TERMIN 5 - zadaci za samostalan rad - rješenja

★

Zadatak 1.
Ispitati sljedeće algebarske strukture:

a) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$,

b) $(\mathbb{R}^+,\cdot)$,

c) $(\mathbb{Z},+)$,

d) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},/)$.

Rješenje

a) Algebarska struktura $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ je Abelova grupa.

1. *Zatvorenost* $\big(\forall x,y\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\big)\ \ x\cdot y\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$
Kako je operacija množenja zatvorena na skupu $\mathbb{C}$, vrijedi $x\cdot y\in\mathbb{C}$. Kako je $x\neq 0$ i $y\neq 0$, vrijedi $x\cdot y\neq 0$ pa zatvorenost vrijedi.
2. *Komutativnost* $\big(\forall x,y\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\big)\ \ x\cdot y=y\cdot x$
Kako je $\mathbb{C}\setminus\{0\}\subset\mathbb{C}$ i kako komutativnost množenja vrijedi na skupu $\mathbb{C}$, vrijedi komutativnost i na skupu $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
3. *Asocijativnost* $\big(\forall x,y,z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\big)\ \ (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$
Kako je $\mathbb{C}\setminus\{0\}\subset\mathbb{C}$ i kako asocijativnost množenja vrijedi na skupu $\mathbb{C}$, vrijedi asocijativnost i na skupu $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
4. *Neutralni element* $\big(\exists!\,e\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\big)\big(\forall x\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\big)\ \ x\cdot e=e\cdot x=x$
Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tako da je $x\cdot e=x$. Vidimo da je $e=1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ neutralni element.
5. *Inverzni element* $\big(\exists\,n\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\big)\big(\forall x\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\big)\ \ x\cdot n=n\cdot x=e$
Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $n\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tako da je $x\cdot n=e=1$. Odavde je $n=\frac{1}{x}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ inverzni element, jer je $x\neq 0$.

b) Algebarska struktura $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ je Abelova grupa.

1. *Zatvorenost* $\big(\forall x,y\in\mathbb{R}^+\big)\ \ x\cdot y\in\mathbb{R}^+$
Kako je proizvod dva pozitivna realna broja takođe pozitivan realan broj, zatvorenost vrijedi.
2. *Komutativnost* $\big(\forall x,y\in\mathbb{R}^+\big)\ \ x\cdot y=y\cdot x$
Kako je $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$ i kako komutativnost množenja vrijedi na skupu $\mathbb{R}$, vrijedi komutativnost i na skupu $\mathbb{R}^+$.
3. *Asocijativnost* $\big(\forall x,y,z\in\mathbb{R}^+\big)\ \ (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$
Kako je $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$ i kako asocijativnost množenja vrijedi na skupu $\mathbb{R}$, vrijedi asocijativnost i na skupu $\mathbb{R}^+$.
4. *Neutralni element* $\big(\exists!\,e\in\mathbb{R}^+\big)\big(\forall x\in\mathbb{R}^+\big)\ \ x\cdot e=e\cdot x=x$
Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e\in\mathbb{R}^+$ tako da je $x\cdot e=x$. Vidimo da je $e=1\in\mathbb{R}^+$ neutralni element.
5. *Inverzni element* $\big(\exists\,n\in\mathbb{R}^+\big)\big(\forall x\in\mathbb{R}^+\big)\ \ x\cdot n=n\cdot x=e$
Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $n\in\mathbb{R}^+$ tako da je $x\cdot n=e=1$. Odavde je $n=\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^+$ inverzni element, jer je $x>0$ pa je i $\frac{1}{x}>0$.

c) Algebarska struktura $(\mathbb{Z},+)$ je Abelova grupa.

1. *Zatvorenost* $(\forall x,y\in\mathbb{Z})\ \ x+y\in\mathbb{Z}$
Kako je zbir dva cijela broja takođe cio broj, zatvorenost vrijedi.
2. *Komutativnost* $(\forall x,y\in\mathbb{Z})\ \ x+y=y+x$
Sabiranje je komutativna operacija na skupu $\mathbb{Z}$.
3. *Asocijativnost* $(\forall x,y,z\in\mathbb{Z})\ \ (x+y)+z=x+(y+z)$
Sabiranje je asocijativna operacija na skupu $\mathbb{Z}$.
4. *Neutralni element* $(\exists!\,e\in\mathbb{Z})\,(\forall x\in\mathbb{Z})\ \ x+e=e+x=x$
Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e\in\mathbb{Z}$ tako da je $x+e=x$. Vidimo da je $e=0\in\mathbb{Z}$ neutralni element.
5. *Inverzni element* $(\exists\,n\in\mathbb{Z})\,(\forall x\in\mathbb{Z})\ \ x+n=n+x=e$
Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $n\in\mathbb{Z}$ tako da je $x+n=e=0$. Odavde je $n=-x\in\mathbb{Z}$ inverzni element, jer je za svaki cio broj x, takođe i $-x$ cio broj.

