

UNIVERZITET U ISTOČNOM SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

redovni profesor
dr Slavko Pokorni, dipl. inž. el.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE 1

Elektrostatika

Istočno Sarajevo, 2014.

PREDGOVOR

Ovaj materijal predstavlja tekst koji su na osnovu predavanja koje je držao autor na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Istočnom Sarajevu, počevši od 1997. godine, i na Vojnoj akademiji u Beogradu od 2007. godine, prvo započeli studenti fakulteta u Istočnom Sarajevu da unose u računar i crtaju slike, a zatim ga je autor nešto korigovao, dopunio nedostajući tekst i slike i omogućio da studenti mogu da ga koriste u elektronskoj formi od 2009. godine.

Materijal je najvećim delom zasnovan na udžbenicima Osnovi elektrotehnike 1 i Osnovi elektrotehnike 2, akademika dr Branka Popovića i najnovijim udžbenicima Osnovi elektrotehnike 1 i Osnovi elektrotehnike 2 (četiri knjižice, dve za Osnove elektrotehnike 1 i dve za Osnove elektrotehnike 2), akademika dr Antonija Đorđevića sa Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

Materijal treba shvatiti kao neku vrstu skripta. U materijalu verovatno ima grešaka i u tekstu i u formulama i slikama, ali će one, kako budu uočavane, biti ispravljane, i materijal dorađivan, pa će dorađeni materijal biti dostupan preko interneta.

Tekst skripta u celini obuhvata materijal koji je mogao da se ispredaje takvom brzinom da su studenti mogli predavanja da zabeleže, uz neke dodatke koje je autor naknadno uneo.

Nadam se da će ova skripta biti značajna pomoć studentima, da ne moraju da zapisuju predavanja, pa da ostaje više vremena za objašnjavanje i diskusiju.

U ovom materijalu ispravljene su neke od do sada uočenih grešaka i unete neznatne dopune teksta. Naravno, moguće je da i dalje ima štamparskih i drugih grešaka, pa molim sve one koji koriste ovu skriptu da mi pošalju svoja zapažanja i primedbe, kako bi takve greške bile ispravljene. Dobrodošle su i sve druge sugestije koje doprinose kvalitetu sadržaja i uspešnijem savladavanju sadržaja predmeta.

Sadržaj

1. OSNOVNI POJMOVI O ELEKTRICITETU I ELEKTRIČNIM OSOBINAMA MATERIJE.....	5
2. KULONOV ZAKON I VEKTOR JAČINE ELEKTRIČNOG POLJA	6
2.1. Kulonov zakon	6
2.2. Pojam električnog polja. Vektor jačine električnog polja	8
2.3. Linije vektora jačine električnog polja	9
2.4. Kontinualno raspodeljeno naelektrisanje i njihovo električno polje.....	10
3. POTENCIJAL ELEKTRIČNOG POLJA.....	18
3.1. Rad sila električnog polja	18
3.2. Zakon održanja energije i njegova primena na elektrostatičko polje	19
3.3. Definicija potencijala električnog polja. Razlika potencijala. Napon	20
3.4. Ekvipotencijalne površi. Veza između potencijala i vektora jačine polja	23
3.5. Električni dipol.....	24
3.6. Potencijal koji stvara kontinualna raspodela opterećenja	25
4. GAUSOV ZAKON	29
4.1. Fluks vektora električnog polja	29
4.2. Izvođenje Gausovog zakona.....	31
4.3. Primeri primene Gausovog zakona	33
5. PROVODNICI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU.....	40
5.1. Osobine električnog polja u prisustvu provodnih tela.....	40
5.2. Veza između gustine površinskog naelektrisanja i vektora jačine polja uz površ provodnika	41
5.3. Raspodela opterećenja na usamljenim provodnim telima raznih oblika.....	42
5.4. Elektrostatička indukcija	44
5.5. Teorema ogledala (likova).....	50
5.6. Veza između naelektrisanja i potencijala provodnih tela. Kondenzatori i njihova kapacitivnost.	51
5.7. Paralelna i serijska veza kondenzatora	55
5.8. Veza između potencijala i gustine naelektrisanja (jednodimenziona Puasonova jednačina)	57
6. DIELEKTRICI U ELEKTRIČNOM POLJU	59
6.1. Polarizacija dielektrika	59
6.2. Vektor električne polarizacije	61
6.3. Vezana električna opterećenja	63
6.4. Električno polje u homogenom dielektriku. Relativna i apsolutna dielektrična konstanta ...	66
6.5. Uopšteni oblik Gausovog zakona. Vektor električnog pomeraja	68
Integralne jednačine u elektrostatiči	70
6.6. Granični uslovi	70
6.7. Tube fluksa vektora električnog pomeraja	74
6.8. Neke električne osobine dielektrika	74
7. SILE I ENERGIJA U ELEKTROSTATIČKOM POLJU	76
7.1. Sile u elektrostatičkom polju.....	76
7.2. Energija opterećenog kondenzatora	77
7.3. Gustina energije u elektrostatičkom polju. Energija električnog polja	78
7.4. Izračunavanje elektrostatičkih sila preko energije	79
7.5. Momenti električnih sila	81
7.6. Gubici u dielektricima pri vremenski promenjivim poljima.....	82
8. KRETANJE NAELEKTRISANE ĆESTICE U ELEKTROSTATIČKOM POLJU U VAKUUMU.....	83

8.1. Kretanje naelektrisane čestice u homogenom električnom polju.....	83
8.2. Kretanje naelektrisane čestice u nehomogenom električnom polju	84
LITERATURA	86
PRILOZI.....	87
PREGLED OSNOVNIH FIZIČKIH VELIČINA I JEDINICA	88
OSNOVNI POJMOVI O VEKTORSKIM VELIČINAMA	89
TABELA IZVODA NEKIH OSNOVNIH FUNKCIJA	92
TABELA INTEGRALA NEKIH OSNOVNIH FUNKCIJA	93

ELEKROSTATIKA

1. OSNOVNI POJMOVI O ELEKTRICITETU I ELEKTRIČNIM OSOBINAMA MATERIJE

Sva tela u prirodi, trenjem ili na neki drugi način, mogu stići osobinu da privlače lake predmete, kao i da se privlače ili odbijaju međusobno (češalj provučen nekoliko puta kroz kosu privlači parčice papira; dva komadića stiropora (plastične mase) protrljani vunenom tkaninom međusobno se odbijaju). Za tela koja su stekla tu osobinu kažemo da su **nanelektrisana**. Silu između nanelektrisanih tela pripisujemo nanelektrisanju (ili elektricitetu) na njima. Danas znamo da postoje dve vrste nanelektrisanja, koje su suštinska osobina elementarnih čestica – elektrona i protona i da je nanelektrisanje tela rezultat manjka ili viška broja elektrona u telu u odnosu na broj protona. Ako sa n_e obeležimo broj elektrona, a sa n_p broj protona, onda za $n_e = n_p$ telo je neutralno, $n_e > n_p$ telo je negativno nanelektrisano, a za $n_e < n_p$ telo je pozitivno nanelektrisano.

Bez nekog posebnog razloga nanelektrisanje protona je nazvano pozitivno (američki fizičar Bendžamin Franklin 1706-1790), a elektrona negativno. Dogovorno, u matematičkim relacijama, kojima opisujemo električne pojave, te dve vrste nanelektrisanja se obeležavaju kao pozitivne odnosno negativne algebarske veličine. Ova konvencija je omogućila opisivanje električnih pojava vrlo kompaktnim matematičkim izrazima.

Za jedinicu nanelektrisanja je usvojeno nanelektrisanje $0,624181 \cdot 10^{19}$ protona. Ta jedinica se naziva **Kulon** (oznaka C). Nanelektrisanje protona je prema tome:

$$\frac{10^{-19}}{0,624181} = 1,6021 \cdot 10^{-19} C$$

To je i apsolutna vrednost nanelektrisanja elektrona, tj. $e = -1,6021 \cdot 10^{-19} C$, koji ima 1836 puta manju masu od protona, a ponaša se i kao elementarna čestica i kao talas (dualistička priroda).

Za nanelektrisanje se koristi oznaka Q. To je algebarska vrednost opterećenja (nanelektrisanja).

U zatvorenom sistemu ukupna količina nanelektrisanja uvek je ista. Nanelektrisanje može samo preći sa jednog tela na drugo, nemože da nestane ili da se stvori.

U 1 m^3 čvrstog tela ima oko 10^{29} atoma (u 1 mm^3 ima 10^{20}). Jezgro atoma i elektron(i) zauzimaju veoma mali deo prostora u atomu. Ako se zamisle kao loptice, red veličine poluprečnika jezgra je $(2-10)10^{-15} \text{ m}$, zavisno od vrste materijala, a elektrona $5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, dakle približne su veličine, a poluprečnik atoma je reda 10^{-10} m , tj. odnos poluprečnika atoma i njegovog jezgra odnosno elektrona je oko 10000 puta. Ovaj „prazan“ prostor između elementarnih čestica supstance naziva se **vakuum**.

U pogledu električnih osobina sve supstance se dele u tri grupe:

- izolatori,
- poluprovodnici i
- provodnici.

Podela je donekle proizvoljna, a zasnovana je na relativnom broju slobodnih nosilaca nanelektrisanja u supstanci. U izolatorima (dielektricima) postoji vrlo mala koncentracija slobodnih nosilaca u odnosu na njihovu koncentraciju u poluprovodnicima, a u poluprovodnicima je znatno manja nego u provodnicima.

Najvažnija klasa provodnika su metali. U njima su elektroni iz spoljašnje ljske, tzv. elektroni provodnosti, vrlo labavo vezani za atome, pa se u normalnim uslovima praktično slobodno kreću u metalima.

U tečnostima - tečnim rastvorima, molekuli rastvorene supstance se raspadaju na dva suprotna nanelektrisana dela, tzv. pozitivne i negativne **jone**. Joni mogu da postoje i u gasovima.

2. KULONOV ZAKON I VEKTOR JAČINE ELEKTRIČNOG POLJA

Sile između nanelektrisanih tela su ustvari rezultat sila koje deluju između elementarnih čestica u posmatranim telima. Međutim, proračun sila polazeći od tih elementarnih čestica (na atomskom nivou, odnosno mikroskopskoj skali) je veoma složen. Zbog toga se uvode srednje vrednosti veličina koje se odnose na elementarne čestice. U tu svrhu se posmatra tzv. fizički mala zapremina, koja je veoma mala ali ipak obuhvata veliki broj elementarnih nanelektrisanja. Takav prilaz se naziva **makroskopski** prilaz, a srednje vrednosti veličina **makroskopske veličine**.

Eksperimenti pokazuju da sile između električnih opterećenja nisu iste kada opterećenja miruju i kada se kreću u odnosu na posmatrača.

Najprostiji slučaj je kada sva opterećenja makroskopski miruju (na mikroskopskoj skali takvo stanje ne postoji). Deo fizike i elektrotehnike koji proučava sisteme vremenski nepromenljivih opterećenja na nepokretnim telima naziva se **elektrostatika**. Najprostiji su slučajevi sa telima u vakuumu.

2.1. Kulonov zakon

Opisuje силу између два nanelektrisana tela чије су dimenzije znatno manje od njihovog rastojanja. Takva tela se nazivaju **punktualna (tačkasta)** opterećenja (nanelektrisanja).

Punktualno opterećenje ne mora biti ni malo ni nekog posebnog oblika.

Podsetimo se da je nanelektrisano telo ono telo na kome postoji višak bilo pozitivnih bilo negativnih opterećenja.

Kulonov zakon je osnovni zakon elektrostatike iz koga proističe praktično celokupna teorija elektrostatickog polja. Eksperimentalno, pomoću torziona vase, Kulon je došao do zaključka da je električna sila između dva nanelektrisana tela srazmerna proizvodu opterećenja jednog i drugog, a obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja između njih, tj. sila kojom telo 1 (izvor sile) deluje na telo 2 je

$$\vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{o12}$$

gde su:

Q_1, Q_2 – nanelektrisanja tela

r – rastojanje između tela,

\vec{r}_{o12} – jedinični vektor (ort) duž prave koja prolazi kroz tela, usmeren od opterećenja koje je izvor sile (Q_1) ka opterećenju na koje deluje sila (Q_2),

\vec{F}_{12} – sila kojom telo 1 deluje na telo 2.

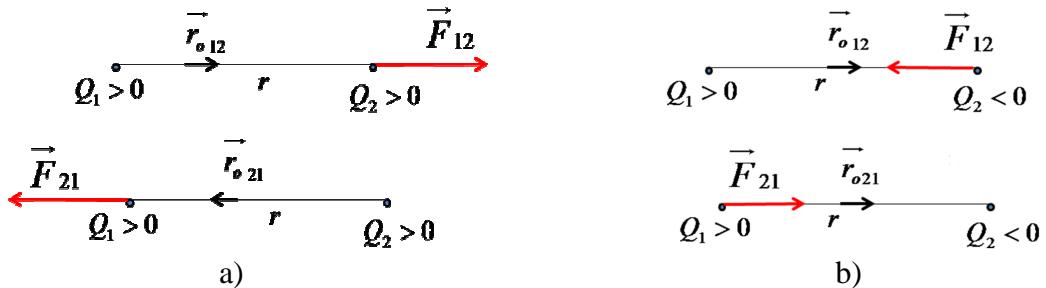
Ako su Q_1 i Q_2 istog znaka (oba pozitivna ili oba negativna), \vec{F}_{12} je istog smera kao i \vec{r}_{o12} , tj. sila je odbojna (slika 2.1a). Ako su Q_1 i Q_2 suprotnog znaka, \vec{F}_{12} je u suprotnom smeru od \vec{r}_{o12} , tj. sila je privlačna (slika 2.1b).

U međunarodnom sistemu (SI) jedinica, konstanta k je $k \approx 9 \cdot 10^9$ [Nm²/C²]. Ta konstanta je približno ista i kada se merenja vrše u vakuumu, pa se k izražava kao

$$k \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

gde je ϵ_0 – dielektrična konstanta ili permitivnost vakuma, koja ima vrednost

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \left[\frac{C^2}{Nm^2} \right] = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right].$$



Slika 2.1. Dva tačkasta opterećenja i smerovi vektora sile Kulonovog zakona nanelektrisanja istog znaka (a) i nanelektrisanja različitog znaka (b)

Prema tome Kulonov zakon se može pisati u obliku

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{o12}, \text{ što je vektorski oblik Kulonovog zakona.}$$

Algebarski oblik je

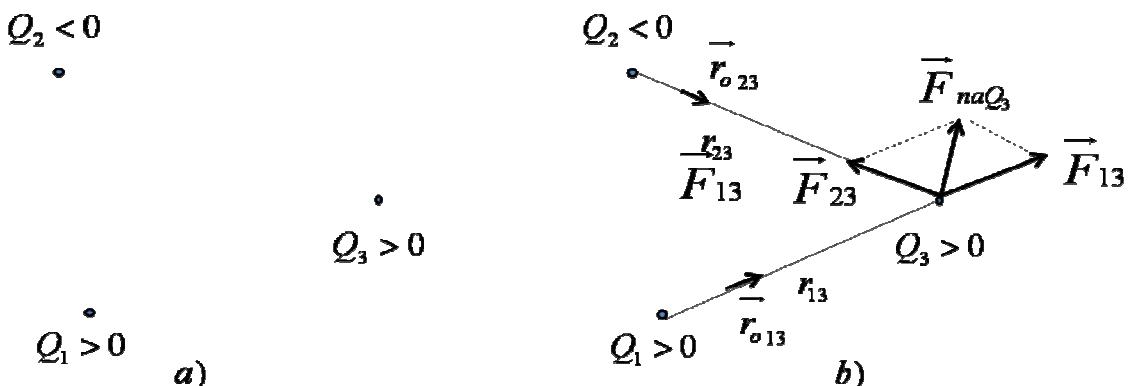
$$|\vec{F}_{12}| = F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{pa je vektorski oblik } \vec{F}_{12} = F_{12} \vec{r}_{o12}$$

Za električnu силу važi zakon akcije i reakcije (slika 2.1), tj. kako je

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{o21}, \text{ to je } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \vec{r}_{o12} = -\vec{r}_{o21}. \text{ a } F_{12} = F_{21}$$

Za električne sile važi **princip superpozicije**¹ (pravilo vektorskog sabiranja), što znači da je ukupna električna sila kojom na neko malo nanelektrisano telo deluje više drugih malih nanelektrisanih tela jednaka vektorskom zbiru sile kojima ta druga tela deluju ponaosob na posmatrano telo.

Primer 2.1. Skicirajmo silu kojom \$Q_1\$ i \$Q_2\$ deluju na \$Q_3\$ (slika 2.2a)



Slika 2.2. Tri tačkasta nanelektrisanja (a) i određivanje resultantne sile na nanelektrisanje \$Q_3\$ (b)

Grafički prikazano rešenje na slici 2.2b, analitički se može pisati kao

$$\vec{F}_{naQ_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_{i3},$$

gde su

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q_1 Q_3}{r_{o13}^2} \vec{r}_{o13}, \quad \vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q_2 Q_3}{r_{o23}^2} \vec{r}_{o23}$$

Da bi se došlo do resultantne sile potrebno je sabratи ove dve sile odnosno sabratи dva vektora. Može se postupiti na različite načine. Jedan je da se u Dekartovom koordinatnom sistemu

¹ Princip superpozicije je ustanovljen eksperimentalno.

obavi razlaganje pojedinačnih sila na komponente a zatim obavi sabiranje i dobije resultantna sila odnosno zbir vektora. [Primeri računanja sile će se raditi na auditornim vežbama.](#)

2.2. Pojam električnog polja. Vektor jačine električnog polja

Dejstvo jednog nanelektrisanog tela na drugo ne objašnjavamo dejstvom nanelektrisanog tela na daljinu već time da ono u svojoj okolini modifikuje stanje prostora stvaranjem posebnog fizičkog stanja koje se naziva **električno polje**. Prema tome električna sila na neko telo je posledica delovanja električnog polja na to nanelektrisano telo. Ako polje potiče od nepokretnih električnih opterećenja naziva se **elektrostatičko polje**.

Do načina za precizno opisivanje električnog polja u svim tačkama dolazi se pomoću **probognog opterećenja** (nanelektrisanja), koje se obično označava sa ΔQ . To je nanelektrisano telo vrlo malo po dimenzijama i po nanelektrisanju, da bi njegov uticaj mogao da se zanemari, jer i ono stvara električno polje, inače sa ΔQ ne bi mogli ispitati prvobitno polje. Obično se uzima da je $\Delta Q > 0$, tj. pozitivno.

Posmatrajmo tačkasto nanelektrisanje Q , i zamislimo u njegovom električnom polju probno opterećenje ΔQ . Na ΔQ deluje električna sila određena Kulonovim zakonom

$$\vec{F}_{na\Delta Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\Delta Q}{r^2} \vec{r}_o \quad (1)$$

Količnik

$$\frac{\vec{F}_{na\Delta Q}}{\Delta Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_o$$

je nezavisan od ΔQ i karakteriše električno stanje prostora odnosno polje u posmatranoj tački bez obzira da li se tu ΔQ nalazi ili ne. Zbog toga se usvaja za osnovnu veličinu kojom se opisuje električno polje u svakoj tački prostora i naziva se **vektor jačine električnog polja** (slika 2.3), i označava sa²

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{na\Delta Q}}{\Delta Q} \quad (2)$$

Vektor (električnog) polja se crta tako da je njegov početak u tački na koju se vektor odnosi (slika 2.3). Osnovna osobina električnog polja u okolini nanelektrisanog tela je da na drugo nanelektrisano telo uvek to polje deluje električnom silom.

Jedinica za intenzitet vektora jačine električnog polja je N/C (njutn/kulon) ili V/m (volt/metar).

Iz relacije (1) se za silu \vec{F} na ΔQ dobija

$$\vec{F} = \Delta Q \cdot \vec{E}$$

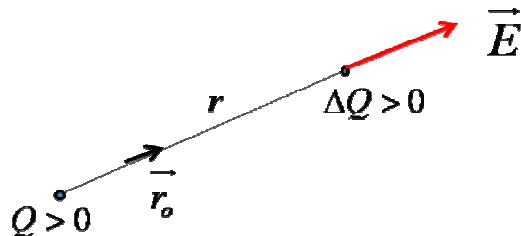
Polazeći od relacije (1) i imajući u vidu relaciju (2), električno polje tačkastog nanelektrisanja je

² Neki autori insistiraju na tome da probno nanelektrisanje mora biti infinitezimalno malo, tj. $\Delta Q \rightarrow 0$. Onda je električno polje dato izrazom

$$\vec{E} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{na\Delta Q}}{\Delta Q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0$$

gde je \vec{r}_0 usmeren od Q, tj. od „izvora“ ka tački u kojoj tražimo polje.



Slika 2.3. Primer vektora jačine električnog polja tačkastog naelektrisanja

Za ukupno električno polje proizvoljnog broja tačkastih opterećenja (naziva se i *sistem električnih opterećenja*), takođe važi princip superpozicije, kao za električne sile, tj. ukupni vektor jačine električnog polja se dobija kao zbir vektora jačina električnog polja koje u posmatranoj tački stvaraju opterećenja sistema pojedinačno, tj.

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{r_k^2} \vec{r}_{0k}$$

Algebarski intenzitet električnog polja (jednog) tačkastog naelektrisanja je

$$|\vec{E}| = E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad \text{pa je vektorski oblik } \vec{E} = E \cdot \vec{r}_0$$

U inženjerskoj praksi najjača električna polja su reda veličine desetak MV/m i ograničena su probojem dielektrika. Za vreme oluja jačina električnog polja na površi tla dostiže nekoliko kV/m. Za polja koja se menjaju u vremenu, maksimalna jačina dozvoljena za dugotrajan boravak ljudi u tom polju zavisi od učestanosti. Za polje industrijskih učestanosti (na primer, 50 Hz) dozvoljena jačina je 10 kV/m, a za 900 MHz (učestanost rada mobilnih telefona) dozvoljena jačina je (po propisima Republike Srbije) 27 V/m. Električno polje na granici prijema komercijalnih radio-aparata je reda veličine 1 μ V/m.

2.3. Linije vektora jačine električnog polja

Linije sila ili linije vektora jačine električnog polja služe za jednostavno vizuelno predstavljanje električnog polja. Definišu se kao zamišljene krive linije na koje je vektor \vec{E} u svim tačkama tangentan.

Za tačkasto, usamljeno, opterećenje linije vektora jačine električnog polja imaju izgled radikalnih linija koje izviru iz pozitivnog, a poniru u negativno opterećenje, slika 2.4.

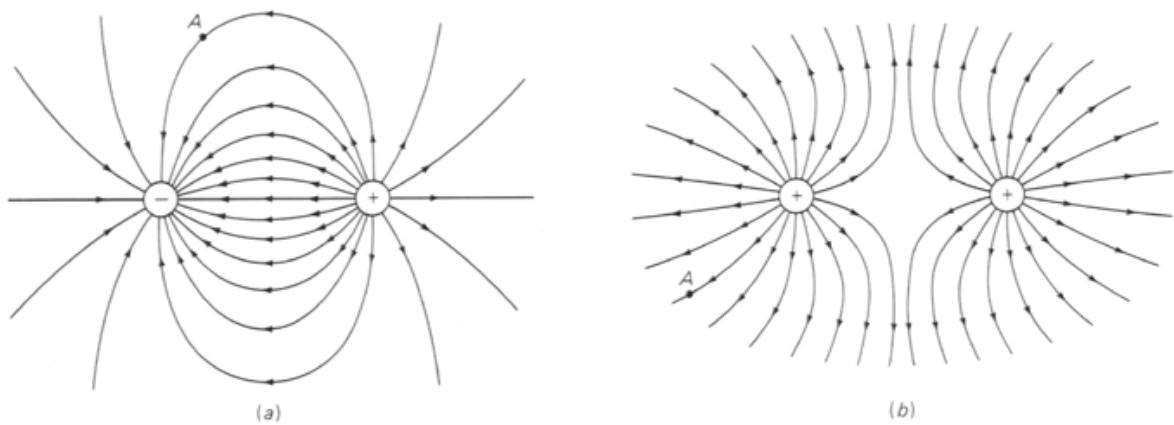
Strelice na linijama ukazuju na smer dejstva (u odnosu na pozitivno naelektrisanje), a gustina linija ukazuje na intenzitet električnog polja. Tamo gde su linije gušće polje je većeg intenziteta. Linije vektora jačine električnog polja dva bliska tačkasta opterećenja, imaju izgled kao na slici 2.5, a) ako su suprotnog i b) ako su istog znaka.

Poseban slučaj je **homogeno električno polje** je polje u kome je vektor jačine polja u svim tačkama istog intenziteta, pravca i smera. To se simbolički piše kao $\vec{E} = \text{const}$. Predstavlja se slikovito linijama polja koje su paralelne i na jednakom rastojanju (iste gustine, slika 2.6). Takvo je, na primer, električno polje u delu pločastog kondenzatora (ne i na krajevima, gde je polje nehomogeno, što se naziva rubni efekat). Ako je $\vec{E} \neq \text{const}$. polje je nehomogeno. Takvo je, na

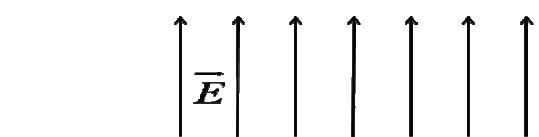
primer, polje na ivicama pločastog kondenzatora, ili polje tačkastog naelektrisanja (slika 2.4), premda je istog intenziteta u svim tačkama na istom rastojanju od naelektrisanja (ali nije istog pravca i smera).



Slika 2.4. Linije sila električnog polja usamljenog tačkastog naelektrisanja:
a) pozitivnog, b) negativnog



Slika 2.5. Linije \vec{E} dva tačkasta naelektrisanja:
a) različitog znaka (tela se privlače), b) istog znaka (tela se odbijaju)



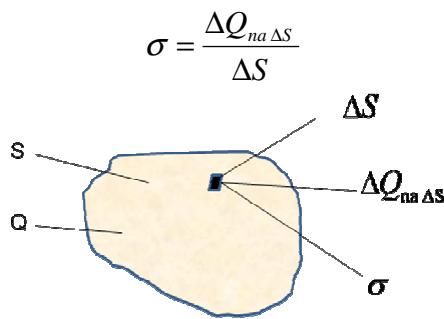
Slika 2.6. Linije vektora homogenog električnog polja

2.4. Kontinualno raspodeljeno naelektrisanje i njihovo električno polje

Videli smo da se naelektrisanje uvek javlja u vidu celog broja najmanjeg naelektrisanja ili kvanta naelektrisanja e (odnosno $-e$). Naelektrisana tela imaju ogroman broj takvih naelektrisanih čestica, pa bi proračun polja preko polja tačkastog naelektrisanja bio praktično nemoguć i kada bi znali položaj svake te čestice. Radi pojednostavljenja, umesto da se svaka čestica posmatra zasebno, uvodi se pojam **gustine naelektrisanja**, koja karakteriše makroskopsku srednju vrednost naelektrisanja u okolini tačke unutar naelektrisanog tela, na njegovoj površi, ili duž neke linije.

Površinska gustina naelektrisanja

Zamislimo jednu površ sa površinskim naelektrisanjem, i na toj površi uočimo elementarnu površinu (površinicu) ΔS . Na površini se nalazi neko opterećenje ΔQ (slika 2.7). Gustina površinskog naelektrisanja u tačkama površinice ΔS se definiše relacijom



Slika 2.7. Uz definiciju površinske gustine naelektrisanja

Ako znamo σ u svim tačkama površi S nekog nanelektrisanog tela, ukupno opterećenje Q na površi tela se dobija

$$Q = \text{zbir svih } \Delta Q \text{ na površi } S = \sum_S \sigma \Delta S$$

Vrednost Q biće utoliko tačnija ukoliko su površinice ΔS manje. Kada su površinice ΔS jako (infinitesimalno) male obeležavaju se sa ds , a znak sume zamenjuje se sa znakom integrala, pa se dobija

$$Q = \int_S \sigma ds$$

Ako je σ isto u svim tačkama površi S nekog tela (homogeno nanelektrisano), tj. $\sigma = \text{const.}$, tada je

$$Q = \sigma \int_S dS = \sigma S$$

Jedinica za površinsku gustinu nanelektrisanja je C/m^2 .

Kod provodnih tela nanelektrisanje (višak nanelektrisanja) raspoređeno je uz površ tela (sloj debljine reda veličine atoma).

Zapreminska gustina nanelektrisanja

Ako je nanelektrisanje raspoređeno zapremski (slika 2.8), na primer u elektronskim cevima (katodne cevi, magnetroni) uvodi se pojam **gustine zapremskog nanelektrisanja**

$$\rho = \frac{\Delta Q_u \Delta v}{\Delta v}$$

gde „ ΔQ “ označava ΔQ unutar male zapremine Δv koja obuhvata posmatranu tačku.

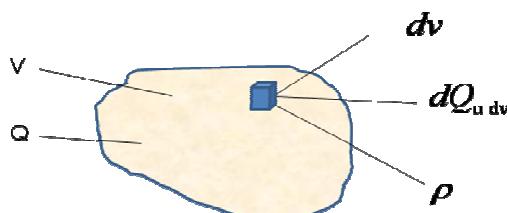
Na sličan način, kao u prethodnom slučaju je

$$Q = \text{zbir svih } (\rho \Delta v) \text{ po zapremini } V = \sum_V \rho \Delta v \text{ odnosno } Q = \int_V \rho dv$$

Ako je ρ isto u svim tačkama tela zapremine V , tj. $\rho = \text{const.}$, tada je

$$Q = \rho \int_V dv = \rho V$$

Jedinica za zapreminsку gustinu nanelektrisanja je C/m^3 .



Slika 2.8. Uz definiciju zapremske gustine nanelektrisanja

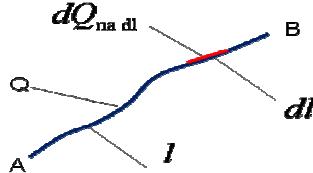
Linijska gustina naelektrisanja

Ako je naelektrisanje raspoređeno linijski (slika 2.9), ovo je aproksimacija, uvodi se pojam **linijske gustine naelektrisanja**

$$Q' = \frac{\Delta Q_{na\Delta l}}{\Delta l}$$

Na sličan način, kao u prethodnom slučaju je

$$Q = \text{zbir svih } (Q' \Delta l) \text{ po dužini } l \text{ jednako je } \sum_l Q' \Delta l \text{ odnosno } Q = \int_l Q' dl$$



Slika 2.9. Uz definiciju linijske gustine naelektrisanja

Ako je Q' isto u svim tačkama linije, tj. $Q' = \text{const.}$, tada je

$$Q = Q' \int_l dl = Q' l$$

Jedinica za linijsku gustinu naelektrisanja je C/m.

Postupak određivanja električnog polja kontinualno raspodeljenog naelektrisanja

Ako je poznata gustina naelektrisanja u svakoj tački, vektor jačine električnog polja koje takvo naelektrisanje stvara određuje se na sledeći način: polazi se od izraza za tačkasto nanelektrisanje i primenjuje princip superpozicije.

U slučaju površinskog nanelektrisanja, izdeli se površnica, na kojoj se nanelektrisanje nalazi, na površinice ds . Ako je u tačkama površinice ds gustina površinskog nanelektrisanja σ , nanelektrisanje na površinici je σds . To nanelektrisanje se može tretirati kao tačkasto, pa je električno polje koje od njega potiče

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \vec{r}_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{r}_o$$

Ukupan vektor električnog polja dobija se vektorskim zbirom svih vektora jačina polja koji potiču od opterećenja na pojedinim površinicama, tj.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{r}_o$$

Znak integrala ovde, u stvari, znači zbir (vektorski) veoma malih veličina. U opštem slučaju rešavanje integrala svodi se na dvostruki integral.

Na sličan način se u slučaju zapreminske raspodele opterećenja poznate gustine ρ dobija za ukupan vektor jačine polja

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dv}{r^2} \vec{r}_o$$

ili linijske gustine

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{Q' dl}{r^2} \vec{r}_o$$

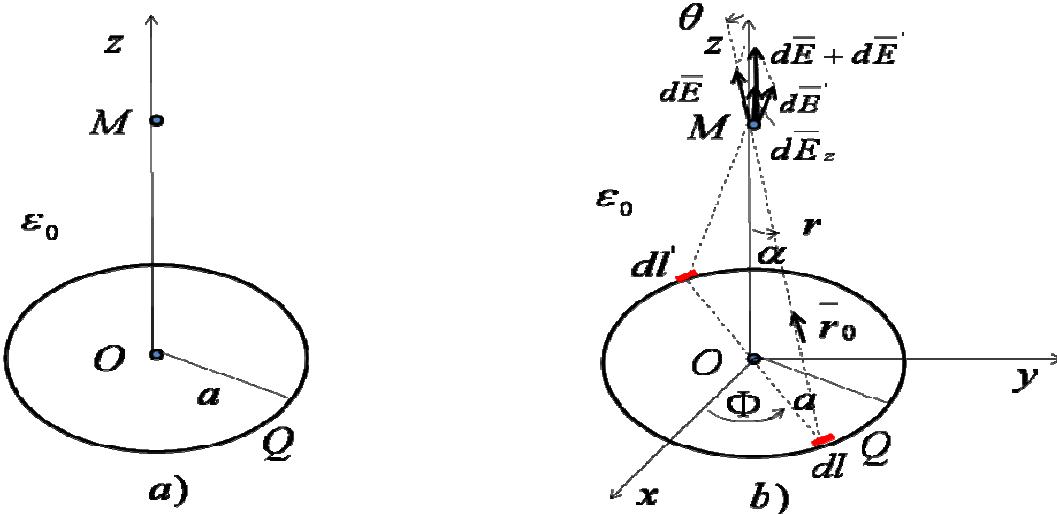
Kod zapreminski raspodeljenog naelektrisanja, u opštem slučaju rešavanje integrala svodi se na trostruki integral (pa takve primere nećemo rešavati), a kod linijske na integral po jednoj promenjivoj.

U slučaju kombinovane raspodele naelektrisanja vektor jačine električnog polja (više) tačkastih opterećenja, zapreminski, površinski i linijski raspodeljenih naelektrisanja u vakuumu, izračunava se po formuli

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{r_k^2} \vec{r}_{ok} + \int_V \frac{\rho dv}{r^2} \vec{r}_o + \int_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{r}_o + \int_l \frac{Q' dl}{r^2} \vec{r}_o \right\}$$

Primeri određivanja električnog polja kontinualno raspodeljenog naelektrisanja

Primer 2.2. Odrediti vektor \vec{E} u proizvoljnoj tački na osi z normalnoj na ravan kružne konture poluprečnika a , u vakuumu, a koja prolazi kroz centar konture. Kontura je ravnomerno naelektrisana ukupnim naelektrisanjem Q (slika 2.10a).



