

3. КИНЕМАТИКА

Кинематика је област једне веће области која се назива Механика, а која се састоји од Кинематике и Динамике. Код Кинематике се посматра искључиво процес кретања, не доводећи у питање шта је довело до посматраног кретања, тј. који су узроци кретања.

Да би се кретање могло посматрати морамо увести референтно тијело, или референтни систем. Овај референтни систем треба да буде апсолутно мирујући систем, како би се могло посматрати кретање у односу на овај мирујући систем. Питање референтног тијела или система се своди на питање правилног избора референтног тијела или система. На примјер, уколико за референтно тијело одаберемо амфитеатар Технолошког факултета у Бањој Луци, чини се да је услов мировања амфитеатра испуњен. Међутим, неко се може запитати да ли је заиста амфитеатар апсолутно мирујући систем, јер се он заједно са планетом Земљом окреће око своје осе, а планета Земља око Сунца. Зар није исправније одабрати Сунце као апсолутно мирујући референтни систем? Изгледа да није, јер се и Сунчев систем креће око центра наше галаксије. Ова полемика изгледа да нема крај, али заправо треба знати да је одабир амфитеатра сасвим добар избор као референтни систем и то за посматрање локалних кретања. Уколико у амфитеатру посматрамо неке демонстрационе експерименте, попут бацања куглице на под са неке висине – онда ће под амфитеатра бити сасвим добар референтни систем.

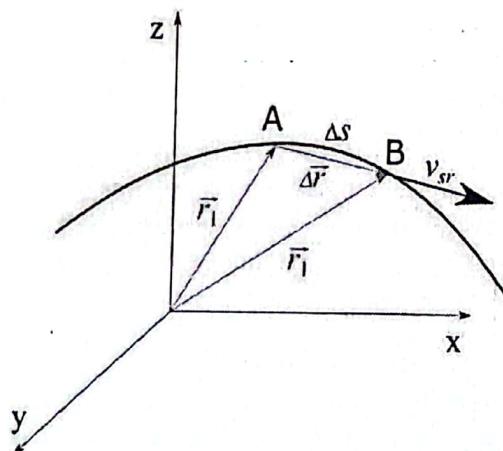
Друга битна ствар приликом посматрања кретања јесте димензија тијела коју посматрамо. Ми ћemo, за сада, посматрати кретање материјалне тачке. Овај назив је прилично неспретан, јер како тачка (тијело без димензије) може онда бити сачињено од неке материје? На ово питање не постоји одговор, јер заправо ни материјална тачка као таква – не постоји. У питању је просто замишљена креација, у којој се наглашава да димензије нису битне у овом дијелу посматрања кретања. Касније ћemo видјети да су димензије тијела наравно веома битне, не могу се занемарити и доводе до многих ефеката и физичких појава. Добра апроксимација материјалне тачке може бити малена куглица, начињена од неког материјала веће густине.

Замислимо да приликом кретања тијела оно оставља траг иза себе, слично као што авион оставља кондензацијски траг на небу. Овај траг се назива трајекторија и она може бити једноставних, али и прилично компликованих облика. Ипак, уколико посматрāмо веома

мале дијелове ових трајекторија – долазимо до закључка да се свака трајекторија може описати сабирањем трансационах и ротационих кретања. И заиста, ма како кретање сложено било – оно се може описати збиром бесконачно малих (или диференцијално малих) трансација и ротација!

3.1. Брзина и убрзање

Да бисмо дефинисали брзину, поћи ћемо од посматрања трајекторије у Декартовом правоуглом систему, као на слици 12. На трајекторији су назначене двије тачке A и B, и свака од тих тачака је описана својим радијус вектором, тачка A је описана радијус вектором \vec{r}_1 , а тачка B је описана радијус вектором \vec{r}_2 .



Слика 12. Трајекторија и средња брзина у Декартовом простору

На основу ова два вектора могуће је израчунати њихову разлику, тј.:

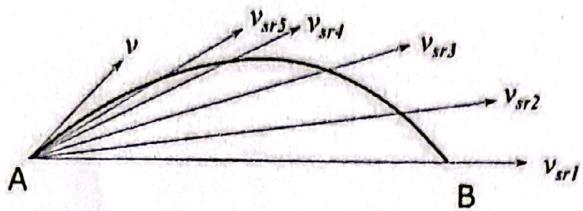
$$\underline{\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}. \quad (1)$$

У том случају, мјерећи вријеме Δt које је потребно да тијело пређе пут од тачке A до тачке B, може се дефинисати средња брзина:

$$\underline{\bar{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}, \quad (2)$$

која је усмјерена једнако као и вектор $\Delta \vec{r}$ (ова два вектора су колинеарни). Међутим, овако дефинисана средња брзина добро не описује кретање. Она је израчуната на основу познавања брзина само у ове двије тачке, док не узима у обзир вриједности брзина у свим осталим тачкама, које могу бити веома разнолике. Други проблем, који је одмах уочљив и са слике, је да вектор $\Delta \vec{r}$ не описује добро стварну трајекторију коју је тијело направило од тачке A до тачке B, а која је на слици обиљежена са Δs . Вектор $\Delta \vec{r}$ ће све боље (или све тачније) описивати трајекторију Δs само ако се тачка B приближава тачки A.

На слици 13 је увећано приказан дио путање тијела од тачке A до тачке B. Приближавајући се тачки A, осим што се разлика радијус вектора $\Delta\vec{r}$ смањује ка диференцијално малим вриједностима (па тако и трајекторија Δs), смањује се и временски размак Δt садржан у дефиницији средње брзине.



Слика 13. Трајекторија и средња брзина у у лимесу када $\Delta t \rightarrow 0$

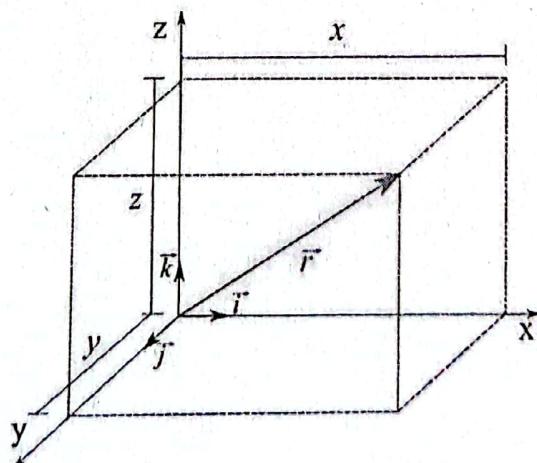
Дакле, у лимесу када $\Delta t \rightarrow 0$ средња вриједност брзине тежи ка тренутној вриједности брзине, дефинисаној у тачки A, тј.:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} . \quad (3)$$

Горњи израз представља дефиницију тренутне брзине, која каже да је она једнака првом изводу радијус вектора по времену. Тачка написана изнад вектора \vec{r} означава да се на тај вектор примјењује први извод (касније ћемо видјети да двије тачкице изнад вектора означавају други извод, итд.)⁸.

Математичка формулатија првог извода dy/dx неке функције $y = y(x)$ каже да је она једнака тангенсу угла под којим тангента сијече осу x . У посматрању и описивању кретања материјалне тачке, нас интересује промјена кретања (трајекторије) по времену, тј. тражимо математичке изводе „по времену“, али ће и у том случају први извод бити једнак тангенти на криву трајекторије у тачки од интереса. Сада је јасно зашто вектор тренутне брзине има правац дуж тангенте на трајекторију.

У Декартовом правоуглом систему радијус вектор се може разложити на компоненте, као што је приказано на слици 14.



Слика 14. Разлагanje радијус вектора на компоненте у Декартовом систему

⁸ Разлог писања тачкица изнад неке величине је искључиво и само краћи облик писања математичког извода. Наиме, као што ћете видјети у овом курсу Физике, готово сви математички изводи су по времену, јер је вријеме континуална промјењљива величина, а нас интересује еволуција неке функције по времену (као нпр. одређивање трајекторије или закона пута, у функцији од времена). Постоје наравно и други облици математичких извода, као нпр. извод по правцу од интереса.

Радијус вектор који описује кретање тачке једнак је $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, чији интензитет можемо израчунати⁹ из $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Уколико диференцирамо израз радијус вектор по времену добијамо вектор тренутне брзине:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \quad (4)$$

који можемо написати и на следећи начин:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \quad (5)$$

где када упоредимо изразе (4) и (5) видимо да су чланови (компоненте) вектора брзине:

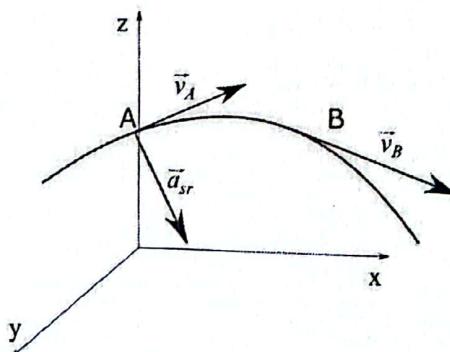
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (6)$$

Слично интензитету радијус вектора, можемо израчунати и интензитет тренутне врзине, познавајући његове компоненте у Декартовом систему, тј. $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Уколико нас приликом рачунања тренутне брзине интересује само вриједност њеног интензитета, онда је сасвим оправдано замијенити $|\Delta\vec{r}|$ са Δs у изразу за дефиницију тренутне брзине (3). Ово се може видjetи ако се посматра слика 13, јер у лимесу када $\Delta t \rightarrow 0$ вриједност разлике радијус вектора тежи ка вриједности дијела трајекторије $|\Delta\vec{r}| \rightarrow \Delta s$, тј. тада је:

$$|\vec{v}| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (7)$$

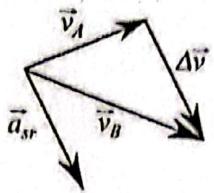
Да бисмо дошли до израза за средње убрзање помоћи ће нам слика 15. На њој се виде вектори тренутне брзине у тачкама А и В, свака усмјерена дуж тангенти у посматраним тачкама.



Слика 15. Одређивање вектора убрзања у Декартовом систему

На слици 15 је нацртан смјер вектора средњег убрзања, али да би било јасно како је овај вектор одређен послужиће нам слика 16. Она је добијена тако што је вектор тренутне брзине у тачки В транслиран до почетка вектора тренутне брзине у тачки А, а затим одређена њихова разлика $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$.

⁹ Интензитет вектора се лако може израчунати из особина скаларног производа да је $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$.



Слика 16. Одређивање смјера вектора средњег убрзања

Вектор средњег убрзања се тада дефинише као $\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Међутим, као што је посматрање средње брзине некада прилично дискутиабилно у смислу тачног и вјерног описивања кретања, тако и је и вриједност средње брзине оправдано посматрати у прилично малом броју једноставнијих примјера кретања. За ма како сложено кретање једино је оправдано користити вриједности тренутног убрзања, дефинисаног у некој тачки од интереса. Оно се добија такође у лимесу када $\Delta t \rightarrow 0$, тј. када се тачки А приближава тачка В. Тада је тренутно убрзање:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}. \quad (8)$$

Узимајући у обзир једначину (3), тј. дефиницију тренутне брзине, претходни израз можемо написати у облику:

$$\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d \vec{r}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \quad (9)$$

где двије тачке изнад вектора \vec{r} означавају други извод по времену.

Вектор тренутног убрзања се може у Декартовом простору разложити по његовим компонентама, потпуно аналогно као што смо то радили са вектором тренутне брзине:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (10)$$

где су компоненте једнаке:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (11)$$

Једнако се може показати да се интензитет вектора тренутне брзине може израчунати у Декартовом простору преко компоненти тренутног убрзања $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

3.2. Општи облик одређивања кинематичких величина

Посматрање кретања материјалне тачке, ма како оно сложено било, у математичком смислу се своди на задатак одређивања закона пута (трајекторије) у функцији од времена, тј. $s = s(t)$. При томе су и брзина и убрзање функција од времена, тј. $v = v(t)$ и $a = a(t)$ и ове функције је потребно или познавати, или одредити, а све у зависности од карактера (тј. сложености) кретања. У Декартовом правоуглом систему овај задатак се своди на

одређивање временске еволуције радијус вектора, тј. $\vec{r} = \vec{r}(t)$. У даљем тексту ћемо дати једну општу процедуру одређивања закона пута.

Проблем ћемо представити дуж једне димензије, нпр. x - осе, ради једноставности. Тренутна брзина је у том случају дефинисана као $v = \frac{dx}{dt}$, одакле слиједи да је $dx = v \cdot dt$.

Интеграљењем лијеве стране претходног израза по путу (од неке почетне до крајње тачке) и десне стране претходног израза по времену (од неког почетног до крајњег времена), добијамо:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v \cdot dt, \quad (12)$$

одакле се интеграљењем добија закон пута, тј. функција пута од времена:

$$s = x - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt. \quad (13)$$

Да би ријешили до краја закон пута, у изразу (13) морамо знати зависност брзине од времена, како бисмо могли ријешити интеграл са десне стране израза (13). Каква је ова зависност – сазнаћемо из убрзања, тј. из $a = \frac{dv}{dt}$, одакле је $dv = a \cdot dt$. Интеграљењем претходног израза, лијеве стране од неке почетне до крајње брзине, а десне стране од почетног до крајњег тренутка, добијамо $\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a \cdot dt$, а одавде и коначну функцију брзине од времена:

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a \cdot dt. \quad (14)$$

Да бисмо добили једначину кретања материјалне тачке, морамо прво ријешити једначину (14), а затим добијену зависност брзине убацити у десну страну једначине (13) и ријешити интеграл. Јасно је да карактер и зависност убрзања од времена $a = a(t)$ диктира и сам закон кретања $s = s(t)$. Разматраћемо двије врсте кретања: праволинијско и криволинијско кретање, али ћемо сваку од њих посебно анализирати, тј. њихове подврсте.

3.3. Праволинијско кретање

Праволинијско кретање се дефинише као кретање по правој линији, што је јасно из самог назива ове врсте кретања. У овој врсти кретања интензитет вектора брзине може мијењати произвољно вриједности, али правац кретања остаје константан.

3.3.1. Равномјерно кретање

Ова врста кретања је специјалан случај праволинијског кретања и то таквог у којем је интензитет вектора брзине увијек константан, тј. $\vec{v} = \text{const}$. Јасно је да при овом кретању не постоји убрзање, јер је оно по дефиницији извод брзине по времену. Пошто је брзина константа – њен први извод ће бити једнак нули, тј. $\ddot{a} = 0$. У том случају је веома лако наћи

закон пута користећи једначину (13), у којој ће величина брзине сада моћи изаћи испред интеграла (јер није функција од времена), тј.:

$$s = x - x_0 = v \int_{t_0}^t dt = v(t - t_0). \quad (15)$$

Уколико се узме да је почетна координата једнака нули $x_0 = 0$, као и почетни тренутак $t_0 = 0$, добијамо добро познати израз за пређени пут при равномјерно праволинијском кретању, $s = v \cdot t$.

3.3.2. Једнако убрзано кретање

Ова је таква врста кретања где постоји вектор убрзања, али је овај вектор константан. При томе је дозвољено да убрзање узима и негативне вриједности, тј. у том случају се ради о успорењу $\ddot{a} = \text{const}$; $\ddot{a} > 0$ или $\ddot{a} < 0$. Да би дошли до израза за закон пута, полазимо од једначине (14), где на десној страни убрзање може сада да изађе испред интеграла (јер је константно), тј. добијемо израз за тренутну брзину у функцији од времена:

$$v = v_0 + a \int_{t_0}^t dt = v_0 + a(t - t_0). \quad (16)$$

Горњи израз уврстимо у израз (13), па добијамо $s = x - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt = \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] \cdot dt$.

Задњи интеграл се може раздвојити на два интеграла од којих је први прост $\int_{t_0}^t v_0 dt = v_0(t - t_0)$, а други интеграл $\int_{t_0}^t [a(t - t_0)] \cdot dt$ се може решити смјеном $t - t_0 = z$,

одакле је $dt = dz$ и интеграл постаје $a \int_{t_0}^t [(t - t_0)] \cdot dt = a \int_0^{t-t_0} z \cdot dz = a \frac{1}{2}(t - t_0)^2$. Коначно

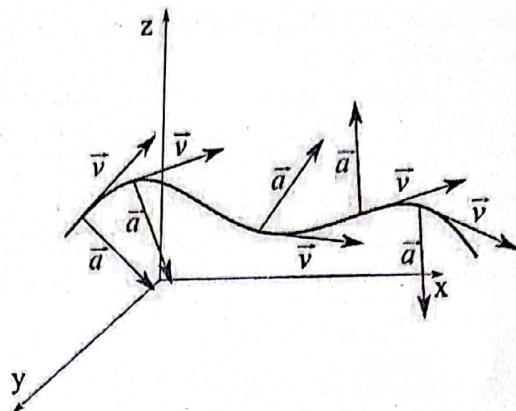
решење закона пута је:

$$s = x - x_0 = v_0(t - t_0) + a \frac{1}{2}(t - t_0)^2. \quad (17)$$

Уколико узмемо да је почетна координата смјештена у координатни почетак $x_0 = 0$, да је кретање тијела започето из мiroвања $v_0 = 0$ и да је хронометар започео мјерење кретања од 0 секунди $t_0 = 0$, добијамо $s = \frac{a}{2}t^2$, што је добро познати израз за пређени пут код праволинијског кретања са константним убрзањем.

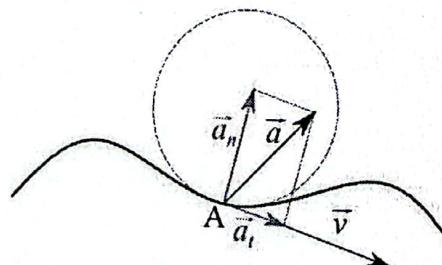
3.4. Криволинијско кретање

Кретање материјалне тачке по кривој линији се назива криволинијско кретање. При овом кретању вектори брзине и убрзања непрестано мијењају свој смјер – вектор брзине увијек задржавајући правца тангенте на трајекторију, а вектор убрзања је усмјeren увијек ка унутрашњости (удубљености) криве, као што је то представљено на слици 17.



Слика 17. Смјер вектора убрзања код криволинијског кретања

Ако уведемо два карактеристична правца у свакој тачки трајекторије – правац дуж тангенте и правац нормално на тангенту, онда се у свакој тачки трајекторије вектор убрзања (који је као што је речено увијек усмјерен према унутрашњости криве трајекторије) може раставити на двије компоненте. Компонента убрзања усмјерена дуж тангенте назива се тангенцијално убрзање, а компонента убрзања усмјерена дуж нормале назива се нормално убрзање, слика 18.

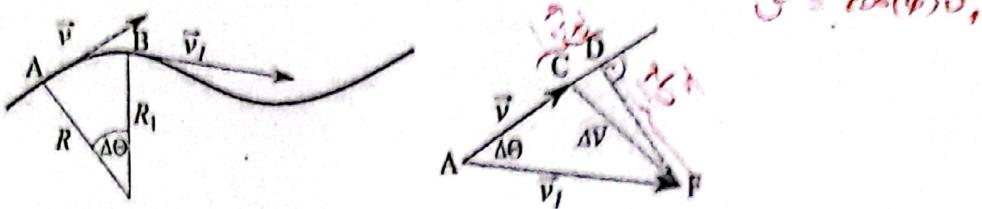


Слика 18. Вектор убрзања растављен на двије компоненте – нормалну и тангенцијалну компоненту

Са слике 18 се види да је $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$, као и да је због правог угла између тангенте и нормале на тангенту интензитет убрзања једнак $|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2}$. Из овог израза видимо да је криволинијско кретање по свом карактеру увијек убрзано кретање, јер чак и ако не постоји тангенцијално убрзање (тј. ако се материјална тачка креће по крivoј линији константним интензитетом брзне), због закривљености путање увијек постоји нормално убрзање.

Сада ћemo извести изразе за интензите тангенцијалног и нормалног убрзања. На слици 19 су приказане двије карактеристичне тачке A и B, као и вектори треутних брзина у тим тачкама (усмјерених дуж тангенти на те тачке) \vec{v} и \vec{v}_1 , респективно. Тачке A и B се налазе на растојању R и R_1 од центра дијела кружне путање (крива путање не мора бити кружна, што значи да ови радијуси не морају бити једнаки). Ове нормале на тачке A и B заклапају међусобни угао $\Delta\theta$. Ако транслирамо вектор \vec{v}_1 у тачку A, тада ће између вектора \vec{v}_1 и \vec{v} такође бити угао $\Delta\theta$ (ово се лако може доказати јер између нормала на векторе брзина влада исти угао – тј. трансляција за 90° неће ништа промијенити). Сада се може израчунати разлика ова два вектора:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}. \quad (18)$$



Слика 19. Одређивање интензитета тангенцијалног и нормалног убрзања

Разлика вектора тренутних брзина $\Delta\vec{v}$ се може разложити дуж правца тангенте и праваца нормалног на тангенту. Ово на слици 19 (десно) одговара да се вектор $\Delta\vec{v}$ (дуж CF) разложи на тангенцијалну компоненту $\Delta\vec{v}_t$ (дуж CD) и нормалну компоненту $\Delta\vec{v}_n$ (дуж DF). Интензитети ових компоненти су:

$$\Delta v_t = v_i \cos \Delta\theta - v ; \Delta v_n = v_i \sin \Delta\theta . \quad (19)$$

Средње вриједности тангенцијалног и нормалног убрзања ће се добити уколико се претходни израз подијели са временом Δt , тј.:

$$\Delta a_t = \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \frac{v_i \cos \Delta\theta - v}{\Delta t} ; \Delta a_n = \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v_i \sin \Delta\theta}{\Delta t} , \quad (20)$$

међутим, тренутне вриједности горњих убрзања ће се добити у лимесу када $\Delta t \rightarrow 0$. Са слике 19 у том случају може се закључити да ће се тачка В приближавати (тежити) ка тачки А, па ће $\Delta\theta \rightarrow 0$, тј. $\cos \Delta\theta \approx 1$, $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$. Такође ће у том случају бити $R \approx R_i$ и $v \approx v_i$.

Ако ове апроксимације у лимесу када $\Delta t \rightarrow 0$ унесемо у једначине (20), добијамо:

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i \cos \Delta\theta - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} , \quad (21)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i \sin \Delta\theta}{\Delta t} = v_i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v_i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{R \cdot \Delta t} = \frac{v^2}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} , \quad (22)$$

где је задњој једначини искориштена веза између одсјечка лука Δs и угла $\Delta\theta$, тј. $\Delta s = R \cdot \Delta\theta$, као и дефиниција тренутне брзине, тј. израз (7).

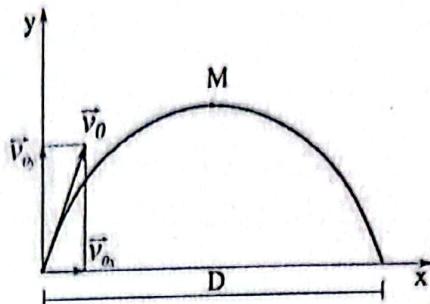
Из израза (21) и (22) се може видjetи да тангенцијална компонента вектора убрзања код криволинијског кретања задржава свој облик једнако као код праволинијског кретања, али се као последица криволинијске трајекторије појављује нормална компонента, која је директно пропорционална квадрату интензитета тренутне брзине, а обрнуто пропорционална полупречнику закривљености трајекторије. Примјетимо да је нормална компонента убрзања усмерена од материјалне тачке према центру замишљеног круга, формираног на трајекторији на такав начин да је материјална тачка сјециште тангенте и полупречника замишљеног круга. Због тога се нормално убрзање назива центрипетално¹⁰ убрзање.

У наставку ћемо размотрити два карактеристична случаја криволинијског кретања: коси хитац и кружно кретање. Први случај је интересантан због тога што се закон пута може аналитично решити, а други случај и због тога што се код кружног кретања појављују нове величине, карактеристичне не само за ову врсту кретања, већ и за осцилаторно и таласно кретање.

¹⁰ Центрипетално – „оно које је усмерено ка центру“.

3.4.1. Коси хитац

Коси хитац (слика 20) представља сложено кретање у гравитационом пољу, у којем се материјалној тачки саопшти одређена почетна брзина \vec{v}_0 која са x -осом гради угао α .



Слика 20. Коси хитац

Гравитационо поље дјелује гравитационим убрзањем усмјереним супротно y -оси, тј. $\ddot{g} = -g \cdot \hat{j}$. Са слике се види да су интензитети компонената вектора почетне брзине:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha ; \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha . \quad (23)$$

Пошто гравитационо убрзање дјелује (ка „доле“) само по y -оси, онда је кретање по x -оси једнолико и брзина остаје иста као и у почетку кретања. Међутим, по y -оси кретање је једнако убрзано – прецизније све до тачке M на слици 20 кретање је једнако успорено, а након тачке M једнако убрзано. У било којој тачки (x, y) трајекtorије косог хица вриједи да су брзине:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha ; \quad v_y = v_{0y} - g \cdot t . \quad (24)$$

Из горње једначине се интеграљењем могу наћи изрази за x и y компоненте:

$$x = v_{0x} \cdot t ; \quad y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 . \quad (25)$$

Уколико желимо да одредимо облик трајекtorије косог хица, елиминишимо вријеме из једне једначине (25) и убацимо је у другу. Тако добијемо:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 . \quad (26)$$

Горњи израз представља једначину параболе, што представља трајекtorију сваког косог хица. Израчунаћемо вријеме које је потребно да материјална тачка достигне максималну висину. Ово ћемо учинити посматрајући израз за тренутну брзину дуж y -осе, тј. $v_y = v_{0y} - g \cdot t$. Јасно је да је ова компонента брзине највећа само на почетку кретања, а затим се смањује све до тачке M у којој је ова компонента брзине једнака нули. Након проласка кроз тачку M материјална тачка поново добија брзину дуж y -осе, која све више расте, али добијамо вријеме лета материјалне тачке до тачке M:

$$t_{\max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} . \quad (27)$$

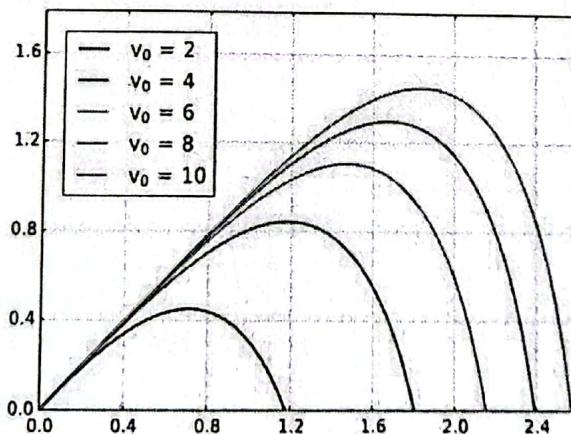
Ако уврстимо горњу вриједност у израз за y и средимо, добијемо максималну висину коју материјална тачка може досегнути приликом косог хица:

$$y_{\max} = v_{0,y} \cdot t_{\max} - \frac{1}{2} g \cdot t_{\max}^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (28)$$

Максимални домет материјалне тачке (D) при косом хицу се може добити на неколико начина. Један начин је да се израчуна укупно вријеме лета које је очигледно једнако двоструком времену трајања лета до тачке M, тј. $t_u = 2t_{\max} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Када се ово вријеме уврсти у израз (25) за x -компоненту и среди, добије се:

$$D = x_u = v_{0,x} \cdot t_u = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (29)$$

До истог резултата се могло доћи и из једначине (26) која представља квадратну једначину по x , па се њеним рјешавањем добијају два рјешења, од којих је једно тривијално ($x_1 = 0$), а друго оно које тражимо ($x_2 = D$). Међутим, све ово су математички идеализовани (и једноставни) примјери, док реалан коси хитац може да има знатно измијењену трајекторију, која се назива балистичка крива. На слици 21 су приказане балистичке криве при различitim почетним брзинама. Одступања од идеализоване параболе су евидентна при порасту почетне брзине, због све већег утицаја отпора ваздуха при кретању.

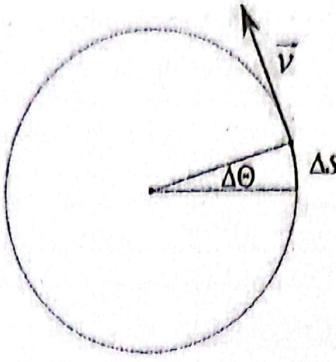


Слика 21. Балистичка крива¹¹

3.4.2. Кружно кретање

Кружно кретање је врста кретања у којој је трајекторија кружница, полупречника R , као што је приказано на слици 22. Материјална тачка која се креће по трајекторији кружнице за неко вријеме опише дјелић кружнице у дужини Δs и „пребрише“ угао $\Delta\theta$.

¹¹ Аутор „Geek3“ – сопствено лијело CC BY 3.0 <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=35727682>



Слика 22. Кружно кретање материјалне тачке

Како што је раније наведено, описани дио кружнице је повезан са полупречником кружнице и „пребрисаним“ углом преко релације $\Delta s = R \cdot \Delta \theta$. Ако сада убацимо овај израз у (7) за тренутну брзину добијемо:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cdot \Delta \theta}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = R \cdot \omega, \quad (30)$$

где је ω интензитет вектора угаоне брзине и по дефиницији представља први извод пребрисаног угла по времену. Израз (30) представља везу између угаоне брзине и линеарне брзине и мало касније ћемо видјети да је она тачније описана векторским производом. Уколико материјална тачка опише пун круг при кретању, онда ће „пребрисани“ (или описани) угао бити 2π радијана. Вријеме за које материјална тачка опише пун круг се означава са T и назива се период кретања¹². Инверзна вриједност периода кретања се

назива фреквенција $v = \frac{1}{T}$ и мјери се у херцима [Hz]. Сада се може извести веза између

угаоне брзине и фреквенције, тј. $\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v$. Аналогно линеарном убрзању, сада се

може дефинисати и интензитет вектора угаоног убрзања материјалне тачке:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{\omega}. \quad (31)$$

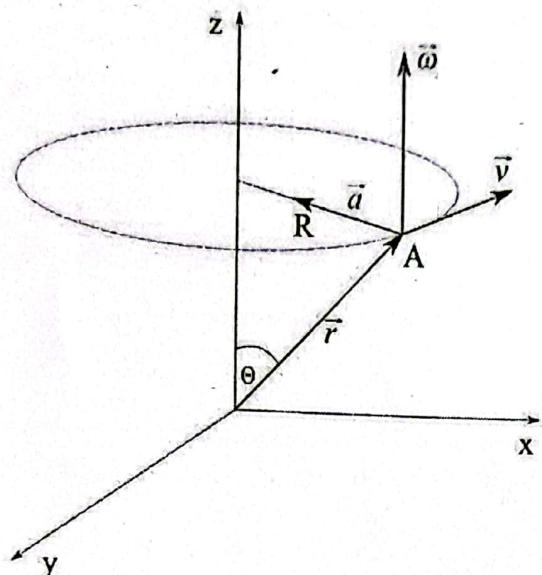
Како што је раније речено, веза између линеарне и угаоне брзине је описана векторским производом, што ће нам бити јасније ако погледамо слику 23. Материјална тачка се креће око z -осе по кружници радијуса R . Тачку A описује радијус вектор \vec{r} , који у односу на z -осу лежи под углом θ . Линеарна брзина \vec{v} је усмјерена дуж тангенте на кружницу. Са слике се види да је $R = r \cdot \sin \theta$, те ако овај израз убацимо у израз (30) који описује везу између интензитета линеарне и угаоне брзине добијемо:

$$v = \omega \cdot r \sin \theta, \quad (32)$$

што управо представља израз за интензитет вектора линеарне брзине код векторског производа између вектора угаоне и линеарне брзине. Из овога и слике 23 закључујемо да је линеарна брзина једнака векторском производу угаоне брзине и радијус вектора, тј.:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (33)$$

¹² Ово вријеме се означава величим словом T , како би се разликовало од било којег другог времена.



Слика 23. Веза између линеарне и угаоне брзине

Потражићемо везу између вектора линеарног убрзања, угаоне брзине и линеарне брзине, тако што пођемо од дефиниције линеарног убрзања (8) у којој ћемо примјенити релацију (33):

$$\ddot{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (34)$$

Горњи израз се може упростити уколико се ради о једноликом кружном кретању, где је $\vec{\omega} = \text{const.}$, па ће први члан у горњој релацији бити једнак нули, те добијамо:

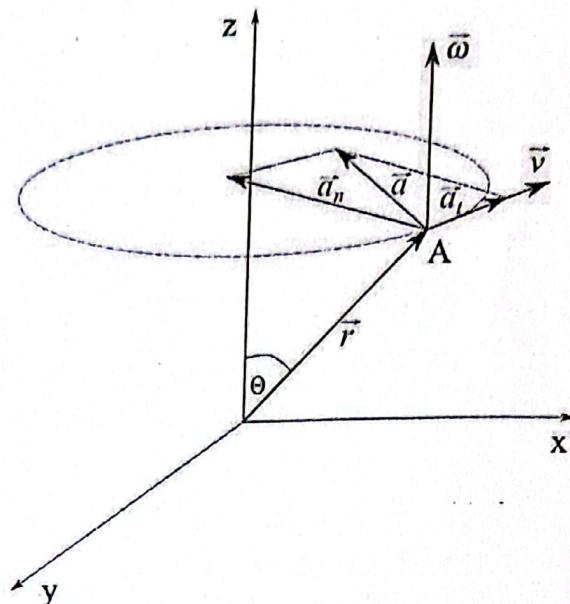
$$\ddot{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (35)$$

Задржаћемо се још на једноликом кружном кретању. Код таквог кретања се не мијењају интензитети ни угаоне ни линеарне брзине, тј. $|\vec{\omega}| = \text{const.}; |\vec{v}| = \text{const.}$ Поставићемо још једном питање какав је карактер овог кретања? Ако анализирамо израз (21) долазимо до закључка да не постоји компонента тангенцијалног убрзања, јер је $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$. У том случају укупно убрзање је једнако нормалној компоненти убрзања, тј. према (35) ова компонента је једнака $a_n = a_r = \omega \cdot v$ (овдје можемо узети само интензитет вектора, јер је између вектора $\vec{\omega}$ и \vec{v} прави угао). Ако умјето брзине уврстимо израз (30), добијемо $a_n = \omega \cdot R \cdot \omega = R \cdot \omega^2$. Добијени израз је идентичан изразу (22) за центрипетално убрзање којег смо раније извели, тј.: $a_n = R \cdot \omega^2 = R \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$. Можемо закључити да и код једноликог кржења материјалне тачке – ово кретање не можемо класификовати као кретање без убрзања. Оно је и тада убрзано кретање, јер увијек постоји нормална компонента убрзања.

Овај закључак смо и раније извели (код дефинисања криволинијског кретања), јер је свако кретање по закривљеној трајекторији – убрзано кретање!

Ако посматрамо слику 22, онда можемо закључити да она приказује случај једноликог кржења, јер је вектор линеарног убрзања усмјерен према центру кружне трајекторије. У општем случају, када би се материјана тачка кретала по кружној путањи промјенљивом

линеарном брзином, вектор линеарног убрзања би имао смјер као на слици 24 (конкретно на овој слици материјална тачка убрзава у смјеру обрнутом од казаљке на сату).



Слика 24. Вектор укупног линеарног убрзања код кружног кретања

Када постоји тангенцијално убрзање код кружног кретања, оно је једнако:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R \cdot \omega)}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha, \quad (36)$$

док је интензитет укупног убрзања једнак $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(R \cdot \omega^2)^2 + (R \cdot \alpha)^2}$.

Сада ћемо написати опште једначине рјешавања проблема кружног кретања, аналогно како смо то урадили код праволинијског кретања. Пођимо од дефиниције за угаону брзину $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ коју ћемо написати у облику $d\theta = \omega \cdot dt$, а затим интегралити лијеву и десну страну,

где добијамо $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega \cdot dt$ и коначно:

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega \cdot dt, \quad (37)$$

што представља закон „пребрисаног“ угла. Он је потпуно аналоган изразу (13), само што сада уместо пређеног пута и линеарне брзине фигуришу „пребрисани“ углови и угаона брзина. Уколико се ради о једноликом кружењу ($\omega = \text{const.}$), израз (37) се поједностављује у $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$. Међутим, уколико је угаона брзина функција времена (тј. зависна од времена), да би ову функцију нашли морамо кренути од израза за угаоно убрзање (31), па

када раздвојимо промјенљиве и интегрирамо, тј. $d\omega = \alpha \cdot dt \rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \alpha \cdot dt$, добијамо:

$$\omega = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha \cdot dt. \quad (38)$$

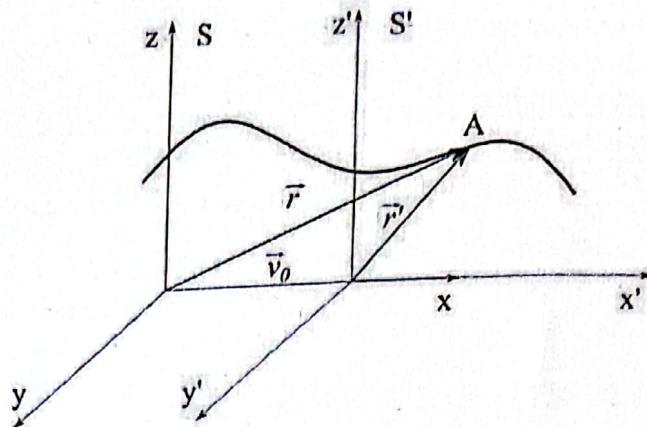
Ма како сложено кретање било, прво се ријеши једначина (38) и ово рјешење уврсти у (37), да би се нашао закон „пребрисаног“ угла. Међутим, ако је кружење са константним угаоним убрзањем ($\alpha = \text{const.}$), онда угаono убрзање може да изађе испред интеграла, који када се ријеши добијемо $\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$, што је опет аналоган израз добијен са линеарним величинама код праволинијског једнако-убрзаног кретања. Коначно, када се претходни израз уврсти у (37) и ријеши интеграл, добијемо $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$.

3.5. Галилејеве трансформације

Након што смо се упознали са начинима израчунавања кинематичких велиина, вратићемо се на референтне системе. Као што је речено, референтни систем треба да буде одабран на такав начин да он „апсолутно“ мирује у односу на материјалну тачку коју посматрамо. Наравно, разлог стављања ријечи „апсолутно“ под наводнике се заправо своди на то да је кретање мирујућег система занемариво у односу на кретање које посматрамо. Међутим, веома често се референтни систем може везати и за неко тијело које се равномјерно креће у односу на „мирујући“ систем. У том случају говоримо о инерцијалним референтним системима. Један једноставан примјер за инерцијални систем би био воз који се праволинијски креће неком константном брзином у односу на земљу. Путник у том возу устане са свог сједишта и започне кретање у вагону. Ако желимо да измјеримо кретање путника, морамо се упитати наприје у односу на који референтни систем вршимо мјерење брзине путника: у односу на земљу (мирујући систем) или у односу на воз (инерцијални систем). Наравно да резултат мјерења брзине неће бити исти у оба случаја.

Неинерцијални референтни системи су они који се крећу убрзано у односу на „мирујући“ референтни систем. Примјер овога би могло бити везивање референтног система за воз који се убрзано креће, или за воз који се креће једнаком брзином, али по прузи која није праволинијска. У том случају се јављају посљедице убрзавања (или успоравања) оваквих референтних система и о чему ће бити ријечи мало касније, у глави Динамика.

Вратимо се на инерцијалне референтне системе и нађимо начине трансформације величина из мирујућег система (нпр. земља) у инерцијални референтни систем (нпр. воз) и обратно. На слици 25 је приказана трајекторија материјалне тачке која се у тачки A може описати са два радијус вектора: ако тачку A посматрамо из непокретног система (S) – онда је радијус вектор тачке A једнак \vec{r} , или ако тачку A посматрамо из покретног система (S') – онда је радијус вектор тачке A једнак \vec{r}' . Како се покретни систем креће праволинијски (на лици 25 ово кретање је једнако дуж x – осе), онда се сваке секунде покретни систем удаљи од непокретног система за раздаљину $\vec{v}_0 \cdot t$.



Слика 25. Галилејеве трансформације

Тада можемо писати да је:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 \cdot t, \quad (39)$$

или скаларно: $x = x' + \vec{v}_0 \cdot t$, $y = y'$ и $z = z'$. Ово су Галилејеве трансформације координата.

Уколико потражимо први извод израза (39) добијемо $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{v}_0 \cdot \frac{dt}{dt}$, тј.:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (40)$$

или скаларно: $v_x = v'_x + v_0$, $v_y = v'_y$ и $v_z = v'_z$. Ово су Галилејеве трансформације брзина.

Уколико потражимо први извод израза (40) или други извод израза (39), добијамо:

$$\vec{a} = \vec{a}', \quad (41)$$

што значи да су убрзања једнака, мјерена из покретног или непокретног система! Ово се назива Галилејев принцип релативности.