d) Algebarska struktura $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},/)$ je grupoid.

1. *Zatvorenost* $\big(\forall x,y\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\big)\ \ x/y\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$
Kako je $y\neq 0$, dijeljenje je moguće, a količnik dva racionalna broja različita od nule je takođe racionalan broj različit od nule.
2. *Komutativnost* $\big(\forall x,y\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\big)\ \ x/y=y/x$
Uzmimo $x=2\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ i $y=1\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Kako je $x/y=2$ i $y/x=\frac{1}{2}$, komutativnost ne vrijedi.
3. *Asocijativnost* $\big(\forall x,y,z\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\big)\ \ \big(x/y\big)/z=x/\big(y/z\big)$
Uzmimo $x=4\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $y=z=2\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Kako je $\big(x/y\big)/z=(4/2)/2=1$ i $x/\big(y/z\big)=4/(2/2)=4$, asocijativnost ne vrijedi.

★

Zadatak 2.
Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{C}, *)$ pri čemu je $*$ operacija definisana sa

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2 + e^{i\pi}.$$

Rješenje

Kako je

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

operacija $*$ se može definisati i kao

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - 1.$$

Ispitajmo algebarsku strukturu $(\mathbb{C}, *)$.

1. *Zatvorenost* $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ \ z_1 * z_2 \in \mathbb{C}$
   Brojevi z_1, z_2 i -1 su kompleksni, pa je i zbir tri kompleksna broja takođe kompleksan broj, što implicira da zatvorenost vrijedi.

2. *Komutativnost* $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ \ z_1 * z_2 = z_2 * z_1$
   Kako je
   $$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= z_1 + z_2 - 1 \\ &= z_2 + z_1 - 1 \\ &= z_2 * z_1, \end{aligned}$$
   komutativnost vrijedi.

3. *Asocijativnost* $(\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})\ \ (z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$
   Kako je
   $$\begin{aligned} (z_1 * z_2) * z_3 &= (z_1 + z_2 - 1) * z_3 \\ &= (z_1 + z_2 - 1) + z_3 - 1 \\ &= z_1 + z_2 + z_3 - 2 \\ &= z_1 + (z_2 + z_3 - 1) - 1 \\ &= z_1 + (z_2 * z_3) - 1 \\ &= z_1 * (z_2 * z_3), \end{aligned}$$
   asocijativnost vrijedi.

4. *Neutralni element* $(\exists!\, e \in \mathbb{C})\ (\forall z \in \mathbb{C})\ \ z * e = e * z = z$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e \in \mathbb{C}$ tako da je
   $$\begin{aligned} & z * e = z \\ \Leftrightarrow\quad & z + e - 1 = z \\ \Leftrightarrow\quad & e = 1. \end{aligned}$$
   Dakle, $e = 1 \in \mathbb{C}$ je neutralni element.

5. *Inverzni element* $(\exists\, n \in \mathbb{C})\ (\forall z \in \mathbb{C})\ \ z * n = n * z = e$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $n \in \mathbb{C}$ tako da je
   $$\begin{aligned} & z * n = e \\ \Leftrightarrow\quad & z + n - 1 = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & n = 2 - z. \end{aligned}$$
   Dakle, $n = 2 - z \in \mathbb{C}$ je inverzni element.

Dakle, $(\mathbb{C}, *)$ je Abelova grupa.

★★

Zadatak 3.
Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{Z}, *)$ gdje je operacija $*$ definisana sa $x * y = x + y + xy$.

Rješenje

1. *Zatvorenost* $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ \ x * y \in \mathbb{Z}$
   Kako je zbir i proizvod dva cijela broja takođe cio broj, zaključujemo da zatvorenost vrijedi.

