Univerzitet u Banjoj Luci
Elektrotehnički fakultet
Osnovi elektrotehnike 1

Vektor jačine električnog polja

Predavanje: 2. blok

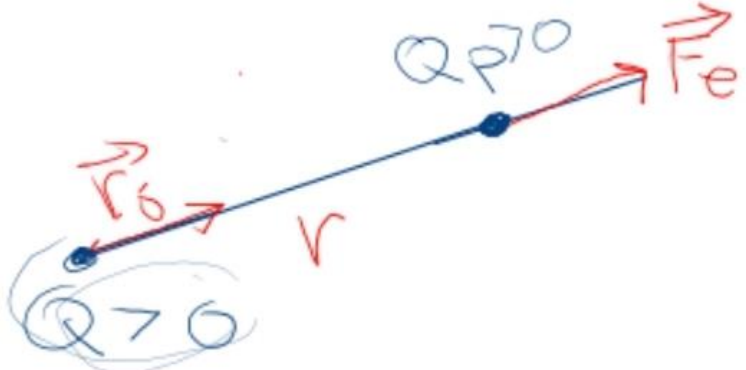
ВЕКТОР ЈАЧИНЕ ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА

$\vec{E}$

дефинише се преко ел. силе

пробно наелектрисање (Q_p) — Malo i po dimenzijama i po naelektrisanju tj. da ne mijenja raspodjelu naelektrisanja na tijelu Q

обично је $Q_p > 0$



$$\vec{F_e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\cdot Q_p}{r^2}\vec{r_0}$$

$$\vec{F_e} = Q_p\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}\right]$$

$$\vec{F_e} = Q_p\vec{E}$$

$$\frac{\vec{F_e}}{Q_p} = \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}$$

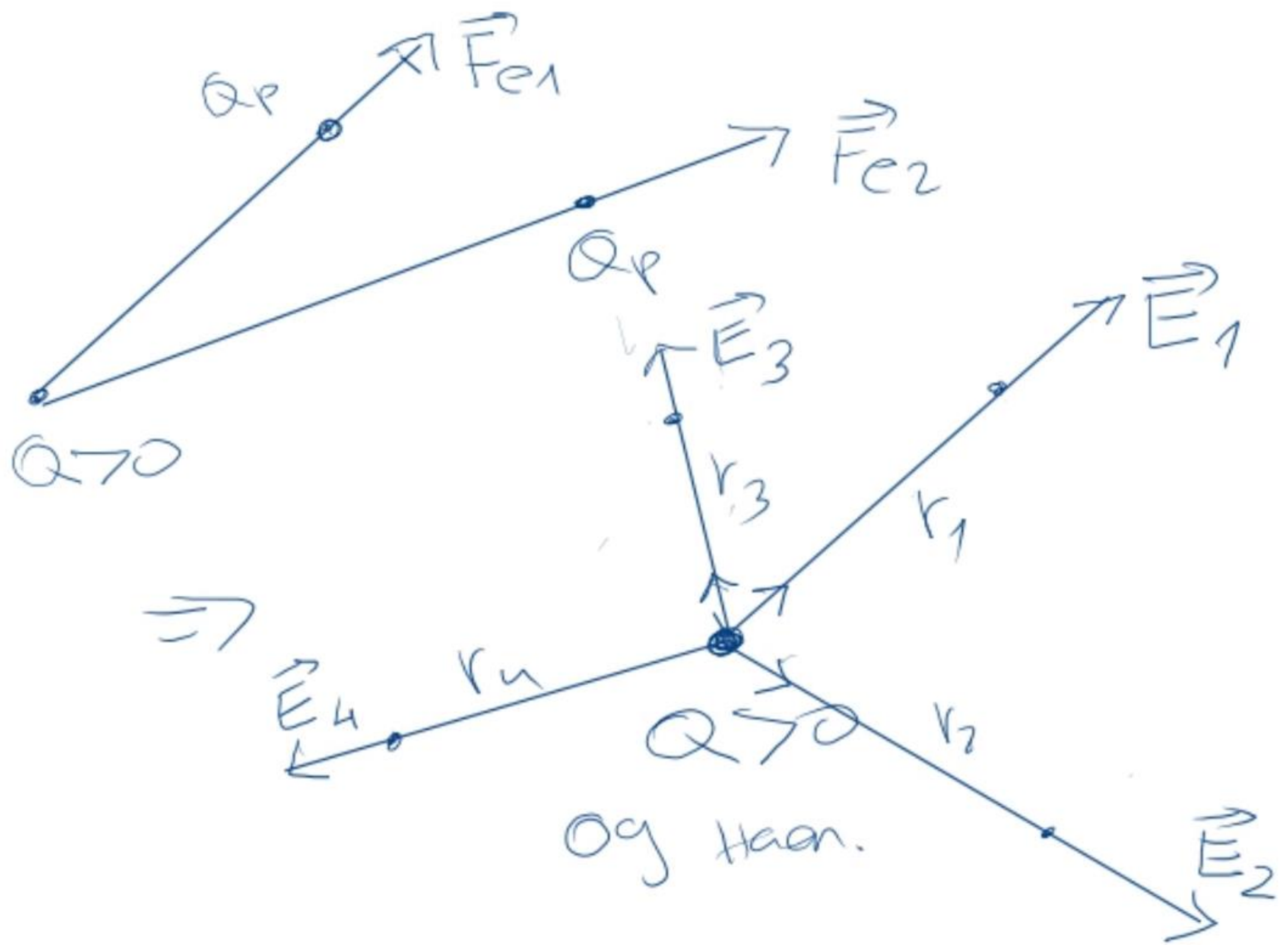
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{Q_p} \left[\frac{N}{C}\right] \text{ или } \left[\frac{V}{m}\right]}$$ волти по метру

ДЕФ. ОБРАЗАЦ

$\vec{E}$ тачкастог наелектрисања је:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}}$$

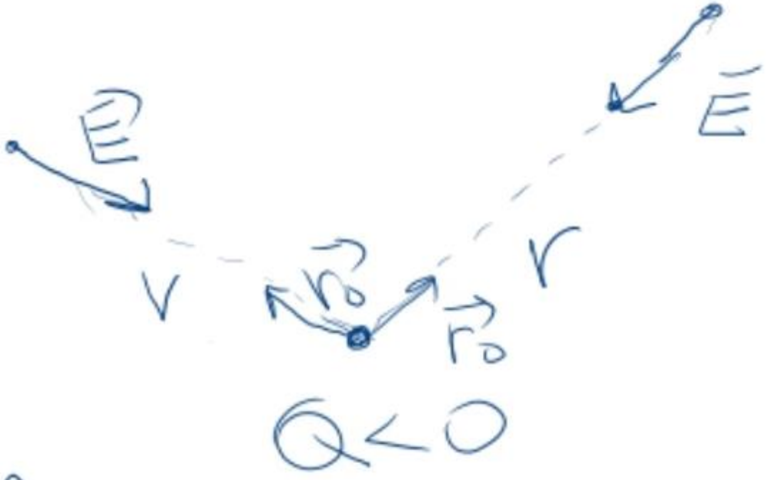
$\vec{r_0}$ – од Q тј. од извора ка тачки у којој рачунамо поље