Уколико мјеримо неку раздаљину (на пример желимо да измјеримо дужину стола у купеу вагона у возу), она би требала бити иста без обзира да ли је мјеримо из непокретног или из покретног система. Ово ћемо доказати помоћу релације (39):

$$L' = x'_2 - x'_1 = x_2 - v_0 \cdot t - x_1 + v_0 \cdot t = x_2 - x_1 = L. \quad (42)$$

Ипак, морамо да у горњем извођењу претпоставимо (имплицитно) да вријеме једнако тече у оба система (S и S'). Ово је нешто што уопште не доводимо у питање, тј. нама је сасвим разумљиво да ће часовник једнако мјерити вријеме у оба система. Ово је премиса на којој се заснива нерелативистичка или Њутновска физика. Међутим, данас знамо да постоји навјећа могућа брзина у универзуму – брзина свјетlostи. Ова чињеница даје ограничење изразу (40), јер се брзине не могу сабрати тако да резултат буде брзина већа од брзине свјетlostи. Посљедица овога је да вријеме неће једнако протицати у покретном и непокретном систему. На овим чињеницама лежи релативистичка физика, чију је основу дао Алберт Ајнштајн у својој Специјалној теорији релативности, о чему у увом курсу (на жалост) неће бити ријечи.

Задржавајући се на малим брзинама и нерелативистичкој физици јасно је да се прелаз из једног система у други може урадити прилично елегантно помоћу релација (39) и (40), али наравно – само под условима да се ради о прелазу између инерцијалних система.

4. ДИНАМИКА

Динамика изучава кретање узимајући у обзир и узroke који су довели до кретања. Узрок је интеракција (или међудјеловање) међу тијелима. Данас су у физици познате 4 основне интеракције: гравитациона, електромагнетна, нуклеарна слаба и нуклеарна јака. Сматра се да су у почетку стварања Универзума ове интеракције биле сједињене, али да је еволуцијом Универзума дошло до њиховог раздвајања. И мада се чини да би од свих набројаних интеракција управо гравитациона некако требала бити најбоље позната – чињенице говоре управо супротно. Иако смо са гравитационим пољем упознати од рођења (живимо у гравитационом пољу Земље), суштина преношења ове интеракције је до данас мистерија. Електромагнетна интеракција је интеракција између наелектрисаних тијела, а њени преносиоци су квanti електромагнетног поља – фотони. Нуклеарна јака и слаба интеракција су такве интеракције које се јављају у суб-атомским системима, атомским језгрима, њиховим конституентима и другим елементарним честицама.

Без обзира која је интеракција у питању – физичка величина која мјери величину интеракције се назива сила. Ову величину Њутн потпуно описује у своја три закона:

1. Тијело остаје у стању мировања (или једноликог кретања) све док на њега не дјелје неко друго тијело и промијени ово стање мировања (или једноликог кретања).
2. Уколико на неко тијело дјелује неко друго тијело, онда је мјера ове интеракције, тј. сила, једнака производу масе тог тијела и његовог убрзања, тј. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.
3. Ако једно тијело дјелује на друго тијело силом \vec{F}_{12} , онда и друго тијело дјелује на прво тијело једнаком силом супротног смијера \vec{F}_{21} , тако да је $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Ово се назива принцип акције и реакције.

Примјетимо да у првом Њутновом закону он не дефинише силу, али дефинише интеракцију, тј. међудјеловање и посљедице интеракције. Тек у другом закону Њутн експлицитно дефинише силу као производ масе и убрзања.

У даљем тексту ћемо навести примјере неких сила.

• Инерцијалне силе

У претходној глави смо поменули неинерцијалне референтне системе – оне који се крећу у односу на неки непокретни систем убрзано. Посљедица оваквог кретања је појава инерцијалних сила у њима. Уколико је убрзаше неинерцијалног система \vec{a}_i , тада ће инерцијална сила бити једнака:

$$\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}_i. \quad (43)$$

На примјер, једна од инерцијалних сила је центрифугална сила. Ова сила дјелује при ротационом и брзом окретању бубња у машини за прање веша, при чему се веш „залијепи“ за зидове бубња и на тај начин оциједи. Иста сила је одговорна у веома брзим центрифугалним сепарационим уређајима (ултрацентрифугама) у којима је могуће одвојити веома ситне честице у раствору (као нпр. седиментација крвних елемената у крви или процес одвајања крвне плаズме из крви). Центрифугалне сile се јављају у убрзаним (неинерцијалним) системима и посљедица су тога што је референтни систем убрзан. Покушаћемо објаснити ову тврђњу помоћу мисаоног експеримента – замислимо да се налазимо у великој округлој просторији без прозора, налик бубњу машине за веш, само постављене хоризонтално. Просторија може да се окреће око вертикалне осе, али са механизmom који је бешуман. Уколико се налазимо у таквој просторији и она започне лагано ротирати све док не успостави одређену брзину ротације. У том случају ће на све присутне почети дјеловати цетрифугална сила на такав начин да их, попут веша, „лијепи“ за зидове суда. Међутим, присутни учесници овог експеримента остају зачуђени, јер је за њих као посматраче из овог убрзаног система, сила мистериозног поријекла. Они не знају да се просторија окреће (сјетите се – механизам је бешуман) и није им јасно што их то „притишће“ за зидове округле просторије. Наравно, када посматрачи изађу из ове просторије и констатују да се она креће око своје осе, постаће им јасно зашто на њих дјелује цетрифугална сила. Све док се посматрачи налазе унутар неинерцијалног система, на њих дјелују инерцијалне сile – које су посљедице чињенице да је систем референције убрзан!

Наша планета Земља је такође убрзан систем – јер попут бубња ротира око своје осе. Инерцијална сила која се због ротације јавља на површини планете се назива Кориолисова сила и једнака је $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$, где је $\vec{\omega}$ угаона брзина окретања планете Земље око своје осе, а \vec{v} је брзина кретања тијела масе m на Земљи. Јасно је из ове једначине да због релативно мале брзине окретања Земље и кретања тијела по Земљи, утицај ове силе може бити велики једино на тијелима са великим масом, као што су ријеке, мора или водена пара у атмосфери (циклони и урагани). Утврђено је да у сјеверној хемисфери ваздух и водена тече у смјеру обрнутом од казаљке на сату, док у јужној хемисфери ово кружење десне обале ријека у сјеверној хемисфери и лијевих обала ријека у јужној хемисфери.

• Гравитациона сила

Иако се о суштини ове интеркације мало зна – она је експериментално потпуно позната и једнака:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g}. \quad (44)$$

Ова сила се назива и тежина, или сила теже, али тежина и маса тијела се не смију изједначавати. Маса тијела је фундаментална карактеристика неког тијела, иако ову величину и није тако једноставно дефинисати. Можемо је мјерити помоћу ваге, али ми тада заиста не мјеримо масу, него тежину. Примјер на слици 26 показује мјерење тежине у

лифту. Резултати мјерења ће бити различити и зависити од смјера кретања и убрзања лифта. Када лифт мирује – вага показује „нормалну“ тежину. Како је скала ваге прикључана у јединицама масе (килограмима), онда је при мириовању лифта и маса „нормална“. Међутим, уколико лифт убрзава према горе – вага ће показивати већу тежину, а уколико лифт убрзава према доле – вага ће показивати мању тежину. Приликом слободног пада вага би показивала да је тежина једнака нули! Али, у свим случајевима вага је мјерила само тежину, маса тијела је своје време остала иста.

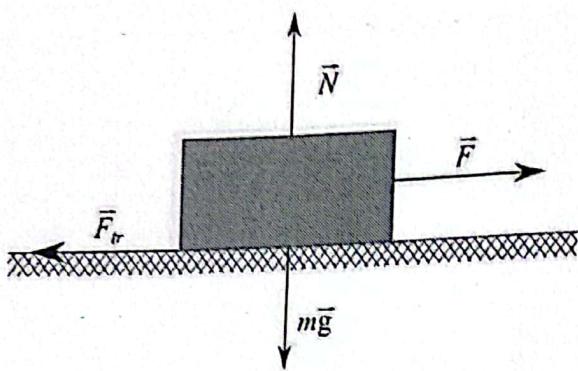


Слика 26. Мјерење тежине у лифту

Овако дефинисана маса се назива гравитациона маса, јер је дефинисана из гравитационог дјеловања (интеракције). Међутим, масу можемо дефинисати и на други начин – из другог Њутновог закона маса је једнака односу сile и убрзања тијела, тј. $m = \frac{\tilde{F}}{\tilde{a}}$. Овако дефинисана маса се назива инерцијална маса. Она просто означава мјеру инертности (или тромости) неког у односу на дејство сile. На пример, из искуства је познато да ће аутомобил убрзавати са мањим убрзаштем уколико је оптерећен масом свих 5 путника, него када је оптерећен само масом возача. Ово значи да је аутомобил веће масе инертији (тромији) од аутомобила мање масе. Поставља се питање да ли су ове две масе, гравитациона и инерцијала маса, једнаке? Наравно, маса је, као што је већ назначено, неодвојива карактеристика материје, а њени приједви „гравитациона“ и „инерцијална“ потичу од различитих приступа дефинисању једне – исте величине.

• Силе трења

Силама трења се бави наука која се назива трибологија, а суштина ових сила лежи у међумолекулским и међуатомским интеракцијама. Иако се ове силе феноменолошки прилично добро познају, наука и даље тражи одговоре на нека питања. Силе овог типа се разликују по томе да ли оне дејствују између материје која се налази у чврстом стању или у течној фази. Такво трење уколико се материја налази у чврстом стању називамо сухим (или спољашњим) трењем, док у течној фази називамо вискозним (или унутрашњим) трењем. Сухо трење дијелимо на трење при котрљању и трење при клизању. Размотримо најприје трење при клизању, слика 27.



Слика 27. Сила трења при клизању

На тијело дјелују сила тежине $m \cdot \vec{g}$ и вучна сила \vec{F} . Реакција на силу тежине је $\vec{N} = -m \cdot \vec{g}$ (по трећем Њутновом закону – колико тијело притишће подлогу, истом силом супротног интензитета ће подлога притискati тијело). Сила трења је једнака:

$$\boxed{\bar{F}_{tr} = \mu \cdot m \cdot \vec{g}}, \quad (45)$$

где је μ коефицијент трења, који зависи од карактеристика материјала тијела и подлоге. Из израза је јасно да коефицијент трења бездимензиона величина. Међутим, коефицијент трења зависи и од тога да ли се тијело креће или мирује. Због тога разликујемо статички коефицијент трења од динамичког коефицијента трења и вриједи да је $\mu_s > \mu_d$. Трење при котрљању точка или сфере описујемо једначином:

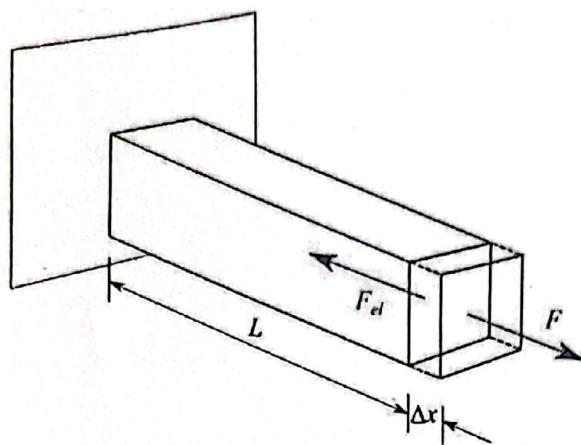
$$\boxed{F_{tr} = k \cdot \frac{N}{R}}, \quad (46)$$

Где је k коефицијент трења при котрљању, N реакција подлоге, а R полупречник котрљајућег тијела (ваљка или сфере). Треба напоменути да коефицијент трења k код котрљања није бездимензиона величина, већ има димензију дужине. Силе трења при котрљању су знатно мање од силе трења при клизању, те се ова чињеница користи код точкова, механичких лежајева и сл., када силу трења желимо минимализирати.

• Еластичне сile

Материјали се могу деформисати на разне начине када на њих дјелују спољашње сile. Ове деформације могу бити еластичне и нееластичне. Еластичне деформације су такве да када престане дејство спољашње сile – материјал се врати у првобитно стање. Нееластичне деформације се јављају када су спољашње сile веће, па након престанка дејства спољашње сile – материјал остане трајно деформисан. Ми ћemo се бавити само еластичним S која је једним својим крајем причвршћена за зид, док на други слободни крај дјелује спољашња сила F .





Слика 28. Еластичне силе

Шипка се при дејству спољашње силе издужи од првобитне дужине L за неку малу дужну Δx која представља апсолутно издужење шипке. Релативно издужење шипке је тада $\varepsilon = \frac{\Delta x}{L}$. Примјетимо да релативно издужење нема димензију и уobičajeno је да се оно

изражава у процентима¹³. Ако уведемо напон силе¹⁴, тј. силу по јединици површине $\sigma = \frac{F}{S}$, Хук (Robert Hooke) је показао да је релативно издужење пропорционално напону силе, тј. $\sigma \sim \varepsilon$. Уколико желимо да напишемо знак једнакости између ове двије величине, онда ће у тај израз ући константа E , тј.:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (47)$$

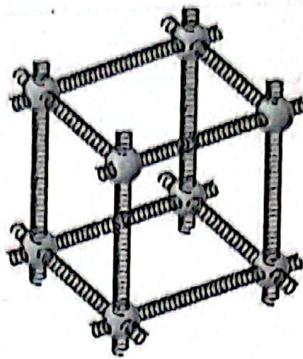
где E представља Јангов модул еластичности, који је карактеристика материјала од којег је шипка израђена. Ова константа нам показује колику силу је потребно примјенити по јединици површине да би се шипка еластично издужила за неколико процената.

По З. Њутновом закону, на дејство спољашње сile јавља се еластична сила, као реакција од стране материјала. Да би разумјели зашто се еластична сила јавља морамо посматрати материјал са већом „резолуцијом”, тј. на нивоу атома од којих је сачињена материја. Чврсто стање материје може бити у кристалној или аморфној¹⁵ форми и сачињено је од атома који заузимају одређене стабилне положаје, чији је модел приказан на слици 29.

¹³ Иако има изузетака, еластична област код већине материјала лежи у области где је релативно издужење реда величине тек неколико процената.

¹⁴ Примјетимо да напон силе има димензију притиска [Pa].

¹⁵ Кристална форма подразумијева да атоми заузимају положаје правилно распоређене у кристалну решетку. Већина чврсте материје углавном има овај облик уређења. Међутим, чврсто стање може да се добије и наглим хлађењем из растопа (течне фазе), при чему атоми немају довољно времена да заузму стабилне положаје као у кристалној форми. Можемо рећи да је аморфно стање заправо „замрзнуто“ течно стање материје.



Слика 29. Модел атома у чврстом кристалном стању

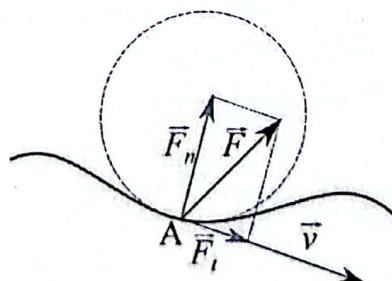
Хемијска веза између атома унутар чврстог стања материје приказана је на слици опругама тако да сада постаје јасан узрок појаве еластичне сile приликом еластичног деформисања материје. Користећи З. Њутнов закон, еластична сила ће бити по интензитету једнака спољашњој сили, само супротног смијера (слика 28), па можемо писати да је:

$$F_{el} = -F = -\frac{E \cdot S}{L} \cdot \Delta x = -k \cdot \Delta x, \quad (48)$$

где је $k = \frac{E \cdot S}{L}$ коефицијент еластичности. Овај коефицијент се може веома лако експериментално одредити (нпр. код опруге га одређујемо тако што оптеретимо опругу одређеном силом F и мјеримо њено издужење Δx).

• Силе код криволинијског кретања

У поглављу 3.4 у којем је било ријечи о убрзању код криволинијског кретања видјели смо да је убрзање увијек усмјерено према унутрашњости закривљене трајекторије. Примјењујући 2. Њутонов закон на ово убрзање видимо да је и сила усмјерена у истом правцу и смијеру. Ова сила се такође може разложити на правац дуж тангенте и правац нормално на тангенту, као што је на слици 30.



Слика 30. Силе при криволинијском кретању

За тачку А на криволинијској путањи видимо да се је укупна сила једнака $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$, где је \vec{F}_t тангенцијално (или цетрипетално) убрзање, а \vec{F}_n нормално убрзање, тј.:

$$F_t = m \cdot a_t = m \cdot \frac{dv}{dt}; \quad F_n = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R}. \quad (49)$$

Уколико желимо да нормално (или центрипетално) убрзање напишемо у векторском облику, онда ће оно бити једнако $\vec{F}_n = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$, где смо примјенили везу између линеарне и угловне брзине – једначина (30). Знак минуса ће бити јасан уколико центар

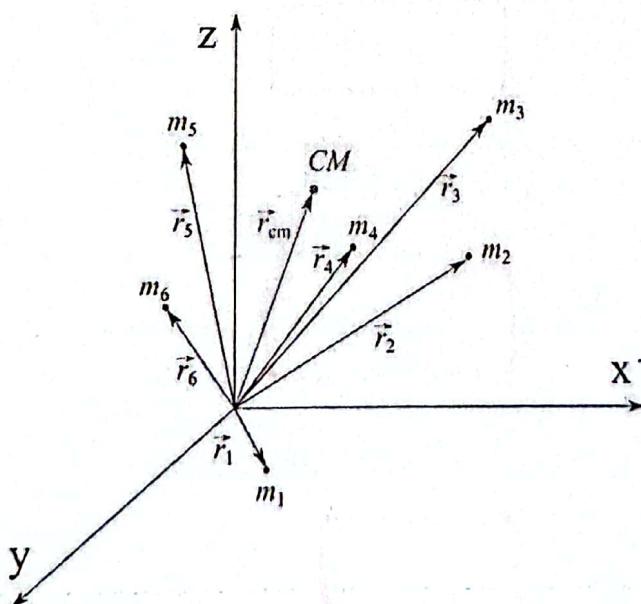
координатног почетка смјестимо у центар кружнице око које кружи материјална тачка масе m . Смјер радијус вектора \vec{r} и цетрипеталне (нормалне) сile \vec{F}_n ће бити супротан. Према томе, назив сile (цетрипетална) објашњава смјер њеног дејства.

Вратимо се на тренутак на центрифугалну силу, која је инерцијална сила и једнака је по интензитету цетрипеталној, али јој је смјер супротан (сјетите се – она „лијепи“ веш за зидове бубња). Поставља се питање, да ли је центрифугална сила реакција на цетрипеталну силу, по З. Њутновом закону? Иако би се на ово питање могао дати потврдан одговор, ипак то није тако. Замислимо да завежемо лопту за једну опругу и вртимо ју по хоризонталној равни, по кружној путањи. Еластична сила опруге је цетрипетална сила (усмјерена ка центру), док је сила којом лопта дјелује на опругу – реакција на еластичну силу. Центрифугална сила је са друге стране „одговор“ на чињеницу да је систем неинерцијалан (убрзан) и она се јавља као инерцијална сила у неинерцијалном систему. Овакве сile се често називају и псеудо-сile. Дакле, центрифугална сила такође дјелује на лопту, као и цетрипетална – тј. обје сile дјелују на исто тијело. Због те чињенице оне нису акција и реакција (сјетите се: акција је дејство једног тијела на друго, а реакција је дејство другог тијела на прво, тј. акција и реакција не могу дјеловати на исто тијело).

4.1. Центар масе система материјалних тачака

Када имамо мноштво материјалних тачака које врше кретање, веома је тешко описати кретање овог система. У општем случају за егзактно описивање овог система морали бисмо написати онолико једначина кретања (2. Њутнов закон) колико има материјалних тачака. Ако је овај број веома велики, онда се проблем своди на рјешавање великог система једначина. Данас је то у принципу могуће урадити употребом рачунара, али можемо показати да се овај проблем може много елегантније ријешити – рјешавањем само једне једначине.

На слици 31 је приказан систем материјалних тачака различитих маса у правоуглом Декартовом систему. Свака материјална тачка је описана њеним радијус вектором.



Слика 31. Центар масе система материјалних тачака

У том случају можемо увести вектор центра масе на сљедећи начин:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (50)$$

што се може написати и у скаларној форми: $x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}$, $y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}$ и $z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}$

Центар масе који је дефинисан на овај начин представља једну тачку која би била у стању репрезентовати цијели систем материјалних тачака и то на такав начин као да је маса цијelog система концентрисана у тој тачки центра масе. Ако је поље у којем посматрамо систем материјалних тачака хомогено (на пријер гравитационо поље се може сматрати хомогеним на малим разликама висина), онда се центар масе управо поклапа са тежиштем тијела. Тежиште тијела је тачка у којој је концентрисана сва тежина тијела (сјетимо се, маса није исто што и тежина) и не мора се поклапати са центром масе, нарочито у нехомогеним пољима.

Ако је центар масе дефинисан на такав начин да репрезентује цијели систем материјалних тачака, онда је оправдано очекивати да је кретање система материјалних тачака могуће описати кретањем једне тачке – центра масе. Ово ћemo доказати на сљедећи начин – ако

диференцирамо по времену израз (50), добићемо $\bar{v}_{cm} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}$, где смо

претпоставили да се масе материјалних тачака не мијењају у току времена. Претходни израз можемо написати и овако:

$$m \bar{v}_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i, \quad (51)$$

што значи да смо суму импулса¹⁶ система материјалних тачака замјенили са само једним импулсом – импулсом центра масе! Ако израз (51) још једном диференцирамо добићемо:

$$m \bar{a}_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i. \quad (52)$$

На другу страну, ако посматрамо систем материјалних тачака и за сваку од њих напишемо једначину кретања сходно 2. Њутновом закону, тј.: $m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1$, $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2$, $m_3 \vec{a}_3 = \vec{F}_3$, ..., $m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n$. Ако све те једначине сумирамо – добићемо:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (53)$$

Ако упоредимо десну страну израза (52) и лијеву страну израза (53), видимо да су оне једнаке, тј. онда закључујемо да мора важити једнакост и лијеве стране (52) са десном страном (53), тј.:

$$m \bar{a}_{cm} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (54)$$

¹⁶ Импулс (или количина кретања) тијела се дефинише као производ масе тијела и његове брзине, тј. $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$



Израз (54) представља доказ да систем јединачина који описује кретање мноштва материјалних тачака можемо описати са само једном јединачином која описује кретање једне тачке – центра масе. Центар масе нам евидентно веома елегантно помаже у решавању оваквих проблема, где се посматра кретање великог броја материјалних тачака.

Узмимо за примјер грађевински чекић, чији је центар масе (и тежиште) приказано на слици 32 (лијево) и његова путања приликом косог хица чекића (десно). Ма како компликовано изгледало кретање чекића (он ће приликом лета ротирати око свог центра масе), можемо видjetи да се његов центар масе креће као класичан и раније описан коси хитац.

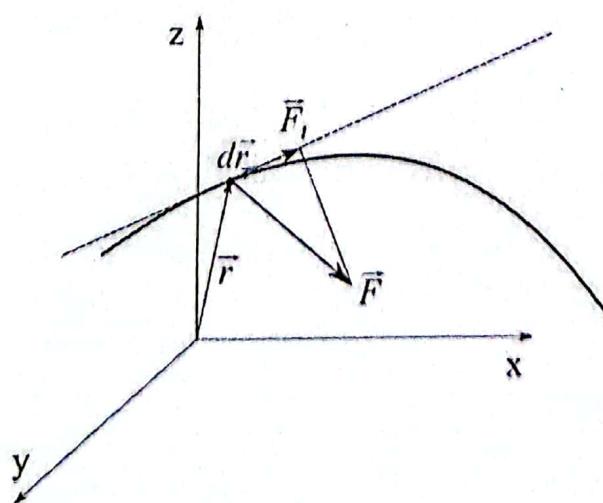


Слика 32. Тежиште чекића (лијево) и његов коси хитац (десно)

4.2. Рад, снага и енергија

4.2.1. Рад

Уколико сила дејствује на материјалну тачку и она при томе врши кретање – онда можемо израчунати рад којег сила врши. У оквиру овог курса физике, обухватићемо механички рад – тј. рад којег механичке сile врше, али потпуно исти принцип је уколико и друге сile врше рад (нпр. попут сile електричног поља). На слици 33 приказана је трајекторија материјалне тачке и дејство сile у некој тачки од интереса.



Слика 33. Сила која врши механички рад на неком путу

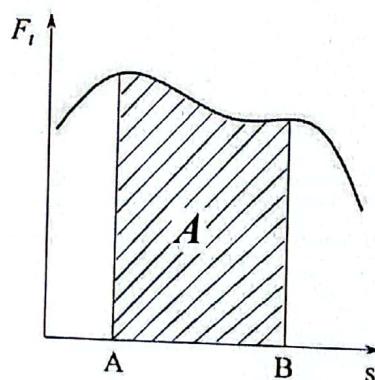
Нека материјална тачка направи диференцијално мали помак $d\vec{r}$ на трајекторији. Тада сила \vec{F} која дјелује на материјалну тачку (према удублjenости криве трајекторије) врши диференцијално мали механички рад, који се дефинише као:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (55)$$

Из израза (55) се види да је диференцијално мали рад скалар, јер је једнак скаларном производу вектора сile и вектора диференцијално малог помака. Мјерна јединица је јул [J]. Раније смо показали да је интензитет диференцијално малог помака једнак диференцијално малом путу, тј. $dr \approx ds$, па израз (55) можемо написати да је $dA = F \cdot ds \cdot \cos \alpha(\vec{F}, \vec{r})$. Како је са слике 32 видљиво, $F \cdot \cos \alpha(\vec{F}, \vec{r}) = F_t$, тј. видимо да само тангенцијална сила (она која врши дејство дуж тангенте) врши рад, тј. $dA = F_t \cdot ds$, док је укупан рад којег сила изврши на неком путу једнак интегралу дејства тангенцијалне сile дуж читавог пута:

$$A = \int_A^B F_t \cdot ds. \quad (56)$$

Физички смисао једначине (56) ће бити разумљивији ако се графички представи зависност тангенцијалне сile дуж трајекторије. У том случају укупан рад ће бити (интегрална¹⁷⁾) површина испод криве коју тангенцијална сила врши на путу од тачке A до тачке B, што је приказано на слици 34.



Слика 34. Рад као интеграл површине испод криве

Размотримо специјалан случај када вектор сile поклапа са вектором \vec{r} , тј. $\cos \alpha(\vec{F}, \vec{r}) = 1$ и нека је сила F константна величина дуж дијела пута од тачке A до тачке B. У том случају рад се своди на $A = \int_A^B F \cdot ds \cdot \cos \alpha(\vec{F}, \vec{r}) = F \cdot \int_A^B ds = F \cdot s$.

4.2.2. Снага

Да бисмо објаснили појам снаге, замислимо да се одеђени терет мора подигнути на одређену висину (тј. треба да се изврши рад ΔA), те да су нам на располагању два

¹⁷ Смисао математичке операције интеграљења неке функције $y = f(x)$ се своди на налажење површине испод криве коју ова функција описује дуж x-осе.

електромотора. Први електромотор ће овај рад обавити за вријеме Δt_1 , док ће други електромотор исти рад обавити за неко краће вријеме Δt_2 . Ова чињеница нас наводи на закључак да је други електромотор снажнији. Сада можемо дефинисати појам снаге, тј. снага је једнака брзини вршења механичког рада. У нашем мисаоном експерименту, снага првог електромотора би била једнака $P_1 = \frac{\Delta A}{\Delta t_1}$, док би снага другог електромотора била једнака $P_2 = \frac{\Delta A}{\Delta t_2}$ и из овога је јасно зашто је $P_1 < P_2$.

Али шта ако се снага мијења у току времена? Као што се тренутна брзина кретања тијела дефинише као први извод пређеног пута, тако можемо дефинисати и тренутну снагу – као први извод вршења рада:

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (57)$$

Из израза (55) и (57) налазимо да је $P = \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot d\vec{r} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$. Ако претпоставимо да се сила не мијења у току времена и препознајући да је $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, добијамо још један израз за рад $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (који вриједи за $\vec{F} = \text{const.}$).

4.2.3. Енергија

Да бисмо разумјели шта је енергија вратимо се на мисаони експеримент са два електромотора из поглавља Снага. Под условом да су оба електромотора исправна – они ће бити у стању да изврше рад само уколико им се обезбиједи електрична енергија. Они неће бити у стању да функционишу без енергије, тј. енергију можемо дефинисати као способност тијела (у нашем примјеру електромотора) да изврши рад.

Али вратимо се појму енергије и упитајмо се шта је она заправо, шта чини енергију? Из нашег мисаоног експеримента са електромоторима, енергија је електрична, тј. потиче из електричне мреже у виду електричне струје. Али и електрична струја је настала из одређеног вида енергије: сагоријевањем фосилних горива у термоелектрани, или механичком снагом ријеке која је покренула турбину и генерисала електричну струју (тачније електричну енергију), или конверзијом сунчеве¹⁸ свјетlostи у електричну енергију (фото-електрична конверзија)... итд. Енергија је јединствено својство материје и поља, она је неуништива и посједује својство трансформисања из једног вида у други вид постојања, али при томе не може нестати или настати из ничега. Енергија може бити различитих типова (механичка, гравитациона, електрична, хемијска, магнетна, нуклеарна, звучна, топлотна...), али ми ћemo у овом курсу посматрати механичку енергију која се дијели на кинетичку и потенцијалну енергију.

- Кинетичка енергија

Ову врсту енергије тијело има усљед тога што тијело врши кретање, тј. чињеница да тијело посједује одређену брзину имплицира да посједује и енергију. Да бисмо извели израз за

¹⁸ Генерализујући наше разматрање – готово сва енергија коју данас користимо потиче од Сунца, наше звијезде која даје живот органској материји, својом топлотом ствара вјетрове и водене токове!

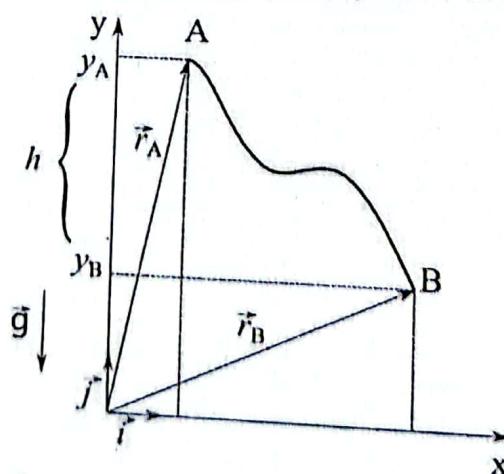
кинетичку енергију, претпоставићемо да је тијело сву кинетичку енергију добило и одређеног рада. Овај рад је нека сила \vec{F} извршила над тијелом, како би оно постигло крајњу брzinу v . Знајући да само тангенцијална компонента брзине врши рад, уместо F ћемо узети интензитет тангенцијалне компоненте F_t . Тада је $dA = F_t \cdot ds = F_t \cdot v \cdot dt$, где смо искористили израз за тренутну брзину $v = \frac{ds}{dt}$ и из њега изразили ds . Ако искористимо израз за тангенцијалну силу (49) и уврстимо у израз за рад, добијемо $dA = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = m \cdot v \cdot dv$. Ако интегрирамо лијеву и десну страну претходног израза добијемо:

$$A = \int m \cdot v \cdot dv = m \cdot \int v \cdot dv = \frac{m \cdot v^2}{2} = E_k. \quad (58)$$

Као што се може видјети, кинетичка енергија квадратно зависи од брзине, а линеарно од масе тијела.

• Потенцијална енергија

Тијело може посједовати енергију, а да се при томе не креће. Уколико се тијело налази у физичком пољу, оно може посједовати енергију само због свог положаја којег има у пољу. Уколико је у питању гравитационо поље, онда ће висина тијела, у односу на неки нулти (референтни) положај, одредити количину енергије коју тијело посједује на тој висини. Да бисмо ово разумјели замислимо да двије идентичне стаклене чаше испуштимо, прву са висине од 10 центиметара, а другу са висине 150 центиметара. Интуитивно знамо да ће се ова друга чаша вјероватно¹⁹ разбити, док прва вјероватно неће. Очигледно је да ће друга чаша бити разбијена јер је имала већу потенцијалну енергију, због тога што је испуштена са веће висине. Покажимо зашто тијело добија већу енергију само зато што се налази на већој висини. На слици 35 је приказано кретање тијела из тачке A (са већом висином) у тачку B (са мањом висином). Кретање се врши потпуно произвољном путањом, али са тачно одређеном почетном (A) и крајњом (B) тачком, чији су радијус вектори \vec{r}_A и \vec{r}_B . Претпоставимо да тијело у обје тачке мирује, тј. мирује на почетку (A) и на крају кретања (B).



Слика 35. Потенцијална енергија у гравитационом пољу

¹⁹ Ријеч „вјероватно“ треба схватити само у смислу да чаша може бити израђена евентуално и од чвршћег стакла, или пасти на такав начин да се не разбије.

Гравитационо поље дјелује супротно вертикалној оси, тј. $\vec{g} = -g \cdot \vec{j}$. Радијус вектор тачке A је $\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$, а радијус вектор тачке B је $\vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$. На тијело дјелује само сила теже $\vec{F} = \vec{F}_g = m\vec{g} = -mg \cdot \vec{j}$, па можемо израчунати укупан рад тијела од A до B:

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = m\vec{g} \cdot \int_A^B d\vec{r} = m\vec{g} \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_B). \quad (59)$$

Уколико у горњем изразу израчунамо скаларни производ, добијемо:

$$A = m\vec{g} \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_B) = -mg \cdot \vec{j} \cdot (x_A \vec{i} + y_A \vec{j} - x_B \vec{i} - y_B \vec{j}) = mg(y_B - y_A) = mgh, \quad (60)$$

где смо искористили да је скаларни производ јединичних вектора $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, као и $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ те да је $(y_B - y_A) = h$. Као што видимо из израза (60) рад којег изврши гравитациона сила једнака је производу mgh , тј. пропорционалан је разлици висина између тачке A и B. Овај рад је добијен на рачун утрошене потенцијалне енергије, па је према томе:

$$\Delta E_p = mgh. \quad (61)$$

При томе морамо увидјети двије важне чињенице:

- Израз (61) показује разлику потенцијалних енергија и оставља потпуну слободу одабира референтне потенцијалне енергије. За планету Земљу, у њеном гравитационом пољу, уобичајена пракса је да се ниво мора узме за нулту (референтну) потенцијалну енергију, али и ово је заправо ствар договора. Потпуно је прихватљиво одабрати и неки други (погоднији) референтни ниво у односу на којег ћемо рачунати потенцијалну енергију.
- Разлика потенцијалне енергије зависи само од разлике координата по y -оси, и то од разлика у крајњим тачкама. Разлика потенцијалне енергије не зависи од промјене осталих оса²⁰. Оно што је још занимљивије – разлика потенцијалних енергија зависи само од крајњих тачака и уопште не зависи од облика путање! Ако би израчунали укупан рад по затвореној (и призвољној) путањи ABA, онда би тај рад био једнак нули, тј. $A = \oint \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = 0$. Овај резултат је очекиван, јер на путу AB добијемо рад A , али исти тај рад морамо „уложити“ да би тијело поново вратили из тачке B у тачку A. То значи да је укупан рад по затвореној путањи једнак нули. Ове сile називамо конзервативне, а физичка поља називамо конзервативним пољима (гравитационо поље је очигледно конзервативно). Сада можемо рад конзервативне сile приказати преко разлике потенцијалних енергија у крајњим тачкама (A и B) на сљедећи начин:

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -[E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)]. \quad (62)$$

Сile код којих рад зависи од пута називају се неконзервативне сile. Примјер је сила трења код које је јасно да ће ова сила веома зависити од путање.

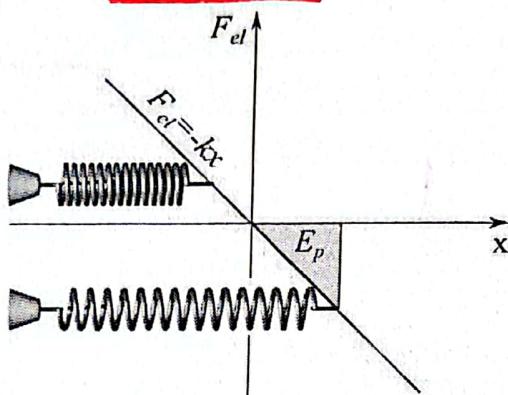
²⁰ Слика 34 је приказана дводимезијоно због једноставнијег приказа, међутим – потпуно идентично извођење би било да смо радили у све три димензије, и опет би разлика потенцијалних енергија зависила само од разлике вертикалних координата, тј. од разлике у висинама тачака A и B.

Потенцијална енергија не мора долазити само од гравитационе сile. Еластичне сile, описане изразом (48) такође могу довести до стварања потенцијалне енергије. Уколико израчунамо рад добијен помоћу еластичних сила, добићемо:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_{el} \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2), \quad (63)$$

где ако одаберемо да је $x_2 = 0$, добијамо коначан израз за потенцијалну енергију која потиче од еластичних сила, тј.

$$A = \frac{1}{2} kx^2 = E_p. \quad (64)$$



Слика 36. Еластична потенцијална енергија

Како што смо већ показали да рад представља површину испод криве у зависности сile од пута (слика 34), на сличан начин можемо показати и да је рад еластичних сила једнак површини испод праве зависности еластичне сile од помјерања (истезања или сабирања) опруге, слика 36. Права на слици има негативан коефицијент, јер је $F_{el} = -k \cdot x$ и функција је линеарно опадајућа, али површине испод или изнад праве одређују количину потенцијалне енергије коју опруга може имати приликом њеног сабирања или истезања. На слици 35 је осјенчана потенцијална енергија приликом издужења опруге.

4.3. Закони одржања

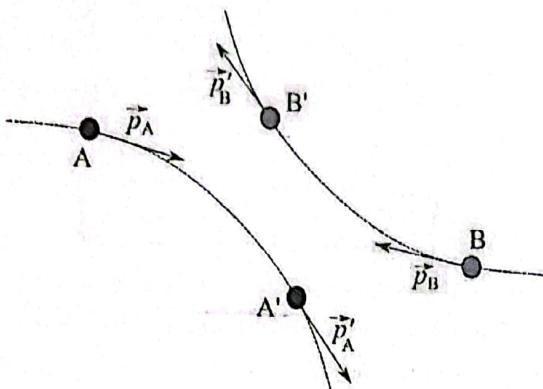
У природи постоји неколико фундаменталних законова. Када кажемо фундаментални, онда мислимо на чињеницу да су ови закони неупитни и важе у свим системима, без обзира на њихову димензију или стање. Међу њима се издвајају закони одржања количине кретања (или импулса), закон одржања момента импулса и закон одржања енергије²¹. На питање зашто су ови закони одржања међу фундаменталним законима, одговор даје природа самог Универзума, у којем постоје одређене правилности и симетрије – а као природна посљедица ових симетрија настају закони одржања²².

²¹ Закон одржања масе можемо подвести под закон одржања енергије, јер постоји еквиваленција између масе и енергије, која је по Ајнштајну једнака $E = m \cdot c^2$. Ипак и нажалост, детаљније о овоме неће бити ријечи у овом курсу.

²² Детаљније доказивање ове тврдње излази изван програма овог курса, али уколико узмемо у обзир да је наш Универзум хомоген и изотропан 4-димензиони простор (простор са 3 просторне и једнакоправном временском координатом), из захтјева за различитим облицима инваријантности произилазе и закони

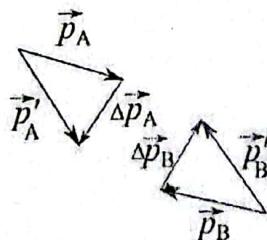
4.3.1. Закон одржања импулса (количине кретања)

Објаснићемо закон одржања импулса уз помоћ слике 37, на којој су приказана два тијела која скрећу са својих првобитних путања због међусобне интеракције. У овом случају са слике интеракција између њих је одбојна (нпр. нека су у питању позитивно наелектрисане честице које пролазећи једна поред друге одбојно интерагују). Претпоставка је да су тијело А и тијело В изоловани од утицаја интеракција које потичу од других тијела. У том случају кажемо да је посматрани систем изолован.



Слика 37. Импулси тијела прије и након интеракције

У неком тренутку t прво тијело је било у тачки А, а друго тијело у тачки В; прво тијело је имало импулс $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A$, а друго тијело је имало импулс $\vec{p}_B = m_B \vec{v}_B$. Након одбојне интеракције оба тијела су промијенила своју путању и у неком тренутку t' прво тијело је било у тачки А', а друго тијело у тачки В'; прво тијело је имало импулс $\vec{p}'_A = m_A \vec{v}'_A$, а друго тијело је имало импулс $\vec{p}'_B = m_B \vec{v}'_B$. Као што видимо са слике 37, због интеракције је дошло до промјене импулса и код тијела А и код тијела В (чак и да интензитети импулса нису промијенили интензитет – дошло је до промјене смјера импулса код оба тијела). На слици 38 је приказано колика је промјена импулса код тијела А и код тијела В. Ово је израчунато тако што су импулси тијела А и тијела В транслирани у исти заједнички почетак, како би се израчунала разлика импулса $\Delta\vec{p}_A$ и $\Delta\vec{p}_B$.



Слика 38. Радика (промјена) импулса код тијела А и В

Са слике 38 се види да је $\Delta\vec{p}_A = \vec{p}'_A - \vec{p}_A$, као и да је $\Delta\vec{p}_B = \vec{p}'_B - \vec{p}_B$. Нека је временски интервал $\Delta t = t' - t$ (вријеме које је протекло између тренутака у којима су одређивани импулси прије и након интеракције). Познавајући везу између импулса тијела и сile, тј.