Slika 2.10 a) naelektrisana kružna kontura, b) način određivanja njenog električnog polja na osi normalnoj na ravan konture a koja prolazi kroz centar konture

Smestimo u centar konture Dekartov koordinatni sistem. Posmatrano naelektrisanje je linijsko, poduzne gustine $Q' = Q/l = Q/(2\pi a)$. Izdelimo konturu na niz malih elemenata dl . Naelektrisanje jednog elementa dužine dl (slika 2.10b) je $dQ = Q' dl$. Vektor jačine električnog polja tog elementa, u tački M , je, u skladu sa izrazom za polje tačkastog naelektrisanja,

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q' dl}{r^2} \vec{r}_0, \text{ gde je } r = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

Ako uočimo dva naspramna elementa konture, istih dužina ($dl = dl'$), slika 2.10b, vidimo da su intenziteti njihovih polja jednaki zbog simetrije, i da zbir vektora polja ta dva elementa ($d\vec{E} + d\vec{E}'$) ima samo z komponentu (komponente po x i y osi se poništavaju), pa polje cele konture ima samo E_z komponentu ($E_x = E_y = 0$) (horizontalne komponente se poništavaju).

Ugao između vektora $d\vec{E}$ i z -ose (θ) jednak je uglu α (uglovi sa unakrsnim kracima, slika 2.10b), pa je projekcija $d\vec{E}$ na z -osu jednaka $dE_z = dE \cos \theta = dE \cos \alpha = dE \frac{z}{r}$. Odatle je z -

komponenta	resultantnog	električnog	polja
$E_z = \int_l dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{Q' dl}{r^2} \frac{z}{r} = \frac{Q' z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_l dl = \frac{Q' z}{4\pi\epsilon_0 r^3} 2\pi a = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, jer je $\int_l dl = 2\pi a$, odnosno			
	$E_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$		

Ako je tačka M na velikom rastojanju od konture ($|z| \gg a$), kontura se iz tačke vidi kao tačkasto nanelektrisanje Q smešteno u koordinatnom početku. Matematički, tada je $\sqrt{a^2 + z^2} \approx |z|$, pa je $E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{|z|}$. Količnik³ $\frac{z}{|z|} = \text{sgn } z$ je logičan jer posmatramo z komponentu električnog polja. Ako je $Q > 0$, tada je stvarni smer polja od konture. Ako je tačka M na pozitivnom delu z-ose, stvarni smer se poklapa sa pozitivnim smerom z-ose, odnosno $E_z = |\vec{E}|$, a ako je tačka M na negativnom delu z-ose, stvarni smer se poklapa sa negativnim delom z-ose, tj. $E_z = -|\vec{E}|$, što je u skladu sa relacijom $E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{sgn } z$.

Električno polje kružne konture se ne može analitički odrediti u tačkama van z-ose bez upotrebe specijalnih matematičkih funkcija (eliptički integrali).

Primer 2.3. Odrediti vektor \vec{E} na z-osi polukružne linije ravnomerno nanelektrisane nanelektrisanjem Q, kao na slici 2.11a.

Poduzna gustina nanelektrisanja je $Q' = Q/(\pi a)$. Primer se rešava slično prethodnom. Linija se izdeli na segmente dl , odredi se polje svakog segmenta, a onda se polja vektorski saberi. Ali ovde, za razliku od prethodnog primera, postoji, pored z komponente, i horizontalna komponenta električnog polja.

Vektor $d\vec{E}$ razložimo na komponente u Dekartovom koordinatnom sistemu, $d\vec{E} = d\vec{E}_h + d\vec{E}_z$ (slika 2.11b). Izraz za vertikalnu (z) komponentu je isti kao u prethodnom primeru, tj. $dE_z = dE \cos \alpha = dE \frac{z}{r}$. Odatle je $E_z = \int_l dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{Q' dl}{r^2} \frac{z}{r} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, što je isti rezultat kao u prethodnom primeru (jer je ukupno nanelektrisanje Q isto).

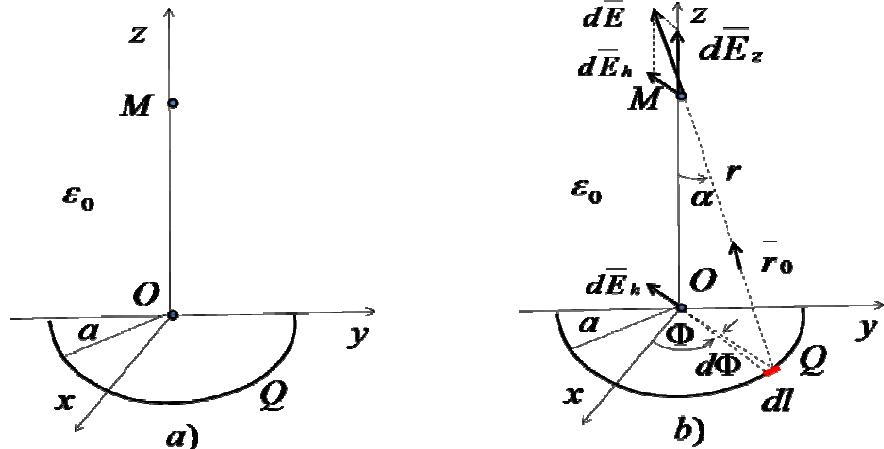
Algebarski intenzitet horizontalne komponente, u odnosu na referentni smer sa slike 2.11b, je $dE_h = dE \sin \alpha = dE \frac{a}{r}$. Vektor $d\vec{E}_h$ treba zatim projektovati na ose x i y, $dE_x = -dE_h \cos \Phi$ i $dE_y = -dE_h \sin \Phi$.

Sada je $E_x = \int_l dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{Q' dl}{r^2} \frac{a}{r} \cos \Phi = -\frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{a}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \Phi d\Phi$, jer je $dl = ad\Phi$,

odnosno $E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q' a^2}{r^3} = -\frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0} \frac{Qa}{r^3}$ jer je $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \Phi d\Phi = 2$, dok je

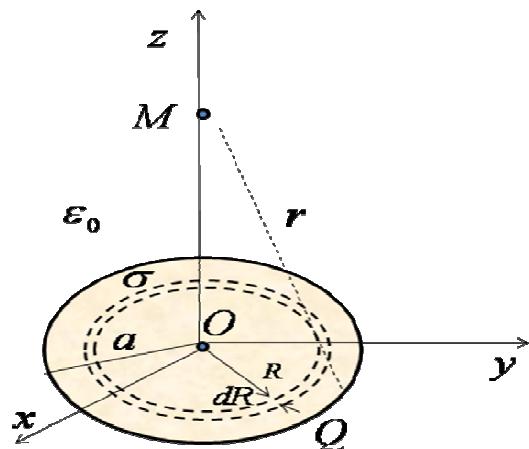
³ Funkcija signum se definiše kao $\text{sgn } z = \begin{cases} -1, & z < 0 \\ 0, & z = 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases}$

$E_y = \int dE_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q' dl}{r^2} \frac{a}{r} \sin \Phi = 0$, jer je $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \Phi d\Phi = 0$, što se moglo zaključiti i na osnovu simetrije.



Slika 2.11 a) nanelektrisana polukružna kontura, b) način određivanja njenog električnog polja

Primer 2.4. Odrediti vektor \bar{E} u proizvoljnoj tački na osi normalnoj na krug (prolazi kroz centar kruga) poluprečnika a , ravnomoerno nanelektrisan po površi nanelektrisanjem površinske gustine σ (slika 2.12).



Slika 2.12. Uz određivanje električnog polja ravnomoerno nanelektrisane polukružne ravni

Zadatak se može rešiti polazeći od opštег izraza za polje površinskog nanelektrisanja, ali takav prilaz zahteva dvostruku integraciju. Ali, ako se pode od rezultata iz primera na slici 2.10, rešenje se može svesti na jednostruku integraciju (jer je jedna integracija već obavljena u tom primeru).

Dakle, izdelimo krug na tanke prstenove, poluprečnika R i širine dR . Polje svakog ovog prstena je isto kao polje kružne konture (što smo rešili u primeru sa slike 2.10) čije je nanelektrisanje $dQ = \sigma ds = \sigma 2\pi R dR$, gde je ds površina tankog prstena. Na osnovu rezultata iz primera na slici 2.10, polje ima samo z -komponentu (pa ako nanelektrisanje Q zamenimo sa dQ , a poluprečnik a sa R), dobijamo $dE_z = \frac{zdQ}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}$. Ukupno polje se dobija sabiranjem (integraljenjem) polja

svih prstenova na koje je krug izdeljen, pa je

$$E_z = \int_{R=0}^a dE_z = \int_{R=0}^a \frac{\sigma z R dR}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_{R=0}^a \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Poslednji integral se može rešiti, na primer sменом $t = R^2 + z^2$, pri čemu je $dt = 2RdR$. Donja granica integracije po t je z^2 , a gornja je $a^2 + z^2$. Tako se dobija $\int_{R=0}^a \frac{RdR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \int_{t=z^2}^{a^2+z^2} \frac{1}{2} \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{t}} \Big|_{t=z^2}^{a^2+z^2} = \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}$, pa je z-komponenta rezultantnog polja data izrazom $E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$.

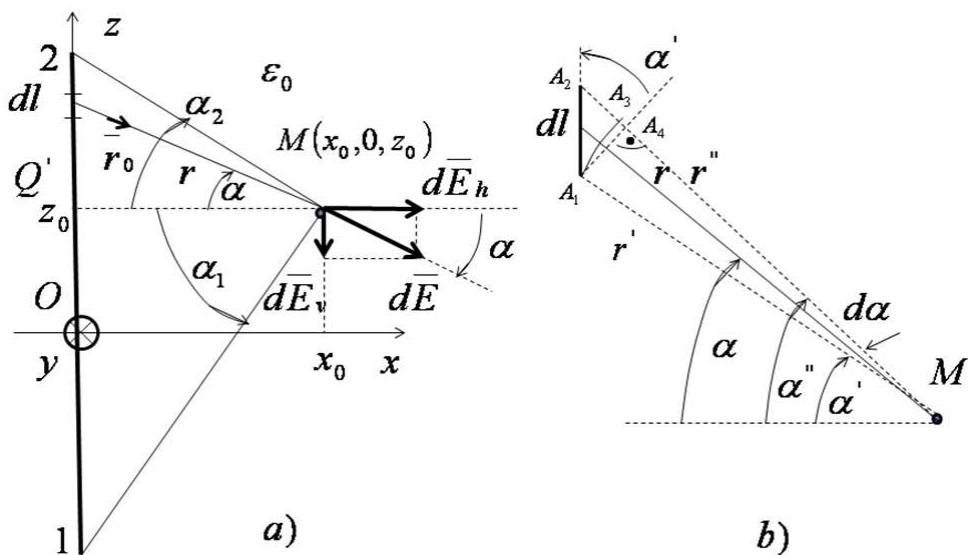
Kada je tačka M daleko od kruga, tj. kada je $|z| \gg a$, dobijeni rezultat prelazi u izraz za polje tačkastog nanelektrisanja $Q = \sigma\pi a^2$, tj.

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{\sqrt{a^2 + z^2} - |z|}{|z|\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|)(\sqrt{a^2 + z^2} + |z|)}{|z|\sqrt{a^2 + z^2}(\sqrt{a^2 + z^2} + |z|)} \approx \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{2|z|^3} = \frac{\sigma\pi a^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|z|^3}.$$

Zamislimo da se približavamo površi kruga (tako da $z \rightarrow 0$). Krug, u graničnom slučaju, izgleda kao beskonačno velika ravnomeno nanelektrisana ravna površ, pa izraz za električno polje postaje $E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn} z$. Ovaj rezultat za ravnomerno nanelektrisanu ravan, izvećemo kasnije, jednostavnije, polazeći od Gausovog zakona.

Deljenjem na kružne prstenove može se, na sličan način, odrediti i električno polje na osi ravnomerno nanelektrisane polusferne ili sferne površi, ali se polje sferne površi jednostavnije određuje pomoću Gausovog zakona.

Primer 2.5. Odrediti vektor \vec{E} u proizvoljnoj tački Oxy ravni, $M(x_0, 0, z_0)$ u ravnini ravnomerno nanelektrisane niti podužnom gustinom nanelektrisanja Q' u vakuumu (slika 2.13a). Osa y je normalna na ravan crteža i usmerena u tu ravan.



Slika 2.13. Uz određivanje električnog polja ravnomerno nanelektrisane niti

Izdelimo nit (vlakno) na elemente dužine dl i primenimo izraz za električno polje linijskog nanelektrisanja $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{Q' dl}{r_o^2} \hat{r}_o$. Vektor $d\vec{E}$, koji potiče od elementa dl , je

$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q' dl}{r^2} \hat{r}_o$, a može se razložiti na dve komponente, horizontalnu i vertikalnu. U odnosu na referentne smerove sa slike 2.13a, algebarski intenziteti tih komponenti su $dE_h = dE \cos \alpha$ i

$dE_v = dE \sin \alpha$, gde je α ugao između horizontalnog pravca (normalnog rastojanja tačke M i niti) i potega r (koji spaja element dl i tačku M). Ugao α je pozitivan ukoliko je z-koordinata elementa dl veća od z_0 ($z > z_0$), kao što je slučaj na slici 2.13a. U suprotnom α je negativan.

Na slici 2.13a, x-komponenta vektora \vec{E} je $d\vec{E}_x = d\vec{E}_h$, a z-komponenta je $d\vec{E}_z = -d\vec{E}_v$, odnosno $dE_x = dE \cos \alpha = dE \frac{x_0}{r}$ i $dE_z = -dE \sin \alpha = -dE \frac{z - z_0}{r}$, gde je $r = \sqrt{x_0^2 + (z - z_0)^2}$.

Stavljujući da je $dl = dz$ i sabirajući (integraljeći) doprinose svih elemenata dl , dobijamo integrale po promjenjivoj z koji se mogu rešiti analitički.

Međutim, umesto da integralimo po z koordinati, u ovom primeru je lakše da sve promjenjive veličine izrazimo preko ugla α i integralimo po tom uglu.

Sa slike 2.13 se vidi da je $r = \frac{x_0}{\cos \alpha}$. Dužina dl se može izraziti preko priraštaja $d\alpha$ ugla α na dva načina. Prvi sledi iz trigonometrijskih odnosa (slika 2.13b). Dužina kružnog luka ($A_1 A_3$) koji odgovara uglu $d\alpha$ je $r d\alpha$, gde je $r = \overline{A_1 M}$ poluprečnik tog luka. Dužina luka je približno jednaka dužini normale povučene iz tačke A_1 na drugi krak ugla $d\alpha$ ($\overline{A_1 A_4}$). Kako je ugao $d\alpha$ mali, to su dužine kružnog luka $r d\alpha$, tetine ($\overline{A_1 A_3}$) i normale ($\overline{A_1 A_4}$) približno jednake. Osim toga, uglovi α' , $\alpha'' = \alpha' + d\alpha$ i $\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$ su približno jednaki, a važi i relacija $r' \approx r \approx r''$. Zbog toga je $\overline{A_1 A_4} \approx rd\alpha$.

Ugao između normale $\overline{A_1 A_4}$ i elementa dl jednak je α'' (uglovi sa normalnim kracima) pa je, iz pravouglog trougla $A_1 A_2 A_4$, $dl = \frac{\overline{A_1 A_4}}{\cos \alpha'} \approx \frac{rd\alpha}{\cos \alpha} = \frac{x_0 d\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Drugi način je pomoću diferencijalnog računa. Prvo je $z - z_0 = x_0 \operatorname{tg} \alpha$, gde je sa z označena koodinata elementa dl . Diferenciranjem ove relacije se takođe dobija $dz = x_0 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = dl$.

Ako sa α_1 i α_2 označimo uglove koji odgovaraju donjem, odnosno gornjem kraju niti, konačno se dobija

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Q \frac{\cos \alpha d\alpha}{x_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x_0} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

i

$$E_z = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Q \frac{\sin \alpha d\alpha}{x_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x_0} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Primer 2.6. Ponovno posmatrajmo primer sa slike 2.13, ali neka je nit veoma dugačka (teorijski beskonačno dugačka). Sada je $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ i $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, pa je

$$E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 x_0} \quad \text{i} \quad E_z = 0.$$

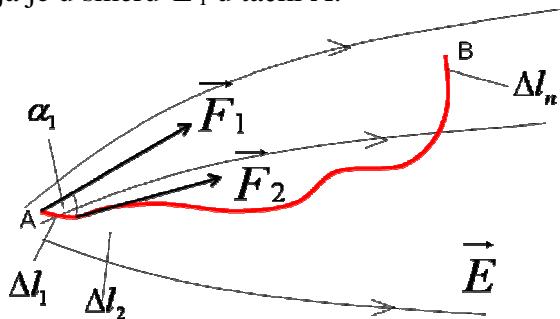
Ovaj rezultat se mnogo jednostavnije može dobiti pomoću Gausovog zakona (primer 4.7 u podoglavlju 4.3).

3. POTENCIJAL ELEKTRIČNOG POLJA

Pored vektora \vec{E} , električno polje se može opisati i skalarnom veličinom – potencijalom. Do njega se dolazi preko razmatranja rada sila električnog polja.

3.1. Rad sila električnog polja

Posmatrajmo deo nekog električnog polja prikazanog pomoću linija \vec{E} (slika 3.1). Zamislimo da se u tački A polja nalazi pozitivno probno nanelektrisanje ΔQ . Na njega deluje sila $\vec{F}_1 = \Delta Q \vec{E}_1$ (videti podpoglavlje 2.2) koja je u smeru \vec{E}_1 u tački A.



Slika 3.1. Pomeranje probnog opterećenja ΔQ iz tačke A u tačku B pod dejstvom električnog polja

Ako bismo pustili da ta sila pomeri ΔQ u smeru vektora \vec{E}_1 za neku malu dužinu Δl , sila bi izvršila rad

$$\Delta A = F_1 \Delta l = \Delta Q E_1 \Delta l$$

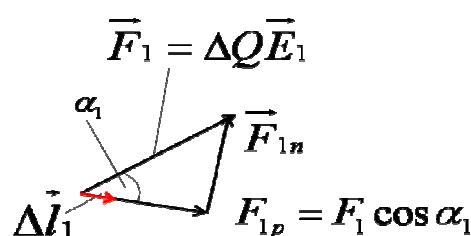
Međutim ako pomeraj opterećenja ΔQ pod dejstvom sile \vec{F}_1 nije u smeru vektora \vec{F}_1 , nego pod nekim uglom, na primer α_1 , tada je

$$\Delta A_1 = F_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1 = \Delta Q E_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1 = \vec{F}_1 \vec{\Delta l}_1 = \Delta Q \vec{E}_1 \vec{\Delta l}_1 = \Delta Q E_1 \Delta l_1 \cos(\vec{E}_1, \vec{\Delta l}_1)$$

gde $\vec{F}_1 \vec{\Delta l}_1$ predstavlja *skalarni proizvod vektora*.

To se može shvatiti i kao razlaganje sile na komponente u pravcu pomeraja i normalno na pravac pomeraja (slika 3.2)

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1n} + \vec{F}_{1p}$$



Slika 3.2. Komponente električne sile u tački sa slike 3.1.

Ukupni rad sila pri pomeranju ΔQ od A do B duž izložljene linije koju čine $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$, dobija se kao zbir radova

$$A_{\text{sila polja od A do B}} = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$$

ili

$$A = \Delta Q \left(\vec{E}_1 \vec{\Delta l}_1 + \vec{E}_2 \vec{\Delta l}_2 + \dots + \vec{E}_n \vec{\Delta l}_n \right), \quad k=1, \dots, n$$

$\vec{\Delta l}_k$ su mali vektorski elementi putanja u smeru kretanja probnog nanelektrisanja, ili kraće napisano

$$A = \Delta Q \sum_{k=1}^n \vec{E}_k \vec{\Delta l}_k$$

Ako se ΔQ kreće duž krive linije, onda se ista deli na veliki broj malih segmenata, tako da je svaki približno prav i primeni se ista formula, pri čemu $\Delta l \rightarrow dl$, pa je

$$A = \Delta Q \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

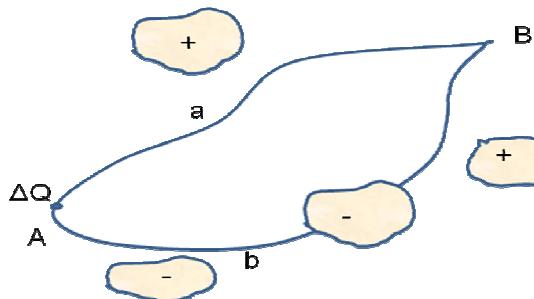
Ako je rad pozitivan ($A>0$) znači da su ga obavile električne sile, a ako je $A<0$ pomeranje nanelektrisanja, tj. rad vrše neke druge sile (mehaničke) delujući protiv električnih sila. Ovaj zaključak ćemo koristiti u narednom izlagaju.

3.2. Zakon održanja energije i njegova primena na elektrostatičko polje

Iskustvo kaže da se energija može pretvarati iz jednog oblika u drugi, ali da se na drugi način nemože dobiti. Na primer, električna energija se može dobiti iz hemijske energije (baterije, akumulatori), toplotne energije (termoelementi) ili mehaničke energije (generator u električnim centralama).

Ćinjenica da se energija nemože stvarati već samo „održavati“ (tj. prelaziti iz jednog oblika u drugi) naziva se **zakon održanja energije**⁴.

Posmatrajmo sistem nanelektrisanih tela (slika 3.3.). Zamislimo da su sile električnog polja prenele probno nanelektrisanje ΔQ iz tačke A u tačku B jednom duž krive linije AaB, a drugi put duž krive linije AbB (bez trenja). Da li se rad razlikuje?



Slika 3.3. Primena zakona održanja energije na elektrostatičko polje

Dokazaćemo da su ta dva rada jednaka (moraju biti).

Neka se ΔQ kreće duž zatvorene putanje AaBbA, bez trenja. Tamo gde je $\angle(\vec{E}, \vec{dl}) < \pi/2$, rad električnih sila je pozitivan ($A>0$), tj. sile polja ubrzavaju opterećenje. Tamo gde je $\angle(\vec{E}, \vec{dl}) > \pi/2$, rad sile električnog polja je negativan ($A<0$), što znači da električne sile usporavaju opterećenje, tj. da se kretanje može vršiti samo pod dejstvom neke mehaničke sile.

⁴ Videti u prilozima u Pregledu osnovnih fizičkih veličina i jedinica.

Kada ΔQ obide celu putanju i vrati se u tačku A, ceo sistem je sasvim isti kao pre polaska opterećenja iz tačke A. Energija sadržana u sistemu mora takođe biti ista kao ranije. Sledi da je rad sila električnog polja po bilo kojoj zatvorenoj putanji jednak nuli, tj. matematički napisano

$$\Delta Q \int_{AaBbA}^{\vec{E} \cdot \vec{dl}} = 0, \quad \Delta Q = \text{const.}$$

odnosno sledi da \vec{E} u elektrostatici mora da zadovoljava jednačinu

$$\oint_C^{\vec{E} \cdot \vec{dl}} = 0, \quad (3.1)$$

što se čita „cirkulacija vektora električnog polja duž proizvoljne konture C (zatvorene putanje)“ ili „zbir proizvoda $\vec{E} \cdot \vec{dl}$ po proizvoljnoj konturi C jednak je nuli.“ Relacija (3.1)⁵ važi za svaku zatvorenu putanju u elektrostatičkom polju. Važi za vakuum, nelinearne dielektrike (lineарне homogene dielektrike i linearne nehomogene dielektrike) za sve slučajeve. Važi i za vremenski konstantne (stalne) struje.

Polja za koja važi relacija (3.1) nazivaju se **konzervativna**.

Relacija (3.1) se, za naš primer, koji je sasvim opšti, može napisati ovako

$$\Delta Q \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} + \Delta Q \int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0, \quad \text{odnosno} \quad \Delta Q \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\Delta Q \int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Iz matematike je poznato da je

$$\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

ili pri promeni smera kretanja kretanja menja se smer \vec{dl} pa se može umesto \vec{dl} staviti $-\vec{dl}$ (promena orijentacije putanje ekvivalentna je promeni znaka), tako se dobija da je

$$\Delta Q \int_{AaB}^{\vec{E} \cdot \vec{dl}} = \Delta Q \int_{AbB}^{\vec{E} \cdot \vec{dl}}$$

Posle deljenja sa ΔQ , dobija se

$$\int_{AaB}^{\vec{E} \cdot \vec{dl}} = \int_{AbB}^{\vec{E} \cdot \vec{dl}} \quad (3.2)$$

odakle sledi zaključak da $\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$ ne zavisi od oblika putanje između A i B, pa su jednačina (3.1) i

jednačina (3.2) ekvivalentne (jednačinu (3.2) smo izveli iz jednačine (3.1)) i u suštini izražavaju zakon održanja energije za elektrostatičko polje. Zaključak iz jednačine (3.2) služi kao osnova za definisanje potencijala električnog polja.

3.3. Definicija potencijala električnog polja. Razlika potencijala. Napon

Osobina električnog polja da rad pri prenošenju ΔQ ne zavisi od oblika putanje, već samo od njenih krajnjih tačaka omogućuje da se svaka tačka polja opiše jednom skalarnom veličinom, tzv. potencijalom.

Odaberimo proizvoljno jednu tačku R u polju. Nazvaćemo je **referentna tačka**. Količnik

⁵ Može se izvesti i iz Kulonovog zakona.

$$\frac{A_{el.silaodAdoR}}{\Delta Q} = \frac{\Delta Q \int_A^R \vec{E} d\vec{l}}{\Delta Q} = V_A$$

definiše **potencijal tačke A u odnosu na referentnu tačku R** i izražava se relacijom

$$V_A = \int_A^R \vec{E} d\vec{l}$$

Ponekad se umesto V koriste i druge oznake, na primer ψ .

S obzirom da se do relacije za V (potencijal) došlo preko relacije za A (rad) vidi se da je potencijal u nekoj tački brojno jednak radu koji bi električne sile izvršile kada bi jedinično probno opterećenje prenеле iz tačke A u referentnu tačku R.

Izbor referentne tačke je uglavnom proizvoljan⁶. U praksi se najčešće uzima tačka na površi zemlje. Pošto je Zemlja provodna sve njene tačke su na istom potencijalu – a to je ekvipotencijalna površ, što ćemo pokazati kasnije.

Potencijal referentne tačke je $V_R=0$ jer se tačke poklapaju, tj.

$$V_R = \int_R^R \vec{E} d\vec{l} = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Uzima se da je potencijal Zemlje nula.

Razlika potencijala dve tačke (slika 3.4), u skladu sa definicijom potencijala je

$$V_A - V_B = \int_A^R \vec{E} d\vec{l} - \int_B^R \vec{E} d\vec{l} = \int_A^R \vec{E} d\vec{l} + \int_R^B \vec{E} d\vec{l}$$



Slika 3.4. Određivanje razlike potencijala tačaka A i B

Kako $\int_A^B \vec{E} d\vec{l}$ ne zavisi od putanje između A i B, svejedno je da li je R na putanji ili ne, pa se može pisati

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

što predstavlja **definiciju razlike potencijala u tačkama A i B**. Razlika potencijala očigledno ne zavisi od položaja referentne tačke. Prethodna definicija važi u elektrostatičkom polju.

Razlika potencijala se naziva i **električni napon** ili **napon** između tačaka A i B, tj. ti nazivi su ekvivalentni.

Napon se označava sa U, a jedinica je [V] što se čita „volt“. Napon između tačaka A i B je

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

⁶ Pri proračunima, za tela konačnih dimenzija referentna tačka se obično bira u beskonačnosti, a za tela neograničenih dimenzija (na primer veoma dug provodnik) bira se u konačnom delu prostora.

Iz definicione relacije sledi da je

$$U_{AB} = -U_{BA}$$

Napon je usmerena skalarna veličina. Određuje se svojim *referentnim smerom* i *algebarskim intenzitetom* u odnosu na taj smer. Referentni smer napona se definiše preko indeksa ili grafički. Pretpostavlja se da je tačka koju označava prvi indeks na višem potencijalu. Ako se označava grafički, onda se kod tačke, za koju se pretpostavlja da je, na višem potencijalu stavlja znak „+“. Ako se u rezultatu proračuna dobija negativna vrednost, znači da je tačka označena prvim indeksom, u stvari, na nižem potencijalu.

Očigledno ako znamo \vec{E} u svim tačkama neke putanje od A do R može se izračunati i potencijal tačke A (V_A) u odnosu na R.

Primer 3.1. Odrediti potencijal u nekoj tački P polja tačkastog nanelektrisanja u odnosu na referentnu tačku R (slika 3.5).

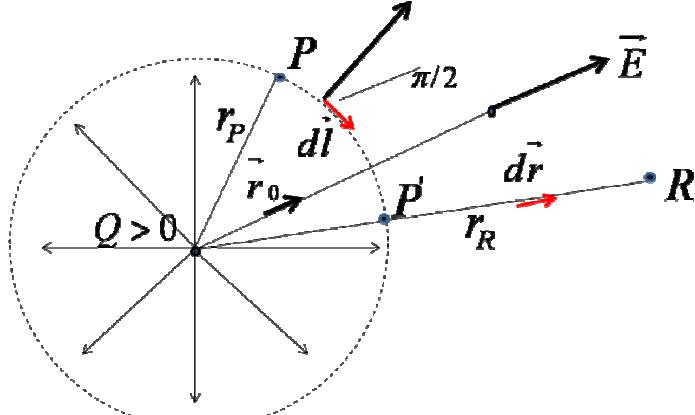
Polazimo od definicione relacije

$$V_P = \int_P^R \vec{E} d\vec{l}$$

Za putanju integracije možemo izabratи proizvoljnu (bilo koju) putanju, pa zato biramo onu koja omogućuje najlakše izračunavanje integrala, to je $PP'P'R$ (slika 3.5), na osnovu čega je

$$V_P = \int_P^{P'} \vec{E} d\vec{l} + \int_{P'}^R \vec{E} d\vec{l} = \int_P^{P'} E(r) d\vec{l} \cos(\vec{E}, \vec{dl}) + \int_{P'}^R E(r) dr \cos(\vec{E}, \vec{dr}) = 0 + \int_{P'}^R E(r) dr,$$

s obzirom da je ugao $\angle(\vec{E}, \vec{dl}) = \pi/2$, a ugao $\angle(\vec{E}, \vec{dr}) = 0$.



Slika 3.5. Određivanje potencijala tačke u polju tačkastog nanelektrisanja

Kako je intenzitet električnog polja tačkastog nanelektrisanja, u tački na rastojanju r od centra nanelektrisanja

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

to je

$$V_P = \int_{r_p}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_p}^{r_R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_R} - \frac{1}{r_p} \right)$$

odnosno

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_R} \right) \quad (3.3)$$

Ako se zamisli da je R u beskonačnosti, tada $r_R \rightarrow \infty$, $1/r_R \rightarrow 0$, pa je

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

što predstavlja potencijal tačke P u polju tačkastog nanelektrisanja, za referentnu tačku u beskonačnosti. U poslednjoj relaciji indeks P je izostavljen kao nepotreban. Izraz važi i za negativno tačkasto nanelektrisanje.

Koristeći izraz (3.3) lako se dolazi do razlike potencijala (napon) između tačaka A i B u polju tačkastog opterećenja (A je na rastojanju r_A , a B na rastojanju r_B od opterećenja)

$$V_A - V_B = U_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

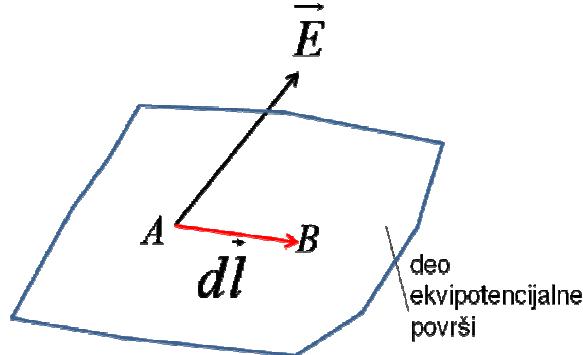
3.4. Ekvipotencijalne površi. Veza između potencijala i vektora jačine polja

Ekvipotencijalne površi su površi čije su sve tačke na istom potencijalu. Slično **ekvipotencijalne linije** su linije čije su sve tačke na istom potencijalu. Na primer ekvipotencijalne linije tačkastog nanelektrisanja su kružnice, a ekvipotencijalne površi sfere, jer su prema relaciji

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

sve tačke na istom rastojanju r od nanelektrisanja na istom potencijalu.

Posmatrajmo dve bliske tačke A i B (na rastojanju \vec{dl}) na nekoj ekvipotencijalnoj površi (slika 3.6).



Slika 3.6. U svim tačkama ekvipotencijalne površi \vec{E} je normalan na tu površ

Razlika potencijala u tačkama A i B je nula (po definiciji ekvipotencijalne površi). Takođe je po definiciji

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot \vec{dl} = Edl \cos(\vec{E}, \vec{dl})$$

(znak integrala ne pišemo, jer imamo samo jedan član $\vec{E} \cdot \vec{dl}$).

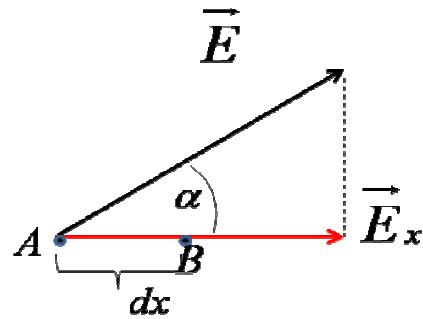
Kako je potrebno da je, po prepostavci, $V_A - V_B = 0$, to je moguće samo ako je $\angle(\vec{E}, \vec{dl}) = \pi/2$ (pri $E \neq 0$, i $dl \neq 0$). Pošto su A i B proizvoljne tačke, odatle sledi da je vektor jačine električnog polja normalan na ekvipotencijalne površi (linije sila prolaze kroz ekvipotencijalne površi pod pravim uglom).