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}$$

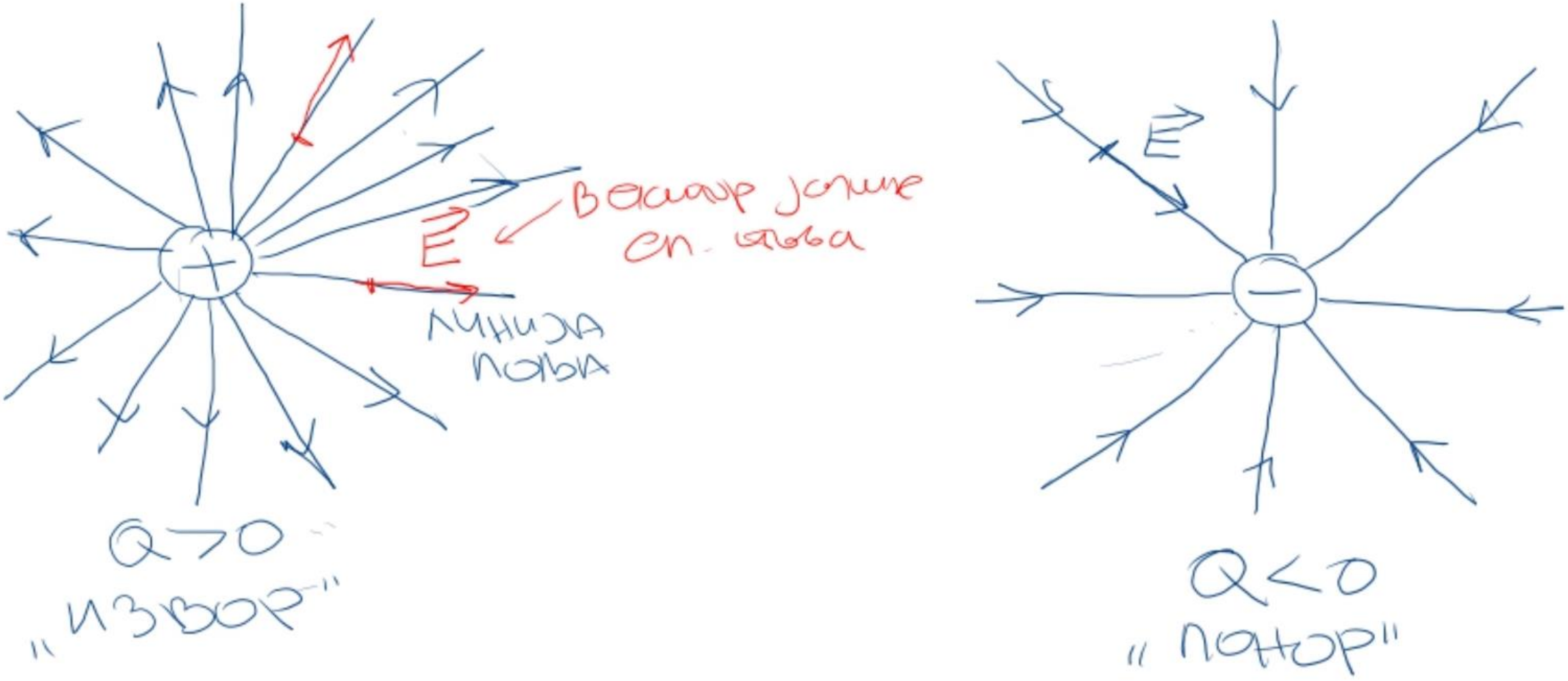
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}$$