одржања. Тако на пример, ако захтјевамо да је систем инваријантан у односу на трансацију – из њега произилази закон одржања импулса; инваријантност на ротацију нам даје закон одржања момента импулса, док инваријантност у односу на временску трансацију даје закон одржања енергије.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, \quad (65)$$

можемо искористити 3. Њутнов закон који каже да је сила којом тијело A дјелује на тијело B једнака по интензитету, а супротна по смјеру сили којом тијело B дјелује на тијело A, тј.:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \quad (66)$$

Ако искористимо израз (66) и (65), знајући изразе за $\Delta \vec{p}_A$ и $\Delta \vec{p}_B$, добијемо:

$$\frac{\Delta \vec{p}_A}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_B}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\vec{p}'_A - \vec{p}_A}{\Delta t} = -\frac{\vec{p}'_B - \vec{p}_B}{\Delta t}, \quad (67)$$

те ако након скраћивања Δt са обе стране напишемо горњи израз тако да све импулсе прије интеракције ставимо са једне стране једнакости, а све импулсе након интеракције са друге стране једнакости, добијемо:

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B = \text{const..} \quad (68)$$

Горњи израз представља закон одржања импулса који каже да се збир импулса прије интеракције одржава и једнак је збиру импулса након интеракције.

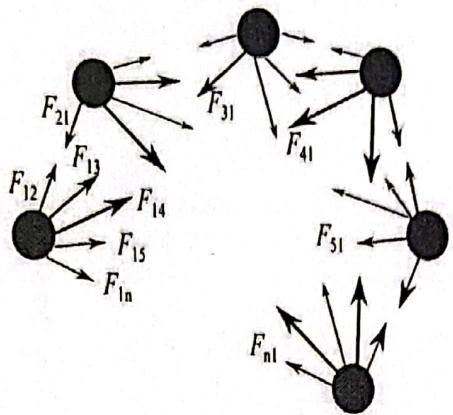
До истог закључка можемо доћи много брже и ефикасније уколико искористимо израз (65) за силу, али написан у диференцијалном облику, тј.:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (69)$$

Израз (69) представља 2. Њутнов закон написан у општијем облику од израза којег смо претходно представили (као производ масе и убрзања). У горњем облику 2. Њутнов закон дозвољава да се и маса мијења током времена (тј. да је функција од времена), што је у већини примјера реалан случај²³. Сада је сила којом тијело A дјелује на тијело B једнака $\vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$, док је сила којом тијело B дјелује на тијело A једнака $\vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$. Уврштавајући ове изразе у израз (66) добијемо: $\frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0$, а ово ће бити тачно једино када је израз у загради једнак константи, тј. опет добијемо израз (68).

Закон одржања импулса можемо генерализовати на неограничен број тијела (честица), али и даље остаје важан захтјев да систем, ма колико велики био, остане изолован, тј. да не постоји интеракције изван тог система. На слици 39 је приказан изолован систем од n -честица.

²³ На примјер, кретање ракете је један очигледан примјер гдје се маса посматраног тијела (ракете) веома брзо мијења, јер ракета брзо троши гориво. Па и приликом кретања аутомобила се такође маса мијења (смањује, јер аутомобил троши гориво) током времена, али знатно спорије. Но, у већини случајева масу сматрамо константном величином.



Слика 39. Закон одржања импулса за систем од од n -изолованих честица

На слици можемо видјети да прво тијело интерагује са свим осталим тијелима силама \vec{F}_{12} , \vec{F}_{13} , \vec{F}_{14} , \vec{F}_{15} , ..., \vec{F}_{1n} . Међутим, свако од ових тијела интерагује са првим тијелом по З. Њутновом закону (принципу акције и реакције) силом истог интензитета, али супротног смјера, тј. \vec{F}_{21} , \vec{F}_{31} , \vec{F}_{41} , \vec{F}_{51} , ..., \vec{F}_{n1} . Ако се премјестимо у друго тијело, оно „осјећа“ интеракцију са свим осталим тијелима²⁴, тј. \vec{F}_{21} , \vec{F}_{23} , \vec{F}_{24} , \vec{F}_{25} , ..., \vec{F}_{2n} , али и остала тијела интерагују са другим тијелом једнаким и супротно усмјереним силама, тј. \vec{F}_{12} , \vec{F}_{32} , \vec{F}_{42} , \vec{F}_{52} , ..., \vec{F}_{n2} . Аналогно, можемо видјети које сile дјелују на i -то тијело, где $i=1,..,n$. Сада можемо написати једначине кретања (по 2. Њутновом закону), познавајући које све сile дјелују на i -то тијело:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 v_1) &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \dots + \vec{F}_{1n}, \\ \frac{d}{dt}(m_2 v_2) &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{25} + \dots + \vec{F}_{2n}, \\ \frac{d}{dt}(m_3 v_3) &= \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{35} + \dots + \vec{F}_{3n}, \\ &\vdots & & \vdots & & \vdots \\ &\vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}(m_n v_n) &= \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{n3} + \vec{F}_{n4} + \dots + \vec{F}_{n,n-1}. \end{aligned} \tag{70}$$

Ако саберемо свих n једначина система, добићемо да је:

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots + m_n v_n) = 0. \tag{71}$$

Збир на десној страни мора бити једнак нули, јер свака сила акције \vec{F}_{ij} има своју силу реакције $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ која је истог интензитета и супротно усмјерена. Из израза (71) добијамо

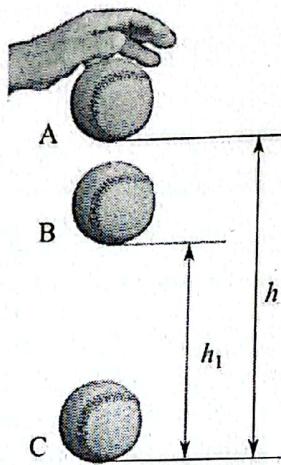
²⁴ На слици нисмо експлицитно означили све ове интеракције, ради прегледности слике.

да у том случају мора бити $m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 + \dots + m_nv_n = const.$, тј. закон одржања импулса вриједи за неограничено велики (и изолован) број честица.

4.3.2. Закон одржања енергије

Енергија не може да се уништи нити да се створи из „ничега“, она је у стању да мијења свој облик и прелази из једног начина свог експонирања у други. Показаћемо на неколико примјера на који се начин потенцијална енергија претвара у кинетичку енергију.

Узмимо на примјер да из руке испустимо бејзбол лоптицу са неке висине h , као што је приказано на слици 40. Размотрићемо 3 положаја лоптице и израчунати њену укупну енергију и то: у почетном положају (A), у неком међуположају у току слободног пада лоптице (B) и у крајњем положају када лоптица падне на под (C).



Слика 40. Слободан пад бејзбол лоптице

Уколико је прије испуштања у тачки А лоптица мировала, онда је она имала само потенцијалну енергију, док кинетичку енергију лоптица није имала (јер мирује):

$$E_{pA} = mgh ; E_{kA} = 0 , \quad (72)$$

што значи да је укупна енергија једнака: $E = E_{pA} + E_{kA} = mgh$.

Када се бејзбол лоптица нађе на висини h_1 , она ће имати обје компоненте енергије, и потенцијалну и кинетичку:

$$E_{pB} = mgh_1 ; E_{kB} = \frac{mv_B^2}{2} , \quad (73)$$

јер је падајући слободним падом лоптица добила брзину која је у тачки В једнака v_B^2 .

Знајући да је до тачке В лоптица прешла пут који је једнак $s = h - h_1$, са убрзањем g , можемо израчунати квадрат брзине у тачки В, користећи релацију која повезује пут, убрзање и брзину²⁵, тј. $v_B^2 = 2g \cdot s$. Ако израчунамо укупну енергију у тачки В, добијемо:

²⁵ Ову релацију можемо добити знајући да је кретање једнако убрзано са константним убрзањем g , па ако знајмо да је $v = g \cdot t$ и да је $s = (g \cdot t^2)/2$, елиминацијом времена из ове двије једначине добијемо коначно израз $v^2 = 2g \cdot s$.

$$E_B = E_{pB} + E_{kB} = mgh_1 + \frac{mv_B^2}{2} = mgh_1 + \frac{m \cdot 2g(h-h_1)}{2} = mgh. \quad (74)$$

Како што видимо енергија у тачки В је остала једнака по износу у тачки А, тј. није се промијенила. Израчунајмо сада енергију на крају слободног пада, у тачки С. Сада ће бејзбол лоптица имати само кинетичку енергију, јер смо потенцијалну енергију рачунали од нултог референтног нивоа који је једнак висини пода.

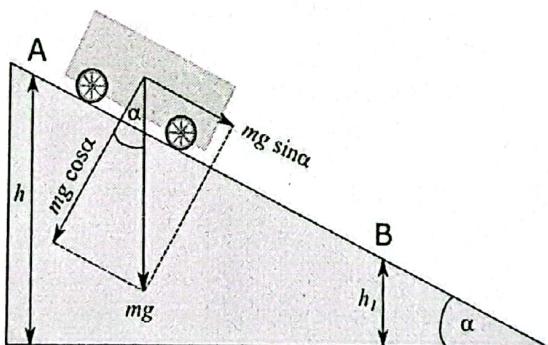
$$E_{pC} = 0 ; E_{kC} = \frac{mv_C^2}{2}, \quad (75)$$

Ако искористимо да је $v_C^2 = 2g \cdot h$, можемо израчунати укупну енергију лоптице у тачки С:

$$E_C = E_{pC} + E_{kC} = 0 + \frac{mv_C^2}{2} = \frac{m \cdot 2gh}{2} = mgh. \quad (76)$$

Из овог једноставног примјера закључујемо да је закон одржања енергије у важности и да се енергија приликом слободног пада мијења из потенцијалне у кинетичку енергију.

Наредни примјер на којем ћемо проверити закон одржања енергије је кретање тијела без трења низ косу раван, нагнуту под углом α у односу на хоризонталну осу, као што је то приказано на слици 41. У том случају на тијело дјелује само сила теже $\vec{G} = m\vec{g}$, која је усмјерена према „доле“ (нормално на хоризонталну осу).



Слика 41. Кретање тијела низ косу раван уз занемариво трење

Силу теже можемо разложити на двије компоненте – једна компонента је усмјерена дуж косе равни, а друга компонента је усмјерена нормално на косу раван. Убрзање тијела је усмјерено дуж косе равни, тако да у том правцу дјелује само компонента $m\vec{g}\sin\alpha$, док нормална компонента притишће тијело на подлогу косе равни и не утиче на убрзање тијела.

Разматраћемо колику енергију тијело има када мирује у тачки А, а колику када стигне у тачку В, где ће тијело (убrzавајући се) постићи одређену брзину v_B . На почетку је тијело мировало у тачки А, па је према томе укупна енергија била једнака само потенцијалној енергији:

$$E_A = E_{pA} + E_{kA} = mgh + 0 = mgh. \quad (77)$$

У тачки В тијело ће имати и потенцијалну и кинетичку енергију:

$$E_B = E_{pB} + E_{kB} = mgh_1 + \frac{mv_B^2}{2}, \quad (78)$$

где ћемо брзину у тачки В израчунати када напишемо једначину кретања тијела (тј. Њутнов закон) дуж косе равни. Као што је речено, дуж косе равни дјелује само $m\ddot{s}\sin\alpha$ компонента сile, па можемо написати:

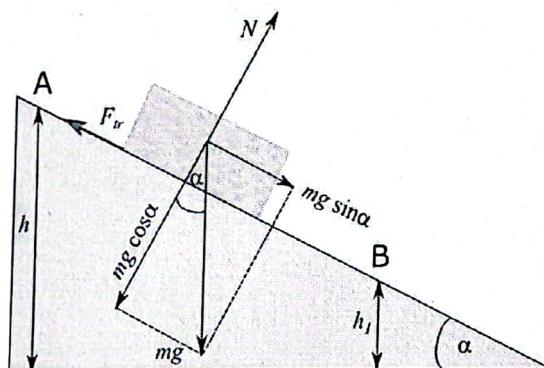
$$ma = mgs \sin\alpha \Rightarrow a = g \sin\alpha. \quad (79)$$

Израз (79) нам показује да је гравитационо убрзање смањено за фактор $\sin\alpha$, а добијено убрзање нам може послужити да израчунамо квадрат брзине у тачки В као $v_B^2 = 2a \cdot s$. Гдје ћемо пређени пут s израчунати као дуж АВ (са слике 41), тј. $\overline{AB} = s = \frac{h - h_1}{\sin\alpha}$. Ако претходни израз уврстимо у израз за v_B^2 , а онда тај израз уврстимо у (78), добићемо:

$$E_B = mgh_1 + \frac{m}{2} 2g \sin\alpha \frac{h - h_1}{\sin\alpha} = mgh. \quad (80)$$

Дакле, доказали смо и на овом примеру да вриједи закон одржања енергије.

Међутим, поставља се питање шта ће се десити ако на горњим колицима са слике 41 скинемо точкиће и пустимо тијело да клизи низ косу раван, али сада са трењем које ће се јавити између тијела и подлоге косе равни? Да ли ће и тада вриједити закон одржања енергије? Овај случај је приказан на слици 42.



Слика 42. Кретање тијела низ косу раван са трењем

Разматрања енергија у тачки А и у тачки В остају иста, тј. релације (77) и (78) остају исте и у овом случају, али се сада мијења једначина кретања (79). Сада дјелује сила трења која је једнака производу коефицијента трења и реакције подлоге, тј. $F_r = \mu \cdot N$. Са слике видимо да је реакција подлоге једнака по интензитету косинусној компоненти сile теже, тј. $N = mg \cos\alpha$. Када и силу трења унесемо у једначину кретања, добије се:

$$ma = mg \sin\alpha - F_r = mg \sin\alpha - \mu \cdot mg \cos\alpha \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha). \quad (80)$$

Из израза (80) се види да је убрзање сада мање због дјеловања сile трења, па ће и квадрат брзине ($v_B^2 = 2a \cdot s$) у тачки В бити мањи. Када унесемо ове величине у израз (78) добијемо:

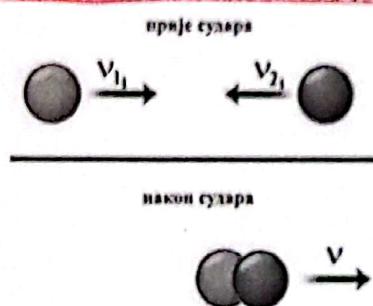
$$E_B = mgh_1 + \frac{m}{2} 2g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha) \frac{h - h_1}{\sin\alpha} = mgh - s \cdot F_r. \quad (81)$$

Из израза (81) видимо да је у тачки В енергија умањена од почетне енергије (mgh) за израз $s \cdot F_r$, а ово је по дефиницији рад којег изврши сила трења. Рад се најчешће претвори у топлоту, тако да је закон одржања енергије и даље у важности! Енергија је дакле остала иста, и један дио од почетне енергије се утрошио на рад сile трења, тј. у топлоту.

4.4. Судар два тијела

Подијелићемо сударе на две категорије судара – апсолутно еластичне и апсолутно нееластичне сударе. Ова подјела ће нам помоћи да схватимо суштину сударних процеса, али морамо нагласити да у реалности не постоје овако „апсолутно“ дефинисане појаве. Реални судари су такви да се дио енергије (ма како он мален био) приликом судара изгуби и утроши (нејчешће у топлоту).

Размотримо прво апсолутно нееластичне сударе, чији је пример приказан на слици 43. Ради једноставнијег приказа узели смо да су брзине тијела прије судара биле истог праваца и супротног смијера, али наравно оне могу бити орјентисане произвољно у простору. Након судара тијела настављају кретање заједно „слијепљени“, тако да их можемо сматрати једним тијелом чија је маса једнака збиру масе првог и другог тијела.



Слика 43. Апсолутно нееластичан судар

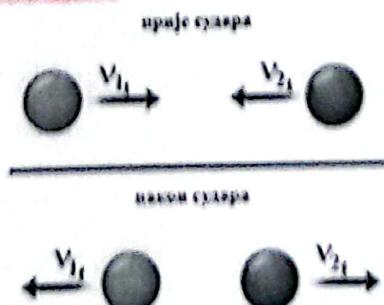
Нека су брзине прије апсолутно нееластичног судара првог тијела масе m_1 и другог тијела масе m_2 , познате и износе \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , респективно. За налажење заједничке брзине након судара довољно је примјенити закон одржања импулса (количине кретања), тј. израз (68), који када се примјени на овај случај изгледа овако:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}, \quad (82)$$

одакле се налази да је брзина система тијела након судара једнака:

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (83)$$

Проблем апсолутно еластичног судара приказан је на слици 44. У овом случају тијела се сударају на такав начин да при томе не губе ни дјелић енергије (на топлоту, на пример) и у општем случају након судара настављају кретање другачијим брзинама него што су имала прије судара, тј. \vec{v}_{1f} и \vec{v}_{2f} , респективно.



Слика 44. Апсолутно еластичан судар

Ако напишемо закон одржања импулса за случај апсолутно еластичног судара, добићемо:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}. \quad (84)$$

Из горњег израза је јасно да имамо двије непознате (\vec{v}_{1f} и \vec{v}_{2f}), а само једну (ротацију) једначину. За егзактно израчунавање тражених непознатих потребна је барем још једна независна једначина, за што ће нам послужити закон одржања енергије примјењен на горњем проблему:

$$\frac{m_1 \vec{v}_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 \vec{v}_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_{2f}^2}{2} \quad (85)$$

Решавањем система једначина (84) и (85) могу се добити тражене брзине првог и другог тијела након апсолутно еластичног судара. Слиједи кратко упутство за ово извођење: из израза (85) можемо груписати чланове уз масу првог и другог тијела, тј. $m_1 (\vec{v}_{1i}^2 - \vec{v}_{1f}^2) = m_2 (\vec{v}_{2f}^2 - \vec{v}_{2i}^2)$. Ако развијемо добијене разлике квадрата брзина добићемо:

$$m_1 (\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{1f}) (\vec{v}_{1i} + \vec{v}_{1f}) = m_2 (\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}) (\vec{v}_{2f} + \vec{v}_{2i}). \quad (86)$$

Груписањем чланова уз масу првог и другог тијела из једначине (84) добићемо:

$$m_1 (\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{1f}) = m_2 (\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}). \quad (87)$$

Ако подијелимо једначине (86) и (87) добијемо да је:

$$\vec{v}_{1i} + \vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} + \vec{v}_{2i}. \quad (88)$$

Из овог израза можемо на примјер изразити \vec{v}_{2f} и уврстити га у (84), те након сређивања добијамо израз за брзину првог тијела након апсолутно еластичног судара:

$$\vec{v}_{1f} = \frac{2m_2 \vec{v}_{2i} + (m_1 - m_2) \vec{v}_{1i}}{m_1 + m_2}. \quad (89)$$

Аналогно, ако из (88) изразимо \vec{v}_{2f} и уврстимо у (84) добијамо израз за брзину другог тијела након апсолутно еластичног судара:

$$\vec{v}_{2f} = \frac{2m_1 \vec{v}_{1i} + (m_2 - m_1) \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (90)$$

4.5. Динамика ротације чврстог тијела

Појам чврстог тијела уводимо како бисмо описали реална тијела уместо материјалних тачака. Реална тијела имају коначну запремину (код материјалних тачака узимамо „чудну“ аппроксимацију да је маса концентрисана у једној тачки, дакле код њих не постоји је да ћемо сматрати да је чврсто тијело такво да се не деформише приликом дејства силе на њега. Ако бисмо узели у разматрање и деформације чврстог тијела, то би исувише.

Како описати кретање чврстог тијела? Када бисмо описали кретање сваке честице чврстог тијела (нпр. атома или молекула које граде тијело), ово би постао компликован (тачније практично немогућ) задатак. Претходно смо већ одговорили на ово питање када смо

описивали центар масе система чврстог тијела. Чврсто тијело које није деформабилно се може сматрати системом великог броја материјалних тачака, са дефинисаним међусобним растојањима. Ово конкретно значи да ћемо чврсто тијело „подијелити“ на што већи број – што мањих дијелића, где сваки дјелић чврстог тијела има масу Δm . На тај начин извршили апроксимацију запремине чврстог тијела са сумом система материјалних тачака.

Како што смо то урадили код система материјалних тачака (50), и код реалних чврстих тијела се може увести центар масе чврстог тијела у облику:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (91)$$

где се узима да n тежи ка бесконачности (желимо да чврсто тијело подијелимо на што већи број што мањих дијелова). У том случају и дијелићи масе чврстог тијела теже ка диференцијално малим масама, а сума прелази у интеграл:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{m}. \quad (92)$$

Много је лакше ријешити горњи интеграл ако се интегрира по запремини, тј. ако искористимо да је $dm = \rho \cdot dV$, добијемо:

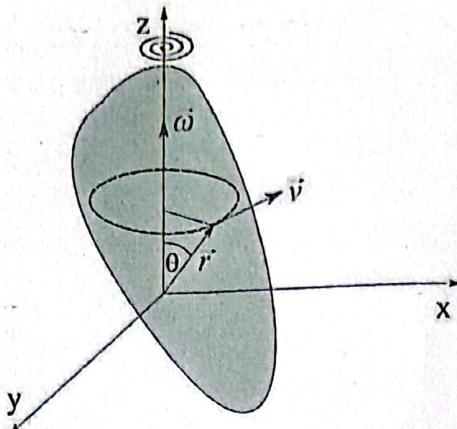
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} \rho \cdot dV}{m}, \quad (93)$$

где се проблем одређивања вектора центра масе сада своди на проблем тачног рјешавања горњег интеграла. Уколико је тијело правилно, интеграл се може и аналитички ријешити, али ако је тијело неправилног облика, интеграл се рјешава нумерички (уз помоћ рачунара).

Даље кретање чврстог тијела, ма како оно компликовано изгледало, се описује помоћу низа диференцијално малих трансляција и ротација (управо једнако као што смо описали трајекtoriju материјалне тачке са низом диференцијално малих трансляција и ротација, ма како компликована била трајекtorija).

Увођење центра масе код чврстог тијела има једнаку сврху као што смо то урадили код система материјалних тачака, да бисмо олакшали анализу кретања. На тај начин посматрамо само кретање једне тачке чврстог тијела – центра масе. Међутим, како је чврсто тијело коначне запремине, његова ротација доводи до појаве одређених величина које постaju веома значајне за описивање ротационог кретања чврстог тијела, а то су: момент инерције, момент сile и момент импулса.

Посматрајмо кретање неправилног чврстог тијела које ротира око z -осе, као што је приказано на слици 45. Чврсто тијело се врти око вертикалне осе у смјеру обрнутом од казаљке на сату. Свака тачка чврстог тијела ће имати у општем случају различиту линеарну врзину \vec{v} , али све тачке ће имати једнаку угаону брзину $\vec{\omega}$.

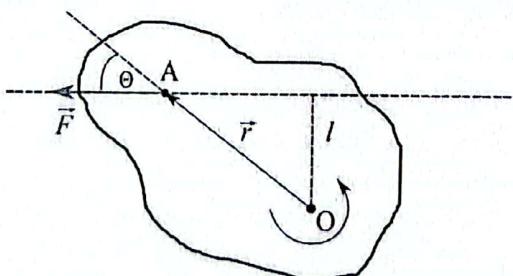


Слика 45. Ротација чврстог тијела

4.6. Основна једначина кретања код ротационог кретања

Да бисмо дефинисали закон који је аналоган 2. Њутновом закону, али сада код ротационог кретања, морамо увидјети које су све специфичности оваковог кретања. Већ смо видјели код ротације материјалне тачке да је једноставније описати њено кретање преко „пребрисаног“ угла, као и угаоне брзине или угаоног убрзања. Ове величине универзално и једнако описују све тачке, без обзира на удаљеност тачке од осе ротације у којима оне могу имати веома различите линеарне вриједности (пређени пут, линеарна брзина или линеарно убрзање).

Нека се тијело на слици 45 окреће због дејства неке сile. Дефинисаћемо момент сile који дјелује на одређену тачку чврстог тијела, ако посматрамо чврсто тијело у пресјеку, тј. у XY – равни, док је Z – оса усмјерена нормално на слику 46.



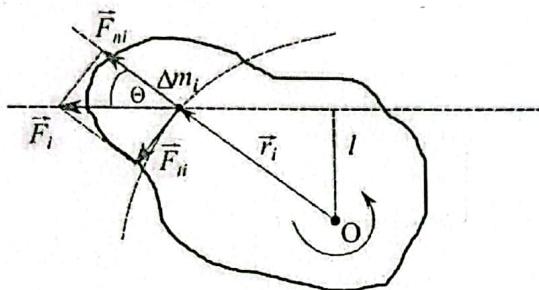
Слика 46. Ротација чврстог тијела (у пресјеку)

Ако на одређену тачку чврстог тијела A дјелује сила \vec{F} , тада момент сile дефинишемо као производ те сile и најкраћег нормалног растојања правца дејства сile од осе ротације, што представља величину l на слици 46, а која се назива крак сile. Са слике се види да је крак сile $l = r \cdot \sin \Theta$, па је момент сile једнак $M = F \cdot r \cdot \sin \Theta$, или тачније – у векторском облику:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (94)$$

Правац и смјер вектора момета силе је дифинисан правилима векторског производа $\vec{r} \times \vec{F}$, тј. вектор \vec{M} ће бити нормалан на раван којег граде вектори \vec{r} и \vec{F} .

Нека се у тачки A налази један мали дјелић масе чврстог тијела Δm_i , а силу која дјелује на овај дјелић масе разложимо на тангенцијалну компоненту силе (која се налази нормално на правцу од осе) и нормалну компоненту силе (дуж правца који спаја дјелић масе и осу ротације), као што је приказано на слици 47.



Слика 47. Дефинисање момента силе на дио чврстог тијела

Из израза (94) и дефиниције векторског производа јасно је да само тангенцијална компонента силе F_{ti} дефинише момент силе, док нормална компонента не може доприносити моменту силе (колинеарна је са вектором \vec{r}), тј. интензитет момента силе за тај дјелић масе је $M_i = r_i \cdot F_{ti}$. За дјелић масе чврстог тијела Δm_i можемо написати једначину кретања:

$$\Delta m_i \cdot a_i = F_{ti}. \quad (95)$$

Ако једначину (95) помножимо са r_i , и искористимо везу између линеарног и угаоног убрзања $a_i = \alpha \cdot r_i$ добићемо да је $r_i \cdot \Delta m_i \cdot \alpha \cdot r_i = F_{ti} \cdot r_i$, или замјеном десне стране са M_i и сређивањем добијемо $\Delta m_i r_i^2 \cdot \alpha = M_i$. Ако сада претходни израз сумирамо по свим дјелићима чврстог тијела:

$$\sum_i \Delta m_i r_i^2 \cdot \alpha = \sum_i M_i = M. \quad (96)$$

Израз под сумом у (96) се назива момент инерције чврстог тијела $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$, па се (96) може написати и у облику:

$$I \cdot \ddot{\alpha} = \bar{M}, \quad (97)$$

што представља основну динамичку једначину ротационог кретања чврстог тијела или 2. Њутнов закон за ротацију. Заиста, ако се погледа израз (97), он личи на 2. Њутнов закон $m \cdot \ddot{a} = \vec{F}$, само што уместо силе сада фигурише момент силе, уместо линеарног убрзања фигурише угаоно убрзање, а уместо масе сада фигурише момент инерције. Уколико се присјетимо дефиниције масе као мјере инертности тијела у односу на трансляцију – онда аналогно овоме можемо дефинисати момент инерције чврстог тијела као мјеру инертности тијела у односу на ротацију!

4.7. Момент инерције чврстог тијела

Анализираћемо детаљније момент инерције, који је једнак $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$. У лимесу, када подијелимо чврсто тијело на веома велики (бесконачан) број што мањих дијелова, можемо узети да $\Delta m_i \rightarrow dm$, па можемо пријећи са суме на интеграл по маси:

$$I = \int r^2 dm, \quad (98)$$

или уколико искористимо да је $dm = \rho \cdot dV$, можемо пријећи са интеграла по маси на интеграл по запремини чврстог тијела:

$$I = \int_V r^2 \rho dV. \quad (99)$$

Видимо да момент инерције зависи од геометријског облика чврстог тијела, али и од осе ротације у односу на коју се рачуна момент инерције. У општем случају оса ротације може заузети било који положај у простору, па сходно томе и момент инерције једног – истог чврстог тијела може имати веома различите вриједности. Тачан опис момента инерције се може дати помоћу тензорских²⁶ величине. Само израчунавање израза (99) може бити у општем случају прилично сложено, зависно од тога колико је компликована геометрија чврстог тијела. Код геометријских простих или једноставних тијела, момент инерције се може релативно једноставно и аналитички израчунати.

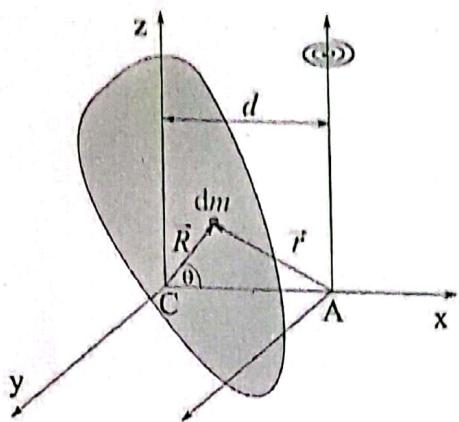
Момент инерције чврстих тијела неправилних облика може релативно лако да се измјери помоћу физичког клатна, о чему ће бити више ријечи у глави 5 о осцилаторном кретању.

Уколико оса ротације пролази кроз центар масе чврстог тијела, онда момент инерције (који се рачуна или мјери у односу на ову осу) називамо сопствени момент инерције. Оно што нам увељко може бити од помоћи је чињеница да уколико нам је познат сопствени момент инерције у односу на произвољно усмјерену осу ротације – можемо веома лако израчувати момент инерције истог тијела у односу на било коју осу која је паралелна првобитној оси кроз центар масе. О овоме говори Штајнерова теорема, коју ћemo доказати.

4.7.1. Штајнерова теорема

На слици 48 приказано је чврсто тијело за које је познат сопствени момент инерције када се оса ротације поклапа за z -осом (где је у тачки С центар масе чврстог тијела). Уколико за неко растојање d помјеримо осу ротације, паралелну првобитној оси, онда један диференцијално мали дио масе dm можемо описати са два радијус вектора, један радијус вектор полази из центра масе (\vec{R}), а други из тачке А, тј. из координатног почетка нове паралелне осе (\vec{r}).

²⁶ Заправо су и скалари и вектори такође тензори, само што скаларе називамо тензорима 0. реда, док су вектори скалари 1. реда. Тензори (3. реда) који описују момент инерције у простору представљени су матрицама 3×3 и имају 9 компоненти које их описују.



Слика 48. Штајнерова теорема

На основу релације (98) можемо дефинисати центар масе чврстог тијела у односу на ове двије осе, тј. $I_c = \int R^2 dm$ је момент инерције у односу на осу која пролази кроз центар масе,

док је $I = \int r^2 dm$ центар масе рачунат у односу на нову паралелну осу која пролази кроз тачку A и која је удаљена од прве осе за удаљеност d . Ако примјенимо косинусну теорему $r^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta$ на претходни израз, добићемо да је:

$$I = \int R^2 dm + \int d^2 dm - \int 2Rd \cos \theta dm = I_c + d^2 \int dm - 2d \int x dm. \quad (100)$$

Решење првог интеграла је једноставно $\int dm = m$, док по дефиницији центра масе други интеграл мора бити једнак нули. Ово ћемо доказати из израза (92), тј. ако напишемо само x-координату тог израза $x_{cm} = \frac{\int x dm}{m}$, видимо да уколико је центар масе смјештен баш у координатни почетак, као што је то на слици 48, тј. ако је $x_{cm} = 0$, онда мора бити и $\int x dm = 0$. Коначно добијамо израз за Штајнерову теорему: *d - удаљеност између двије паралелне осе ротације*

$$I = I_c + md^2, \quad (101)$$

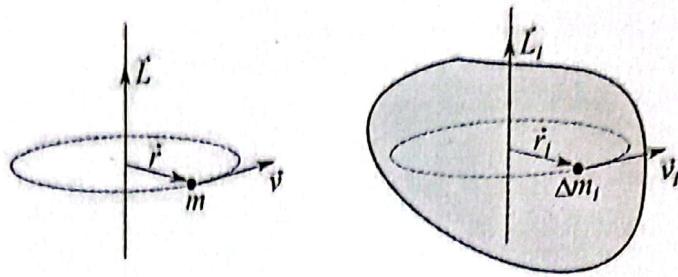
помоћу које можемо израчунати момент инерције за било коју паралелну осу која пролази кроз центар масе. Овај израз можемо уопштити, тј. ако зnamо момент инерције чврстог тијела у односу на било коју осу ротације, онда помоћу ове теореме можемо израчунати момент инерције за било коју паралелну осу.

4.8. Момент импулса

Дефинисаћемо момент импулса материјалне тачке као векторски производ радијус вектора и импулса (количине кретања), тј.:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad (102)$$

Где се са слике 49 (лијево) види да је вектор момента импулса усмјерен нормално на раван коју образују вектори \vec{r} и \vec{p} .



Слика 49. Момент импулса материјалне тачке (лијево) и чврстог тијела (десно)

На слици 49 (десно) је приказана ротација чврстог тијела у којем посматрамо ротацију једног дјелића масе, чији је момент сile једнак:

$$L_i = r_i \Delta m_i v_i = r_i \Delta m_i \cdot r_i \omega = \Delta m_i r_i^2 \cdot \omega. \quad (103)$$

Израз (103) представља један мали допринос момента сile (од стране дјелића масе који ротира око осе) у укупном моменту сile који потиче од свих осталих дјелића масе. Укупни момент сile ћemo добити ако сумирамо све L_i , тј.: $L = \sum L_i = \sum \Delta m_i r_i^2 \cdot \omega = I \cdot \omega$, а то можемо егзактније написати у векторском облику:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}. \quad (104)$$

Морамо примјетити поново аналогију горњег израза са изразом за импулс (количину кретања) при линеарном кретању $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Видимо да је линеарно брзини при транслацији (\vec{v}) аналогија угаона брзина при ротацији ($\vec{\omega}$); оно што је маса при транслацији (m) – то је момент инерције (I) при ротацији; импулсу (\vec{p}) код транслаторног кретања је аналогна величина момент импулса (\vec{L}) код ротационог кретања!

Потражимо први извод по времену од израза (102), тј. добићемо:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (105)$$

Пошто је у првом члану горњег збира $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, то значи да је $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ (јер је $\vec{v} \times \vec{v} = 0$). У другом члану горњег збира видимо да је $\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$. Израз (105) постаје:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (106)$$

Из израза (106) закључујемо да је извод момента импулса једнак моменту сile. Примјетимо да је овај израз аналоган 2. Њутновом закону $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, само је сада примјењен на ротационо кретање. До истог овог израза можемо доћи ако потражимо извод по времену од (104), тј.:

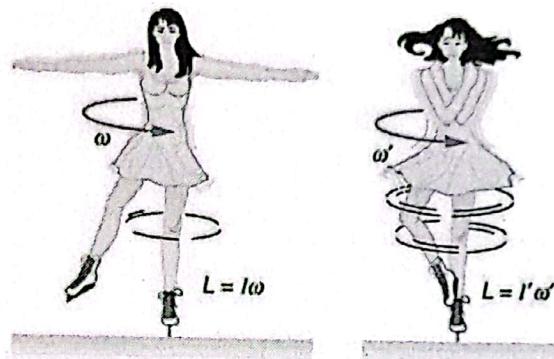
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I \cdot \vec{\omega}) = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\alpha} = \vec{M}. \quad (107)$$

У извођењу горњег израза смо претпоставили да је момент инерције константан и не зависи од времена (тј. оса ротације је фиксирана).

Уколико се чврсто тијело окреће без дејства спољашњег момента силе (инерције) оно посједује константан момент импулса. Ово можемо лако доказати посматрајући израз (106) и уврштавајући на десној страни услов да је $\ddot{M} = 0$. Тада је:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}, \text{ одакле } I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = I_3\omega_3 = \dots = \text{const}. \quad (108)$$

Горњи израз се зове закон одржања момента импулса. Овај закон каже да у случају када је укупни спољашњи момент силе који дјелује на чврсто тијело једнак нули, чврсто тијело ће ротирати на такав начин да је производ његовог момента инерције и угаоне брзине увијек константан. Примјер на слици 50 показује примјер клизачице на леду која изводи пируету.



Слика 50. Закон одржања момента импулса

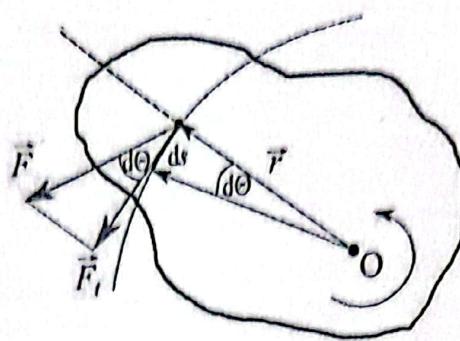
Клизачица користи овај закон када жели да убрза ротацију на сљедећи начин: при ротацији распоређених руку клизачица има већи момент инерције (момент инерције I квадратно расте са растојањем од осе ротације²⁷⁾) и при томе угаону брзину ротације ω ; када жели да повећа брзину ротације, клизачица скупи руке према себи и тада смањи свој момент инерције па $I' < I$, што резултује повећањем угаоне брзине на $\omega' > \omega$ и то на такав начин да је $I\omega = I'\omega'$

4.9. Рад, снага и кинетичка енергија код ротационог кретања

Како би израчунали рад неке силе која врши ротационо кретање, полазимо од израза за рад (55) којег смо већ дефинисали. На слици 51 је приказана ротација чврстог тијела где посматрамо кретање неке диференцијално мале масе, чију ротацију (у склопу чврстог тијела) узрокује спољашња сила \vec{F} . Сходно изразу (55) за диференцијално мали рад ове силе који је једнак:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos d\theta = F_t \cdot ds. \quad (109)$$

²⁷ Погледати израз (98)



Слика 51. Рад код ротационог кретања

Код извођења израза (109) смо примјенили да је $|F| \cos d\theta = F_t$, као и да је код диференцијално малих помјерања $dr \approx ds$. Из геометрије је познато да је $ds = r \cdot d\theta$ (што представља геометријски исјечак лука кружнице), па кад ово убацимо у израз (109) добијемо:

$$dA = F_t \cdot ds = F_t \cdot r \cdot d\theta = M \cdot d\theta, \quad (110)$$

гдје смо искористили да је момент сile једнак тангенцијалној компоненти сile помножен са полу пречником кружнице ротације ($F_t \cdot r = M$). Укупан рад ћемо добити интеграцијом израза (110), али примјетимо да је овај израз аналоган изразу (55), где сада уместо линеарних величина (сile и пређеног пута) фигуришу ротационе величине (момент сile и преbrisani угao):

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta. \quad (111)$$

Уколико желимо да израчунамо снагу, примјенићемо израз (57) за снагу (снага је једнака изводу рада по времену, тј. снага представља брзину вршења рада), само ћемо сада за рад користити израз (110), тј.:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M \cdot d\theta}{dt} = M \cdot \omega. \quad (112)$$

Треба нагласити да је горњи израз добијен уз претпоставку да је момент сile константан, тј. $M = \text{const}$. Као што видимо из израза (112), снага код ротационог кретања има облик аналоган изразу за снагу код праволинијског кретања (где се снага дефинише као $P = F \cdot v$, за $F = \text{const}$).

Кинетичку енергију код ротационог кретања ћемо израчунати из израза (111), уз претпоставку да се сав рад неке сile која врши ротационо кретање чврстог тијела утрови на добијање кинетичке енергије, тј.:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \omega \cdot d\omega = \frac{I \omega_2^2}{2} - \frac{I \omega_1^2}{2}, \quad (113)$$

гдје смо искористили израз (97) који дефинише момент сile као $M = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{d\omega}{dt}$, као и дефиницију тренутне углове брзине $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, одакле је $d\theta = \omega \cdot dt$. У случају да је чврсто

тијело кренуло из стања мировања, онда је кинетичка енергија ротационог кретања једнака:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (114)$$

До истог резултата смо могли доћи и на сљедећи начин: ако чврсто тијело подијелимо на што већи број што мањих дијелова, израчунамо посебно кинетичку енергију сваког дјелића и затим их сумирамо, добићемо:

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (115)$$

Код извођења горњег израза употребили смо да је $\sum_i \Delta m_i r_i^2 = I$, као и везу између линеарне и угаоне брзине $v = \omega r$. Чињеница да се чврсто и масивно тијело може „напунити“ ротационом кинетичком енергијом користи се у разним индустријским гранама, посебно у развоју аутомобилске индустрије²⁸. Међутим, чврсто тијело се може кретати трансационо и ротационо, а ма како компликована трајекторија чврстог тијела се може разложити на низ сукцесивних трансација и ротација. У том случају кинетичка енергија има двије компоненте, трансационо и кинетичку док је укупна кинетичка енергија једнака збиру ове двије компоненте, тј.: Срочицкој?

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (116)$$

²⁸ Неколико светских аутомобилских индустрија је развило различите варијанте тзв. KERS (Kinetic Energy Recovery System, тј. системи за опоравак кинетичке енергије). На пример, компанија VOLVO је у неке моделе аутомобила уграђивала масивне замајце, са великим моментом инерције, који би користили енергију приликом кочења и заустављања аутомобила (на пример код заустављања на семафору), када би замајац „преузео“ ову енергију заротирао се, а затим би ову енергију аутомобил користио приликом поновног покретања аутомобила.

