TERMIN 2 - zadaci za samostalan rad

★★

Zadatak 1.
Za svaki od narednih linearnih operatora odrediti matricu u odnosu na standardnu bazu, kao i odgovarajući prostor slika i jezgra:

a) $\mathcal{O} : U \to V$ je operator koji svaki vektor $u \in U$ preslikava u $\overrightarrow{0}_V$, pri čemu je $dim\,(U) = m$ i $dim\,(V) = n$.

b) $\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je linearni operator koji vrši refleksiju svih vektora u prostoru u odnosu na xy ravan.

c) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je operator definisan sa $\mathcal{A}\,(a, b, c) = (2a - b + c, a + 2b - 3c)$.

★★

Zadatak 2.
Dato je linearno preslikavanje $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sa

$$\mathcal{A}\,(1,1) = (1,1) \quad \text{i} \quad \mathcal{A}\,(1,-2) = (1,4)\,.$$

Odrediti matricu preslikavanja $\mathcal{A}$ u odnosu na standardnu bazu.

★★

Zadatak 3.

Neka je V prostor svih matrica $A \in \mathcal{M}_2$ čije jezgro sadrži vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Odrediti bazu i dimenziju prostora V.

★★★

Zadatak 4.
Ispitati da li postoji matrica A takva da je

$$Im(A) = Lin\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right) \quad \text{i} \quad Ker(A) = Lin\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right).$$

Ako postoji, odrediti jednu takvu matricu.

★★★

Zadatak 5.
Neka je dat linearni operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definisan sa

$$\mathcal{A}(x, y, z, t) = (x - 3y + z + 2t, x - y + 2t, -x - 3y + 2z - 2t).$$

Odrediti bazu i dimenziju slike i jezgra linearnog operatora $\mathcal{A}$.

★★★

Zadatak 6.
Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator definisan sa

$$\mathcal{A}\,(x, y) = (x - 2y, 2x + y, x + y)\,.$$

Ako su S i T standardne baze prostora $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ redom i

$$S' = \big\{(1,-1)\,, (0,1)\big\}$$

i

$$T' = \big\{(1,1,0)\,, (0,1,1)\,, (1,-1,1)\big\}$$

odrediti

a) $[\mathcal{A}]_{S,T}$

b) $[\mathcal{A}]_{S,T'}$

c) $[\mathcal{A}]_{S',T}$

d) $[\mathcal{A}]_{S',T'}$.

★ ★ ★

Zadatak 7.
Neka je
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Odrediti baze fundamentalnih potprostora matrice A.

★ ★ ★

Zadatak 8.
Neka je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 2 & -7 & 7 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti $def\left(A^T\right)$.

b) Odrediti $rank\,(A)$.

c) Da li kolone $A_{\bullet 4}$, $A_{\bullet 5}$, $A_{\bullet 6}$, $A_{\bullet 7}$ čine bazu prostora $\mathbb{R}^4$?

★ ★ ★ ★

Zadatak 9.
Dato je linearno preslikavanje $\mathcal{A} : \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right) \to \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ definisano sa
$$\mathcal{A}(X) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Odrediti baze jezgra $Ker(\mathcal{A})$ i slike $Im(\mathcal{A})$.

★ ★ ★ ★

Zadatak 10.
Dato je preslikavanje $\mathcal{T} : P_3 \to M_2(\mathbb{R})$ sa
$$\mathcal{T}\left(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) = \begin{bmatrix} a_0 + a_3 - a_2 & a_0 + 2a_1 - a_2 \\ a_3 & a_0 - a_2 \end{bmatrix}.$$

a) Dokazati da je $\mathcal{T}$ linearni operator.

b) Odrediti matricu preslikavanja $\mathcal{T}$.

c) Odrediti jezgro, sliku, defekt i rang preslikavanja $\mathcal{T}$.