Između E i V postoji jednostavna veza, koju ćemo izvesti. Posmatrajmo dve bliske tačke A i B u elektrostatičkom polju (slika 3.7). Neka se nalaze na x – osi. Neka potencijal raste u smeru x – ose, pa je

$$V_B = V_A + dV$$

a razlika potencijala tačaka A i B je

$$V_A - V_B = V_A - (V_A + dV) = -dV \quad (3.4)$$



Slika 3.7. Određivanje komponente \vec{E} u smeru x-ose pomoću promene potencijala u dve bliske tačke A i B

Kako su tačke, po pretpostavci, bliske (na rastojanju dx , slika 3.6), razlika potencijala se može dobiti i relacijom

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot \vec{dx} = Edx \cos(\vec{E}, \vec{dx}) = Edx \cos \alpha = E_x dx \quad (3.5)$$

gde je

$$E_x = E \cos \alpha.$$

Iz jednačine (3.4) i (3.5) se dobija

$$V_A - V_B = -dV = E_x dx$$

odakle sledi

$$E_x = -\frac{dV(x)}{dx}$$

a to predstavlja izraz za intenzitet komponente \vec{E} u smeru x – ose. Na sličan način se dobija relacija za intenzitet komponente \vec{E} u smeru ostalih osa, odnosno u generalisanom pravcu. Prema tome ako se zna potencijal u nekoj tački, intenzitet komponenata \vec{E} , u bilo kom smeru, u toj tački može da se izračuna. Znak „-“, znači da je smer \vec{E} ka susednoj ekvipotencijalnoj površi nižeg potencijala. Porast potencijala je najbrži u smeru suprotnom od smera vektora \vec{E} ($\alpha = 180^\circ$). Na ekvipotencijalnoj površi je $dV=0$, pa je $E_x = 0$, a to znači da je \vec{E} normalno na površ, tj. ima samo normalnu komponentu.

3.5. Električni dipol

Pod **električnim dipolom** se podrazumeva sistem od dva jednakaka opterećenja suprotnog znaka (slika 3.8). Najčešće se smatra da je rastojanje između opterećenja mnogo manje od odstojanja tačaka dipola u kojima određujemo polje ili potencijal.

Pojam dipola ćemo koristiti kod proučavanja ponašanja dielektrika u elektrostatičkom polju. Proizvod

$$Q\vec{d} = \vec{p}$$

naziva se **momenat električnog dipola** i karakteriše dipol i po orientaciji i veličini, kao što Q opisuje tačkasto nanelektrisano telo. Vektor \vec{d} je usmeren od negativnog ka pozitivnom opterećenju.

$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

$$Q > 0 \quad \vec{d} \quad Q < 0$$

Slika 3.8. Električni dipol i njegov momenat

Bez izvođenja, navodimo da je potencijal na odstojanju $r \gg d$ od dipola

$$V = \frac{Q\vec{d} \cdot \vec{r}_o}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_o}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

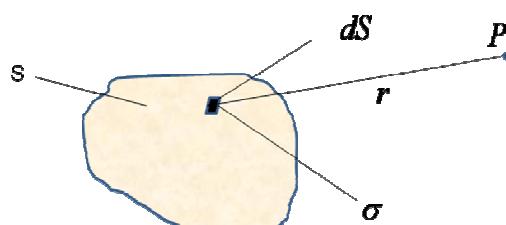
Polje i potencijal dipola u tačkama daleko od dipola zavise samo od \vec{p} . Tako \vec{p} u potpunosti karakteriše dipol kao što Q opisuje tačkasto nanelektrisanje.

Samostalno izvesti izraz za električno polje i potencijal dipola.

3.6. Potencijal koji stvara kontinualna raspodela opterećenja

U slučaju površinski raspodeljenih opterećenja izdelimo nanelektrisanu površ na elementarne površi (površinice) dS (slika 3.9). Na toj površini se nalazi elementarno (tačkasto) opterećenje $dQ = \sigma dS$, pa je potencijal koji u tački P (slika 3.9) stvara to (tačkasto) opterećenje, na osnovu izraza za potencijal tačkastog opterećenja

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_o r} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_o r}$$



Slika 3.9. Određivanje potencijala površinske raspodeljenog nanelektrisanja

Kako je potencijal skalarna veličina, ukupni potencijal se dobija kao algebarski zbir (tj. integral) ovakvih elementarnih potencijala

$$V = \int_S dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

Slično se postupa u slučaju zapreminski raspodeljenog opterećenja. Zapremina sa nanelektrisanjem se deli na veliki broj malih (elementarnih) zapremina dv (slika 3.10.). U zapremini dv se nalazi $dQ = pdv$. Potencijal koje to dQ (tačkasto opterećenje) stvara u tački P (slika 3.10) je

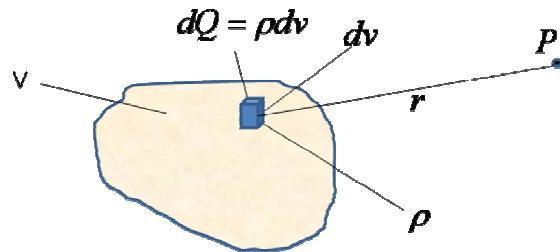
$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_o r} = \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_o r}$$

Ukupni potencijal je zbir (integral) elementarnih potencijala

$$V = \int_V dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho dv}{r}$$

Kod linijski raspodeljenog nanelektrisanja je

$$V = \int_l dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_l \frac{Q' dl}{r}$$



Slika 3.10. Određivanje potencijala zapreminski raspodeljenog naelektrisanja

Potencijal elektrostatičkog polja koje potiče od tačkastih, zapreminskih, površinskih i linijskih naelektrisanja u vakuumu, dobija se relacijom

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{r_k} + \int_V \frac{\rho dv}{r} + \int_S \frac{\sigma dS}{r} + \int_l \frac{Q' dl}{r} \right\}$$

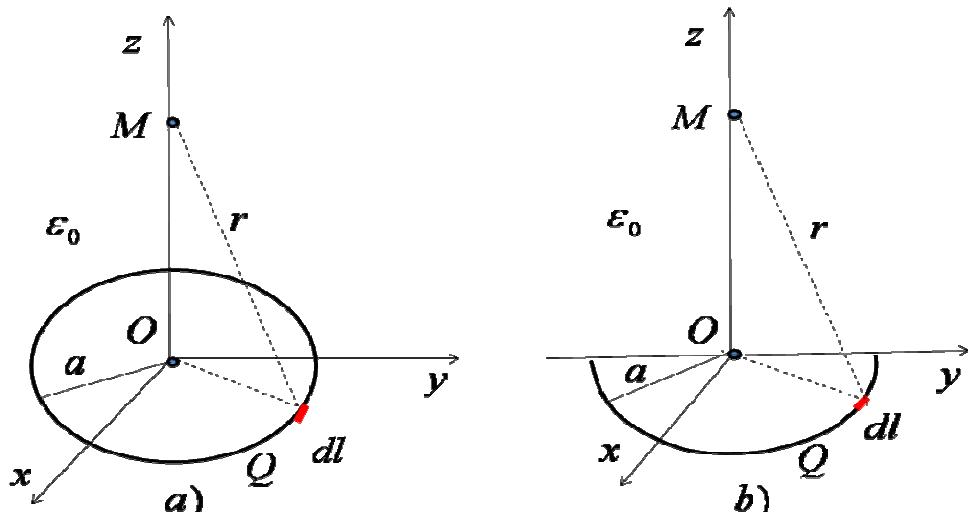
Potencijal zapreminskog, površinskog i linijskog naelektrisanja u vakuumu određuje se, dakle, na isti način kao i električno polje: naelektrisanje se izdeli na odgovarajuće elemente, svaki elemet se posmatra kao tačkasto naelektrisanje, odredi se potencijal svakog elementa, pa se onda potencijali sabiju.

Potencijal više tačkastih naelektrisanja se dobija skalarnim sabiranjem, što je jednostavnije od vektorskog sabiranja električnih polja tačkastih naelektrisanja. Kod raspodeljenih naelektrisanja integrali su skalarni, pa se potencijal lakše računa nego električno polje, gde su integrali vektorski.

Ako znamo električni potencijal, onda je vektor \vec{E} jednoznačno određen u svakoj tački⁷, što ćemo kasnije pokazati. Zbog toga je u analizi elektrostatičkog polja, jednostavnije raditi sa potencijalom V nego vektorom \vec{E} (lakše je raditi sa skalarnim nego vektorskim veličinama)

Primeri određivanja potencijala kontinualno raspodeljenih naelektrisanja

Primer 3.2. Odrediti potencijal u proizvoljnoj tački M na z -osi kružne konture poluprečnika a , ravnomerno naelektrisane ukupnim naelektrisanjem Q (slika 3.11a, ista kao slika 2.10a).



Slika 3.11. Određivanje potencijala u tački na osi normalnoj na ravan ravnomerno naelektrisane ukupnim naelektrisanjem Q : a) kružne konture, b) polukružne konture

⁷ Obrnuto, ako je poznat vektor \vec{E} , potencijal je određen sa tačnošću do aditivne konstante, koja je uslovljena položajem referentne tačke.

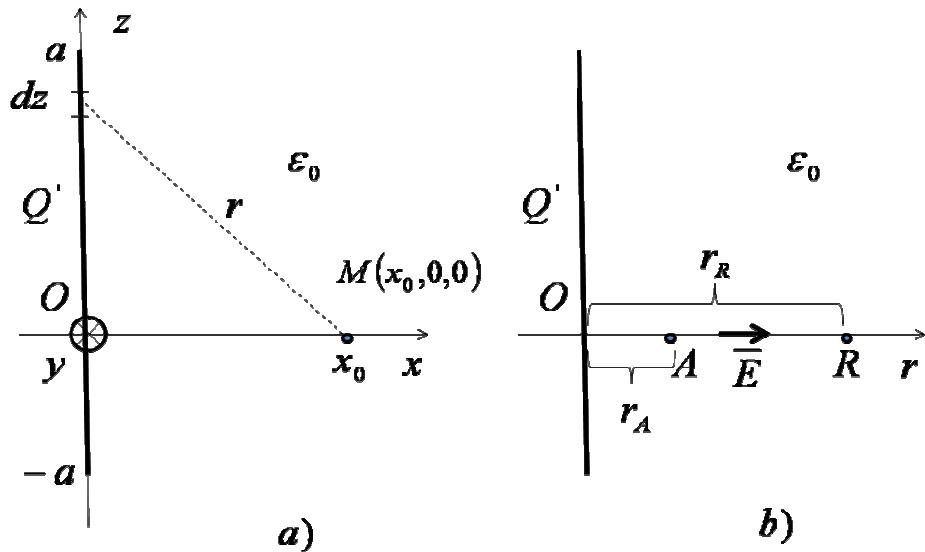
Izdelimo konturu na elemente dl . Podužna gustina nanelektrisanja konture je $Q' = Q/(2\pi a)$, nanelektrisanje jednog elementa je $dQ = Q' dl$, a potencijal tog (“tačkastog”) nanelektrisanja je $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q' dl}{r}$, gde je $r = \sqrt{a^2 + z^2}$. Prema relaciji za potencijal linijski raspodeljenog nanelektrisanja je $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q' dl}{r} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r} \int dl = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r} 2\pi a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$ u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.

Ako se uporedi ovo izvođenje sa izvođenjem relacije za \bar{E} , u istom slučaju (primer 2.2, slika 2.10), očigledno da je potencijal lakše odrediti (jer se ne sabiraju vektori u prostoru).

Primer 3.3. Odrediti potencijal u proizvoljnoj tački M na z-osi ravnomerno nanelektrisane polukružne konture (linije, niti) poluprečnika a, ravnomerno nanelektrisane ukupnim nanelektrisanjem Q (slika 3.11b, ista kao na slici 2.11a).

$$\text{Lako se dolazi do rezultata } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Primer 3.4. Odrediti potencijal u proizvoljnoj tački $M(x_0, 0, 0)$ na x-osi, koja je normalna na ravnu nit konačne dužine ravnomerno nanelektrisane podužnom gustinom nanelektrisanja Q' (slika 3.12a).



Slika 3.12. Određivanje potencijala u tački u okolini ravnomerno nanelektrisane ravne niti konačne dužine, za referentnu tačku: a) u beskonačnosti, b) u konačnom delu prostora

Usvojimo odgovarajući koordinatni sistem (slika 3.12). Izdelimo nit na elemente $dl = dz$. Potencijal nanelektrisanja tog elementa u tači M je $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q' dz}{r}$, gde je $r = \sqrt{x_0^2 + z^2}$, a ukupni

$$\text{potencijal je}^8 \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=-a}^{z=a} \frac{dz}{\sqrt{x_0^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(z + \sqrt{x_0^2 + z^2} \right) \Big|_{z=-a}^{z=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a + \sqrt{x_0^2 + a^2}}{-a + \sqrt{x_0^2 + a^2}} \quad u$$

odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti (uočite da je nit konačne dužine).

Ako zamislimo da je nit sve duža ($a \rightarrow +\infty$, beskonačno duga nit), ali da joj pri tome podužno nanelektrisanje (Q') ostaje konstantno, potencijal u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti postaje beskonačno veliki jer

$$V = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a + \sqrt{x_0^2 + a^2}}{-a + \sqrt{x_0^2 + a^2}} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a + \sqrt{x_0^2 + a^2}}{|x_0|} \rightarrow \infty.$$

Očigledno, kod beskonačne ravnomerno nanelektrisane niti, referentna tačka nemože biti u beskonačnosti.

Dokaz da se referentna tačka nemože uzeti u beskonačnosti, može se izvesti na još jedan način. Na osnovu analize niti sa slike 2.13a, znamo da je elektrostatičko polje beskonačno dugačke pravolinijske ravnomerno nanelektrisane niti radikalno (slika 3.12b), a njegov intenzitet na rastojanju r od niti je $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}$ (videti primer 2.6). Uzmimo da je referentna tačka R na konačnom rastojanju r_R od niti. Radi jednostavnosti, posmatrajmo tačku A, koja je na rastojanju r_A od niti, a nalazi se na

$$\text{potegu } r_R \text{ (slika 3.12b). Potencijal tačke A je } V_A = \int_{r_A}^{r_R} \vec{E} d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_R} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_R}{r_A}. \text{ Ako}$$

referentna tačka ide u beskonačnost ($r_R \rightarrow +\infty$) i izraz za potencijal divergira.

Napomenimo da dobijeni izraz za potencijal beskonačne niti, $V_A = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_R}{r_A}$, važi i ako

tačke A i R nisu na istom potegu, što se lako dokazuje na isti način kao što smo izveli izraz za potencijal tačkastog nanelektrisanja sa slike 3.5.

⁸ Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + \text{const.} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \text{const.}$ je tablični.

4. GAUSOV ZAKON

Ponekad se naziva i Gausova teorema. To je matematički izraz koji opisuje vezu između vektora \vec{E} na nekoj zatvorenoj površi i ukupnog viška nanelektrisanja unutar te površi. Za izvođenje Gausovog zakona potrebno je poznavanje pojma fluksa vektora.

4.1. Fluks vektora električnog polja

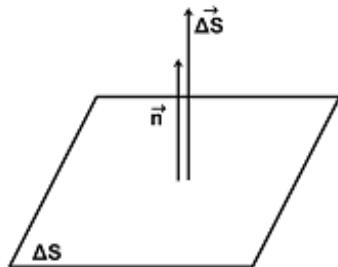
Reč fluks potiče od latinske reči fluxus, što znači „koji protiče“ i odnosi se na proizvod oblika

$$\vec{A} \cdot \Delta \vec{S}$$

gde je \vec{A} - bilo kakav vektor, a $\Delta \vec{S}$ - vektorski element površi (slika 4.1), koji se definiše sa

$$\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n}$$

gde je \vec{n} - ort (jedinični vektor) normalan na površinicu ΔS (normala na površinu najbolje karakteriše položaj površinice ΔS).



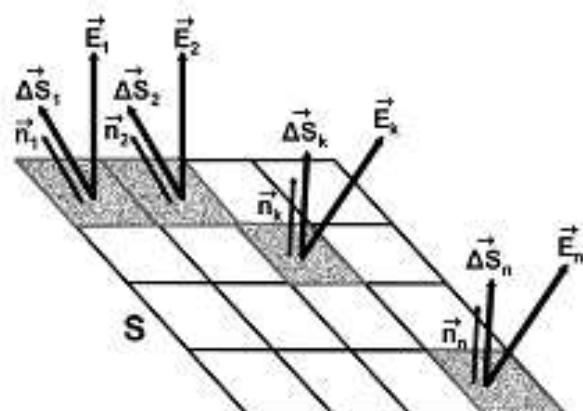
Slika 4.1. Predstavljanje površinice vektorom

Fluks \vec{E} kroz površinicu ΔS je

$$\Delta \Psi_{EkrozS} = \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$$

i po definiciji je skalarna veličina. Zbog toga se fluks kroz bilo koju površ može da izračuna kao zbir flukseva kroz sve površinice ΔS koje sačinjavaju površ S (slika 4.2), tj.

$$\Psi_E = \vec{E}_1 \Delta \vec{S}_1 + \vec{E}_2 \Delta \vec{S}_2 + \dots + \vec{E}_n \Delta \vec{S}_n = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k \Delta \vec{S}_k \quad (4.1)$$



Slika 4.2. Delenje površi S na površinice radi određivanja fluksa \vec{E}

Ako je \vec{E} po smeru i intenzitetu promenjiv po površi S, relacija (4.1) će biti utoliko tačnija ukoliko su površinice manje, tj. kada $\Delta \vec{S} \rightarrow d\vec{s}$, pa je

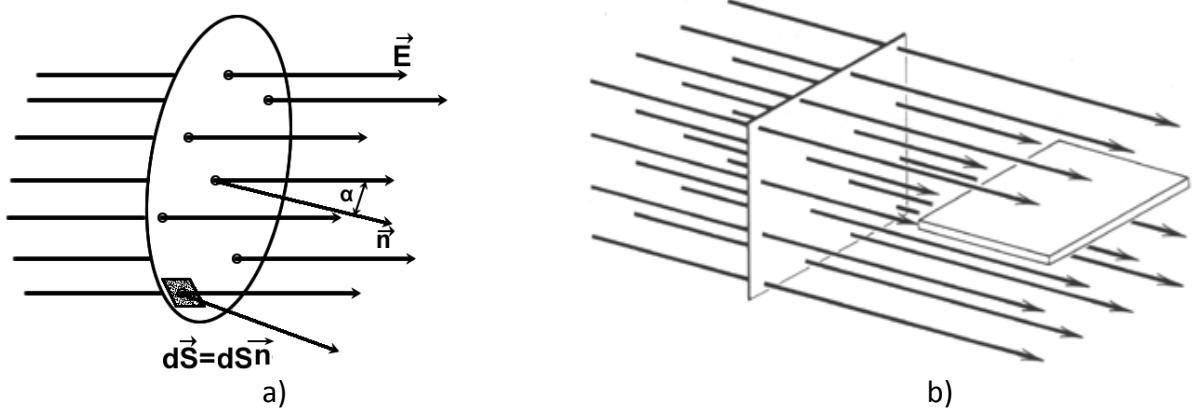
$$\Psi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Jedinica za fluks je $[(V/m)m^2] = [Vm]$.

Definicija fluksa važi za bilo koji vektor i za bilo koju površ S. To može biti stvarna površ, ali je najčešće, za potrebe proračuna, neka zamišljena površ.

Primer 4.1. Odrediti izraz za fluks električnog polja kroz ravnu površ u homogenom električnom polju.

Zadatak možemo ilustrovati slikom 4.3a, gde je \vec{n} normala na površ, a α ugao između normalne na površ i vektora \vec{E} .



Slika 4.3. Fluks \vec{E} kroz površ: a) pod proizvoljnim uglom površi u odnosu na \vec{E} , b) kada je površ normalna na \vec{E} ili paralelna \vec{E}

U opštem slučaju

$$\Psi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E ds \cos(\vec{E}, \vec{ds}) = \int_S E ds \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \int_S E ds \cos \alpha$$

Kako je polje homogeno ($\vec{E}=\text{const.}$) i površ ravna ($\alpha=\text{const.}$), to se E i $\cos \alpha$ mogu izvući ispred integrala, pa se dobija

$$\Psi_E = E \cos \alpha \int_S ds = ES \cos \alpha$$

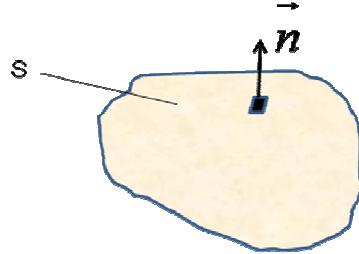
Za $\alpha=0$ (površ normalna na linije \vec{E}), očigledno \vec{E} i \vec{n} su kolinearni ($\cos \alpha = 1$), pa je $\Psi_E = ES$.

Za $\alpha=\pi/2$ (površ paralelna linijama \vec{E}), \vec{E} i \vec{n} su normalni ($\cos \alpha = 0$), pa je $\Psi_E = 0$. U ovom slučaju linije polja očigledno ne prodiru kroz površ, kao na primer na slici 4.3b, gde je prikazana ploča paralelna na linije sila polja. Na istoj slici je prikazana ploča normalna na linije sila polja, gde je očigledno da sve linije polja podiru kroz ploču (maksimalan fluks).

Ako se radi o zatvorenoj površi, onda se, po dogovoru, usvaja da je \vec{n} usmereno uvek upolje (izvan) površi (slika 4.4), a kod proračuna fluksa prethodnim izrazom, na integral se stavlja kružić (da bi se naznačilo da se radi o zatvorenoj površi), tj.

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

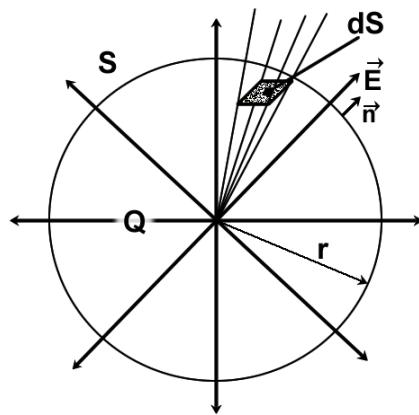
Očigledno, fluks \vec{E} homogenog polja kroz zatvorenu površ je jednak nuli⁹.



Slika 4.4. Normala na zatvorenu površ usmerena je od površi upolje

4.2. Izvođenje Gausovog zakona

Posmatrajmo jedno pozitivno tačkasto nanelektrisanje Q , i odredimo fluks vektora \vec{E} kroz zamišljenu sfernu površ poluprečnika r čiji je centar u nanelektrisanju (slika 4.5).



Slika 4.5. Određivanje fluksa \vec{E} tačkastog nanelektrisanja kroz sferu poluprečnika r

Vektor električnog polja tačkastog nanelektrisanja na rastojanju r od centra nanelektrisanja dat je izrazom

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_o$$

Vektor \vec{E} je normalan na sferu u svim tačkama (ugao (\vec{E}, \vec{n}) je 0° , slika 4.5), pa je

$$\vec{E} \cdot \vec{ds} = \vec{E} \cdot \vec{ds} \vec{n} = Eds \cos(\vec{E}, \vec{n}) = Eds$$

jer je $\cos 0^\circ = 1$, a kako je intenzitet \vec{E} isti u svim tačkama sfere (videti podoglavlje 2.2), to je

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oint_S Eds = E \oint_S ds = E 4\pi r^2$$

gde je $4\pi r^2$ površina sfere poluprečnika r .

Ako se, u prethodni izraz, zameni izraz za intenzitet \vec{E} tačkastog nanelektrisanja, dobija se

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

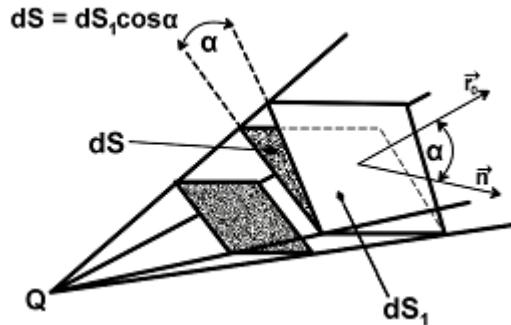
⁹ Jer je $\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \vec{E} \oint_S \vec{ds} = 0$. Uočiti da je, kada se radi o zatvorenoj površi, $\oint_S \vec{ds} = 0$. Ovo je očigledno za sferu li kocku (pokažite to sami), ali se može dokazati da važi i uopšte (za bilo kakvu zatvorenu površ).

Kako su veličine na desnoj strani jednačine konstantne, sledi da je ψ_E isti kroz sve sfere sa centrom u tački gde je nanelektrisanje (ne zavisi od veličine sfere, kroz sve sfere prodire isti broj linija \vec{E}). Pokazat ćemo da je

$$\Psi_E = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

i kada je S bilo kakva (proizvoljna) zatvorena površ koja obuhvata nanelektrisanje Q .

Zamislimo da smo zapreminu celokupnog polja opterećenja Q izdelili na veliki broj konusa (proizvoljnog preseka) sa temenima u opterećenju, od kojih je jedan prikazan na slici 4.6, gde je ds_1 deo te zatvorene površi koju preseca konus.



Slika 4.6. Fluks \vec{E} je isti kroz sve preseke konusa

Odredimo $d\Psi_E$ kroz ds_1

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot \vec{ds}_1 = E ds_1 \cos(\vec{E}, \vec{ds}_1) = E ds_1 \cos \alpha$$

Kako je $ds_1 \cos \alpha = ds$ (površ normalna na konus), to posle zamene izraza za E , dobijamo

$$d\Psi_E = E ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{ds}{r^2}$$

te fluks \vec{E} kroz presek tankog konusa ne zavisi od ugla koji površinica preseka ds zaklapa sa ortom \vec{r}_o .

Kako ψ_E zavisi od r ? Površinica ds , očigledno, predstavlja osnovicu tankog pravog konusa, a r je njegova visina. Neki drugi normalan presek ds' dat će drugi konus osnovice ds' i visine r' . Svi takvi konusi su slični, pa važi

$$\frac{ds'}{r'^2} = \frac{ds''}{r''^2} = \dots = \frac{ds}{r^2}$$

Prema tome fluks $d\Psi_E$ kroz bilo koji presek tankog konusa, na bilo kom odstojanju r od Q i pod bilo kojim uglom α je isti, tj. ψ_E je nezavisno i od r i od α . To znači da pri računanju $d\Psi_E$ možemo staviti bilo koje α (pa i $\alpha=0$), i bilo koje r , pa i $r=\text{const.}$, tj. isto za sve zamišljene konuse na koju izdelimo proizvoljnu zatvorenu površ, a ta površ se onda svodi na zamišljenu sferu sa centrom u nanelektrisanju Q i proizvoljnog poluprečnika r . To znači da je fluks ψ_E kroz zatvorenu površ proizvoljnog oblika koja obuhvata tačkasto nanelektrisanje Q dat jednačinom

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

(kružić na integralu označava zatvorenu površ S).

Pri izvođenju smo pretpostavili $Q>0$. Ako bi bilo $Q<0$, onda je ugao $(\vec{E}, \vec{n})=180^\circ$ (a ne nula), pa je

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = -E \oint_S ds = -\frac{|Q|}{4\pi\epsilon_o r^2} 4\pi r^2 = -\frac{|Q|}{\epsilon_o} = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

pa gornji izraz važi za algebarsku vrednost nanelektrisanja Q , a ono takvo i jeste.

Ako unutar zatvorene površi ima n tačkastih nanelektrisanja, onda je

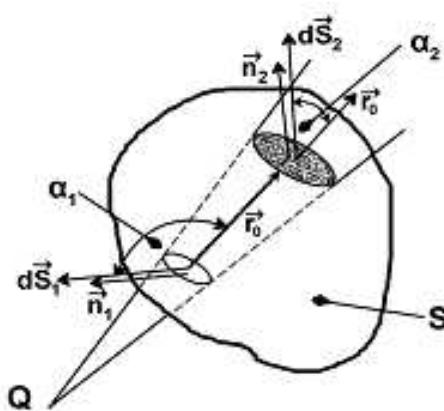
$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} + \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} + \dots + \oint_S \vec{E}_n \cdot d\vec{s} \\ &= \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_n \\ &= \frac{Q_1}{\epsilon_o} + \frac{Q_2}{\epsilon_o} + \dots + \frac{Q_n}{\epsilon_o} \\ &= \frac{1}{\epsilon_o} (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)\end{aligned}$$

odnosno

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{ukupno u } S}}{\epsilon_o}$$

što predstavlja **Gausov zakon**, pri čemu je Q algebarski zbir svih nanelektrisanja u S (višak nanelektrisanja).

Gausov zakon važi i ako postoje opterećenja izvan površi S . Pokažimo to (slika 4.7).



Slika 4.7. Fluks \vec{E} je istog intenziteta, ali suprotnog znaka kroz $d\vec{s}_1$ i $d\vec{s}_2$

Kako je α_1 tup ugao, to je $\cos \alpha_1 < 0$ (negativan), a α_2 je oštar ugao, to je $\cos \alpha_2 > 0$ (pozitivan), pa je $d\psi_1 < 0$, a $d\psi_2 > 0$. Ranije je pokazano da je $|d\psi_1| = |d\psi_2|$, tj. fluks je isti kroz sve preseke konusa (linije vektora električnog polja su radikalne, pa se unutar jednog konusa, koji je takođe radikalni, nalazi isti broj linija, bez obzira gde da konus presečemo), pa je

$$d\psi_1 + d\psi_2 = 0$$

a to znači da je ukupan fluks kroz površ S jednak nuli.

Ovaj zaključak važi i za svaku drugu raspodelu opterećenja van površi S . To znači da Gausov zakon važi za bilo koji sistem opterećenja u vakuumu. Kako su svi materijali (supstance) sačinjeni od nanelektrisanih čestica koje se nalaze u vakuumu, to Gausov zakon važi u svim slučajevima, ako se pod Q podrazumeva ukupan višak nanelektrisanja unutar zatvorene površi S .

4.3. Primeri primene Gausovog zakona

Dve su grupe primena:

- a) dokazi nekih opštih osobina elektrostatičkog polja.

- b) izračunavanje vektora \vec{E} u nekim jednostavnim ali važnim slučajevima (što je primenom Gausovog zakona znatno prostije nego na druge načine).

Primer 4.2. Šta možemo da zaključimo o raspodeli nanelektrisanja unutar neke zapremine V ako prepostavimo da je u svakoj tački unutar nje $\vec{E} = 0$

Do rešenja možemo doći sledećom diskusijom:

Ako na proizvoljnu zatvorenu površ S čije su sve tačke unutar te zapremine V , primenimo Gausov zakon

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{\text{ukupno u } S}}{\epsilon_0},$$

odatle je

$$Q_{\text{ukupno u } S} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{s} = 0$$

jer je $\vec{E} = 0$ u svakoj tački zapremine, pa i površi S .

Ovo može da znači da u zapremini V uopšte nema nanelektrisanja ili da nema viška nanelektrisanja (ista je količina pozitivnog i negativnog). Iz drugog bi se moglo zaključiti da bi u jednom deliću moglo biti više pozitivnog a u drugom negativnog nanelektrisanja. Ali kako Gausov zakon mora da važi i za bilo koju drugu zatvorenu površ, pa i neku površ koja se nalazi unutar prvobitno posmatrane površi S , a $\vec{E} = 0$ u svim tačkama, odatle sledi da ni u jednoj tački nemože biti viška nanelektrisanja.

U podoglavlju 5.1 ćemo videti da ovo važi u svim tačkama unutar provodnih tela.

Sada ćemo uraditi nekoliko primera određivanja električnog polja Gausovim zakonom. Da bismo mogli da primenimo Gausov zakon, moramo nešto znati o obliku linija električnog polja \vec{E} , a to moramo zaključiti na osnovu oblika tela i poznatih osobina \vec{E} , koje smo naučili ranije. Prvi korak u rešavanju ovakvih zadataka je uočavanje simetrije i ustanavljanje pravca i referentnog smera vektora \vec{E} (dakle to se ne ustanavljava na osnovu izraza za Gausov zakon). Zatim se na osnovu uočene simetrije, odabere pogodna zatvorena površ i na nju primeni Gausov zakon. "Pogodna površ" znači da je odnosu na delove te površi vektor \vec{E} ili normalan ili tangencijalan. Na delovima površi gde je \vec{E} paralelan površi, fluks je jednak nuli. Na delovima gde je \vec{E} normalan na površ, kosinus ugla, između vektora \vec{E} i vektorskog elementa površi \vec{ds} , je jednak jedinici, a ako je algebarski intenzitet konstantan, može se izvući ispred integrala, što olakšava rešavanje.

Primer 4.3. Odrediti vektor \vec{E} i potencijal u okolini ravnomerno nanelektrisane lopte po površi ukupnom količinom nanelektrisanja Q (napomenimo da je svaka usamljena provodna nanelektrisana lopta ravnomerno nanelektrisana po površi, što ćemo videti u podoglavlju 5.1).

Električno polje

S obzirom da je Q ravnomerno raspodeljeno, električno polje \vec{E} je radijalno, slično kao kod tačkastog nanelektrisanja, pri čemu linije \vec{E} izviru iz lopte ($Q > 0$), pa je intenzitet \vec{E} isti u svim tačkama na istom rastojanju od centra lopte, tj. na površi zamišljene sfere koncentrične sa loptom (sferna geometrija).

Kako sada pravac i smer \vec{E} znamo, treba još odrediti promenu intenziteta u zavisnosti od rastojanja r u svim tačkama prostora.

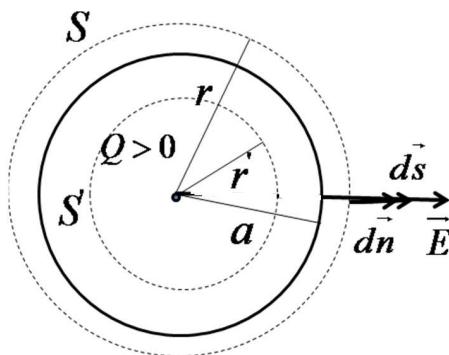
1) Posmatrajmo prvo tačke izvan lopte, tj. za $r > a$. Zamislimo sferu površi S , poluprečnika $r > a$ (slika 4.8). \vec{E} je svuda upravan na element površi ds , a intenzitet mu je isti $E(r)$. Na osnovu Gausovog zakona je

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ gde je } d\vec{s} = ds \vec{n}$$

odakle, za $r > a$, za levu stranu Gausovog zakona dobijamo $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \oint_S E ds \cos 0^0 = \oint_S E ds = E(r) \oint_S ds$

odnosno $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = E(r) 4\pi r^2$ pa se izraz za Gausov zakon svodi na $E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$, odakle je

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Slika 4.8. Izračunavanje \vec{E} u okolini ravnomerno nanelektrisane lopte

Dakle izraz je isti kao i za tačkasto nanelektrisanje Q koje bi bilo u centru lopte¹⁰.

2) Posmatrajmo sada tačke unutar lopte, tj. za $r < a$. Ako bi unutar lopte postojalo polje, ono bi moralo imati istu simetriju kao polje izvan lopte. Primenom istog zakona na sferu unutar lopte, tj. za $r < a$ dobijamo

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

jer je celokupno nanelektrisanje, po prepostavci iz zadatka, raspodeljeno po površi lopte, pa ga nema unutar lopte, pa ni unutar bilo koje zamišljene sfere unutar lopte. Prema tome je

$$E(r) = 0$$

Potencijal

1) Tačke izvan lopte, tj. $r > a$:

¹⁰ Ako je poznata površinska gustina nanelektrisanja lopte σ , onda se ukupno Q lopte može izračunati kao $Q = \sigma S_{lopte} = \sigma 4\pi a^2$. Kada se taj izraz za Q zameni u poslednji izraz za E , dobija se

$$E(r) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Za $r = a$ (polje na površi lopte), dobija se

$$E(a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Uočiti, da u ovom slučaju, polje na površi ima samo normalnu komponentu. Videti i odeljak 5.2.