5. ОСЦИЛАЦИЈЕ

Ми смо окружени осцилацијама – кретањима која се понављају. Љуљашке на којима се дјеца лъљају, вентили на моторима аутомобила, жица гитаре, дијафрагма у службалици телефона или звучнику, кристали кварца у ручном часовнику... све су ово осцилаторни системи који имају понављајућа кретања. Осцилације које су „мање видљиве“ су осцилације молекула у ваздуху које преносе звук, осцилације атома у чврстим тијелима које преносе топлоту, осцилације електрона у антени радио или ТВ одашиљача.

Осцилације нису резервисане само за материјале попут жице код виолине или за електроне. Видјећемо у наредним поглављима да осцилаторни карактер има и светлост.

Осцилаторно кретање је таква врста кретања тијела које има неку врсту понављајућег карактера. Ово (изнова) понављајуће кретање уопште не мора имати правилну трајекторију, али мора имати временски периодичан карактер. Тада специфичан интервал времена се назива периодом осциловања, а како је то посебно значајно вријеме – означавамо га са великим словом T , уместо са малим словом t , које је иначе резервисано за означавање времена.

У овом поглављу ћемо се бавити механичким осцилацијама, које се на примјер јављају код тијела које имају еластичне особине (осциловање опруге), али је ова врста осциловања резервисана и за било која друга не-еластична тијела која имају осцилаторни карактер кретања (осциловање клатна). Дакле, код свих механичких осцилација посматрамо кретање које има понављајући карактер. Другим врстама осцилација, као што су на примјер електромагнетне осцилације, студенти електротехнике ће се детаљно бавити на посебним курсевима. Битно је нагласити да је суштина осциловања једнака и код механичких и код електромагнетних осцилација. Ми ћемо дефинисати физичке величине које карактеришу осцилатор било које врсте, јер у свим врстама осциловања – суштина осциловања остаје једнака.

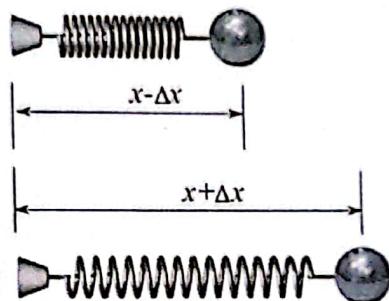
Све реалне осцилације су у општем случају пригашене, тј. осцилаторно кретање се неће одвијати бесконачно дуго, већ се се временом полако „гасити“ или „нестајати“. Ово се дешава најчешће тако што се механичка енергија осциловања полако претвара у топлотну. Ако замислимо дијете које се лъља на лъљашци знамо да се оно неће моћи лъљати бесконачно дуго, већ се осцилације лъљања полако „гасе“, због трења (ваздуха или осовине на којој је објешена лъљашка). Дијете ову енергију компензује или својим ногама

(испружајући и скупљајући ноге у такту осциловања) или има некога ко повремено гурне туљашку и на тај начин надокнади губитак енергије осциловања.

5.1. Једноставни (прости) хармонијски осцилатор

Започнимо са најједноставнијом врстом осциловања, уз претпоставку да се енергија при осциловању не губи, већ се осциловање врши бесконачно дugo. Ово осциловање називамо просто хармонијско осциловање. Придјев „хармонијско“ је због хармоничног карактера, тј. периода осциловања које је једнако и константно у времену.

На слици 52 су приказане опруге које осцилују линеарно дуж x -осе. Нека је на крај опруге прикачено тијело масе m , при чему је равнотежна дужина дужина опруге једнака x . Уколико систем тијело+опруга изведемо из равноженог положаја, систем ће почети да осцилује лијево-десно у околини равнотежне дужине x . Нека је максимали отклон опруге када је она истегнута удео до краја једнака $x + \Delta x$, а када је максимално сабијена улијево максималан отклон је једнак $x - \Delta x$.



Слика 52. Хармонијско осциловање опруге

Од раније знајмо да је еластична сила линеарна (слика 36) са коефицијентом еластичности (k) као коефицијентом линеарности и једнака $F_{el} = -k \cdot x$. Уколико напишемо једначину кретања за куглицу масе m , онда је она једнака:

$$m \cdot a = -k \cdot x \Rightarrow m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x. \quad (117)$$

Уколико горњу једначину мало преуредимо, можемо је написати и на следећи начин:

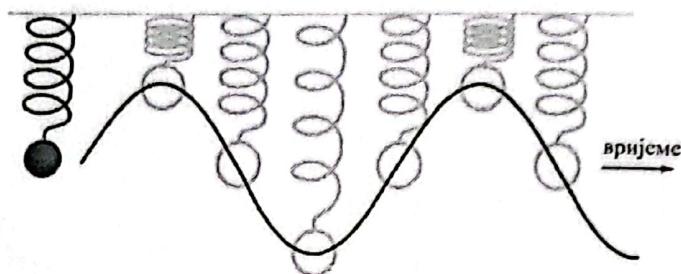
$$\underline{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0}, \quad (118)$$

где је коефицијент $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, чије ћемо значење видјети мало касније. Једначина (118) је једначина кретања куглице и назива се једначина линераног хармонијског осцилатора²⁹. Ово је хомогена диференцијална једначина 2. реда, чији детаљи рјешавања излазе изван оквира овог курса. Оно што можемо интуитивно предвидјети јесте да рјешење диференцијалне једначине мора бити функција синуса или косинуса, јер су ове функције периодичног карактера. И заиста, уколико узмемо да је рјешење једнако:

²⁹ ЛХО – линеарни хармонијски осцилатор и његова једначина (118) је једна од веома важних једначина у физици. Она се појављује у многим физичким феноменима везаним не само за механичко осциловање, него и у квантној атомској физици.

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (119)$$

видимо да убацувањем рјешења (119) у једначину (118) добијемо идентитет³⁰. У једначини (119) $x(t)$ је елонгација (отклон од равнотежног положаја) у тренутку t ; A је амплитуда, ω_0 се назива сопствена кружна фреквенција; ϕ је почетна фаза; док се цијели израз у загради $(\omega_0 t + \phi)$ назива фаза осциловања. Као што видимо, амплитуда A је максимална елонгација, јер функција синуса има интервал $\sin(\omega_0 t + \phi) \in (-1; 1)$. Почетна фаза ϕ дозвољава да елонгација има неку коначну вриједност различиту од нуле и на почетку осциловања, тј. у почетном тренутку. Замислимо како тијело на опрузи осцилује описујући вриједност елонгације по изразу (119) у функцији од времена. Ова зависност, која има облик просте синусоиде, је описана на слици 53.



Слика 53. Елонгација као синусна функција од времена

Познајући елонгацију (119), њеним диференцирањем по времену можемо добити брзину осциловања, као функцију од времена:

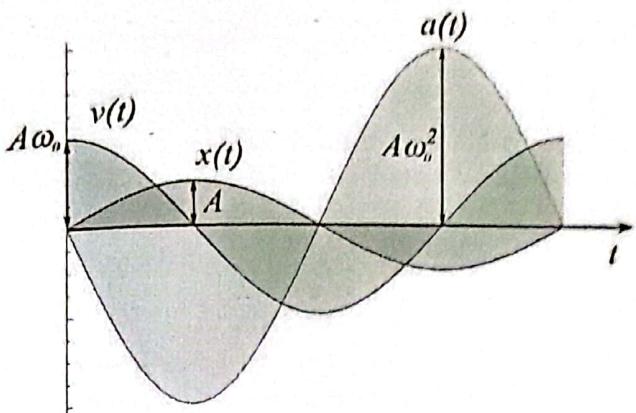
$$\underline{v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (120)$$

где смо у задњем кораку употребили тригонометријску трансформацију свођења косинусне функције на синусну. Ако још једном диференцирамо израз (120) по времену добијемо убрзање осциловања, у функцији од времена:

$$\underline{a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \phi) = A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \phi - \pi)}. \quad (121)$$

Поново смо у задњем кораку свели функцију на позитивну синусну функцију помоћу тригонометријске трансформације, а све у циљу да упоредимо изразе за елонгацију, брзину и убрзање осциловања. Као што видимо из израза (120), брзина фазно „предњачи“ над елонгацијом за $\pi/2$, док убрзање (121) фазно „касни“ за елонгацијом за π . Све три функције су приказане на слици 54.

³⁰ Једнако би добили идентитет када бисмо умјесто синуса узели косинусну функцију. Пробајте за вјежбу!



Слика 54. Поређење функције зависности елонгације, брзине и убрзања од времена

Анализирајмо величину кружне фреквенције $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ која се појављује у изразу (118). Знајући везу између кружне фреквенције и линеарне фреквенције $\omega = 2\pi\nu$, као и везу између линеарне фреквенције и периода осциловања $\nu = 1/T$, можемо изразити период осциловања линеарног хармонијског осцилатора, опруге константе еластичности k :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (122)$$

Израз (119) представља једначину осциловања хармонијског осцилатора, међутим за егзактно описивање величине амплитуде и почетне фазе, потребно је познавати почетну вриједност елонгације $x(t=0) = x_0 = A \sin \phi$ и почетну вриједност брзине $v(t=0) = v_0 = A \omega_0 \cos \phi$. Ако ове једначине квадрирамо и саберемо, можемо изразити

амплитуду: $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$, а ако их подијелимо – добићемо израз за почетну фазу:

$\phi = \arctan\left(\frac{x_0 \omega_0}{v_0}\right)$. Сада израз (119) хармонијског осцилатора, са дефинисаним почетним

вриједностима изгледа овако:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin\left[\omega_0 t + \arctan\left(\frac{x_0 \omega_0}{v_0}\right)\right]. \quad (123)$$

Иако израз (123) изгледа релативно сложено, он описује прост облик најједноставнијег хармонијског осциловања!

5.1.1. Енергија хармонијског осцилатора

Енергија осцилатора се може испољити у два облика – кинетички и потенцијални облик. Кинетичку енергију осцилатор има усљед кретања, док потенцијалну енергију осцилатор има усљед свог положаја.

Израчунајмо кинетичку енергију уз помоћ израза за брzinу (120) који ћемо уврстити у општи облик за кинетичку енергију:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi), \quad (124)$$

Знајући да је $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, када овај израз заменимо у (124), добијемо:

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi). \quad (125)$$

Из (125) закључујемо да је кинетичка енергија такође осцилаторна функција, али због тога што косинусна функција лежи у интервалу $(-1, 1)$, квадрат косинуса лежи у интервалу $[0, 1]$. Из овога произилази да је максимална кинетичка енергија осцилатора једнака;

$$E_{k\max} = \frac{1}{2}kA^2. \quad (126)$$

Ако сада помоћу израза (64) и (119) израчунамо потенцијалну енергију осцилатора, тј.:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi), \quad (127)$$

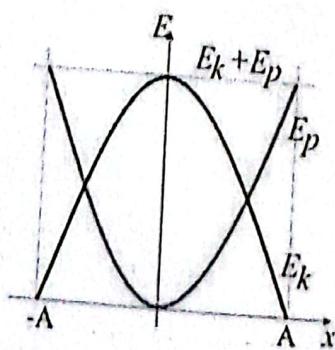
можемо видjetи да и она, због квадрата синусне функције која може узети вриједности у интервалу $(0, 1)$, може имати максималну вриједност када је $\sin^2(\omega_0 t + \phi) = 1$, тј.:

$$E_{p\max} = \frac{1}{2}kA^2. \quad (128)$$

Упоређујући изразе (128) и (126) закључујемо да максимална потенцијална и максимална кинетичка енергија имају идентичне вриједности. Укупна енергија осцилатора је једнака збиру кинетичке и потенцијалне енергије. Међутим, са обзиром да знамо да када је кинетичка енергија максимална – потенцијална енергија мора бити минимална (тј. једнака нули), и обратно, онда закључујемо да је укупна енергија осцилатора:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2. \quad (129)$$

Из израза (129) закључујемо да је укупна енергија осцилатора пропорционала квадрату амплитуде, тј. $E \sim A^2$ и одржава се, тј. има константну вриједност. Овај закључак се и очекивао од хармонијског осцилатора за којег знамо да не губи енергију у времену, већ се та енергија мијења на такав начин да осцилује између потенцијалне и кинетичке енергије, што је приказано на слици 55.

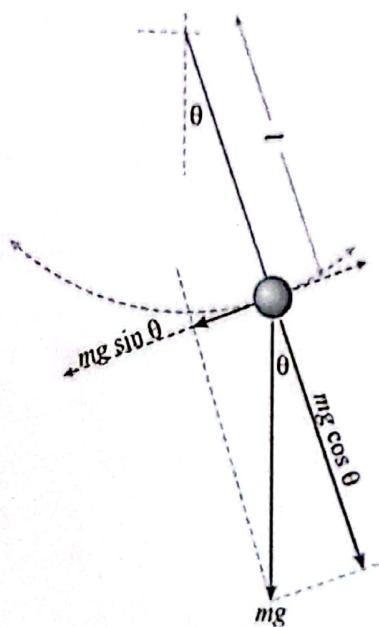


Слика 55. Промјена кинетичке и потенцијалне енергије током осциловања (укупна енергија код хармонијског осцилатора остаје константна)

5.1.2. Математичко клатно

Ово клатно носи назив „математичко“ због претпоставке да материјална тачка обичају једне осе у гравитационом пољу. Добра апроксимација математичког клатна је када се објеси масивна куглица на танак и нерастегљив конац, занемарљиве масе а затим изведе из равнотежног положаја и пусти да осцилује. Путања куглице ће бити исечак кружнице.

На слици 56 је приказано клатно у току осциловања у гравитационом пољу, када дјелује сила теже mg , усмјерена наниже. Ова сила теже се може разложити на две компоненте – прва компонента је усмјерена дуж конца од центра осе осциловања и једнака је $mg \cos \theta$, а друга компонента је усмјерена нормално на конац, тј. дуж тангенте кружнице и једнака је $mg \sin \theta$. Управо ова компонента ствара момент сile који дјелује на куглицу да обилује, док нормална компонента врши затезање конца. Дужина математичког клатна се дефинише као дужина мјерена од осе ротације до тежишта куглице и једнака је l .



Слика 56. Математичко клатно

Момент сile се дефинише као производ крака сile (тј. дужине клатна) и компоненте сile која врши осциловање, тј.:

$$M = -mgl \sin \theta. \quad (130)$$

Ако искористимо релацију (97) која нам даје дефиницију момента сile $M = I \cdot \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$, те узимајући у обзир да је момент инерције материјалне тачке масе m која ротира на удаљености l једнака $I = ml^2$, након уврштавања у (130) добијемо:

$$ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgl \sin \theta. \quad (131)$$

Након сређивања горњег израза и увођења једне важне претпоставке, да су осцилације веома малих амплитуда, те су углови θ мали и у том случају вриједи апроксимација да је $\sin \theta \approx \theta$, тада горњи израз можемо написати у облику:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0, \quad (132)$$

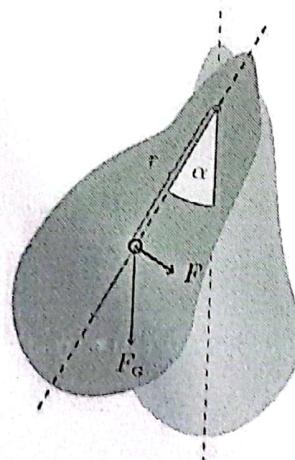
где је уведена смјена $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Као што видимо, израз (132) има идентичан облик као израз (118). Једина разлика је та што у (118) диференцијална једначина описује линеарно кретање, док (132) описује еволуцију угла у времену. Ради се о једначини хармонијског осцилатора, чије нам је решење познато и износи $\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$. Међутим, нама је од интереса члан $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, којег можемо изразити преко периода осциловања (слично као што је то урађено код осциловања опруге), где добијамо да је:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (133)$$

Из израза (133) видимо да период осциловања математичког клатна, при малим осцилацијама³¹, зависи само од дужине клатна. Ова чињеница се може искористити и помоћу математичког клатна можемо веома прецизно измерити гравитациону константу, мјерећи за различите дужине клатна периоде осциловања клатна.

5.1.3. Физичко клатно

Тијела која имају коначну запремину и осцилују око неке осе представљају физичка клатна. На слици 57 је приказано физичко клатно неправилног облика које осцилује око осе која се налази на клатну (у примјеру са слике тијело је пробушено, али оса осциловања се може у општем случају налазити и изван тијела).



Слика 57. Физичко клатно

Реална чврста тијела имају центар масе и у случају са слике тачка центра масе је удаљена од осе осциловања за удаљеност r . Сила теже F_G је усмерена вертикално наниже, али

³¹ Важно је напоменути да амплитуде осциловања морају бити мале, јер смо у изразу (131) извршили апроксимацију $\sin \theta \approx \theta$. За веће амплитуде осциловања морали бисмо развити функцију синуса у Тейлоров ред, тј. $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$, што би у крајњем промијенило и израз за период осциловања.

Тејлоров ред, тј. $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$, што би у крајњем промијенило и израз за период осциловања.

само тангенцијална компонента сile теже F генерише момент сile због чврстог тијела осцилује. У том случају је момент сile једнак:

$$M = -mgr \sin \alpha, \quad (134)$$

где је момент сile $M = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Момент инерције I у општем случају није позната величина.

Када замјенимо претходни израз за момент сile у (134) и у случају малих осцилација за које је $\sin \alpha \approx \alpha$, поново добијемо једначину хармонијског осцилатора:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0, \quad (135)$$

где је сада уведена смјена $\omega_0^2 = \frac{mgr}{I}$, која представља квадрат кружне фреквенције.

Знајући везу између кружне фреквенције ω_0 и периода осциловања, tj. $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, добијемо да је период осциловања физичког клатна једнак:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}. \quad (136)$$

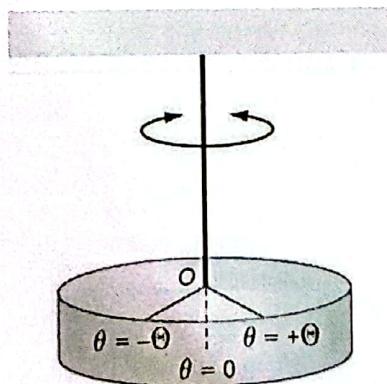
Израз (136) нам омогућује да, уколико знамо где се налази центар масе, измјеримо момент инерције чврстог тијела!

5.1.4. Торзионо клатно

Објесимо чврсто тијело на неку жицу чија је торзиона константа једнака c . Када тијело уврнемо на једну страну за неки угао θ , јавља се момент сile:

$$M = -c \cdot \theta, \quad (137)$$

и овај момент сile „жели“ да врати жицу у првобитно стање. Момент сile ће вршити увртање тијела објешеног на жицу у смијеру лијево – десно (до неког максијалног угла Θ), а оваква врста клатна се назива торзионо клатно и приказано је на слици 58.



Слика 58. Торзионо клатно

Узимајући у обзир једначину (137) и основну динамичку једначину ротационог кретања (97), добијемо једначину кретања торзионог клатна:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -c \cdot \theta, \quad (138)$$

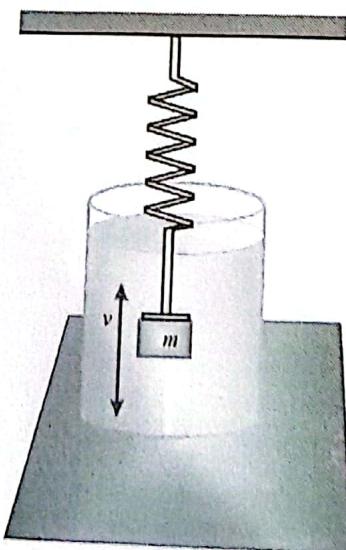
тј., када се мало преуређи, опет добијамо једначину хармонијског осцилатора (132), где је сада коефицијент $\omega_0^2 = \frac{c}{I}$. Из овог израза се може добити период осциловања торзионог клатна:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}. \quad (139)$$

Торзионо клатно нам може послужити за одређивање момента инерције чврстог тијела и без познавања његовог центра масе (што је потребно знати код физичког клатна). Потребно је знати торзиону константу жице c , али она се једноставно експериментално одређује. На слици 58 је приказано геометријски правилно тијело које је објешено на жицу, али у општем случају може се измјерити момент инерције и геометријски неправилних тијела, те је ова метода експерименталног мјерења момента инерције веома примјењена.

5.2. Пригушени осцилатор

Прости хармонијски осцилатор је идеализован случај осциловања. Реални осцилатори ипак не осцилују бесконачно дуго јер приликом осциловања дјелују сile трења и коначно на крају зауставе (или пригуше) осциловање. На слици 59 је приказано пригушено осциловање где се осцилације пригушују због сile трења воде, тј. вискозности.



Слика 59. Пригушено осциловање

У случају пригашеног осциловања са слике поред еластичне сile $F_e = -k \cdot x$ дјелује и сила вискозног трења $F_v = -\lambda \cdot v = -\lambda \cdot \frac{dx}{dt}$. Једначина кретања сада има облик:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x - \lambda \frac{dx}{dt}, \quad (140)$$

коју можемо написати у облику:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (141)$$

(14) је уведене смјене $\beta = \frac{\lambda}{2m}$ - фактор пригушења и $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - сопствена фреквенција осциловања. Интуитивно можемо претпоставити да ће осцилатор са пригушеним осциловањем са мањом фреквенцијом осциловања, тј. са већим периодом осциловања величина $m\ddot{x}$ представља кружну фреквенцију осциловања када не би постојало фактор пригушења (случај простог хармонијског непригашеног осцилатора описан у претходном глави), док ће пригашени осцилатор осциловать са неком мањом фреквенцијом $\omega < \omega_0$. Слуžбену претпоставку ћемо у даљем тексту и доказати.

Једначина (141) представља хомогену диференцијалну једначину другог реда. Ова једначина се решава на следећи начин: претпоставимо да се експоненција може написати у виду производа два фактора:

$$x(t) = e^{-\beta t} \cdot z(t), \quad (142)$$

и ако нађемо први и други извод по времену од овог израза:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{-\beta t} \cdot z) = -\beta e^{-\beta t} \cdot z + e^{-\beta t} \cdot \frac{dz}{dt} = e^{-\beta t} \left(\frac{dz}{dt} - \beta z \right), \quad (143)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[e^{-\beta t} \left(\frac{dz}{dt} - \beta z \right) \right] = -\beta e^{-\beta t} \left(\frac{dz}{dt} - \beta z \right) + e^{-\beta t} \left(\frac{d^2z}{dt^2} - \beta \frac{dz}{dt} \right) = \\ &= e^{-\beta t} \left(\frac{d^2z}{dt^2} - 2\beta \frac{dz}{dt} + \beta^2 z \right). \end{aligned} \quad (144)$$

И уврстимо (143) и (144) у (141), након сређивања добијемо да је:

$$e^{-\beta t} \left[\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) z \right] = 0. \quad (145)$$

Ако анализирамо израз (145) закључујемо да израз у загради мора бити једнак нули, јер је члан $e^{-\beta t} = 0$ само за $t \rightarrow \infty$ (тј. практично никад). Видимо да је израз у загради једначина простог хармонијског осцилатора:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0, \quad (146)$$

Идеје је $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, тј. (146) представља једначину хармонијског осцилатора са новом кружном фреквенцијом која је једнака:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (147)$$

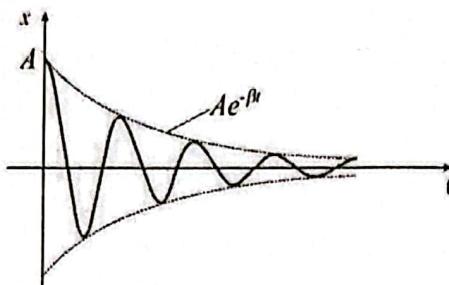
И као што видимо $\omega < \omega_0$ код пригашеног осциловања, у зависности од величине фактора пригушења β . Решење диференцијалне једначине (146) је:

$$z(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (148)$$

те када (148) уврстимо у (142) добијемо коначно решење елонгације пригашеног осцилатора³²:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi). \quad (149)$$

На слици 60 је приказан израз (149) графички, где видимо да је амплитуда пригашена током времена осциловања.



Слика 60. Амплитуда експоненцијално опада код пригашеног осциловања

Помоћу израза (147) можемо добити период осциловања пригашеног осцилатора:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (150)$$

Закључујемо да ће се за занемарљиве осцилације период осциловања поклопити са периодом осциловања непригашеног хармонијског осцилатора.

Пригашење осцилатора можемо квантитативно изразити са степеном пригашења, који представља однос двије елонгације које се налазе у фази (тј. за оне тачке осцилатора које су временски „удаљене“ за период осциловања T), тј.:

$$x_1(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi), \quad (151)$$

$$x_2(t+T) = Ae^{-\beta(t+T)} \cos(\omega(t+T) + \phi). \quad (152)$$

Када подијелимо (151) са (152), водећи рачуна да је $\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega(t+T) + \phi)$, јер тачке осцилују у фази (само су „временски“ помјерене за T), добијемо степен пригашења:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\beta T}. \quad (153)$$

Логаритамски декремент пригашења се добије ако се израз (153) логаритмује:

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \beta T. \quad (154)$$

Сваком осцилацијом коју пригашени осцилатор учини, он губи дио енергије, све до потпуно гашења осцилатора. Дио енергије коју осцилатор губи може се дефинисати са релативним смањењем енергије (као дио енергије који се изгуби у уносу на „улазну“ енергију):

³² Решење хармонијског осцилатора је у овом случају дато преко функције косинуса, што је суштински свеједно. Функције синуса и косинуса су међусобно фазно помјерене, а почетну вриједност елонгације увијек дефинише почетна фаза.

$$-\frac{\Delta E}{E} = -\frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{E_1 - E_2}{E_1}. \quad (155)$$

Енергије осцилатора су једнаке збиру кинетичке и потенцијалне енергије, али можемо искористити чињеницу да се укупна енергија осцилатора може изразити само са потенцијалном енергијом у тачкама када осцилатор мирује. Код опруге су ово тачке када је опруга максимално сабијена или максимално развучена. Тада су енергије у два узастопна (нпр. максимално сабијена) стања опруге једнака: $E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2$ и $E_2 = \frac{1}{2}kx_2^2$. Када ове изразе уврстимо у (155), добијемо:

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} = 1 - \frac{x_2^2}{x_1^2} = 1 - e^{-2\beta T}. \quad (156)$$

Ако је фактор пригушења β код осциловања мали, онда се члан $e^{-2\beta T}$ може развити у Тейзоров ред, $e^{-2\beta T} = 1 - 2\beta T + (2\beta T)^2 - \dots \approx 1 - 2\beta T$, па израз (156) добије облик:

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} \approx 2\beta T = 2\delta, \quad (157)$$

тј. видимо да је релативно смањење енергије једнако двоструком логаритамском декременту пригашеног осцилатора.

Фактор доброте Q неког осцилатора се дефинише као реципрочна вриједност релативног смањења енергије (157):

$$Q = \frac{E_1}{E_1 - E_2} \approx \frac{1}{2\delta}. \quad (158)$$

„Добар“ осцилатор се сматра онај који губи што мање енергије при осциловању, тј. који се „приближава“ идеалном непригашеном хармонијском осцилатору.

5.3. Принудни осцилатор

Замислимо да на тијело поред еластичне сile опруге и сile трења (пригашено осциловање) дјелује и нека спољашња сила, али је спољашња сила таква да и она има осцилаторни карактер, тј. спољашња сила има облик $F = F_0 \cos \omega t$. На слици 61 је приказан такав спречнути систем, где се уређај В са слике помјера тијело у смијеру лијево – десно одређеном периодичном силом, чија је кружна фреквенција ω . Овакво осциловање се назива принудно осциловање, јер дјелује принудна сила на тијело.

Једначина кретања тијела се у односу на израз (140) мора допунити са поменутом принудном силом, тј.:

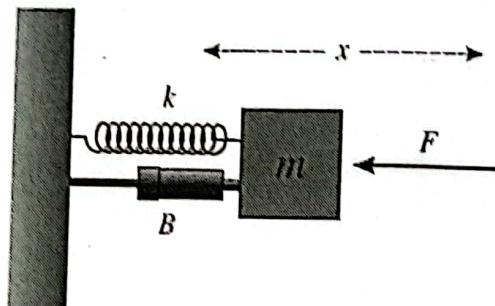
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x - \lambda \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t. \quad (159)$$

Израз (159) након сређивања се може написати на сљедећи начин:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (160)$$

где су: β - фактор пригашења; ω_0 - сопствена фреквенција непригашеног осциловања, $f_0 = F_0/m$ - сила по јединици масе.

Једначина (160) представља нехомогену диференцијалну једначину 2. реда. Решавање нехомогених диференцијалних једначина изван оквира овог курса, али ћемо изложити упутство за решавање овог конкретног случаја.



Слика 61. Принудно осциловање

Теорија решавања нехомогених диференцијалних једначина даје решење једначине (160) као збир решења хомогене једначине (тј. једначине која би на десној страни једначине (160) уместо члана $f_0 \cos \omega t$ имала нулу) и парцијалног решења нехомогене једначине. Из претходног поглавља где смо анализирали пригашено осциловање можемо одмах написати решење хомогене једначине:

$$x_h(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \theta), \quad (161)$$

где је сада, слично изразу (147), фреквенција пригашених осцилација $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Претпоставимо да парцијално решење нехомогене једначине има облик:

$$x_p(t) = A \cos(\omega t + \Phi). \quad (162)$$

Да бисмо израчунали непознате константе A и Φ , израчунаћемо први и други извод по времену израза (162) и ове изводе убацити у (160). Након алгебарског сређивања се добије:

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \Phi) - 2\beta\omega A \sin(\omega t + \Phi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \Phi) = f_0 \cos \omega t, \quad (163)$$

и када употребимо тригонометријске трансформације за синус и косинус збира углова: $\cos(\omega t + \Phi) = \cos \omega t \cos \Phi - \sin \omega t \sin \Phi$; $\sin(\omega t + \Phi) = \sin \omega t \cos \Phi + \cos \omega t \sin \Phi$, (164)

израз (163) добија облик:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos \omega t \cos \Phi - \sin \omega t \sin \Phi) - 2\beta\omega A(\sin \omega t \cos \Phi + \cos \omega t \sin \Phi) = f_0 \cos \omega t. \quad (165)$$

Да би једначина (165) била задовољена, морају се изједначити коефицијенти који стоје уз $\cos \omega t$, као и чланови који стоје уз $\sin \omega t$, тј. добију се двије независне једначине:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \Phi - 2\beta\omega A \sin \Phi = f_0, \quad (166)$$

$$-A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \Phi - 2\beta\omega A \cos \Phi = 0. \quad (167)$$

Ове једначине представљају систем једначина по непознатим A и Φ . Из израза (167)

$$\tan \Phi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (168)$$

а ако квадрирамо изразе (166) и (167) и затим их саберемо, добијемо:

$$A^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] = f_0^2, \quad (169)$$

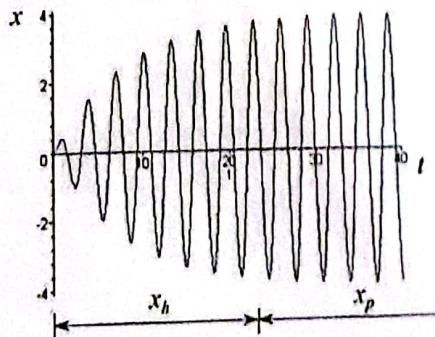
одакле се може изразити амплитуда код принудног осциловања:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (170)$$

Потпуно написано парцијално рјешење нехомогене једначине (162) сада има облик:

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos \left[\omega t + \arctan \left(\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \right], \quad (171)$$

док је укупно рјешење принудног осциловања: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Један приказ принудног осциловања је приказан на слици 62, на којој се може видјети да у почетку времена доминира хомогено рјешење које је описано изразом (161), али како експоненцијална функција са временом смањује (и „гаси“) вриједност $x_h(t)$, након неког времена преовладава само парцијално рјешење (171) у принудном осциловању.



Слика 62. Елонгација код принудног осциловања

5.3.1. Резонанција

Резонанција представља посебан случај принудног осциловања у којем се амплитуда осцилатора знатно повећа и добија врло велике вриједности. Резонанција ће се догодити под посебним условима и уколико принудна сила дјелује на осцилатор тачно одређеном фреквенцијом – коју називамо резонантна фреквенција.

Резонантну фреквенцију можемо наћи из анализе израза за амплитуду (170). Амплитуда ће тежити максималној вриједности уколико називник тежи минималној вриједности. Математички то значи да треба да нађемо екстрем (минимум) називника и изједначимо га са нулом. Промјенљива је ω , па извод тражимо по кружној фреквенцији ω :

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] = 0 \Rightarrow -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2 \omega = 0, \quad (172)$$

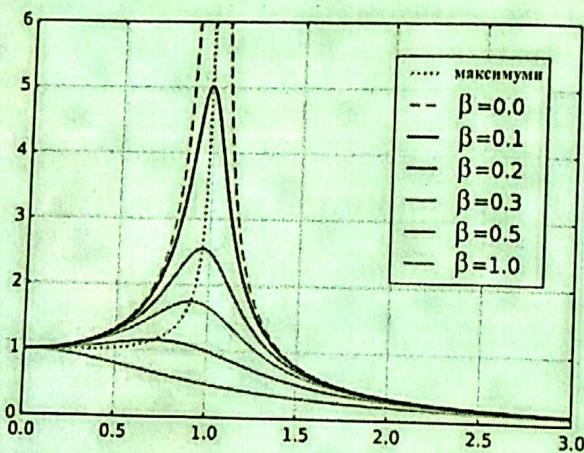
Одакле се добије резонантна фреквенија:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (173)$$

Сада можемо израчунати резонантну амплитуду, када у израз (170) уврстимо резонантну фреквенцију (173):

$$A = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (174)$$

Анализа (174) показује да величина резонантне амплитуде, за константну вриједност масе осцилатора, веома зависи од степена пригушења β . Ова зависност је приказана на слици 63.



Слика 63. Зависност резонантне амплитуде од фактора пригушења

Шта би се десило када не би било пригушења, тј. ако је $\beta = 0$? У том случају резонантна фреквенција би из израза (173) била једнака сопственој фреквенцији осцилатора, тј. $\omega_r = \omega_0$, а резонантна амплитуда би тежила бесконачности: $A(\beta \rightarrow 0) = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \rightarrow \infty$.

Ово је видљиво на слици 63, где је приказано како се са смањењем фактора пригушења драстично повећава амплитуда принудног осцилатора.

Резонанција је појава која може бити непожељна и деструктивна, али и веома потребна и корисна. Примјер деструктивног дјеловања резонанције је случај рушења моста у граду Такома (САД), када је вјетар релативно мале брзине (нешто преко 60 km/h) побудио резонанцију моста и на крају га срушио. Међутим, без резонанције не бисмо могли слушати радио (тражење одређене радио-станице на апарату се своди на ступање радио-уређаја у резонанцију са одређеном фреквенцијом емитера), или скидати каменац са зуба. Каменац који се таложи на зубима се разликује од глеђи зуба по хемијском саставу, па му се и резонантна фреквенција разликује. Ултразвуком одређене фреквенције се може погодити резонантна фреквенција каменца, а да се глеђ зуба не оштети (јер има другачију сопствену резонантну фреквенцију). Кување или загријавање хране у микроталасним пећницама ради на принципу резонанције – јер резонантна фреквенција молекула воде пада у микроталасно подручје спектра зрачења. На тај начин се и храна загријава (јер садржи са микроталасима). Још једна корисна употреба резонанције је код нуклеарне магнетне резонанције (NMR). Код ове методе у резонанцију ступају језгра водоника (тј. протони) чијим побуђењем, а каснијим враћањем у основно стање они емитују одређено зрачење, на основу којег можемо утврдити њихов распоред (тј. генерисати слику). На овај начин NMR

метода може „посматрати“ ткива са резолуцијом величине водониковог језгра, што ову методу чини апсолутно супериорном над свим осталим дијагностичким методама.

5.4. Слагање осцилација

Два или више осцилатора могу да се повежу на такав начин да они чине јединствен осцилатор. Сложени осцилатор ће вршити осциловање које, у општем случају, више неће бити хармонијско. Начин осциловања сложеног осцилатора може бити веома сложен, али постоје одређени начини слагања осцилатора који се могу анализирати и чију једначину кретања је релативно лако израчунати. Посматраћемо два начина повезивања осцилатора: када они након слагања врше осцилације у истом правцу, и када се слажу осцилатори чији су правци осциловања међусобно нормални.

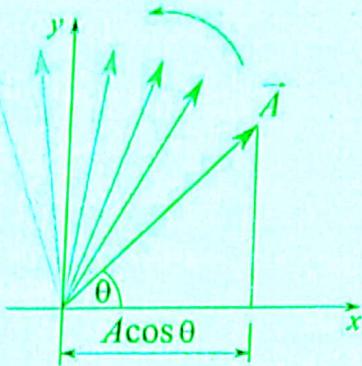
5.4.1. Слагање осцилатора истог правца осциловања

Примјер оваквог начина слагања осцилатора је приказан на слици 64, где су приказане двije опруге које имају различите константе еластичности.



Слика 64. Слагање осцилатора истог правца

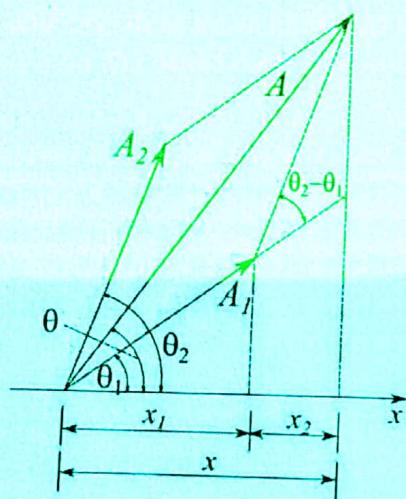
Анализу слагања осцилатора који осцилују у истом правцу урадићемо графичком методом. Наиме, један хармонијски осцилатор можемо приказати као вектор дужине A који ротира око своје осе, што је приказано на слици 65.



Слика 65. Приказ хармонијског осцилатора као ротирајућег вектора

Ако посматрамо пројекцију тог вектора на x -осу, онда она описује управо елонгацију хармонијског осцилатора $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$.

Идеја графичког решавања слагања осцилатора се састоји у томе да се сваки осцилатор посматра као засебни ротирајући вектор, те да их саберемо (по правилу сабирања вектора), а затим анализирамо ротирање резултујућег вектора (тј. његову пројекцију на x -осу). Ово је приказано на слици 66.



Слика 66. Слагање два осцилатора

У општем случају осцилатори могу имати различите амплитуде и осцилувати (тј. вектор може ротирати) различитим угаоним брзинама. Анализираћемо ипак једноставан случај, када оба осцилатора осцилују једнаком угаоном брзином ω_0 . Елонгације сваког засебног осцилатора износе:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1), \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \theta_2). \quad (175)$$

Резултујући осцилатор ће бити пројекција ротирајућег резултујућег вектора A , тј. $x = x_1 + x_2$. Резултујућу амплитуду ћemo добити користећи косинусну теорему:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\theta_2 - \theta_1)]}, \text{ или}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (176)$$

Почетну фазу резултујућег осцилатора можемо наћи са слике:

$$\tan \theta = \frac{A_1 \sin \theta_1 + A_2 \sin \theta_2}{A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2}. \quad (177)$$

Резултујућу амплитуду (176) можемо анализирати у неколико једноставних случајева, који зависе од фазне разлике хармонијских осцилатора:

А) Ако је фазна разлика једнака нули, $\theta_2 - \theta_1 = 0$. Тада се из (176) добије да је $\cos(\theta_2 - \theta_1) = 1$, па је $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2} = A_1 + A_2$. Ово је резултат који смо и очекивали, тј. ако не постоји фазна разлика између осцилатора који осцилују једнаком кружном брзином, њихове амплитуде ће се просто сабрати.

Б) Ако је фазна разлика једнака $\theta_2 - \theta_1 = \pi$, онда је $\cos(\theta_2 - \theta_1) = -1$, па је резултујућа амплитуда једнака $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2} = |A_1 - A_2|$. Ово је нешто што смо могли очекивати, тј. ако су осцилатори у против-фази, онда ће резултујућа амплитуда бити њихова разлика (у „надметању“ амплитуда осцилатора у против фази побиједиће онај осцилатор који има већу амплитуду). Као што се види, у овом случају се може десити да резултујући осцилатор уопште не осцилује – уколико је сложен од два осцилатора који осцилују у против-фази и једнаких су амплитуда.

