TERMIN 3 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★ ★ ★

Zadatak 1.
Dokazati da je sa

$$\mathcal{A}(a,b,c) = (a-b+2c) + (a+b+2c)\,x + cx^2$$

definisano linearno preslikavanje $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ i odrediti njegovu matricu u odnosu na standardne baze ovih prostora.
Pokazati da je preslikavanje regularno i odrediti njemu inverzno preslikavanje.

Rješenje

Neka su $\overrightarrow{x_1} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\overrightarrow{x_2} = (a_2, b_2, c_2)$ vektori iz vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Da bismo pokazali da je $\mathcal{A}$ linearan operator, dovoljno je da pokažemo da za proizvoljne realne skalare α i β vrijedi

$$\mathcal{A}\left(\alpha \cdot \overrightarrow{x_1} + \beta \cdot \overrightarrow{x_2}\right) = \alpha \cdot \mathcal{A}\left(\overrightarrow{x_1}\right) + \beta \cdot \mathcal{A}\left(\overrightarrow{x_2}\right).$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\left(\alpha \cdot \overrightarrow{x_1} + \beta \cdot \overrightarrow{x_2}\right) &= \mathcal{A}\left(\alpha \cdot (a_1,b_1,c_1) + \beta \cdot (a_2,b_2,c_2)\right) \\
&= \mathcal{A}\left(\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2\right) \\
&= \big((\alpha a_1 + \beta a_2) - (\alpha b_1 + \beta b_2) + 2(\alpha c_1 + \beta c_2)\big) + \big((\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2) + 2(\alpha c_1 + \beta c_2)\big)\,x + (\alpha c_1 + \beta c_2)\,x^2 \\
&= \alpha\left((a_1 - b_1 + 2c_1) + (a_1 + b_1 + 2c_1)\,x + c_1 x^2\right) + \beta\left((a_2 - b_2 + 2c_2) + (a_2 + b_2 + 2c_2)\,x + c_2 x^2\right) \\
&= \alpha \cdot \mathcal{A}(a_1,b_1,c_1) + \beta \cdot \mathcal{A}(a_2,b_2,c_2) \\
&= \alpha \cdot \mathcal{A}\left(\overrightarrow{x_1}\right) + \beta \cdot \mathcal{A}\left(\overrightarrow{x_2}\right)
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $\mathcal{A}$ linearni operator.
Kako su standardne baze vektorskih prostora $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}_2[x]$: $B_{\mathbb{R}^3} = \left\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\right\}$ i $B_{\mathbb{R}_2[x]} = \left\{1, x, x^2\right\}$, te kako je:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(1,0,0) &= 1 + x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
\mathcal{A}(0,1,0) &= -1 + x = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
\mathcal{A}(0,0,1) &= 2 + 2x + x^2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2
\end{aligned}$$

dobijamo da je matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz redukovane stepenaste forme matrice A

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-1) + R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

dobijamo da je $rank(A) = 3$, što znači da je $dim\left(Ker(\mathcal{A})\right) = 0$. Kako je $dim\left(\mathbb{R}^3\right) = dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right) = rank(A) = 3$ i kako je $Ker(\mathcal{A}) = \left\{(0,0,0)\right\}$, zaključujemo da je preslikavanje $\mathcal{A}$ regularno. Odredimo inverzno preslikavanje $\mathcal{A}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}(a,b,c)\right) = (a,b,c) \\
\Leftrightarrow \quad & \mathcal{A}^{-1}\left((a-b+2c) + (a+b+2c)\,x + cx^2\right) = (a,b,c).
\end{aligned}$$

Nakon uzimanja smjene $a - b + 2c = \alpha$, $a + b + 2c = \beta$ i $c = \gamma$ dobijamo sistem

$$\begin{cases} a - b + 2c = \alpha \\ a + b + 2c = \beta \\ \qquad\quad\;\; c = \gamma \end{cases}$$

čije je rješenje $a = \dfrac{\alpha + \beta - 4\gamma}{2}$, $b = \dfrac{-\alpha + \beta}{2}$ i $c = \gamma$. Odavde je konačno

$$\mathcal{A}^{-1}\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right) = \left(\frac{\alpha + \beta - 4\gamma}{2}, \frac{-\alpha + \beta}{2}, \gamma\right).$$