Kako je električno polje isto (dato istim izrazom) kao u slučaju tačkastog nanelektrisanja, to je i potencijal dat istom relacijom (u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti), tj.

$$V = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{l} = \int_r^{\infty} E dr \cos 0^\circ = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr, \text{ odakle je } V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Za $r = a$ (sve tačke na površi lopte), dobijamo

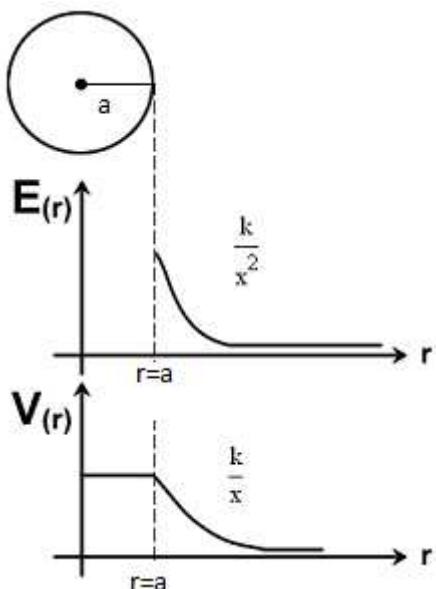
$$V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

2) Tačke unutar lopte, tj. $r < a$:

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{l} = \int_r^a \vec{E} dr + \int_a^{\infty} \vec{E} dr = 0 + \int_a^{\infty} \vec{E} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = V_a$$

Napomena: kod prvog integrala $E=0$ unutar lopte, pa je taj član nula, a oblik drugog integrala je isti kao prethodni (koji smo već rešavali), pa je i rešenje istog oblika.

Dakle potencijal u svim tačkama unutar ove lopte je isti kao i potencijal na površi lopte. Grafički prikaz polja i potencijala, u tačkama na rastojanju r od centra lopte, izgleda kao na slici 4.9.



Slika 4.9. Zavisnost intenziteta \vec{E} i potencijala ravnomerno nanelektrisane lopte po površi od rastojanja od centra lopte

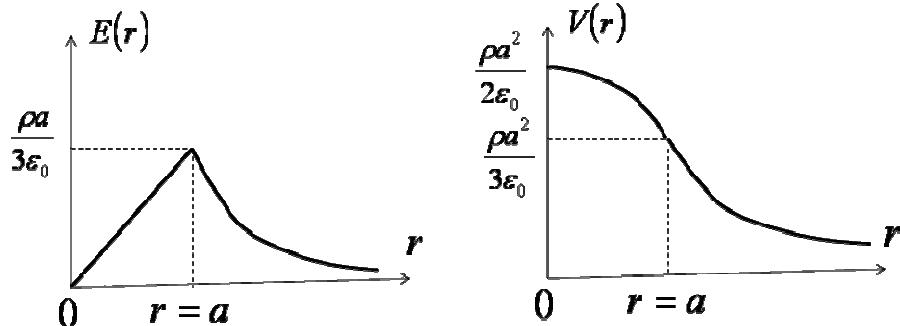
Primer 4.4. (uraditi samostalno kao domaći zadatak) Odrediti električno polje i potencijal u svim tačkama lopte ravnomerno nanelektrisane po zapremini zapreminskom gustinom nanelektrisanja ρ . Zavisnost polja i potencijala, od rastojanja od centra lopte, prikazati grafički.

Rezultat:

$$\text{Električno polje za } r > a \text{ je } E(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}, \text{ a za } r < a \text{ je } E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.$$

Potencijal za $r > a$ je $V(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$, a za $r < a$ je $V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (a^2 - r^2) + \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}$.

Na slici 4.10 su prikazani zavisnost polja i potencijala od rastojanja od centra lopte:



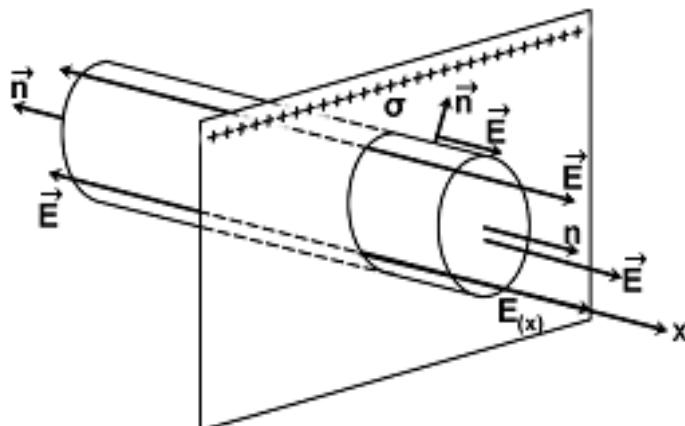
Slika 4.10. Zavisnost intenziteta \vec{E} i potencijala ravnomerno nanelektrisane lopte po zapremini od rastojanja od centra lopte

Primer 4.5. Odrediti polje u okolini veoma velike, teorijski beskonačno velike, ravne ploče (nanelektrisana ravan), ravnomerno nanelektrisane po površi nanelektrisanjem površinske gustine σ .

Električno polje možemo odrediti na sledeći način:

Na osnovu simetrije možemo zaključiti da je električno polje normalno na površ ravnih (ravanska geometrija), a polje je usmereno od ravni ako je ploča nanelektrisana pozitivnim nanelektrisanjem. Intenzitet vektora električnog polja je isti u svim tačkama na istom odstojanju od ravni sa obe strane ravni.

S obzirom na oblik polja, da bismo odredili intenzitet \vec{E} , zamislimo površ oblika pravog valjka (može i kocke, odnosno kvadra), koji je postavljen normalno na ravan površi, tako da mu je omotač paralelan sa linijama \vec{E} , a to znači i normalan na bazise valjka (slika 4.11).



Slika 4.11. Određivanje električnog polja beskonačno velike, ravne ploče

Primenom Gausovog zakona $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{ukupno u S}}}{\epsilon_o}$ na zatvorenu površ valjka (može i kocka odnosno paralelopiped), dobija se (suma flukseva kroz dve osnove i omotač valjka)

$$\int_{B_1} + \int_{B_2} + \int_O = \frac{Q_{\text{ukupno u S}}}{\epsilon_o} \quad (*)$$

Fluks kroz omotač jednak je nuli, jer su linije \vec{E} paralelne sa omotačem, pa nema prodiranja linija \vec{E} kroz površ omotača), ili, matematički, ugao vektora površine omotača i \vec{E} je 90° , pa je skalarni proizvod ta dva vektora jednak nuli.

$$\text{Fluks kroz bazise je } \vec{E} \Delta \vec{S} = E \Delta S \cos 0^\circ = E \Delta S, \text{ pa se relacija (*) svodi na } 2E \Delta S + 0 = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

gde je $\sigma \Delta S$ količina nanelektrisanja na delu ravni obuhvaćenoj valjkom, pa je konačno

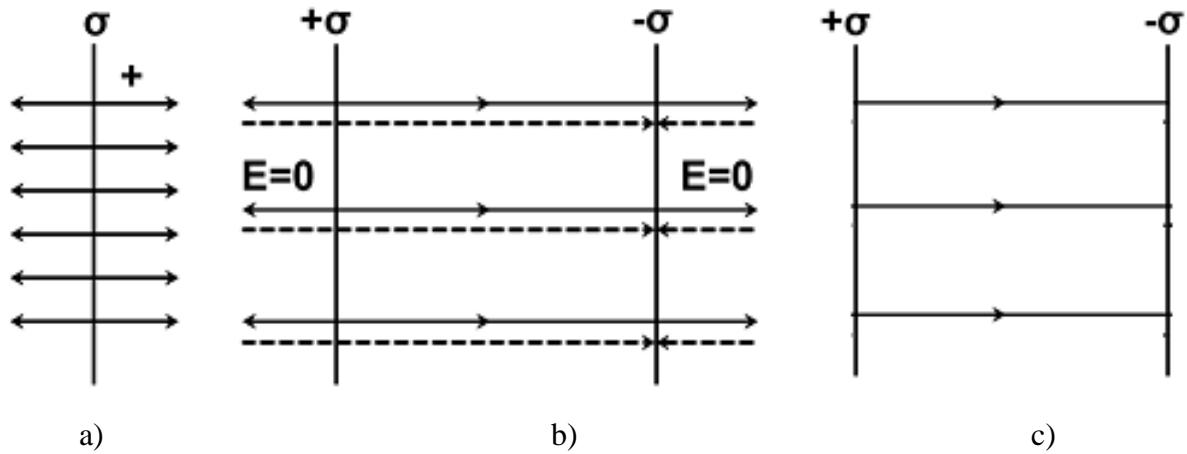
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Setite se da smo do istog rezultata došli u primeru na slici 2.12, ali na mnogo teži način.

Primer 4.6. Odrediti električno polje u okolini dve veoma ravne ploče, ravnomođno nanelektrisane po površi nanelektrisanjem površinske gustine σ , ali suprotnog znaka.

Polazeći od rešenja u primeru 4.5 (slika 4.12a), primenom principa superpozicije dobija se slika 4.12b, gde je sa leve strane prikazano električno polje pozitivno nanelektrisane ploče kada je usamljena, a sa desne strane polje dve ploče nanelektrisane suprotno: polje pozitivno nanelektrisane ploče prikazano je punim linijama, a negativno nanelektrisane isprekidanim linijama. Očigledno da je električno polje u bilo kojoj tački izvan ploča jednako nuli (poništava se), odnosno izvan ploča nema polja, a u prostoru između ploča polje je usmereno od pozitivno ka negativno nanelektrisanoj ploči (slika 4.12c), a intenzitet mu je dvostruko veći, nego kada se radi o jednoj usamljenoj ploči, tj.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



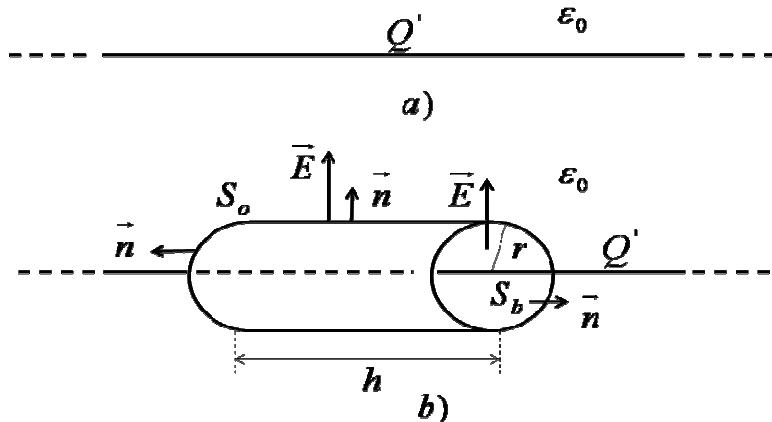
Slika 4.12. Električno polje beskonačno velike ravni (a), dve takve ravni nanelektrisanje nanelektrisanjima suprotnog znaka (b i c)

Ovakav sistem se naziva **kondenzator**. Polje između ploča, ako su ploče ravne i na jednakom rastojanju, je homogeno, osim na ivicama ploča, gde polje nije homogeno (tzv. ivični efekti), a razlog ćemo videti u podoglavlju 5.1.

Primer 4.7. Odrediti električno polje veoma duge (teorijski beskonačno duge) niti (vlakna) ravnomođno nanelektrisane podužnom gustinom nanelektrisanja Q' , slika 4.13a.

Ovo je primer cilindrične geometrije. Zbog simetrije, električno polje može imati samo radikalnu komponentu, i može zavisiti samo od normalnog rastojanja r od niti, ali je istog intenziteta u svim tačkama na istom rastojanju, a to u prostoru predstavlja cilindar poluprečnika r (slika 4.13b).

S obzirom na oblik polja, ovde je pogodno za zatvorenu površ uzeti valjak čija se osa poklapa sa osom niti (što je inače pogodno u primerima cilindrične geometrije).



Slika 4.13. Ravnometerno nanelektrisana beskonačno duga nit (a)
i određivanje njenog električnog polja (b)

Kako je \vec{E} radijalno (slika 4.13b), fluks vektora \vec{E} kroz bazise valjka je nula (vektor \vec{E} paralelan bazisima), pa ostaje samo fluks kroz omotač, gde je \vec{E} normalan na površ i konstantnog intenziteta (s obzirom na simetriju), pa se za levu stranu Gausovog zakona dobija

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \int_{S_b} \vec{E} d\vec{s} + \int_{S_b} \vec{E} d\vec{s} + \int_{S_o} \vec{E} d\vec{s} = 0 + 0 + \int_{S_o} E d\vec{s} = E \int_{S_o} ds = E 2\pi r h$$

Ukupno nanelektrisanje obuhvaćeno valjkom je nanelektrisanje na dužini h unutar cilindra, a ono je $Q' h$, pa je desna strana Gausovog zakona, u ovom slučaju, $Q' h / \epsilon_0$. Kada se izjednače leva i desna strana Gausovog zakona, dobija se, konačno

$$E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Setite se da smo do istog rezultata došli u primeru 2.6 (slika 2.13), ali na komplikovaniji način (rastojanju r tamo odgovara x_0).

Napomenimo, a to se moglo uočiti i iz prikazanih primera, da se oblik zamišljene zatvorene površi, za primenu Gausovog zakona, bira zavisno od simetrije sistema nanelektrisanja. Lopta ima sfernu simetriju, pa se za površ uzima oblik sfere, za štap, šipku ili provodnik cilindričnog oblika, uzima se površ oblika valjka, za sistem u obliku ravni (ravanska simetrija) – površ oblika valjka, kvadra ili kocke.

5. PROVODNICI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

5.1. Osobine električnog polja u prisustvu provodnih tela

Provodnici su materijali koji u svojoj strukturi imaju veliki broj tzv. slobodnih električnih opterećenja. (U većini tehničkih primena to su elektroni.) Ona počinju da se kreću u smeru delovanja i najmanje električne sile na njih¹¹. To je osnova za razumevanje uticaja (ponašanja) provodnih tela u električnom polju u kome se ona nalaze. Provodnici su veoma značajni za elektrotehniku. Moglo bi se reći da bez provodnika ne bi ni bilo elektrotehnike.

U elektrostatici odnosno elektrostatičkom polju, po definiciji, ne može biti usmerenog makroskopskog kretanja električnih opterećenja, pa ni u provodnicima. To znači da u elektrostatici ni u jednoj tački u unutrašnjosti provodnih tela ne mogu na slobodna opterećenja delovati električne sile (jer bi one izazvale sistematsko, makroskopsko kretanje tih opterećenja u smeru sile).

Pošto je električna sila na svako elementarno električno opterećenje srazmerna \vec{E} (setimo se da je $\vec{F} = Q\vec{E}$) odatle sledi da u elektrostatičkom polju u svim tačkama u unutrašnjosti provodnih tela električno polje je nula, tj.

$$\vec{E} = 0 \text{ (prva osobina)}$$

Razume se van nanelektrisanih provodnih tela, u vakuumu, polje postoji.

Na osnovu 1. osobine i Gausovog zakona može se dokazati da nigde u unutrašnjosti provodnika nemože biti makroskopskog viška nanelektrisanja. Ako primenimo Gausov zakon na proizvoljnu površ unutar nekog nanelektrisanog tela, s obzirom da je u svim tačkama $\vec{E}=0$ (prva osobina), odatle sledi da Q mora biti jednak nuli, da bi i desna strana jednakosti u Gausovom zakonu bila zadovljena (*videti primer 4.2 kod primene Gausovog zakona*), tj. $Q_{\text{ukpno u S}} = 0$

Kako je S bilo kakva površ, to znači i vrlo mala, to znači da ni u jednoj tački nemože postojati višak opterećenja u provodnom telu, odakle sledi zaključak da se višak nanelektrisanja na provodnim telima raspodeljuje u vrlo tankom sloju uz površ tela. U unutrašnjosti provodnih tela nema viška nanelektrisanja, tj.

$$\rho = 0 \text{ (druga osobina)}$$

S obzirom da ni ta nanelektrisanja uz površ ne mogu da se kreću (elektrostatika) odatle sledi da su linije vektora električnog polja normalne na površ provodnika (u suprotnom bi postojala komponenta polja koja bi izazvala kretanje po površi provodnika), tj.

$$\vec{E} \perp \text{površ} \text{ (treća osobina)}$$

To se može dokazati i na sledeći način. Prepostavimo da \vec{E} ima i normalnu i tangencijalnu komponentu na površ provodnika. Normalna komponenta teži da opterećenja uz površ istrgne iz provodnika, ali to u normalnim uslovima nije moguće, pa do kretanja ne dolazi.

Tangencijalna komponenta bi izazvala sistematsko makroskopsko kretanje nanelektrisanja po površi provodnika, a to, po definiciji, u elektrostatici, nije moguće, pa tangencijalna komponenta mora biti jednak nula na površi provodnika u elektrostatici, odnosno

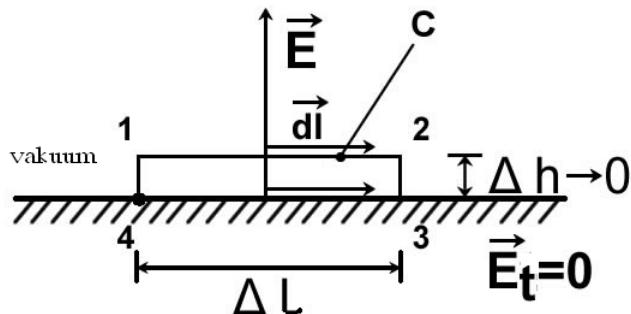
$$\vec{E}_t = 0 \text{ (četvrta osobina)}$$

¹¹ Težnja da se slobodni nosioci kreću u provodniku postoji i iz drugih razloga: usled razlike u temperaturi pojedinih tačaka provodnika (Tomsonov efekat), slobodni nosioci se kreću od tačke na višoj ka tački na nižoj temperaturi; usled različite koncentracije nosilaca nanelektrisanja u različitim delovima provodnika, postoji težnja da se koncentracija svuda izjednači (diuzija, posebno interesantna kod poluprovodnika). Slobodni nosioci se haotično kreću (termičko kretanje) čak i kada ne postoji spoljašnja pobuda. Ako se posmatra mala zapremina, vektorski zbir (rezultanta) termičkih brzina u toj zapremini približno je jednak nuli.

Imajući vidu ranija razmatranja, u vezi sa situacijom kada je \vec{E} normalno na površ provodnika (podoglavlje 3.4), zaključujemo da su površi provodnih tela ekvipotencijalne (što je dokazano trećom osobinom).

Kako je vektor električnog polja jednak nuli unutar provodnih tela, odatle sledi da je potencijal svih tačaka unutar provodnog tela jednak potencijalu na njegovoj površi. (videti primer 4.3. i sliku 4.9 kod primene Gausovog zakona).

Pokazali smo kakvo je \vec{E} unutar i na samoj površi provodnih tela, u vakuumu. Koliko je električno polje, u vakuumu, u neposrednoj okolini uz površ provodnika? To se može pokazati analizom situacije kao na slici 5.1. Pretpostavimo da polje ima obe komponente (normalnu i tangencijalnu). Zamislimo tanku pravougaonu konturu C, čija se jedna stranica nalazi na samoj površi provodnika (ili u provodniku), a druga neposredno uz površ provodnika, u vakuumu.



Slika 5.1. Tangencijalna komponenta \vec{E} je nula i na površi provodnog tela i u vakumu neposredno uz tu površ

Kako za svaku zatvorenu površ, u elektrostatiči, mora da važi

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0$$

to primenom prethodne relacije na konturu C, dobijamo

$$\int_{1-2} \vec{E} d\vec{l} + \int_{2-3} \vec{E} d\vec{l} + \int_{3-4} \vec{E} d\vec{l} + \int_{4-1} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Kako je kontura tanka, $\Delta h \rightarrow 0$, i \vec{E} u provodniku (i $E_t = 0$ na samoj površi provodnika) jednak nula, to dobijamo

$$E_t \Delta l + 0 + 0 + 0 = 0$$

odnosno

$$E_t = 0 \text{ u vakuumu blizu površi provodnih tela.}$$

Ako je tangencijalna komponenta električnog polja (neposredno) uz površ provodnih tela jednaka nuli, znači da polje ima samo normalnu komponentu. Sada ćemo odrediti tu komponentu.

5.2. Veza između gustine površinskog nanelektrisanja i vektora jačine polja uz površ provodnika

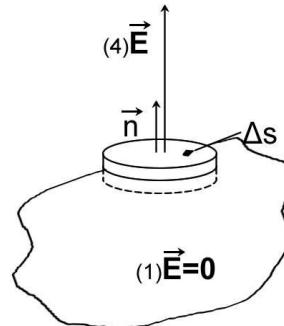
Posmatrajmo veoma pljosnat mali, zamišljen, tanak, provodni valjak čija je jedna osnovica u provodniku nanelektrisanom površinskom gustinom nanelektrisanja σ , a druga u vakuumu uz površ provodnika (slika 5.2.).

Primenom Gausovog zakona na (zatvorenu) površ valjka, dobijamo

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{\text{obuhv.u S}}}{\epsilon_0}$$

Leva strana Gausovog zakona može se razdvojiti na četiri integrala:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \int_{\text{osnovica u vakumu}} + \int_{\text{osnovica u provod.}} + \int_{\text{omotač u vakumu}} + \int_{\text{omotač u provod.}}$$



Slika 5.2. U tačkama blizu površi provodnih tela, u vakumu, $E = \sigma / \epsilon_0$

Fluks \vec{E} kroz osnovicu u provodniku i omotač u provodniku je nula, jer je $\vec{E} = 0$. Fluks kroz omotač u vakuumu je nula, jer je $\vec{E}_t = 0$. Očigedno, postoji samo fluks kroz osnovicu u vakuumu, koji je $E\Delta S \cos 0^\circ = E\Delta S$, pa je $E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$, odnosno konačno se dobija

$$E_{(n)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Poslednja relacija daje vezu između gustine površinskog nanelektrisanja σ na provodnom telu i intenziteta \vec{E} u vakuumu (ima samo normalnu komponentu) u tački blizu površi tela.

Ako proverite vezu \vec{E} i σ za slučaj površi lopte ravnomerne nanelektrisane po površi, valjka, ravne provodne ploče, uveriće se da se dobija ista relacija (pogledati napomenu uz primer 4.3)¹².

Imati u vidu da se, zbog simetrije, na ovakvim telima nanelektrisanje raspodeljuje ravnomerно, tj. nanelektrisanja će se pomerati dok se tako ne rasporede da sile kojima međusobno deluju ne budu uravnotežene, a to će, zbog simetrije, biti ako je raspodela nanelektrisanja ravnomerна. Uočite da to nije moguće na krajevima ravne ploče, pa tu raspodela nije ravnomerна i polje nije homogeno (postoje ivični efekti).

Kako se opterećenja raspodeljuju, ako tela nisu simetrična? Sada ćemo detaljnije analizirati raspodelu opterećenja na usamljenim provodnim telima raznih oblika.

5.3. Raspodela opterećenja na usamljenim provodnim telima raznih oblika

Može se odrediti na osnovu osobina 1, 2 i 4 i zaključka (koji smo upravo izveli) da je

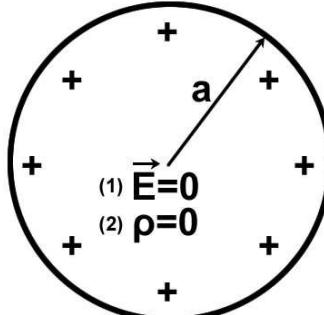
¹² Ranije smo pokazali da je intenzitet električnog polja na površi lopte ravnomerne nanelektrisane po površi sa površinskom gustom nanelektrisanja σ , $E = \sigma / \epsilon_0$. U vektorskem obliku ovaj izraz se može napisati kao $\vec{E}_{(n)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$,

gde je \vec{n} jedinična normala na površ lopte, usmerena od lopte.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Analiziraćemo nekoliko primera, koji su važni ne samo sa teorijskog stanovišta, već i za inženjersku praksu.

Primer 5.1. Usamljena provodna lopta (slika 5.3).



Slika 5.3. Višak opterećenja na usamljenoj provodnoj lopti se raspodeljuje ravnomerno po površi

Opterećenja (koja su višak) su istog znaka (a nalaze se uz samu površ, unutar provodnog tela nema viška nanelektrisanja), deluju jedni na druge odbojnim silama, te će se udaljiti jedni od drugih najviše što mogu (iz provodnika nemogu da izađu), te se raspodeljuju ravnomerno uz samu površ provodnika (zbog sila kojima deluju jedni na druge i zbog simetričnosti tela). Na slici 5.3. ravnomernu raspodelu nanelektrisanja simbolično označavamo ravnomerno razmaknutim znacima „+“ (prepostavka da je telo pozitivno nanelektrisano).

Ranije smo izveli izraz za potencijal na površi lopte:

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Izrazimo ga sada u funkciji površinske gustine nanelektrisanja. Kako je

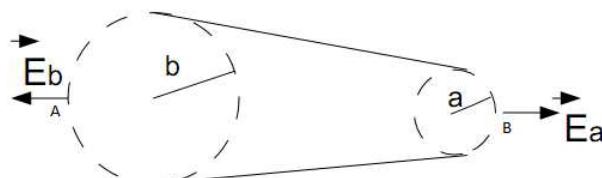
$$Q = \sigma S = \sigma 4a^2 \pi$$

to je

$$V_a = \frac{\sigma 4\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a$$

Ovaj izraz će nam poslužiti u daljoj analizi.

Primer 5.2. Posmatrajmo nanelektrisano telo jajastog oblika (slika 5.4).



Slika 5.4. Intenzitet \vec{E} uz površ nanelektrisanih provodnih tela je, grubo, obrnuto srazmeran poluprečniku krivine tela u posmatranoj tački

Osobina 2. kaže da je nanelektrisanje raspodeljeno uz površ, ali ne i kakva je gustina (gde je gušće, a gde ređe). Očigledno da će na zaobljenim delovima gustina biti ista ali ne ista u tačkama A i B (na vrhovima zaobljenih delova, ako su neka manje a neka više šiljata).

Odnos se može proceniti na osnovu izraza za potencijal lopte

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a$$

Kako su površi provodnih tela ekvipotencijalne (istи потенцијал свих тачака), па ако замислимо заobljene делове као лопте, полупрећника а и б (слика 5.4), мора да важи

$$V_a = V_b = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} a = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} b$$

где је σ_a и σ_b густине наелектришана у тачкама са полупрећничима а и б, респективно, одакле је

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{b}{a}$$

тј. σ је обрнуто сразмерно односу полупрећника кривине заobljenih делова.

Полазећи од ове jednakosti и везе E и σ на површи проводних тела ($E = \sigma / \epsilon_0$, одакле је $\sigma = E\epsilon_0$, подпоглавље 5.2), добијамо

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{E_a \epsilon_0}{E_b \epsilon_0} = \frac{E_a}{E_b}$$

Одатле произилази закључак, да је највећа густина виška наелектришана на шилјатим деловима усамљених проводних тела. На тим деловима је и највећа јачина електричног поља у вакууму изван тела.

Релације важе приближно, јер smo до њих дошли посматрајући тела облика лопте.

Ова појава има примену код громобрана (облик је шилјка), авиона (на крилима авиона се често dodaju шилјати метални делови, на врху којих је онда јако електрично поље, ваздух се jonizuje и znatan deo наелектришана које nastaje usled trenja krila o vazduh, odlazi u vazduh). Ваздух постаје проводан при критичној јачини електричног поља

$$E_{kr} > 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m} = 3 \frac{MV}{m} = 3 \cdot 10^4 \frac{V}{cm} = 30 \frac{kV}{cm}$$

Да би у потпуности objasnili pojave код громобрана, потребно је poznavati i појаву elekrostatičke indukcije.

5.4. Elektrostatička indukcija

Има mnogo raznovrsних и већих praktičних примена, а неке ћемо objasniti kasnije.

Посматrajmo неко наелектрисано проводно тело у и његовој окolini нema других тела (ни наелектрисаних ни ненаселенских). Населене тела расподељи по правилу:

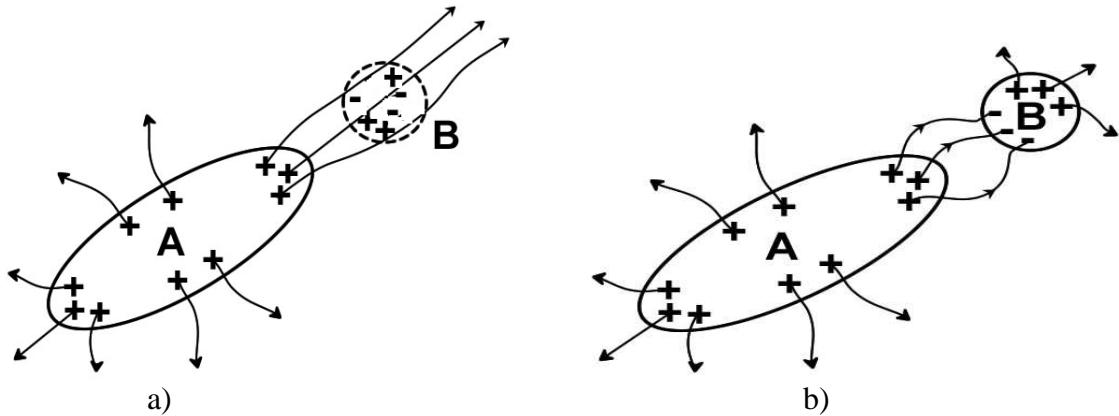
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{b}{a}$$

Gustinom знаком „+“ или „-“, на crtežu simbolično označавамо густину површинског наелектришана, на пример тело А на слици 5.5a.

Zamislimo да smo vrlo brzo, teorijski trenutno, uneli у поље ovog наелектрисаног тела (A) једно ненаселено проводно тело (B), označено crtканом круžничком на слици 5.5a.

У trenutku kad se тело B нађе у пољу оптерећења тела A, покретljiva наелектришана у телу B почињу да се kreću под dejstvom električnih sila. Pozitivna у smeru vektora електричног поља, а negativna у suprotnom smeru. Тако ће се на jednoj strani површи тела B појавити pozitivna, а на другој negativna оптерећења. Та оптерећења стварају своје поље које постепено poništava ono које стварају оптерећења тела A у тачкама тела B. Taj процес се одвија у свим тачкама тела B dok ukupno поље не буде нула. Naravno da оптерећења на телу B стварају поље и изван тела B. То поље доводи до промене raspodele оптерећења и на телу A. Kada se ovo, takozvano prelazno stanje, заврши и makroskopski оптерећења prestanu да се kreću, njihova raspodela ће бити отприлике као на

slici 5.5b.



Slika 5.5. Ilustracija procesa elektrostatičke indukcije

Ovaj proces je u provodnim telima veoma kratak, gotovo trenutan.

Vidi se da su se na telu (površi tela) B čije je ukupno nenelektrisanje jednako nuli (bilo je nenenelektrisano, nije imalo viška nenelektrisanja), pojavila neka opterećenja. Ona se nazivaju **indukovana opterećenja**.

Pojava da se na površi nenelektrisanog tela, unetog u elektrostatičko polje, javljaju tzv. indukovana nenelektrisanja, naziva se **elektrostatička (električna) indukcija**.

Indukovana opterećenja nisu nova opterećenja, već se radi o preraspodeli postojećih u telu. Prema tome, ukupno indukovano nenelektrisanje jednako je nuli (ako je telo **bilo nenenelektrisano**, neutralno, i pod uslovom da telo nije vezano za Zemlju ili neko drugo provodno telo, kada opterećenja sa jednog tela mogu da pređu na drugo telo, odnosno u Zemlju), tj.

$$Q_{ind-} + Q_{ind+} = 0$$

Treba uočiti da prisustvo nenenelektrisanih provodnih tela uvek u izvesnoj meri menja, kako polje u svim tačkama, tako i raspodelu opterećenja u provodnim telima od kojih potiče prvo bitno polje.

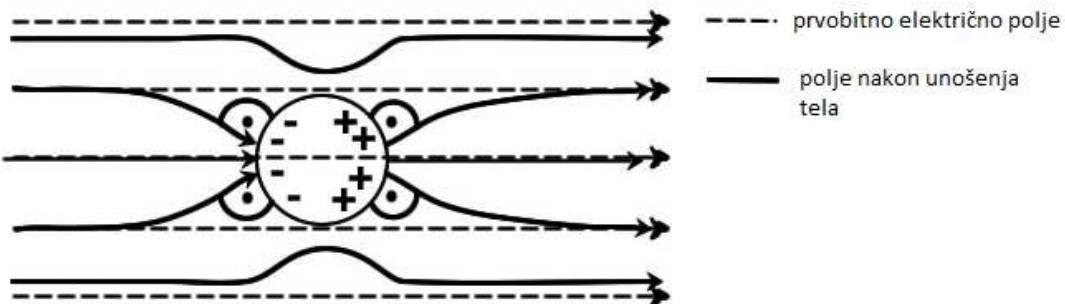
Da je telo B bilo **prethodno nenelektrisano** sa nenelektrisanjem Q , odvijao bi se sličan proces promene raspodele nenelektrisanja po površima tela (oba, tj. A i B). Proces prestaje kad se nenelektrisanje tako preraspodeli da ni u jednoj tački oba tela nema polja. Ovaj proces se takođe naziva elektrostatička indukcija. Samo je u ovom slučaju ukupno indukovano nenelektrisanje

$$Q_{ind-} + Q_{ind+} = Q$$

Proces promene raspodele nenelektrisanja po površima tela (prelazni režim, prelazni proces) ne razmatramo. U toku njega se očigledno javlja kretanje nenelektrisanja (električna struja), pa i pretvaranje električne energije u toplotu (Džulovi gubici), što ćemo objasniti u drugom delu predmeta..

Primer 5.3. Unošenje nenelektrisanog provodnog tela u homogeno elektrostatičko polje

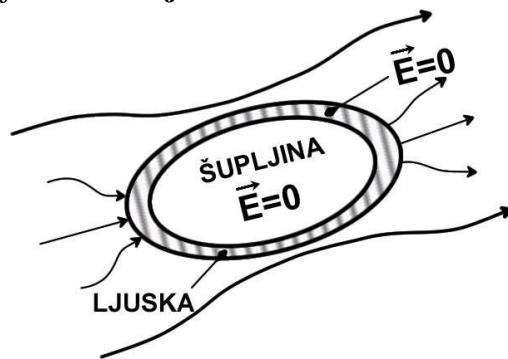
Crtkane linije prikazuju izgled linija sila homogenog elektrostatičkog polja pre unošenja provodnog nenenelektrisanog tela u to polje (slika 5.6.), a punе linije prikazuju polje nakon završenog procesa elektrostatičke indukcije. Očigledno da polje u okolini tela nije više homogeno, i da se u nekim tačkama intenzitet povećava.



