SADRŽAJ

UVOD

Elementarne funkcije su klasa funkcija koja u sebe uključuje:

- Polinome,
- Racionalne funkcije,
- Eksponencijalne funkcije
- Stepene funkcije
- Logaritamske funkcije
- Trigonometrijske funkcije
- Inverzne trigonometrijske funkcije

a takođe i funkcije koje se mogu dobiti od ovih pomoću četiri aritmetičke operacije:

- Sabiranjem,
- Oduzimanjem,
- Množenjem,
- Delenjem.

POLINOMI

Funkcija

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\ x\in R,$$

gde su koeficijenti a_j, j = 0,1,...,n, realni brojevi, naziva se polinom stepena $n\in N$, ako je koeficijent $a_n\neq 0$. Po definiciji uzimamo da je konstanta polinom nultog stepena. Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i ako su koeficijenti uz iste stepene jednaki.

Polinom $P_n(x)$ posmatramo i za $x \in C$. Tada je broj $x_0 \in C$ nula polinoma $P_n(x)$, ako je $P_n(x_0)=0$. Ako je broj x_0 nula polinoma $P_n(x)$, koji je racionalan, realan odnosno kompleksan broj, tu nulu ćemo zvati racionalnom, realnom odnosno kompleksnom nulom tog polinoma.

Elementarna svojstva polinoma:

1. Zbir dva polinoma je polinom
2. Proizvod dva polinoma je polinom
3. Izvod polinoma je polinom
4. Primitivna funkcija polinoma je polinom

Teorema 1:(Osnovni stav algebre)Svaki polinom $n\in N$ ima bar jednu nulu u skupu realnih brojeva.

Ako je x_0 realna nula polonoma $P_n(x)$, tada postoji polinom sa realnim koeficijentima $Q_{n-1}(x)$, gde je $Q_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$, *stepena n-1,* tako da važi

$$P_n(x)=(x-x_0)\,Q_{n-1}(x).$$

Broj $x_0\epsilon R$ je realna nula m-tog reda polinoma $P_n(x)$, ako postoji polinom sa realnim koeficijentima $R_{n-m}(x)$, *stepena n-m, takav da je* $R_{n-m}(x)\neq 0$ *i važi*

$$P_n(x)=(x-x_0)^{m}R_{n-m}(x).$$

Uopšte, svaki polinom $P_n(x)$ sa realnim koeficijentima, oblika $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, stepena *n,* može na jedinstven način napisati kao proizvod

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_r)^{m_r}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{l_s},$$

Gde za prirodne brojeve m_j, j=1,...,r i prirodne brojeve l_k, k=1,...,s, važi

$$n=m_1+\cdots+m_r+2(l_1+\cdots+l_s).$$

Iz prethodne teoreme sledi: za svaki polinom stepena $n\in N$ postoji tačno n nula, među kojima može biti i jednakih.

Teorema 2: Neka je $P_n(x)$ polinom sa celim koeficijentima. Ako je razlomak p/q nula polinoma $P_n(x)$, gde su $p\in Z$ i $q\in N$ relativno prosti brojevi (tj. razlomak p/q se ne može uprostiti), tada važi:

1. Imenilac p je činilac slobodnog člana a_0;
2. Brojilac q je činilac koeficijenta a_n.

Ova teorema daje potencijalne racionalne nule polinoma sa celim koeficijentima. Postupak koji omogućava da se odrede koeficijenti b_0, b_1,..., b_{n-1} polinoma $Q_{n-1}(x)$ iz $P_n(x)$=(x-x_0) $Q_{n-1}(x)$ i proveri da li su potencijalne vrednosta zaista nule datog polinima, naziva se Hornerova šema.

Primer 1:Hornerova šema

Odredićemo racionalne nule polinoma p_3(x)=x^3+3x^2-4x-12. Za dati polinom posmatramo delitelje broja 12, jer je a_0=12. To su brojevi: ±1,±2,±3,±4,±6,±12. Ispitaćemo da li je *x=1* nula posatranog polinoma:

1 3 -4 -12 | *x=1*
1 4 0 |-12.

Drugi red u ovoj šemi dobijen je na sledeći način:Prvi broj u drugom redu, 1, se prepiše iz prvog reda I upiše u drugu kolonu. Zatim se nalaze brojevi 4=1·1+3, 1·4+(-4)=0 i dobija se ostatak 1·0+(-12)=-12. Kako je zadnja cifra u drugom redu -12, *x*=0 nije nula datog polinoma.

Ispitaćemo da li je *x=2* nula datog polinoma:

1 3 -4 -12 | *x=2*
1 5 6 | 0.