2. *Komutativnost* $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ \ x * y = y * x$
   Kako je
$$\begin{aligned} x * y &= x + y + xy \\ &= y + x + yx \\ &= y * x, \end{aligned}$$
   komutativnost vrijedi.

3. *Asocijativnost* $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})\ \ (x * y) * z = x * (y * z)$
   Kako je
$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y + xy) * z \\ &= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)\, z \\ &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz \\ &= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \\ &= x + (y + z + yz) + x\,(y + z + yz) \\ &= x * (y + z + yz) \\ &= x * (y * z)\,, \end{aligned}$$
   asocijativnost vrijedi.

4. *Neutralni element* $(\exists!\, e \in \mathbb{Z})\ (\forall x \in \mathbb{Z})\ \ x * e = e * x = x$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e \in \mathbb{Z}$ tako da je
$$\begin{aligned} & x * e = x \\ \Leftrightarrow \quad & \cancel{x} + e + xe = \cancel{x} \\ \Leftrightarrow \quad & e\,(1 + x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & e = 0 \end{aligned}$$
   Dakle, $e = 0 \in \mathbb{Z}$ je neutralni element.

5. *Inverzni element* $(\exists\, n \in \mathbb{Z})\ (\forall x \in \mathbb{Z})\ \ x * n = n * x = e$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $n \in \mathbb{Z}$ tako da je
$$\begin{aligned} & x * n = e \\ \Leftrightarrow \quad & x + n + xn = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n\,(x + 1) = -x \\ \Leftrightarrow \quad & n = -\frac{x}{x + 1} \end{aligned}$$
   Primijetimo da $n = -\frac{x}{x+1}$ nije cio broj za svako $x \in \mathbb{Z}$.
   Uzmimo $x = 1$. Vidimo da je $n = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, pa ova algebarska struktura nema inverzni element.

Stoga, $(\mathbb{Z}, *)$ je komutativni monoid.

★★

Zadatak 4.
Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{R}, *)$ gdje je $*$ operacija definisana sa

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rješenje

1. *Zatvorenost* $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x * y \in \mathbb{R}$
   Kako je $x^2 + y^2 \geq 0$, za svako $x, y \in \mathbb{R}$, vrijedi
   $$\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$
   pa zatvorenost vrijedi.

2. *Komutativnost* $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x * y = y * x$
   Kako je
   $$\begin{aligned} x * y &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{y^2 + x^2} \\ &= y * x, \end{aligned}$$
   komutativnost vrijedi.

3. *Asocijativnost* $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x * y) * z = x * (y * z)$
   Kako je
   $$\begin{aligned} (x * y) * z &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) * z \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (y * z)} \\ &= x * (y * z)\,, \end{aligned}$$
   asocijativnost vrijedi.

4. *Neutralni element* $(\exists!\, e \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x * e = e * x = x$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e \in \mathbb{R}$ tako da je
   $$\begin{aligned} & x * e = x \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2 + e^2} = x. \end{aligned} \tag{1}$$
   Primijetimo da je lijeva strana izraza (1) nenegativan broj, dok je sa desne strane realan broj (može da bude i negativan).
   Uzmimo $x = -1$. Tada ne postoji relan broj e takav da vrijedi jednakost (1). Stoga, ova algebarska struktura nema neutralni element.

Dakle, $(\mathbb{R}, *)$ je komutativna polugrupa.

Zadatak 5.
Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{N}_0, *)$ gdje je operacija $*$ definisana sa

$$a * b = (a-b)^2 .$$

Rješenje

1. *Zatvorenost* $(\forall a, b \in \mathbb{N}_0) \quad a * b \in \mathbb{N}_0$
   Kako je $(a-b)^2 \geq 0$ i $(a-b)^2 \in \mathbb{Z}$, za svako $a, b \in \mathbb{N}_0$, zatvorenost vrijedi.

2. *Komutativnost* $(\forall a, b \in \mathbb{N}_0) \quad a * b = b * a$
   Kako je

$$\begin{aligned} a * b &= (a-b)^2 \\ &= \big(-(b-a)\big)^2 \\ &= (-1)^2 \cdot (b-a)^2 \\ &= b * a, \end{aligned}$$

   komutativnost vrijedi.