Slika 5.6. Električno polje, pre i posle unošenja nenaelektrisanog provodnog tela

Primer 5.4. Nenaelektrisano provodno telo sa šupljinom u njemu (ljuska), uneto u elektrostatičko polje

Kako je u zidu tela (provodnika) vektor električnog polja jednak nuli, nema polja koje bi indukovalo opterećenje na unutrašnjoj površi šupljine, bez obzira koliko je zid tanak (ljuska), pa je i u unutrašnjosti ljeske polje jednako nuli (slika 5.7.). Na ovaj način moguće je zaštiti neki željeni dio prostora od elektrostatičkog polja. Takve strukture se nazivaju elektrostatički zakloni, a zaštita je efikasna (ne i savršena) ako je zaklon u vidu rešetke čak i ako su polja promenljiva u vremenu. U mnogim laboratorijama postoje sobe zaštićene na ovaj način (pletenom žicom – kavezom). Tako zaštićeni prostori nazivaju se **Faradejev kavez**.

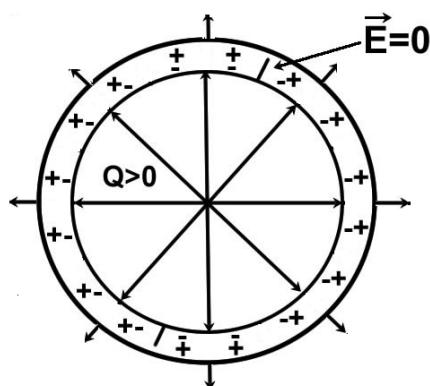


Slika 5.7. Ljuska od provodnog materijala obezbeđuje savršenu elektrostatičku zaštitu dela prostora koji obuhvata

Primer 5.5. Opterećenje uneto u šupljinu nenaelektrisanog provodnog tela

a) Šuplje nenaelektrisano telo loptastog oblika, sa tačkastim opterećenjem u centru tela

Zbog polja tačkastog opterećenja, na unutrašnjem zidu šuplje lopte (ljuske) se indukuje opterećenje. Ako je tačkasto opterećenje pozitivno, indukovano opterećenje, na unutrašnjem zidu, je negativno (slika 5.8.).



Slika 5.8. Tačkasto nanelektrisanje u centru nenaelektrisane šuplje provodne lopte

Vrednost tog indukovamog opterećenja se može odrediti primenom Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površ takvog poluprečnika da se nalazi unutar zida lopte

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{\text{obuhv.u S}}}{\epsilon_0}$$

S obzirom da je polje unutar provodnog tela jednako nuli, a ukupno naelektrisanje obuhvaćeno zamišljenom sferom je naelektrisanje Q u centru i negativno indukovano naelektrisanje na unutrašnjem zidu provodnog tela (ljuske) $Q_{\text{ind-}}$, pa dobijamo

$$0 = \frac{Q + Q_{\text{ind-}}}{\epsilon_0}$$

odnosno

$$Q_{\text{ind-}} = -Q$$

Indukovano opterećenje na spoljašnjem zidu lopte (u ovom slučaju pozitivno), $Q_{\text{ind+}}$, može se odrediti iz uslova da ukupno naelektrisanje šuplje lopte mora ostati isto posle procesa elektrostatičke indukcije, kao što je bilo pre. Kako je lopta bila nenaelektrisana, to je

$$Q_{\text{ind-}} + Q_{\text{ind+}} = 0$$

odakle sledi da je

$$Q_{\text{ind+}} = -Q_{\text{ind-}} = -(-Q) = Q$$

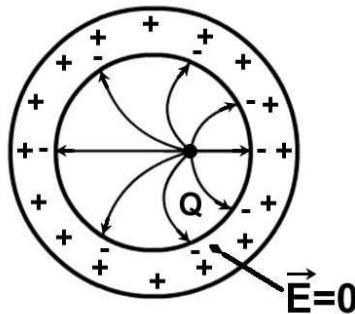
Očigledno da će indukovano opterećenje biti ravnomerno raspodeljeno i na unutrašnjoj i na spoljašnjoj površi lopte, zbog sferne simetrije.

Električnog polje izvan lopte je radijalnog oblika (slika 5.8).

Samostalno uraditi isti primer, ali kada je šuplje telo nanelektrisano nanelektrisnjem Q .

b) *Šuplje nenelektrisano telo loptastog oblika, sa opterećenjem van centra*

Raspodelu opterećenja na spoljašnjoj i unutrašnjoj strani ljudske, možemo proceniti na osnovu dosadašnjeg znanja. Na spoljašnjoj ljudsci (zidu ljudske) raspodela je ravnometerna (zbog simetrije, na tu raspodelu ne utiču nanelektrisanja u unutrašnjosti ljudske, a u zidu ljudske polje je jednako nuli). U unutrašnjosti polje nije homogeno, pa ni raspodela indukovanih opterećenja na unutrašnjem zidu lopte. Raspodela opterećenja je prikazana na slici 5.9.



Slika 5.9. Tačkasto nanelektrisano van centra nenelektrisane šuplje provodne lopte

Što se tiče količine indukovanih nanelektrisanja na unutrašnjoj i spoljašnjoj ljudsci važe isti rezultati kao u prethodnom slučaju (primer 5.5 pod a).

Ima li električnog polja izvan lopte i kako je raspodeljeno (videti raspodelu nanelektrisanja).

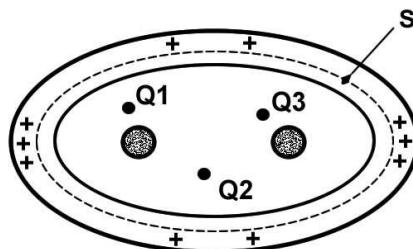
Napominjemo da se ovde pretpostavlja da spoljnja ili unutrašnja ljudska nisu vezane provodnicima za neko drugo provodno telo. Međutim, ako, na primer, spoljnu ljudsku spojimo

provodnikom za Zemlju (uzemljimo), tada Q_{ind+} otekne u zemlju (elektroni iz Zemlje kompenzuju pozitivna nanelektrisanja) ($Q_{ind+} = 0$), a Q_{ind-} ostaje nepromenjeno (setimo se da je između sloja Q_{ind+} i Q_{ind-} .polje u provodnom telu nula, pa promene na spoljašnjoj ljesci na utiču na unutrašnju ljsku, već na nju utiče samo polje tačkastog nanelektrisanja u centru šuplje lopte).

c) *Opštiji slučaj, nenelektrisana šuplja ljska (nije oblika lopte) i unutar nje ima više nenelektrisanih i provodnih tela*

Opterećenja na spoljašnjem zidu ljske (slika 5.10) se raspodeljuju nezavisno od raspodele opterećenja u šupljini ljske (zašto?). Pravilo po kome se raspodeljuju je

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{b}{a}$$



Slika 5.10. Nenelektrisanja na spoljašnjoj površi šuplje ljske raspodeljuju se nezavisno od raspodele nenelektrisanja u šupljini tela

Indukovano nenelektrisanje na unutrašnjoj i spoljašnjoj ljesci se određuju, već poznatim pravilima, tj.

$$Q_{ind-} + Q_{ind+} = 0$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{\text{obuhv.uS}}}{\epsilon_0}$$

Odatle sledi

$$0 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_{ind-}}{\epsilon_0}$$

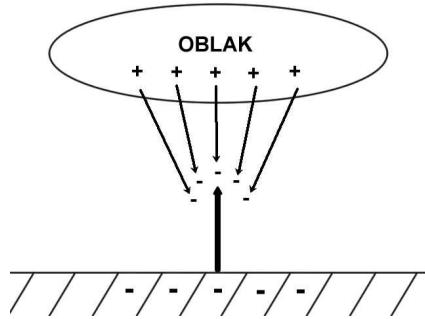
odakle je $Q_{ind-} = -(Q_1 + Q_2 + Q_3)$, odnosno $Q_{ind+} = Q_1 + Q_2 + Q_3$

Ima li električnog polja izvan lopte i kako je raspodeljeno?

Primer 5.6. Gromobran

Predstavlja provodan šiljati štap (štapove) koji se stavlja(ju) na krov objekta (kuće), i vezuje(u) provodnom trakom za zemlju, a služe za zaštitu od udara groma. Time se podstiče udar groma ali na željenom mestu (vrh štapa). U stvari, on treba da primi taj udar. Pojave koje se dešavaju mogu se objasniti elektrostatičkom indukcijom.

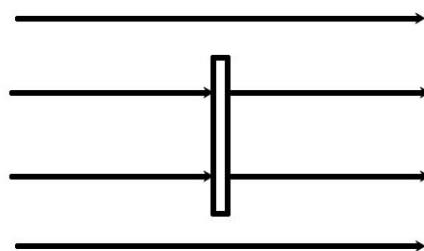
Zemljište je uvek manje – više provodno, pa se javlja indukovano nenelektrisanje suprotnog znaka od onog u oblaku. Napomenimo da se negde daleko na Zemlji javlja indukovano opterećenje istog znaka kao u oblaku. Intenzitet električnog polja će biti najveći na isturenim delovima, a to je u ovom slučaju šiljak gromobrana (slika 5.11), gde, kada je $E > E_{kr,vazduha}$ dolazi do ionizacije vazduha i stvara se put za iznenadno pražnjenje opterećenja oblaka prema zemlji (nazivamo ga grom).



Slika 5.11. Naelektrisani oblak iznad površi zemlje

Primer 5.7. Tanka metalna folija uneta upravno na linije električnog polja

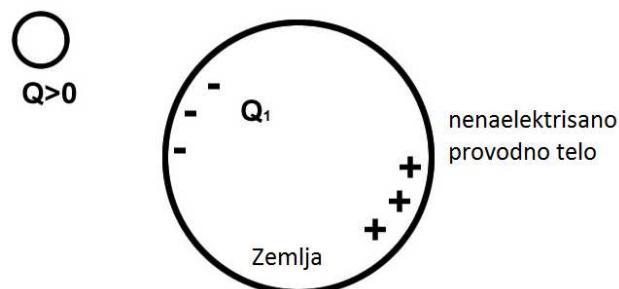
Kako je površ provodnog tela ekvipotencijalna, a linije električnog polja su normalne na površ tela, metalna folija uneta pod 90° u odnosu na vektor električnog polja ne remeti to polje. To znači da ako metalnu foliju postavimo tačno u neku ekvipotencijalnu površ, njeno unošenje neće promeniti polje u koje je uneta (slika 5.12). To znači da polje može da se deli na „sekcije“ pomoću tankih folija postavljenih u ekvipotencijalnu površ, a da se struktura polja ne promeni. *Ovo ćemo koristiti kod proračuna energije sadržane u električnom polju* (podoglavlje 7.3).



Slika 5.12. Tanka provodna folija postavljena upravno na linije \vec{E} ne remeti oblik linija tog polja

Primer 5.8. Razelektrisanje provodnog tela pri spajanju sa Zemljom

Posmatramo situaciju u kojoj malo nanelektrisano telo (u primeru na slici 5.13 nanelektrisano pozitivno) približavamo velikom nenanelektrisanom telu (Zemlji). Dolazi do elektrostatičke indukcije. Ako je malo telo nanelektrisano pozitivno, na velikom telu, na strani prema malom, javlja se negativno indukovano nanelektrisanje Q_1 , koje se povećava kako se mu se nanelektrisano telo približava.



Slika 5.13. Razelektrisanje malog nanelektrisanog i velikog nenanelektrisanog provodnog tela

Neposredno pre dodira malog i velikog tela $Q_1=Q$, a pri dodiru ova dva nanelektrisanja se ponište (neutrališu). Malo telo se razelektriše. Tom prilikom na velikom telu ostaje nanelektrisanje

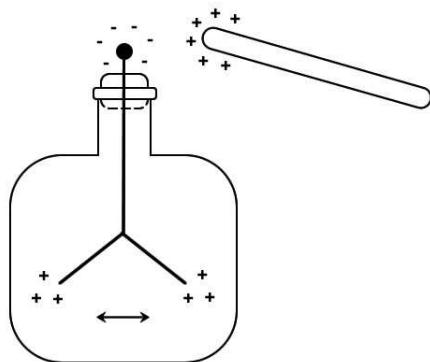
$+Q$ koje je u procesu elektrostatičke indukcije bilo raspodeljeno na površi velikog tela, ali daleko od malog tela. Sada se ono raspodeljuje po celoj površi velikog tela, pa je njegova gustina mala.

Teorijski razelektrisanje zavisi od odnosa dimenzija malog i velikog tela. Kako je Zemlja ogromnih dimenzija u odnosu na bilo koje provodno telo u praksi, može se smatrati da je razelektrisanje potpuno, tj. da nanelektrisano telo izgubi svoje nanelektrisanje, te oko njega više neće biti električnog polja..

Primer 5.9. Elektroskop

Predstavlja staklenu posudu, u koju je kroz izolacioni čep, uvučen provodnik, koji, u donjem delu, ima dva pokretna dela (listića) sa kuglicama (slika 5.14)

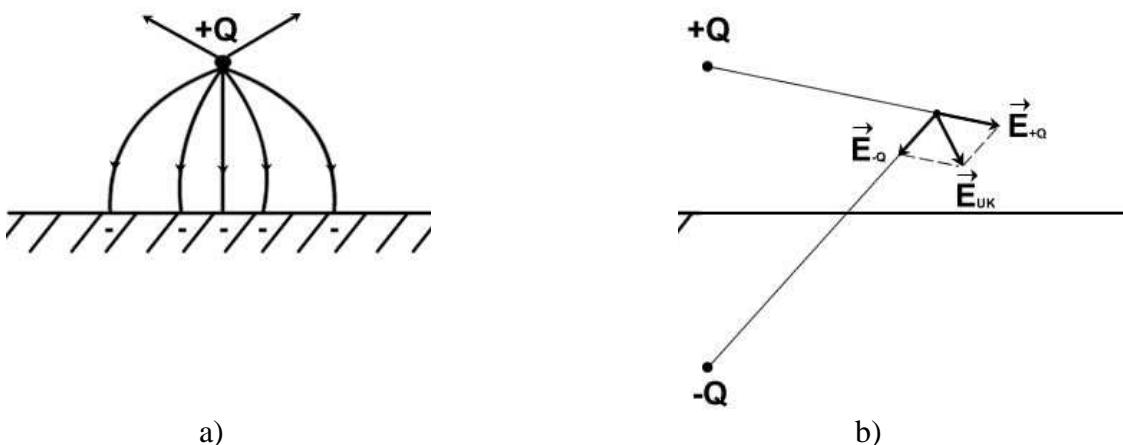
Ako se kuglice, koja se nalazi na vrhu, prinese štap koji je nanelektrisan, doći će do elektrostatičke indukcije, kao u primeru na slici 5.14, gde je štap pozitivno nanelektrisan. Zbog toga što nanelektrisanja istog znaka deluju međusobno odbojnim silama, kuglice se razmiču. Što je nanelektrisanje štapa veće, listići se više razmiču, pa na ovaj način možemo meriti nanelektrisanje nanelektrisanih tela.



Slika 5.14. Skica funkcijonisanja elektroskopa

5.5. Teorema ogledala (likova)

Kako odrediti električno polje u slučaju kada se nanelektrisano telo (na primer, kuglica) nalazi iznad provodne ravni (može biti i Zemlja), jer je očigledno da će doći do elektrostatičke indukcije, odnosno provodna ravan utiče na oblik linija električnog polja, u odnosu na situaciju kada je nanelektrisano telo usamljeno. Setite se da je električno polje usamljenog tačkastog nanelektrisanja radijalno, što očigledno nije tako ako se u blizini nalazi provodna ravan (slika 5.15a).



Slika 5.15. Nanelektrisano telo iznad provodne ravni (a) i primena teoreme ogledala (b)

Po teoremi ogledala (likova) indukovana naelektrisanja u provodnoj ravni mogu se zameniti uvođenjem lika originalnog tela, kao lik u ogledalu, čime se zamenjuje provodna ravan (slika 5.15b). Sada se rezultantno polje nalazi superpozicijom polja koje potiče od originalnog tela i polja koje potiče od njegovog lika (a provodne ravni kao da nema). Uočite da je naelektrisanja lika isto po količini ali suprotno po znaku od naelektrisanja originala (i na istom rastojanju od provodne ravni).

U ovom slučaju je ukupno električno polje jednako zbiru

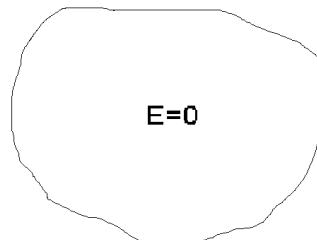
$$\vec{E}_{uk} = \vec{E}_{Q+} + \vec{E}_{Q-}$$

a to znači da nemožemo zanemariti uticaj provodne ravni (Zemlje).

5.6. Veza između naelektrisanja i potencijala provodnih tela. Kondenzatori i njihova kapacitivnost.

Posmatrajmo jedno usamljeno provodno telo sa naelektrisanjem Q i potencijalom V (referentna tačka u beskonačnosti), slika 5.16.

Neka se naelektrisanje promeni k puta (tj. kQ) pitamo se što je tada s potencijalom?



Slika 5.16. Uz objašnjenje kapacitivnosti usamljenog naelektrisanog provodnog tela

Neka je u nekoj tački gustina površinskog naelektrisanja pri naelektrisanju Q jednaka σ . Gustina površinskog naelektrisanja mora biti takva da površ bude ekvipotencijalna i $E=0$ unutar tela. Pri kQ površ takođe mora da bude ekvipotencijalna i $E=0$ unutar tela To je moguće ako je nova gustina površinskog naelektrisanja u svim tačkama $k\sigma$, tj. k puta veća. Zbog toga će u svim tačkama van tela polje biti također k puta veće (kE , gde je E polje pri Q). Zbog toga će i potencijal biti k puta veći od V . Odatle sledi da je naelektrisanje na provodnom telu srazmerno njegovom potencijalu, tj.

$$Q = CV$$

Gornja relacija predstavlja definicioni izraz za kapacitivnost usamljenog provodnog tela.

Konstanta C se naziva **kapacitivnost tela** i ne zavisi ni od Q ni od V . Kasnije ćemo videti da zavisi od osobina dielektrika koji okružuje telo, ako ono nije u vakuumu.

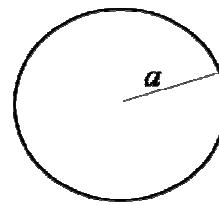
Primer 5.10. Neka imamo usamljenu naelektrisanu provodnu loptu poluprečnika a , slika 5.17.

Ranije smo pokazali (primer 3.4) da je potencijal lopte

$$V_{lopte} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Iz $Q = CV$ sledi izraz za kapacitivnost lopte

$$C_{lopte} = \frac{Q}{V_{lopte}} = 4\pi\epsilon_0 a$$



Slika 5.17. Uz određivanje kapacitivnosti usamljene nanelektrisane provodne lopte

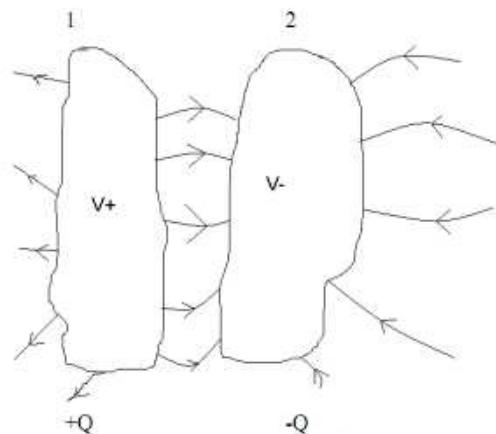
Posmatrajmo sada dva provodna tela sa istim nanelektrisanjem suprotnog znaka. Takav sistem nazivamo električni kondenzator ili samo **kondenzator**.

Provodna tela koja čine kondenzator nazivaju se **elektrode** ili **obloge**.

Prvo ćemo objasniti kako na dva tela možemo dobiti isto nanelektrisanje suprotnog znaka.

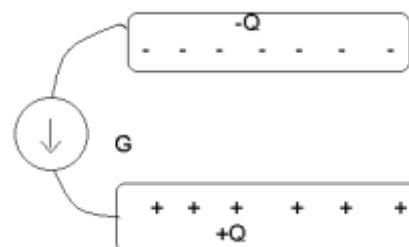
Pretpostavimo da su provodna tela (elektrode) 1 i 2 nenelektrisana (slika 5.18). Ako na neki način uzmemo iz tela 2 malo pozitivno nanelektrisanje ΔQ i prenesemo ga na telo 1, telo 1 će postati pozitivno za ΔQ . Na telu 2 će nedostajati pozitivno nanelektrisanje ΔQ , tj. ono će imati višak negativnog nanelektrisanja jednak $-\Delta Q$.

Ovaj proces možemo ponavljati dok ne nanelektrišemo telo 1 željenim nanelektrisanjem Q , koje smo oduzeli telu 2 i tako ga istovremeno nanelektrisali sa $-Q$, slika 5.18.



Slika 5.18. Električni kondenzator (dva provodna tela sa nanelektrisanjima suprotnog znaka)

Praktično se to obavlja tako da se obloge kondenzatora povežu tankim provodnicima na tzv. **električni generator**¹³, slika 5.19. To je uređaj koji ima osobinu da pozitivna nanelektrisanja sa jednog svog kraja, kroz svoju unutrašnjost, prenosi na svoj drugi kraj, posredstvom neelektričnih sila koje u njemu deluju na nanelektrisanja.



Slika 5.19. Kondenzator vezan tankim provodnicima za krajeve električnog generatora

Ako krajeve električnog generatora vežemo provodnikom za obloge kondenzatora, generator će sa jedne obloge kondenzatora uzimati pozitivna nanelektrisanja i prenosi ih na drugu, čime se na prvoj elektrodi stvara višak negativnog nanelektrisanja. Taj process traje dok nanelektrisanja nagomilana na elektrodama ne postanu tako velika da generator nije više u stanju da savlada

¹³ O generatorima ćemo detaljnije govoriti u drugom delu ovog predmeta: vremenski konstantnim strujama.

električne sile kojima ta opterećenja (a ona stvaraju svoje električno polje) djeluju na opterećenja u generatoru.

Naelektrisanje je prošlo kroz provodnike kojima je generator vezan za provodna tela (obloge kondenzatora). Naelektrisanje na tim provodnicima je zanemarljivo u odnosu na naelektrisanja na oblogama kondenzatora.

Na sličan način, kao kod usamljenog naelektrisanog provodnog tela, dolazi se do zaključka da su poencijalna razlika ($V_+ - V_-$) između elektroda kondenzatora i opterećenje Q na pozitivnoj elektrodi srazmerni jedno drugom, tj.

$$Q = C(V_+ - V_-)$$

što predstavlja definicioni izraz za kapacitivnost kondenzatora

C je kapacitivnost kondenzatora koji obrazuju ova dva tela. Zavisi od oblika i međusobnog položaja oba tela i sredine između ta dva tela (dielektrika, ako tela nisu u vakuumu).

Najčešće C ne zavisi od naelektrisanja Q na elektrodama i napona U između elektroda.

Jedinica za kapacitivnost je farad (označava se sa F), koja je velika jedinica

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{pa je} \quad \left[\frac{C}{V} \right] = [F]$$

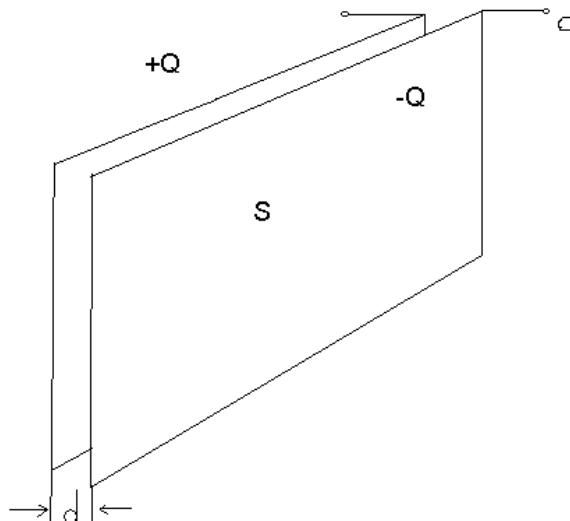
Primer 5.11. Odrediti kapacitivnost Zemlje.

Ako se ima u vidu da je poluprečnik Zemljine lopte $a = R_{\text{Zemlje}} = 6370$ km, onda posle uvrštavanja u izraz za kapacitivnost usamljene provodne lopte, dobijamo

$$C_{\text{Zemlje}} = 4\pi\epsilon_0 a = \frac{1}{9 \cdot 10^9} 6,37 \cdot 10^6 \approx 0,708 \cdot 10^{-3} F \approx 0,7 mF$$

Kapacitivnost čoveka je oko 50 pF, a kapacitivnost loptice lema oko 0,1 pF.

Primer 5.12. Odrediti izraz za kapacitivnost za pločasti kondenzator (dve jednakе paralelne ploče površine S na rastojanju d mnogo manjem od dimenzija ploča), slika 5.20.



Slika 5.20. Pločasti kondenzator

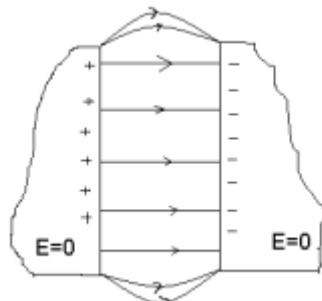
Kako je površinska gustina naelektrisanja σ svuda približno ista, osim na krajevima ploča (to ne bi bio slučaj ako su ploče jako daleko jedna od druge), to je

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Ranije smo pokazali (primer 4.6) da je intenzitet polja između ploča:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \text{pa je} \quad E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

Ploče su provodna tela, pa su ekvipotencijalne, pa je razlika potencijala između bilo koje dve tačke na pločama ista. Najprostije je izračunati razliku potencijala (napon) između ploča idući duž jedne linije polja (ne na krajevima kondenzatora), slika 5.21.



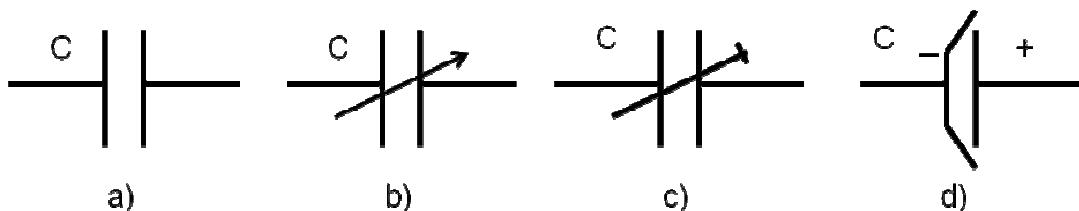
Slika 5.21. Električno polje kondenzatora

Polazeći od definicione relacije za napon, odredimo napon između ploča kondenzatora, a zatim dobijemo i kapacitivnost, tj.

$$\begin{aligned} U_{AB} &= V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \int_A^B Edl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = \int_A^B Edl \cos 0^\circ = \int_A^B Edl = E \int_A^B dl = Ed \\ C &= \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \end{aligned}$$

Prema tome za određivanje kapacitivnosti, potrebno je prvo odrediti izraz za električno polje, a zatim napon (sve smo to učili). U dobijenom izrazu za napon figuriše Q . Primenom izraza $C = Q/U$, dobija se izraz za kapacitivnost (Q se pokrati). Obratite pažnju na zadatke na vežbama.

Osnovna oznaka (simbol), koja se koristi za prikazivanje kondenzatora na električnim šemama je prikazana na slici 5.22a. Na slici 5.22b i c su prikazani simboli kondenzatora promenljive kapacitivnosti: prvi se odnosi na kondenzator koji je tako izrađen da se njegova kapacitivnost, u toku upotrebe, uvek može promeniti, a drugi se odnosi na kondenzator koji nije predviđen da mu se često menja kapacitivnost, već samo kada se podešava uređaj u koji je kondenzator ugrađen (trimer). Na slici 5.22d je prikazan simbol za elektrolitički kondenzator, kod koga se, pri priključivanju, mora voditi računa o polaritetu elektroda, što je uz simbol i naznačeno.



Slika 5.22. Simboli kondenzatora na električnim šemama

Važna karakteristika kondenzatora je *maksimalni napon* na koji može da se priključi, a da ne dođe do probaja, a to zavisi od kritične jačine električnog polja E_{kr} koje može da izdrži sredina između elektroda (dielektrik).

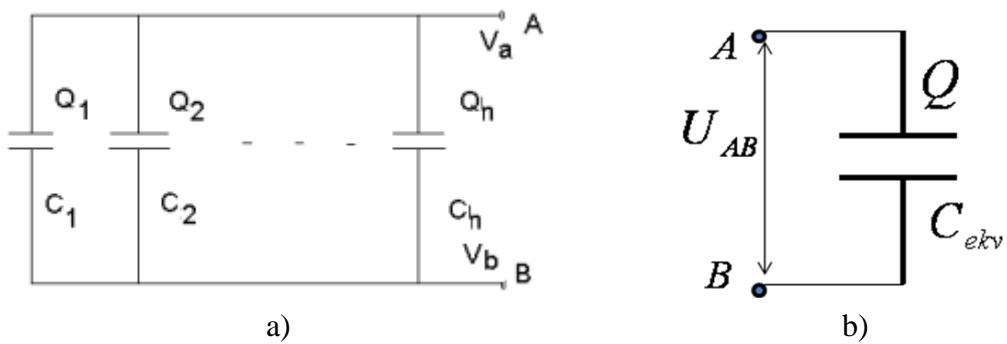
5.7. Paralelna i serijska veza kondenzatora

To su u praksi najčešće veze. U oba slučaja se cela grupa kondenzatora može zameniti samo jednim kondenzatorom određene kapacitivnosti a da pri tome kapacitivnost merena između priključaka cele grupe ostane nepromenjena. Takav kondenzator se naziva **ekvivalentni kondenzator** (slika 5.23b), a njegova kapacitivnost **ekvivalentna kapacitivnost** posmatrane grupe.

Kondenzatori su u praksi takve konstrukcije da se električno polje van kondenzatora može zanemariti pa se i međusobni uticaj, tj. elektrostatička indukcija između pojedinih kondenzatora može zanemariti. U tom slučaju se ekvivalentna kapacitivnost može jednostavno odrediti.

Paralelna veza

Gornje ploče (elektrode) svih kondenzatora su na potencijalu V_a a donje na potencijalu V_b , slika 5.23a. Zbog toga je razlika potencijala između svih ploča ista i jednaka $V_a - V_b$.



Slika 5.23. Paralelna veza kondenzatora (a) i njihov ekvivalentni kondenzator (b)

Ukupno pozitivno najelektrisanje na pozitivnim oblogama svih kondenzatora koje prilikom punjenja (opterećivanja) kondenzatora (tzv. prelazno stanje) mora proći kroz tačke A i B, u smeru od A ka B je (za svaki kondenzator važi $Q_i = C_i(V_A - V_B)$)

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1(V_A - V_B) + C_2(V_A - V_B) + \dots + C_n(V_A - V_B)$$

odnosno

$$Q = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)(V_A - V_B) = C_{ekv}(V_A - V_B)$$

odakle je

$$C_{ekv} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Serijska (redna) veza

Opterećenja svih kondenzatora u serijskoj vezi (slika 5.24) moraju biti ista tj.

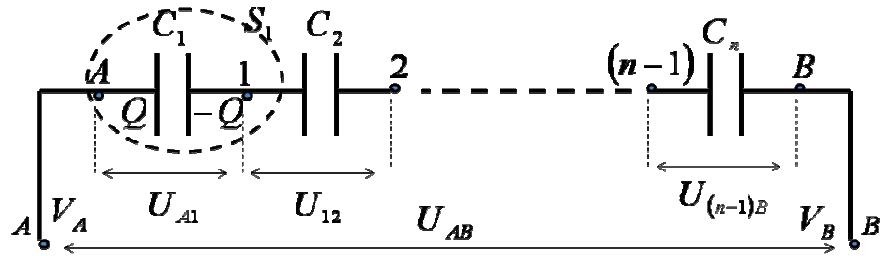
$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$$

Dokaz:

Zamislimo da smo doveli na levu elektrodu kondenzatora C_1 opterećenje Q . To opterećenje će indukovati na desnoj elektrodi C_1 opterećenje jednako $-Q$. (Pošto, po prepostavci, van kondenzatora nema električnog polja, unutar zatvorene površi S_1 koja obuhvata kondenzator C_1 , ukupno opterećenje mora po Gausovom zakonu biti jednako nuli

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{uS_1}}{\epsilon_0} = \frac{Q + Q_{ind}}{\epsilon_0}, \text{ odakle sledi } Q_{ind} = -Q.$$

Višak $+Q$ na desnoj elektrodi C_1 (s obzirom da je ta elektroda vezana provodnikom za levu elektrodu C_2) će se raspodeliti po levoj elektrodi C_2 . Indukcijom će se na desnoj elektrodi istog kondenzatora (C_2) obrazovati $-Q$, itd.



Slika 5.24. Serijska veza kondenzatora

Napon U_{AB} između tačaka A i B jednak je zbiru napona između krajeva svih kondenzatora:

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \int_A^1 \vec{E} d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \dots + \int_{n-1}^B \vec{E} d\vec{l}$$

odnosno

$$U_{AB} = V_A - V_B = U_{A1} + U_{12} + \dots + U_{(n-1)B}$$

a kako za svaki kondenzator važi $U_i = \frac{Q}{C_i}$, to imamo

$$U_{AB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

i kada to uporedimo sa izrazom za ekvivalentni kondenzator $Q = C_{ekv} U_{AB}$ (slika 5.23 desno) odатле sledi da je

$$C_{ekv} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

odnosno

$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Izvedene relacije važe ako su kondenzatori bili bez početne opterećenosti (ako su prazni, neopterećeni).

Primer 5.13: Dva kondenzatora

Paralelno vezana

$$C_{ekv} = C_{12} = C_1 + C_2$$

Ako su kondenzatori jednakih kapacitivnosti

$$C_1 = C_2 = C$$

$$C_{ekv} = 2C$$

$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Redno vezana

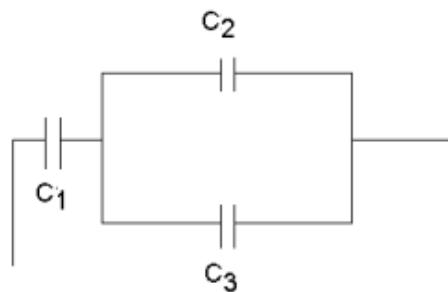
$$C_{\text{ekv}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Ako su kondenzatori jednakih kapacitivnosti

$$C_{\text{ekv}} = \frac{C \cdot C}{C + C} = \frac{C}{2}$$

Mešovita veza

Pod mešovitom vezom kondenzatora podrazumeva se kombinacija redno paralelnih veza. Primer mešovite veze kondenzatora prikazan je na slici 5.25.