Kako je zadnja cifra u drugom redu 0, *x*=0 je nula datog polinoma. Prema tome važi

$$x^3+3x^2-4x-12=(x-2)(x^2+5x+6).$$

Postupak se dalje nastavlja, tako što se traže nule polinoma drugog stepena. To se sada može uraditi rešavanjem kvadratne jednačine ili ponovo pomoću Hornerove šeme.

Primer 2:Faktorizacija polinoma

a) $p_3(x)=x^3+x^2-4x-4=x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)=$
$=(x+1)(x+2)(x-1)$
b) $p_4(x)=x^4-3x^2-4=x^4-4x^2+x^2-4=x^2(x^2-4)+(x^2-4)=$
$=(x^2-4)(x^2+1)=(x-2)(x+2)(x-i)(x+i)$, gde je i^2=-1.

Primer 3: Posmatraćemo jednoćelijske organizme oblika sfere. Ako sa r oynačimo poluprečnik ćelije, tada je odgovarajuća povrsina S i zapremina V ćelije data sa

$$S=4\pi r^2 \text{(funkcija stepena).}$$

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \text{(funkcija trećeg stepena).}$$

Kada ćelija raste (povećava se poluprečnik r), zapremina ćeloje raste brže nego površina, npr. za dvostruko veći poluprečnik površina će se učetvorostručiti, a zapremina će se povećati osam puta. Obrnuta je situacija pri smanjivanju, tj. za upola manji poluprečnik površina će se smanjiti četiri puta, a zapremina osam puta. Veličina površine ćelije određuje veličinu protoka(zapremine) materije i energije kao što su npr. kiseonik, ugljen-dioksid i svetlost, dok veličina zapremine ćelije određuje metabolizam unutar ćelije. Iz tih razčoga ćelija ne sme biti ni suviše velika, ni suviše mala da bi se održala ravnoteža između ta dva procesa. Sa jedne strane, ako je poluprečnik ćelije r manji od donje kritične vrednosti r_1, tada će ćelija uginuti, jer ,etabolizam nije u dovoljnoj meri razvijen za tako veliku površinu, odnosno veliki protok materije i energije. Sa druge strane ako je poluprečnik r veći od gornje kritične vrednosti r_2, tada je protom materije i energije nedovoljan za povećan metabolizam ćelije. Zbog toga mora biti zadovoljen uslov $r_1 < r < r_2$, te su zato i dimenzije jednoćelijskih organizama takve, kakve ih srećemo u prirodi.

RACIONALNE FUNKCIJE

Funkcija

$$R_{(x)}=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)},\ x \in R \backslash \{x \in R | P_n(x) = 0\},$$

Gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$polinomi stepena n odnosno m, naziva se racionalna funkcija.

$n < m \Rightarrow$ prava racionalna funkcija,
$n \geq m \Rightarrow$ deljenjem brojioca sa imeniocom funkciju možemo napisati u obliku polinoma i prave racionalne funkcije.
Posebno značajni primeri racionalnih funkcija su elementarne racionalne funkcije

$$\frac{A}{(x-a)^j},\ j \in N, \quad i \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\ k \in N,$$

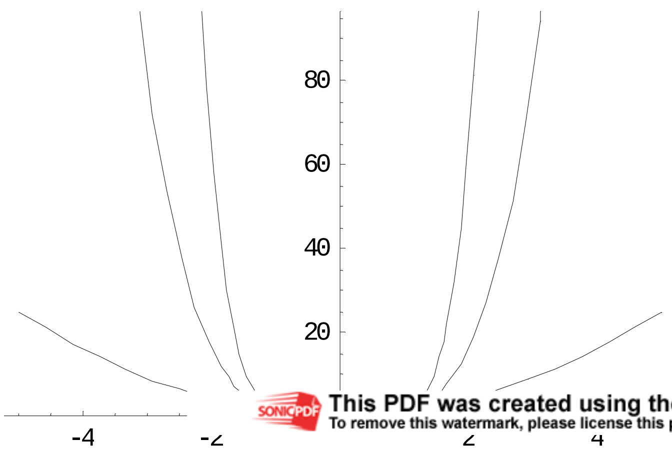
gde su nule polinoma $x^2 + px + q$ konjugovano-kompleksne.

Primer 4: Neka više slavina puni jedan rezervoar. Neka jednoj slavini , da bi napunila rezervoar , treba 8h. Tada će dve takve slavine napuniti rezervoar za 4h=$\frac{8}{2}$, dok će četiri takve slavine napuniti rezervoar za 2h=$\frac{8}{4}$. Uopšte, x slavina će napuniti rezervoar za $\frac{8}{x}$ časova *(x∈N)*. Znači, između broja sati punjenja rezervoara i broja slavina postoji obrnuta proporcija, $y=\frac{8}{x}$.