3. *Asocijativnost* $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0) \quad (a * b) * c = a * (b * c)$
   Uzmimo $a = 1$, $b = 2$ i $c = 3$.
   Vrijedi

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (1 * 2) * 3 \\ &= (1-2)^2 * 3 \\ &= 1 * 3 \\ &= (1-3)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

   i

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= 1 * (2 * 3) \\ &= 1 * (2-3)^2 \\ &= 1 * 1 \\ &= (1-1)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Ovim smo pronašli kontra primjer i pokazali da asocijativnost ne vrijedi.

Dakle, $(\mathbb{N}_0, *)$ je komutativni grupoid.

Zadatak 6.
Na skupu $G = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ definisana je operacija $\cdot$ sa

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b).$$

Ispitati algebarsku strukturu $(G, \cdot)$.

Rješenje

1. *Zatvorenost* $\big(\forall (a, b), (c, d) \in G\big)\ \ (a, b) \cdot (c, d) \in G$
   Kako se kao rezultat množenja i sabiranja realnih brojeva kao rezultat dobija realan broj, $(ac, ad + b) \in \mathbb{R}^2$.
   Kako je $a \neq 0$ i $c \neq 0$, vrijedi $ac \neq 0$, odnosno, vrijedi $(a, b) \cdot (c, d) \in G$.

2. *Komutativnost* $\big(\forall (a, b), (c, d) \in G\big)\ \ (a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$
   Da bismo dokazali da komutativnost ne vrijedi u opštem slučaju, uzmimo kontra primjer $(a, b) = (1, 2)$ i $(c, d) = (3, 4)$. Vrijedi:
   $$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b) = (1 \cdot 3, 1 \cdot 4 + 2) = (3, 6)$$
   dok je sa druge strane
   $$(c, d) \cdot (a, b) = (ca, cb + d) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2 + 4) = (3, 10)$$
   pa je $(a, b) \cdot (c, d) \neq (c, d) \cdot (a, b)$ u opštem slučaju. Dakle, komutativnost ne vrijedi.

3. *Asocijativnost* $\big(\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in G\big)\ \ \big((a, b) \cdot (c, d)\big) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot \big((c, d) \cdot (e, f)\big)$
   Vrijedi
   $$\begin{aligned}\big((a, b) \cdot (c, d)\big) \cdot (e, f) &= (ac, ad + b) \cdot (e, f)\\ &= \big(ac \cdot e, ac \cdot f + (ad + b)\big)\\ &= (ace, acf + ad + b)\\ &= \big(a \cdot ce, a \cdot (cf + d) + b\big)\\ &= (a, b) \cdot (ce, cf + d)\\ &= (a, b) \cdot \big((c, d) \cdot (e, f)\big).\end{aligned}$$
   Ovim smo pokazali da asocijativnost vrijedi.

4. *Neutralni element* $\big(\exists!\ (e_1, e_2) \in G\big)\ \big(\forall\ (a, b) \in G\big)\ \ (a, b) \cdot (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \cdot (a, b) = (a, b)$
   Pošto komutativnost ne vrijedi, moramo odvojeno ispitati postojanje lijevog i desnog neutralnog elementa.
   Pronađimo prvo lijevi neutralni element:
   $$\begin{aligned} & (e_1, e_2) \cdot (a, b) = (a, b)\\ \Leftrightarrow\quad & (e_1 a, e_1 b + e_2) = (a, b)\\ \Rightarrow\quad & e_1 = 1 \ \wedge\ e_2 = 0.\end{aligned}$$
   Dakle, $(1, 0) \in G$ je lijevi neutralni element.
   Pronađimo sada desni neutralni element:
   $$\begin{aligned} & (a, b) \cdot (e_1, e_2) = (a, b)\\ \Leftrightarrow\quad & (ae_1, ae_2 + b) = (a, b)\\ \Rightarrow\quad & e_1 = 1 \ \wedge\ e_2 = 0.\end{aligned}$$
   Dakle, $(1, 0) \in G$ je i desni neutralni element, pa zaključujemo da je $(e_1, e_2) = (1, 0)$ jedinstven neutralni element.