U odnosu na standardne baze vektorskih prostora $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}_2[x]$ imamo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{-1}(1) &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \\
\mathcal{A}^{-1}(x) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\
\mathcal{A}^{-1}\left(x^2\right) &= (-2, 0, 1)
\end{aligned}$$

pa je matrica linearnog operatora $\mathcal{A}^{-1}$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

★ ★ ★

Zadatak 2.
Odrediti matricu prelaska sa baze

$$\mathcal{B}_G = \left\{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (1,0,0,1)\right\}$$

na bazu

$$\mathcal{B}_F = \left\{(1,2,1,1), (0,1,2,1), (2,1,1,2)\right\}.$$

Rješenje

Da bismo odredili matricu prelaska sa baze $\mathcal{B}_G$ na bazu $\mathcal{B}_F$, potrebno je bazne vektore baze $\mathcal{B}_G$ predstaviti kao linearnu kombinaciju baznih vektora iz baze $\mathcal{B}_F$:

$$\begin{aligned}
(1,1,0,0) &= \alpha_1 (1,2,1,1) + \beta_1 (0,1,2,1) + \gamma_1 (2,1,1,2),\\
(0,1,1,0) &= \alpha_2 (1,2,1,1) + \beta_2 (0,1,2,1) + \gamma_2 (2,1,1,2),\\
(1,0,0,1) &= \alpha_3 (1,2,1,1) + \beta_3 (0,1,2,1) + \gamma_3 (2,1,1,2).
\end{aligned}$$

Iz prve jednačine dobijamo sistem:

$$\begin{cases}
\alpha_1 + 2\gamma_1 = 1\\
2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1\\
\alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1 = 0\\
\alpha_1 + \beta_1 + 2\gamma_1 = 0
\end{cases}.$$

Iz prve jednačine dobijamo $\alpha_1 = 1 - 2\gamma_1$ pa uvrštavanjem u preostale tri jednačine dobijamo

$$\begin{cases}
\alpha_1 + 2\gamma_1 = 1\\
2(1-2\gamma_1) + \beta_1 + \gamma_1 = 1\\
(1-2\gamma_1) + 2\beta_1 + \gamma_1 = 0\\
(1-2\gamma_1) + \beta_1 + 2\gamma_1 = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\alpha_1 + 2\gamma_1 = 1\\
\beta_1 - 3\gamma_1 = -1\\
2\beta_1 - \gamma_1 = -1\\
\beta_1 = -1
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\alpha_1 + 2\gamma_1 = 1\\
\beta_1 = -1\\
-3\gamma_1 = 0\\
-\gamma_1 = 1
\end{cases}.$$

Vidimo da je prethodni sistem nemoguć, tj. nema rješenje.
Stoga, zaključujemo da se bazni vektori baze $\mathcal{B}_G$ ne mogu predstaviti kao linearna kombinacija baznih vektora baze $\mathcal{B}_F$, što znaci da bazni vektori ovih baza generišu različite prostore. Samim tim, matrica prelaska sa baze $\mathcal{B}_G$ na bazu $\mathcal{B}_F$ ne postoji.

★★★★

Zadatak 3.

Dat je skup $S = \left\{1, x-2, (x-2)^2\right\}$ u prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.

a) Dokazati da je skup S baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Naći matricu prelaska sa baze S na bazu $B = \left\{1, x, x^2\right\}$.

c) Napisati vektor x^2+2x+1 u bazi S.

Rješenje

a) Kako je $dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right) = 3$ i kako skup S sadrži 3 elementa, da bi skup S bio baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$ dovoljno je pokazati da su njegovi elementi, koji su pojedinačno iz skupa $\mathbb{R}_2[x]$, linearno nezavisni. Dakle, jednačina

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (x-2) + \gamma \cdot (x-2)^2 = 0$$

treba da bude zadovoljena za svaku vrijednost $x \in \mathbb{R}$, pa ako uvrstimo $x = 1$, $x = 2$ i $x = 3$ redom, dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha \qquad\quad\;\; = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

čije je rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pa na ovaj način pokazujemo da su vektori 1, $x-2$ i $(x-2)^2$ linearno nezavisni.