STEPENE FUNKCIJE

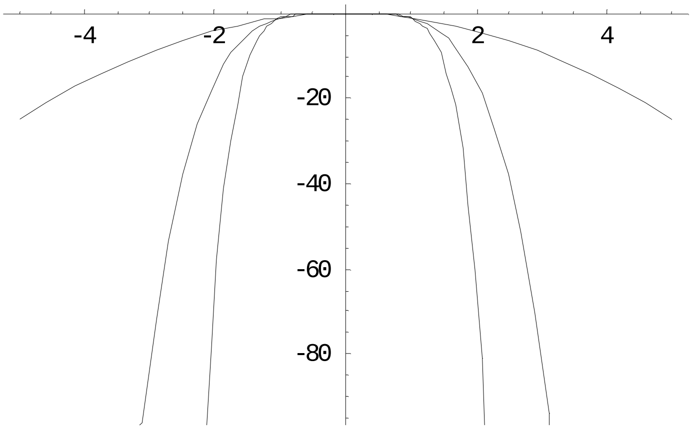
Stepene funkcije su oblika $y(x)=x^a$, gde je $a \in R$.
U istom koordinatnom sistemu posmatrajmo grafike nekih funkcija oblika $y=x^n, n \in N$:

- $f(x)=x^2$, $f(x)=x^4$, $f(x)=x^6$



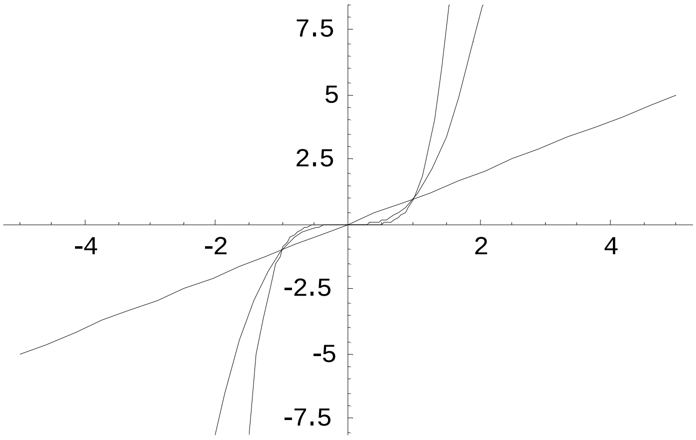
Skup vrednosti sve tri funkcije je interval [0,+∞) i sve tri funkcije su parne. Sve tri funkcije opadaju nad (−∞,0), a rastu nad (0,+∞), pa imaju lokalni i globalni minimum u tački x=0.

- $f(x)=-x^2$, $f(x)=-x^4$, $f(x)=-x^6$



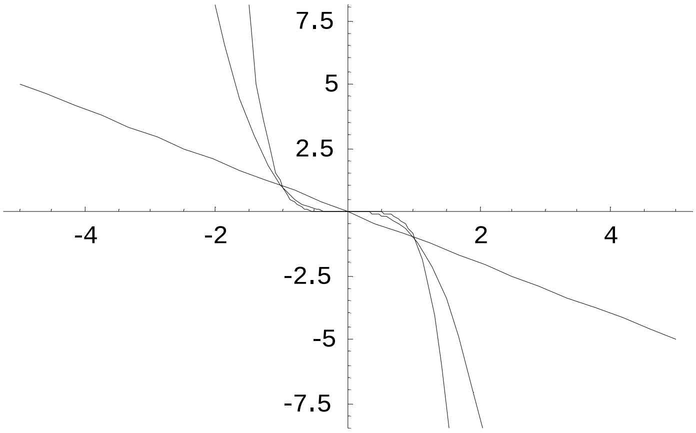
Skup vrednosti sve tri funkcije je interval (-∞,0] i sve tri funkcije su parne. Sve tri funkcije rastu nad (-∞,0), a opadaju nad (0,+∞), pa imaju lokalni i globalni maximun u tački x=0.

c) $f(x)=x$, $f(x)=x^3$, $f(x)=x^5$



Skup vrednosti ovih funkcija je skup R. Sve tri funkcije su neparene, rastuće funkcije na R.

d) $f(x)=-x$, $f(x)=-x^3$, $f(x)=-x^5$



Skup vrednosti ovih neparnih opadajućih funkcija je R.