5. *Inverzni element* $\big(\exists\ (n_1, n_2) \in G\big)\ \big(\forall\ (a, b) \in G\big)\ \ (a, b) \cdot (n_1, n_2) = (n_1, n_2) \cdot (a, b) = (e_1, e_2)$
   Pošto komutativnost ne vrijedi, moramo odvojeno ispitati postojanje lijevog i desnog inverznog elementa.
   Pronađimo prvo lijevi inverzni element:
   $$\begin{aligned} & (n_1, n_2) \cdot (a, b) = (e_1, e_2)\\ \Leftrightarrow\quad & (n_1 a, n_1 b + n_2) = (1, 0)\\ \Rightarrow\quad & n_1 = \frac{1}{a} \ \wedge\ n_2 = -\frac{b}{a}.\end{aligned}$$
   Pošto je iz definicije skupa G imamo $a \neq 0$, $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \in G$ je lijevi inverzni element.
   Pronađimo sada desni inverzni element:
   $$\begin{aligned} & (a, b) \cdot (n_1, n_2) = (e_1, e_2)\\ \Leftrightarrow\quad & (an_1, an_2 + b) = (1, 0)\\ \Rightarrow\quad & n_1 = \frac{1}{a} \ \wedge\ n_2 = -\frac{b}{a}.\end{aligned}$$
   Dakle, $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \in G$ je i desni inverzni element, pa zaključujemo da je $(n_1, n_2) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ jedinstven inverzni element.

Dakle, $(G, \cdot)$ je grupa.

Zadatak 7.
Ispitati algebarsku strukturu $(G_n, \cdot)$ gdje je $n \in \mathbb{N}$ fiksno i

$$G_n = \left\{a + ib\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\right\},$$

a $\cdot$ standardna operacija množenja kompleksnih brojeva.

Rješenje

1. *Zatvorenost* $(\forall x, y \in G_n)\ \ x \cdot y \in G_n$
   Neka je $x = a + ib\sqrt{n}$ i $y = c + id\sqrt{n}$, gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(a + ib\sqrt{n}\right) \cdot \left(c + id\sqrt{n}\right) \\ &= ac + ibc\sqrt{n} + iad\sqrt{n} + i^2 bd\sqrt{n}^2 \\ &= (ac - bdn) + i\,(bc + ad)\,\sqrt{n}. \end{aligned}$$

   Kako je $ac - bdn \in \mathbb{Z}$ i $bc + ad \in \mathbb{Z}$, zatvorenost vrijedi.

2. *Komutativnost* $(\forall x, y \in G_n)\ \ x \cdot y = y \cdot x$
   Kako je $G_n \subset \mathbb{C}$ i kako komutativnost množenja vrijedi na skupu $\mathbb{C}$, vrijedi komutativnost i na skupu G_n.

3. *Asocijativnost* $(\forall x, y, z \in G_n)\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
   Kako je $G_n \subset \mathbb{C}$ i kako asocijativnost množenja vrijedi na skupu $\mathbb{C}$, vrijedi asocijativnost i na skupu G_n.

4. *Neutralni element* $(\exists!\, e \in G_n)\ (\forall x \in G_n)\ \ x \cdot e = e \cdot x = x$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e \in G_n$ tako da je

$$\begin{aligned} & x \cdot e = x \\ \Leftrightarrow\quad & e = 1. \end{aligned}$$

   Kako se $e = 1$ može predstaviti kao $e = 1 + i \cdot 0\sqrt{n}$, vidimo da vrijedi $e \in G_n$, što znači da je $e = 1$ neutralni element.

5. *Inverzni element* $(\exists\, n \in G_n)\ (\forall x \in G_n)\ \ x \cdot n = n \cdot x = e$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $n \in G_n$ tako da je

$$\begin{aligned} & x \cdot n = e \\ \Leftrightarrow\quad & n = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

   Primijetimo da $n = \frac{1}{x}$ ne pripada skupu G_n u opštem slučaju. Da bismo to dokazali, pronađimo kontra primjer.
   Neka je $x = 0 + i \cdot 0 \cdot \sqrt{n} = 0$. Kako nije moguće dijeliti sa nulom, zaključujemo da je $x = 0$ kontra primjer kojim pokazujemo da inverzni element ne postoji u opštem slučaju.

Dakle, $(G_n, \cdot)$ je komutativni monoid.

