$\Delta F = \frac{2m v}{\frac{2 \Delta L}{v}} = \frac{m v^2}{\Delta L}$$

$$F = \left(\frac{n}{3} \right) \frac{m v^2}{\Delta L}$$

$$\frac{F}{S} = p$$

$$p = \frac{n}{3} \frac{m v^2}{\Delta L} \frac{1}{\Delta L^2}$$

$$p = \left(\frac{n}{3} \right) \frac{m v^2}{V}$$

$$p V = \frac{n}{3} m v^2$$

$$\left[\frac{n}{V} = n_0 \right]$$

$$p = \frac{n_0}{3} m v^2$$

$$p = \frac{2}{3} n_0 E_K$$

$$p V = \frac{2}{3} N E_K = p T$$

$$E_K = \frac{3}{2} k T$$

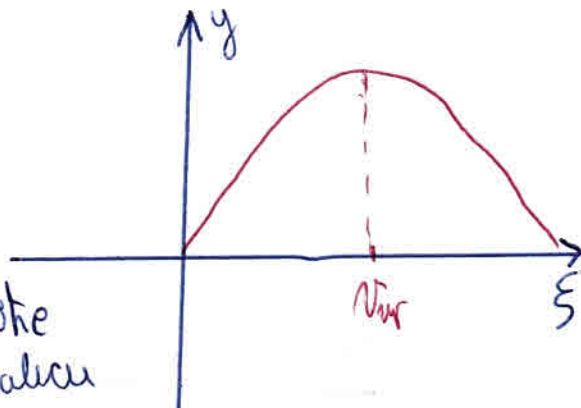
k - Болцманова константа

$$(k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K})$$

сила се
дејствује по
свима три
координате

54) МАКВЕЛОВА РАСПОДЈЕЛА ПО БРЗИНАМА

$$v_{\text{вр}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$



- Припоједују се закони кинетичке енергије
- Брзина кретања молекула зависи од температуре

55) КОЛИЧИНА ТОПЛОТЕ И СПЕЦИФИЧНА ТОПЛОТА

- Када се ткиво загријава од температуре t_1 до температуре t_2 онда је доведена количина топлоте Q једнака:

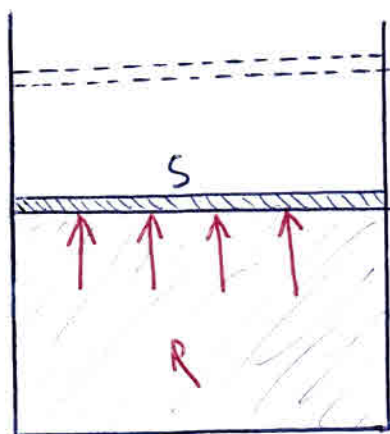
$$Q = mc(t_2 - t_1)$$

- c - специфична топлота, зависи од природе ткива.

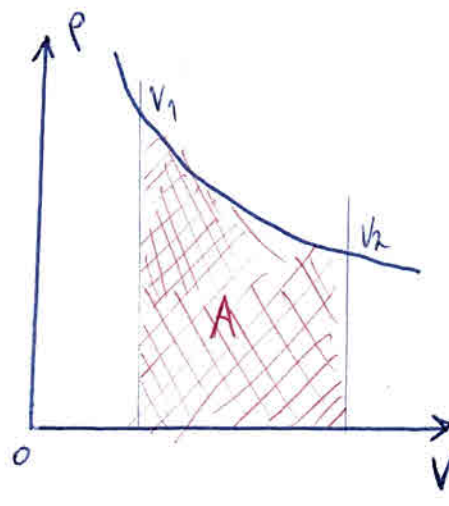
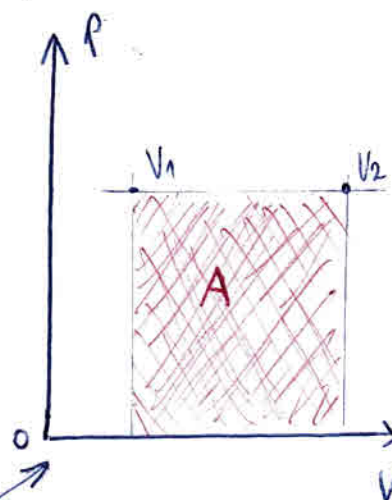
* Специфична топлота је количина топлоте која јединици масе ткива повиши температуру за 1°C или 1K .

- Апарати за мјерење топлоте називају се **КАЛОРИМЕТР** (напр. лодени калориметар)

56) РАД ПРИ ВИРЕЊУ ГАСОВА



Δx



$$\Delta A = p S \Delta x$$

$$\Delta A = p \Delta V$$

$$A = p(V_2 - V_1)$$

$$dA = p dV$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} p V \frac{dV}{V}$$

$$pV = nRT$$

$$A = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \Rightarrow$$

$$A = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$A = nRT \ln \frac{P_1}{P_2}$$

57) ПРВИ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМИКЕ

$$dQ = dU + dA \equiv dQ = dU + p dV$$

* Количина топлоте која се због промене температуре преноси се на топлотне измјене енергије и на рад који се врши околног промена.

- Рад се не може добити из ништа

- Термодинамика I врсте.