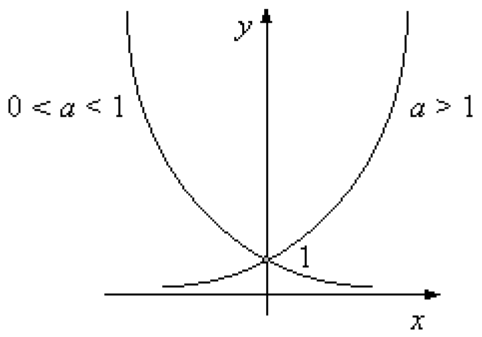
- Stepena funkcija $y=\frac{1}{x^n}$, gde je n ceo pozitivan broj, definisana je u intervalima $(-\infty,0)$ i $(0,+\infty)$; za x=0 nije definisana. U intervalu $(0,+\infty)$ opada;a u intervalu $(-\infty,0)$ opada, ako je n neparno, a raste ako je n parno.
- Stepena funkcija $y=\sqrt[n]{x}$, gde je n ceo pozitivan broj, definisana je, za n neparno u intervalu $(-\infty,+\infty)$, a za n parno u intervalu $[0,+\infty)$.
  Ona se definiše kao inverzna funkcija funkcije $y=x^n$, tj. $y=\sqrt[n]{x}$ ako važi $y^n=x$.
- Stepena funkcija $y=x^{\frac{p}{q}}$, gde je ${}^p/_q$ racionalan broj se definiše sa $y=(x^p)^{\frac{1}{q}}=(x^{\frac{1}{q}})^p$.
  Ako je $a\in R$ iracionalan broj, onda se $y=x^a$ definiše kao $y=x^{\lim_{n\to\infty} a_n}$, gde je $\{a_n\}_{n\in N}$ proizvoljan niz racionalnih brojeva za koji važi $\lim_{n\to\infty} a_n=a$.

EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Eksponencijalne funkcija $y=a^x$ je definisana, za a>0, u intervalu $(-\infty, +\infty)$, i ona je uvek pozitivna. Za 0<a<1, funkcija $y=a^x$ opada u intervalu $(+\infty,0)$, a za a>1 raste u intervalu $(0,+\infty)$. Za a=1 biće $y=1^x=1$, tj imaćemo pravu liniju y=1. Eksponencijalna funkcija je monotona. Eksponencijalna funkcija čija je osnova a=e, tj. $y=e^x$, zove se prirodna (eksponencijalna) funkcija.

- *Za a<1,* $a^{-\infty}=+\infty$, $a^0=1$, $a^{+\infty}=0$;
- *Za a>1,* $a^{-\infty}=0$, $a^0=1$, $a^{+\infty}=+\infty$;

Eksponencijalna funkcija: $y = a^x$



Osnovni eksponencijalni zakoni:

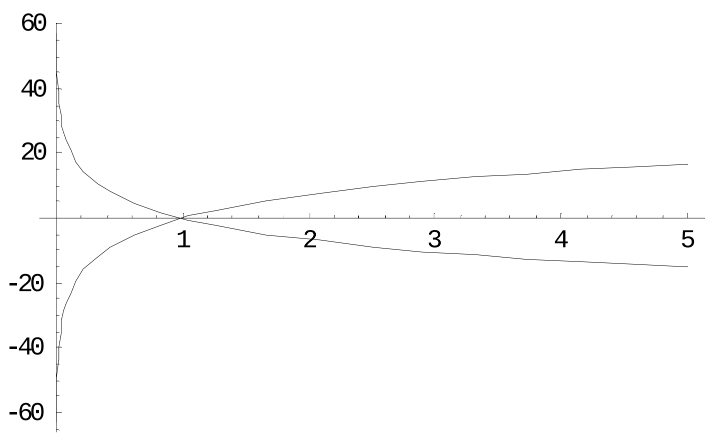
- $a^0=1$
- $a^1=a$
- $a^{x+y}=a^x a^y$
- $a^{xy}=(a^x)^y$
- $\frac{1}{a^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$
- $a^x b^x=(ab)^x$, ovi zakoni važe za sve pozitivne realne brojeve a,b i sve realne brojeve x, y

LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Logaritamska funkcija $y=log_a\, x$ u inverznom obliku glasi $x=a^y$, prema tome ona je inverzna eksponencijalna. Ona je definisana za $x>0$, gde je $0<a<+\infty$. Kako je

$$y=log_a\, x, \quad x=a^y,$$

to je $x\equiv a^{log_a x}$.



Na crtežu se vide grafici funkcije $y=log_a\, x$, za a=1,1 i a=0,9.