Slika 5.25. Primer mešovite veze kondenzatora

Pri određivanju ekvivalentne kapacitivnosti postupa se na sledeći način. Rešavaju se prvo čisto serijske odnosno čisto paralelne vezane grupe dok se ne dođe do kapaciteta ekvivalentnog kondenzatora. Na kraju se, za naš primer, dolazi do rezultata, na primer u obliku

$$C_e = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}, \text{ gde je } C_{23} = C_2 + C_3$$

5.8. Veza između potencijala i gustine naelektrisanja (jednodimenzionalna Puasonova jednačina)

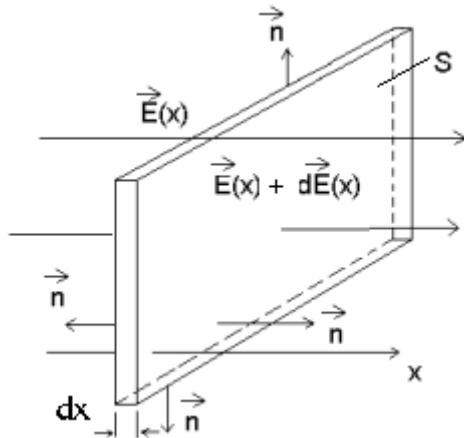
Prepostavimo da se u jednom delu prostora gustina naelektrisanja menja samo u pravcu ose x, tj. $\rho = \rho(x)$. Zamislimo da u tom domenu imamo jednu malu zapreminu oblika kvadra (paralelopipeda, može i kratkog valjka), slika 5.26. Neka je na levoj stranici kvadra intenzitet električnog polja $E(x)$, a na desnoj $E(x) + dE(x)$. Ako primenimo Gausov zakon na površ ovog paralelopipeda onda imamo:

$$-E(x)S + [E(x) + dE(x)]S = \frac{\rho(x)Sdx}{\epsilon_0}, \text{ odnosno } dE(x) = \frac{\rho(x)dx}{\epsilon_0},$$

odnosno, konačno

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

Gornja relacija se naziva i jednodimenzionalni diferencijalni oblik Gausovog zakona.



Slika 5.26. Ilustracija izvođenja Poasonove jednačine

Ako se u prethodnu relaciju uvrsti relacija koja povezuje E i V (izvedena u odeljku 3.4)

$$E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

dobijamo

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{dV(x)}{dx} \right] = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

odnosno

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

što predstavlja jednodimenzionalnu Puasonova jednačinu, koja se često primjenjuje, posebno u elektronici.

Ako je $\rho = 0$ (nema viška nanelektrisanja u prostoru), sledi da je

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

što se naziva jednodimenzionalna Laplasova jednačina.

6. DIELEKTRICI U ELEKTRIČNOM POLJU

6.1. Polarizacija dielektrika

Videli smo da kada se nenaelektrisano provodno telo unese u električno polje, na njegovim površima dolazi do pojave nekompenziranih električnih opterećenja (indukovana opterećenja), koja stvaraju dopunsko električno polje. Ono može da dovede do promene raspodele opterećenja i na nenaelektrisanim provodnim telima koja su izvor prvobitnog polja.

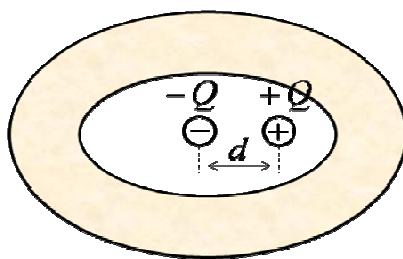
Slično se dešava kada se telo od dielektrika unese u električno polje. Kako u dielektriku nema slobodnih opterećenja¹⁴, način stvaranja nekompenziranih električnih opterećenja je drugačiji. Pojavu možemo objasniti ako pozajmimo jednostavan *model strukture materije* (atoma) i pojam *električnog dipola*.

Dielektrici se prema električnim osobinama molekula mogu podeliti u dve grupe:

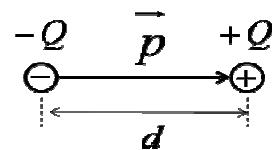
1. dielektrici sa molekulima dipolima (polarnim molekulima), i
2. dielektrici sa nepolarnim molekulima.

Dielektrici sa polarnim molekulima

Kod dielektrika sa molekulima dipolima, električni centri elektronskog oblaka i jezgra se ne poklapaju, slika 6.1. Kao rezultat molekul stvara u svojoj okolini električno polje, koje se može shvatiti kao polje nekog ekvivalentnog električnog dipola (videti podoglavlje 3.5, slika 3.8), slika 6.2. Takav je na primer molekul vode (H_2O).



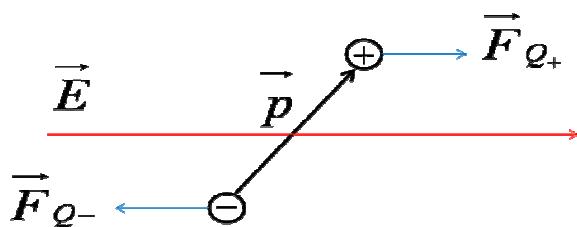
Slika 6.1. Polarni molekul



Slika 6.2. Električni dipol

U odsustvu stranog (spoljašnjeg) električnog polja, dipolni momenti (momenti električnih dipola) polarnog molekula su raspodeljeni u prostoru haotično, pa ne postoji nikakvo makroskopsko električno polje.

Ako se ovakav dielektrik uneset u strano električno polje, pod dejstvom tog polja dipoli će se delimično orijentisati u pravcu tog polja, tj. teže da se vektor \vec{p} i vektor \vec{E} poklope, slika 6.3.



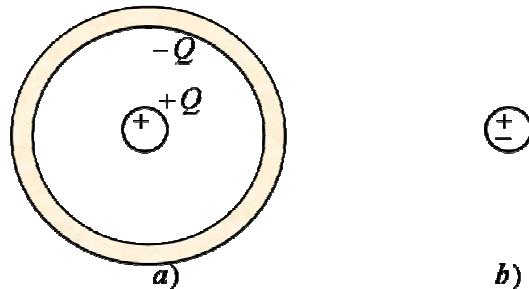
Slika 6.3. Električni dipol u električnom polju (smerovi \vec{p} i \vec{E} teže da se poklope)

¹⁴ Svi elektroni su čvrsto vezani u atomima. Nema ni viška nenaelektrisanja, jer su svi atomi neutralni (imaju isti broj elektrona i protona). Pod normalnim uslovima u dielektriku može postojati \vec{E} , ali nema struje (jer nema slobodnih nosilaca – idealni dielektrik).

Usmerenost dipola neće biti potpuna jer se tome suprostavlja njihovo termičko kretanje. Ipak će u dielektriku postojati oblast orijentisanih dipola (dipoli čiji \vec{p} imaju isti pravac i smer). Njihova polja (sopstvena) se više ne poništavaju, te se javlja makroskopsko (sopstveno) električno polje koje se sabira sa prvobitnim (stranim) poljem koje je izazvalo orijentaciju dipola.

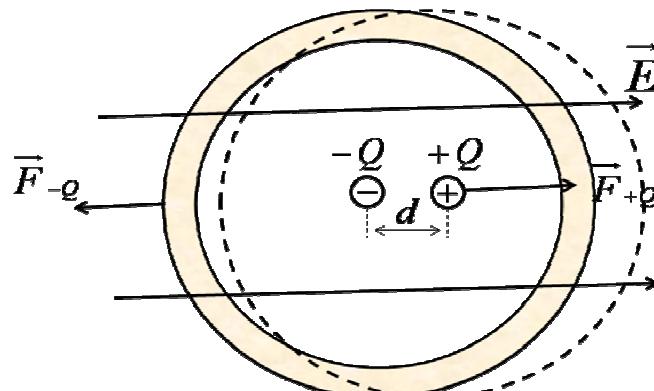
Dielektrici sa nepolarnim molekulima

Kod dielektrika sa nepolarnim molekulima električni centri elektronskog oblaka i jezgra (slika 6.4a) se, u odsustvu stranog polja, poklapaju (slika 6.4b), tj. ovi molekuli nemaju svoj sopstveni dipolni momenat, i ne stvaraju električno polje na velikim rastojanjima od dipola.



Slika 6.4. Model nepolarnog molekula u odsustvu stranog polja \vec{E}

Ako se unesu u električno polje, na pozitivno jezgro deluje sila u smeru vektora električnog polja, a na elektronski omotač u suprotnom smeru (slika 6.5). Unutrašnje sile se suprotstavljaju deformaciji molekula, ali do izvesne deformacije ipak dolazi (crtkana linija na slici 6.5), pa se električni centri pozitivnih i negativnih nanelektrisanja više ne podudaraju. Tako pod dejstvom električnog polja \vec{E} nepolarni molekul postaje električni dipol, slika 6.5.



Slika 6.5. Model nepolarnog molekula kada se nalazi u stranom polju \vec{E}

Kada se telo od dielektrika sa nepolarnim molekulima nalazi u stranom električnom polju, molekuli postaju dipoli čiji će \vec{p} biti orijentisani u smeru \vec{E} u posmatranoj tački, pa dolazi do pojave dopunskog (sopstvenog) električnog polja, koje potiče od ogromnog broja orijentisanih električnih dipola.

Iako je mehanizam različit, kod obe vrste dielektrika krajnji rezultat je isti: pri unošenju u električno polje stvara se makroskopsko električno polje.

Proces formiranja mnoštva usmerenih dipola u dielektricima naziva se **polarizacija dielektrika**, a za takav dielektrik kaže se da je **polarizovan**.

Polarizacija u slučaju dipolnih molekula naziva se **dipolna polarizacija**, a u slučaju nepolarnih - **elektronska polarizacija**. Elektronska polarizacija postoji kod obe vrste molekula jer uvek dolazi do deformacije elektronskog omotača.

Dipolna polarizacija daje mnogo veći srednji dipolni momenat.

Jonska polarizacija

Kod čvrstih kristalnih dielektrika, koji se sastoje od pozitivnih i negativnih jona elemenata koji ulaze u sastav kristalne supstance, javlja se **jonska polarizacija**. Kada nema stranog polja ti joni su unutar kristala tako razmešteni da normalno ne stvaraju makroskopsko električno polje. Pod dejstvom stranog električnog polja dolazi do pomeranja pozitivnih jona u smeru polja, a negativnih u suprotnom, te se kristal ponaša kao "roj" električnih dipola.

Pojam polarizacije dielektrika je važan za objašnjenje pojave u vezi ponašanja dielektrika u električnom polju.

Sada ćemo uvesti matematičke pojmove vezane za pojave polarizacije koje smo do sada opisivali kvalitativno.

6.2. Vektor električne polarizacije

Očigledno da su dipoli u dielektriku koji se nalazi u električnom polju (polarizovani dielektrik), jedini izvor makroskopskog električnog polja. Ti dipoli se karakterišu svojim dipolnim momentom

$$\vec{p} = Q\vec{d}.$$

S obzirom da ostale osobine matetijala nisu bitne, može se zamisliti da se ti dipoli nalaze u vakuumu.

Polje i potencijal dipola u vakuumu smo već obradivali. Pošto u dielektriku ima mnogo dipola uvodi se pojam *vektora gustine električnih momenata dipola* \vec{P} za fizički malu zapreminu dv :

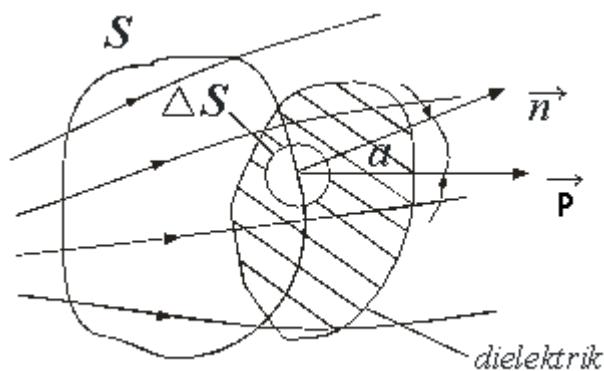
$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{udv}}{dv}$$

i naziva se **vektor električne polarizacije**.

Ukupni momenat svih dipola u maloj zapremini dv je

$$d\vec{p} = \left(\sum \vec{p} \right)_{udv} = \vec{P} dv$$

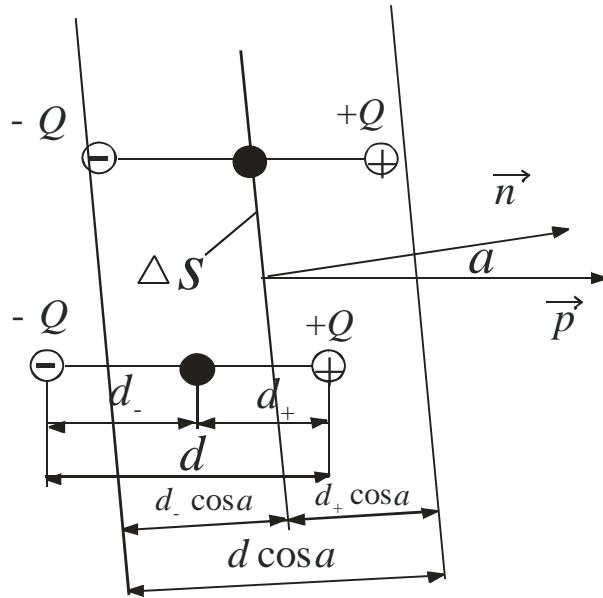
Vektor polarizacije se može tumačiti i na sledeći način: Posmatrajmo neko telo od polarizovanog dielektrika i zamislimo površ S koja iz dielektrika iseca jedan njegov deo, slika 6.6.



Slika 6.6. Telo od dielektrika u elektrostatičkom polju

Pre polarizacije ukupna suma nanelektrisanja u površi S je bila nula. Da li je tako i poslije polarizacije? Iz slike 6.7, na kojoj je prikazan uvećan detalj površinice ΔS sa slike 6.6, vidi se da to

nije tako, jer koliko je negativnih krajeva ušlo u površi S , toliko je pozitivnih izašlo iz površi S . U pogledu ukupnog viška nanelektrisanja je svejedno da li je iz površi S izašlo neko pozitivno nanelektrisanje ili je u nju ušlo isto toliko negativno. Očigledno u oba slučaja nastaje višak nanelektrisanja u zatvorenoj površi S .



Slika 6.7. Uvećan detalj sa slike 6.6

Pretpostavimo da u maloj zapremini $dv = \Delta S \cdot d \cdot \cos \alpha$ posmatranog dielektrika ima N_{dv} neutralnih molekula. Iz slike 6.7 se vidi da je kroz mali deo površi ΔS zatvorene površi S sa slike 6.6 prošla ukupna količina elektriciteta:

$$\Delta Q = N(-Q) \cdot \Delta S \cdot d_- \cos \alpha \quad (\text{s desna na levo})$$

$$\Delta Q_+ = NQ \cdot \Delta S \cdot d_+ \cos \alpha \quad (\text{s leva na desno})$$

Kako je svejedno da li ušlo negativno ili izašlo pozitivno nanelektrisanje, to je

$$\begin{aligned} \Delta Q_{iz \text{ skroz } \Delta S} &= \Delta Q_- + \Delta Q_+ \\ &= N \cdot Q \cdot d \cdot \cos \alpha \cdot \Delta S \end{aligned}$$

Kako je momenat svih dipola u dv isti $p = Q \cdot d$ i ako ih ima N onda je

$$\Delta Q_{iz \text{ skroz } \Delta S} = Np \Delta S \cos \alpha$$

Kako je intenzitet vektora polarizacije

$$P = N \cdot Q \cdot d = Np$$

to je konačno

$$\Delta Q_{iz \text{ skroz } \Delta S} = P \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha$$

odnosno

$$\Delta Q_{iz \text{ skroz } \Delta S} = \vec{P} \cdot \vec{\Delta S}$$

gde je $\vec{\Delta S} = \Delta S \cdot \vec{n}$.

Fizički ovo znači da je intenzitet vektora polarizacije \vec{P} u nekoj tački dielektrika jednak količniku nanelektrisanja koje u procesu polarizacije prođe kroz ravnu površinicu ΔS upravno na pravac polarizacije, i te površinice ΔS . Smer vektora \vec{P} je u smeru kretanja pozitivnih opterećenja.

Ako znamo \vec{P} u svim tačkama dielektrika, možemo da odredimo dipole ekvivalentne svakom njegovom elementu zapreminе. Takođe se može odrediti vektor električnog polja i potencijal koje taj polarizovani dielektrik stvara.

Jedinica za P je C/m^2 , kao za σ .

Merenja pokazuju da je za najveći broj dielektrika u nekoj tački, vektor polarizacije srazmeran vektoru električnog polja u toj tački, tj..

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (\text{ovo važi za linearne dielektrike})$$

gde je χ_e je električna susceptibilnost dielektrika, i ona je broj bez dimenzije (neimenovan broj).

Kako je \vec{P} u smeru \vec{E} (\vec{P} ima smer kretanja pozitivnih opterećenja, a ona se kreću u smeru električne sile, koja ima smer \vec{E}), odатle sledi da je χ_e pozitivno.

Dielektrik je **homogen** ako je χ_e isto u svim tačkama, ako nije dielektrik je **nehomogen**.

Dielektrici koji se polarizuju isto u svim pravcima vektora električnog polja nazivaju se **izotropni**, a oni koji nemaju tu osobinu su **anizotropni** (na primer, kristal kvarca, uzrok je jak međusobni uticaj susednih molekula).

6.3. Vezana električna opterećenja

Polazeći od relacije

$$\Delta Q_{iz} \text{ skroz } \Delta S = \vec{P} \cdot \Delta \vec{S}$$

koja važi za dio površi koja se nalazi u dielektriku, i imajući u vidu da je $\vec{P}=0$ van dielektrika (pa i svi proizvodi $\vec{P} \Delta \vec{S}$), onda je ukupna količina elektriciteta koja je u procesu polarizacije izašla iz zatvorene površi S :

$$Q_{izS} = \sum \vec{P} \cdot \Delta \vec{S}$$

Ako je ΔS dovoljno malo, tj. $\Delta S \rightarrow ds$ onda možemo \sum zameniti sa \oint_S pa je:

$$Q_{izS} = \oint_S \vec{P} d\vec{s}$$

Koliko se opterećenje pojavilo unutar površi S u procesu polarizacije?

Pre polarizacije u površi S nije bilo viška opterećenja. U toku polarizacije je izašlo $\oint_S \vec{P} d\vec{s}$, to znači da se unutar površi S pojavio višak iste količine ali suprotnog znaka, obeležimo ga sa Q_p .

$$Q_p = - \oint_S \vec{P} d\vec{s}$$

Ovo opterećenje jeste višak realnih opterećenja unutar površi S ali to nanelektrisanje je nerazdvojni dio molekula i atoma pa se naziva **vezano električno opterećenje** ili *opterećenje polarizacije*.

Gde se taj višak opterećenja nalazi?

Posmatrajmo neki polarizovani homogeni dielektrik. Zamislimo malu zatvorenu površ unutar dielektrika. Ako je površ dovoljno mala vektor \vec{P} je istog intenziteta i smera u svim tačkama unutar te površi i na površi (homogeni dielektrik).

Ranije smo videli (primer 4.1) da je fluks homogenog električnog polja ($\vec{E} = \text{const}$) kroz bilo koju zatvorenu površ jednak nuli. To važi i za svaki drugi vektor koji je istog intenziteta, pravca i smera u posmatranom delu prostora (homogeno polje¹⁵ i homogeni dielektrik). Zbog toga važi:

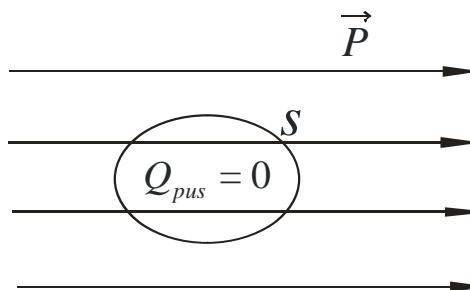
¹⁵ Kod elektrostatičkih prečistača, na primer, koristi se nehomogeno električno polje, u kome se dipoli (čestice vazduha, itd.) pomeraju u oblast jačeg polja (jače polje je na elektrodama). Kako intenzitet električne sile nije isti na jedan i drugi kraj dipola, dipol se zakreće, ali i linearno pomera.

$$\oint_S \vec{P} d\vec{s} = \vec{P} \oint_S d\vec{s} = 0$$

Kako je Q_p u S jednako $Q_p = -\oint_S \vec{P} d\vec{s}$, a $\oint_S d\vec{s} = 0$, to je

$$Q_p = 0$$

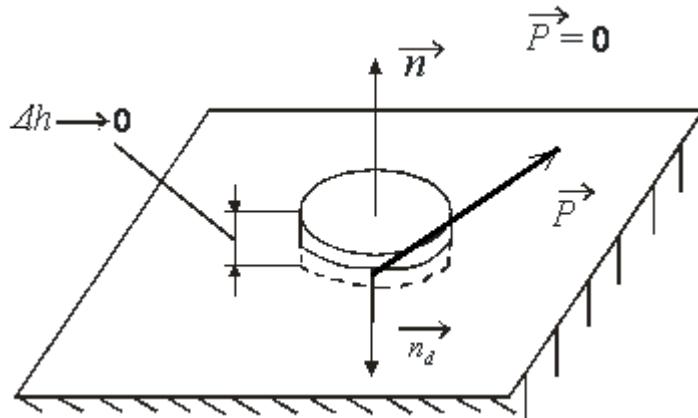
Ukupno vezano naelektrisanje u homogenom dielektriku jednako je nuli¹⁶, slika 6.8. Ovo fizički znači da je u procesu polarizacije u površ S ušlo tačno onoliko pozitivnog i negativnog koliko je i izašlo. To znači da svaka fizički mala zapremina u homogenom dielektriku obuhvata isti broj negativnih i pozitivnih krajeva dipola. To znači da u polarizovanom homogenom dielektriku nema viška vezanih električnih opterećenja. Znači da se makroskopsko polje u unutrašnjosti dielektrika poništava. Dakle celokupno makroskopsko električno polje polarizovanog homogenog dielektrika potiče od sloja vezanih opterećenja koja se u procesu polarizacije pojave na njegovoj površi.



Slika 6.8. U homogenom polarizovanom dielektriku zapreminska gustina vezanog naelektrisanja jednaka je nuli

Kolika je površinska gustina tih vezanih naelektrisanja? Izvesti ćemo izraz na sledeći način.

Posmatrajmo mali veoma pljosnat valjak čija je jedna osnovica u dielektriku a druga u vakuumu ($P=0$ u vakumu), slika 6.9.



Slika 6.9. Određivanje površinske gustine vezanih naelektrisanja

Na osnovu jednačine

$$Q_p = -\oint_S \vec{P} d\vec{s}$$

¹⁶ U nehomogenom dielektriku može biti $Q_p \neq 0$ po zapremini dielektrika.

Treba razlikovati pojmove: linearan homogen dielektrik (nema (viška) vezanih naelektrisanja po zapremini); linearan nehomogen dielektrik (ima vezanih naelektrisanja po zapremini); homogeno polarizovan dielektrik ($\vec{P} = \text{const.}$); homogeni dielektrik ($\epsilon_r = \text{const.}$, ili $\chi_e = \text{const.}$); polarizovani homogeni dielektrik.

dobija se (fluks kroz omotač je nula, jer $\Delta h \rightarrow 0$, a kroz osnovu u vakuumu je nula, jer je $\vec{P} = 0$)

$$Q_p = -(0 + 0 + \vec{P} \Delta \vec{S})$$

$$Q_p = -\vec{P} \Delta S \vec{n}_d = \vec{P} \Delta S \vec{n}$$

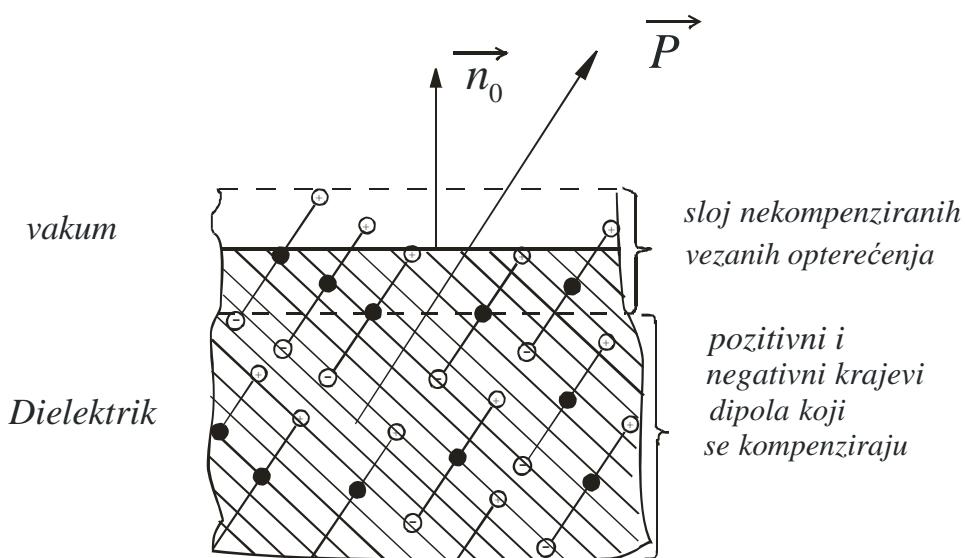
jer je na slici 6.9, $\vec{n} = -\vec{n}_d$

Kako je po definiciji $\sigma_p = \frac{Q_{p \text{ na } \Delta S}}{\Delta S}$ to je

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Normalna \vec{n} je usmerena od dielektrika u vakuum.

Pogledajmo vezana opterećenja sa fizičkog stanovišta, što je slikovito prikazano na slici 6.10.



Slika 6.10. $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ je, u stvari, gustina opterećenja između dve crtkane linije na slici, shvaćena kao površinsko naelektrisanje

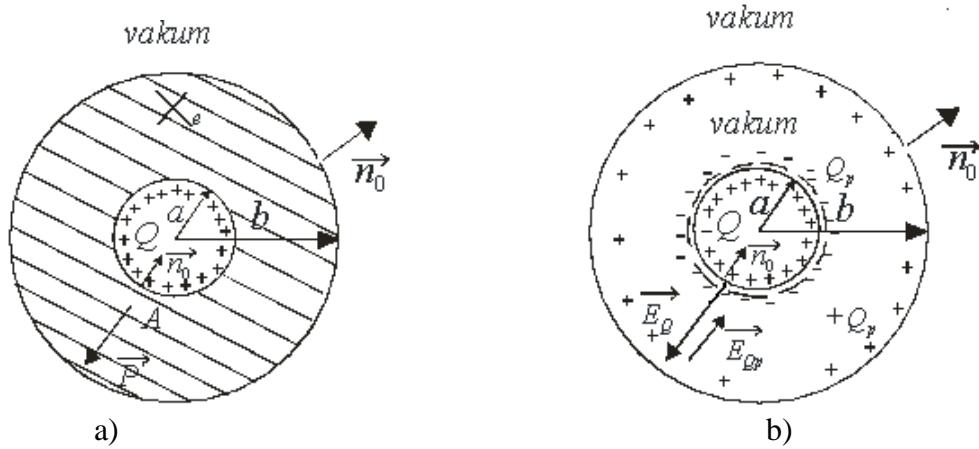
Sa slike 6.10. je očigledno da unutar dielektrika dolazi do poništavanja pozitivnih i negativnih krajeva dipola, a ostaje samo nekompenzirani sloj krajeva dipola uz samu površ dielektrika, i to je ono što smatramo vezanim opterećenjima¹⁷. Prema tome unutrašnjost dielektrika možemo zameniti vakuumom, a ceo dielektrik samo slojem vezanih opterećenja uz površ dielektrika, čija je površinska gustina vezanih naelektrisanja σ_p .

Znači dielektrik se zamenjuje površinskim vezanim opterećenjima po njegovoj površi, a ostatak dielektrika možemo zanemariti, pa možemo smatrati kao da se vezana opterećenja nalaze u vakuumu.

Primer 6.1. Provodna pozitivno naelektrisana lopta sa sfernim slojem homogenog dielektrika oko nje, slika 6.11a.

Na slici 6.11b je prikazan isti sistem ali kada je dielektrik zamenjen sa vezanim opterećenjima.

¹⁷ U dielektricima nema viška naelektrisanja, jer su svi atomi neutralni (imaju istu količinu pozitivnog i negativnog naelektrisanja).

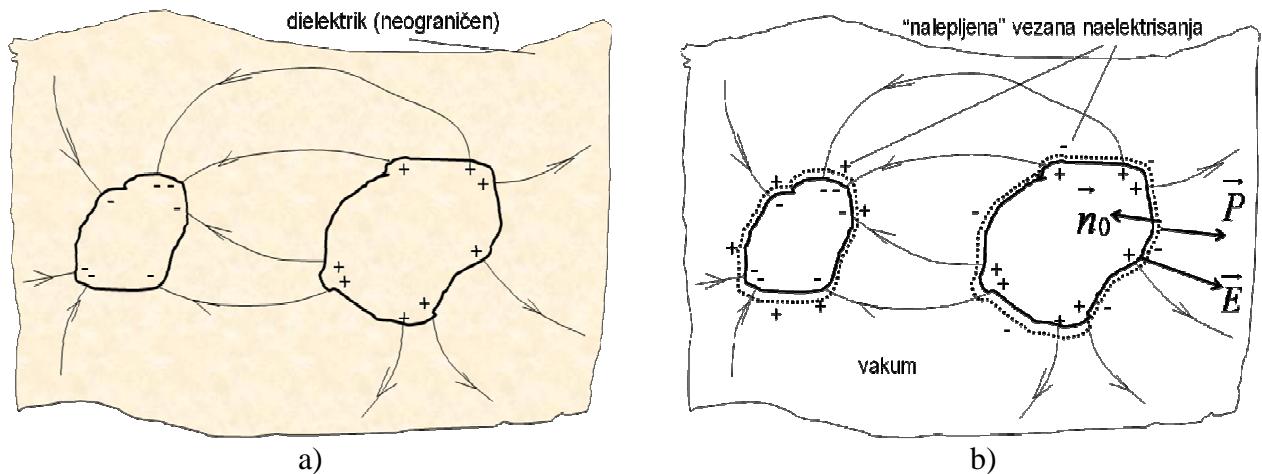


Slika 6.11 a) nanelektrisana provodna lopta i sloj dielektrika oko nje, b) sloj dielektrika zamenjen površinski vezanim nanelektrisanjem

6.4. Električno polje u homogenom dielektriku. Relativna i absolutna dielektrična konstanta

Ograničavamo se na homogene¹⁸ dielektrike, jer su takvi najčešći u praksi (ili slojevi homogenih dielektrika).

Posmatrajmo nekoliko provodnih tela u homogenom dielektriku susceptibilnosti χ_e , slika 6.12a. Kako smo već pokazali, dielektrik možemo zameniti površinskim vezanim nanelektrisanjima u vakuumu (slika 6.12b).



Slika 6.12 a) dva nanelektrisana tela u homogenom dielektriku, b) dielektrik zamenjen površinskim slojem nanelektrisanja na dodirnoj površi dielektrika i provodnika

Ukupna površinska gustina nanelektrisanja na površi provodnog nanelektrisanog tela u dielektriku (dielektrik zamenjen sa σ_p) je:

$$\sigma_{ukupno} = \sigma + \sigma_p$$

To je nanelektrisanje koje se sada nalazi u vakuumu. σ i σ_p mogu biti različiti u različitim tačkama.

¹⁸ Homogeni dielektrik je dielektrik kod koga je dielektrična konstanta ista u svim tačkama ($\epsilon_r = \text{const.}$, ili $\chi_e = \text{const.}$). Homogeno polarizovan dielektrik je dielektrik kod koga je vektor električne polarizacije isti (istog intenziteta, pravca i smera) u svim tačkama ($\vec{P} = \text{const.}$).

Ranije smo pokazali (podoglavlje 5.3) da za nanelektrisana provodna tela u vakuumu, između E u vakuumu u tački blizu površi tela i σ , važi veza $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, gde je σ ukupna površinska gustina nanelektrisanja. Prema tome i sada važi veza istog oblika ako se umesto σ stavi $\sigma_{ukupno} = \sigma + \sigma_p$, tj.

$$E = \frac{\sigma + \sigma_p}{\epsilon_0}$$

Želimo da odredimo relaciju koja povezuje E i σ u prisustvu dielektrika.

E je normalno na površ provodnika. Kako smo prepostavili homogeni dielektrik, to u svim tačkama važi i $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, pa je i \vec{P} normalno na površ tog provodnika. Normala \vec{n}_0 je usmerena od dielektrika. Iz jednačina

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \vec{P} \cdot \vec{n}_0 \\ \vec{P} &= \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

i imajući u vidu da je ugao između $(\vec{P}, \vec{n}_0) = \pi$ (slika 6.12b), pa je $\sigma_p = -\epsilon_0 \chi_e E$, kombinujući ove relacije dolazi se do izraza da je:

$$E = \frac{\sigma}{(1 + \chi_e) \cdot \epsilon_0}$$

Izraz $(1 + \chi_e) = \epsilon_r$ naziva se **relativna dielektrična konstanta** (relativna permitivnost).

Kako je $\chi_e > 0$, to je i $\epsilon_r > 0$.

$\epsilon_r \cdot \epsilon_0 = \epsilon$ naziva se **apsolutna dielektrična konstanta** ili dielektrična konstanta (permitivnost).

Kako je $\epsilon_r > 1$, to je i $\epsilon > 1$.

Sada se, konačno, izraz za E može pisati u kompaktnom obliku

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

(Setimo se da u vakuumu važi $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Uočite razliku u ta dva izraza.)

Ukupna površinska gustina opterećenja uz površ provodnika u dielektriku se može sada izraziti kao (imajući u vidu da je $\chi_e = \epsilon_r - 1$):

$$\begin{aligned}\sigma + \sigma_p &= \sigma - \epsilon_0 \chi_e E = \sigma - \epsilon_0 \chi_e \frac{\sigma}{\epsilon} = \sigma \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \\ \sigma + \sigma_p &= \frac{\sigma}{\epsilon_r}\end{aligned}$$

Prema tome zbir površinskih gustina slobodnih i vezanih opterećenja na provodnim telima, u homogenom polarizovanom dielektriku, relativne dielektrične konstante ϵ_r , je ϵ_r puta manji od površinske gustine slobodnih opterećenja.

To važi i za E , i za V u prisustvu dielektrika u odnosu na provodno telo bez dielektrika. Na primer $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r$.

Primer 6.2.