Вратимо се на нашу почетну претпоставку претходне анализе, где смо претпоставили да оба осцилатора осцилују једнаким кружним фреквенцијама, али неједнаким амплитудама. Сада ћемо направити супротну претпоставку: нека амплитуде два осцилатора буду једнаке, али им се кружне осцилације разликују. Узећемо да је ова разлика веома мала, тј. нека један осцилатор осцилује кружном фреквенцијом ω , а други нека осцилује са кружном фреквенцијом $\omega + \Delta\omega$, где је $\Delta\omega \ll \omega$. Тада се елонгације два осцилатора могу написати као:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \omega t, \\ x_2(t) &= A \cos [(\omega + \Delta\omega)t]. \end{aligned} \quad (178)$$

У горњим изразима нисмо писали почетне фазе, јер уколико се два осцилатора једнаких амплитуда и различитих кружних фреквенција слажу – они ће се сигурно у неком тренутку поклопити, тј. фазна разлика се не одржава и слободно можемо узети да она не постоји у неком (па на примјер и почетном) тренутку. Резултујућа елонгација ће бити:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega t + A \cos [(\omega + \Delta\omega)t]. \quad (179)$$

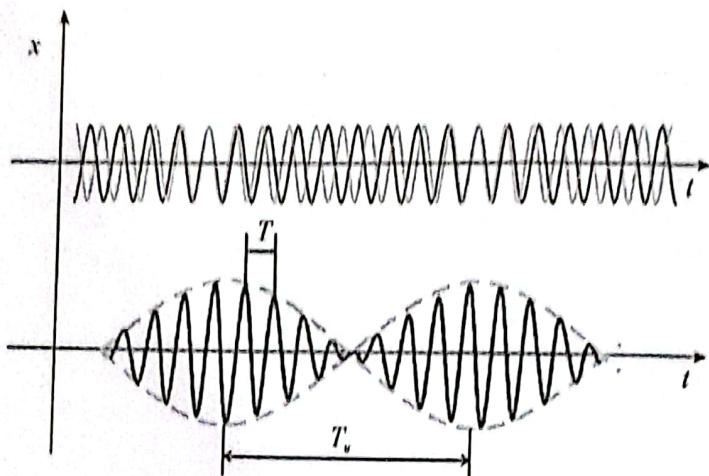
Горњи израз можемо уредити користећи тригонометријску трансформацију:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2}, \quad (180)$$

где ћемо узети да је $\beta = (\omega + \Delta\omega)t$ и $\alpha = \omega t$. Сада израз (179) постаје:

$$x = 2A \cos \frac{(\omega + \Delta\omega)t - \omega t}{2} \cos \frac{(\omega + \Delta\omega)t + \omega t}{2} = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega t, \quad (181)$$

Јер смо узели да је $(\omega + \Delta\omega)t + \varphi t = 2\varphi t$, због чињенице да је $\Delta\omega \ll \omega$. Примјетимо да је израз (181) елонгација сложеног осцилатора који осцилује истом кружном фреквенцијом ω , али је резултујућа амплитуда временски промјенљива и износи $A_x(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2}$. Овакве осцилације се називају „удари“ и приказане су на слици 67.

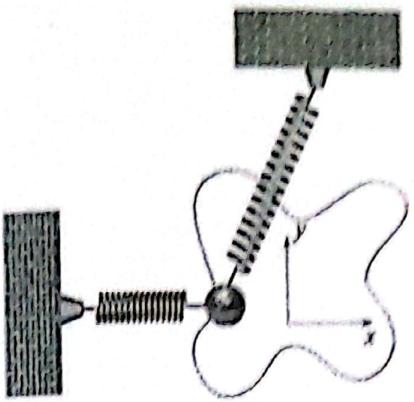


Слика 67. Слагање два осцилатора близких фреквенција дуж истог правца осциловања (горе) и резултат – „удари“ (доле)

Са слике видимо да ову врсте осциловања карактеришу два периода осциловања. Један период осциловања је $T = \frac{2\pi}{\omega}$, који карактерише осциловање резултујућег осцилатора, а други период је $T' = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, који карактерише период осциловања амплитуде. „Удари“ су врста модулисаних осцилација, јер се амплитуда мијења релативно споро у односу на осциловање осцилатора.

5.4.2. Слагање осцилатора међусобно нормалних правца осциловања

У претходном поглављу смо слагали правце истог правца, а сада ћемо видјети посљедице слагања два осцилатора који имају нормалне правце осциловања. У општем случају, на облик резултантног осциловања утичу амплитуде, почетне фазе и кружне фреквенције осцилатора који се слажу. Трајекторија резултујућег осциловања може бити веома компликована, па да бисмо аналитички анализирали утицај појединих фактора једнаке $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, као и да почетна фаза по x -оси не постоји. Амплитуде појединачних осцилатора се разликују, у правцу x -осе амплитуда је једнака A , док је у правцу y -осе амплитуда једнака B . Примјер овако сложеног осциловања је приказан на слици 68.



Слика 68. Слагање два осцилатора са међусобно нормалним правцима осциловања
Можемо написати једначине хармонијског осциловања појединачних хармонијских
осцилатора дуж x и дуж y -осе:

$$x = A \cos \omega t, \quad (182)$$

$$y = B \cos(\omega t + \theta). \quad (183)$$

Из горњег система једначина могуће је елиминисати вријеме t , како бисмо добили функционалну зависност $y = y(x)$, тј. једначину трајекторије резултујућег осцилатора. Ово можемо урадити тако што у изразу (183) развијемо косинусни члан (тригонометријска трансформација збира два угла), те добијемо:

$$\frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta, \quad (184)$$

где ћемо убацити $\cos \omega t$ из (182) тј. $\cos \omega t = x/A$, као и $\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - x^2/A^2}$. Након пређивања добије се:

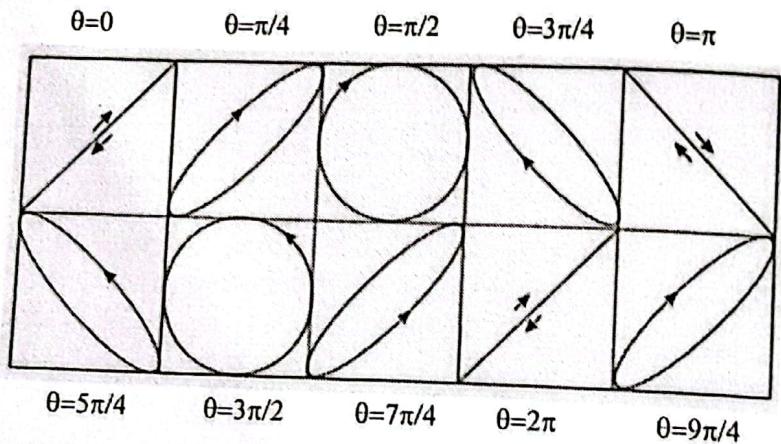
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \theta = \sin^2 \theta. \quad (185)$$

Горња једначина представља општу једначину елипсе. Анализираћемо неке специјалне случајеве овог осциловања:

- ако је фазна разлика једнака нули, онда је $\cos \theta = 1$; $\sin \theta = 0$ и једначина (185) постаје $\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$, тј. одавде видимо да је $y = \frac{B}{A}x$. Ово је једначина праве и закључујемо да ће два осцилатора једнаких кружних фреквенције осциловати линеарно по правцу уколико не постоји фазна разлика међу њима.
- ако је фазна разлика $\theta = \pm \pi$, онда је $\cos \theta = -1$; $\sin \theta = 0$ и једначина (185) постаје $\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$, а одавде је $y = -\frac{B}{A}x$. Закључујемо да је трајекторија сложеног осцилатора опет права, али супротног нагиба.

- ако је фазна разлика $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, онда је $\cos \theta = 0$; $\sin \theta = \pm 1$, па је једначина (185) са $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ облика $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$. Ово је једначина елипсе чије се осе поклапају са координатним осама.
- на крају уколико је фазна разлика $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, али су и осцилатори једнаких амплитуда тј. $A = B$, тада је $x^2 + y^2 = 1$, што представља једначину кружнице.

Утицај промјене фазне разлике код слагања два осцилатора једнаких амплитуда $A = B$ и једнаких кружних фреквенције на трајекторију резултујућег осцилатора је приказан на слици 69.



Слика 69. Трајекторија резултујућег осцилатора сложеног од два осцилатора једнаких амплитуда и кружних фреквенција са међусобно нормалним правцима осциловања

5.5. Разлагање осцилација

До сада смо се упознали са разним случајевима слагања два хармонијска осцилатора. Резултат слагања може бити разнолик, а зависи од параметара хармонијских осцилатора, тј. од њихових амплитуда, кружних фреквенција и вриједности почетних фаза – или прецизније фазних разлика улазних осцилатора. Број осцилатора који врше слагање није ограничен на два и може бити у општем случају произвољно велик, али и правци осцилатора могу бити произвољни.

У анализи слагања осцилатора ограничили смо се на поједине једноставније случајеве. Видјели смо да у случају слагања осцилатора који осцилују у истом правцу, да бисмо могли поједноставити проблем, па смо слагали осцилаторе једнаких кружних фреквенција. Додатно смо описивали слагање осцилатора чије се кружне фреквенције незнатно разликују, али су амплитуде једнаке – па смо добили специфично осциловање, тј. „ударе“. Поставимо сада обрнуто питање: да ли је могуће неки резултујући осцилатор „дешифровати“, тј. наћи од којих елементарних хармонијских осцилатора је резултујући осцилатор добијен? Одговор је потврдан, а како смо се ми бавили периодичним осцилацијама, показаћемо на који начин је могуће урадити хармонијску анализу периодичних осцилација.

Доказује се да је свака периодична функција $x(t) = F(\omega t)$ може разложити на бесконачни збир тригонометријских функција на следећи начин:

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (186)$$

Израз (186) се назива Фуријеов ред, а коефицијенти $A_0, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots$ се морају одредити како би се егзактно описала било како сложена функција резултујућег осцилатора. Задатак одређивања коефицијената је у општем случају сложена процедура, али се може донекле упростити уколико је функција $F(\omega t)$ парна, а то значи уколико је $F(-\omega t) = F(\omega t)$. Ово је могуће само уколико су чланови уз све синусне чланове једнаки нули, тј. ако су $B_1 = B_2 = B_3 = \dots = 0$. Тада се развој у Фуријеов ред своди на:

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (187)$$

Међутим, уколико је функција непарна, тј. ако је $F(-\omega t) = -F(\omega t)$, тада сви коефицијенти уз косинусне чланове морају бити једнаки нули, што је могуће ако су $A_0, A_1, A_2, \dots = 0$. Тада развој у Фуријеов ред излгеда овако:

$$x = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (188)$$

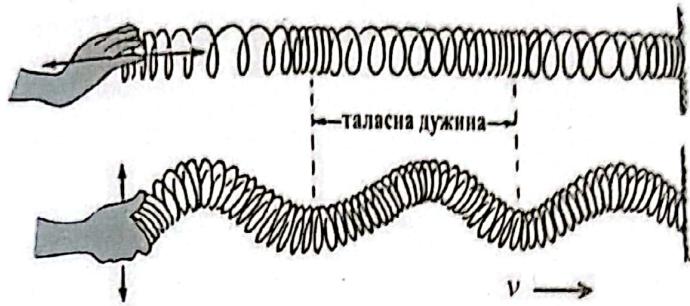
6. ТАЛАСИ

Прије него што почнемо поглавље о таласима наведимо један примјер који ће указати на разлике, али касније и сличности између концепта честица и концепта таласа. Два начина на који можете ступити у контакт са пријатељем у удаљеном граду су да му пишете писмо или да га назовете телефоном. Први начин (писмо) припада концепту честице, јер материјални објект путује од једне тачке до друге – преносећи са собом информацију и енергију. Претходне главе о којима је било ријечи припадају честичном концепту.

Други концепт (телефон) – је таласни концепт, он преноси информацију и енергију, али не и материју. Информација је пренешена до вашег пријатеља иако ништа што сте ви дотакли није заправо стигло до пријатеља. Концепт таласа се може посматрати ако се посматра житно поље на вјетровитом дану – иако видимо таласе који се простиру по пољу, ниједно зрно жита није напустило своје мјесто.

Таласни концепт има три основна типа: механички таласи (нпр. водени, звучни, сеизмички таласи), електромагнетни таласи (нпр. видљива, УВ, ИЦ светлост, радио, микро-, рентгенски, радарски таласи...), таласи материје (електрони, протони и остale фундаменталне честице путују као таласи). Примјетимо да први и трећи тип таласа захтјева постојање медијума или средине кроз коју ће се таласи простирати. Код механичких таласа то ће бити и услов – постојање еластичне средине кроз коју механички таласи имају могућност да се простиру. Трећи тип таласа јесте материја, тј. таласи материје чине неодвојиви дио саме материје. Ови таласи не постоје ако не постоји материја. Међутим, други тип таласа не захтјева постојање средине да би се могли простирати, тј. они се могу простирати и кроз вакуум. У овом курсу ћemo се бавити само са механичким таласима, иако се формално све карактеристике ове врсте таласа могу примјенити и на остала два типа таласа.

Таласе дијелимо на две врсте: трансверзални (попречни) и лонгитудинални (уздужни) таласи, чији су примјери приказан на слици 70. Трансверзални таласи су они код којих тачке средине осцилују у правцу нормалном на правац кретања таласа, док су лонгитудинални таласи такви да тачке осцилују у правцу осциловања таласа.



Слика 70. Лонгитудинални (горе) и трансверзални (доле) таласи

Са слике се види да је таласна дужина λ раздаљина између двије тачке у таласу које осцилују на једнак начин, тј. осцилују у фази. Вријеме за које талас пређе таласну дужину представља периоду таласа. Сада можемо дефинисати фазну брзину таласа, тј. брзину којом талас преноси енергију (или информацију) и она је једнака:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \quad (189)$$

где смо примјенили да је линеарна фреквценција једнака $\nu = \frac{1}{T}$. Примјетимо да и таласи имају периодично понављајући карактер, слично као осцилације, али ово понављање је двозначно – тј. таласи се могу описати као периодичне функције (синуса или косинуса) по простору, али и исто тако и по времену. Можемо закључити да оно што је таласна дужина у просторној оси, то је периода таласа у временској оси! Како онда описати понашање таласа? Одговор је – двозначно (јер се таласи тако и понашају) и то по двије осе – просторној и временској. Да бисмо разумјели ово, размислимо шта се дешава ако убацимо каменчић у воду. Наравно, формирају се таласи који се концентрично шире око мјеста поремећаја (такве где је каменчић убачен). Ако фиксирамо поглед у неку тачку удаљену за неко растојање од мјеста поремећаја (тј. фиксирамо просторну удаљеност), видјећемо да она осцилује трансверзално у времену. Међутим, ако узмемо фото-апарат и успикамо талас (тј. фиксирамо један временски тренутак), видјећемо осцилаторну функцију (трајкеторију синуса или косинуса) по простору. И заиста, комбинујући просторно-временску двозначност описивања таласа, елонгацију неког таласа или таласну функцију описујемо на сљедећи начин:

$$\xi(x, t) = A \sin \omega(t - t_z) = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad (190)$$

где су: A - амплитуда таласа, $\omega = 2\pi/T$ - кружна фреквенција таласа, t_z - представља вријеме потребно таласу да стигне од мјеста поремећаја (почетка таласа) до мјеста x у којем посматрамо елонгацију таласа у тренутку t . Фаза таласа је израз који стоји под синусном функцијом $\omega(t - t_z) = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$.

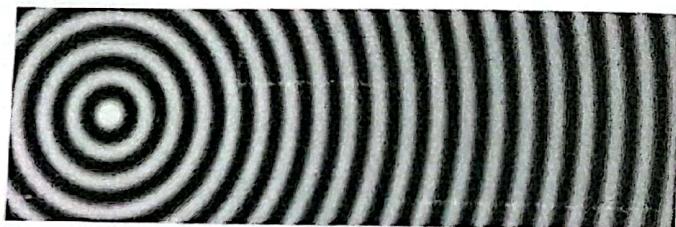
Ако у израз (190) замјенимо израз за кружну фреквенцију $\omega = 2\pi v$, као и израз (189) добијемо:

$$\xi(x, t) = A \sin\left(\omega t - 2\pi v \frac{x}{\lambda v}\right) = A \sin(\omega t - kx), \quad (191)$$

где је $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ таласни број³³ Знак „минуса“ у загради означава талас који се креће дуж позитивне x -осе. Уколико се талас креће брзином која је усмјерена супротно x -оси, онда је таласна функција:

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t + kx). \quad (192)$$

Приликом кретања механичких таласа кроз неку материјалну средину геометријска површ која веже све тачке које осцилују у фази (или геометријско мјесто свих тачака до којих је талас дошао) се назива таласни фронт. Јасно је да је таласни фронт у близини мјеста пада каменчића којег смо убацили у воду у облику концентричних кругова. Ова врста таласа се назива сферни талас. Међутим, далеко од мјеста пада каменчића у воду таласни фронт постаје све мање закривљен, јер су радијуси концентричних кругова све већи. Јако далеко од мјеста поремећаја (практично у бесконачности), таласни фронт се може сматрати као раван, па се овакви таласи називају равни таласи. Примјер сферног и равног таласа је приказан на слици 71.



Слика 71. Сферни и равни талас

6.1. Таласна једначина

Израз (191) за слонгацију таласа у простор-времену, тј. таласну функцију, представља рјешење парцијалне³⁴ диференцијалне једначине која има облик:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (193)$$

У ово се можемо увјерити ако рјешења (191) или (192) уврстимо у (193), јер ћемо у том случају добити идентитет, што значи да израз (193) представља таласну једначину.

Израз (193) представља таласну једначину која описује талас који се простира дуж x -осе. Реални таласи се наравно простиру и дуж остале двије просторне координате, тако да је тачан облик таласне једначине:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(x, y, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, y, z, t)}{\partial t^2}, \quad (194)$$

што се може и концизније написати у облику:

³³ Уколико се талас креће дуж једног правца (једнодимензиони талас), онда k јесте број, али уколико се талас простира у све три димензије – онда је k вектор, у наставку текста сlijеди појашњење!

³⁴ У теорији диференцијалних једначина парцијалне диференцијалне једначине су оне које имају више од једне промјенљиве величине.

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (195)$$

Дје је $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Лапласов оператор³⁵.

Рјешење таласне једначине (195) је дато у облику:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (196)$$

Сада се можемо увјерити да је \vec{k} заправо таласни вектор, а не број како нам је раније сугерисао израз (191), јер \vec{k} учествује у скаларном производу са радијус вектором. Треба напоменути да су у физици често заступљена рјешења и у виду равних таласа, која имају комплексни облик:

$$\xi(\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (197)$$

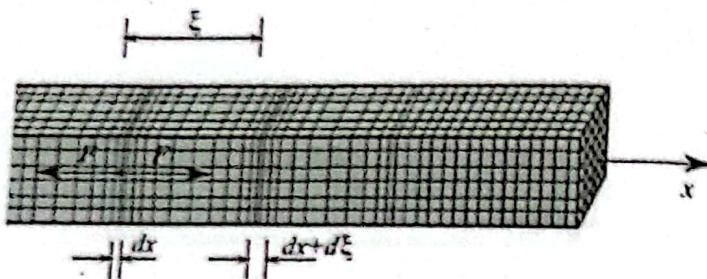
јер је, као што је из математике познато, знатно лакше тражити изводе вишег реда од експоненцијалних функција. При томе треба имати у виду да у коначном рјешењу физички симсака имају само имагинарни дијелови комплексног рјешења (197).

6.2. Брзина таласа

Фазна брзина таласа је брзина преношења таласа у виду његове енергије или информације. Познато је да је брзина електромагнетног таласа једнака брзини свјетlostи и ова брзина је максимална брзина за простор кроз који се простире, без обзира да ли је простор кроз који се електромагнетни талас простире материја или вакуум. Материјални талас се простире брзином којом се простире и материја, а карактеристике таласа (његова таласна дужина) управо зависе од брзине кретања материје. Уколико се материја не креће – материјални талас не постоји. Када говоримо о механичким таласима, брзина простирања таласа ће зависити од агрегатног стања материје кроз коју пролази талас и физичких карактеристика материје.

Посматрајмо кретање таласа кроз чврсто тијело. Ако замислимо чврсто тијело као кристалну структуру, онда ће јони који су распоређени у чврлове кристалне решетке својим осциловањем преносити талас дуж чврстог тијела. Посматрајмо слику 72, где је приказано простирање таласа кроз еластично чврсто тијело (греде) дуж x-осе.

³⁵ Оператори су математичке форме које се могу пре-дефинисати на такав начин да тачно знамо које операције над одређеном функцијом оператор треба да уради. Лапласов оператор врши сабирање других парцијалних извода над таласном функцијом.



Слика 72. Брзина таласа кроз чврсто тијело

Ако је дјеловала сила у правцу x -осе, зnamо да ћe сe као „реакција“ тијела јавити еластична сила, чији интензитет је познат на основу Хуковог закона:

$$\underline{F = ES \frac{d\xi}{dx}} \quad (198)$$

Ако диференцирамо још једном по x -оси израз (198), добићемо:

$$\underline{\frac{dF}{dx} = ES \frac{d^2\xi}{dx^2}} \quad (198)$$

Сада посматрајмо један јон веома мале масе dm који гради кристалну решетку чврстог тијела и налишимо 2. Њутнов закон дејства диференцијално мале сile, због које долази до осциловања јона:

$$\underline{dF = dm \cdot a = \rho dV \cdot a = \rho S dx \cdot a = \rho S dx \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}}, \quad (199)$$

где смо диференцијално малу масу изразили преко густине, попречног пресијека треде и диференцијално малог помака јона $dm = \rho S dx$, док смо убрзање представили као други извод елонгације по времену $a = \frac{d^2\xi}{dt^2}$. Када подијелимо израз (199) са dx добијемо:

$$\underline{\frac{dF}{dx} = \rho S \frac{d^2\xi}{dt^2}} \quad (200)$$

Ако упоредимо изразе (198) и (200) добићемо:

$$\underline{ES \frac{d^2\xi}{dx^2} = \rho S \frac{d^2\xi}{dt^2}} \Rightarrow \underline{\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{\rho}{E} \frac{d^2\xi}{dt^2}} \quad (201)$$

Ако горњи израз упоредимо са таласном једначином (193) закључујемо да је брзина простирања таласа кроз чврсто тијело:

$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$$(202)$$

Видимо да је брзина таласа кроз чврсто тијело дефинисана еластичним особинама, али и густином материјала. Овај однос може бити веома различит, или примарну улогу на брзину „преузима“ модул еластичности чврстог тијела (код чврстих тијела). Код гасова ћe модул еластичности замијенити производ притиска гаса и његове адијабатске константе, али о томе ћe бити више ријечи у поглављу о звуку.

6.3. Енергија таласа

у глави Осцилације упознали смо се о непрестаној размјени приликом осциловања неке честице између потенцијалне и кинетичке енергије, уз услов да је осцилатор хармонијски и без пригушења. Сада знамо да се осцилације преносе са једне честице на другу честицу и на тај начин преноси енергија таласа кроз простор, а да се при томе саме честице не простиру кроз простор. Примјер да се енергија путем таласа може пренијети са једног мјеста на друго је тунами који је погодио обале Јапана у марту 2011. године. Земљотрес разорне јачине се десио у Тихом океану (релативно далеко од Јапана), али је дио енергије земљотреса пренесен путем водених таласа до обале Јапана и тамо направио огромну штету, од којих се издваја несрћа у атомској централи у Фукушими. Ово је тужна исповјест и доказ да талас преноси енергију без преношења материје.

Енергија једне честице која осцилује и учествује у преношењу таласа је већ дата изразом (129), тј. једнака је:

$$E_1 = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2. \quad (203)$$

Укупна енергија таласа ће бити енергија једне честице (203) помножена са бројем честица N . Овај број је велик и незгодан за рачунање, али га можемо изразити преко концентрације честица у некој запремини ΔV , као $N = n \cdot \Delta V$. Тада је укупна енергија таласа:

$$E = N \cdot E_1 = n \cdot \Delta V \cdot \frac{1}{2} m\omega^2 A^2. \quad (204)$$

Пошто је $n = \rho \cdot m$, где је ρ густина материје кроз коју талас пролази, онда је горњи израз:

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \rho \Delta V. \quad (205)$$

Као што видимо из израза (205), енергија таласа је сразмјерна квадрату амплитуде и квадрату фреквенције таласа. Јасно, што је већа запремина материје кроз коју се талас простире – већа је и енергија. Како талас може заузимати веома велике запремине, погодније је енергију приказивати кроз величину густине енергије, тј. количини енергије по јединици запремине:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \rho. \quad (206)$$

На овај начин енергију таласа можемо изразити на једноставнији начин (без обзира коју запремину талас заузима), али на тај начин и упоређивати енергије таласа различитих таласа. Снага таласа се изражава као енергија у јединици времена (или брзина промјене енергије талас у јединици времена):

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\varepsilon \Delta V}{\Delta t} = \frac{\varepsilon S v \Delta t}{\Delta t} = S v \varepsilon, \quad (207)$$

Дје смо искористили израз за густину енергије (206) и чињеницу да се запремина може изразити преко попречног пресјека површине S кроз коју талас пролази брzinom v . Запремина је у том случају $\Delta V = S \Delta x = S v \Delta t$.

Поред снаге таласа, погодно је изразити и интензитет таласа, који представља енергију таласа која се простира кроз неку површину у јединици времена. Ова величина dakle представља снагу таласа (енергија по јединици времена) по јединици површине:

$$I = \frac{\Delta E}{SM} = \frac{P}{S} = VE$$

(208)

Из горњег израза се види да је интензитет таласа величина која је директно пропорционална густини таласа и брзини простирања таласа, па се као таква веома често користи у описивању таласа и његових карактеристика.

6.4. Суперпозиција таласа

Суперпозиција два (или више) таласа представља мијешање или сабирање два (или више) таласа. Како је талас двозначна функција (временско-просторна), онда ће и сабирање таласа у општем случају зависити од просторних координата и временске координате. Примјер просте суперпозиције можемо примјетити ако убацимо два камчића у воду. На мјесту судара таласних фронтова једног и другог таласа доћи ће до интреференције таласа, који ће резултовати појавом одређених интерферентних облика, као што је приказано на слици 73. Резултат интреференције на појединим мјестима ће бити да талас не постоји, што се може примјетити и на слици.

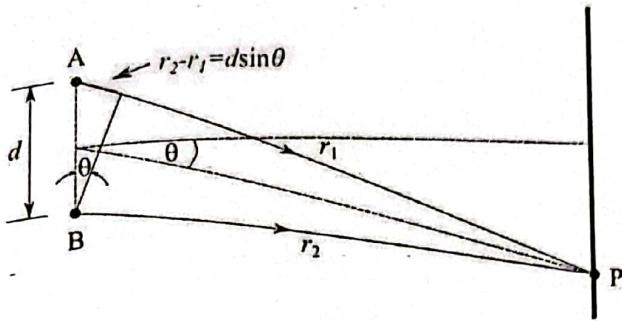


Слика 73. Интерференција у води

Ми ћемо се ограничiti на такву интреференцију таласа чији ће резултат бити стационарна интреференција, што значи да ће резултат интреференције неће зависити од времена, већ само од простора. Потребан предуслов за стационарну интреференцију таласа је да су таласи кохерентни. Кохерентност таласа се огледа у томе да су они потпуно једнаки (имају исту амплитуду и фреквенцију), али не долазе са истог мјesta³⁶. При томе, таласи задржавају исту разлику у фазама. Веома је лако добити кохерентну свјетлосну таласу, о чему ће касније бити ријечи у Глави 9.5, у којој су објашњени елементи таласне оптике.

Замислимо да имамо два кохерентна таласа који полазе из различитих тачака (A и B) и састају се у тачки P на заклону, како је то приказано на слици 74.

³⁶ Када би они долазили са истог мјesta (и потпуно су једнаки) – онда се ради о једном те истом таласу!



Слика 74. Интерференција два таласа

поставља се питање шта ће бити резултат интерференције у посматраној тачки Р на залону? Нека су таласне функције из тачака А и В дате као:

$$\xi_1 = A \sin \omega (t - r_1 / v), \quad (209)$$

$$\xi_2 = A \sin \omega (t - r_2 / v). \quad (210)$$

видимо да се ова два таласа разликују по фази. Ако израчунамо ову разлику фаза, добијемо:

$$\Delta\Phi = \omega (r_2 - r_1) / v = k (r_2 - r_1), \quad (211)$$

где смо при израчунавању искористили изразе за кружну фреквенцију таласа $\omega = \lambda v$ и интензитет таласног вектора $k = 2\pi / \lambda$. Можемо закључити да разлика фаза два кохерентна таласа пропорционална разлици путева које та два таласа пређу до тачке Р или, како се уобичајено назива – путној разлици.

Резултујућа елонгација у тачки Р ће бити збир израза (209) и (210), тј.:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A [\sin \omega (t - r_1 / v) + \sin \omega (t - r_2 / v)]. \quad (212)$$

Ако на горњи израз применимо тригонометријску трансформацију:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (213)$$

добићемо:

$$\xi = 2A \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} \sin \left[\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} \right]. \quad (214)$$

Израз (214) представља резултујући талас, који је резултат интерференције таласа. Заиста, ако погледамо пажљиво горњи израз, он има форму таласа сличну као и таласи који се сабирају (209) или (210), али са том разликом да амплитуда резултујућег таласа није константна, већ зависи од путне разлике првог и другог таласа, тј. од $(r_2 - r_1)$. Са слике 74 видимо да је путна разлика једнака:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = d \sin \theta. \quad (215)$$

Анализираћемо амплитуду у резултујућем интерферентном таласу у изразу (214), која је једнака:

$$2A \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} = 2A \cos \frac{kd \sin \theta}{2}. \quad (216)$$

Видимо да је амплитуда тригонометријска функција, те можемо закључити да она може узимати максималне и минималне вриједности. Случај максималног појачања амплитуде ће бити ако је:

$$\cos \frac{kd \sin \theta}{2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{kd \sin \theta}{2} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (217)$$

Тада је разлика фаза из израза (211) једнака:

$$\Delta\Phi = k(r_2 - r_1) = kd \sin \theta = 2n\pi, \quad (218)$$

док је путна разлика једнака:

$$\Delta r = d \sin \theta = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda. \quad (219)$$

Закључак је да ће два кохерентна таласа у тачки P на заслону бити максимално појачана у оним смијеровима за које је путна разлика једнака цјелобројном производу таласних дужина.

Аналогно овом разматрању можемо наћи правце у којима ће резултујућа амплитуда бити минимална, тј. када је:

$$\cos \frac{kd \sin \theta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{kd \sin \theta}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (220)$$

Фазна разлика ће у том случају бити:

$$\Delta\Phi = k(r_2 - r_1) = kd \sin \theta = (2n+1)\pi, \quad (221)$$

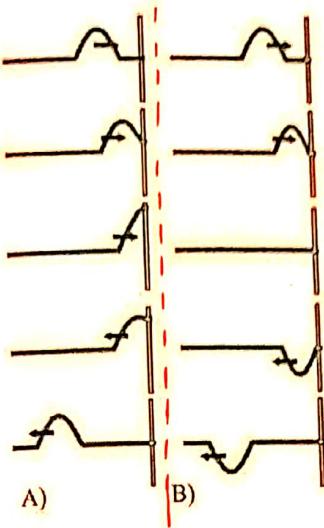
док је путна разлика:

$$\Delta r = d \sin \theta = (2n+1)\frac{\pi}{k} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (222)$$

Видимо да ће два кохерентна таласа бити максимално ослабљена (или поништена) у оним правцима за које је путна разлика једнака непарном умношку половине таласних дужина.
Изрази (219) и (222) представљају општа правила за интерференцију свих врста кохерентних таласа.

6.5. Рефлексија и транспаренција механичких таласа

Механички таласи приликом најласка на неку препреку или предаја у другу средину (са различитом густином) могу да се једним својим дијелом рефлектију, а другим дијелом прођу у другу средину. Сценарио за одбијање или рефлексију таласа може бити различит, као што је приказано на слици 75.



Слика 75. Преламање механичких таласа

Први сценариј је дат под А) где се види да талас не промијени своју фазу приликом његовог одбијања од неку средину. Међутим други сценариј под В) показује да талас промијени своју фазу (инвертује се). Тада, ако је амплитуда долазећег таласа позитивна, приликом рефлексије ће доћи до инверзије амплитуде – и она ће постати негативна. Проучићемо услове који доводе до једног или другог сценарија.

Узимамо општи случај простирања механичких таласа кроз двије средине различитих густине. Нека је граница између средина нормална на правац простирања таласа. Када талас нађе на ову границу, он ће се једним својим дијелом рефлектовати назад, а другим својим дијелом ће талас наставити пропагацију кроз другу средину. Ако напишемо елонгације упадног, одбијеног и пропуштеног таласа помоћу израза (191) и (192), добићемо:

$$\xi_u(x, t) = A_u \sin \omega(t - x/v_1), \quad (223)$$

$$\xi_r(x, t) = A_r \sin \omega(t + x/v_1), \quad (224)$$

$$\xi_p(x, t) = A_p \sin \omega(t - x/v_2). \quad (225)$$

Примјетимо да се горе описани таласи разликују по амплитудама, али и брзинама простирања. Из израза (202) зnamо да је брзина простирања таласа обрнуто сразмјерна са коријеном из густине, тј. $v \sim 1/\sqrt{\rho}$, тако да ће брзина простирања таласа бити већа у рjeђој коријену из густине. Такође, примјетимо да је у фази израза (224) знак „+“, што значи да се талас простире на супротну страну од упадног (и пропуштеног) таласа. Граница средина за простирање таласа представља раван (нпр. танка површина) на којој се талас морају некако „ловезати“ (тј. таласи се не могу „нагомилавати“ на граничној површини) или математичким језиком речено – на граничној равни горње елонгације таласа морају бити непрекидне и глатке функције. Услов непрекидности заправо значи да у једном тренутку / збир упадне и рефлектоване елонгације мора бити једнак елонгацији пропуштеног таласа. Услов да су функције глатке у граничној равни се своди на то да градијент³⁷ збира функција елонгација упадног и рефлектованог таласа буде једнак градијенту елонгације пропуштеног

³⁷Градијент представља извод функције по простору, али у нашем случају пошто се посматрани таласи простиру дуж једног правца – извод ће бити по једној координати (нпр. x-оси).

талаца. Ако смјестимо граничну раван између разлиичите средине у $x=0$, онда ћемо ове услове написати као:

$$\xi_u(0,t) + \xi_r(0,t) = \xi_p(0,t), \quad (226)$$

$$\left. \frac{\partial(\xi_u + \xi_r)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \xi_p}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (227)$$

Уврштавањем (223), (224) и (225) у горње изразе (226) и (227) добије се:

$$A_u + A_r = A_p, \quad (228)$$

$$\frac{A_u}{v_1} - \frac{A_r}{v_1} = \frac{A_p}{v_2}. \quad (229)$$

Горњи изрази представљају систем од двије независне једначине, где су у општем случају три непознате A_u , A_r и A_p . Он је као такав математички нерјешив, али се A_r и A_p могу изразити у функцији од A_u :

$$A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_u; \quad A_p = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} A_u. \quad (230)$$

Ако анализирамо у којим случајевима ће за позитивну вриједност амплитуде упадног таласа A_u рефлектирана амплитуда бити негативна, добијамо да је то за случајеве када је $v_1 > v_2$, тј. када је $\rho_1 < \rho_2$. Дакле, када талас наилази на гушћу средину, његов рефлектирана амплитуда ће промијенити своју фазу (тј. талас ће бити инвертован у односу на упадни талас), што одговара случају В) са слике 75. У супротном, ако талас иде из гушће у рјеђу средину, рефлектирана амплитуда ће промијенити своју фазу у односу на упадни талас, што одговара случају А) са слике 75.

Талас који прође у другу средину неће промијенити своју фазу у односу на упадни талас, без обзира да ли је друга средина већа или мање густине од прве средине, што видимо из израза (230) за A_p , који никада не може постати негативан.

Анализа величине амплитуде рефлектираног таласа A_r показује да је он увијек мањи од амплитуде упадног таласа A_u . На другу страну, амплитуда пропуштеног таласа ће бити већа од амплитуде упадног таласа ($A_p > A_u$) за $v_1 < v_2$, тј. када талас прелази из гушће у рјеђу средину.

Претпоставимо да упадни талас наилази на чврсту и нееластичну препреку, тако да не постоји пропуштени талас, тј. $v_2 = 0$. Тада можемо написати елонгације упадног и рефлектираног таласа:

$$\xi_u(x,t) = A_u \sin[\omega(t - x/v_1) + \Phi_1], \quad (231)$$

$$\xi_r(x,t) = A_r \sin[\omega(t + x/v_1) + \Phi_2], \quad (232)$$

где Φ_1 и Φ_2 представљају почетне фазе упадног и рефлектираног таласа, респективно. Како пропуштени талас не постоји, онда се за граничну површину услов (226) да је талас непрекидна функција може написати као:

$$\xi_u(0) + \xi_r(0) = 0. \quad (233)$$

Ако у (233) уврстимо изразе (231) и (232), уз кориштење тригонометријске трансформације о синусу збира два угла, тј. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, добијемо да је:

$$A_u = A_r ; \quad \Phi_2 = \Phi_1 + \pi. \quad (234)$$

Резултат који смо добили показује да ће само у случају рефлексије таласа од чврсте нееластичне средине амплитуда рефлектијућег таласа бити једнака амплитуди упадног таласа, с тиме да рефлектовани талас промијени фазу за π (инвертује се). За све остале случајеве у којима је средина еластична – долази до продирања дијела таласа у другу средину, с тиме да је амплитуда рефлектованог таласа мања од амплитуде упадног таласа.

6.6. Стојећи таласи

Искористићемо задњи резултат којег смо добили, тј. чињеницу да ће се упадни талас одбити од чврсте нееластичне средине на такав начин да ће рефлектовани талас бити једнаке амплитуде као и упадни, али инвертован (са фазом помјереном за π). У том случају можемо добити интерференцију два потпуно једнака таласа, који се крећу у супротним правцима. Елонгације два таласа, упадног и рефлектованог, можемо написати на сљедећи начин:

$$\xi_u(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (235)$$

$$\xi_r(x, t) = A \sin(\omega t + kx). \quad (236)$$

Из горњих релација видимо да су ова два таласа идентична, али се разликују по смијеру. Када их саберемо, добијемо резултујући талас:

$$\xi = \xi_u + \xi_r = A [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)], \quad (237)$$

којег можемо додатно поједноставити користећи $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$:

$$\xi = 2A \cos kx \sin \omega t. \quad (238)$$

Из горњег израза видимо да је резултујући талас такав да му је амплитуда периодично промјенљива, јер се мијења са фактором, узимајући вриједности у интервалу $(-2A, +2A)$. Израчунаћемо услове да амплитуда резултујућег таласа буде максимална и једнака $\pm 2A$, или да буде једнака нули.

Мјеста на којима честице средине не осцилују су мјеста резултујућег таласа на којима је амплитуда једнака нули и називају се „чврлови“ таласа (слика 76). За њих је:

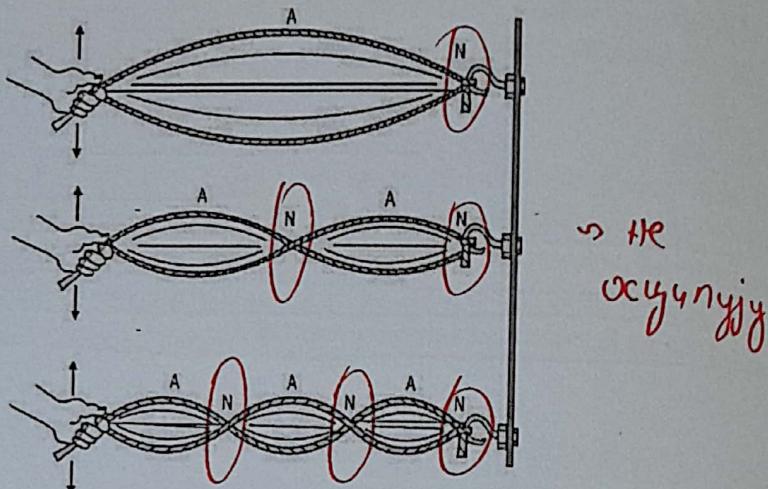
$$\cos kx_n = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{k} (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad (239)$$

где када искористимо да је $k = 2\pi / \lambda$, добијемо:

$$x_n = (2n+1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (240)$$

Као што видимо чврлова може бити неограничено много. Због чињенице да у тачкама x_n нема таласа (те тачке не осцилују) – ове таласе називамо стојећи таласи. Слика 76 показује како помоћу ужета фиксираног на једној страни за вид можемо формирати неколико

стојећих таласа: са једним чвором N (горња слика, где је заправо чвор мјесто везивања за зид), са два чвора N (средња слика) и са три чвора N (доња слика).



Слика 76. Формирање различитих стојећих таласа

На сличан начин можемо мјеста на којима је амплитуда стојећег таласа једнака $\pm 2A$:

$$\cos kx_n = \pm 1 \Rightarrow x_n = \frac{n\pi}{k}, \quad (241)$$

или након сређивања уз помоћ $k = 2\pi / \lambda$:

$$x_n = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (242)$$

Тачке x_n дефинисаним горњим изразом називамо трбуси стојећег таласа (на слици 76 означена са A).

Стожећи таласи су веома интересантна појава, јер иако садрже енергију, они нису прогресивни – и због тога не могу да преносе енергију.

Стожећи таласи су ограничени димензијом средине. На примјеру са слике 76 видимо да је дужина ужета коначна – и она ће заправо одредити које се таласне дужине уопште могу јавити на тој дужини ужета. Прва фреквенција на дужини ужета L која је могућа да се јави (слика 76, горе) се назива први хармоник. Видимо да се овдје јавља пола таласа на тој дужини $L = \frac{\lambda_1}{2}$, па је фреквенција првог хармоника једнака:

$$\boxed{v_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}} \quad (243)$$

Други хармоник (слика 76, средња) ће се јавити када је дужина ужета $L = \lambda_2$, а тада је фреквенција другог хармоника:

$$\boxed{v_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2v_1.} \quad (244)$$

Трећи хармоник се јавља када је $L = \frac{3}{2}\lambda_3$, па је фреквенција трећег хармоника једнака;

$$\nu_3 = \frac{\nu}{\lambda_3} = \frac{3\nu}{2L} = 3\nu_1.$$

(245)

Сада можемо дати општи израз за све хармонике који се могу јавити на одређеној дужини стоећег таласа, за које је $L = \frac{n}{2} \lambda_n$, па је фреквенција n -тог хармоника једнака:

$$\nu_n = \frac{\nu}{\lambda_n} = n \frac{\nu}{2L} = n\nu_1, \quad n=1,2,3,\dots$$

Примјера за стоеће таласе има много, али навешћемо неколико. Код музичких инструмената са затегнутим жицама се јављају хармоници треперења жица, али и код дувачких инструмената ваздушни стоећи таласи се формирају унутар инструмента. Микроталасна пећница емитује микроталасе у форми стоећих таласа који загријавају храну. Фреквенција која одговара резонантној фреквенцији молекула воде (које свакако има у свакој врсти хране) је 2,45 GHz. Стојећи таласи који се формирају су таласне дужине од 12,5 cm, што објашњава зашто се тањир у микроталасној пећници окреће приликом рада. Наиме, када би храна мировала приликом рада, стоећи микроталас те таласне дужине би неједнако загријавао храну која је сличне дужине.