Iz relacija navedenih kod eksponencijalne funkcije mogu se izvesti osobine za logaritamsku funkciju:

1. Ona je definisana samo za $x>0$ i svakoj vrednosti x odgovara samo po jedna vrednost y. Drugim rečima, svaki pozitivan broj ima samo jedan logaritam; negativno brojevi nemaju logaritama.
2. Logaritamska funkcija je monotono opadajuća, ako je $0<a<1$, a monotono rastuća, ako je $a>1$.
3. Logaritam od jedan je nula za ma koju osnovu, a logaritam od osnove je jedan. To je očigledno iz jednačine $x=a^y$, tj

$$1=a^0 \text{ ili } \log_a 1=0;$$
$$a=a^1 \text{ ili } \log_a 1=0.$$

Isto tako iz jednačine $x=a^y$ sledi:

- *Za* $0<a<1$, $\quad \log(+0)=+\infty, \quad \log 1=0, \quad \log(+\infty)=-\infty$
- *Za* $a>1$, $\quad \log(+0)=-\infty, \quad \log 1=0, \quad \log(+\infty)=+\infty$

Kada se znaju logaritmi brojeva sa jednom osnovom, mogu se lako dobiti logaritmi tih brojeva sa drugom osnovom. Neka je x ma kakav pozitivan broj i neka su y i z njegovi logaritmi za osnove a i b, tj.

$$y=\log_a x, \quad z=\log_b x$$

tada je

$$x=a^y=b^z.$$

Ako se ova jednačina logaritmuje prvo za osnovu a, zatim za osnovu b, dobija se

$$\begin{cases} \log_a x = y = z\log_a b = \log_b x \cdot \log_a b, \\ \log_b x = z = y\log_b a = \log_a x \cdot \log_b a. \end{cases}$$

Prva jednačina pokazuje kako se dobija logaritam broja x za osnovu a, kada se zna logaritam broja x za osnovu b. Druga pokazuje kako se dobija logaritam broja x za osnovu b, kada se zna logaritam broja x za osnovu a. U prvom slučaju traba znati $\log_a b$ a u drugom $\log_b a$. Međutim dovoljno je poznavati jedan od ova dva logaritma, jer se množenjem dobija

$$1=\log_b a \cdot \log_a b.$$

Broj

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

zove se moduo prelaza logaritma sa osnovom b na logaritme sa osnovom a, a broj

$$log_b\, a = \frac{1}{log_a\, b}$$

moduo prelaza logaritma sa osnovom *a* na logaritme sa osnovom *b*.

Logaritmi sa osnovom 10 zovu se decimalni ili dekadni logaritmi a sa osnovom e prirodni logaritmi. Onda je $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

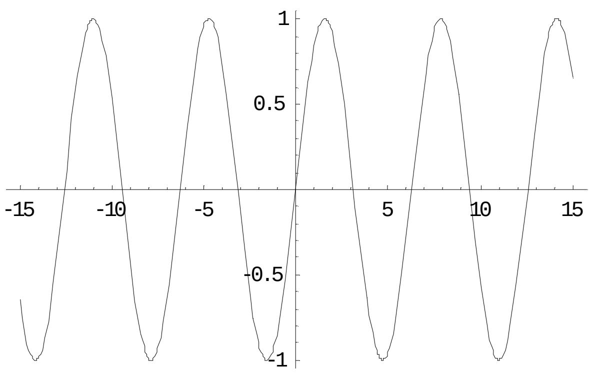
TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Funkcije

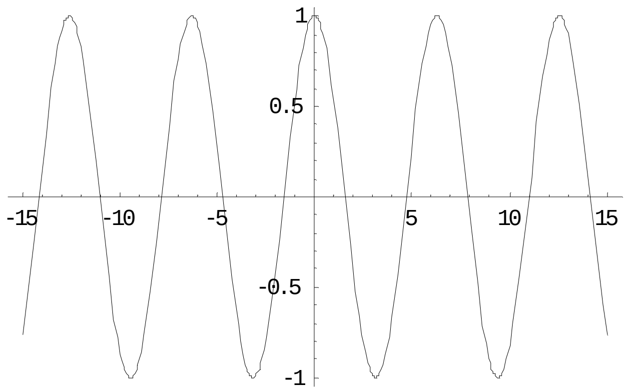
$$y=sin\, x,\quad y=cos\, x,\quad y=tan\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\quad y=cot\, x = \frac{1}{tan\, x},$$
$$y=sec\, x = \frac{1}{cos\, x},\quad y=cos\, sec\, x = \frac{1}{sin\, x}$$

zovu se trigonometrijske funkcije.