- a) kondenzator bez dielektrika

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_{na+elektr.}}{V_+ - V_-}$$

b) kondenzator u prisustvu dielektrika. Razlika potencijala kondenzatora sa dielektrikom je ϵ_r puta manja, te će kapacitet takvog kondenzatora biti veći ϵ_r puta.

$$C_{\text{sa diel.}} = \epsilon_r C_{\text{bez diel.}}$$

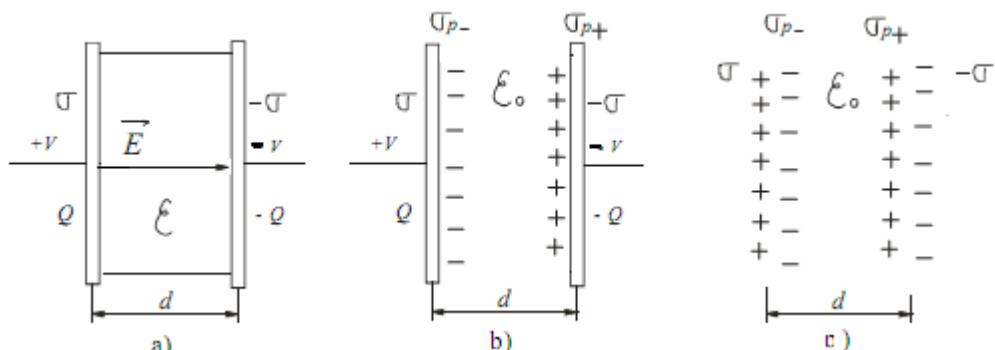
Dakle kod svih izraza za kapacitivnost sistema u vakuumu, treba uz ϵ_0 dopisati ϵ_r i dobijaju se izrazi za kapacitivnost u prisustvu dielektrika.

Kondenzator sa dielektrikom, slika 6.13a, može se prikazati i kao kondenzator u kome je dielektrik zamenjen vezanim naelektrisanjima uz površ dielektrika, slika 6.13b, odnosno ceo kondenzator sa 4 površi naelektrisanja, slika 6.13c.

Uz sliku 6.13 važe relacije:

$$\sigma_{p-} = -P, \quad \sigma_{p+} = P, \quad \vec{E}_{\sigma_p} = -\vec{P}/\epsilon_0$$

(nacrtati na slici 6.13b vektore \vec{E}_{σ_p} i \vec{P})



Slika 6.13 a) pločasti kondenzator sa dielektrikom, b) sa dielektrikom zamenjenim površinskim slojevima vezanih naelektrisanja, sa slojevima slobodnih i vezanih naelektrisanja

Relativne permitivnosti nekih dielektrika prikazane su u tabeli 6.1:

Tabela 6.1. Relativne ermitivnosti materijala

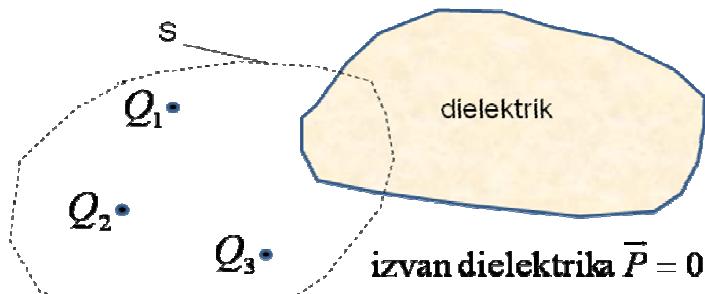
Materijal	ϵ_r
Vazduh	1,0006
Transformatorsko ulje	2,2 - 2,4
Papir	2,5 - 3,5
Pertinaks	5 - 8
Guma	2 - 3,5
Liskun	4 - 7
Alkohol	28,4
Čista voda (20°C)	80,0
Čista voda (0°C)	88,0
Led (-5°C)	2,85

6.5. Uopšteni oblik Gausovog zakona. Vektor električnog pomeraja

Zamislimo da zatvorena površ S obuhvata deo tela od homogenog dielektrika, ali i deo slobodnih opterećenja koja su izvor prvobitnog polja (slika 6.14.).

Dielektrik možemo zameniti viškom vezanim nanelektrisanja koja se nalaze u vakuumu, pa se na zatvorenu površ S može primeniti Gausov zakon

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{\text{ukupno u } S}}{\epsilon_0}$$



Slika 6.14. Ilustracija izvođenja uopštenog oblika Gausovog zakona

Primenom Gausovog zakona, u našem slučaju, dobijamo

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{\text{ukupno u } S}}{\epsilon_0} = \frac{Q + Q_p}{\epsilon_0}$$

gde je Q – višak slobodnog, a Q_p – višak vezanog nanelektrisanja unutar zatvorene površi S.

Višak vezanog nanelektrisanja Q_p na delu dielektrika unutar površi S može da se izračuna kao (- $\oint_S \vec{P} d\vec{s}$) po celoj površi S, jer je na delu površi S van dielektrika $\vec{P} = 0$, pa je

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q + Q_p}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(Q - \oint_S \vec{P} d\vec{s} \right)$$

odakle se, s obzirom da se oba integrala odnose na istu površ, posle sređivanja, dobija

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{s} = Q$$

Dobijeni izraz važi za bilo kakvu površ S, a u njoj se mogu nalaziti ne samo nanelektrisana provodna tela, nego i polarizovani dielektrici, pa se relacija naziva **uopšteni Gausov zakon**.

Veličina data izrazom

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

naziva se **vektor električne indukcije**, ili vektor gustine električnog fluksa, ili vektor električnog pomeraja. Dakle \vec{D} predstavlja ukupni električni pomeraj, \vec{P} električni pomeraj u dielektriku, a $\epsilon_0 \vec{E}$ se formalno može posmatrati kao električni pomeraj u vakuumu, premda ne predstavlja nikakav pomeraj stvarnih opterećenja.

Sada se može pisati

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q_{\text{ukupno u } S}$$

što predstavlja **uopšteni oblik Gausovog zakona** napisan u kompaktnom obliku (ili jednu od četiri Maksvelove jednačine).

Imajući u vidu relacije koje važe za linearne dielektrike ($\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, i $\epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon$), relacija $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ se može napisati u obliku

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

koja važi za linearne dielektrike.

Jedinica za D i P je C/m².

Uopšteni Gausov zakon, kao i Gausov zakon, ima mnogo primena, koje se mogu svesti na dve grupe:

- dokazivanje nekih opštih osobina \vec{E} u prisustvu dielektrika, i
- izračunavanje \vec{D} i \vec{E} u prostim, ali važnim slučajevima.

Integralne jednačine u elektrostatici

Na osnovu onog što smo do sada naučili, možemo konstatovati da su osnovne integralne jednačine u elektrostatici zakon o cirkulaciji vektora električnog polja, i uopšteni Gausov zakon. Odnosno:

A) U svim slučajevima važi¹⁹

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0$$

B) Uopšteni Gausov zakon se u raznim slučajevima može napisati u sledećem obliku:

1) nelinearni dielekrik $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q_s$, D(ϵ) je nelinerana funkcija, $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$, predstavlja

konstitutivnu relaciju.

2) linearne nehomogeni dielektrik $\oint_S \epsilon \vec{E} d\vec{s} = Q_s$, $\epsilon_r \neq \text{const.}$, $\epsilon = f(x, y, z)$

3) linearne homogeni dielektrik $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_s}{\epsilon}$, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\epsilon_r = \text{const.}$

4) vakuum $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_s}{\epsilon_0}$

Uočite da, ako je polje homogeno ($\vec{E} = \text{const.}$), a dielektrik linearan i homogen (slučaj 3.), dobija se $\vec{E} \oint_S d\vec{s} = 0$, jer je $\oint_S d\vec{s} = 0$, pa u homogenom dielektriku, u unutrašnjosti, nema slobodnih nanelektrisanja, dok u nehomogenom može biti.

6.6. Granični uslovi

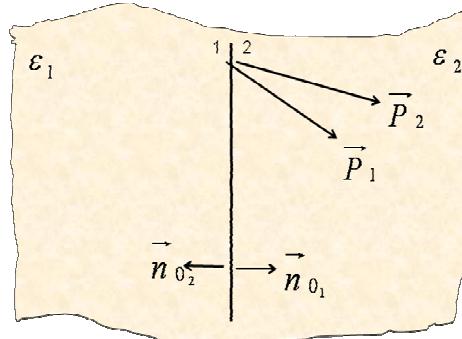
Posmatrajmo površ koja razdvaja dva homogena dielektrika dielektričnih konstanti ϵ_1 i ϵ_2 (slika 6.15.).

Ako su dielektrici polarizovani, na graničnoj površi će se javiti, jedan uz drugi, dva sloja vezanih površinskih opterećenja. Njihova gustina, pojedinačno, određuje se relacijom $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_o$, gde \vec{n}_o ide u drugu sredinu.

Ukupna površinska gustina je zbir:

$$\sigma_p = \vec{P}_1 \vec{n}_{o1} + \vec{P}_2 \vec{n}_{o2} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \vec{n}_{o1}, \quad \text{gde je } \vec{n}_{o2} = -\vec{n}_{o1}$$

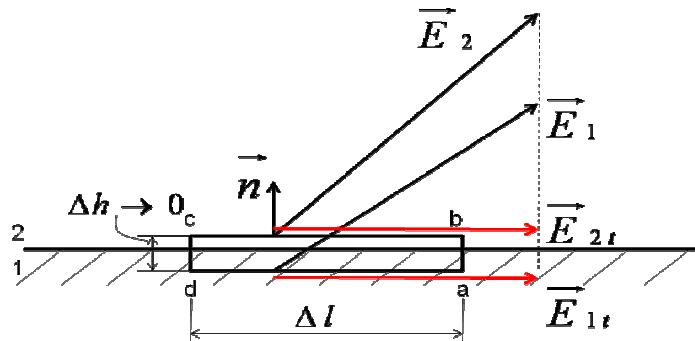
¹⁹ Taj zakon je izведен iz zakona o održanju rada i energije, pa mora da važi bez obzira na prisustvo provodnika ili dielektrika.



Slika 6.15. Granična površ dva dielektrika

Vektori \vec{E} i \vec{D} u dve bliske tačke u jednom i drugom dielektriku (1 i 2) koji su posljedica nekompenziranih opterećenja na graničnoj površi, u opštem slučaju imaju različit i intenzitet i smer. Kakva je veza među njima? Ta veza se naziva **granični uslov**.

Posmatrajmo prvo komponente vektora električnog polja \vec{E} , u tačkama 1 i 2, koje su paralelne sa graničnom površi (tangencijalne komponente). Primenom $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ na malu pljosnatu pravougaonu konturu C (čija se jedna stranica nalazi u jednoj a druga u drugoj sredini, neposredno uz razdvojnu površ), slika 6.16, imamo



Slika 6.16. Ilustracija izvođenja dokaza da je $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} d\vec{h} + \int_b^c \vec{E} d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} d\vec{h} + \int_d^a \vec{E} d\vec{l} = - \int_b^c E_{2t} d\vec{l} + \int_d^a E_{1t} d\vec{l} = E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

pri čemu treba imati u vidu da $\Delta h \rightarrow 0$, pa je $\int_a^b \vec{E} d\vec{h} \approx 0$ i $\int_c^d \vec{E} d\vec{h} \approx 0$. Konačno se dobija

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Što predstavlja granični uslov za tangencijalne komponente vektora električnog polja.

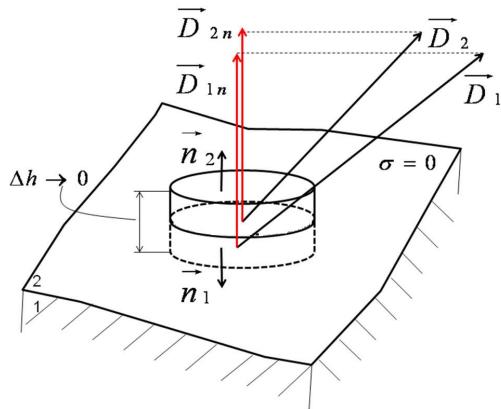
Kako je, za linearne sredine, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, to je $E_{1t} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1}$ i $E_{2t} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$, pa na osnovu graničnog

uslova sledi da je

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

Posmatrajmo sada normalne komponente vektora električne indukcije \vec{D} na graničnu površ. Primjenimo uopšteni Gausov zakon na mali pljosnat valjak čija je jedna osnovica u sredini 1, a druga u sredini 2, slika 6.17.

Prepostavimo da na graničnoj površi nema slobodnih nanelektrisanja ($\sigma=0$), odnosno ukupna slobodna nanelektrisanja u površi S su jednaka nuli.



Slika 6.17. Ilustracija izvođenja dokaza da je $D_{1n} = D_{2n}$

S obzirom da visina valjka $\Delta h \rightarrow 0$ to se $\vec{D} \Delta \vec{S}$ kroz omotač valjka može zanemariti, jer $\Delta S \rightarrow 0$, i imajući u vidu da je $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$, imamo

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S = 0$$

odakle je

$$D_{1n} = D_{2n}$$

što je granični uslov za normalne komponente vektora električnog pomeraja²⁰.

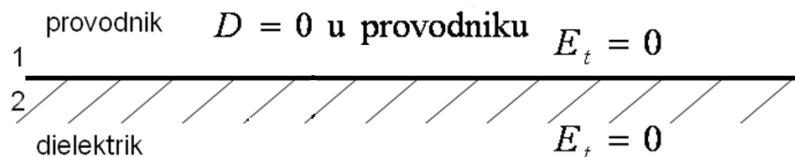
Kako je, za linearne sredine, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, to je $D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n}$, i $D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n}$ odnosno

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad \text{ili} \quad \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Primer 6.3.

Razmotrimo sada slučaj kada je sredina 1 provodnik. U provodniku je $E_t = 0$, pa na osnovu graničnog uslova za tangencijalne komponente vektora električnog polja, odnosno $E_{1t} = E_{2t}$, proizilazi da je u dielektriku uz samu površ provodnika (slika 6.18.)

$$E_t = 0.$$



Slika 6.18. $E_t = 0$ u dielektriku uz površ provodnika

Primer 6.4.

Prepostavimo sada da postoje slobodna nanelektrisanja na razdvojnoj površi (u primeru 6.3) i neka je njihova površinska gustina u nekoj tački provodnika na slici 6.18 σ . Primenimo uopšteni Gausov zakon na pljosnat valjak kao na slici 6.17. Na površinici ΔS u provodniku nema polja ($\vec{D} = 0$ u provodniku), pa je $\vec{D} \Delta \vec{S} = 0$. Pljosnati valjak sada obuhvata ukupno slobodno nanelektrisanje jednako $\sigma \Delta S$, pa je na osnovu uopštenog Gausovog zakona

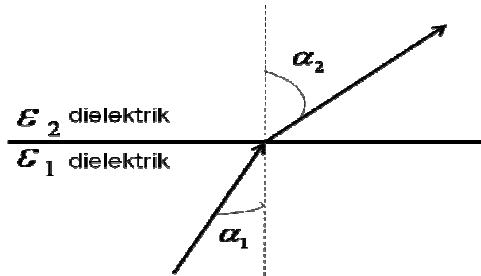
$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = D_{2n} \Delta S - 0 = Q_{\text{ukupno u } S} = \sigma \Delta S$$

²⁰ $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$ ako ima (slobodnih) nanelektrisanja na graničnoj površi.

odakle sledi da je normalna komponenta vektora električnog pomeraja u dielektriku, uz samu površ provodnika.

$$D_n = \sigma.$$

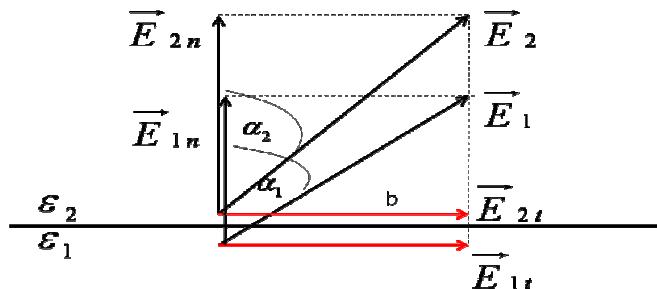
Ukoliko linije \vec{E} nisu paralelne sa graničnom površi dva dielektrika, ili normalne na nju, na graničnoj površi se linije prelamaju, slika 6.19.



Slika 6.19. Linije sile se prelamaju na graničnoj površi dva dielektrika

Nacrtajmo komponente vektora \vec{E} u tačkama neposredno uz razdvojnu površ dva dielektrika (slika 6.20). Prema slici 6.20 je

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}, \text{ i } \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$



Slika 6.20. Ilustracija izvođenja dokaza da je $\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = \epsilon_1 / \epsilon_2$

Ako napravimo količnik $\operatorname{tg} \alpha_1$ i $\operatorname{tg} \alpha_2$, i imamo u vidu granični uslov za tangencijalne komponente vektora \vec{E} , tj. $E_{1t} = E_{2t}$, dobijamo

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}},$$

Ako uzmemo u obzir da je $E_{1n} = \frac{D_{1n}}{\epsilon_1}$ i $E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\epsilon_2}$, i granični uslov za normalne

komponente vektora \vec{D} , tj. $D_{1n} = D_{2n}$, onda dobijamo

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Ako je $\epsilon_1 > \epsilon_2$ odатle sledi da je $\alpha_1 > \alpha_2$, pa pri prolasku kroz razdvojnu površ, na primer, dielektrika i vazduha (vakuma), \vec{E} i \vec{D} se prelama ka normali.

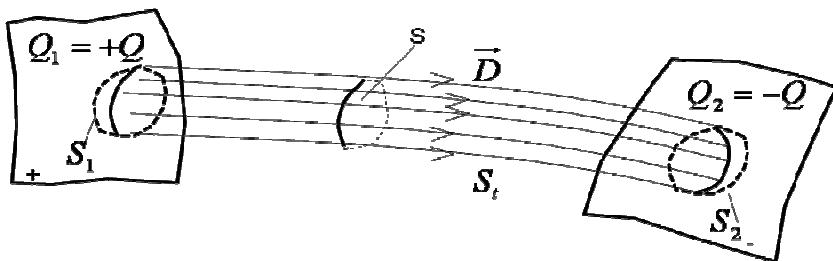
Primena graničnih uslova dolazi do izražaja kod rešavanja problema gde je dielektrik nehomogen u delovima²¹. Na primer pločasti kondenzator sa dva sloja dielektrika čija je razdvojna površ paralelna elektrodama ili normalna na elektrode, a koji su svaki ponaosob homogeni, ali se

²¹ Problemi sa potpuno nehomogenim dielektricima su veoma složeni za rešavanje.

razlikuju jedan u odnosu na drugi. Ili kod cilindričnog kondenzatora gde se razdvojna površ dielektrika poklapa sa radijalnom osom. Ili kod sfernog kondenzatora gde razdvojna površ dielektrika ima sferni oblik sa centrom u osi kondenzatora (**sami skicirajte primere**).

6.7. Tube fluksa vektora električnog pomeraja

Tubom fluksa vektora \vec{D} naziva se cevasta površ koju obrazuje snop linija vektora \vec{D} koja se proteže kroz dielektrik od tela nanelektrisanog pozitivno do tela nanelektrisanog negativno (slika 6.21.).



Slika 6.21. Tuba fluksa vektora električnog pomeraja

Da su količine elektriciteta obuhvaćene tubom, jednake a suprotnog znaka, dokazuje se primenom Gausovog zakona:

$$\oint_{S_1+S_2+S_t} \vec{D} d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{D} d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{D} d\vec{s} + \int_{S_t} \vec{D} d\vec{s} = 0 = Q_{us} = Q_1 + Q_2$$

jer je fluks vektora \vec{D} jednak nuli kroz površ S_1 i S_2 (zbog toga što je \vec{D} u provodniku jednak nuli), a kroz površ S_t jer su linije vektora \vec{D} paralelne površi, pa ne prodiru kroz površ, odnosno ugao vektora \vec{D} i normale na tu površ je 90° . Dakle $Q_1 = -Q_2$

Lako se pokazuje da je fluks \vec{D} isti kroz svaki presek tube (u dielektriku između provodnih tela nema opterećenja).

6.8. Neke električne osobine dielektrika

Dielektrična konstanta dielektrika (objašnjena je ranije, odeljak 6.4)

Električna čvrstina dielektrika definiše se kao najveća jačina električnog polja E_{kr} koja može da postoji u njemu (koje dielektrik može da izdrži), a da dielektrik zadrži svoja izolatorska svojstva. Jedinica za E_{kr} je

$$\frac{V}{m}, \quad \frac{kV}{cm} = 10^5 \frac{V}{m}, \quad \frac{kV}{mm} = 10^6 \frac{V}{m}$$

Za vazduh je $25 - 30 \text{ kV/cm}$. Zavisi od vlažnosti itd. Za $E > E_{kr}$ dolazi do probroja dielektrika (gubi svoja izolatorska svojstva). Kod gasova pri proboru ne dolazi do trajnog oštećenja dielektrika.

Pri velikim vrednostima \vec{E} mogu nastupiti dva slučaja u zavisnosti od oblika nanelektrisanog tela:

- **varničenje**, kada je $E > E_{kr}$ samo u nekim delovima polja,

- **korona** (jonizovani sloj gasa) kada je $E > E_{kr}$, u slučaju gasovitih dielektrika, ali do probroja ne dolazi. Primer je dvožični vazdušni vod priključen na vrlo visoki napon. Vazduh oko provodnika se jonizuje i obrazuje koronu koja sa u mraku vidi kao svetlucava svetlost oko

provodnika. Do probroja vazduha između provodnika ne dolazi jer korona oko provodnika odgovara izvesnom povećanju poluprečnika i prema tome smanjenju polja E (što se lako vidi iz izraza za E provodnika poluprečnika a , nanelektrisanog po površi podužnom gustinom nanelektrisanja Q' , videti primer 4.7 u poglavlju 4.3)

$$E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a}$$

pa se proces zaustavlja kada poluprečnik jonizovanog sloja dostigne vrednost pri kojoj je E na površini korone manje od E_{kr} (efektivni poluprečnik provodnika sa koronom je veći od poluprečnika provodnika bez korone).

Ako u nekoj tački bude $E \approx E_{kr}$ ipak može doći do probroja.

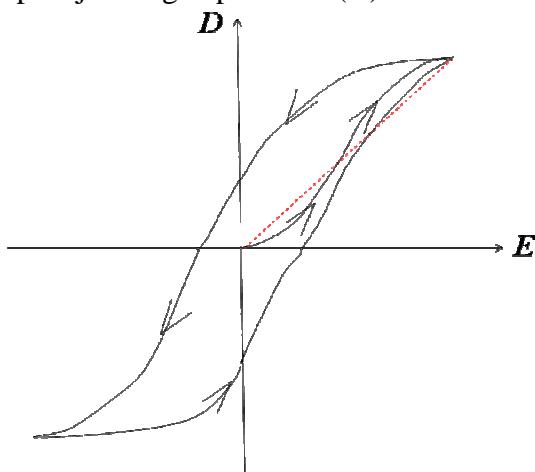
Varničenje i korona su nepoželjni. Međutim podstiču se, na primer, kod gromobrana i elektroda za pražnjenje nanelektrisanja aviona.

Zaostala polarizovanost je osobina nekih dielektrika sa polarnim molekulima, gde je potrebno izvesno vreme kako za polarizaciju tako i za depolarizaciju. Zbog toga pri, kratkotrajnom spajajući elektroda provodnikom, slobodna nanelektrisanja na elektrodama se ponište samo delimično, jer se dielektrik ne depolarizuje potpuno, pa zaostala vezana opterećenja zadržavaju izvestan deo slobodnih opterećenja na elektrodama. Posle nekog vremena se dielektrik delimično depolarizuje i između obloga se javlja napon.

Feroelektrici (senjetoelektrici) su dielektrici kod kojih zavisnost između \vec{P} i \vec{E} nije linearna (slika 6.22.) pa ni veza \vec{D} i \vec{E} , tj.

$$\vec{P} \neq \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Takvi materijali su senjetove soli i titanati, a služe za dobijanje kondenzatora sa kapacitivnošću koja zavisi od priključenog napona $C=f(U)$.



Slika 6.22. Zavisnost intenziteta \vec{D} od intenziteta \vec{E} u feroelektričnom materijalu

Elektreti su materijali kao neke organske smole i voskovi koji, ako se u rastopljenom stanju izlože dejstvu električnog polja i u tom polju ohlade i očvrsnu, zadržavaju polarizaciju i posle ukidanja polja. Primena im se povećava.

Nanelektrisanje trenjem (može se desiti, a i ne). Kada se dielektrici dodirnu, dolazi do toga da se neki elektroni iz spoljašnje ljske istrgnu, pa kada se dielektrici rastave postanu nanelektrisani.

7. SILE I ENERGIJA U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

7.1. Sile u elektrostatičkom polju

Pokazali smo da se sila između dva mala (tačkasta) nanelektrisana tela, ili na jedno u sistemu više takvih tela, određuje Kulonovim zakonom, a sila na nanelektrisano telo nanelektrisanja Q , ako je poznato električno polje na mestu nanelektrisanog tela je

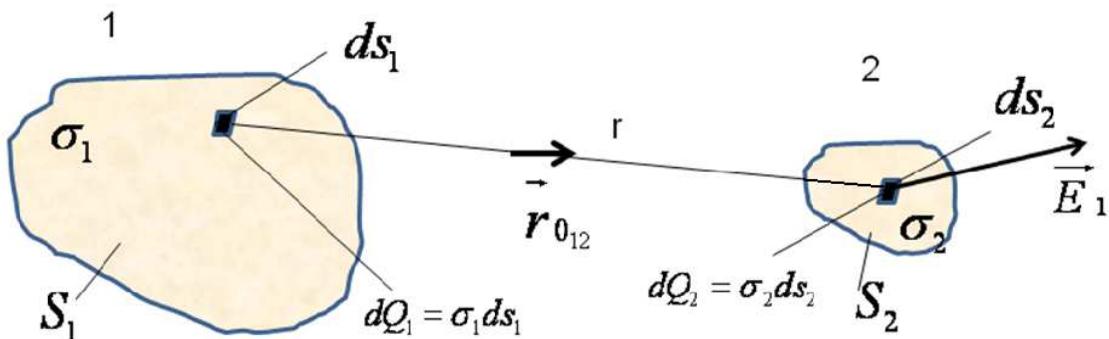
$$\vec{F} = Q \vec{E}$$

gde su:

Q - nanelektrisanje tela na koje se određuje sila,

\vec{E} - električno polje koje stvara jedno odnosno sva ostala nanelektrisana tela, osim ono na koje se sila određuje, na mestu tela na koje se sila određuje.

Kako se određuje sila na tela koja nisu malih dimenzija u odnosu na međusobno rastojanje? Posmatrajmo dva takva tela u vakuumu (slika 7.1).



Slika 7.1. Određivanje sile kojom nanelektrisano telo 1 deluje na nanelektrisano telo 2

Elementarno polje koje stvara elementarno nanelektrisanje dQ_1 na mestu ds_2 (slika 7.1) je

$$d\vec{E}_1 = \frac{dQ_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_{o12} = \frac{\sigma_1 ds_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_{o12}$$

Jačina polja \vec{E}_1 (ukupno polje) koje stvara opterećenje na (celom) telu 1 na mestu male površine ds_2 je:

$$\vec{E}_1 = \oint_{S_1} \frac{\sigma_1 ds_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_{o12}$$

Naravno, σ_1 može biti različito za pojedine površinice ds_1 .

Kada znamo \vec{E}_1 , onda elementarna sila kojom telo 1 deluje na elementarno nanelektrisanje dQ_2 na telu 2, je

$$d\vec{F}_{12} = dQ_2 \vec{E}_1 = \sigma_2 ds_2 \vec{E}_1$$

Sada je ukupna sila kojom telo 1 deluje na telo 2

$$\vec{F}_{12} = \oint_{S_2} \sigma_2 ds_2 \vec{E}_1$$

σ_2 , ds_2 i \vec{E}_1 se za pojedine tačke mogu razlikovati.

Relacije važe za tela bilo kog oblika. Za proračun treba znati površinsku gustinu nanelektrisanja σ što nije lako odrediti.

Približnim razmatranjem mogu se odrediti granice među kojima bi ta sila mogla biti.

Primer 7.1.

Na opisan način dolazi se do izraza za silu između dve velike jednake metalne paralelne ploče, svaka površine S , u vazduhu, i nanelektrisane nanelektrisanjima Q_1 i Q_2 . Polje u okolini ploča je homogeno (primer 4.5 u poglavlju 4) i za prvu ploču intenziteta $E_1 = \sigma_1 / 2\epsilon_0 = Q_1 / (2\epsilon_0 S)$. Kako je polje homogeno, intenzitet resultantne sile F_{12} se može odrediti algebarskim sabiranjem, tj. $F_{12} = \int_S E_1 dQ_2 = E_1 \int_S dQ_2 = E_1 Q_2$. Konačno se dobija

$$F_{12} = F_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{2\epsilon_0 S}$$

Analizom raznih primera zaključuje se da su električne sile između nanelektrisanih tela veoma male, i najčešće se mogu zanemariti. Primena im je uglavnom vezana za neke merne instrumente.

Pored opisanog načina, sile električnog polja se lakše određuju preko energije. Prema tome analiziraćemo energiju elektrostatičkog polja. Počećemo od energije opterećenog kondenzatora.

7.2. Energija opterećenog kondenzatora

Svaki opterećen kondenzator sadrži izvesnu količinu energije. Može se odrediti na osnovu definicije napona (razlike potencijala) i praćenja procesa opterećivanja kondenzatora.

Posmatrajmo neopterećen kondenzator kapacitivnosti C . Napon između elektroda kondenzatora je tada nula. Zamislimo da smo sa jedne elektrode (npr. 2) na neki način uzeli malo pozitivno opterećenje (prvo) ΔQ i preneli ga na drugu elektrodu (npr. 1). Sada će elektroda 1 biti nanelektrisana sa ΔQ , a elektroda 2 sa $-\Delta Q$. Razlika potencijala (napon) U nije više nula, nego $\Delta Q/C$. Zamislimo da smo opet sa elektrode 2 uzeli ΔQ (drugo po redu) i preneli ga na elektrodu 1, ali kako sada postoji razlika potencijala između elektroda, moraće da se savladaju električne sile pri prenošenju, odnosno izvrši rad protiv električnih sila (videti podpoglavlja 3.1 i 3.2), koji je jednak

$$\Delta A_1 = \Delta Q U = \Delta Q \frac{\Delta Q}{C}$$

Napon između elektroda je postao $2\Delta Q/C$. Zbog toga se pri sledećem prenošenju ΔQ (treće) mora izvršiti rad

$$\Delta A_2 = \Delta Q \cdot 2 \frac{\Delta Q}{C} \text{ itd.}$$

Rad koji se izvrši da bi se prenelo $k+1$ opterećenje ΔQ je

$$\Delta A_k = \Delta Q \cdot k \frac{\Delta Q}{C}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ako je konačno opterećenje pozitivne elektrode Q ($Q >> \Delta Q$) i neka se ono dostigne posle velikog broja n prenošenja malih opterećenja ΔQ sa elektrode 2 na elektrodu 1. Tada je $\Delta Q = Q/n$, a ukupan rad

$$A = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \Delta Q (k-1) \frac{\Delta Q}{C} = \frac{(\Delta Q)^2}{C} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{Q^2}{n^2 C} \frac{n(n-1)}{2}$$

Napomena: $\sum_{i=1}^{n-1}$ prirodnih brojeva $= \frac{n(n-1)}{2}$ ili $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, i = prirodan broj (celi brojevi veći od nule).

Za $n >> 1$, je $n(n-1) \approx n^2$, pa je rad izvršen protiv električnih sila pri punjenju (opterećivanju) kondenzatora

$$A = \frac{Q^2}{2C}$$

Po zakonu o održanju energije, energija utrošena pri opterećivanju kondenzatora je pretvorena u energiju sadržanu u električnom polju kondenzatora i naziva se:

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} \text{ (energija opterećenog kondenzatora)}$$

Pošto je $Q=CU$, to je

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

Izraz $A = \frac{Q^2}{2C}$ se brže dobija integralnim računom. Ako pri nekoj vrednosti q i $-q$ opterećenja na elektrodama kondenzatora ($0 < q < Q$) prenesemo sa negativne na pozitivnu elektrodu malo opterećenje dq ($dq > 0$), rad koji tom prilikom mora da se izvrši je

$$dA = dqU = dq \frac{q}{C}$$

Ukupan rad, da bi se elektrode kondenzatora opteretile sa Q odnosno $-Q$, je

$$A = \int_0^Q dA = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

što je isti rezultat dobijen na prethodni način.

7.3. Gustina energije u elektrostatičkom polju. Energija električnog polja

Posmatrajmo pločasti kondenzator površine ploča S , rastojanja između ploča d i sa dielektrikom dielektrične konstante ϵ (homogen i linearan). Neka je kondenzator priključen na napon U . Prema jednačini $W_e = \frac{1}{2}CU^2$, posle zamene izraza za kapacitivnost pločastog kondenzatora, $C = \epsilon \frac{S}{d}$, dobija se (imati u vidu da je $E = U/d$, videti primer 5.12)

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon \frac{S}{d} U^2 = \frac{1}{2}\epsilon \frac{S}{d} U^2 \frac{d}{d} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 S d$$

Kako je Sd u stvari zapremina dielektrika kondenzatora, tj. zapremina dela prostora u kome postoji električno polje, koju označimo sa V , onda se delenjem prethodnog izraza sa Sd , dobija (zapreminska) gustina energije u električnom polju (u svakoj tački polja), sadržana u dielektriku kondenzatora (pa i u vakuumu), tj.

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

Druga i treća varijanta izraza se dobija iz prve ako se ima vidu da je $D = \epsilon E$.

Sada je energija sadržana u pločastom kondenzatoru

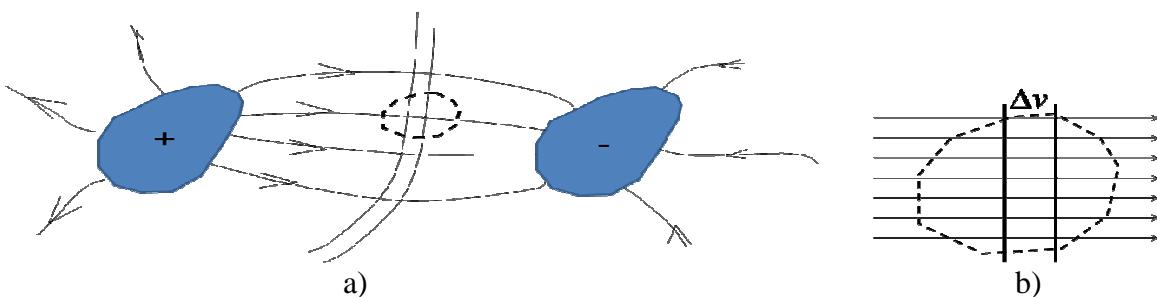
$$W_e = \int_v w_e dv \text{ za } \underline{\text{nehomogeno}} \text{ polje, odnosno}$$

$$W_e = Sdw_e = v \cdot w_e \text{ za } \underline{\text{homogeno}} \text{ plje.}$$

Iraz $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ izведен za pločasti kondenzator, važi uopšte. To se može dokazati na

sledeći način.