6.7. Фазна и групна брзина таласа

Брзину таласа смо обрадили раније и из израза (202) смо видјели да је код механичких таласа она директно сразмерна коријену модула еластичности, а обрнуто сразмерна коријену густине материје кроз коју се талас простира. Ово је иста брзина која фигурише у изразу (190), тј. у $\xi(x,t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$, а како је ова брзина саставни дио фазе таласа – она се зове фазна брзина. Дакле, фазна брзина је просто она брзина којом се таласи простиру у простору.

Међутим, постоје материјалне средине у којима брзина простирања таласа зависи од таласне дужине таласа, тј. $v = v(\lambda)$. Такве средине кроз које се неће једнако брзо простирати таласи различитих таласних дужина се називају дисперзионе средине. У дисперзионим срединама се дешава груписање таласа близких таласних дужина у одређене таласне гупе или таласне пакете, а ове групе таласа се крећу једном посебном брзином – коју називамо групном брзином!

Показаћемо на који начин се изводи израз за групну брзину. Посматрајмо кретање два таласа која су врло слична, тј. разликују се незнанто у вриједностима кружне фреквенције и таласног броја (тј. таласној дужини). Уколико се ова два таласа суперпонирају, елонгација резултујућег таласа је:

$$\xi = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega' t - k'x), \quad (247)$$

и примјеном тригонометријске трансформације $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,

добијемо:

$$\xi = 2A \cos \frac{(\omega' - \omega)t - (k' - k)x}{2} \sin \frac{(\omega' + \omega)t - (k' + k)x}{2}. \quad (248)$$

Како су фреквенција и таласни бројеви приближно исти, онда је $\frac{\omega' + \omega}{2} \approx \omega$, као и $\frac{k' + k}{2} \approx k$, па када се ове апроксимације уврсте у (248) добије се:

$$\xi = 2A \cos \frac{(\omega' - \omega)t - (k' - k)x}{2} \sin(\omega t - kx). \quad (249)$$

Из горњег израза се види да резултујући талас има амплитуду која има своју брзину простирања – групну брзину, која се дефинише као:

$$v_g = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (250)$$

Ако знамо да је $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda}\nu$, онда је:

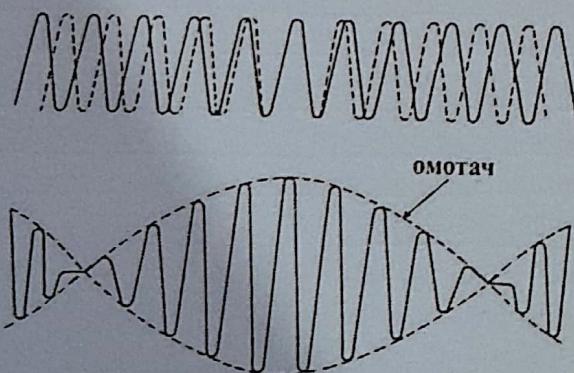
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \nu + k \frac{dv}{d\lambda}. \quad (251)$$

Ако диференцирамо израз $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, добићемо $dk = -\frac{2\pi d\lambda}{\lambda^2}$, па ако овај израз уврстимо у израз (251), добићемо:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \nu - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (252)$$

Из горњег израза видимо да је групна брзина увијек мања од фазне брзине за величину $\lambda \frac{dv}{d\lambda}$, или ако брзина није функција од таласне дужине (тј. ако средина није дисперзивна), онда је групна брзина једнака фазној брзини.

На слици 77 видимо два таласа која имају сличне карактеристике (слика горе) и резултујући талас након њихове суперпозиције, тј. формирање таласног пакета (слика доле). Ако замислимо омотач који спаја амплитуду резултујућег таласа, видимо да се тај омотач креће групном брзином, која је дата изразом (252).

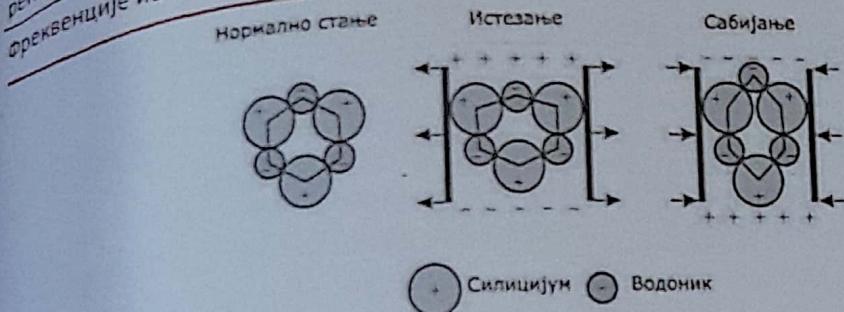


Слика 77. Формирање таласног пакета у дисперзивној средини

6.8. Звучни таласи

Звук је механички талас, што значи да је за његово простирање потребна еластична средина и звук се због тога не може простирати у вакуму. Звук које здраво људско ухо може да

региструје чини простирање звучних таласа фреквенције од 20 [Hz] до 20000 [Hz].
Фреквенције испод 20 [Hz] се назива инфразвук, а изнад 20000 [Hz] се назива ултразвук.

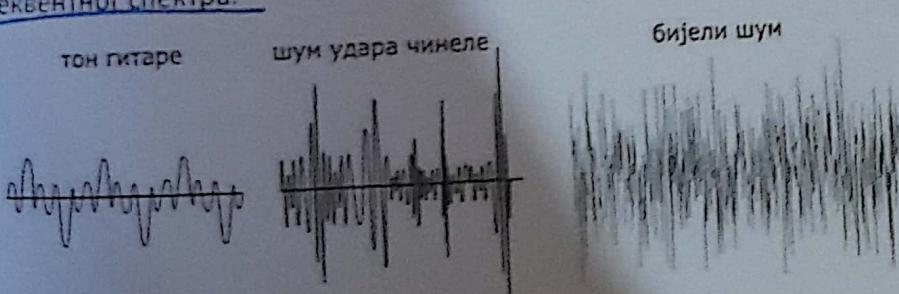


Слика 78. Пиезоелектрични ефекат код кристала кварца

Ултразвук се добија помоћу инверзног пиезоелектричног ефекта. Сам пиезоелектрични ефекат је приказан на слици 78, на примјеру кристала кварца. Ако се кварц налази у нормалном стању он је електрично неутралан. Међутим, ако се кристал кварца изложи механичкој деформацији истезања или сабирања – на његовим површинама ће се издвојити наелектрисања. Ову чињеницу користимо код добијања ултразвука, само што се користи инверзни (обрнут) пиезоелектрични ефекат, тј. кристал кварца се ставља у промјенљиво електрично поље, на које кристал кварца „одреагује“ тако што промијени свој облик (издужи се или се сабије, у зависности од примјењеног поларитета електричног поља). Кварц реагује готово тренутно на ове промјене, што значи да ће кварц бити у могућности да осцилује фреквенцијама и већим од 20000 [Hz], а тиме и емитовати таласе – ултразвук. На исти начин се може добити ултразвук помоћу промјенљивог магнетног поља, јер неки материјали реагују на спољашње магнетно поље тако што мијењају свој облик, па опет брзим промјенама материјал може емитовати ултразвук.

Дакле, пошто је звук механички талас, закључујемо да се звук може простирати кроз било које агрегатно стање, али је облик звучног таласа у гасовима лонгitudинални, док је у чврстом стању трансверзални. Ми ћemo се ипак углавном базирати на звучне таласе који се простиру кроз гас, тј. ваздух. Научна област која се бави изучавањем звука се назива акустика.

Код звукова разликујемо тон и шум. На слици 79 је приказан примјер хармонијског тона жице гитаре, шума чинеле и тзв. „бијели шум“, који представља анхармонијски шум дуж цијelog фреквентног спектра.



Слика 79. Примјер хармонијског тона и шумова

Брзина звука зависи од агрегатног стања. Брзину (звучних) таласа кроз чврста еластична
тијела смо добили раније и дата је изразом (202), тј. $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Међутим, брзина звука кроз
газ зависи од производа притиска гаса p и адијабатске константе³⁸ за дати гас κ :

$$v = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}}. \quad (253)$$

Из термодинамике је познато да се притисак мијења са температуром линеарно, па се онда лако може показати да се и брзина простирања звука кроз гас мијења са коријеном из температуре гаса:

$$v_z = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (254)$$

Интензитет звука је величина коју једнако не региструје људско ухо и неки мјерни уређај. Ово је зато што је људско ухо у стању да чује један опсег фреквенција, али их не чује све једнако добро. Сензор мјерног уређаја „чује“ све фреквенције готово једнако. Због тога морамо дефинисати физичку и физиолошку³⁹ јачину звука. Физичка јачина звука једнака је енергији емитованог звука која у јединици времена прође кроз неку јединицу површине:

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta S}, \quad (255)$$

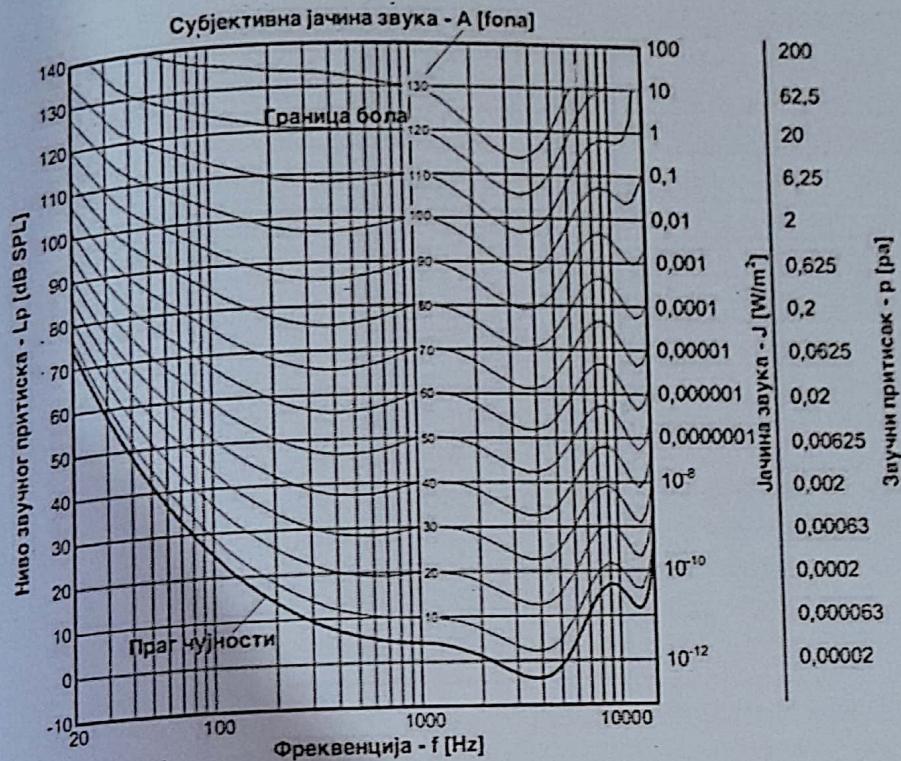
док је физиолошка јачина звука једнака:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} [\text{dB}] \quad (256)$$

где је мјерна јединица за физиолошку јачину [dB] - децибел, $I_0 = 10^{-12} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ - праг чујности (минимални интензитет звука којег здраво људско ухо може чути). Дакле, видимо да физиолошка јачина звука није линеарна већ логаритамска скала и за људско ухо се креће у распону од $L = 0 [\text{dB}]$, за праг чујности I_0 , па до $L = 120 [\text{dB}]$ што представља праг бола (интензитет звука при којем се осјећа физиолошки бол). Али, људско ухо не чује једнако све фреквенције, па је потребно дефинисати субјективну јачину звука A која се мјери у фонима [fon]. Само на $1000 [\text{Hz}]$ је број фон-а једнак броју децибела, док се за све остale фреквенције мора измерити колико фон-а (здраво) ухо чује. Ово је приказано на слици 80, а криве линије се називају изофонске линије (дуж ових линије је једнака вриједност у фонима).

³⁸ Адијабатска константа κ фигурише у једначини за адијабатску промјену стања гаса $pV^\kappa = \text{const}$. Адијабатска промјена стања гаса је она код које топлота остаје константна, док су остала величине (притисак, запремина и температура) промјенљиве.

³⁹ Физиолошка јачина звука је везана за људско ухо.

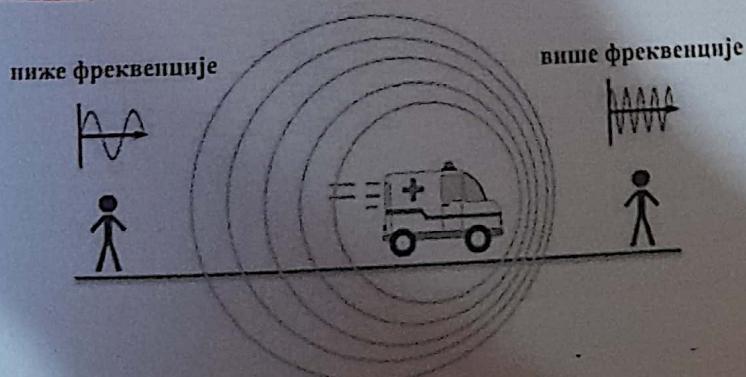


Слика 80. Изофонске линије

Са десне стране на ординати графика су упоредно приказане вриједности физичке јачине звучног таласа и звучни притисак. Примјетимо да је притисак звука веома мала величина, када га упоредимо са атмосферским притиском ваздуха (око 100000 Pa). За праг бола, притисак који ствара звук износи мање од 0,1 % атмосферског притиска.

6.9. Доплеров ефекат

Да би овај ефекат разумјели, присјетимо се једне интересантне појаве: када кола хитне помоћи неком брзином пролазе поред нас улицом, са укљученом сиреном, примјећујемо да приближавању кола ка нама (тј. посматрачу који мирује на тротоару) чујемо звук сирене више фреквенције, а када се кола хитне помоћи удаљавају од нас – онда чујемо звук сирене ниже фреквенције. Ова појава се назива Доплеров ефекат, а слиједи и објашњење зашто се он дешава.



Слика 81. Доплеров ефекат

Са слике 81 видимо да су таласни фронтови ближи једни другима („згушњавају“ се) уследу када се извор звука (кола хитне помоћи са укљученом сиреном) приближава према мирујућем посматрачу. Исто тако, ако се извор звука удаљава од мирујућег посматрача, таласни фронтови се „разријеђују“, тј. удаљавају се једни од других.

Узмимо случај када се извор звука креће ка посматрачу. Тада су таласне дужине краће за неко $\Delta\lambda$ од таласне дужине звука сирене коју возач хитне помоћи чује λ и износи $\lambda' = \lambda - \Delta\lambda$. Ако је брзина извора звука (брзина кретања кола хитне помоћи) v_s , и ако знамо да свака осцилација траје T , онда је скраћење таласне дужине једнако $\Delta\lambda = v_s \cdot T = v_s / v$. Тада је таласна дужина коју чује непокретни посматрач:

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_s}{v}. \quad (257)$$

Како знамо везу између брзине звука v , фреквенције v и таласне дужине λ , можемо одредити фреквенцију коју непокретни посматрач чује док му се извор звука приближава:

$$v' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - \frac{v_s}{v}} = \frac{v}{\frac{v}{v} - \frac{v_s}{v}} = \frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}} v. \quad (258)$$

Из горњег израза закључујемо да је дошло до повећања фреквенције коју непокретни посматрач чује v' у односу на фреквенцију коју еmitује сирена v (ovu фреквенцију чује возач кола хитне помоћи).

Аналогно се може посматрати ако се покретни извор звука удаљава од непокретног посматрача, онда он региструје већу таласну дужину од таласне дужине коју еmitује извор звука, тј. $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, па се слично горњем извођењу долази до израза:

$$v' = \frac{1}{1 + \frac{v_s}{v}} v, \quad (259)$$

где у том случају закључујемо да непокретни посматрач чује ниже фреквенције.

Ако објединимо једначине (258) и (259) добијемо јединствен израз:

$$v' = \frac{1}{1 \mp \frac{v_s}{v}} v, \quad (260)$$

У којем горњи знак (-) означава приближавање извора звука непокретном посматрачу, а доњи знак (+) означава удаљавање извора звука од непокретног посматрача.

Ако се и посматрач креће одређеном брзином v_p , можемо примјенити потпуно исту аналогију у закључивању⁴⁰, што значи да ће се фреквенција повећавати ако се посматрач креће према непокретном извору звука или ће се фреквенција смањити уколико се посматрач креће од непокретног извора звука.

Сада можемо генерализовати општи случај, ако су и посматрач и извор звука покретни, па добијемо да је:

⁴⁰ Кретање је релативно, тј. исти ефекти се морају добити и ако извор звука мирује, а посматрач се креће према извору (или обрнуто).

$$v' = \frac{u \pm v_p}{1 \mp v_r} v,$$

(261)

где се узимају $+v_p$ и $-v_r$ ако се извор звука и посматрач приближавају једно другом, а $-v_p$ и $+v_r$ уколико се посматрач и извор звука удаљавају једно од другог.

Примјена Доплеровог ефекта је велика, а користе је и неке животињске врсте попут шишмиша, који „виде“ помоћу ултразвук. На основу Доплеровог ефекта шишмиши прате кретање свог плијена (инсеката). Доплеров ефекат користе неурологи приликом прегледа крвних судова врата, где на основу промјене брзине кретања крви кроз крани суд (нпр. усљед његовог зачепљења) могу измјерити степен зачепљења. На крају поменимо да је Доплеров ефекат показао да се Универзум шири. Наиме, звијезде које чине већину видљиве материје се састоје од атома водоника и атома хелијума, где се у току фузионог процеса (спајања два водоника у хелијум) добија енергија. Ми знајмо експерименталне емисионе спектре атома водоника, као и чињеницу да су ови спектри на неки начин „отисак прста“ атома водоника – тј. било где у Универзуму атом водоника треба да има идентичан емисиони спектар. Али, када су снимљени спектри водоника са неких удаљених звијезда увидјело се да су сви спектрални максимуми помјерени за неку малу таласну дужину у односу на спектралне серије водоника које се добију на нашој планети. Иsta појава је утврђена код већине удаљених звијезда у односу на било који произвољни правац у односу на нашу планету. Појава се назива спектрални „помак ка црвеном“⁴¹ и наводи нас на закључак да се звијезде међусобно удаљавају једна од друге – тј. да се свемир шири.

⁴¹ „Red shift“ – где се мисли на помак емисионих пикова ка црвеном дијелу спектра или ка већим таласним дужинама, што нас наводи на закључак да се извор светлости (звијезда) удаљава.

7. ХИДРОМЕХАНИКА

У претходним поглављима смо се бавили механиком материјалне тачке и чврстих тијела, које је у границима еластичних особина стабилно и непромјенљиве запремине или прецизније – непромјенљивих међусобних односа растојања конституената које изграђују чврсто тијело (атома или молекула). Сада ћemo анализирати друга два агрегатна стања – течно и гасовито, у којима су међусобна растојања конституената који граде материју у овим облицима временски промјенљива, а не константна као код чврстих тијела. На који начин ће на механику утицати агрегатно стање материје, тј. како ће се понашати флуиди? При овоме, флуидима називамо и течности и гасове. Битна карактеристика која одваја гасове од течности је особина стишљивости – тј. гасови су стишљиви док су течности (готово) нестишљиви флуиди.

Ми живимо у флуидима и веома зависимо од њих. Окружени смо флуидом ваздуха, не можемо без флуида воде. У нашем тијелу тече флуид кrv – који је један од веома интересантних и невјероватних флуида⁴². Флуиди на нашој планети имају огромну снагу. Сматра се да би енергија вјетрова, као и енергија океана (плиме и осеке) могла у потпуности замијенити фосилне изворе енергије.

Флуиди се разликују од чврстих тијела по томе што заузимају облик суда у којем се налазе. Пошто живимо у гравитационом пољу Земље, нама изгледа природно да течност заузме облик посуде, али ће због гравитационог привлачења течност заузети што нижи положај у посуди. То ипак неће бити у бестежинском стању. Капљице воде у међународној свемирској станици ће се груписати у веће или мање сферне капљице и заузети запремину цијelog суда, баш као и гасови. Наравно, чак и у гравитационом пољу гасови заузимају запремину суда у цјелисти, јер су веома мале масе.

Како и код механике, коју смо дијелили на статику и динамику – тако и хидромеханику дијелимо на хидростатику и хидродинамику. У хидростатици сматрамо да се флуиди не крећу, док су флуиди покретни у хидродинамици. Ова покретљивост флуида резултује многим физичким ефектима.

⁴² Једна од фасцинантних особина крви као флуида је да она веома мијења своје карактеристике у зависности од тога да ли се креће или мирује. Ако се креће – крв је прилично лако покретљива (течна) преносећи драгоценјени кисеоник и енергију до ћелија, међутим ако се заустави – крв се коагулише (згруша), што је веома битно у случају повреда, посјекотина и сл.

флуиди имају и особине високоности. Ова особина код чврстих тијела има свој аналог у трећој. Ако је високоност величина која се не може занемарити – онда је ријеч о реалним флуидима, међутим ако је високоност занемарљива – флуиде називамо идеалним. У наредним поглављима ћемо се бавити течностима, уколико другачије не буде наглашено.

7.1. Хидростатика

7.1.1. Густина

Код чврстих тијела нас је интересовала маса чврстог тијела и сила која дјелује на њега. Код флуида је много корисније баратати густином и притиском. Густина неког флуида се може разликовати од тачке до тачке (од атома до атома), али ако је узорак флуида масе Δm довољно велики, тј. тако велике запремине ΔV да се растојања међу атомима могу сматрати веома малим, онда је густина једнака:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (262)$$

7.1.2. Притисак

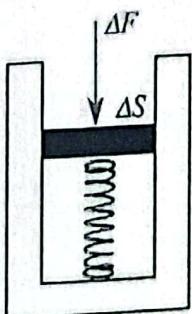
Притисак представља силу ΔF која дјелује на неку површину ΔS и једнак је:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (263)$$

Мјерна јединица којом мјеримо притисак је [Pa] и једнак је [N/m^2]. Егзактније, притисак се може дефинисати и у лимесу када површина тежи диференцијално малој површини, па је притисак у том случају једнак:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}. \quad (264)$$

Замислимо да направимо један мали сензор за мјерење притиска у простору коју испуњава неки флуид, а која је приказана на слици 82. Сензор се састоји од покретног клипа површине ΔS који затвара малену посуду и испод којег се налази вакуум. Клип је одвојен опругом, чија је константа еластичности позната.



Слика 82. Сензор за мјерење притиска

Ако флуид у простору мирује и у њега ставимо минијатурни сензор⁴³ за мјерење притиска са горње слике, открићемо да ће резултат мјерења бити једнак без обзира на орјентацију сензора у флуиду. Он тада мјери хидростатички притисак.

Доказаћемо да ће у случају мирујућег флуида заиста сви притисци бити једнаки, без обзира на правца мјерења. Замислимо дјелић флуида који има облик правилног геометријског тијела као на слици 83. Геометријско тијело ће да мирује (што је услов хидростатике), што значи да су све сile које дјелују на дјелић флуида у равнотежи. На слици су дефинисане сile које дјелују на површине дјелића флуида које можемо изразити из релације (263):

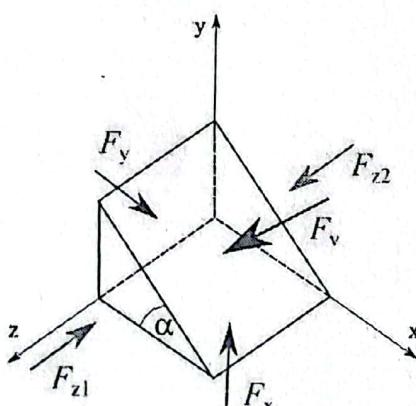
$$F_x = p_x S_x ; F_y = p_y S_y ; F_v = p_v S_v ; F_{z1} = p_{z1} S_{z1} ; F_{z2} = p_{z2} S_{z2}. \quad (265)$$

Такође је јасно да су сile дуж z - осе у равнотежи, тј.:

$$F_{z1} = F_{z2}, \quad (266)$$

али исто се са слике види да су компоненте дуж x и y - осе повезане са силом која дјелује на косу површину тијела:

$$F_x = F_v \cos \alpha ; F_y = F_v \sin \alpha. \quad (267)$$



Слика 83. Дјелић флуида у равнотежи

Површине геометријског тијела се могу изразити као:

$$S_x = S_v \cos \alpha ; S_y = S_v \sin \alpha ; S_{z1} = S_{z2}. \quad (268)$$

Ако сада релације (266), (267) и (268) уврстимо у (265) добијамо да је:

$$p_x = p_y = p_v ; p_{z1} = p_{z2}, \quad (269)$$

што представља доказ да су притисци мјерени унутар флуида једнаки, без обзира на правец мјерења.

7.1.3. Притисак у гравитационом пољу

Посматрајмо дјелић флуида у облику ваљка који мирује у гравитационом пољу. На флуид ће дјеловати сила земљине теже и сile притисака на све површине флуида, као што је приказано на слици 84. На слици нису приказане сile које дјелују на плашт ваљка, али је

⁴³ Захтјев да сензор буде што мањи се односи на захтјев по којем је егзактно дефинисан притисак у лимесу када површина теки диференцијално малој површини.

јасно да се све ове сile уравнотежују – јер дјелују нормално на плашт ваљка флуида. На горњу и доњу површину флуида ΔS дјелују сile притиска p_1 и p_2 .
Како флуид мирује, услов мировања је да су све сile које дјелују на флуид у равнотежи:

$$p_2 \Delta S = p_1 \Delta S + \Delta mg. \quad (270)$$

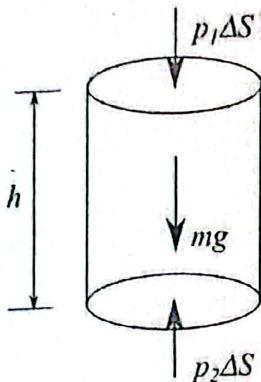
Ако искористимо релацију (262) и изразимо масу флуида преко његове густине и запремине, тј. $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$, а затим и запремину ваљка изразимо преко $\Delta V = h \cdot \Delta S$, где је h висина ваљка флуида, те на крају све уврстимо у (270), добићемо:

$$p_2 \Delta S = p_1 \Delta S + \rho \Delta S h g, \quad (271)$$

што након скраћивања ΔS са обје стране, добије се:

$$p_2 = p_1 + \rho gh, \quad (272)$$

где видимо да је притисак са доње стране флуида већи за износ ρgh .



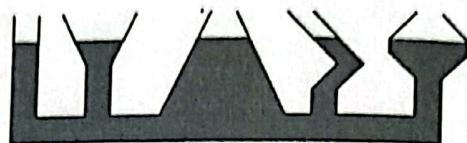
Слика 84. Флуид у гравитационом пољу

Ако је на слици 84 горња површина флуида отворена, онда горњи притисак представља атмосферски притисак $p_a \approx 100000$ [Pa]. У том случају, притисак на некој дубини h од површине отвореног суда износи:

$$p_2 = p_a + \rho gh. \quad (273)$$

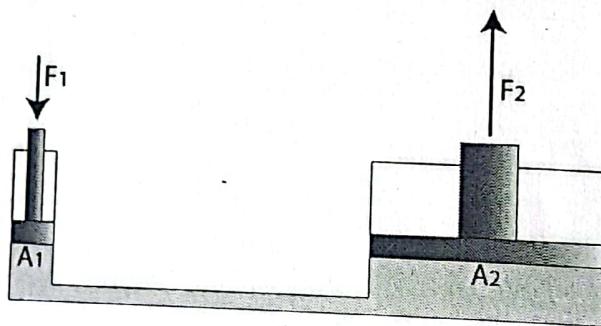
Резултат којег смо добили објашњава зашто притисак у дубини течности (нпр. у мору или језеру) значајно расте са дубином. Кључну улогу овде игра густина течности, где са сваким метром дубине значајно расте притисак⁴⁴. У ваздуху нас не притишиће тако велики притисак, иако се налазимо на „дну ваздушног мора“, јер је густина ваздуха много мања од густине течности.

⁴⁴У води се на око 10 метара дубине притисак удвостручи у односу на вриједност атмосферског притиска. На још већим дубинама притисак је толико велики да рониоци који се враћају са тако великих дубина морају постепено излазити на површину, поштујући одређену процедуру. Наиме, у њиховим крвним судовима би се приликом наглог изласка на површину ослободили гасови, који се иначе налазе у течној фази на великим притисцима. Нешто слично се дешава када нагло отворите боцу минералне воде – прије отварања не видимо мјехуриће угљеног диоксида, јер је минерална вода напуњена под великим притиском. Али ако је нагло отворимо – притисак у боци се смањи на атмосферски притисак, и гасови се ослобађају, тј. прелазе из течне у гасну фазу. Гасови који би се код рониоца ослободили приликом наглог изласка нарочито су опасни у малим крвним судовима (у мозгу или плућима). Рониоци се могу спасити једино ако се одмах смјесте у хипербаричну комору, где се ваздух налази под великим притиском, који симулра велику дубину.



Слика 85. Хидростатички парадокс

Једна интересантна пољедица горње законитости се огледа у појави која се назива хидростатички парадокс, а која је приказана на слици 85. Све посуде су спојене својим доњим дијеловима и када се напуне са неком течношћу – она ће се попети до истог нивоа, без обзира на облик посуде и без обзира на величину горње површине у свакој од посуда. Са овиме је повезан и принцип хидрауличне полузе, без које би данашња тешка индустрија била просто незамислива, који је шематски приказан на слици 86.

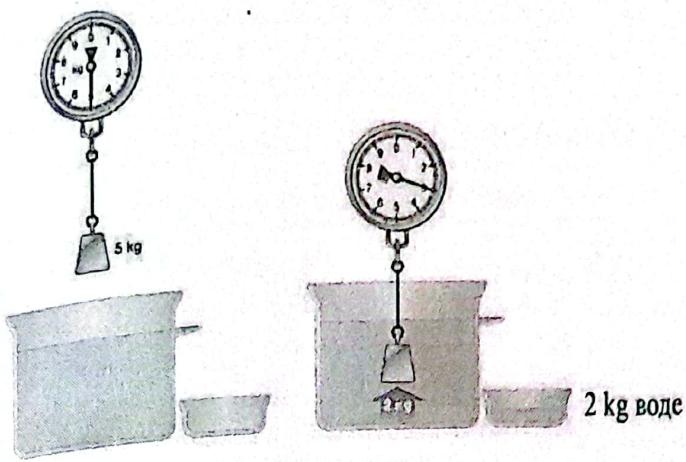


Слика 86. Хидраулична полуза

Како је течност нестишљива, то значи да се притисак преноси флуидом при дејству сile са једног на други клип. Притисак је једнак, по релацији (263), односу сile и површине. Ако дјелујемо на клип мање површине A_1 са лијеве стране слике 86 неком силом F_1 , онда ће исти притисак дјеловати на клип веће површине A_2 . Како је $p_1 = p_2$, а $A_2 > A_1$, онда је јасно да је $F_2 > F_1$. Однос површина клипова ће дефинисати и однос сила F_2 / F_1 и технички се може дизајнирати тако да буде веома велик – што се користи код дизалица и осталих хидрауличних машина.

7.1.4. Хидростатички потисак

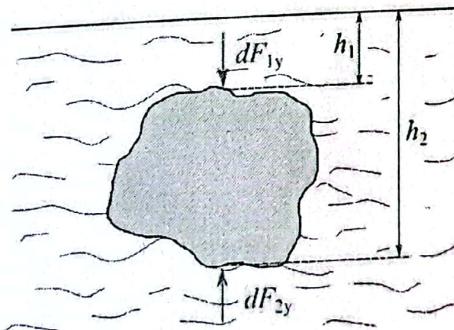
Архимед је дошао до открића да тежина тијела зависи од флуида у којег је уроњен. Замислимо да смо посуду наунили водом до врха отвора, као што је приказано на слици 87. Свака количина воде која би се накнадно додала би се прелила у посуду поред.



Слика 87. Архимедов закон

Ако тег масе $5[\text{kg}]$ уронимо потпуно у течност, вага више неће показивати ову масу, него ће показивати масу мању од $3[\text{kg}]$. Наравно, није тег изгубио своју масу, али је у води привидно лакши за неку тежину. Овај „губитак“ тежине можемо лако измјерити јер се приликом урањања тега ниво течности у посуди подигао и одређена количина воде се прелила у посуду поред. Када изважемо преливену количину воде – добијемо тачно онолику масу за коју је тег привидно лакши у води. Закључујемо да је свако тијело које је уроњено у течност привидно лакше за онолико колико тежи истиснута запремина течности.

Доказаћемо егзактно ову тврђњу.
Замислимо неко тијело произвољног облика које је потпуно потопљено у воду и посматрајмо један диференцијално мали дјелић површине dS_y са горње стране тог тијела на дубини h_1 и други диференцијално мали дјелић површине dS_y у истом вертикалном правцу само на доњој површини и дубини h_2 , као што је приказано на слици 88.



Слика 88. Извођење Архимедовог закона

По релацији (273) зnamо да на ове двије једнаке површине дјелује различит притисак, јер се налазе на различитим дубинама. На горњу површину дјелује притисак $p_1 = p_a + \rho gh_1$, док на доњу површину дјелује притисак $p_2 = p_a + \rho gh_2$, где је ρ -густина течности у коју је уроњено тијело. Сада можемо израчунати интензитетете сила које дјелују на горњу и доњу диференцијално малу површину:

$$\begin{aligned} dF_{1y} &= (p_a + \rho gh_1) dS_y, \\ dF_{2y} &= (p_a + \rho gh_2) dS_y. \end{aligned} \tag{274}$$

Да напоменемо да су на некој фиксираној (истој) висини хоризонталне сile које дјелују на потопљено тијело једнаке, тј. $dF_{1x} = dF_{2x}$ и не постоји резултантна сила која би помијерала тијело на десно или лијево. Међутим, из релација (274) видимо да у вертикалном правцу сile које дјелују на тијело нису једнаке, тј. $dF_{1y} < dF_{2y}$ и њихова резултанта је једнака:

$$dF_p = dF_{2y} - dF_{1y} = \rho g (h_2 - h_1) dS_y. \quad (275)$$

Препознајмо да је $(h_2 - h_1) dS_y = dV$ диференцијално мали дјелић запремине тијела. Уврштавањем, добијамо:

$$dF_p = \rho g dV, \quad (276)$$

те ако горњи израз интегрирамо по цијелој запремини тијела, добијемо силу:

$$F_p = \rho g V, \quad (277)$$

која се назива сила потиска, јер је увијек усмјерена навише (и потискује тијело на горе). Пошто је у изразу (277) V запремина уроњеног тијела, а ρ густина флуида (воде), онда видимо да је $\rho V = m_{ii}$ маса истиснутог флуида. Када ову масу помножимо са гравитационим убрзањем g добијемо $m_{ii} \cdot g = Q_{ii}$, тј. тежину истиснутог флуида. Даље, сила потиска је једнака тежини истиснутог флуида, чиме смо доказали Архимедов закон. Уколико је тежина тијела већа од сile потиска, тијело ће да тоне унутар течности (или лебди у течности). Међутим, уколико је сила потиска већа од тежине тијела, онда ће тијело да плива на површини течности. При томе ће се сила потиска и тежина тијела уравнотежити на тај начин да је сила потиска (која је једнака тежини течности само оног дијела тијела које уроњено у течност) једнака тежини тијела.

Горња анализа се своди на то да је услов пливања задовољен ако је густина тијела ρ , мања од густине течности ρ_f у коју је тијело уроњено, тј. $\rho < \rho_f$. Сада је јасно зашто дрвена коцка плива у води. Међутим, можда може бити нејасно зашто брод који је саграђен од челика плива? Одговор је и овде исти – само се у случају брода треба узети средња густина запремине брода (која је сигурно мања од густине челика), али и облик брода у оном дијелу запремине којом је брод уроњен у воду. Брод је дизајниран тако да истисне што већу количину воде својим дном (тзв. газом) и на тај начин дјелује велика сила потиска, те је на тај начин лако остварено пливање брода.

Готово сва материја која нас окружује може да постоји у 3 агрегатна стања⁴⁵ – чврстом, течном и гасовитом. Агрегатно стање је зависно од температуре и притиска материје. Из искуства зnamо да ће се на вишим температурама материја налазити у гасовитом стању. Снижавањем температуре, материја прелази у течно стање, а затим даљим снижавањем температуре и у чврсто агрегатно стање. Ови процеси се називају фазни прелази и праћени су у великој већини случајева повећањем густине материје. На тај начин ће густина течне фазе неке материје бити рjeђа од чврсте фазе исте материје. На примјер, челик у течној фази је рjeђи од челика у чврстом стању (на нижој температури) – тако да ће челик у чврстом стању тонuti у течном челику. Међутим, иако је овакав сценарио као што смо рекли у већини материје – ипак се не понаша сва материја на овај начин. Један од важних изузетака

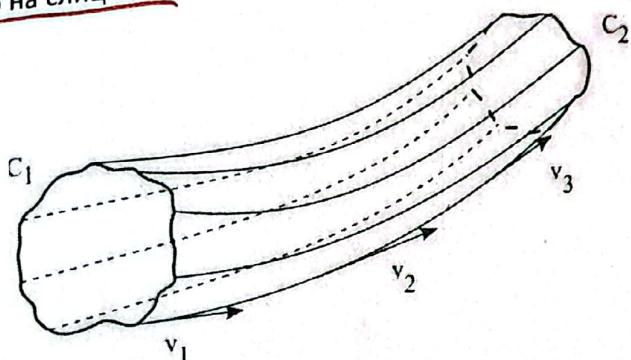
⁴⁵ Стриктно говорећи, огромна већина масе видљиве материје у Универзуму се налази у облику плазме, која се назива и 4. агрегатно стање. На примјер, наше Сунце (као и све остale звијезде) су у стању плазме.

је вода, где је лед мање густине од воде, па лед плива на води⁴⁶. Пошто је густина леда само незнатно мања од густине воде, лед плива тако да му је око 9/10 дијелова запремине под водом, а само ко 1/10 запремине плива изнад површине воде.

7.2. Хидродинамика

Када се флуид креће (или струји) неком брзином, јављају се нови физички феномени које ћемо изучити у овом поглављу. Но, прије тога ћemo дефинисати одређене појмове везане за струјање флуида.

Дефинишмо струјуну линију, која представља трајекторију којом се неки дјелић флуида креће. Струјне линије имају тако дефинисане путање у којима вектор брзине кретања дјелића флуида у некој тачки дефинисан тако да представља тангенту на струјну линију, као што је представљено на слици 89.



Слика 89. Струјне линије и струјна цијев

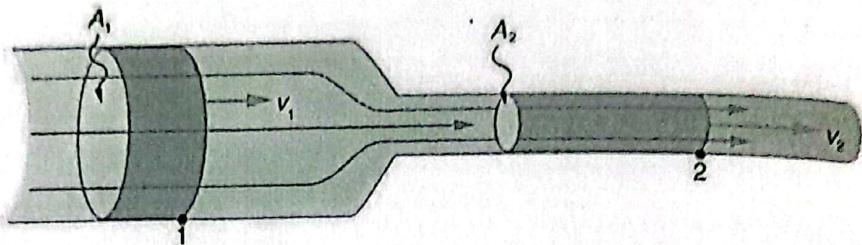
Струјна цијев је ограничена спољашњим струјним линијама, што значи да изван ове граничне површине нема кретања флуида. Можемо дефинисати и густину струјних линија као однос броја струјних линија и попречне површине. Уколико је овај број већи имамо и већи проток флуида кроз посматрану попречну површину.

Цијела хидродинамика се у основи своди на два њена основна закона, тј. једначине: на једначини континуитета и на Бернулијевој једначини (или закону).

7.2.1. Једначина континуитета

Посматрајмо једну струјну цијев кроз коју протиче флуид, слика 90. На лијевој страни струјне цијеви је већа површина попречног пресјека, A_1 док је на десној страни мања површина попречног пресјека цијеви A_2 .

⁴⁶ Ово је позната „аномалија“ водоникове везе, која чини хемијску везу у молекулу воде. Ако води снижавамо температуру, она ће заиста повећавати своју густину све до 4°C , а затим ће промијенити карактер и до тачке мржњења на 0°C вода ће смањивати своју густину. На тај начин је лед на 0°C рјеђи од воде на 0°C , што значи да лед може да плива по површини воде. Ова „аномалија“ је основа постојања живота на Земљи, јер да се вода као и готово сва материја понашала „нормално“ – лед би био гушћи од воде, падао би на дно језера и мора, таложио се и на крају испунио сву запремину језера и мора, тако да ни услови за опстанак живота не би постојали. Да ли је живот посљедица једне „аномалије“ или савршено склопљен мозаик?