за $Q<0 \Rightarrow \vec{E}$ и $\vec{r_0}$ имају супротне смерове



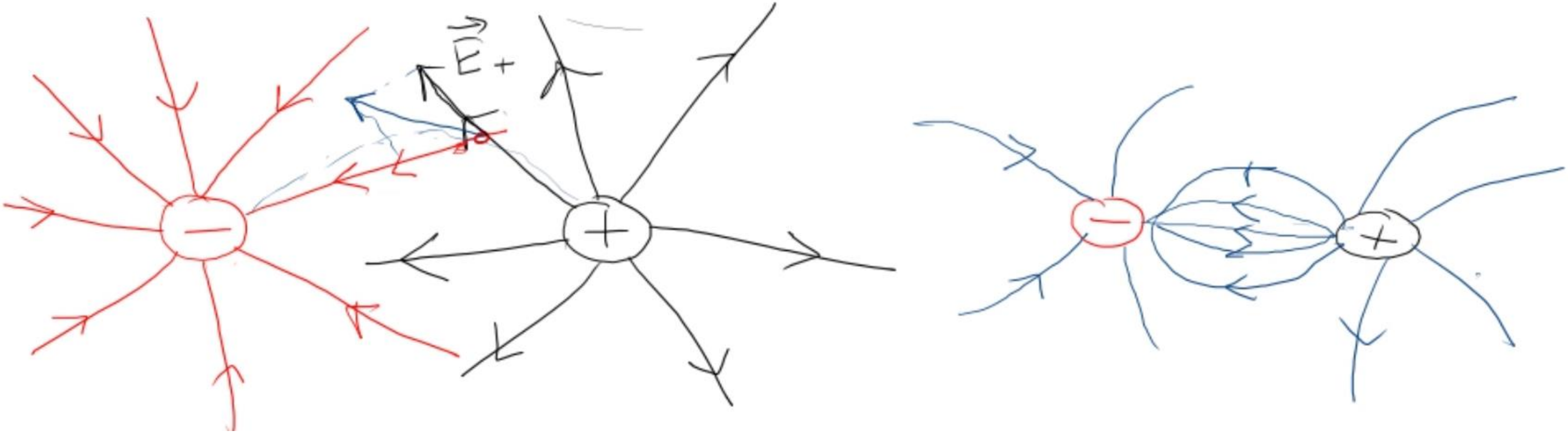
десетак MV/m

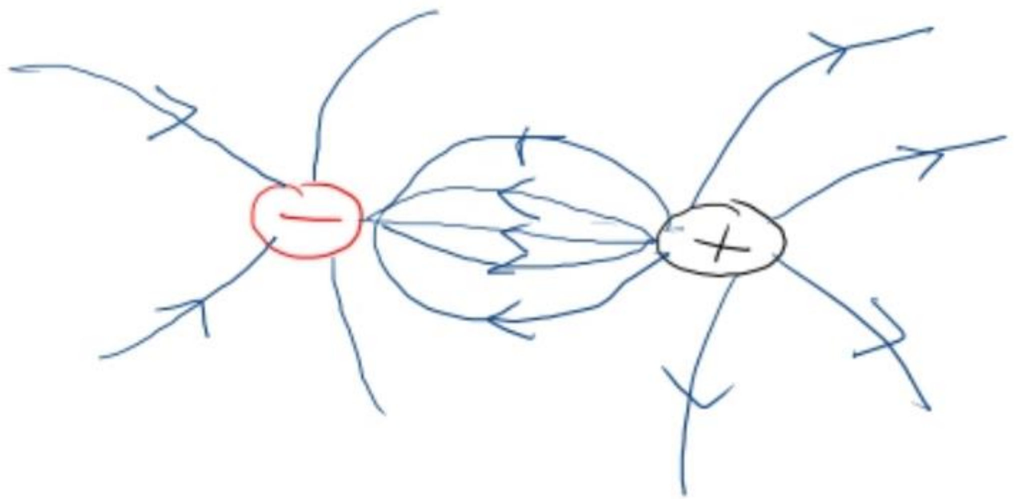
ЛИНИЈЕ ВЕКТОРА ЈАЧИНЕ ЕЛ. ПОЉА

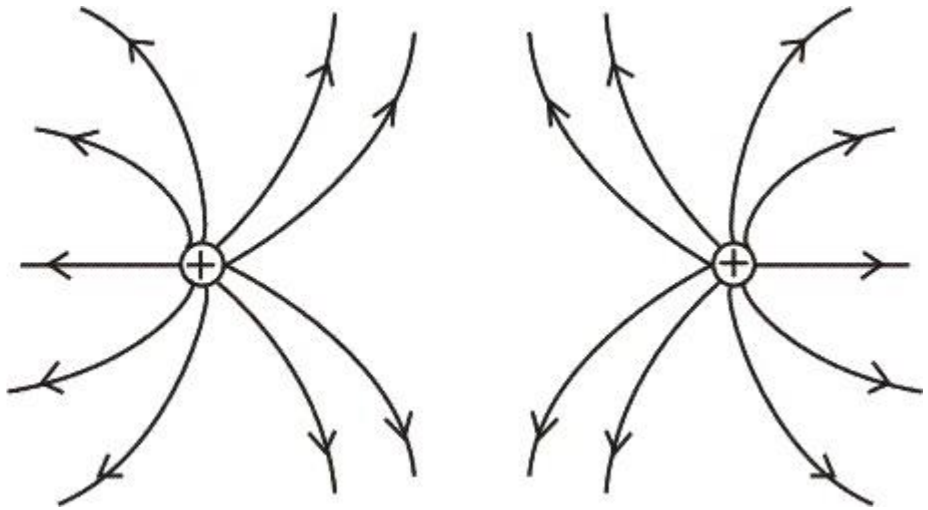


Linije vektora E definišu se kao zamišljene krive linije na koje je vektor **E** tangetan.

Линије вектора јачине ел. поља два тачкаста наел.

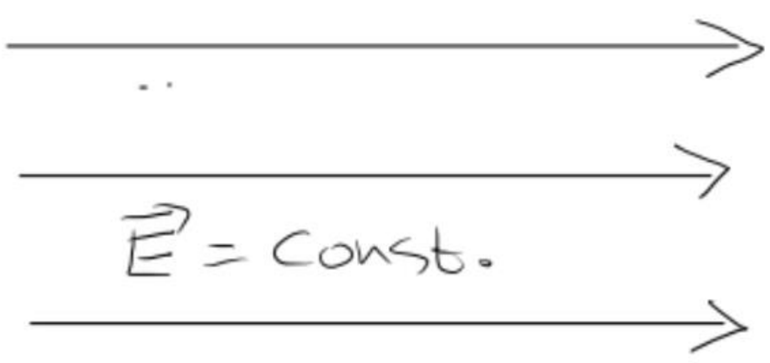


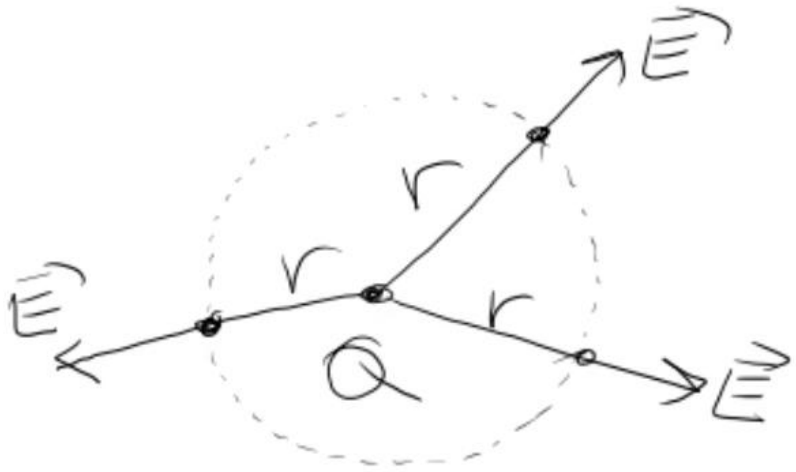




- Хомогено ел. поље

$\vec{E} = const.$ симболично означење хомогеног ел. поља





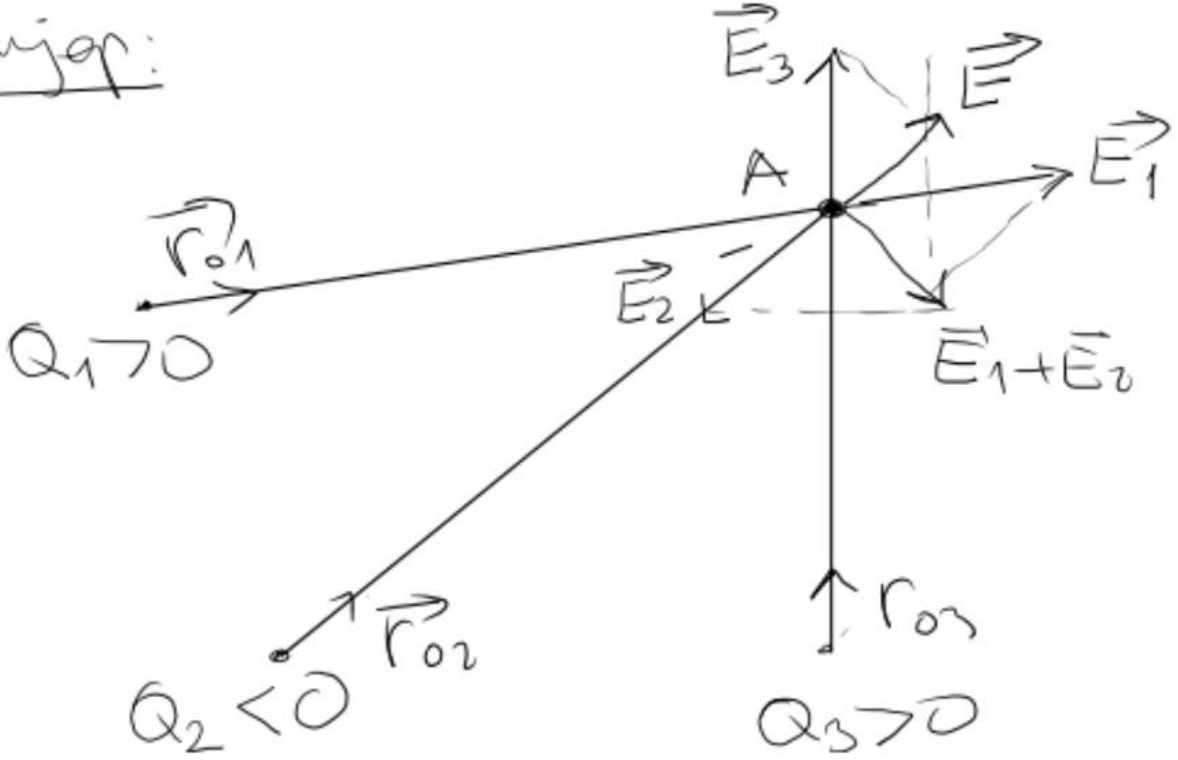
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Da li je homogeno?

