TERMIN 5 - zadaci za samostalan rad

★ ★ ★

Zadatak 1.
Ispitati da li postoji i ako postoji odrediti matricu $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ takvu da je:

a) matrica A invertibilna, a njen prostor kolona neka ravan;

b) prostor kolona matrice A ravan $x + y + z = 0$.

★ ★ ★

Zadatak 2.
Ispitati da li postoji i ako postoji odrediti matricu A takvu da je:

a) $C(A) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $R(A) = C\left(A^T\right) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$;

b) $C(A) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $R(A) = C\left(A^T\right) = Lin\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$.

★ ★ ★

Zadatak 3.
Neka je $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$ linearno preslikavanje takvo da je $\mathcal{A}\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{j}$, $\mathcal{A}\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{k}$ i $\mathcal{A}\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{i}$. Ne određujući matricu A tog preslikavanja, dokazati da je $A^3 = I$.

★ ★ ★

Zadatak 4.
Neka je $\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ refleksija u odnosu na ravan $\pi : x + 2y + 3z = 0$. Odrediti matricu R operatora $\mathcal{R}$ u odnosu na standardnu bazu.

★ ★ ★

Zadatak 5.
Neka je $\mathcal{P}_{\overrightarrow{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonalno projektovanje na pravu određenu vektorom $\overrightarrow{a} = (2, 1, 2)$. Odrediti matricu P_a preslikavanja $\mathcal{P}_{\overrightarrow{a}}$ u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathbb{R}^3$.'

★ ★ ★ ★

Zadatak 6.
Dokazati da za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_n$ važi:

a) $Ker(A) \subseteq Ker\left(A^2\right)$;

b) $Ker(A) = Ker\left(A^2\right)$, ako je matrica A regularna.

★ ★ ★ ★

Zadatak 7.
Za svako od sljedećih tvrđenja ustanoviti da li je tačno ili ne:

a) Ako je $A \in \mathcal{M}_3$ i ako postoje vektori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in \mathbb{R}^3$ takvi da su vektori $A\overrightarrow{v_1}, A\overrightarrow{v_2}, A\overrightarrow{v_3}$ linearno nezavisni, tada je matrica A regularna.

b) Neka je $A \in \mathcal{M}_{3,2}$ i neka je $Ker(A) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Ako su $B, C \in \mathcal{M}_{2,3}$ matrice takve da je $AB = AC$, tada je $B = C$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 8.
Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearno preslikavanje za koje vrijedi

$$\mathcal{A}(0,1,1) = (-4, 4a, -2), \quad \mathcal{A}(1,0,-1) = (2, -2, a) \quad \text{i} \quad \mathcal{A}(2,1,2) = (-6, 8a-2, a-4).$$

a) Odrediti $a \in \mathbb{R}$ ako je $rank(\mathcal{A}) = 1$.

b) Odrediti $a \in \mathbb{R}$ ako je $rank(\mathcal{A}) = 2$ i $\mathcal{A}(-a, 1, -1) = (0, 0, 0)$.

Za oba rješenja naći $Ker(\mathcal{A})$ i $Im(\mathcal{A})$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 9.
Odrediti linearnu transformaciju $\mathcal{A}$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ takvu da bude:

a) $Im\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(1,3,-1,0),(2,4,0,-1)\right\}$;

b) $Ker\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(3,2,-1,1)\right\}$;

c) $Im\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(1,3,-1,0),(2,4,0,-1)\right\}$ i $Ker\left(\mathcal{A}\right)=Lin\left\{(3,2,-1,1)\right\}$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 10.
Odrediti

a) matricu skaliranja koja preslikava $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ u $\begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}$;

b) matricu projektovanja koja preslikava $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ u $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$;

c) matricu refleksije koja preslikava $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ u $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$;

d) matricu rotacije koja preslikava $\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ u $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.