Глава 1

Векторски простори

1.1 Векторски простори

1. Нека је $\mathbb{R}_0^+$ скуп свих ненегативних реалних бројева. Доказати да је $(\mathbb{R}_0^+, +, \cdot, \mathbb{R})$ реалан векторски простор ако су операције дефинисане са

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+)\ x + y = x \cdot y,$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}_0^+)\ \alpha \cdot x = x^\alpha.$$

2. Нека су $\varphi_1, \varphi_2 \in [o, 2\pi)$ такви да $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Нека је $S = \{z \in \mathbb{C} : Arg(z) \in [\varphi_1, \varphi_2]\}$. Испитати да ли је $(S, +, \cdot, \mathbb{R})$ векторски простор.

1.2 Векторски потпростори

1. Нека је $W \subset \mathbb{R}^3$ скуп свих (a, b, c) таквих да је систем

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 4x + 5y + 6z = b \\ 7x + 8y + 9z = c \end{cases}$$

сагласан. Доказати да је W векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$.

2. Нека је $W \subset \mathbb{R}^3$ скуп свих (a, b, c) таквих да је систем

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 4x + 5y + 6z = b \\ 6x + 9y + 12z = c \end{cases}$$

   сагласан. Доказати да је W векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$.

3. Нека је дат простор V и његова два потпростора W_1 и W_2. Унија два потпростора $W_1 \cup W_2$ је потпростор ако и само ако важи $W_1 \subset W_2$ или $W_2 \subset W_1$. Доказати.

4. Навести примјер два нетривијална потпростора простора ${}_{3\times 3}$ таква да им је унија потпростор.

1.3 Линеарна зависност и независност вектора

1. У векторском простору $P_3[\mathbb{R}]$ задани су вектори $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 3x^2$ и $p_3(x) = x + x^2 - 3x^3$. Одредити вектор $p_4(x)$ тако да вектори буду линеарно независни.

1.4 Линеарни омотач

1. Нека је $W = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma+\delta \\ \beta+\gamma & \alpha+\beta & \beta+\gamma \\ \gamma+\delta & \beta+\gamma & \alpha+\beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$. Испитати да ли је W векторски потпростор од $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ и ако јесте представити га у облику

линеала ако је то могуће.

2. За потпростор W из претходног задатка одредити потпростор U такав да важи $W \oplus U = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

3. Нека је V векторски простор и нека су $S_1, S_2 \subseteq V$ подскупови скупа V. Тада важи: ако је $S_1 \subseteq S_2$ тада је $Lin(S_1)$ потпростор од $Lin(S_2)$. Доказати.

4. Нека је V векторски простор и нека су $S_1, S_2 \subseteq V$ подскупови скупа V. Тада важи: ако је $S_1 \subseteq S_2$ и $S_2 \subseteq Lin(S_1)$ тада је $Lin(S_1) = Lin(S_2)$. Доказати.

1.5 База и димензија векторског простора

1. Нека су $B = (b_1, b_2, b_3)$ и $C = (c_1, c_2, c_3)$ двије различите базе (тродимензионог) векторског простора V при чему важи

$$\begin{cases} c_1 = b_1 + 3b_2 + 3b_3 \\ c_2 = 4b_2 + 5b_3 \\ c_3 = 2b_3. \end{cases}$$

Одредити скуп свих вектора простора V који имају исте координате у обије базе. Испитати да ли је тај скуп векторски простор и ако јесте одредити му димензију и базу.

2. Нека је $B_1 = \{b_1, b_2, b_3\}$ база реалног векторског простора V. Показати да је скуп вектора $B_2 = \{c_1, c_2, c_3\}$, при чему важи $c_1 = b_1 + 2b_2 + 3b_3$, $c_2 = b_1 + 3b_2 + 2b_3$ и $c_3 = 2b_1 + 3b_2 + b_3$, такође база истог векторског простора. Одредити координате вектора $v = 10b_1 + 15b_2 + 14b_3$ по бази B_2.

3. Одредити једну базу и димензију простора W из задатка 1 из Векторских потпростора.

4. Одредити једну базу и димензију простора W из задатка 2 из Векторских потпростора.

1.6 Збир и пресјек потпростора

1. (30.01.2017.) Наћи димензије и по једну базу збира и пресјека линеарних омотача скупова вектора у $\mathbb{R}^4$

$$S = \Big\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,3,1,3)\Big\}$$

$$T = \Big\{(1,2,0,2),(1,2,1,2),(3,1,3,1)\Big\}.$$

2. Нека је $\{b_1, b_2, b_3\}$ база векторског простора V. Испитати да ли је $Lin\{b_1 + b_2 + b_3, b_3 + b_2 + b_1, b_3\} \cap Lin\{b_1 + b_2, b_1 - b_2\}$ потпростор простора V. Ако јесте, одредити му димензију и базу.

3. Нека је $\{b_1, b_2, b_3\}$ база векторског простора V. Нека су дати вектори $v_1 = b_1 + b_2 + b_3$ и $v_2 = 3b_1 - 2b_2$. Одредити потпростор W такав да важи $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ ако је $U = Lin\{v_1, v_2\}$.

4. Нека је $W_1 = Lin\{(1-1,-3),(3,0,-3),(1,2,3),(4,5,6)\}$ и $W_2 = Lin\{(6,3,7),(0,0,11),(-4,-2,0)\}$. Одредити димензију и базу простора $W_1 + W_2$.