У случају више тачкастих наел. примењујемо принцип суперпозиције:

ВЕКТОРСКОМ ЗБИРУ

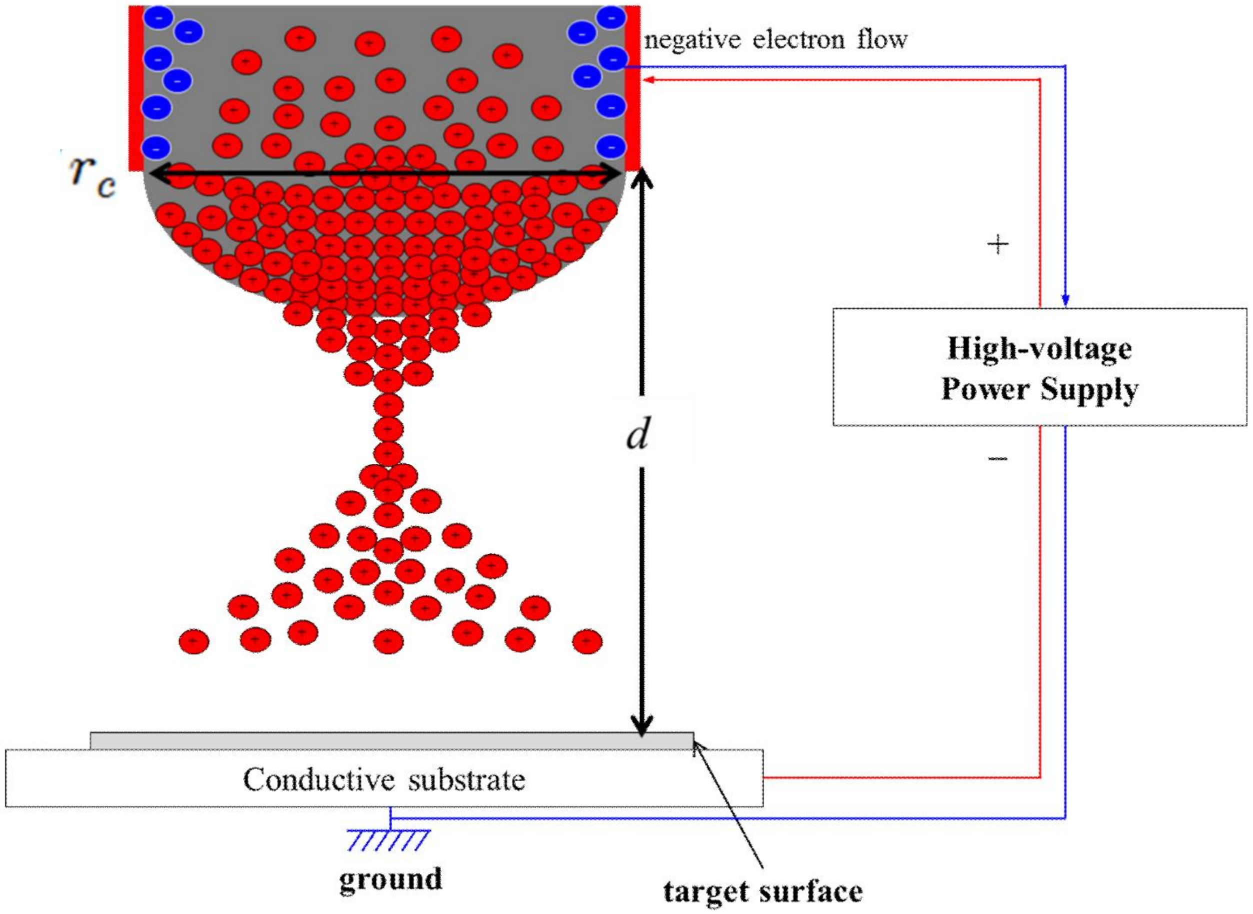
Пример:

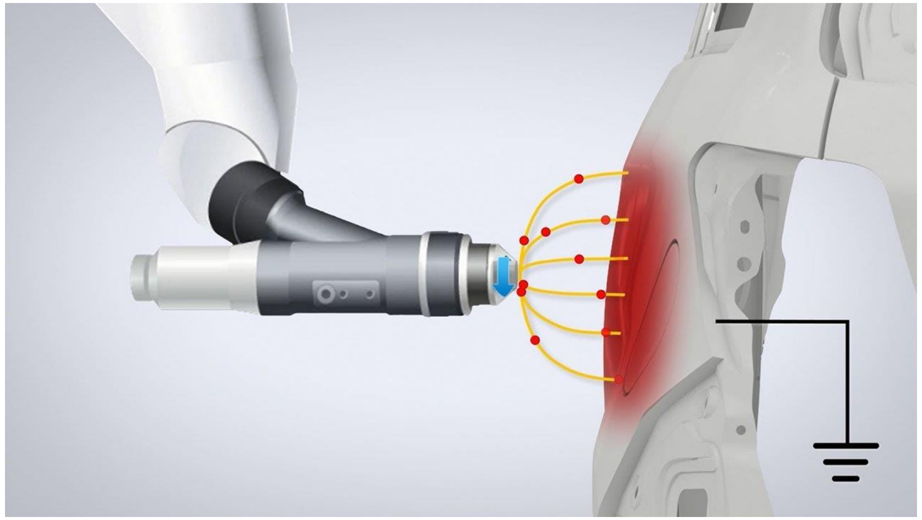


$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$$

Praktična primjena

- Eng. *Electrostatic Spray Deposition*

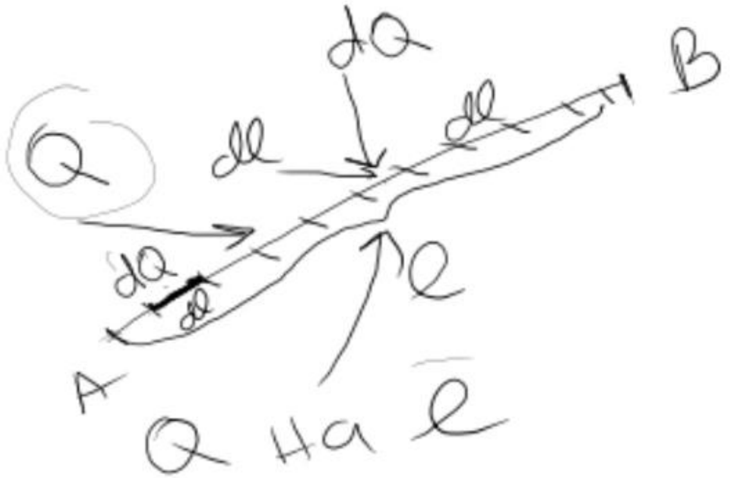




КОНТИНУАЛНО РАСПОДЈЕЉЕНО НАЕЛ. И ЊИХОВО ЕЛ. ПОЉЕ

Густине наел.