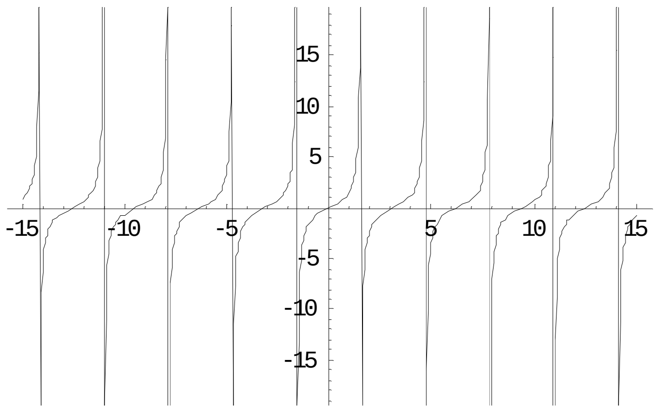
Funkcija *f(x)=sinx* je difinisana za sve *x∈R,* i njen skup vrednosti je interval $[-1,1]$. Neparna je i periodična sa osnovnim periodom 2π. Nule su u tačkama $x=k\pi$. Na intervalima oblika $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ raste, a opada na intervalima oblika $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, *k∈Z.* Funkcija ima maksimum u tačkama $x=\frac{(4k+1)\pi}{2}$, a minimume u tačkama $x=\frac{(4k+3)\pi}{2}$, *k∈Z.*



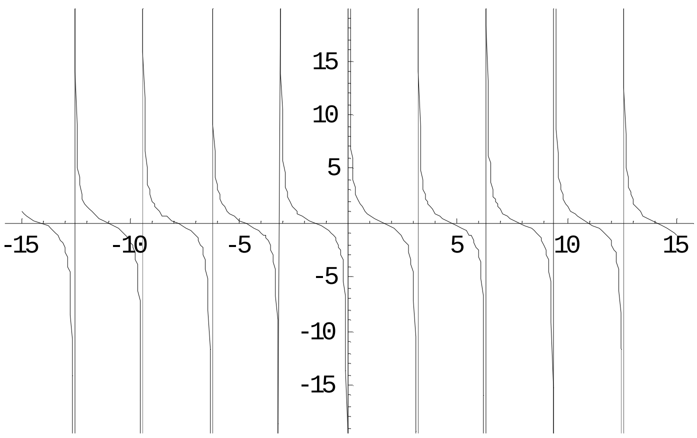
Funkcija *f(x)*=cos *x* je difinisana za sve *x∈R,* i njen skup vrednosti je interval $[-1,1]$. Parna je i periodična je sa osnovnim periodom 2π. Nule funkcije su u tačkama $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, *k∈Z.* Na intervalu oblika $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ opada, a raste na intervalu oblika $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, *k∈Z.* Funkcija ima maksimum u tačkama $x=2k\pi$, a minimume u tačkama $x=(2k+1)\pi$, *k∈Z.*



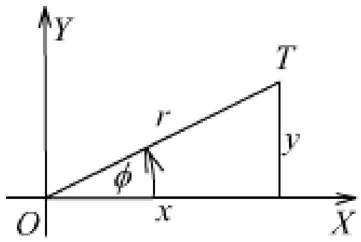
Funkcija tg $x=\frac{\sin x}{\cos x}$ je difinisana za sve $x \in R$ za koje je $\cos x \neq 0$. Skup vrednosti je R. Neparna je i periodična je sa osnovnim periodom π. Nule funkcije su u tačkama $x=k\pi$. Nema ekstremnih vrednosti, i na intervalu oblika $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in Z$, raste. Vertikalne asimptote su prave $x=\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in Z$. Važi $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x=+\infty$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x=-\infty$.



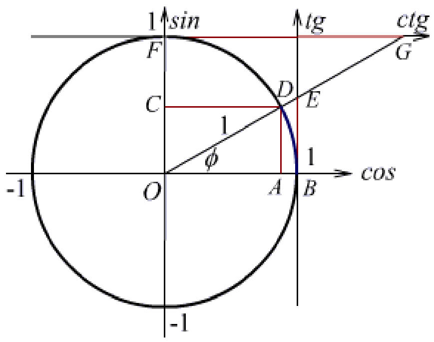
Funkcija cot $x=\frac{\cos x}{\sin x}$ je difinisana za sve $x \in R$ za koje je $\sin x \neq 0$. Skup vrednosti je R. Parna i periodična je sa osnovnim periodom π. Nule funkcije su u tačkama $x=\frac{(4k+1)\pi}{2}$. Nema ekstremnih vrednosti, i na intervalu oblika $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ opada. Vertikalne asimptote grafika su prave $x=k\pi$.



Osnovne trigonometrijske funkcije obično se definišu pomoću pravouglog trougla, na sledeći način: sin$\emptyset$=$\frac{y}{r}$, cos $\emptyset$=$\frac{x}{r}$.



Trigonometrijska kružnica



Na slici je kružnica poluprečnika jedan, koja se zove trigonometrijska kružnica.