Zadatak 8.
Ispitati algebarsku strukturu $(S,*)$ gdje je
$$S=\{(a,b):a,b\in\mathbb{Q},a\neq 0\}$$
a operacija $*$ je definisana sa
$$(a,b)*(c,d)=(ac,bc+c+d).$$

Rješenje

1. *Zatvorenost* $\big(\forall(a,b),(c,d)\in S\big)\ \ (a,b)\cdot(c,d)\in S$
Kako se kao rezultat množenja i sabiranja racionalnih brojeva kao rezultat dobija racionalan broj, $(ac,bc+c+d)\in\mathbb{Q}^2$.
Kako je $a\neq 0$ i $c\neq 0$, vrijedi $ac\neq 0$, odnosno, vrijedi $(a,b)\cdot(c,d)\in S$.

2. *Komutativnost* $\big(\forall(a,b),(c,d)\in S\big)\ \ (a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$
Da bismo dokazali da komutativnost ne vrijedi u opštem slučaju, uzmimo kontra primjer $(a,b)=(1,2)$ i $(c,d)=(3,4)$. Vrijedi:
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bc+c+d)=(1\cdot 3,2\cdot 3+3+4)=(3,13)$$
dok je sa druge strane
$$(c,d)\cdot(a,b)=(ca,da+a+b)=(3\cdot 1,4\cdot 1+1+2)=(3,7)$$
pa je $(a,b)\cdot(c,d)\neq(c,d)\cdot(a,b)$ u opštem slučaju. Dakle, komutativnost ne vrijedi.

3. *Asocijativnost* $\big(\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in S\big)\ \ \big((a,b)\cdot(c,d)\big)\cdot(e,f)=(a,b)\cdot\big((c,d)\cdot(e,f)\big)$
Vrijedi
$$\begin{aligned}\big((a,b)\cdot(c,d)\big)\cdot(e,f)&=(ac,bc+c+d)\cdot(e,f)\\&=\big(ac\cdot e,(bc+c+d)\cdot e+e+f\big)\\&=(ace,bce+ce+de+e+f)\\&=\big(a\cdot ce,b\cdot ce+ce+(de+e+f)\big)\\&=(a,b)\cdot(ce,de+e+f)\\&=(a,b)\cdot\big((c,d)\cdot(e,f)\big).\end{aligned}$$
Ovim smo pokazali da asocijativnost vrijedi.

4. *Neutralni element* $\big(\exists!\ (e_1,e_2)\in S\big)\ \big(\forall\ (a,b\in S\big)\ \ (a,b)\cdot(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\cdot(a,b)=(a,b)$
Pošto komutativnost ne vrijedi, moramo odvojeno ispitati postojanje lijevog i desnog neutralnog elementa.
Pronađimo prvo lijevi neutralni element:
$$\begin{aligned}&(e_1,e_2)\cdot(a,b)=(a,b)\\\Leftrightarrow\quad&(e_1a,e_2a+a+b)=(a,b)\\\Leftrightarrow\quad&e_1a=a\ \ \wedge\ \ a\,(e_2+1)+\cancel{b}=\cancel{b}\\\Rightarrow\quad&e_1=1\ \ \wedge\ \ e_2=-1.\end{aligned}$$
Dakle, $(1,-1)\in S$ je lijevi neutralni element.
Pronađimo sada desni neutralni element:
$$\begin{aligned}&(a,b)\cdot(e_1,e_2)=(a,b)\\\Leftrightarrow\quad&(ae_1,be_1+e_1+e_2)=(a,b)\\\Leftrightarrow\quad&ae_1=a\ \ \wedge\ \ be_1+e_1+e_2=b\\\Rightarrow\quad&e_1=1\ \ \wedge\ \ e_2=-1.\end{aligned}$$
Dakle, $(1,-1)\in S$ je i desni neutralni element, pa zaključujemo da je $(e_1,e_2)=(1,-1)$ jedinstven neutralni element.