– линијска расподјела наелектрисања



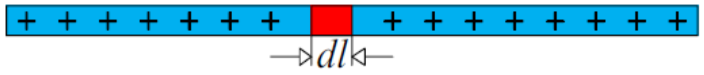
линијска или подужна густина

$$Q' = \frac{dQ}{dl} \left[\frac{C}{m}\right]$$

$$Q = \int_l Q' \cdot dl$$

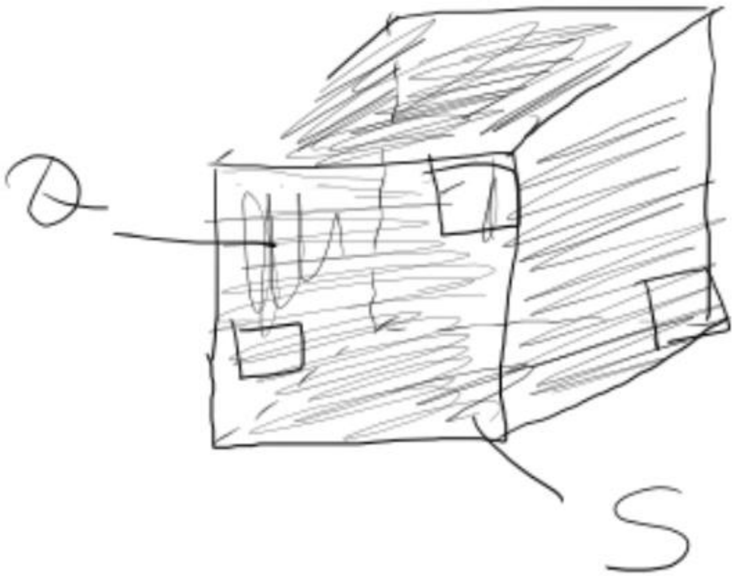
ако је наел. равномјерно распоређено дуж l

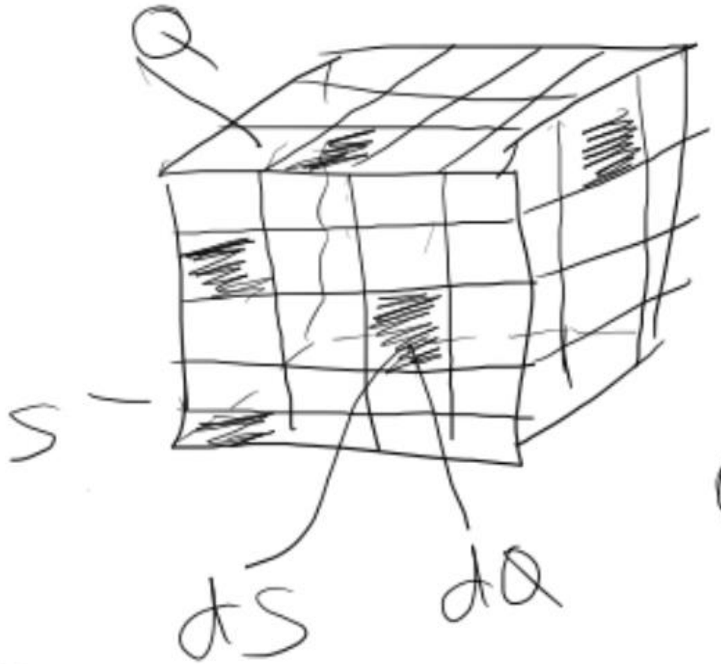
$$Q' = \frac{Q}{l} \qquad Q' = \text{const.}$$



КОНТИНУАЛНО РАСПОДЈЕЉЕНО НАЕЛ. И ЊИХОВО ЕЛ. ПОЉЕ

- површинска расподјела наел.



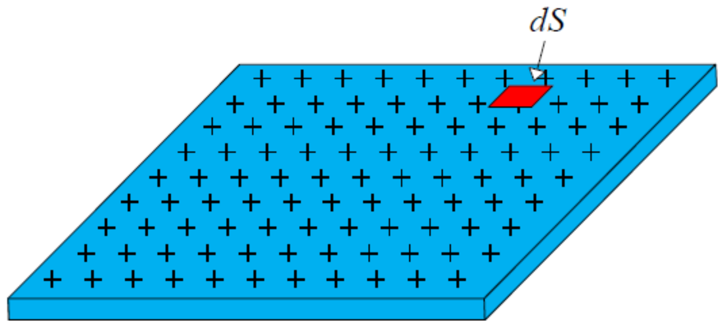


σ или η или ρ_S

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$Q = \oint_S \sigma \, dS$$

$$\sigma = \text{const.} \Rightarrow Q = \sigma \cdot S$$

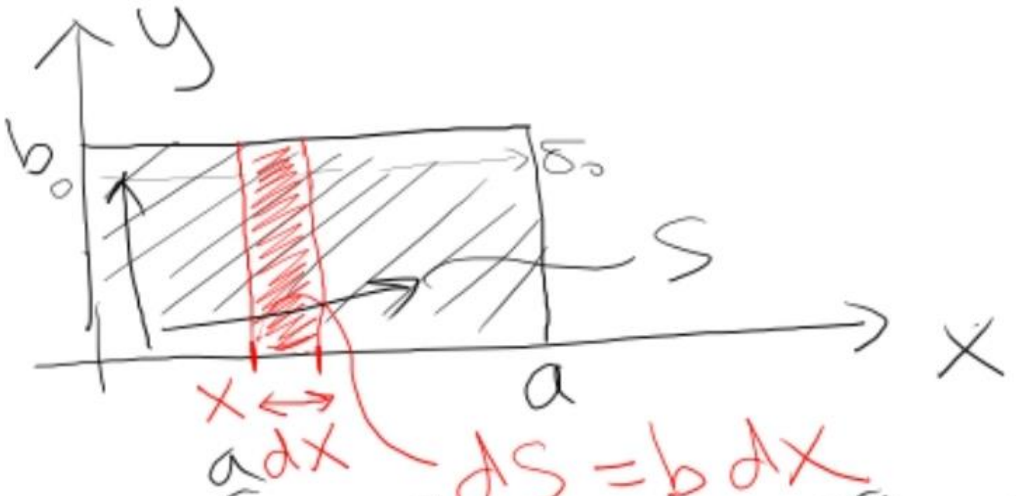


$dQ=\sigma \cdot dS$

КОНТИНУАЛНО РАСПОДЕЉЕНО НАЕЛ. И ЊИХОВО ЕЛ. ПОЉЕ

Пример: a и b $\quad \sigma(x) = \sigma_0 \dfrac{x^2}{a^2}$ за $0 < x < a$

σ_0 је const. $Q = ?$



$$Q = \int_S \sigma \, dS = \int_S \sigma_0 \frac{x^2}{a^2} \, dS$$

$\Rightarrow dS$ изразити преко x

$$Q = \int_0^a \sigma_0 \frac{x^2}{a^2} b \, dx = \int_0^a \sigma_0 \frac{x^2}{a^2} b \, dx = \frac{b\sigma_0}{a^2} \int_0^a x^2 \, dx = \frac{b\sigma_0}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a$$