Слика 90. Проток флуида и једначина континуитета

Дефинишимо проток флуида Q као запремину флуида ΔV која протекне кроз попречни пресјек цијеви у јединици времена Δt :

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (278)$$

Ако запремину флуида која прође у неком времену Δt кроз цијев представимо као производ попречног пресјека струјне цијеви A (базе осјенчаног ваљка) и висине ваљка $v\Delta t$, тј. $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t$ (осјенчан ваљак на лијевој страни слике 90) или $\Delta V = A_2 v_2 \Delta t$ (осјенчан ваљак на десној страни слике 90) и уврстимо ову запремину у израз (278) добићемо:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = A_1 v_1 ; \quad Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A_2 v_2 \Delta t}{\Delta t} = A_2 v_2. \quad (279)$$

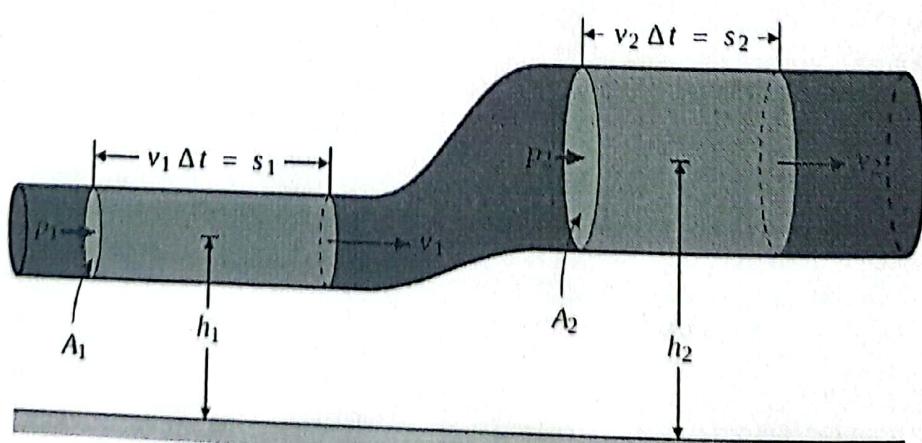
Течност је нестишљиви флуид, што значи да ако проток флуида одржавамо константним, онда ће и производ попречног пресјека струјне цијеви и брзине флуида кроз попречни пресјек струјне цијеви остати константан:

$$A \cdot v = \text{const}, \quad (280)$$

што представља једначину континуитета. Из горње слике и израза (280) јасно је да ће се при константном протоку - флуид брже кретати кроз мањи попречни пресјек струјне цијеви и обратно.

7.2.2. Бернулијев закон (једначина)

У претходном поглављу смо посматрали случај када струјна цијев лежи хоризонтално, а једино се мијења попречни пресјек цијеви. Сада ћемо посматрати случај када се дијелови цијеви налазе на различитим висинама, као што је приказано на слици 91.



Слика 91. Бернулијев закон (једначина)

Да бисмо извели Бернулијеву једначину, користићемо закон одржања енергије. Стриктно говорећи, Бернулијева једначина није ништа ново и заправо представља само примјењен закон одржања енергије.

Претпоставићемо да је флуид нестишљив, што значи да се у једнаком временском интервалу Δt запремине флуида које прођу у лијевом и десном дијелу цијеви – једнаке, тј. $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. У лијевом (нижем) дијелу цијеви, флуид има кинетичку енергију;

$$E_{k1} = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} = \rho \frac{\Delta V_1 v_1^2}{2} = \rho \frac{\Delta V v_1^2}{2}, \quad (281)$$

где је маса флуида представљена преко производа густине и запремине флуида. У том дијелу цијеви флуид има потенцијалну енергију:

$$E_{p1} = \Delta m_1 g h_1 = \rho \Delta V_1 g h_1 = \rho \Delta V g h_1, \quad (282)$$

јер се налази на висини h_1 . Потпуно аналогно можемо изразити кинетичку и потенцијалну енергију флуида у десном (вишем) дијелу цијеви:

$$E_{k2} = \rho \frac{\Delta V v_2^2}{2}; \quad E_{p2} = \rho \Delta V g h_2. \quad (283)$$

Ако израчунамо разлику енергија у лијевом (нижем) и десном (вишем) дијелу цијеви:

$$\Delta E = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}), \quad (284)$$

те ако претпоставимо да је ова разлика енергија једнака уложеном раду⁴⁷ за помијерање флуида кроз цијев:

$$\Delta W = W_1 - W_2 = F_1 \cdot s_1 - F_2 \cdot s_2, \quad (285)$$

где можемо сile F_1 и F_2 изразити преко притиска и површине попречног пресјека, израз (263), тј.:

$$\Delta W = p_1 A_1 s_1 - p_2 A_2 s_2. \quad (286)$$

Ако препознамо да је у задњем изразу $\Delta V_1 = A_1 s_1$, као и $\Delta V_2 = A_2 s_2$, онда је уложен рад (уважавајући да је као што смо навели $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$):

$$\Delta W = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (287)$$

Уврштавајући (281), (282) и (283) у (284) и изједначавајући добијен израз за ΔE са изразом (287), након сређивања добије се:

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \quad (288)$$

Горњи израз представља Бернулијеву једначину, која се састоји од три члана: први члан

$\rho \frac{v^2}{2}$ представља динамички притисак, тј. притисак којег флуид има због тога што се креће;

други члан $\rho g h$ представља висински притисак – тј. притисак којег флуид има усљед чињенице да се налази на некој висини h ; и трећи притисак p се назива хидростатички

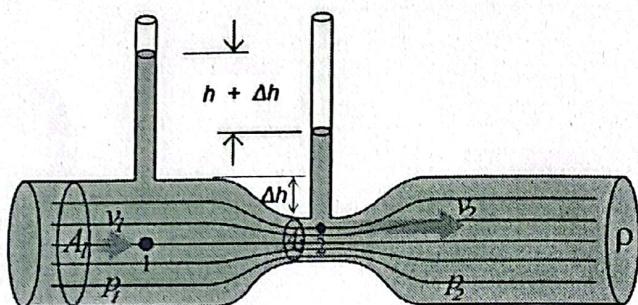
⁴⁷ Овде смо рад умјесто са A означили са W , да се не би мијешале ознаке површине и рада. Овај начин обилежавања рада је уобичајен у западним земљама (W од „work“, што значи „рад“ на енглеском језику).

притисак – управо онај притисак о којем смо у хидростатици већ говорили и којег флуид има усљед мirovaњa. Bernуlijev закон каже да се збир ова три притиска одржава, тј. увијек је константан.

Размотрићемо неке примјене Bernуlijeve једначине.

7.2.2.1. Вентуријева цијев

На слици 92 је приказан изглед Вентуријеве цијеви, која се састоји од ширег дијела цијеви попречног пресека A_1 и једног сужења чији је попречни пресек A_2 . Из једначине континуитета јасно је да ће брзина флуида у суженом дијелу цијеви бити већа, тј. $v_1 < v_2$.



Слика 92. Вентуријева цијев

Ако примјенимо Bernuлијеву једначину (288) на ову цијев, добијемо:

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2, \quad (289)$$

gdje како видимо недостаје члан ρgh (висински притисак), који је једнак у ширем и ужем дијелу цијеви (због тога што је цијев хоризонтално постављена), па се ови чланови могу у Bernuлијевој једначини скратити. Из горње релације можемо изразити хидростатички притисак у ужем дијелу цијеви p_2 :

$$p_2 = p_1 - \rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}. \quad (290)$$

Из горње релације видимо да ће овај притисак бити мањи од хидростатичког притиска у ширем дијелу цијеви p_1 у зависности од разлике брзина у ширем и ужем дијелу цијеви.

Користећи једначину континуитета (280) можемо изразити брзину у ужем дијелу цијеви:

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}, \quad (291)$$

те је уврстити у (290), где након сређивања добијемо:

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] v_1^2. \quad (292)$$

Из горње релације можемо изразити v_1 и уврстити је у израз за проток $Q = A_1 v_1$, где након сређивања добијемо:

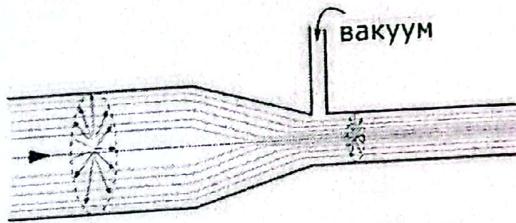
$$Q = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)}}.$$

(293)

Горњи израз нам открива и сврху Вентуријеве цијеви, јер видимо да помоћу ње можемо мјерити проток флуида, тј. брзину кретања флуида. За одређену познату геометрију цијеви где су познати попречни пресјеци цијеви A_1 и A_2) проток зависи само од разлике притисака $\Delta p = p_1 - p_2$. Са слике видимо да, уколико усвојимо да је разлика висина течности у манометрима (мјерена од површине цијеви) једнака $h = h_1 - h_2$, и уколико је ужа цијев вертикално спуштена за Δh , онда је разлика притисака $\Delta p = p_1 - p_2$ пропорционална разлици висина $h + \Delta h$. Обично су манометри баждарени у мјерним јединицама притиска [Pa] и директно се читају. Вентуријева цијев се примјењује за мјерење протока или брзине флуида, од водених токова до мјерења брзине кретања авиона.

7.2.2.2. Вакуумска пумпа

Искористићемо Бернулијеву једначину (288) како бисмо добили вакуумску пумпу, чији је принцип рада приказан на слици 93. Приказана је цијев која има шири и ужи дио. Из једначине континутитета (280) јасно је да ће флуид имати мању брzinu у ширем дијелу цијеви и већу брzinu у ужем дијелу цијеви.



Слика 93. Вакуумска пумпа

Ако напишемо Бернулијеву једначину за горњу слику, добићемо израз идентичан случају Вентуријеве из претходног поглавља, тј. израз (289), одакле се добије израз за притисак у ужем дијелу цијеви:

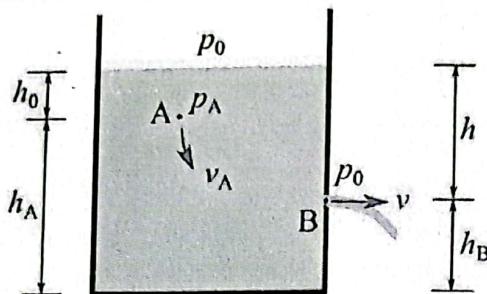
$$p_2 = p_1 - \rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}, \quad (294)$$

тј. израз идентичан изразу (290). Као што видимо, притисак у ужем дијелу цијеви је нижи од притиска у ширем дијелу цијеви (јер је $v_2 > v_1$). Због тога ће на отвору код ужег дијела цијеви ваздух бити усисаван, што отвара могућност за кориштење горњег уређаја као вакуумске пумпе.

7.2.2.3. Торичелијева теорема

Искористићемо Бернулијев закон за случај када имамо велики суд који је испуњен течним флуидом. На некој висини од дна суда са стране постоји чеп који затвара отвор. Ако отворимо чеп, из суда почиње да истиче флуид неком брзином v . Израчунаћемо брзину

флуида помоћу Бернулијеве једначине, када посматрамо тачку А негдје унутар флуида и тачку В која се налази на мјесту отвора суда, као што је приказано на слици 94.



Слика 94. Истицање течног флуида из отвореног суда

Бернулијева једначина која повезује тачке А и В је:

$$\rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g h_A + p_A = \rho \frac{v^2}{2} + \rho g h_B + p_0, \quad (295)$$

где је p_0 спољашњи атмосферски притисак, а p_A је хидростатички притисак у тачки А. Брзина помјерења флуида унутар суда v_A је веома мала када се пореди са брзином истицања флуида v кроз отвор В, тј. можемо оправдано сматрати да је члан $\rho \frac{v_A^2}{2} \approx 0$ (или је занемарљив у поређењу са осталим притисцима). На основу (273) можемо изразити хидростатички притисак у тачки А:

$$p_A = p_0 + \rho g h_0, \quad (296)$$

а са слике се види да је:

$$h + h_B = h_0 + h_A. \quad (297)$$

Када уврстимо (297) и (296) у (295), након сређивања добијамо:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (298)$$

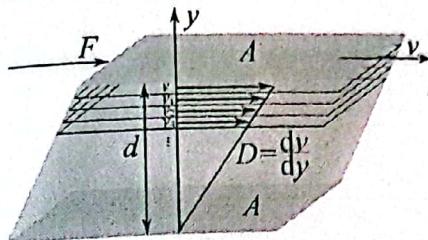
Горњи израз је идентичан изразу брзине неког тијела (материјалне тачке) која слободно пада са висине h , а што представља Торичелијеву теорему. Ова теорема нам каже да ће брзина истицања флуида из отвора који је од површине отвореног суда удаљен у вертикалној оси за дужину h бити једнака брзини слободног пада (без почетне брзине), тј. као да флуид пада са висине h .

Ако мало размислимо – ово је сасвим очекиван резултат. Као што зnamо, Бернулијева једначина је заправо само изведена из закона одржавања енергије, а у овом случају се потенцијална енергија флуида (који у суду практично мирује, тј. креће се занемарљивом брзином) изједначава са кинетичком енергијом флуида који истиче неком коначном брзином из отвора. Тада изједначавањем овде двије енергије, тј. $\frac{mv^2}{2} = mgh$ добијамо управо израз (298).

7.2.3.

Вискозно кретање

Трење унутар слојева течности називамо вискозним трењем. Замислимо да неки течни флуид мисаоно подијелимо на танке паралелне слојеве, онда се вискозност своди на трење између ових слојева, као што је то приказано на слици 95.



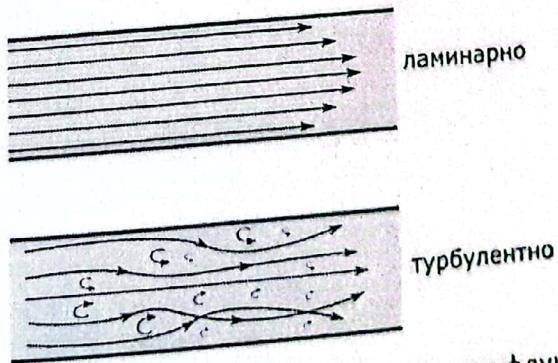
Слика 95. Вискозност у флуиду

Усљед трења између слојева, они се крећу различитим брзинама. Како се брзине по y -оси разликују, могуће је дефинисати промјену брзине по овој оси, тј. градијент брзине $D = \frac{dv}{dy}$, па је вискозна сила једнака:

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dy}, \quad (299)$$

где је η -кофицијент вискозности који се мјери у $[Pa \cdot s]$ и представља величину која карактерише интензитет унутрашњег трења у течности, а S је површина слоја течности. Треба напоменути да кофицијент вискозности веома зависи од спољашње температуре, тј. $\eta = \eta(T)$.

Горњи случај приказује вискозно кретање флуида где се он креће ламинарно, тј. слојеви течности задржавају своју форму и не долази до мијешања слојева. Међутим, у зависности од брзине кретања флуида, његове густине и кофицијента вискозности, или и дужине пута којег флуид пређе – кретање флуида из ламинарног може прећи у турбулентно кретање. Код ове врсте кретања долази до интензивног мијешања између слојева, као што је приказано на слици 96.



Слика 96. Ламинарни и турбулентни ток флуида

Да ли ће кретање бити ламинарно или турбулентно, одређено је са Рейнолдсовим бројем:

$$(300)$$

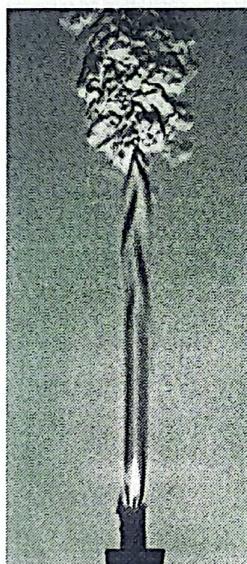
$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

где је ρ - густина флуида, v - његова брзина и l - дужина струјне цијеви (путање флуида). Уколико је Рейнолдсов број <2000 , кретање је линеарно, а уколико је >3000 кретање је турбулентно. Карактер кретања када је $2000 < Re < 3000$ је мијешани ламинарно-турбулентни.

Ако дефинишемо кинематичку вискозност $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, онда се Рейнолдсов број може дефинисати и на сљедећи начин:

$$Re = \frac{vl}{\nu}. \quad (301)$$

Ламинарно кретање ће се промијенити у турбулентно уколико дужина струјне цијеви l постане довољно велика. Из (300) се може видјети да за неку константну брзину флуида постоји нека критична дужина струје цијеви при којој се карактер кретања мијења из ламинарног у турбулентно. На слици 97 се види на примјеру струјања топлог ваздуха из свијеће како он у почетку струји ламинарано, затим струјање постаје мијешано ламинарно-турбулентно да би након одређене дужине карактер струјања постао сасвим турбулентан.



Слика 97. Прелаз са ламинарног ка турбулентном струјању флуида

7.2.4. Отпорност струјању флуида

Када се неко чврсто тијело креће кроз идеални флуид⁴⁸ неком брзином, на чврсто тијело дјелују у општем случају двије сile:

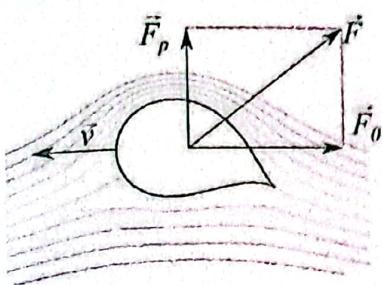
- потисна⁴⁹ сила, која зависи од облика тијела и може дјеловати на тијело према горе или према доле;
- чеона сила, која дефинише чеони отпор при кретању тијела.

При томе је потпуно свеједно (или релативно) да ли се тијело креће кроз флуид који мирује или тијело мирује, а флуид се креће неком брзином – горе поменуте сile ће се увијек

⁴⁸ Код идеалног флуида занемарујемо трење.

⁴⁹ Термин „потисна“ је можда незгодно одабран, јер се не зна на коју страну ова сила дјелује: да ли је потисак према доле или према горе.

јављати. На слици 98 је приказано дејство ове двије силе (\vec{F}_P - потисна сила и \vec{F}_0 - чеона сила), чија је резултантна сила \vec{F} .



Слика 98. Дејство потисне и чеоне силе при кретању тијела кроз флуид

Анализираћемо сваку од ових сила понаособ. На потисну силу, као што је наведено, утиче облик тијела – код авионског крила потребан је такав облик пресјека крила да сила потиска постаје сила узгона, како би подигла авион у ваздух. Насупрот томе, крило се (спојлери) код спортских аутомобила (или Формуле 1) дизајнира са таквим обликом да сила потиска „пртишће“ аутомобил (или болид) према земљи и тако побољша пријањање точкова.

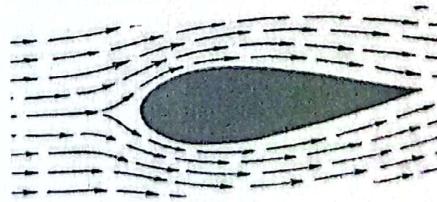
Облик крила као на слици 98 ће резултовати дејством потисне сile према горе, што можемо закључити из Бернулијеве једначине (288), примјењене на струјање флуида изнад и испод крила. Изнад крила је брзина струјања флуида v_1 већа, јер је попречни пресјек површине у крила. Испод крила је брзина струјања флуида v_2 мања, док је испод крила брзина струјања флуида коју се смјестио већи број струјних линија мањи, док је испод крила брзина струјања флуида мања, па је Бернулијева једначина:

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2. \quad (302)$$

Да би важила горња једнакост закључујемо да је притисак изнад крила p_1 мањи од притиска испод крила p_2 , тј. постоји разлика притисака:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2), \quad (303)$$

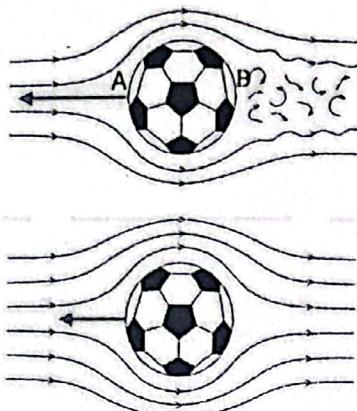
која ће узроковати дјеловање сile усмјерене према горе и подизати авион. Компонента чеоне сile \vec{F}_0 дефинише чеони отпор. Овај отпор се састоји од отпорности услед трења површине тијела са граничном површином флуида, али и од отпора притиска. На отпор притиска утиче опет облик тијела, који би идеално требао бити у облику издужене капљице, што је приказано на слици 99.



Слика 99. Аеродинамични облик за смањење отпора притиска

Код идеалних флуида чеони отпор се може занемарити, али код реалних флуида, где се вискозност не може занемарити, долази до појаве турбуленције иза тијела. Осим вискозности, на појаву турбуленције утиче и брзина кретања тијела кроз флуид. На слици

100 је приказано кретање лопте које има већу и мању брзину. При већој брзини долази до појаве турбуленције флуида иза лопте.



Слика 100. Појава турбуленције иза тијела код кретања кроз флуид

Ако се јави турбуленција (горња слика лопте), онда флуид иза тијела практично бива повучен за тијелом, крећући се једнаком брзином v као и тијело. У том случају Бернулијева једначина постаје:

$$p_A = p_B + \frac{\rho v^2}{2}, \quad (304)$$

гдје се p_B и v односе на притисак и брзину флуида са десне стране лопте, а док је p_A притисак са лијеве стране лопте. У том случају се јавља разлика притисака:

$$p_A - p_B = \frac{\rho v^2}{2}, \quad (305)$$

која зависи од брзине кретања лопте. Ова разлика притисака узрокује појаву сile која „повлачи“ лопту на десно, тј. дјелује слично као сила трења. Ова појава дефинише аеродинамички отпор који је нарочито битан у аутомобилској индустрији⁵⁰.

⁵⁰ Облик аутомобила се показује као кључан не само због чеоног отпора, већ и због аеродинамичког отпора, који се у ауто-индустрији приказује одређеним кофицијентом. Појава турбуленције као главног фактора аеродинамичког отпора се не може избегнути, али је битно да се она деси што је могуће даље иза аутомобила у покрету. На овај начин ће аеродинамички отпор бити максимално смањен.

8. ТЕРМОДИНАМИКА

у овој глави представићемо само неке термодинамичке појмове који су предвиђени планом и програмом курса Физике за студенте Електротехничког факултета у Бањој Луци. С обзиром на то да ћемо се бавити само основним појмовима и без улажења у детаље, препорука студентима је да самостално прошире своја знања из ове области Физике.

До сада смо упознали законе Механике (Кинематике и Динамике) која је вођена механичком енергијом и видјели смо да су Њутнови закони у основи Механике. Термодинамика је вођена унутрашњом енергијом система – термичком енергијом и дефинисана сетом термодинамичких закона или принципа.

Један од централних концепата Термодинамике је температура. Овај појам је свима нама очигледан и познат од рођења, јер наша кожа посједује рецепторе на основу којих можемо осјетити да ли је нешто топло или хладно. Међутим, наши рецептори понекад нису сасвим тачни. На пример, уколико у хладном зимском дану голим рукама узмемо металну шилку и комад дрвета – нама ће се чинити да је метална шилка хладнија, иако су и метална шилка и комад дрвета на истој температури. Зашто је онда метална шилка за наше руке хладнија? Одговор лежи у термодинамичкој размјени топлоте између наше коже руке и предмета којег држимо. Метална шилка ће много брже одводити топлоту са наших руку од комада дрвета.

Температура је мјера загријаности тијела. Међународни систем јединица температуре T мјери у Келвиновој скали која почиње од најниже⁵¹ могуће температуре, тј. од „апсолутне нуле“ или $0[K]$. Друга скала је Целзијусова температура t (која је везана за температуру мржњења воде при нормалним условима) и помјерена је у односу на Келвинову скалу за адитивну величину од $273,15$. То значи да је:

$$t[{}^{\circ}\text{C}] = 273,15 + T[K]. \quad (306)$$

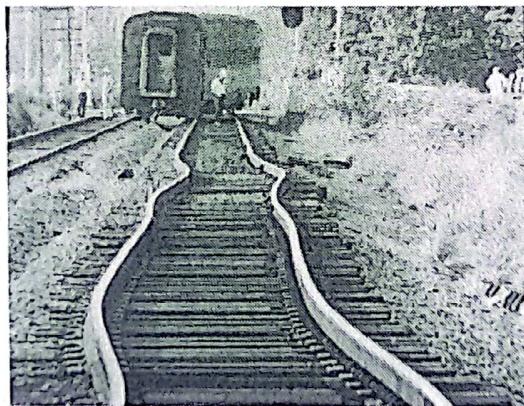
Концепт температуре је дефинисан Нултим законом Термодинамике, који се заснива на појму термодинамичке „равнотеже“. Ово се практично може објаснити на једном

⁵¹ Не постоји никаква температура од „апсолутне нуле“. Иако нема ограничења у горњој граници, сматра се да је на почетку свемира у тзв. Великом праску температура била 10^{39} K , али се ширењем свемир хладио до садашње температуре од 3 K . Наша планета би се такође охладила до ове температуре да нема Сунца које загријава њену површину.

мисаоном експерименту: ако у једном добро изолованом суду поставимо у непосредан контакт тијело А које се налази на вишеј температури T_1 и тијело В које се налази на некој нижој температури T_2 , сасвим је јасно да ће се након неког (довољно дугог) времена успоставити стање термодинамичке равнотеже у коме ће резултујућа температура бити T , где је $T_1 < T < T_2$, тј. негде између T_1 и T_2 . Овај принцип нам служи и за мјерење температуре, јер према том принципу свако тијело посједује температуру као једну особину тијела, која је промјенљива и која може ступити у стање термодинамичке равнотеже са другим тијелом или тијелима. Остаје само правилно калибрисати мјерно тијело (термометар) како бисмо могли нумерички изразити температуру. Ефекти повећавања температуре на мјерном тијелу (термометру) могу бити различити – од повећања димензија тијела (или експанзије), промјене електричне отпорности, па до карактеристичних фазних прелаза. Сви процеси се у принципу могу користити за мјерење температуре.

8.1. Ширење чврстих тијела при загријавању

Познато је да довођењем топлоте у чврсто тијело оно „одреагује“ на такав начин да промијени своје димензије. Овај ефекат називамо термичка експанзија. На слици 101 се види негативна страна овог ефекта, јер је усљед веома топлог дана дошло до ширења жељезничких шина и њиховог кривљења. Вјероватно је пруга постављана у периоду хладног времена и извођачи тада нису оставили довољно размака (дилатације) између шина. Када је дошао период веома топлог времена, десило се кривљење шина усљед дејства топлоте, јер оне нису имале простора који им је био неопходан приликом њиховог продужавања и дошло је до њиховог кривљења.



Слика 101. Термичка експанзија жељезничких шина

Размотрићемо за почетак линеарно ширење, помоћу којег се горњи примјер може објаснити. Ради се о ширењу чврстог тијела дуж једне (доминантне) димензије. Како је жељезничка шина управо добар примјер таквог чврстог тијела – јер је њена дужина знатно већа од друге две величине (ширине и висине), тачан израз за линеарно ширење шине је:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t + \alpha' t^2 + \alpha'' t^3 + \dots), \quad (307)$$

где су $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ – термички кофицијенти линеарног ширења, при чему је $\alpha >> \alpha' >> \alpha'' \dots$; L_0 - дужина шине на 0°C ; L_t - дужина шине на температури t . Уколико се задржимо на амбијенталним температурама наше планете, опсег ових температура не прелази 100°C , па у горњем изразу можемо одбацити чланове вишег реда и добијамо:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t). \quad (308)$$

различита чврста тијела имају различите вриједности термичких кофицијената линеарног ширења. На пример код дијаманта је $\alpha = 1 \cdot 10^{-6} [{}^{\circ}\text{C}^{-1}]$, док жива има вриједност $\alpha = 61 \cdot 10^{-6} [{}^{\circ}\text{C}^{-1}]$ и ово је разлог зашто се управо жива користи у термометрима⁵², чврста тијела нису увијек облика шине, са доминантном једном димензијом (нпр. дужином), већ су и друге двије димензије упоредне. У том случају можемо разматрати да се тијело линеарно шiri дуж све три димензије:

$$a = a_0(1 + \alpha t) ; b = b_0(1 + \alpha t) ; c = c_0(1 + \alpha t). \quad (309)$$

Када помножимо горње изразе, добићемо:

$$abc = a_0 b_0 c_0 (1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3), \quad (310)$$

где можемо поново са великом тачношћу одбацити квадратне и кубне чланове за амбијенталне опсеге температуре. У том случају горњи израз постаје:

$$V = V_0 (1 + 3\alpha t), \quad (311)$$

где можемо увести нови кофицијент $y = 3\alpha$, тј. запремински кофицијент термичког ширења⁵³.

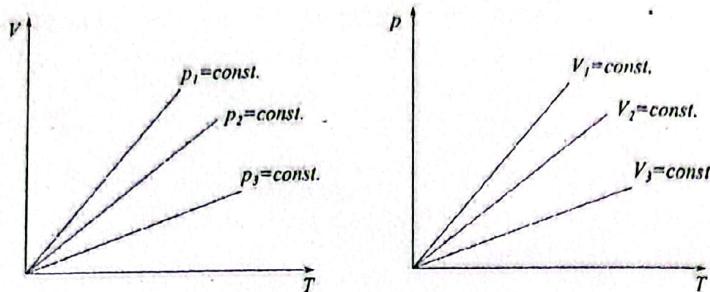
Осим за чврста тијела, горње једначине вриједе и за течне флуиде, јер су и они (као и чврста тијела) готово нестиљиви. Међутим изузетак чини вода и аномалија водоникове везе, што је већ објашњено у фусноти 46. Вода је једна (од ријетких) супстанци која се не шiri када се загријава од 0 до 4 ${}^{\circ}\text{C}$, већ се скupља! Вода у овом оспегу температура има негативан температурни кофицијент термичког ширења.

8.2. Ширење гасова при загријавању

Гасови су стиљиви флуиди. Њихова запремина се може (релативно лако) промијенити. Са ваздух из амфитеатра можемо компримовати у боцу од неколико литара, али би у тој боци владао прилично велики притисак. Како се онда гасови понашају приликом њиховог загријавања? Одговор се може дефинисати тек када одредимо начин на који ћemo загријавати гас. Наиме, гас се може загријавати тако што му се одржава притисак константним или тако што му се одржава запремина константном. Обје ове зависности су линеарне (слика 102).

⁵² Ширење живе у термометрима је примјер да термичка експанзија не мора имати негативне поље, већ може бити корисна и пожељна. Слично је и код код биметала – споја два метала са различитим термичким кофицијентима. Приликом загријавања биметал се криви на једну страну и на тај начин може служити као термички прекидач!

⁵³ Ипак, морамо примјетити да смо при овом извођењу претпоставили да се чврсто тијело шiri на једнак начин дуж све три димензије. Ово је тачно само код изотропних тијела. За сва друга, анизотропна чврста тијела, запремински температурни кофицијент би се тачно могао описати једино са тензорском величином.



Слика 102. Зависности промјене запремине или притиска гаса при загријавању

Промјена запремине гаса при константном притиску се назива изобарна и може се представити једначином:

$$V = V_0 (1 + \gamma t), \quad (312)$$

где је $\gamma = 1/273 [{}^{\circ}\text{C}]$ температурни коефицијент ширења гаса и једнак је за све гасове, V_0 је запремина гаса при $0 {}^{\circ}\text{C}$, док је t температура у целзијусовој скали.

Уколико се гас загријава тако што му се запремина одржава константном, што представља изохорну промјену гаса, са слике 102 видимо да је и та промјена такође линеарна:

$$p = p_0 (1 + \gamma t), \quad (313)$$

где видимо да је температурни коефицијент исти $\gamma = 1/273 [{}^{\circ}\text{C}]$, а p_0 је притисак гаса при $0 {}^{\circ}\text{C}$. Једначине (312) и (313) представљају Геј-Лисак-Шарлове законе, који се могу написати и на сљедећи начин: уколико үврстимо вриједност коефицијента γ и прећемо са целзијусове на келвинову скалу, као на примјер код изобарне промјене стања гаса:

$$V = V_0 \left(1 + \frac{1}{273} t \right) = V_0 \left(\frac{273 + t}{273} \right) = V_0 \frac{T}{T_0}, \quad (314)$$

тј. можемо закључити да је:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \text{ или } \frac{V}{T} = \text{const.} \quad (315)$$

Слично се може закључити и написати и за изохорну промјену стања гаса:

$$\frac{P}{T} = \text{const.} \quad (316)$$

Изрази (315) и (316) су такође Геј-Лисак-Шарлови закони.

8.3. Једначина гасног стања

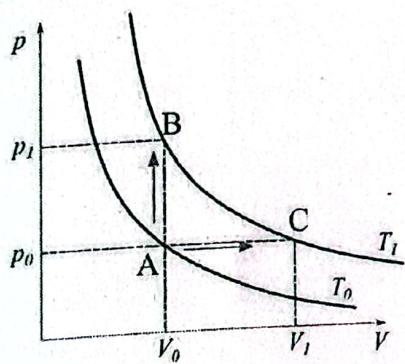
Прије него што напишемо једначину гасног стања морамо напоменути да поред изохорних и изобарних промјена стања гаса постоје и изотермне промјене стања гаса (при којима је температура константна величина) и за који вриједи:

$$p \cdot V = \text{const.}, \quad (317)$$

али и адијабатска промјена стања гаса (при којима је топлота константна величина), за коју лишемо да је:

$$p \cdot V^{\gamma} = \text{const}, \quad (318)$$

(γ је γ -адијабатски коефицијент⁵⁴ и различит је за различите гасове. Једначина (317) представља Бојл-Мариотов закон за изотермне промјене стања гаса и описан је хиперболом у p - V дијаграму (изотермом).
Узмимо да имамо двије различите изотерме, као што је приказано на слици 103. Нека је једна изотерма на темпертури T_0 , а друга изотерма је на темпертури T_1 , при чему је $T_0 > T_1$. Нека је почетно стање гаса у тачки A која има гасне параметре p_0, V_0, T_0 . Са ниже температуре T_0 на вишу температуру T_1 можемо прећи на два различита начина – тако што загријемо гас изобарно или изохорно. Изохорни прелаз је на слици приказан вертикалном стрелицом ($A \rightarrow B$), док је изобарни прелаз приказан хоризонталном стрелицом ($A \rightarrow C$).



Слика 103. Изохорно или изобарно загријавање гаса

Ако користимо један Геј-Лисак-Шарлов закон, изобарни прелаз можемо „повезати“ две различита стања гаса ($A \rightarrow C$):

$$V_1 = \frac{V_0}{T_0} T_1, \text{ за } p_0 = \text{const}. \quad (319)$$

На сличан начин, али изохорно „повезујемо“ ($A \rightarrow B$):

$$p_1 = \frac{p_0}{T_0} T_1, \text{ за } V_0 = \text{const}. \quad (320)$$

Тачке B и C се налазе на истој изотерми и за њих вриједи Бојл-Мариотов закон (317) тј. за њега можемо написати да је:

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 = \text{const}. \quad (321)$$

Ако у горњи израз уврстимо изразе (319) и (320), након сређивања добијемо:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1} = \text{const}. \quad (322)$$

⁵⁴ Адијабатски коефицијент представља однос различитих специфичних топлота гаса, а о овој величини (специфичној топлоти) ће бити ријечи мало касније. Довољно је поменути да се код гасова морају дефинисати двије специфичне топлоте (јер гасове како смо видјели можемо загријавати на два различита начина: изохорно или изобарно) – док се код чврстих тијела дефинише једна специфична топлота (чврсто тијело је готово нестишљиво и загријава се само на један начин).

Како су параметри истих коефицијената груписани (видимо из горњег израза да притисак, запремина и температура са индексом „нула“ и са индексом „један“ граде идентичан облик израза), закључујемо да се горња једначина може написати у општем облику:

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} \quad (323)$$

Овај израз представља општу једначину гасног стања или Клапејронову једначину. Из ове опште једначине сlijede и Геј-Лисак-Шарлови закони и Бојл-Мариотов закон, што је веома лако показати.⁵⁵

Ако одаберемо параметре $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ и $T_0 = 273 \text{ K}$, који представљају „нормалне“ услове у термодинамици, а напишемо једначину (322) за један мол гаса који има при нормалним условима запремину $V_{0m} = 22,4 \cdot 10^{-3} [\text{m}^3 / \text{mol}]$, онда је:

$$pV = \frac{p_0 V_{0m}}{T_0} T. \quad (324)$$

Израз разломка за десне стране је $\frac{p_0 V_{0m}}{T_0} = R$ и назива се универзална гасна константа и

једнака је $R = 8,314 [\text{J/mol} \cdot \text{K}]$. За n молова гаса, једначина (324) постаје:

$$pV = nRT, \quad (325)$$

која такође представља општу или Клапејронову гасну једначину.

8.4. Молекуларно – кинетичка теорија гасова

За разлику од чврстих тијела код којих су јони атома у приближно фиксним положајима⁵⁶, атоми и молекуле гаса испуне сав простор који имају на располагању. Они су у могућности да ово ураде јер се атоми и молекуле гаса непрестано крећу и сударају, међусобно и са зидовима суда у којем се гас налази. Управо ово чини основу молекуларно-кинетичке теорије, која описује кретање атома и молекула гаса у неком простору. Ова теорија има много апроксимација, од којих су многе прилично грубе – али ипак теорија даје веома добре резултате за идеалне⁵⁷ гасове. Апроксимације и претпоставке молекуларно-кинетичке теорије су:

- Атоми и молекуле гаса се могу описати као еластичне сферне куглице. Наравно, ово је апроксимација, јер атоми не морају бити нити куглице, али нити са еластичним својствима.
- Атоми и молекуле гаса врше искључиво апсолутно еластичне сударе. Између судара они се крећу праволинијски и једнолико. У реалности – јасно је да апсолутно

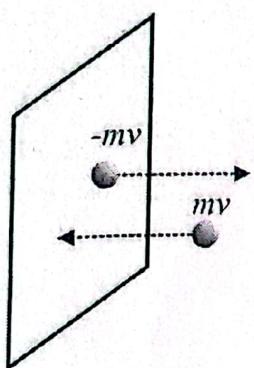
⁵⁵ Заиста, ако било коју величину (притисак, температуру или запремину) прогласите константном и пребаците на десну страну (која је константна), сlijede поменути закони.

⁵⁶ Јони атома у чврстим тијелима имају приближно фиксиран положај јер јони осцилују око својих равнотежних положаја. Амплитуде осциловања су веће на вишим температурама.

⁵⁷ У термодинамици гасних процеса разликујемо идеалне и реалне гасове. Идеални гасови су они код којих су притисци релативно мали, а запремина самих атома и молекула гаса је занемарљива у односу на простор који гас испуњава.

еластични судари заправо не постоје, јер је (иако веома мали) дио енергије изгуби приликом судара (највјероватније на топлоту). Атоми и молекуле гаса су материјалне тачке. Ова апроксимација се може уважити само за идеалне гасове, али за реалне гасове морамо обрачунати и саму запремину коју имају атоми и молекуле гаса.

Горе наведене претпоставке и апроксимације ипак дају добру слику о гасовима, а притисак гаса који се налази у неком суду и заузима неку запремину објашњава се огромним бројем судара којег атоми и молекуле гаса „доживе“ приликом свог кретања. У глави 7.1.2 смо дефинисали величину притиска, као силу која дјелује на неку површину. Извешћемо основну једначину за притисак, којег даје молекуларно-кинетичка теорија, полазећи од апсолутно еластичног судара којег неки атом врши на зид суда, као на слици 104.



Слика 104. Судар атoma од зид и промјена његовог импулса

Са слике видимо да атом не губи компоненту брзине, јер се апсолутно еластично одбије од зид приликом судара. Прије судара атом има импулс mv , а након судара импулс $-mv$, тако да је промјена импулса:

$$\Delta p = mv - (-mv) = 2mv. \quad (326)$$

Нека се атом креће лијево-десно унутар суда дужине ΔL , не сударајући се приликом кретања са другим атомима. То значи да ће вријеме између два узастопна судара од истих зид бити:

$$\Delta t = \frac{2\Delta L}{v}. \quad (327)$$

Сада се може израчунати сила из другог Њутновог закона $\Delta F = m \cdot \Delta a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$,

тј.:

$$\Delta F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv}{2\Delta L} v = \frac{mv^2}{\Delta L}. \quad (328)$$

Кретање атoma наравно није само лијево-десно дуж једног правца, већ у све три димензије. То значи да израз (328) представља тек једну трећину од укупне средње силе обрачунате на сва три правца кретања молекула у суду:

$$F = \frac{1}{3} \frac{mv^2}{\Delta L}. \quad (329)$$

Водећи рачуна да је израз (329) обрачунат за један атом, онда ће средња сила за N атома бити једнака:

$$F = \frac{N}{3} \frac{mv^2}{\Delta L}. \quad (330)$$

Сада можемо израчунати притисак који влада у суду, као силу (330) по површини $S = \Delta L^2$:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{\Delta L^2} = \frac{N}{3} \frac{mv^2}{\Delta L^3} = \frac{N}{3} \frac{mv^2}{V}. \quad (331)$$

Ако запремину пребацимо на лијеву страну, а десну страну мало преуређимо, добићемо:

$$pV = N \frac{2}{3} \frac{mv^2}{2} = \frac{2}{3} NE_k. \quad (332)$$

Овај израз је сличан Клапејроновој једначини (325) $pV = nRT$, па ако упоредимо ове двије једначине, водећи рачуна да један мол гаса ($n=1$) садржи Авогардров број честица $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ [mol⁻¹], добијемо да је:

$$E_k = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT, \quad (333)$$

Где је $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ [J/K] Болцманова консантра. Ово је један од значајних резултата молекуларно-кинетичке теорије, који нам каже да је кинетичка енергија судара једнака $3/2$ укупне топлотне енергије kT , или пошто смо у нашем случају сударе описивали као транслаторне и знајући да постоје транслаторна 3 степена слободе – на сваки степен слободе долази по једна половина укупне топлотне енергије kT .

