TERMIN 2 - zadaci za samostalan rad

★ K1 09.02.2022. ②

Zadatak 1.
Pokazati jednakost $e^{i\pi} + 1 = 0$.

★ K1 03.12.2020. ②

Zadatak 2.
Riješiti jednačinu $z^4 + 1 + i = 0$.

★★

Zadatak 3.
Odrediti sva rješenja jednačine

$$3(z-i)^3 = \frac{1-3i}{1+i} - \frac{2i}{1-i}$$

i predstaviti ih u kompleksnoj ravni.

★★

Zadatak 4.
U kompleksnoj ravni predstaviti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslov

1. $z = \overline{z} + 2i$,
2. $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Da li postoji kompleksan broj z koji zadovoljava oba uslova? Ako postoji, odrediti ga i predstaviti ga u kompleksnoj ravni.

★★

Zadatak 5.
Naći sva rješenja jednačine

$$z^3 = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3} + 3i\right)\right)^{50}$$

u skupu kompleksnih brojeva.

★★★

Zadatak 6.
Izračunati $1 - i - z$ ako je

$$z = \frac{(1-i)^{10} \cdot (\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}.$$

★★★ ZI 11.09.2023. ②

Zadatak 7.
Ako je

$$f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, dokazati da je

$$f(n+4) + f(n) = 0.$$

★★★★

Zadatak 8.
Ako su $a, b \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$|a| = |b| = 1 \quad \text{i} \quad ab \neq -1$$

dokazati da je

$$\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 9.
Ako za $\varepsilon \in \mathbb{C}$ vrijedi $\varepsilon^{2n} = 1$, odrediti broj z ako je

$$z = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}.$$

★ ★ ★ ★ ★

Zadatak 10.
Ako je $|a| = |b| = |c| = r$, pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{C}$, dokazati jednakost

$$\left|\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}\right| = r.$$