5. *Inverzni element* $\big(\exists\ (n_1,n_2)\in S\big)\ \big(\forall\ (a,b\in S\big)\ \ (a,b)\cdot(n_1,n_2)=(n_1,n_2)\cdot(a,b)=(e_1,e_2)$
Pošto komutativnost ne vrijedi, moramo odvojeno ispitati postojanje lijevog i desnog inverznog elementa.
Pronađimo prvo lijevi inverzni element:
$$\begin{aligned}&(n_1,n_2)\cdot(a,b)=(e_1,e_2)\\\Leftrightarrow\quad&(n_1a,n_2a+a+b)=(1,-1)\\\Rightarrow\quad&n_1=\frac{1}{a}\ \ \wedge\ \ n_2=-\frac{1+a+b}{a}.\end{aligned}$$
Pošto je iz definicije skupa S imamo $a\neq 0$, $\left(\frac{1}{a},-\frac{1+a+b}{a}\right)\in S$ je lijevi inverzni element.
Pronađimo sada desni inverzni element:
$$\begin{aligned}&(a,b)\cdot(n_1,n_2)=(e_1,e_2)\\\Leftrightarrow\quad&\big(an_1,n_1\,(b+1)+n_2\big)=(1,-1)\\\Rightarrow\quad&n_1=\frac{1}{a}\ \ \wedge\ \ n_2=-1-(1+b)\cdot\frac{1}{a}=-\frac{1+a+b}{a}.\end{aligned}$$
Dakle, $\left(\frac{1}{a},-\frac{1+a+b}{a}\right)\in S$ je i desni inverzni element, pa zaključujemo da je $(n_1,n_2)=\left(\frac{1}{a},-\frac{1+a+b}{a}\right)$ jedinstven inverzni element.

Dakle, $(S,\cdot)$ je grupa.

★★★★

Zadatak 9.

Dokazati da je algebarska struktura $\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),*\right)$ grupa, gdje je $*$ operacija definisana sa

$$a*b=\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)\big).$$

Rješenje

1. *Zatvorenost* $\left(\forall a,b\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \ a*b\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
   Kako je $a,b\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, vrijedi
   $$\operatorname{tg}(a)\neq\pm\infty \text{ i } \operatorname{tg}(b)\neq\pm\infty$$
   pa kako je zbir dva konačna broja takođe konačan broj, tj.
   $$\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)\neq\pm\infty$$
   pa je i
   $$\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)\big)\neq\pm\frac{\pi}{2}$$
   odnosno $a*b\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ čime je zatvorenost pokazana.
2. *Komutativnost* $\left(\forall a,b\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \ a*b=b*a$
   Kako je
   $$\begin{aligned}a*b&=\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)\big)\\&=\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(b)+\operatorname{tg}(a)\big)\\&=b*a\end{aligned}$$
   komutativnost vrijedi.
3. *Asocijativnost* $\left(\forall a,b,c\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \ (a*b)*c=a*(b*c)$
   Kako je
   $$\begin{aligned}(a*b)*c&=\Big(\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)\big)\Big)*c\\&=\operatorname{arctg}\Big(\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)\big)\Big)+\operatorname{tg}(c)\Big)\\&=\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)+\operatorname{tg}(c)\big)\\&=\operatorname{arctg}\Big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(b)+\operatorname{tg}(c)\big)\Big)\Big)\\&=a*\Big(\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(b)+\operatorname{tg}(c)\big)\Big)\\&=a*(b*c)\end{aligned}$$
   asocijativnost vrijedi.
4. *Neutralni element* $\left(\exists!\,e\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\forall a\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \ a*e=e*a=a$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ tako da je $a*e=a$. Vrijedi:
   $$\begin{aligned}&a*e=a\\\Leftrightarrow\quad&\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(e)\big)=a\quad/\operatorname{tg}\\\Leftrightarrow\quad&\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(e)\big)\Big)=\operatorname{tg}(a)\\\Leftrightarrow\quad&\cancel{\operatorname{tg}(a)}+\operatorname{tg}(e)=\cancel{\operatorname{tg}(a)}\\\Leftrightarrow\quad&\operatorname{tg}(e)=0\\\Leftrightarrow\quad&e=\operatorname{arctg}(0)=0.\end{aligned}$$
   Kako $e=0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, zaključujemo da je $e=0$ neutralni element.
5. *Inverzni element* $\left(\exists\,n\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\forall a\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \ a*n=n*a=e$
   Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $n\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ tako da je $a*n=e$. Vrijedi:
   $$\begin{aligned}&a*e=a\\\Leftrightarrow\quad&\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(n)\big)=0\quad/\operatorname{tg}\\\Leftrightarrow\quad&\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(n)\big)\Big)=\operatorname{tg}(0)\\\Leftrightarrow\quad&\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(n)=0\\\Leftrightarrow\quad&\operatorname{tg}(n)=-\operatorname{tg}(a)=\operatorname{tg}(-a)\quad/\operatorname{arctg}\\\Leftrightarrow\quad&n=-a.\end{aligned}$$
   Kako $\forall a\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ vrijedi $-a\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, jer je skup simetričan u odnosu na nulu, zaključujemo da je $n=-a$ inverzni element.