Osnovni identiteti:

- $\sin^2\emptyset+\cos^2\emptyset=1$
- $tg\emptyset=\frac{\sin\emptyset}{\cos\emptyset}$, $ctg\emptyset=\frac{\cos\emptyset}{\sin\emptyset}$
- $sec\emptyset=\frac{1}{\cos\emptyset}$, $csc=\frac{1}{\sin\emptyset}$

Teorema 3:

1. $\overline{OA}=\cos\emptyset$, $\overline{OC}=\sin\emptyset$
2. $\overline{BE}=tg\emptyset$, $\overline{FG}=ctg\emptyset$
3. $\overline{OE}=sec\emptyset$, $\overline{OG}=csc\emptyset$

Dokaz:

1. Sledi neposredno zbog poluprečnika r=1.
2. Uočimo slične trouglove $\Delta EBO\sim\Delta DAO$, odakle $\overline{BE}:\overline{OB}=\overline{AD}:\overline{OA}$, tj. $\overline{BE}:1=\sin\emptyset:\cos\emptyset$; uočimo slične trouglove $\Delta GFO\sim\Delta OAD$, odakle $\overline{FG}:\overline{FO}=\overline{OA}:\overline{AD}$, tj. $\overline{FG}:1=\cos\emptyset:\sin\emptyset$.
3. Iz sličnih trouglova $\Delta EBO\sim\Delta DAO$ dobijamo $\overline{OE}:\overline{OB}=\overline{OD}:\overline{OA}$, tj. $\overline{OE}:1=1:\cos\emptyset$; zatim $\overline{OG}:\overline{OF}=\overline{OD}:\overline{AD}$, tj. $\overline{OG}:1=1:\sin\emptyset$.

Posebni uglovi

Ugao BOD=$\emptyset$ može neograničeno rasti dok pokretni krak ugla (OD) prolazi redom kroz prvi, drugi, treći i četvrti kvadrant, a zatim ponovo po istom krugu. Dakle, ugao $\emptyset$ može rasti do 360 idalje. Pri tome se projekcije tačke D na apcisu i ordinatu uvek računaju kao kosinus i sinus ugla $\emptyset$. To znači da je kosinus pozitivan kada je tačka D u prvom i četvrtom kvadrantu, a da je sinus pozitivan kada je tačka D u prvom i drugom kvadrantu.

kvadrant	sin	cos	tg	ctg
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

Lako je proveriti tačnost formula za svođenje vrednosti trigonometrijskih funkcija na funkcije ulova iz prvog kvadranta:

$\cos(180-\emptyset)=-\cos\emptyset$, $\sin(180-\emptyset)=\sin\emptyset$,

$\cos(180+\emptyset)=-\cos\emptyset$, $\sin(180+\emptyset)=-\sin\emptyset$,

$\cos(-\emptyset)=\cos\emptyset$, $\sin(-\emptyset)=-\sin\emptyset$.

Funkcije uglove većih od 360 stepeni formulama se svode na funkcije manjih uglova, a zatim dalje, ako je potrebno na prvi kvadrant. Zato su veoma važne trigonometrijske tablice uglova iz prvog kvadranta. Za neke od tih uglova se funkcije lakše izračunavaju pomoću sledeće tablice:

$\emptyset$	0	30	45	60	90	180	270	360
sin $\emptyset$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos $\emptyset$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg $\emptyset$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
ctg $\emptyset$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

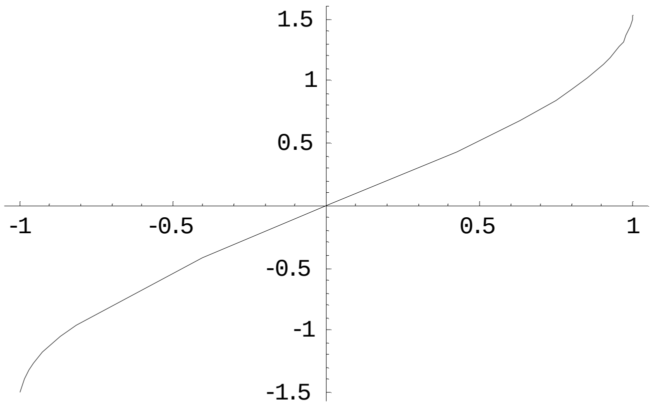
Još neka važna svojstva trigonometrijskih funkcija:

1. $$\left.\begin{aligned} \sin(x\pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x\pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \text{tg}\,(x\pm y) &= \frac{\text{tg}\,x \pm \text{tg}\,y}{1\mp \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y} \\ \text{ctg}\,(x\pm y) &= \frac{\text{ctg}\,x\,\text{ctg}\,y \mp 1}{\text{ctg}\,y \pm \text{c tg}\,x} \end{aligned}\right\}\text{Adicione formule}$$
2. $\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

