

# TERMIN 1 - zadaci za samostalan rad

★ ★

## Zadatak 1.

Ispitati da li je

$$F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = f(0) + 1\}$$

vektorski prostor sa standardnim operacijama.

★ ★

## Zadatak 2.

Ispitati da li je skup

$$U = \{A \in \mathcal{M}_2 \mid \det(A) = 0\}$$

vektorski potprostor od  $\mathcal{M}_2$ .

★ ★

## Zadatak 3.

U vektorskom prostoru  $\mathbb{R}^3$  odrediti vrijednosti parametra  $h \in \mathbb{R}$  za koje su vektori

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix} \text{ i } \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h + 1 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni.

★ ★

## Zadatak 4.

Ispitati da li matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

generišu prostor  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

★ ★ ★

## Zadatak 5.

Neka je  $U$  potprostor prostora  $\mathbb{R}^4$  generisan vektorima

$$u_1 = (1, 2, 0, -1), u_2 = (0, 3, 1, 2) \text{ i } u_3 = (-1, 1, 1, 3),$$

a  $W$  potprostor prostora  $\mathbb{R}^4$  generisan vektorima

$$w_1 = (1, 1, 1, 1), w_2 = (0, 1, 1, 2) \text{ i } w_3 = (-1, 0, 0, 1).$$

Odrediti po jednu bazu za vektorske prostore  $U$ ,  $W$ ,  $U + W$  i  $U \cap W$ .

★ ★ ★

## Zadatak 6.

Dati su potprostori  $W_1$  i  $W_2$  vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$

$$W_1 = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}, W_2 = \{(a, b, c) \mid a = c\}.$$

a) Da li važi  $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ ?

b) Da li važi  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ ?

c) Odrediti potprostor  $W_3$  takav da važi  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_3$  i  $\mathbb{R}^3 = W_2 \oplus W_3$ .

★ ★ ★ ★

## Zadatak 7.

Neka je  $W$  skup svih matrica reda 3 nad poljem  $\mathbb{R}$  koje komutiraju sa matricom  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ . Ispitati da li je  $W$  potprostor prostora  $M_3(\mathbb{R})$ . Ako jeste, odrediti mu bazu i dimenziju.

★★★★

**Zadatak 8.**

Neka je  $T_S$  skup svih vektora  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  iz  $\mathbb{R}^3$  za koje linearni sistem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= b \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= c \end{aligned} \tag{1}$$

ima rješenje.

a) Dokazati da je  $T_S$  potprostor vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$ .

b) Odrediti jednu bazu i dimenziju tog potprostora.

★★★★

**Zadatak 9.**

Neka je formiran skup matrica  $U_q = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A \right\}$ , za neki realni broj  $q$ . Dokazati da za slučajeve

a)  $q = 0$ ,

b)  $q = 2$ ,

c)  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

skup  $U_q$  određuje vektorski potprostor od  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  i za svaki od ovih slučajeva odrediti jednu bazu ovih potprostora.

★★★★★

**Zadatak 10.**

Neka je  $S$   $m$ -dimenzionalni potprostor  $n$ -dimenzionalnog vektorskog prostora  $V$ , pri čemu je  $m < n$ . Dokazati da postoji baza prostora  $V$  u kojoj se ne nalazi nijedan vektor iz  $S$ .