b) Da bismo odredili matricu prelaska sa baze S na bazu B, potrebno je bazne vektore baze S predstaviti kao linearnu kombinaciju baznih vektora iz baze G. Kako je

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$
$$x - 2 = -2 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$
$$(x-2)^2 = 4 \cdot 1 + (-4) \cdot x + 1 \cdot x^2,$$

matrica prelaska $S_{S\to B}$ je

$$S_{S\to B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Kako je

$$x^2 + 2x + 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

imamo da je

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= \left(S_{B\to S} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)_S \\ &= \left((S_{S\to B})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)_S \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)_S \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)_S \\ &= \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}_S. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x^2 + 2x + 1 = 9 \cdot 1 + 6 \cdot (x-2) + 1 \cdot (x-2)^2.$$

★ ★ ★ ★

Zadatak 4.
Neka su

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \ \text{ i } \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti bazu B_N prostora $\mathbb{R}^3$ u odnosu na koju je

$$\left[\overrightarrow{a}\right]_{B_N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \left[\overrightarrow{b}\right]_{B_N} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \text{ i } \left[\overrightarrow{c}\right]_{B_N} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje

Neka je $B_N = \left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right\}$ tražena baza prostora $\mathbb{R}^3$ i neka su

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \ \text{ i } \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Matrica prelaska sa baze B_N na standardnu bazu B_S prostora $\mathbb{R}^3$ je

$$S_{B_N \to B_S} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\overrightarrow{x}_{B_S} = S_{B_N \to B_S} \cdot \overrightarrow{x}_{B_N}$ imamo da je

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

odakle dobijamo sljedeće sisteme linearnih jednačina

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 1 \\ -a_1 + a_2 + 2a_3 = 2 \\ a_1 - a_2 + a_3 = -5 \end{cases}, \qquad \begin{cases} b_1 + b_2 - b_3 = -2 \\ -b_1 + b_2 + 2b_3 = -1 \\ b_1 - b_2 + b_3 = 4 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 - c_3 = -2 \\ -c_1 + c_2 + 2c_3 = 3 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

čija su rješenja: $a_1 = -2, a_2 = 2, a_3 = -1,\ b_1 = 1, b_2 = -2, b_3 = 1,\ c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1.$
Odavde konačno dobijamo

$$B_N = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

★ ★ ★ ★

Zadatak 5.
Naći matricu linearnog operatora $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ u bazi $\{(0,0,3),(1,1,0),(1,2,3)\}$ ako je

$$\mathcal{A}(1,0,0)=(3,2,1),\ \ \mathcal{A}(0,1,0)=(0,0,0)\ \text{ i }\ \mathcal{A}(0,0,1)=(0,0,0).$$

Rješenje

Matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ u odnosu na standardnu bazu $B_S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ je

$$A_{B_S}=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

Neka je $B_N=\{(0,0,3),(1,1,0),(1,2,3)\}$. Odredimo matricu linearnog operatora $\mathcal{A}$ po bazi B_N. Kako je

$$A_{B_N}=S_{B_S\to B_N}\cdot A_{B_S}\cdot S_{B_N\to B_S},$$

gdje je $S_{B_N\to B_S}$ matrica prelaska sa baze B_N na bazu B_S. Kako je

$$S_{B_N\to B_S}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&2\\3&0&3\end{bmatrix}$$

i kako je $S_{B_S\to B_N}=S^{-1}_{B_N\to B_S}$, imamo da je

$$\begin{aligned}A_{B_N}&=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&2\\3&0&3\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}3&0&0\\2&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&2\\3&0&3\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&\frac{4}{3}&\frac{4}{3}\\0&4&4\\0&-1&-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

★★★★

Zadatak 6.
Neka je $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonalno projektovanje na yz ravan. Odrediti matricu operatora $\mathcal{P}$ po bazi $B' = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

Rješenje

Kako se vektor $(1,0,0)$ projektuje u $(0,0,0)$, dok se vektori $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ projektuju u $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ redom, matrica operatora $\mathcal{P}$ u odnosu na standardnu bazu B_S prostora $\mathbb{R}^3$ je

$$P_{B_S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je matrica prelaska sa baze B' na bazu B_S:

$$S_{B' \to B_S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i kako je

$$P_{B'} = S_{B_S \to B'} \cdot P_{B_S} \cdot S_{B' \to B_S},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} P_{B'} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

★ ★ ★ ★

Zadatak 7.
Dat je linearni operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisan sa

$$\mathcal{A}(a, b, c) = (2a - 11b + 6c, a - 7b + 4c, 2a - b).$$

Odrediti matricu operatora $\mathcal{A}$ po kanonskoj bazi i po bazi $B' = \{(2, 3, 5), (0, 1, 2), (1, 0, 0)\}$.