Ovim smo dokazali da je $\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),*\right)$ ne samo grupa već i Abelova grupa.

★★★★★

Zadatak 10.
Ispitati algebarsku strukturu $(S,*)$ gdje je
$$S=\left\{x+y\sqrt{2}\ \mid\ x,y\in\mathbb{Q}\ \ \wedge\ \ x^2-2y^2=1\right\}$$
a operacija $*$ je definisana sa
$$a*b=a\cdot b.$$

Rješenje

1. *Zatvorenost* $(\forall a,b\in S)\ \ a*b\in S$
Neka je $a=x_1+y_1\sqrt{2}$ i $b=x_2+y_2\sqrt{2}$, pri čemu vrijedi $x_1^2-2y_1^2=1$ i $x_2^2-2y_2^2=1$. Tada je
$$\begin{aligned}a*b&=\left(x_1+y_1\sqrt{2}\right)\cdot\left(x_2+y_2\sqrt{2}\right)\\&=x_1x_2+x_2y_1\sqrt{2}+x_1y_2\sqrt{2}+2y_1y_2\\&=(x_1x_2+2y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2}\end{aligned}$$
Kako je
$$\begin{aligned}(x_1x_2+2y_1y_2)^2-2\left(x_1y_2+x_2y_1\right)^2&=x_1^2x_2^2+4x_1x_2y_1y_2+4y_1^2y_2^2-2\left(x_1^2y_2^2+2x_1y_2x_2y_1+x_2^2y_1^2\right)\\&=x_1^2x_2^2+\cancel{4x_1x_2y_1y_2}+4y_1^2y_2^2-2x_1^2y_2^2-\cancel{4x_1x_2y_1y_2}-2x_2^2y_1^2\\&=x_1^2\left(x_2^2-2y_2^2\right)-2y_1^2\left(x_2^2-2y_2^2\right)\\&=\left(x_2^2-2y_2^2\right)\cdot\left(x_1^2-2y_1^2\right)\\&=1\cdot1=1,\end{aligned}$$
zatvorenost vrijedi.

2. *Komutativnost* $(\forall a,b\in S)\ \ a*b=b*a$
Kako je
$$a*b=a\cdot b=b\cdot a=b*a,$$
komutativnost vrijedi.

3. *Asocijativnost* $(\forall a,b,c\in S)\ \ (a*b)*c=a*(b*c)$
Kako je
$$(a*b)*c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot b\cdot c=a\cdot(b*c)=a*(b*c)\,,$$
asocijativnost vrijedi.

4. *Neutralni element* $(\exists!\,e\in S)\ (\forall a\in S)\ \ a*e=e*a=a$
Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $e\in S$ tako da je $a*e=a$. Vrijedi:
$$\begin{aligned}&a*e=a\\\Leftrightarrow\quad&a\cdot e=a\\\Leftrightarrow\quad&e=1.\end{aligned}$$
Kako je
$$e=1=1+0\cdot\sqrt{2}\ \ \wedge\ \ 1^2-2\cdot0^2=1,$$
zaključujemo da je $e=1$ neutralni element.

5. *Inverzni element* $(\exists\,n\in S)\ (\forall a\in S)\ \ a*n=n*a=e$
Pošto vrijedi komutativnost, dovoljno je pronaći $n\in S$ tako da je $a*n=e$. Vrijedi:
$$\begin{aligned}&a*n=e\\\Leftrightarrow\quad&a\cdot n=1\\\Leftrightarrow\quad&n=\frac{1}{a}.\end{aligned}$$
Neka je
$$a=x+y\sqrt{2}\ \mid\ x,y\in\mathbb{Q}\ \ \wedge\ \ x^2-2y^2=1.$$
Kako je
$$n=\frac{1}{a}=\frac{1}{x+y\sqrt{2}}=\frac{1}{x+y\sqrt{2}}\cdot\frac{x-y\sqrt{2}}{x-y\sqrt{2}}=\frac{x-y\sqrt{2}}{x^2-2y^2}=x-y\sqrt{2}$$
i kako je
$$x^2-2\left(-y\right)^2=x^2-2y^2=1$$
zaključujemo da je $n=\frac{1}{a}\in S$ inverzni element.

Dakle $(S,*)$ je Abelova grupa.