$$\Rightarrow Q = \frac{b \sigma_0 a^3}{3a^2} = \frac{1}{3} \sigma_0 a b$$

КОНТИНУАЛНО РАСПОДЕЉЕНО НАЕЛ. И ЊИХОВО ЕЛ. ПОЉЕ

- запреминска расподјела наел.

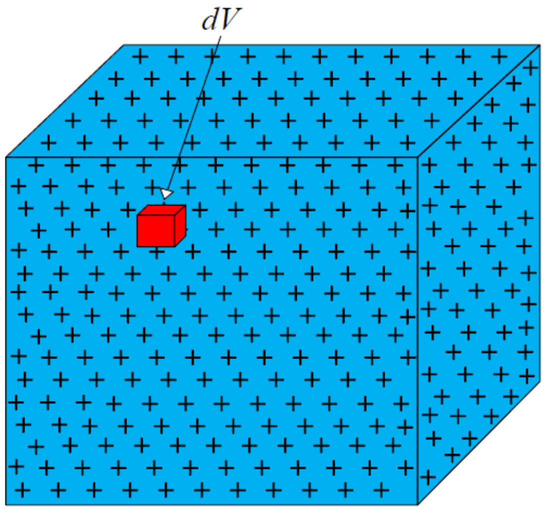
запреминска густина

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \left[\frac{C}{m^3}\right]$$

$$Q = \int_V \rho \, dV$$

$\rho = const.$

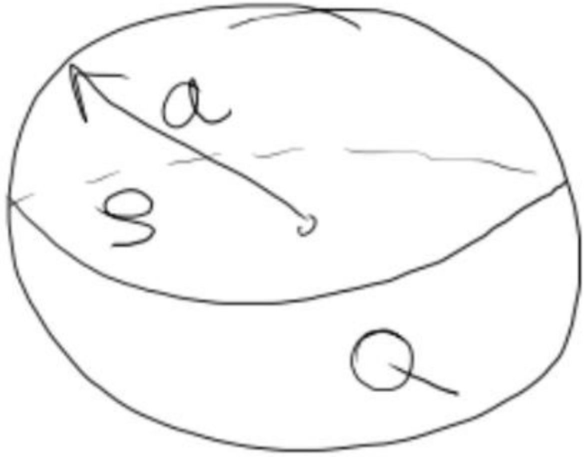
$\Rightarrow Q = \rho \cdot V$



$dQ = \rho \cdot dV$

КОНТИНУАЛНО РАСПОДЕЉЕНО НАЕЛ. И ЊИХОВО ЕЛ. ПОЉЕ

Пример: a хомогено/нехомогено



1° $\rho = \text{const.}$

$$Q = \int \rho \, dV = \rho \cdot V = \rho \frac{4}{3} a^3 \pi$$

2° $\rho \neq \text{const.}$

dV

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{a}$$

$\rho_0 = \text{const.}$

КОНТИНУАЛНО РАСПОДЕЉЕНО НАЕЛ. И ЊИХОВО ЕЛ. ПОЉЕ

Пример: а хомогено/нехомогено

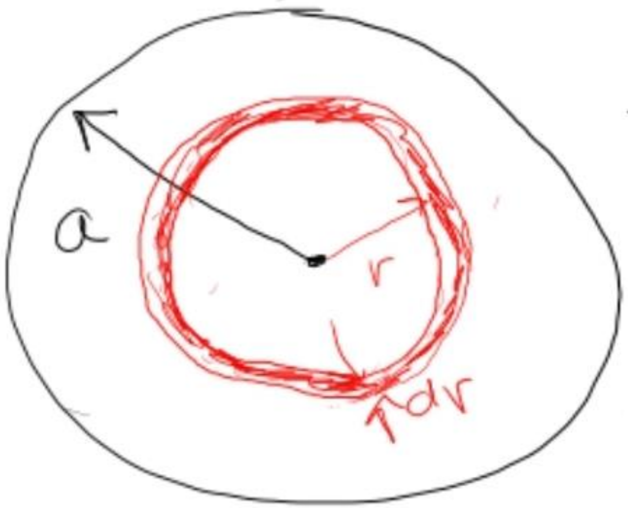
$$Q=\int_0^a \rho_0 \frac{r}{a} 4r^2\pi\, dr$$

$$=\frac{4\pi\rho_0}{a}\frac{r^4}{4}\Big|_0^a$$

$$Q=\pi\rho_0 a^3$$

$$\rho(r)=\rho_0\frac{r}{a}$$

$\rho_0 = const.$



$$Q=\int_V \rho\, dV$$

$$=\int_V \rho_0\frac{r}{a}\, dV$$

$$dV \rightarrow dV(r)$$

$$dV=\frac{4}{3}(r+dr)^3\pi-\frac{4}{3}r^3\pi$$

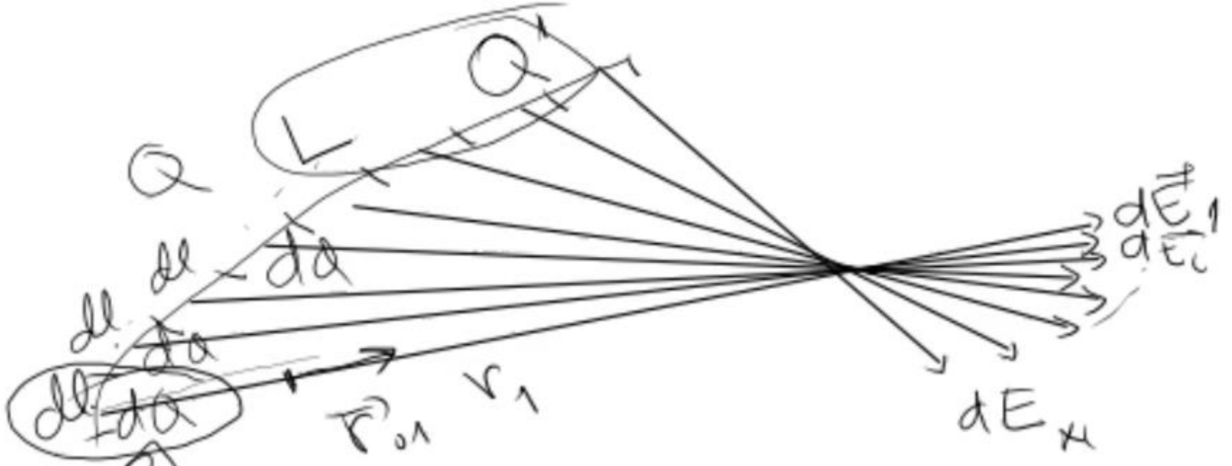
$$dV=\cancel{\frac{4}{3}r^3\pi}+4r^2\pi\, dr+\underbrace{4r(dr)^2\pi}_{\to 0}+\underbrace{\frac{4}{3}(dr)^3\pi}_{\to 0}$$

$$\cancel{-\frac{4}{3}r^3\pi}$$

$dr \rightarrow 0$

$$dV\simeq 4r^2\pi\, dr = S\,dr$$

ПОСТУПАК ОДРЕЂИВАЊА ЕЛ. ПОЉА КОНТИНУАЛНО РАСПОДЈЕЉЕНИХ НАЕЛ.