Ranije smo videli (odeljak 5.4, primer 5.7) da na bilo koju ekvipotencijalnu površ možemo da stavimo tanku provodnu foliju, a da se struktura polja ne promeni, a onda ni energija. Ako u polju kondenzatora uočimo dve bliske ekvipotencijalne površi i ako na mestu tih ekvipotencijalnih površi stavimo provodne folije (slika 7.2 levo), i uočimo jedan mali delić svake te površi, možemo je smatrati ekvivalentnim pločastim kondenzatorom (slika 7.2 desno). Prema tome, polje kao da smo podelili na veliki broj pločastih kondenzatora.



Slika 7.2 a) električno polje se ne menja ako u dve bliske ekvipotencijalne površi stavimo tanke provodne folije, b) svaki delić takvih folija je ekvivalentan pločastom kondenzatoru

Ukupna energija sistema se može dobiti kao zbir energija u svim takvim pločastim kondenzatorima, tj. u električnom polju

$$W_e = \sum_v \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Delta v$$

Sumiranje se vrši po celoj zapremini gde postoji polje, odnosno v je zapremina celog prostora gde postoji polje. Kada $\Delta v \rightarrow dv$, onda je

$$W_e = \int_v \frac{1}{2} \epsilon E^2 dv$$

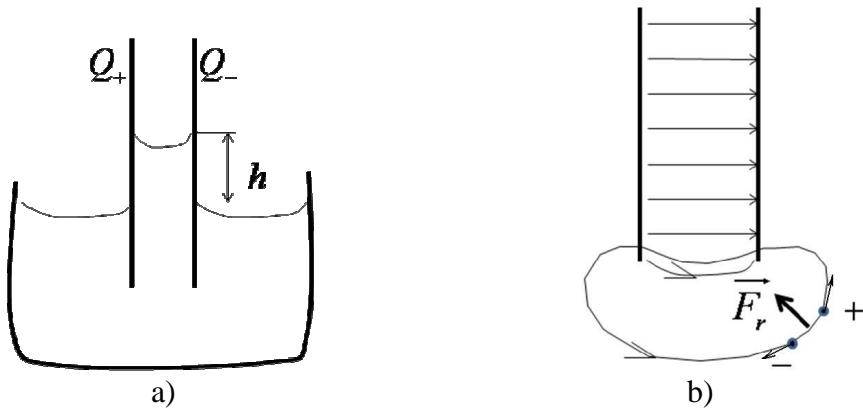
Gde se stvarno nalazi energija? Kada se radi o dielektriku, energija utrošena pri opterećivanju kondenzatora je lokalizovana u samom dipolu (molekul je trebalo polarizovati, a za to je bio potreban rad). Prema tome za dielektrik postoji logično objašnjenje. Kad je dielektrik vakuum nema jednostavnog objašnjenja.

Energija je sadržana u celom električnom polju. U to je mnogo lakše da se uverimo kod promenljivih polja, tj. kada se radi o radio talasima, tj. da je energija stvarno sadržana u polju i u vakuumu kada u njemu postoji električno polje.

7.4. Izračunavanje elektrostatičkih sila preko energije

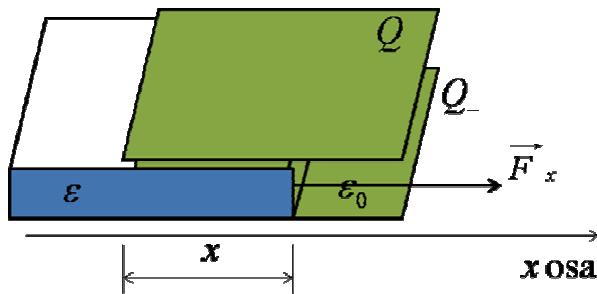
Izračunavanje sile preko raspodele slobodnih opterećenja (kako smo do sada naučili) često nije moguće, jer ta raspodela nije poznata. Taj metod takođe često nije moguće primeniti pri proračunu sile na dielektrična tela. Na primer uzmišljam opterećen kondenzator čije su elektrode delimično potopljene u tečni dielektrik (slika 7.3a).

Lako je razumeti da je rezultantna sila na dipole u polju blizu kraja ploča kondenzatora takva da stvara hidrostatički pritisak nagore i da izdiže nivo tečnosti (dielektrika) u kondenzatoru iznad nivoa u posudi (slika 7.3b). Međutim, ovo fizičko objašnjenje ne omogućava proračun sile.



Slika 7.3 a) opterećeni pločasti kondenzator potopljen u tečni dielektrik, b) uvećani detalj donjeg kraja ploča objašnjava uzrok podizanja nivoa dielektrika

Posmatrajmo sličan pločasti kondenzator, ali sa čvrstim dielektrikom (slika 7.4). Slično kao pre, na dielektrik će delovati sila koja teži da dielektrik uvuče u kondenzator.



Slika 7.4. Ilustracija određivanja intenziteta električne sile pomoću energije

Neka je sila F_x u vukla dielektrik u kondenzator za malu dužinu dx . Tada su električne sile izvšile rad

$$dA_{el.sila} = F_x dx \quad (1)$$

Ovde želimo da odredimo F_x . To je moguće na sledeće načine:

Rad se može izračunati preko razlike energija pre i posle pomeranja didelektrika, u dva slučaja:

- 1) **Prilikom pomeranja dielektrika opterećenje na pločama kondenzatora ostaje konstantno ($Q = \text{const.}$)**.

Pošto se pri pomeranju dielektrika kapacitivnost kondenzatora malo promenila²², opterećenje na pločama može da ostane konstantno (kako je pretpostavljeno) samo ako ploče nisu vezane za izvor napona (generator nije priključen). To znači da je energija utrošena na pomeranje dielektrika mogla biti utrošena samo na račun električne energije sadržane u kondenzatoru, pa je ona manja posle pomeranja dielektrika.

Neka je W_e energija u kondenzatoru pre, a W'_e posle pomeranja dielektrika. Onda je priraštaj energije u kondenzatoru

$$dW_e = W'_e - W_e < 0, \text{ tj. negativan.}$$

²² Dielektrik se pomerio, setite se izraza za kapacitivnost pločastog kondenzatora (primer 5.12). Do promene kapacitivnosti dolazi zbog promene geometrijskog oblika (uvlačenja dielektrika dublje u kondenzator, približavanja ploča, ili na primer, provodnika dvožičnog voda).

Po zakonu o održanju energije, rad električnih sila mora biti jednak razlici energija na početku i kraju procesa, tj. apsolutnoj vrednosti priraštaja energije dW_e , tj.

$$dA_{el.sila} = -dW_e \quad (2)$$

Iz jednakosti izraza (1) i (2), tj.

$$dA_{el.sila} = F_x d_x = -dW_e$$

sledi da je

$$F_x = -\frac{dW_e}{dx} \Big|_{Q=const.}$$

Formula važi uopšte (pri izvođenju je jedina pretpostavka bila $Q = \text{const.}$). Formula daje x komponentu električne sile na posmatrano telo. Na isti način se određuje y ili z komponenta.

2) Prilikom pomeranja dielektrika napon između ploča kondenzatora ostaje konstantan ($U = \text{const.}$).

Pošto se pretpostavlja da je $U = \text{const.}$, nanelektrisanje elektroda mora da se promeni (jer se menja C). Tu promenu mogu da izvrše samo neki strani izvori energije, pa elektrode mora da su prikључene na izvor napona (generator).

Neka se prilikom promene sistema, nanelektrisanje promenilo za dQ , odnosno $-dQ$. To znači da je izvor sa negativne na pozitivnu elektrodu preneo opterećenje dQ . Ako je napon između elektroda U ($U = \text{const.}$), po definiciji napona, strane sile su pri tom izvršile rad

$$dA_{str.sila} = UdQ$$

Kako je energija sadržana u kondenzatoru $W_e = \frac{QU}{2}$, to je priraštaj energije zbog priraštaja opterećenja dQ na elektrodama

$$dW_{e_{kondenzatora}} = \frac{1}{2}(Q + dQ)U - \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}UdQ = \frac{1}{2}dA_{str.sila}$$

Prema zakonu o održanju energije, druga polovina energije utrošena je na vršenje mehaničkog rada pri promeni geometrijskog oblika sistema, tj.

$$dA_{el.sila} = \frac{1}{2}UdQ = dW_{e_{kondenzatora}}$$

Iz jednakosti

$$dA_{el.sila} = F_x d_x = dW_{e_{kondenzatora}} \text{ sledi}$$

$$F_x = \frac{dW_e}{dx} \Big|_{U=const.}$$

U oba slučaja formule su ekvivalentne i daju isti rezultat, međutim, nekad je jednostavnije koristiti jednu, a nekad drugu.

Izloženi metod se naziva i metod virtuelnih radova (virtuelnih pomeraja, mali pomeraj pod dejstvom električne sile).

7.5. Momenati električnih sila

Ako momenat M električnih sila okreće neko telo za ugao $d\alpha$ da, rad tih sila je

$$dA_{el.sila} = Md\alpha$$

Iz jednakosti

$$dA_{el.sila} = Md\alpha = -dW_e, \text{ sledi}$$

$$M = -\frac{dW_e}{d\alpha} \Big|_{Q=const.}$$

Slično se iz jednakosti

$$dA_{el.sila} = Md\alpha = \frac{1}{2}UdQ = dW_{ekondenzatora}, \text{ dobija}$$

$$M = \frac{dW_e}{d\alpha} \Big|_{U=const.}$$

Ugao α se računa u ravni normalnoj na vektor \vec{M}_α u smeru vezanom sa referentnim smerom vektora \vec{M}_α po pravilu desne zavojnice.

7.6. Gubici u dielektricima pri vremenski promenjivim poljima

Do sada smo podrazumevali vremenski nepromenjiva električna polja (elektrostatička). U praksi su mnogo češća polja koja se menjaju u vremenu.

Kod promenjivih polja, polarizacija dielektrika se menja kao i polje ali sa izvesnim kašnjenjem, [koje se povezuje sa uglom gubitaka](#). Pri polarizaciji dolazi do stalne razmene energije između polja i dielektrika, ako je polje promenljivo. Na primer prostoperiodično polje vrši rad polarizujući dielektrik periodično u suprotnim smerovima. Dielektrik vraća najveći deo utrošene energije polju u periodima kada se depolarizuje. Međutim, pri takvoj stalnoj razmeni energije jedan njen deo se ipak pretvoriti u druge vidove energije, kao što je vibraciona (termička, toplotna) energija atoma koja se nemože više vratiti polju. Kažemo da u dielektriku ima gubitaka električne energije.

Pri brzim promenama smera polarizacije, dielektrik nije u stanju da se polarizuje do maksimuma (kao kod vremenski konstantnih električnih polja). Do koje mere će se polarizovati zavisi od vrste materijala i učestanosti promene polja. Zbog toga osobine dielektrika, pa i njegova dielektrična konstanta zavise od učestanosti.

8. KRETANJE NAELEKTRISANE ĆESTICE U ELEKTROSTATIČKOM POLJU U VAKUUMU

Do sada smo smatrali da sva opterećenja u elektrostatickom polju (koje potiče od nepokretnih opterećenja) miruju (osim odeljka 7.6). Sada odstupamo od elektrostatike u tome da imamo naelektrisanje koje se kreće

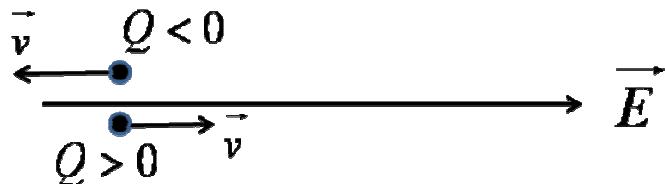
Analiziraćemo kretanje jedne naelektrisane čestice u elektrostatickom polju u vakuumu. Ako je naelektrisanje čestice malo, onda ono u svom kretanju indukcijom praktično ne menja raspodelu naelektrisanja koja stvaraju električno polje (pa se ono može smatrati elektrostatickim).

Ova analiza je važna kako za razumevanje rada elektronskih (vakuumskih) cevi, katodnih cevi²³, tako i električne struje (kretanje naelektrisanih čestica kroz čvrste i tečne provodnike).

8.1. Kretanje naelektrisane čestice u homogenom električnom polju

Posmatrajmo nepokretnu naelektrisanu česticu opterećenja Q ($Q > 0$), mase m , u vakuumu u homogenom električnom polju \vec{E} .

Na česticu deluje sila $\vec{F} = Q\vec{E}$ i ona se kreće (slika 8.1.). Odredimo njenu brzinu u toku vremena.



Slika 8.1. Naelektrisana čestica u elektrostatickom polju

Početna brzina čestice je $v_0=0$. Trenutak početka kretanja čestice je $t=0$. Neka je brzina čestice u trenutku t jednaka v . Tada će u trenutku $t+\Delta t$ brzina biti $v+\Delta v$. Za sada neznamo ni v ni Δv , ali znamo da je uzrok promene brzine čestice sila $\vec{F} = Q\vec{E}$. Rad te sile u toku intervala vremena Δt je

$$\Delta A = \vec{F} d\vec{l} = F dl = Fv\Delta t = QE v \Delta t$$

(pređeni put $dl=v\Delta t$).

Po zakonu o održanju energije, energija utrošena na ubrzanje čestice pretvorila se u njenu kinetičku energiju. U intervalu Δt prirostaj kinetičke energije čestice je

$$\Delta W_{kin} = \frac{1}{2}m(v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[v^2 + 2v\Delta v + (\Delta v)^2] - \frac{1}{2}mv^2 \approx mv\Delta v$$

jer za malo Δt važi da je $\Delta v \ll v$, a $(\Delta v)^2$ je još manje od Δv .

Ako se sada izjednači $mv\Delta v = QE v \Delta t$, i ako $\Delta t \rightarrow dt$, i $\Delta v \rightarrow dv$, odatle sledi $\frac{dv}{dt} = \frac{QE}{m}$,

odnosno $dv = \frac{QE}{m} dt$, odakle se brzina v nalazi integraljenjem, tj. $v = \int \frac{QE}{m} dt = \frac{QE}{m} t + v_0$, a kako je početna brzina $v_0=0$, to je

²³ Na primer, elektronski mlaz u katodnim cevima se skreće pomoću električnog polja.

$$v = \frac{QE}{m} t \quad (*)$$

Ako je početna brzina različita od nule ($v_0 \neq 0$), tada je

$$v = \frac{QE}{m} t \pm v_0$$

U prethodnoj relaciji se uzima

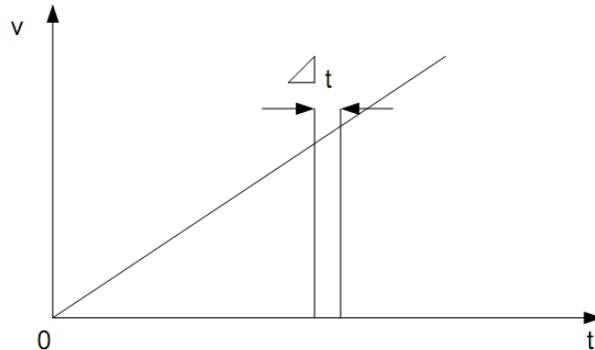
- „+“ ako su \vec{v}_0 i \vec{E} istog pravca i smera, a
- „-“, ako su \vec{v}_0 i \vec{E} istog pravca, a suprotnog smera.

Ako je $v_0=0$, u $t=0$, i neka se \vec{E} poklapa sa x-osom, tada je položaj nanelektrisane čestice u trenutku t (ukupan put koji čestica pređe od u intervalu vremena od 0 do t):

$$x = \frac{1}{2} vt = \frac{QE}{2m} t^2$$

Ovo se lako pokazuje, ako se poslužimo ilustracijom na slici 8.2, gde je prikazana zavisnost brzine od vremena linearnom funkcijom (*). Sa slike 8.3 je očigledno da je mala površ ispod prave koja predstavlja zavisnost brzine v od vremena t, u malom intervalu Δt , pravougaonik površine $v\Delta t$, a to je, u stvari, pređeni put u intervalu Δt . Isto tako je očigledno da je onda pređeni put za vreme od 0 do t, brzinom v, jednak zbiru površina takvih malih pravougaonika, a to je jednako površini trougla čija je osnovica jednaka proteklom vremenu t, a visina jednaka brzini v u trenutku t, a to je

jednako $0,5 vt$, odnosno $x = \frac{1}{2} vt$.



Slika 8.2. Izračunavanje puta koji pređe nanelektrisana čestica u homogenom električnom polju
(početna brzina čestice je nula)

Ako je $v_0 \neq 0$, onda je

$$x = \frac{QE}{2m} t^2 \pm v_0 t$$

gde za predznak ispred $v_0 t$ važe ista pravila kao kod izraza za v.

Ako se pravac početne brzine \vec{v}_0 ne poklapa sa prvcem \vec{E} , tada brzinu \vec{v}_0 možemo razložiti na komponentu \vec{v}_{0_x} koja se poklapa sa prvcem \vec{E} i \vec{v}_{0_y} koja je upravna na taj pravac.

8.2. Kretanje nanelektrisane čestice u nehomogenom električnom polju

Odredićemo samo intenzitet brzine čestice (nanelektrisanja Q, i mase m) koja je pod dejstvom električnih sila, u vakuumu, prešla razliku potencijala ($V_1 - V_2$).

Neka je u početnoj tački (1) $v_0=0$ i potencijal jednak V_1 . Neka je čestica u tačku 2 sa potencijalom V_2 stigla bilo kojom putanjom. Na malom segmentu putanje $d\vec{l}$, sila $\vec{F} = Q\vec{E}$, izvršila je rad

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = Q\vec{E} d\vec{l}$$

pa je ukupan rad električnih sila pri prenošenju opterećenja Q iz tačke 1 u tačku 2

$$A_{el.sila} = \int_1^2 Q\vec{E} d\vec{l} = Q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = Q(V_1 - V_2)$$

Po zakonu o održanju energije ovaj rad mora biti jednak kinetičkoj energiji $mv_2^2/2$ koju čestica ima u tački 2. Prema tome imamo

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = Q(V_1 - V_2), \text{ za } v_1=0$$

odakle je

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Q(V_1 - V_2)}{m}}, \text{ za } v_1=0$$

Ako je nanelektrisana čestica elektron, početne brzine nula, onda se dobija

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{9,108 \cdot 10^{-31}} (V_2 - V_1)} \approx 0,59 \cdot 10^6 \sqrt{V_2 - V_1} \left[\frac{m}{s} \right]$$

gde je V u voltima.

Primer 8.1. Za $V_2-V_1 = U = 100$ V, dobija se $v_0 \approx 5900$ km/s.

Formula za brzinu čestice ne važi ako je brzina čestice bliska brzini svetlosti u vakuumu (oko $3 \cdot 10^8$ m/s), jer kinetička energija nije samo $mv_2^2/2$, već se mora uzeti u obzir tzv. relativističko povećanje mase sa brzinom.

LITERATURA

1. Đorđević R. A.: Osnovi elektrotehnike 1. deo, elektrostatika, Akadembska misao, Beograd, 2007.
2. Milatović B.: Osnovi elektrotehnike 1, Svjetlost, Sarajevo, 1983.
3. Pinter V.: Osnove elektrotehnike, knjiga prva, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.
4. Pokorni S.: Laboratorijske vežbe iz osnova elektrotehnike 1 i 2, praktikum, Elektrotehnički fakultet, Istočno Sarajevo, 2012.
5. Pokorni S.: Laboratorijske vežbe iz elektrotehnike i teorije električnih kola (praktikum), Univerzitet Vojske Jugoslavije, Beograd, 1993.
6. Pokorni S.: Osnovi elektrotehnike 1, elektrostatika, skripta, Elektrotehnički fakultet, Istočno Sarajevo, 2010.
7. Popović B.: Osnovi elektrotehnike 1, Građevinska knjiga, Beograd, 1976.
8. Popović B., Đorđević A.: Osnovi elektrotehnike 3, zbirka pitanja i zadataka, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.
9. Purcell M. E., Morin J. D.: Electricity and Magnetism, Cambridge University Press, third edition, 2014.
10. Ranojević M.: Osnovi elektrotehnike, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

PRILOZI

PREGLED OSNOVNIH FIZIČKIH VELIČINA I JEDINICA

Danas je u velikom broju zemalja u svetu prihvaćen tzv. SI – sistem jedinica (SI – Systeme International). U tom sistemu su *osnovne veličine* i njihove jedinice, kao tabeli 1.

Tabela 1. Osnovne veličine i njihove jedinice

R. br.	OSNOVNA VELIČINA	OSNOVNA JEDINICA		Napomena
		Naziv	Oznaka	
1	dužina	metar	M	MKSA sistem, osnovne jednlice u elektrotehnici, usvojen 1948.
2	Masa	kilogram	Kg	
3	vreme	sekund	S	
4	intenzitet struje	amper	A	
5	temperatura	kelvin	K	
6	intenzitet osvetljenja	kandela	Cd	
7	količina materije	mol	Mol	od 1960.

Četiri osnovne veličine su dovoljne da se izvedu praktično sve ostale, koje se nazivaju *izvedene veličine*, a njihove jedinice izvedene jedinice. U elektrotehnici su te četiri osnovne veličine: dužina, masa, vreme i intenzitet struje, a jedinice su metar (m), kilogram (kg), sekund (s) i amper (A), respektivno, pa se nazivaju i MKSA sistem.

Izvedene jedinice se izražavaju preko osnovnih. Primer: osnovna geometrijska veličina je dužina (oznaka l , r , a , b), a njena jedinica je metar (m). Jedinica za površinu kvadrata $S=a^2$ se dobija ako se stavi $a=1\text{m}$, tj. $S [\text{m}^2]$. Ili sila $F=ma$.jedinica za masu m je kg, a za ubrzanje a je m/s^2 . Za jedinicu za silu se dobija kgm/s^2 , što se naziva Njutn i označava sa N.

Pri formiraju izvedenih jedinica numerički faktori se izostavljaju. Primer: površina kruga $S=r^2\pi$, za $r=1\text{m}$, dobija se $\pi [\text{m}^2]$, a kada se izostavi π , ostaje $[\text{m}^2]$.

Od ostalih izvedenih veličina pomenućemo samo energiju, rad i snagu.

Energija nekog sistema je pozitivna veličina koja se pri promeni stanja sistema ne menja (zakon održanja energije), ali u tom sistemu može prelaziti iz jednog oblika u drugi. U tom smislu se kaže da je *utrošena* neka energija – tj. da je tolika energija jedne vrste pretvorena u neku drugu vrstu energije. Sinonim za ovo je da je na račun prve vrste energije *izvršen rad* brojno jednak utrošenoj energiji²⁴ (koja se, razume se, pretvorila u neki drugi vid energije). Rad (jednak utrošenoj energiji) može biti i pozitivan i negativan, pošto utrošak energije može biti i pozitivan i negativan (odnosno energija se može i uzimati od izvora i dovoditi njemu). Rad je uvek vezan za određen izvor energije²⁵. Jedinica za rad i energiju je ista $[J] = [\text{Nm}]$, tj. džul.

Brzina trošenja energije sistema (ili vršenja rada) naziva se snaga sistema. Pošto se definiše preko promene energije, i snaga sistema, kao i rad, je algebarska veličina. U intervalima vremena u kojima je snaga izvora pozitivna, energija odlazi iz izvora, i obrnuto. Jedinica za snagu je vat $[\text{W}] = [\text{J/s}]^{26}$.

Odnos neke fizičke veličine i njene jedinice je čist broj koji se naziva brojna (numerička) vrednost te veličine.

Često su jedinice SI-sistema nepogodne po redu veličine za opisivanje nekih pojava. Tada se koriste standardne pomoćne jedinice, označene prefiksima (videti i praktikum za labratorijske vežbe). Na primer, $1 \text{ W} = 1000 \text{ mW} = 10^3 \text{ mW} = 1000 000 \mu\text{W} = 10^6 \mu\text{W}$, ili $1 \mu\text{W} = 0,001 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ mW} = 0,000001 \text{ W} = 10^{-6} \text{ W}$, $1 \text{ MW} = 1000 \text{ kW} = 10^3 \text{ kW} = 1000 000 \text{ W} = 10^6 \text{ W}$, ili $1 \text{ W} = 0,001 \text{ kW} = 10^{-3} \text{ kW} = 0,000 001 \text{ MW} = 10^{-6} \text{ MW}$.

²⁴ Rad se vrši a ne troši. Snaga se ne troši. Izvor ne poseduje rad već energiju.

²⁵ Rad i snaga su vezani za promenu energije, tj. za izvor (odakle potiče energija).

²⁶ Na primer, snaga izvora od -10 W znači da se energija brzinom od 10 J u sekundi dovedi izvoru.

OSNOVNI POJMOVI O VEKTORSKIM VELIČINAMA

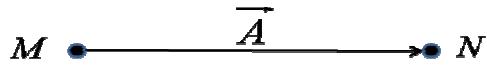
Većina fizičkih veličina može se svrstati u dve grupe: skalarne veličine i vektorske veličine.

Skalarne veličine su one koje se mogu potpuno opisati svojom brojnom vrednošću (na primer, masa snaga, rad). Vektorske veličine se, pored brojne vrednosti ili intenziteta, moraju opisati i pravcem i smerom u prostoru (na primer, sila).

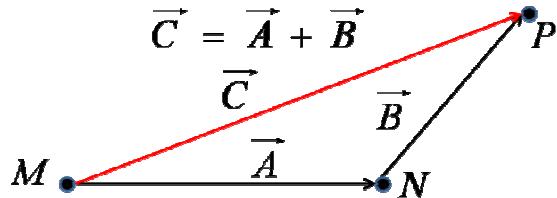
Matematičke operacije sa skalarima (odnosno njihovim brojnim vrednostima) su iste kao sa brojevima. Operacije sa vektorskim veličinama se vrše prema drugačije usvojenim pravilima.

Ako se pomeraj tačke u prostoru duž prave linije (od tačke M do tačke N) uzme kao primer vektora, grafički se to predstavlja u vidu strelice (slika 1.1). Neka se tačka pomeri prvo duž vektora \vec{A} (od tačke M do N), pa onda \vec{B} , tj. od tačke N do P. Stvarni pomeraj preko MNP je isti kao i direktno od M do P. Prema tome vektor \vec{C} , je ustvari zbir vektora \vec{A} i \vec{B} (slika 1.2), što se piše u obliku

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

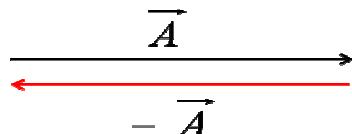


Slika 1.1. Grafički prikaz vektora



Slika 1.2. Sabiranje vektora

- \vec{A} je vektor istog pravca i intenziteta, ali suprotnog smera od vektora \vec{A} (slika 1.3).

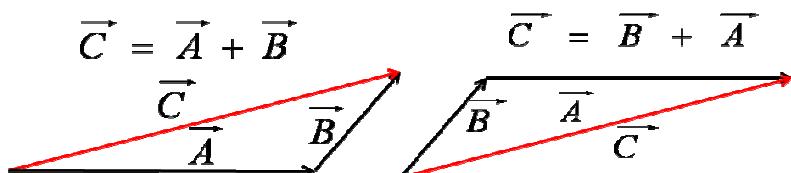


Slika 1.3. Vektora \vec{A} i vektor $-\vec{A}$

Redosled sabiranja vektora ne utiče na krajnji rezultat (slika 1.3), tj.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \text{ (zakon komutacije)}$$

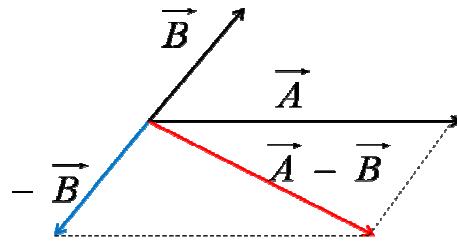
$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \text{ (zakon asocijacije, slika 1.4)}$$



Slika 1.4. Ilustracija zakona komutacije za sabiranje dva vektora

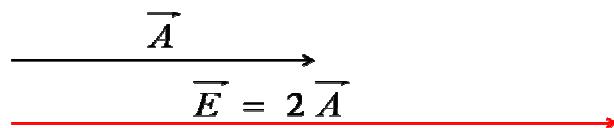
Oduzimanje vektora se svodi na sabiranje, na primer (slika 1.5)

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



Slika 1.5. Ilustracija oduzimanja dva vektora

Proizvod skalara k i vektora \vec{A} , tj. $k\vec{A}$ definiše se kao vektor u pravcu vektora \vec{A} , samo $|k|$ puta veće brojne vrednosti (slika 1.6). Za $k>0$ vektor $k\vec{A}$ je istog smera kao vektor \vec{A} , a za $k<0$ je suprotnog smera.



Slika 1.6. Ilustracija množenja vektora skalarom

Pod jediničnim vektorom ili ortom \vec{r}_o , podrazumeva se vektor čije je brojna vrednost jednaka jedan, i čista je matematička veličina. Ort određuje pravac i smer u prostoru.

Ako se neki vektor \vec{A} predstavi kao proizvod skalara A i orta \vec{r}_o , tj. napiše se u vidu

$$\vec{A} = A \vec{r}_o,$$

Skalar A se mora shvatiti u algebarskom smislu, pošto vektori \vec{A} i \vec{r}_o mogu biti istog ili suprotnog smera (ali moraju biti istog pravca). „ A “ se naziva *algebarski intenzitet* vektora \vec{A} . Apsolutna vrednost algebarskog intenziteta A vektora \vec{A} se naziva intenzitet vektora \vec{A} i obično obeležava sa $|\vec{A}|$.

U Dekartovom koordinatnom sistemu vektor se može predstaviti u vidu vektorskog zbiru svojih projekcija na ose sistema (slika 1.7, gde su prikazane projekcije samo na x i y osu):

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

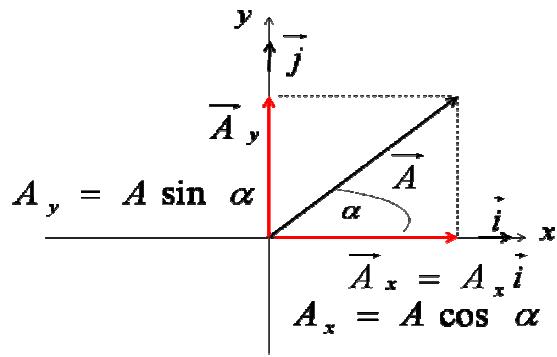
gde su A_x , A_y , A_z algebarski intenziteti vektorskih komponenti \vec{A}_x , \vec{A}_y , \vec{A}_z , a \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ortovi x, y i z –ose. Intenzitet vektora \vec{A} se može dobiti kao

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Predstavite sami grafički dva vektora \vec{A} i \vec{B} u Dekartovom koordinatnom sistemu i razložite ih na njihove projekcije na ose sistema.

Proizvod dva vektora se nemože definisati na jednostavan način. Postoji *skalarni proizvod* (daje za rezultat skalar) i *vektorski proizvod* (daje za rezultat vektor)²⁷.

²⁷ Vektorski proizvod će nam biti potreban tek u Osnovama elekrotehnike 2, pa ga nećemo sada definisati.



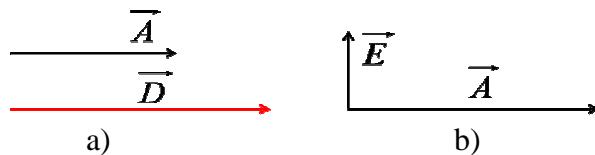
Slika 1.7. Razlaganje vektora na komponente u ravni Dekartovog koordinatnog sistema

Skalarni proizvod dva vektora \vec{A} i \vec{B} se definiše kao

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = AB \cos \alpha$$

gde je α ugao između vektora $\alpha=0$, tada je $\vec{A} \cdot \vec{B}=AB$.

Ako je $\alpha=0$ (slika 1.8 levo), tada je $\overrightarrow{AD} = AD$. Ako je $\alpha=0$, i $\vec{A}=\vec{B}$, tada je $\vec{A} \cdot \vec{B}=A^2$. Ako je $\alpha=90^\circ$ (slika 1.8 desno), tada je $\overrightarrow{AE} = AE \cos 90^\circ = 0$.



Slika 1.8. Uz objašnjenje skalarnog proizvoda vektora

Ako je vektor normalan na ravan papira na kome obavljate crtanje, onda se crta u obliku kružića, a smer se predstavlja krstićem u kružiću, ako je vektor usmeren u papir, a tačkom u kružiću, ako je vektor usmeren iz papira (slika 1.9).



Slika 1.9. Grafički prikaz vektora normalnih na ravan crteža:
a) usmerenog u crtež, b) usmerenog iz crteža

TABELA IZVODA NEKIH OSNOVNIH FUNKCIJA

FUNKCIJA	IZVOD	FUNKCIJA	IZVOD
$k = \text{const.}$	0	e^{ax}	$a \cdot e^{ax}$
x	1	a^x	$a^x \ln a$
x^n	nx^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sin x$	$\cos x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x		

Osnovna pravila deriviranja

1. Izvod algebarskog zbiru dve ili više funkcija jednak je algebarskom zbiru izvoda svake funkcije:

$$(u + v - w + \dots + t)' = u' + v' - w' + \dots + t'$$

2. Izvod proizvoda dve ili više funkcija jednak je zbiru n sabiraka (gde je n broj množenih funkcija). Na primer, za proizvod dve funkcije:

$$(u \cdot v)' = uv' + u'v$$

3. Izvod količnika dve funkcije računa se relacijom:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

4. Izvod funkcije s konstantnim faktorom, konstanta se može izvući ispred izvoda:

$$(k \cdot u)' = k \cdot u'$$

5. Izvod složene funkcije (funkcije od funkcije): ako su $y=f(u)$ i $u=\varphi(x)$, tada je
 $y' = [f(\varphi(x))]' = f'(u) \cdot \varphi'(u)$ $y' = [f(\varphi(x))]' = f'(x) \cdot \varphi'(x)$

TABELA INTEGRALA NEKIH OSNOVNIH FUNKCIJA

FUNKCIJA	INTEGRAL	FUNKCIJA	INTEGRAL
$k = \text{const.}$	kx	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
x	$\frac{x^2}{2}$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \cdot e^{ax}$	$\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\cos x$	$\sin x$
e^x	e^x	$\sin x$	$-\cos x$

Osnovna pravila integriranja

1. Konstanta se može izvući ispred integrala:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

2. Integral zbiru (razlike) jednak je zbiru (odnosno razlici) integrala pojedinih članova:

$$\int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx$$

3. Pravilo supstitucije: ako je $x=\varphi(t)$, tada je

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(t) dt$$

4. Parcijalna integracija

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Napomena: u, v, w su funkcije od x .