Rješenje

Kako je

$$\mathcal{A}\,(1, 0, 0) = (2, 1, 2)\,, \qquad \mathcal{A}\,(0, 1, 0) = (-11, -7, -1)\,, \qquad \mathcal{A}\,(0, 0, 1) = (6, 4, 0)$$

matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ po kanonskoj bazi B_S je

$$A_{B_S} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je matrica prelaska sa baze *B'* na bazu B_S:

$$S_{B'\to B_S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

i kako je

$$A_{B'} = S_{B_S\to B'} \cdot A_{B_S} \cdot S_{B'\to B_S},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} A_{B'} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

★★★

Zadatak 8.
Upotrebom Kroneker-Kapelijeve teoreme riješiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} 3x+2y-4z=1 \\ 3x-2y+\ \ z=2 \\ \ \ x+2y-2z=-1 \end{cases}.$$

Da li vektor kolone slobodnog člana pripada prostoru kolona matrice sistema?

Rješenje

Prethodni sistem se u matričnom obliku može zapisati kao

$$A\cdot\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b},$$

gdje je

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-4\\3&-2&1\\1&2&-2\end{bmatrix},\quad \overrightarrow{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\quad \text{i}\quad \overrightarrow{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Odredimo stepenastu formu proširene matrice $\left[A\mid\overrightarrow{b}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&-4&1\\3&-2&1&2\\1&2&-2&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&-2&-1\\3&-2&1&2\\3&2&-4&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\cdot(-3)+R_3]{R_1\cdot(-3)+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&-2&-1\\0&-8&7&5\\0&-4&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&-2&-1\\0&\boxed{-4}&2&4\\0&-8&7&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\cdot(-2)+R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&-2&-1\\0&\boxed{-4}&2&4\\0&0&\boxed{3}&-3\end{array}\right].$$

Kako je

$$rank\,(A)=rank\left(\left[A\mid\overrightarrow{b}\right]\right)=3,$$

na osnovu Kroneker-Kapelijeve teoreme zaključujemo da je sistem saglasan i da ima jedinstveno rješenje. Do rješenja sistema možemo doći određivanjem redukovane stepenaste forme matrice $\left[A\mid\overrightarrow{b}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&-2&-1\\0&\boxed{-4}&2&4\\0&0&\boxed{3}&-3\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&-2&-1\\0&\boxed{-4}&2&4\\0&0&\boxed{1}&-1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\cdot2+R_1]{R_3\cdot(-2)+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&0&-3\\0&\boxed{-4}&0&6\\0&0&\boxed{1}&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&0&-3\\0&\boxed{1}&0&-\frac{3}{2}\\0&0&\boxed{1}&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\cdot(-2)+R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&0&0&0\\0&\boxed{1}&0&-\frac{3}{2}\\0&0&\boxed{1}&-1\end{array}\right].$$

Iz redukovane stepenaste forme matrice $\left[A\mid\overrightarrow{b}\right]$ dobijamo da je rješenje početnog sistema

$$(x,y,z)=\left(0,-\frac{3}{2},-1\right).$$

Kako je $rank\,(A)=3$, zaključujemo da je prostor kolona matrice sistema

$$Lin\left(\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\1\\-2\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^3.$$

Stoga, i vektor kolone slobodnog člana

$$\overrightarrow{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

pripada prostoru kolona matrice sistema. Štaviše, vrijedi

$$\overrightarrow{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}+(-1)\cdot\begin{bmatrix}-4\\1\\-2\end{bmatrix},$$

a do ovog zaključka dolazimo iz matričnog zapisa početnog sistema

$$\overrightarrow{b}=x\cdot A_{\bullet1}+y\cdot A_{\bullet2}+z\cdot A_{\bullet3}.$$