посматра се као тач. наел.

$$E = \int_1^N d\vec{E}_i$$

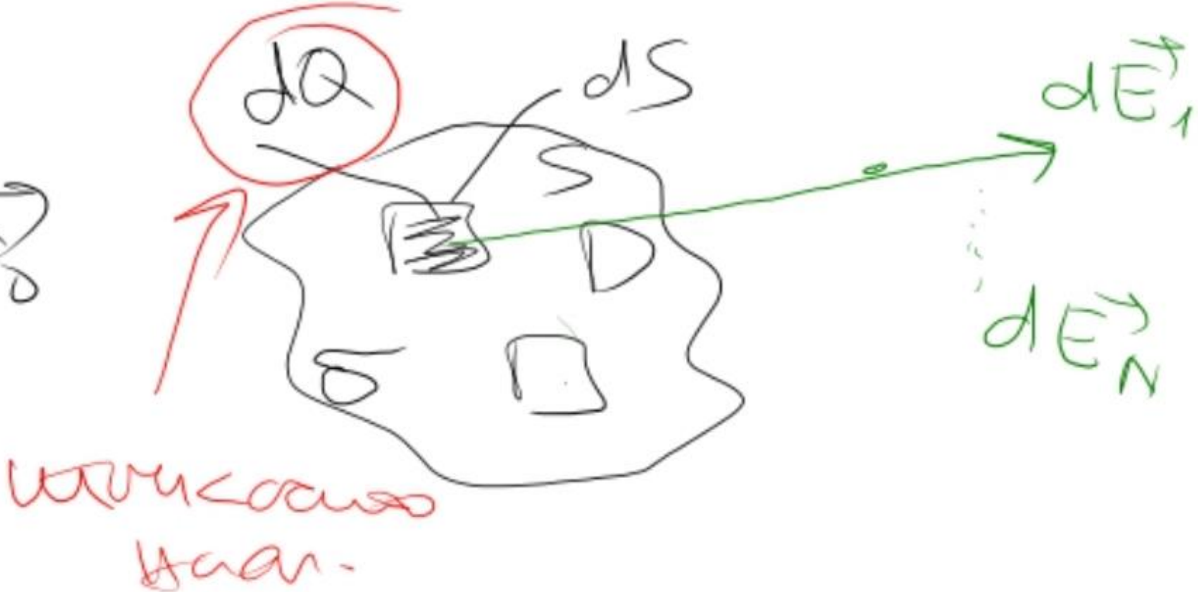
$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 = \frac{Q' \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}_1 = \ldots \\ d\vec{E}_2 = \\ \vdots \\ d\vec{E}_n = \end{array}\right\} \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{Q' \cdot dl}{r^2}\vec{r}_0$$

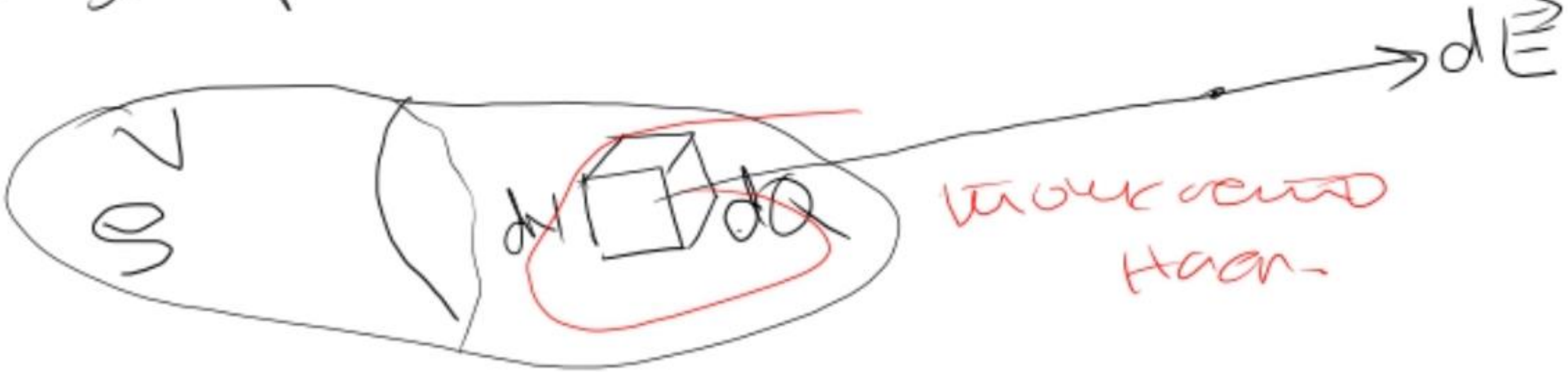
ПОСТУПАК ОДРЕЂИВАЊА ЕЛ. ПОЉА КОНТИНУАЛНО РАСПОДЕЉЕНИХ НАЕЛ.

За површинско наел:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma\, dS}{r^2}\vec{r_0}$$



За запреминско наел:

