1. Који од сљедећих скупова су потпростори векторског простора реалних низова (сабирање низова и множење низа скаларом су дефинисани на уобичајен начин, то јест по координатама).

   (а) Скуп свих опадајућих реалних низова.

   (б) Скуп свих константних реалних низова.

   (в) Скуп свих реалних низова који имају коначно много чланова различитих од нуле.

   (г) Скуп свих конвергентних реалних низова.

   (д) Скуп свих реалних низова који имају паран број чланова различитих од нуле.

   (ђ) Скуп свих реалних низова чија је гранична вриједност једнака 0.

   (е) Скуп свих ограничених реалних низова.

2. (а) Показати да скуп позитивних реалних бројева чини реалан векторски простор у односу на сабирање векторā дефинисано као $x + y := xy$ (производ реалних бројева) и множење вектора скаларом дефинисано као $\alpha x := x^\alpha$ (степеновање позитивног реалног броја реалним бројем).

   (б) Шта је нула-вектор тог векторског простора?

3. За свако од сљедећих тврђења, рећи је ли тачно или није па онда образложити одговор.

   (а) Скуп $S = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : [1,2]^T \in R(A)\right\}$ је векторски простор.

   (б) Скуп $U = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$ је векторски потпростор простора $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (в) Ако се скуп S састоји од m вектора простора $\mathbb{R}^n$ при чему је $m > n$, тада скуп S некад генерише а некад не генерише простор $\mathbb{R}^n$.

   (г) Нека је $\mathcal{B}_S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ стандардна база простора $\mathbb{R}^n$. Ако су $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ вектори из простора $\mathbb{R}^n$ такви да $\mathbf{e}_i \in L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n), i = 1 : n$, тада је и скуп $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ база простора $\mathbb{R}^n$.

   (д) Ако вектори $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ чине базу простора V и ако је $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$,

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3$, тада вектори $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ не чине базу простора V.

4. Показати да сљедећи подскупови векторског простора $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ јесу и његови потпростори па им одредити димензије и наћи по једну базу.

   (а) Скуп симетричних матрица у $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (б) Скуп кососиметричних матрица у $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (в) Скуп дијагоналних матрица у $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (г) Скуп матрица у $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ чији траг јесте једнак 0.

5. Нека је $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Који од сљедећих скупова су потпростори векторског простора $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

   (а) $\{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : XA = AX\}$.

   (б) $\{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : X + A = A + X\}$.

   (в) $\{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \det(XA) = 0\}$.

6. Нека је S скуп свих матрица код којих је збир елемената по врстама, по колонама и по дијагоналама једнак 0 (имате 8 услова). Провјерити да ли је скуп S потпростор простора $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ па, ако се испостави да јесте, одредити његову димензију и једну базу.

7. Наћи подскуп простора $\mathbb{R}^2$ који је

   (а) затворен у односу на сабирање векторā али није затворен у односу на одузимање векторā и множење вектора скаларом.

   (б) затворен у односу на сабирање и одузимање векторā али није затворен у односу на множење вектора скаларом.

   (в) затворен у односу на множење вектора скаларом али није затворен у односу на сабирање векторā.

8. Нека је F скуп свих реалних полинома φ степена не већег од 4 који задовољавају услове $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$. Нека је G скуп свих реалних полинома φ степена не већег од 4 који задовољавају услове $\varphi(1) = \varphi(2) = 0$. Доказати да су F и G потпростори па одредити димензије и по једну базу за $F \cap G$ и $F + G$.

9. Нека су U, W_1 и W_2 потпростори векторског простора V.

   (а) Испитати да ли $U + W_1 = U + W_2$ повлачи $W_1 = W_2$.

   (б) Испитати да ли $U \oplus W_1 = V = U \oplus W_2$ повлачи $W_1 = W_2$.

10. Нека је дат векторски простор V и његова два потпростора W_1 и W_2. Доказати да $W_1 \cup W_2$ јесте потпростор простора V ако и само ако је тачна дисјункција: $W_1 \subset W_2$ или $W_2 \subset W_1$.

11. Скуп парних реалних функција дефинисаних на $\mathbb{R}$, означимо са U_e. Скуп непарних реалних функција дефинисаних на $\mathbb{R}$, означимо са U_o. Доказати да је $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = U_e \oplus U_o$, гдје је $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ скуп свих реалних функција дефинисаних на $\mathbb{R}$.

12. Доказати сљедећа тврђења.

    (а) Ако посматрамо $\mathbb{C}$ као векторски простор над $\mathbb{R}$, скуп $\{1+i, 1-i\}$ је линеарно независан.

    (б) Ако посматрамо $\mathbb{C}$ као векторски простор над $\mathbb{C}$, скуп $\{1+i, 1-i\}$ је линеарно зависан.

13. Испитати да ли су u, v и w линеарно независни вектори у векторском простору $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, гдје су $u(x) = |x-2|$, $v(x) = |x-3|$ и $w(x) = |x-5|$.