★★★★

Zadatak 9.
Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti skup svih vektora $\overrightarrow{b}$ za koje sistem $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ima rješenje. Ukoliko je taj skup potprostor, odrediti jednu njegovu bazu.

b) Provjeriti da li vektor $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pripada skupu iz prethodne tačke pa, ako se ispostavi da pripada, odrediti sva rješenja odgovarajućeg sistema $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Rješenje

a) Neka je

$$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Posmatrajmo stepenastu formu proširene matrice $\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 3 & -1 & 4 & 2 & b_1 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & -1 & b_2 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1\cdot(-1)+R_3]{R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 3 & -1 & 4 & 2 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -1 & -b_1+b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 3 & -1 & 4 & 2 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 1 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_3 \end{array}\right].$$

Kako je $rank\,(A) = 2$, da bi sistem $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ bio saglasan potrebno je da vrijedi $rank\left(\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]\right) = 2$, odnosno $b_2 + b_3 = 0$. Sada je

$$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_2 \end{bmatrix} = b_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = Lin\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Dakle, baza potprostora $\overrightarrow{b}$ je

$$B_{\overrightarrow{b}} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

b) Kako je

$$\overrightarrow{b} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

vektor $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pripada skupu iz prethodne tačke.

Neka je

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Iz stepenaste forme matrice $\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]$ dobijamo redukovanu stepenastu formu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 3 & -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\cdot(-3)+R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -10 & -8 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

odakle je

$$x_1 = 1 + 10x_3 + 8x_4 + x_5 \quad \text{i} \quad x_2 = -1 - 3x_3 - 4x_4 - x_5$$

pa je

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 10x_3 + 8x_4 + x_5 \\ -1 - 3x_3 - 4x_4 - x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

rješenje sistema $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 10.
Upotrebom Kroneker-Kapelijeve teoreme ispitati prirodu rješenja sistema linearnih jednačina u zavisnosti od parametara a i b:

$$\begin{cases} ax_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2ax_1 - 2bx_2 + 2x_3 + 3x_4 = a \\ 2x_1 - bx_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}.$$

Rješenje

Stepenasta forma proširene matrice sistema $\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]$ je

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 2a & -2b & 2 & 3 & a \\ 2 & -b & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 2a & -2b & 2 & 3 & a \\ a & -3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+R_3]{R_1\cdot(-a)+R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & ab-2b & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & \frac{ab}{2}-3 & \frac{11a}{2}+5 & \frac{15a}{2}+7 & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right]$$

Dalje razlikujemo dva slučaja:

- $ab - 2b \neq 0 \;\Leftrightarrow\; b(a-2) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; b \neq 0 \,\wedge\, a \neq 2$
  Sada je stepenasta forma proširene matrice sistema $\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{ab-2b} & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & \frac{ab}{2}-3 & \frac{11a}{2}+5 & \frac{15a}{2}+7 & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{ab-2b} & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & b-3 & 4 & \frac{11}{2} & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\cdot\left(-\frac{b-3}{ab-2b}\right)+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{ab-2b} & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\frac{(b-3)(11a+2)}{ab-2b} & \frac{11}{2}-\frac{(b-3)(15a+3)}{ab-2b} & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{ab-2b} & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(ab-2b)-(b-3)(11a+2)}{ab-2b} & \frac{11(ab-2b)-2(b-3)(15a+3)}{2(ab-2b)} & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{ab-2b} & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4ab-8b-11ab+33a-2b+6}{ab-2b} & \frac{11ab-22b-30ab+90a-6b+18}{2(ab-2b)} & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{ab-2b} & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-7ab+33a-10b+6}{ab-2b} & \frac{-19ab+90a-28b+18}{2(ab-2b)} & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right]$$

Rang prethodne proširene matrice će biti jednak 3 osim ako je

$$\begin{aligned} & -7ab+33a-10b+6=0 \;\wedge\; -19ab+90a-28b+18=0 \\ \Leftrightarrow\quad & a(33-7b)=10b-6 \;\wedge\; a(90-19b)=28b-18 \\ \Leftrightarrow\quad & a=\frac{10b-6}{33-7b} \;\wedge\; a=\frac{28b-18}{90-19b} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{10b-6}{33-7b}=\frac{28b-18}{90-19b} \\ \Leftrightarrow\quad & (10b-6)(90-19b)=(33-7b)(28b-18) \\ \Leftrightarrow\quad & 900b-540-190b^2+114b=924b-196b^2-594+126b \\ \Leftrightarrow\quad & 6b^2-36b+54=0 \\ \Leftrightarrow\quad & b^2-6b+9=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (b-3)^2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & b=3. \end{aligned}$$