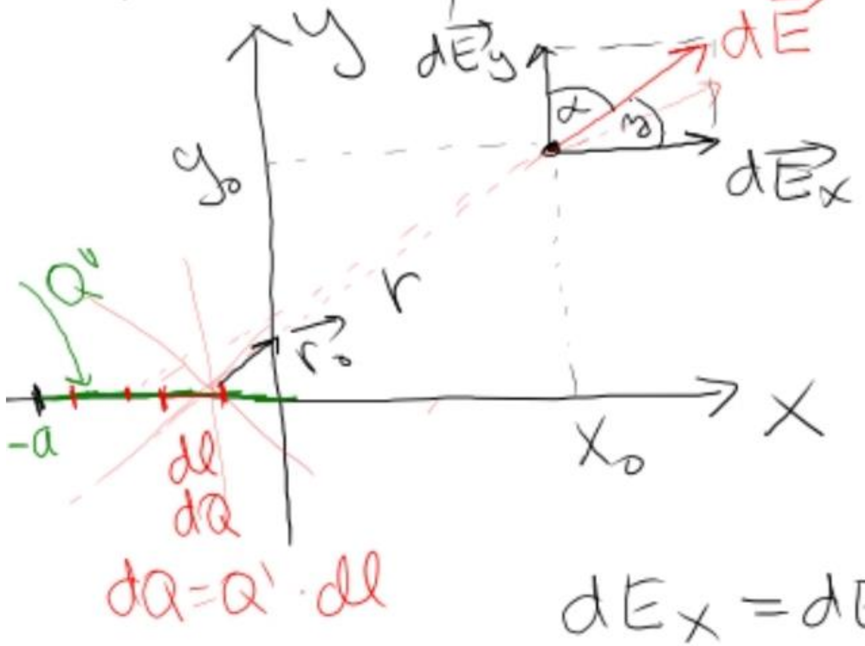


ПОСТУПАК ОДРЕЂИВАЊА ЕЛ. ПОЉА КОНТИНУАЛНО РАСПОДЕЉЕНИХ НАЕЛ.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{r_k^2}\vec{r}_{0k}}_{} + \underbrace{\int_L \frac{Q' dl}{r^2}\vec{r}_0}_{} + \underbrace{\int_S \frac{\sigma dS}{r^2}\vec{r}_0}_{} + \underbrace{\int \frac{\rho dV}{r^2}\vec{r}_0}_{} \right)$$

ВЕКТОРСКА СУПЕРПОЗИЦИЈА

Пример: a, Q' $\vec{E}$ у $A(x_0, y_0)$



$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y \qquad E_x = \int dE_x$$

$$E_y = \int dE_y$$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q' \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

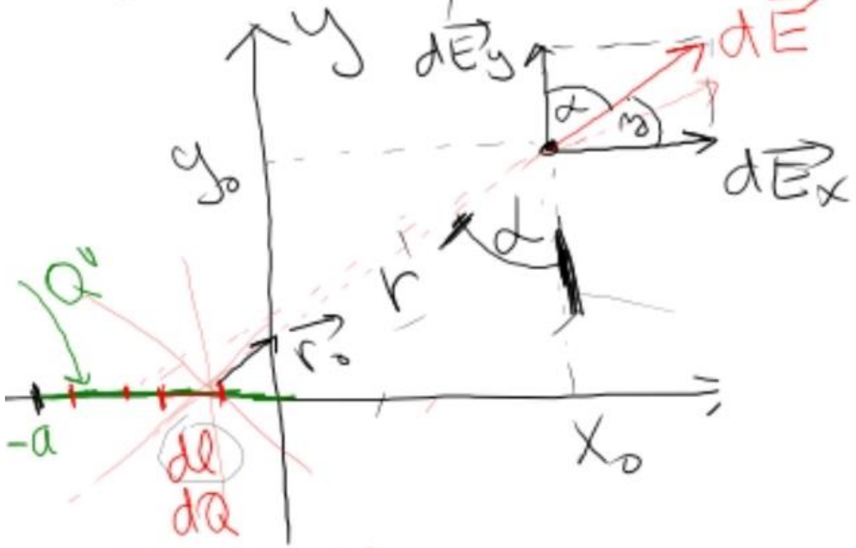
$$dE_x = dE\cos\gamma = dE \cdot \sin\alpha$$

$$dE_y = dE\sin\gamma = dE \cdot \cos\alpha$$

$$dE_x = \frac{Q' \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 \underline{r^2}}\sin\underline{\alpha} \qquad dE_y = \frac{Q' \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha$$

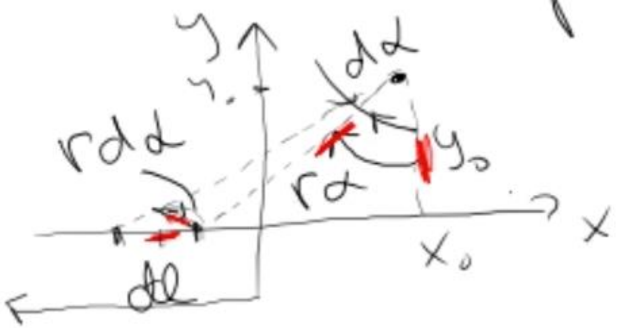
dl, r и α $\longrightarrow$

$\underline{\text{Примјер}}$: a, Q' $\vec{E}$ у $A(x_0, y_0)$



$dQ = Q' \cdot dl$

$$\cos\alpha = \frac{y_0}{r} \Rightarrow r = \frac{y_0}{\cos\alpha}$$



$$\cos\alpha = \frac{r d\alpha}{dl}$$

$$dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow dl = \frac{r^2 \cdot d\alpha}{y_0}$$

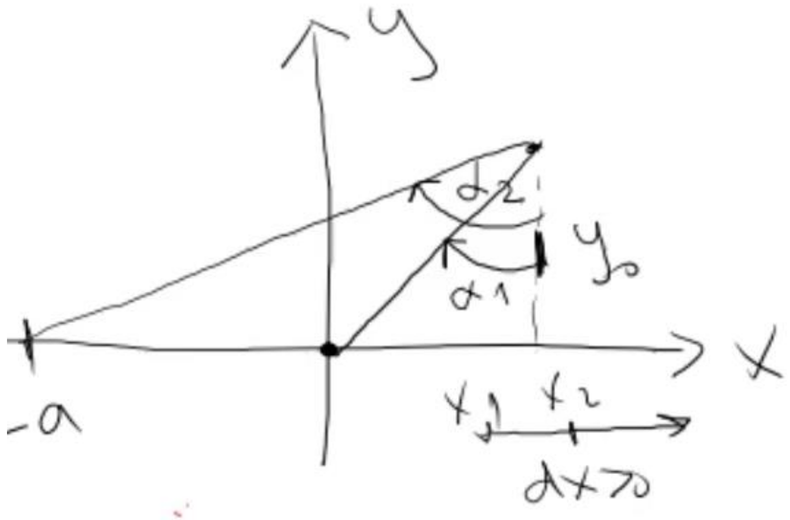
$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_x$$

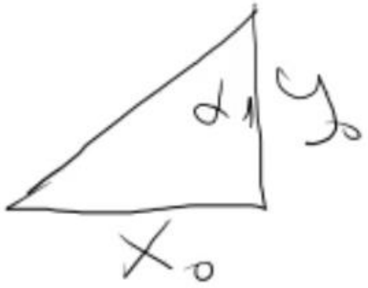
$$dE_x = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r^2}} \cdot \frac{\cancel{r^2} d\alpha}{y_0} \cdot \sin\alpha = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 y_0} \sin\alpha \, d\alpha$$

$$E_y = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_y$$

$$dE_y = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r^2}} \cdot \frac{\cancel{r^2} d\alpha}{y_0} \cos\alpha = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 y_0} \cos\alpha \, d\alpha$$

Примјер: a, Q' $\vec{E}$ у $A(x_0, y_0)$





$$\cos\alpha_1 = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_x$$

$$E_y = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_y$$

$$E_x = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 y_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

$$E_y = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 y_0}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)$$