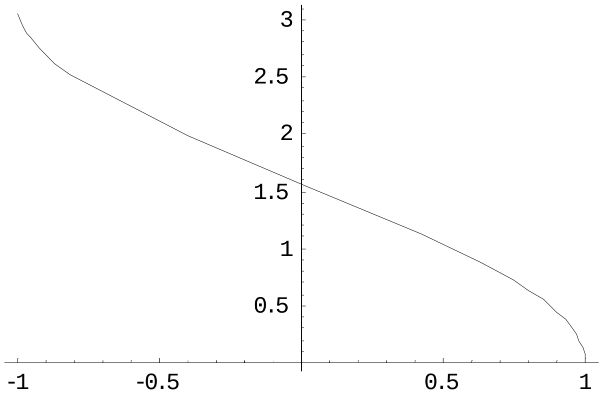
3. $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
4. $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
5. $\text{tg } x\pm\text{tg } y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\sin y}$
6. $\text{ctg } x\pm\text{ctg } y=\frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$
7. $\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$
8. $\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$
9. $\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

INVERZNE TRIGONOMETRIJSKE

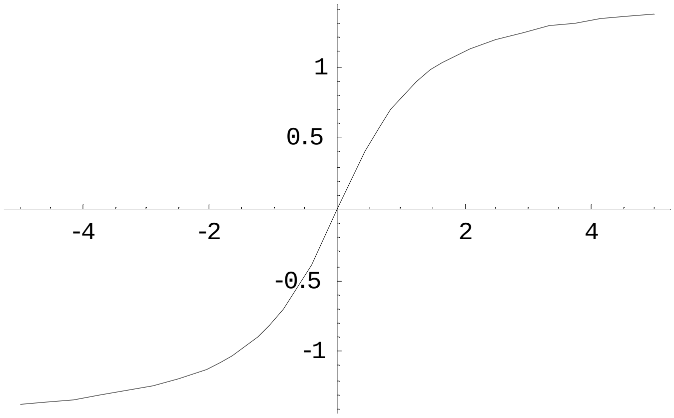
Funkcija *f(x)=arcsin x* je inverzna funkcija $F_1(x)=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, koja je restrikcija funkcije $F(x)=\sin x$, $x\in R$, na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ funkcija f raste, a njen skup vrednosti je interval $[-1,1]$. Funkcija f je neparna, rastuća i ima nulu u x=0.



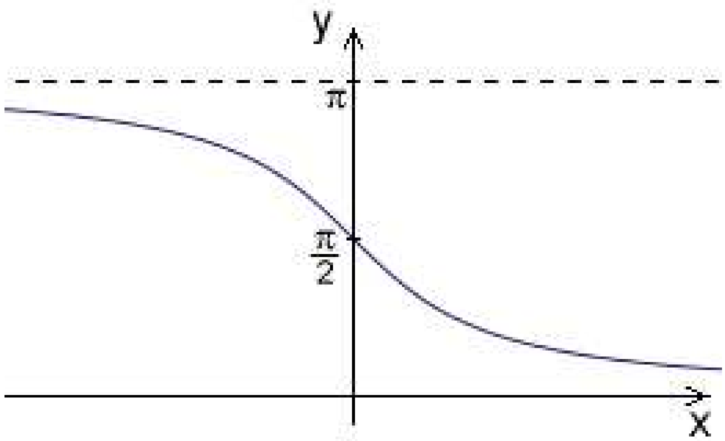
Funkcija *f(x)=arccos x* je inverzna za monotonu funkciju $F_1:[0,\pi]\to[-1,1]$, datu sa $F_1(x)=\cos x$, koja je bijekcija. Definicioni skup funkcije je interval$[-1,1]$, skup vrednosti je interval $[0,\pi]$, a funkcija arccos x je opadajuća.



Funkcija *f(x)=arctg x* je inverzna za monotonu funkciju F_1: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ →R, datu sa $F_1(x)$=tg x. Funkcija f je definisana na celom skupu R, njen skup vrednosti je $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Funkcija arctg x je rastuća i neparna.



Funkcija *f(x)=arcctg x* je inverzna za monotonu funkciju F_1:$(0,\pi)$ →R, datu sa $F_1(x)$=ctg x. Funkcija f je definisana na celom skupu R, njen skup vrednosti je $(0,\pi)$, i ova funkcija opada. Ova funkcija nije ni parna ni neparna.



LITERATURA

1. DUŠAN ADNAĐEVIĆ, ZORAN KADELBURG: *Matematička analiza I,* Beograd 1990.
2. ENDRE PAP, ĐURĐICA TAKAČI, ARPAD TAKAČI: *Analiza I za informatičare,* Novi Sad 2003.
3. PEJOVIĆ: *Analiza I,*
4. Korišćen je internet pretraživač "Google"