Dakle, u prvom slučaju za $b \neq 3$, sistem je saglasan jer je $rank\,(A) = rank\left(\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]\right) = 3$.
Dodatno, kako je broj promjenljivih u sistemu $n = 4$ i kako je rang matrice $r = 3$, imamo da je sistem neodređen.
U slučaju, nakon uvrštavanja $b = 3$ u stepenastu formu proširene matrice $\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]$ dobijamo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -3 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{3a-6} & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12a-24}{3a-6} & \frac{33a-66}{2(3a-6)} & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -3 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{3a-6} & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & \frac{11}{2} & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right].$$

pa slično kao i maloprije dobijamo da je sistem neodređen u ovom slučaju.

- $ab-2b=0 \;\Leftrightarrow\; b(a-2)=0 \;\Leftrightarrow\; b=0 \;\vee\; a=2$
  Razlikujemo dva nova slučaja:
  - $\to$ $b=0$
    Sada je stepenasta forma proširene matrice sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 11a+2 & 15a+3 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{11a}{2}+5 & \frac{15a}{2}+7 & 1-\frac{a}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & \frac{11a}{2}+5 & \frac{15a}{2}+7 & 1-\frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 11a+2 & 15a+3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\cdot(-2)+R_3}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & \frac{11a}{2}+5 & \frac{15a}{2}+7 & 1-\frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & -11 & a-2 \end{array}\right]$$

    U ovom slučaju je dakle sistem neodređen.
  - $\to$ $a=2$
    Sada je stepenasta forma proširene matrice sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \\ 0 & b-3 & 16 & 22 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & b-3 & 16 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \end{array}\right]$$

    Dalje razlikujemo nova dva slučaja.
    - $*$ $b \neq 3$
      Stepenasta forma je sada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -b & -11 & -15 & 1 \\ 0 & \boxed{b-3} & 16 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{24} & 33 & 0 \end{array}\right]$$

      pa dobijamo da je $rank\,(A) = rank\left(\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]\right) = 3$ odakle zaključujemo da je sistem neodređen.
    - $*$ $b=3$
      Stepenasta forma je sada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -3 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 33 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -3 & -11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

      pa dobijamo da je $rank\,(A) = rank\left(\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]\right) = 2$ odakle zaključujemo da je sistem neodređen i u ovom slučaju.

Dakle, početni sistem je neodređen za sve vrijednosti realnih parametara a i b.

Napomena:
Zadatak se može uraditi na jednostavniji način. Uvođenjem smjena: $x_3 = x$, $x_4 = y$, $x_1 = z$ i $x_2 = t$ prethodni sistem se u matričnom obliku može zapisati kao:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & a & -3 \\ 2 & 3 & 2a & -2b \\ -11 & -15 & 2 & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa je stepenasta forma proširene matrice sistema sada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{5} & 7 & a & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2a & -2b & a \\ -11 & -15 & 2 & -b & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1\cdot\frac{11}{5}+R_3]{R_1\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)+R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{5} & 7 & a & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{5}} & \frac{8}{5}a & \frac{6}{5}-2b & a-\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{11a}{5}+2 & -\frac{33}{5}-b & \frac{16}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\cdot(-2)+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{5} & 7 & a & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{5}} & \frac{8}{5}a & \frac{6}{5}-2b & a-\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -a+2 & -9+3b & -2a+4 \end{array}\right].$$

- Za $a \neq 2$ ili $b \neq 3$ imamo da je $rank\,(A) = rank\left(\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]\right) = 3$ odakle zaključujemo da je sistem neodređen.
- Za $a = 2$ i $b = 3$ imamo da je $rank\,(A) = rank\left(\left[A \mid \overrightarrow{b}\right]\right) = 2$ odakle zaključujemo da je sistem neodređen i u ovom slučaju.

Dakle, dolazimo do zaključka da je početni sistem neodređen za sve vrijednosti realnih parametara a i b.