Ако израз (332) напишемо мало другачије, користећи концентрацију гаса као број атома или молекула гаса по запремини $n_0 = N/V$, и када уврстимо израз (333) у (332), након сређивања добијамо:

$$p = \frac{2}{3} n_0 E_k = \frac{2}{3} n_0 \frac{3}{2} kT = n_0 kT, \quad (334)$$

израз који представља основну једначину за притисак молекуларно-кинетичке теорије. Као што видимо, притисак као продукт многобројних судара молекула са зидовима суда и међу собом, директно је сразмјеран температури гаса. Са температуром линеарно расте и притисак. Када имамо смјешу гасова (као што је на пример ваздух – који је смјеша гасова кисеоника, азота и још неких елемената), укупан притисак ће бити збир парцијалних притисака гасова, на истој температури:

$$p = n_{01} kT + n_{02} kT + n_{03} kT + \dots = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad (335)$$

Израз (335) представља Далтонов закон о парцијалним притисцима смјеше гасова.

8.5.

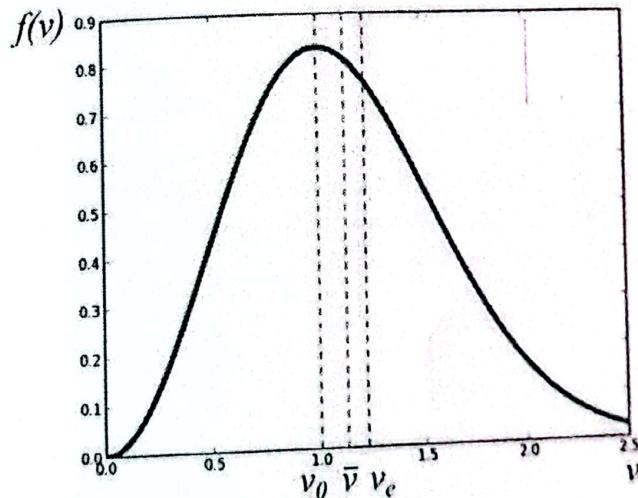
Максвелова расподјела молекула гаса по брзинама

Из горе представљене молекуларно-кинетичке теорије можемо израчунати средњу брзину атома или молекула гаса, тј. ако знамо да је $E_k = \frac{mv_e^2}{2}$ и изједначимо овај израз са лијевом страном израза (333) добићемо $\frac{mv_e^2}{2} = \frac{3}{2} kT$, одакле слиједи израз за средњу брзину атома и молекула из молекуларно-кинетичке теорије:

$$v_e = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (336)$$

Ипак, уколико бисмо измјерили брзину сваког атома или молекула гаса у неком тренутку, видјели бисмо да се оне веома разликују. Међу њима има веома спорих, али и веома брзих. Највећи број атома или молекула има одређену брзину која је највјероватнија за неку константну температуру гаса. Међутим највјероватнија врзина v_0 није једнака енергетској брзини, која је једнака изразу (336).

Половином 19. вијека Џејмс Максвел је решавао проблем налажења функције расподјеле брзина атома (или молекула) гаса по брзинама, што је приказано на слици 105.



Слика 105. Максвелова расподјела атома гаса по брзинама

Са ове криве можемо видјети да највећи број молекула гаса има највјероватнију брзину v_0 . Међутим, функција расподјеле није симетрична (што се може и видјети са слике), тј. ако подијелимо криву дуж v_0 на двије половине, видимо да лијева и десна страна површине нису једнаке. То значи да је већи број молекула које имају ипак мало већу брзину од највјероватније брзине v_0 . Максвел је извео израз за функцију расподјеле која је за одређену врсту молекула гаса и при константној температури T једнака:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}, \quad (337)$$

Где је M молекулска маса молекула гаса. Највјероватнија брзина се може наћи тако што се први извод расподјеле (337) и изједначи са нулом (тј. тражимо екстрем функције расподјеле). Тада се добије да је:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (338)$$

На слици је приказана и средња брзина молекула \bar{v} која се налази приближно између највјероватније v_0 и енергетске брзине v_e , тј.:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (339)$$

Максвелова расподјела је пронашла своје мјесто не само у термодинамици гасова. Универзални карактер ове расподјеле се види код многих других честица и заслужан је за објашњење многих природних појава, попут рецимо појаве кишних облака. Молекуле воде у мору или језерима имају Максвелову расподјелу, тј. у мношту молекула постоје и оне молекуле воде које на некој температури имају и многоструко већу брзину (и енергију) од највјероватније брзине, те су због тога у могућности да изађу из воде и тако формирају кишне облаке.

Слична појава је заслужна и за Сунчеву свјетлост. Наше Сунце еmitује енергију (топлотну и свјетлосну) у процесу фузије два протона (фузија водоника у хелијум). Дистрибуција протона по брзинама у Сунцу је Максвелова, тј. највјероватније брзине протона у расподјели неће бити довољно велике да би се остварила фузија – јер је енергија електростатичког одбијања протона већа од кинетичке енергије сударне фузије протона када протони имају највјероватније брзине. Ипак, Максвелова расподјела нам показује да постоји одређен (мали) број протона који имају веома велике брзине, чија ће кинетичка енергија при судару тако брзих протона бити много већа од енергије електростатичког одбијања. Ови брзи протони ће тако својом фузијом производити енергију и због тога наше Сунце сија!

8.6. Рад при ширењу гасова

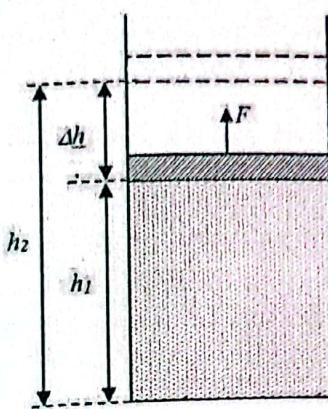
Гасови заузимају цјелокупан простор неког суда који им је на располагању, што је посљедица непрестаног кретања атома и молекула гаса. Притисак гаса је директно пропорционалан температури гаса, што значи да уколико дође до загријавања гаса и притисак му порасте – долази до пораста и енергије гаса. Ово ствара услове да се гас може искористити да изврши механички рад. И заиста, на овом принципу се заснивају многе појаве у којима су гасови (из)вршиоци механичког рада – од вулкана у којима је загријани гас у стању да избацује огромне количине материје, до мотора са унутрашњим сагоријевањем где гас вршећи рад (још увијек) покреће данашњу цивилизацију.

На слици 106 је приказан суд у којем се налази гас и који је са горње стране затворен клипом, чији је попречни пресијек површине S , који може да се креће вертикално и налази се на висини h_1 . Гас има почетне параметре притиска, температуре и запремине p_0, T_0, V_0 . У неком тренутку у гасу се повећају температура и/или притисак, што ће резултовати помијерањем клипа према горе на висину h_2 што значи да је дошло и до повећања запремине. Ако израчунамо механички рад који је при том помијерању гас извршио, добићемо:

$$\Delta A = F \Delta h = p S \Delta h = p \Delta V,$$

(340)

Каде смо искористили дефиницију притиска (263) тј. да је притисак једнак односу сile и површине попречног пресјека клипа.



Слика 106. Рад код ширења гаса

Ако је кретање клипа диференцијално мало, онда ће и диференцијално мали рад бити обликa:

$$dA = pdV, \quad (341)$$

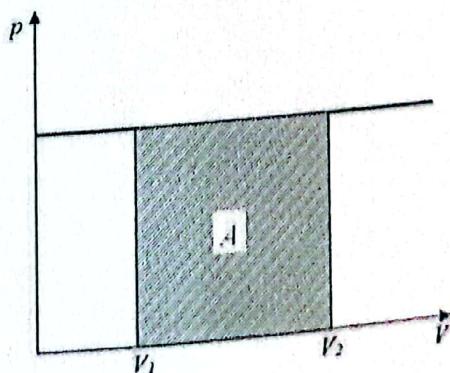
зукупан рад ће бити једнак:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV, \quad (342)$$

Релација одмах искључује постојање рада при изохорним процесима, јер је у њима $p = \text{const}$, тј. $dV = 0$. Код изобарних процеса код којих је $p = \text{const}$ у изразу (342) притисак може да изађе испред интеграла (јер је константан), па је:

$$A = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1), \quad (343)$$

Када изобарни процес представимо графички у p - V дијаграму (слика 107) видимо да рад представља површину испод криве (у случају изобарног процеса – испод праве), што и јесте математички смисао операције интеграљења.



Слика 107. Рад код изобарног процеса

Рад код изотермне промјене стање гаса је такође представљена површином испод кризе, али како је криза изотерме хипербола у p - V дијаграму, ову површину можемо наћи, интеграљењем, тј.:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} pV \frac{dV}{V} = \int_{V_1}^{V_2} nRT \frac{dV}{V}, \quad (344)$$

Где смо у другом кораку проширили израз испод интеграла са $\frac{V}{V}$ и искористили Клапејронову једначину $pV = nRT$. Како је температура T константа, онда заједно са n и R може изаћи испред интеграла и на крају добијамо:

$$A = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (345)$$

Пошто су код изотермних промјена стања гаса притисак и запремина обрнуто пропорционални, онда се израз за рад може написати и као:

$$A = nRT \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (346)$$

Рад код адијабатских промјена стања гаса, при којима топлота остаје константа, рачуна се из општег израза за рад (342) и једначине адијабатске промјене стања гаса (318). Након уврштавања и израчунавања добије се:

$$A = n \frac{RT_1}{\chi - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\chi-1} \right], \quad (347)$$

где је χ - адијабатски коефицијент, а T_1 се односи на почетну температуру код адијабатске промјене стања гаса.

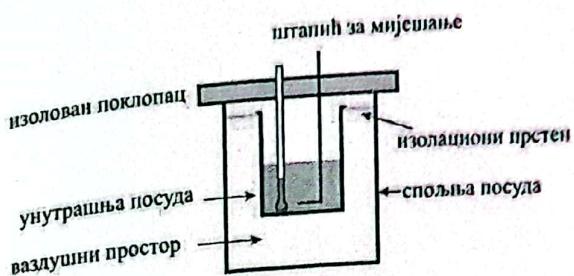
8.7. Специфична топлота чврстих тијела и течности

Када некој маси чврстог тијела (или течности) m доведемо неку количину топлоте Q , онда чврсто тијело (или течност) „одреагује“ на пријем топлоте тако што повећа своју температуру, са неке почетне температуре t_1 на неку крајњу температуру t_2 , тј.:

$$Q = mc(t_2 - t_1), \quad (348)$$

где је c специфична топлота тијела. Као што видимо из горње релације, специфична топлота представља ону количину топлоте коју је потребно довести јединици масе чврстог тијела да би му се температура повећала за један степен (келвинов или целзијусов, потпуно је свеједно – скок од једног степена је једнак у обе скале). То значи да специфична топлота има димензију $J/(kg \times K)$. Материјали са великим вриједностима специфичне топлоте захтијевају велику количину енергије да се загрију. Ова чињеница је искориштена при дизајну површина подножја и предње стране америчких свемирских летјелица типа „Space Shuttle“ које се усљед трења са атмосфером при повратку летјелице на Земљу веома загријавају. Овај материјал „ушије“ ову велику количину топлоте и на тај начин заштите летјелицу од изгарања. Сличан материјал се уградије и у дно модерног посуђа за кување, јер је у стању

да апсорбује топлоту коју накнадно полако испушта и одржава храну загријаном дуго времена.
Специфична топлота се мјери калориметрима (слика 107) – уређајима који су топлотно изоловани и не размјењују топлоту са окolinom. Наравно, без обзира на добру изолацију и калориметри имају одређени топлотни капацитет којег је потребно урачунати у енергетски билас размјене топлоте.



Слика 108. Калориметар

Калориметар се састоји од унутрашње посуде која се налази у другој – спољашњој посуди. На овај начин је унутрашња посуда изолована слојем ваздуха⁵⁸. У унутрашњој посуди се налази одређена маса воде m на некој почетној (собној) температури t и чија је специфична топлота позната и једнака c . Када желимо да измјеримо специфичну топлоту неког чврстог тијела (или течности) c_1 – убацимо у воду загријано чврсто тијело (или течност) масе m_1 , које се налази на некој вишијој температури t_2 и чекамо да топлије тијело (чврсто или течност) преда топлоту хладнијем тијелу (води). Овај процес пратимо помоћу термометра и можемо га донекле убрзати кориштењем штапића за мијешање. Након неког времена температура достигне своју максималну вриједност τ , што значи да је успостављено стање термодинамичке равнотеже у процесу предавања топлоте са топлијег ка хладнијем тијелу. Енергетски биланс овог процеса је да топлије тијело предаје топлоту:

$$Q = m_1 c_1 (t_2 - \tau), \quad (349)$$

док исту количину топлоте прими вода:

$$Q = mc(\tau - t). \quad (350)$$

Изједначавањем ове две топлоте може се израчунати непозната специфична топлота чврстог тијела или течности, под условом да је калориметар јако добро изолован. Тачније мјерење обухвата и мјерење топлотног капацитета самог калориметра.

Морамо нагласити да постоје и такви топлотни процеси при којима се температура не повећава. Ови процеси су повезани са фазним прелазима – на пример када загријемо воду до температуре кључања воде (100°C), без обзира што ми и даље предајемо топлоту води (електрична гријалица је стално укључена) вода се не загријава на вишу температуру и остаје једнака 100°C . У том случају је уложена топлота једнака:

$$Q = m\lambda, \quad (351)$$

⁵⁸ Ваздух је одличан топлотни изолатор, али само уколико мирује. Ваздух ће почети да се креће ако је слој ваздуха дебљи од 3 центиметра и ако постоји разлика температура која ће узроковати кретање ваздуха. Овај механизам представља конвекцију (мијешање) топлоте. Чињеница да је ваздух одличан изолатор се користи код дизајнирања шупљих опека које су енергетски бољи топлотни изолатор од пуне опеке. И птице се зими наконстријеше управо због тога што тада користе одлична изолациона својства ваздуха.

где је λ латентна топлота испаравања воде. Ријеч „латентна“ значи „скривена“, јер практично не видимо ефекат „улагања“ топлоте, због тога што се температура воде не повећава. Тек када сва вода испари при даљем улагању топлоте температура водене паре би почела рasti преко 100°C . Приликом испаравања воде, тј. код фазног прелаза течне у гасовиту фазу – топлота се одводи од система⁵⁹. У обрнутом правцу, приликом фазног прелаза гасне у течну фазу топлота се доводи систему. Слично се може дефинисати латентна топлота и приликом другог фазног прелаза (течно – чврсто), тј. за воду би она била латентна топлота мржњења (отапања) воде.

8.8. Први закон термодинамике

Прије него што формулишемо први закон термодинамике, напоменимо да он припада скупини термодинамичких закона или принципа, од којих смо на почетку ове главе већ дефинисали Нуљи закон термодинамике – који говори о стању термодинамичке равнотеже. Ову врсту равнотеже не треба никако схватити једним статичким стањем, попут механичке равнотеже као нпр. код ваге приликом мјерења масе – где се равнотежа може утврдити једино када оба таса ваге потпуно мирују. Можда се најбоље стање (термо)динамичке равнотеже може схватити на примјеру атома или молекула гаса, који су у непрестаном кретању, па иако ово кретање дефинише притисак – величина притиска остаје савршено константна, ако су константне и остале величине које дефинишу стање гаса, тј. запремина и температура. Овдје је за примјер дат гас, али термодинамичка равнотежа вриједи и за остала агрегатна стања.

Термодинамички закони изучавају процесе претварања топлотне енергије у остале видове енергије (механичка, хемијска, електрична). Узмимо за примјер термоелектрану, код које се топлота која се добије изгарањем угљена доводи котлу са водом. Вода кључа и водена пара се под високим притиском доводи до турбина, чија осовина окреће електричне генераторе и на тај начин добијамо електричну енергију. Очигледан је пут претварања енергије из хемијске (угаљ), преко топлотне, механичке према електричној енергији. Свако претварање је везано за радно тијело, које може бити у било којем агрегатном стању. Радно тијело код термоелектране је вода – водена пара. Радно тијело размјењује енергију са околином на такав начин што врши механички рад или врши провођење топлоте. Уколико радно тијело не размјењује енергију са околином – овакав систем називамо изолован. Већ смо се сусрели са примјерима изолованих система попут хармонијског осцилатора без трења.

Приликом промјене параметара система из једног (почетног) стања у друго (крајње) стање, извршени рад (A) и размјена топлоте (Q) зависе од природе процеса промјене. Експериментално је утврђена једна изненађујућа ствар – величина $Q - A$ остаје једнака код свих процеса. Она зависи једино од почетног и крајњег стања, али не зависи од тога како је систем дошао из једног у друго стање – тј. не зависи од пута. Све остале комбинације A и Q које укључују само A , само Q или било коју њихову комбинацију зависе од пута – само $Q - A$ не зависи од пута промјене стања гаса и увијек је иста. Очигледно промјена $Q - A$ представља промјену одређене унутрашње особине система. Ову особину називамо унутрашња енергија и једнака је:

⁵⁹ Ова чињеница нам даје одговор на питање зашто се наше тијело зноји када је вруће. Наиме, наше тијело намјерно ослобађа воду на површину загријане коже како би дошло до њеног испаравања. У том процесу топлота се одводи са коже, тј. долази до њеног хлађења.

$$\Delta U = Q - A.$$

(352)

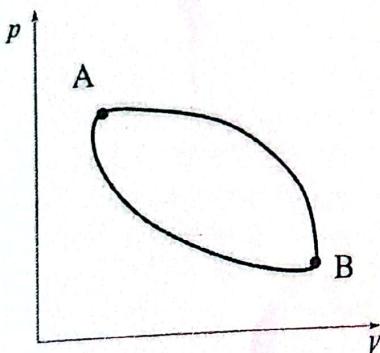
Ако се термодинамички систем мијења са веома малим промјенама, онда можемо написати:

$$dU = dQ - dA.$$

(353)

Горња једначина представља Први закон термодинамике. Он представља проширење звонка о одржавању енергије на неизоловане системе. У тим случајевима енергија се може довести у систем или довести из система или као топлота или као енергија. Размотрићемо први закон термодинамике за неке специјалне случајеве гасних промјена:

- Адијабатски процеси – код којих нема размјене топлоте са окolinом (изоловани системи), тј. $dQ = 0$, тада се рад врши на рачун промјене унутрашње енергије $\Delta U = -A$. При томе, ако систем врши рад ($A > 0$) унутрашња енергија се смањује и обрнуто – ако се рад врши на систему ($A < 0$) унутрашња енергија се повећава.
- Изохорни процеси – код којих нема промјене запремине, па је рад једнак $dA = pdV = 0$, тј. систем не може да врши рад. У том случају је $\Delta U = Q$ тј. ако се топлота доводи систему – долази до повећања унутрашње енергије, и обрнуто ако се топлота одводи од система – долази до смањења унутрашње енергије.
- Повратни (кружни или реверзибилни) процеси – процеси који су приказани на слици 109.



Слика 109. Повратни термодинамички процеси

Код ове врсте процеса систем прелази из једног стања А у друго стање В и затим се поново враћа у стање А. Како у том случају нема промјене унутрашње енергије, тј. $\Delta U = 0$, онда се рад врши само на рачун спољашње топлоте тј. $A = Q$.

- Слободна експанзија – представља адијабатски процес при којем се никакав рад не врши (нити систем врши рад, нити се на систему врши рад). На тај начин је $A = Q = 0$, па је и $\Delta U = 0$. Овакав случај би се могао представити када би гас у једној изолованој комори био повезан са другом изолованом и евакуисаном комором путем вентила. Отварањем вентила гас би слободно експандовао из коморе са гасом у евакуисану комору. Како су обје коморе изоловане и на истој температури – приликом отварања вентила топлота се не би размјењивала нити би се рад вршио, што значи да не би долазило ни до промјене унутрашње енергије.

Први закон термодинамике се може формулисати и на следећи начин: немогуће је конструисати перпетуум мобиле 1. врсте, тј. направити такву машину која би рад давала

„сама од себе“. Рад се мора добити или из унутрашње енергије или из топлоте, тј. не може се рад добити из ничега.

8.9. Механизми толпотног преноса

Разматрали смо како систем размјењује топлоту са својом околицом, међутим није ништа речено на који начин се ово дешава. Постоје три механизма толпотног преноса: кондукција (провођење), конвенција (струјање) и радијација (зрачење) топлоте.

Кондукција (провођење) топлоте. Ако ставите металну шипку неко вријеме са једним њеним крајем у ватру или жар, слободни крај шипке ће се загријати до те мјере да га нећете моћи држати у руци. Ово се дешава због тога што је топлота спонтано прешла са топлијег (загријаног) дијела на хладнији дио шипке. Атоми који граде металну шипку на топлијем крају осцилују са већим амплитудама осциловања, а те осцилације се преносе дуж шипке. Поред тога и електрони преносе топлоту (и то у доста већем обиму у поређењу са осцилацијама атома). Експериментално је показано да је топлота једнака:

$$Q = K \cdot S \cdot \frac{\Delta T}{L} \cdot t, \quad (354)$$

где је K - коефицијент провођења топлоте (зависи од природе материјала који проводи топлоту), S - површина попречног пресека материјала, L - дужина материјала, ΔT - разлика температуре топлијег и хладнијег краја материјала, t - вријеме провођења топлоте.

Конвекција (струјање) топлоте. Када посматрамо свијећу која гори видимо термичку енергију која се подиже увис конвекцијом (струјањем) топлоте. Овај механизам се дешава код флуида (газова или течности) који су у контакту са објектима који се налазе на вишеј температури. Механизам струјања топлоте се своди на чињеницу да се флуиди на вишим температурама обично шире и на тај начин им се смањује густина. Они због тога постају лакши и подижу се увис, док тежи (хладнији) флуид из околине заузима њихово место и процес загријавања се наставља. Због тога се топлота преноси конвективно, тј. њеним струјањем. Овај механизам је одговоран за климатске промјене и струјање ваздуха. Птице (али и једриличари) користе топле струје ваздуха за лебдење. Огромне количине топлоте струје и размјењују се у океанима, али и овај процес струјања топлоте се дешава од језгра до површине (коре) нашег Сунца.

Радијација (зрачење) топлоте. Овај начин преношења топлоте између објекта и његовог окружења одвија се путем електромагнетних таласа. Како бисмо разликовали ову врсту електромагнетног зрачења од осталих видова електромагнетног зрачења (као нпр. од видљиве светlostи, нуклеарног зрачења или радио-таласа) ово зрачење се често назива и термално или топлотно зрачење. Ово зрачење осјећамо када нас Сунце грије и знамо да оно не захтјева медијум који ће да га пренесе. Снага зрачења P_r неког загријаног тијела (снага емитованог зрачења) је:

$$P_r = \sigma \varepsilon S T^4, \quad (355)$$

где је $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\text{W/m}^2\text{K}^4 \right]$ Штефан-Болцманова константа, ε - емисивност тијела које узима вриједности између 0 и 1 (за апсолутно црно тијело), S - површина тијела које емитује зрачење и T - температура тијела. На другу страну, за тијело које апсорбује зрачење од околине можемо дефинисати снагу апсорбованог зрачења P_a :

$$P_a = \sigma \varepsilon S T_o^4, \quad (356)$$

где је T_o - температура околине. Ако тијело након што аспорбује зрачење уједно и емитује зрачење, онда је енергија (топлота) коју тијело у јединици времена прими једнака:

$$P = P_a - P_r = \sigma \varepsilon S (T_o^4 - T^4). \quad (357)$$

8.10. Ентропија и други закон термодинамике

Замислимо да након боравка по веома хладном дану уђемо у кућу и хладним рукама држимо врућу шољу чаја. Након неког времена наше руке ће се загријати, а чај ће се охладити. Ова ситуација је сасвим нормална и очекивана, узимамо је „здраво за готово“ и немогуће је очекивати да се деси стање у којем ће наше руке постати још хладније, а чај још топлији. Ипак, треба схватити да закон одржања енергије не брани ни овај (обрнути) процес. Систем руке-шољица је затворен систем, тј. изолован од околине, а једносмерни описани процес размјене топлоте се назива иреверзибилни процес. Промјена енергије у иреверзибилним процесима у затвореним системима не диктира смјер енергије – њу диктира промјена једне друге величине која се назива ентропија. Наиме, ентропија у затвореним системима, у иреверзибилним процесима увијек расте! Због ове особине, промјена ентропије се често назива и „стријела времена“. Промјена ентропије се дефинише као:

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T}, \quad (358)$$

где је Q топлота која је доведена ка систему (или одведена од система) у току процеса, а T температура система, S_f - је вриједност финалне ентропије, а S_i - је почетна вриједност ентропије.

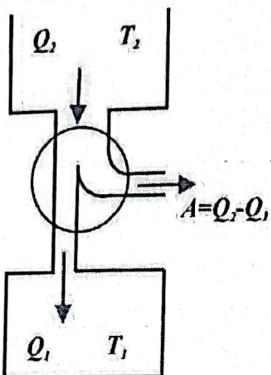
Замислимо да имамо два резервоара који садрже два различита гаса. Резервоари су повезани са непропусном мемраном. У почетном тренутку ентропија овог система је једнака S_i , а уколико склонимо непропусну мемрану наконово дуго времена ентропија ће се повећати на вриједност S_f . Систем ће бити неуређенији након што смо склонили мемрану, што значи да ентропију можемо сматрати за „мјеру“ неуређености система. Сценарио да се у неком каснијем тренутку сасвим спонтано први гас нађе комплетан у првом резервоару, а други гас комплетно у другом резервоару чини се немогућим. Барем не без спољашње интервенције, али то онда не би био затворен систем.

Поставља се питање шта је са промјеном ентропије у реверзилним процесима? Може се показати да је у затвореним (изолованим) системима код повратних процеса промјена ентропије једнака нули. У том случају, обједињено за повратне (реверзибилне) и неповратне (иреверзибилне) процесе можемо дефинисати други закон ентропије:

$$\Delta S \geq 0, \quad (359)$$

где се знак једнакости односи на повратне (реверзибилне) процесе. У стварности, у реалности, идеални реверзибилни процеси суштински и не постоје (увијек се макар и веома мали дио енергије изгуби на трење, турбуленцију или неки други фактор).

Искуство нас учи да разни облици енергије (механичка, хемијска,...) релативно лако прелазе у топлоту, али обрнути процес претварања толоте у друге облике енергије је значајно сложенији. Узмимо једноставан примјер горења дрвета – овде се хемијска енергија веома лако претвара у топлоту (додатно и у свјетлосну енергију), али обрнут процес је практично немогућ. Топлотне машине су уређаји који користе топлоту (прецизније речено – размјену топлоте са околином) како би вршиле рад. Оне непрестано понављају одређене кораке у овом процесу, тј. систем врши реверзибилне периодичне кораке. Принцип рада топлотне машине се може објаснити помоћу слике 110. Она се састоји од топлијег резервоара топлоте на температури T_2 и хладнијег резервоара топлоте на температури T_1 . Топлота као што знамо спонтано прелази са топлијег на хладнији резервоар топлоте, а при овом процесу дис топлоте може да се искористи како би топлотна машина могла да врши рад.



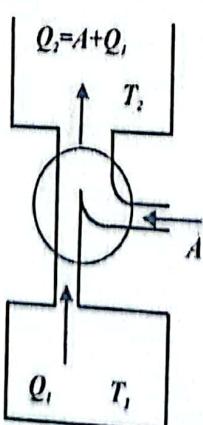
Слика 110. Шема топлотне машине

Коефицијент корисног дејства топлотне машине се дефинише као добијени рад напрема уложеној топлоти:

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}. \quad (360)$$

Коефицијент корисног дејства η топлотне машине је увијек мањи од један, јер из горњег израза видимо без обзира колико је мала количина топлоте Q_1 – она је увијек коначна. Топлотне машине имају релативно мале коефицијенте корисног дејства (до 40 %) и генерално гледајући ово су енергетски неефикасне машине.

Поставља се питање да ли је могуће направити такву машину у коју би се улагао рад тако да се топлота принудно премјешта са хладнијег резервоара у топлији резервоар? Оваква машина је приказана на слици 111.



Слика 111. Шема расхладне машине

Машина са слике 111 се назива расхладна машина и она представља шему рада свих расхладних уређаја (фрижидера, клима уређаја и сл.). Код ње се у машину улаже рад тако да се смјер простирања топлоте усмјери супротно њеном спонтаном правцу простирања, тј. код расхладних машина се топлота простире од хладнијег резервоара топлоте ка топлијем резервоару топлоте. Расхладне машине се често називају и топлотне пумпе⁶⁰, јер оне заиста као да „пумпају“ топлоту у смјеру супротно њеном спонтаном простирању.

Као што видимо, код топлотних или расхладних машина мора постојати хладнији и топлији резервоар, а рад је могуће добити само приликом размјене топлоте између два топлотна резервоара. Управо у овој чињеници лежи и формулатија другог закона термодинамике: немогуће је конструисати перпетуум мобиле 2. врсте, тј. такву толотну машину у којој би сва топлота била претворена у рад. Мора dakле постојати (без обзира како веома мала била) размјена топлоте са другим (нпр. хладнијим) резервоаром топлоте.

⁶⁰ Топлотне пумпе се посљедњих година веома усавршавају и развијају за загријавање (или расхлађивање) објекта, јер су енергетски знатно ефикасније, али и еколошки прихватљивије од других начина загријавања објекта. Оне користе топлоту земље, ваздуха или воде, из њих преузимају топлоту (израз 348) и предају је објектима. Можда на први поглед изгледа немогуће да нпр. спољашња вода из неког бунара која је зими на 7 °C може да загрије просторију на угодних 25 °C, али чак и овако хладна вода може (локално) да се охлади највише низу температуру и да се (из ње) преузета топлота преда другом медију који ће пренијети топлоту објекту. Овај процес размјене топлоте се дешава у систему компресор – испаривач, јер се топлота код исправљања (или кондензовања) флуида одводи од флуида (или предаје флуиду) – што доводи до размјене топлоте између медија (нпр. спољашњег медија: земље, воде или ваздуха, ка унутрашњем медију – води или ваздуху који загријава или хлади објекат). Код рада топлотне пумпе једино што се троши је електрична енергија потребна за покретање електромотора који покреће систем компресор – испаривач. Када се упореди потрошња електричне енергије потребне за рад топлотне пумпе и електричне енергије код загријавања воде помоћу електричног гријача (бојлер), онда се може видјети да топлотне пумпе троше и до 4 пута мање електричне енергије за свој рад од класичних термогених гријача. Прочитати и фусноту #59!

9. ОПТИКА

Оптика је област Физике која објашњава природу свјетлости, на који начин се она простира кроз различите средине и како интерагује са материјом. Свјетлост нас окружује од момента рођења и чини се да је релативно лако објаснити шта је свјетлост. Но, изгледа да то и није тако лако као што се на први поглед чини. Човјек је одувијек размишљао о свјетлости и покушавао да је исправно и потпуно објасни, али то му је пошло за руком тек у прошлом вијеку.

Интересантна је чињеница да је Лукреције, римски пјесник и филозоф, у свом дјелу „О природи Универзума“ (55 година пре Христа) написао једну интересантну дефиницију свјетлости. Наиме он је свјетлост дефинисао као „веома брзо праволинијско кретање ужарених честица“. Иако није знао о каквим се честицама ради, са данашње тачке гледишта дефиниција свјетлости, која је на овај начин дата пре више од 2000 година, је веома тачна. О свјетлости су размишљали и стари Грци, дали су математичке описе простирања свјетлости, али у објашњењу њене природе нису имали успјеха. У Европи су радови Галилеја, Кеплера, Снела, Декарта и Ферма дали значајне резултате у објашњењу закона простирања свјетлости, али у објашњењу саме природе свјетлости је наредни корак дао тек Џутн (1642 – 1727) који свјетлост разлаже на спектар. Он је тиме показао да се бијела свјетлост састоји од вишеструких компоненти, где свака од њих има своју таласну дужину (боју). Кристијан Хајгенс (1629 – 1695) поставља теорију да је свјетлост талас, али какав талас је у питању није знао да понуди објашњење. Џејмс Максвел (1831 – 1879) је открио да су таласи узроковани осциловањем електромагнетног поља. Ово је била велика побједа поборника таласне теорије о природи свјетлости. Свјетлост и њене интеракције са материјом су биле потпуно објашњене са само 4 парцијалне диференцијалне једначине, описујући потпуно на тај начин не само свјетлост, већ и цијелу класичну електродинамику. Међитим, неки ефекти (попут фотоефекта) нису могли да се објасне таласном теоријом. Макс Планк (1858 – 1947) нас уводи у еру квантне физике, где свјетлост описује маленим честицама – квантима свјетлости. Сваки квант свјетлости (фотон) представља малени пакетић енергије. На овај је начин показано да је свјетлост квантована и ово је био тријумф поборника теорије да је свјетлост честичне природе. На питање која је теорија о природи свјетлости тачна – честична или таласна – одговор је дао Алберт Ајнштајн (1879 – 1955). Он је потврдио дуалност природе свјетлости, тј. њено понашање је некада таласне, а некада честичне природе. Како ће се свјетлост понашати зависи од њене интеракције са материјом. Уколико

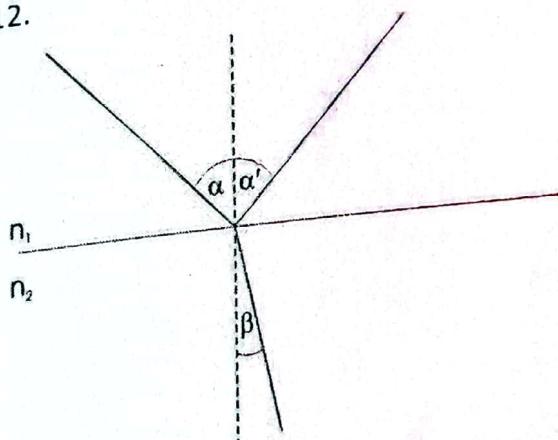
Свјетлост дифрактује на оптичкој решетки – онда она испољава своја таласна својства, а уколико свјетлост изазива фотоефекат – тада испољава своја честична својства.

Свјетлост се креће највећом могућом брзином, било у обзира на њену дуалност, свјетлост има константну (највећу) брзину без обзира из којег система референције је мјеримо. То значи да за свјетлост не важе Галилејеве (класичне) трансформације брзина. Брзина свјетлости у вакууму износи $c = 299792500 \pm 200$ [m/s], али у било којој другој материјалној средини свјетлост се креће спорије. Однос брзине свјетлости у вакууму c и брзине свјетлости у некој средини n представља индекс преламања те средине:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (361)$$

9.1. ЗАКОНИ ОДБИЈАЊА И ПРЕЛАМАЊА СВЈЕТЛОСТИ

Свјетлост се простира праволинијски у оптички хомогеној и изотропној средини (са једнаким индексом преламања). Када свјетлост нађе на средину са неким другим индексом преламања она се једним дијелом одбије, а једним дијелом преломи, као што је то приказано на слици 112.



Слика 112. Одбијање и преламање свјетлости

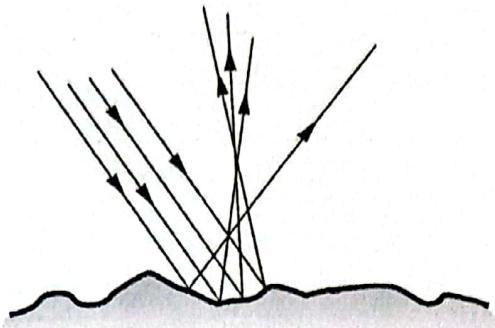
Закони одбијања (рефлексије) свјетлости могу се фомулисати на сљедећи начин:

- Упадни свјетлосни зрак, нормала и одбијени свјетлосни зрак леже у истој равни.
- Угао упадног и одбијеног зрака у односу на нормалу су једнаки, тј.

$$\alpha = \alpha'.$$

(362)

Одбијање свјетлости може бити огледалско или дифузно. Код обје ове врсте одбијања свјетлост се одбија по закону одбијања (362), међутим дифузно одбијање се јавља код храпавих рефлектирујућих површина. Овде се сваки појединачни свјетлосни зрак огледалски одбија, али широк свјетлосни спон се дифузно одбија (слика 113).



Слика 113. Дифузно одбијање светлости

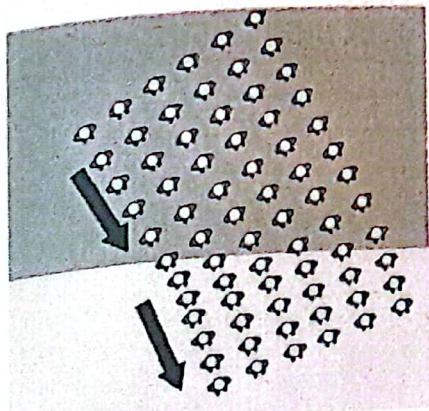
Да бисмо могли дефинисати законе преламања морамо претпоставити да су упадни зраци монохроматски (тј. они су једне и тачно дефинисане таласне дужине). Ово се мора урадити због тога што се свака таласна дужина прелама на други начин, тј. индекс преламања функција која зависи од таласне дужине. Закони преламања светлости су:

- Упадни светлосни зрак, нормала и преломљени светлосни зрак леже у истој равни.
- Индекс преламања средине код упадног и преломљеног зрака једнак је односу синуса упадног и преломљеног угла:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta. \quad (363)$$

Како су Декарт и Снелијус дефинисали ове законе, они се називају Декарт-Снелијусови закони преламања и одбијања светлости.

Зашто светлост скрене (преломи се) на граници двије оптичке различите средине? Одговор је у дефиницији индекса преламања (361). Из ове дефиниције видимо да се светлост простире спорије у срединама са већим индексом преламања и обрнуто – светлост се простире брже у срединама са мањим индексом преламања. Посљедица промјене брзине на граници двије различите средине је промјена правца кретања. Али постоји и један изузетак када светлост не скреће на граници двије средине – то је случај када светлост улази под правим углом на границу двије средине, што се види из израза (363). И у овом случају светлост успори (или убрза) када уђе у другу средину са већим (или мањим) индексом преламања, али не мијења правац кретања. У свим осталим случајевима – када светлост улази под неким углом у односу на нормалу, светлост се прелама. Што је већи упадни угао – израженије је преламање. Ово се може схватити помоћу једног мисаоног експеримента који се може и експериментално извести: замислимо једну групу војника (или студената) који марширају (корачају). Војници (студенти) су формирали једну линију и сви марширају (корачају) истом брзином. Они овиме представљају светлосни талас који се простире једном оптичком средином. На поду под неким углом на надолазећу линију војника је налијепљена бијела трака која означава границу између двије оптичке различите средине. Договор је да када било који војник пређе ову линију – да смањи брзину хода (ово је еквивалент ситуацији када светлост уђе у средину са већим индексом преламања и успори). Како војници прелазе линију, један по један смањују своју брзину и уколико војници желе и даље да остану у једној линији – једина могућност је да промијене правац (слика 114).



Слика 114. Симулација преламања свјетлости помоћу марширања војника

Из овог експеримента је јасно да када год свјетлост улази у спорију средину (већи индекс преламања), она се ломи ка нормални, и обрнуто – када свјетлост долази из оптички гушће (већег индекса преламања) у оптички рјеђу средину (мањег индекса преламања), она се ломи од нормале (као да „блежи“ од нормале).

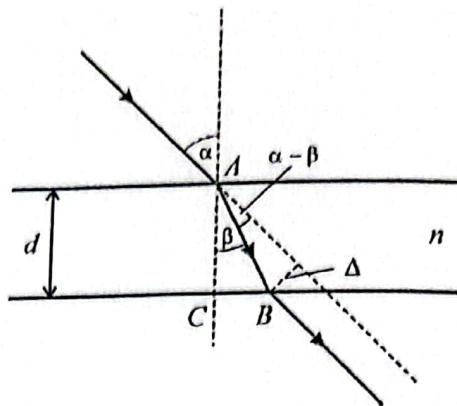
9.1.1. Модел планпаралелне плоче

Набројаћемо неке посљедице преламања свјетлости. Прва посљедица је визуелна – узмимо као примjer посматрање неког предмета у води (новчића). Због преламања свјетлости у води посматрачу ће се чинити да је новчић на мањој дубини него што је то у стварности (слика 115.).



Слика 115. Стварни и привидни положај предмета у води

Израчунаћемо колико износи ово помијерање свјетлосног зрака (Δ) у односу на првобитни правац простирања свјетлости по моделу планпаралелне плоче, која је приказана на слици 116. Модел планпаралелне плоче представљен је помоћу две паралелне равни које ограничавају средину индекса преламања n . Нека свјетлосни зрак улази из ваздуха под упадним углом α у односу на нормалу, прелама се и у тачки B излази из средине. Видимо да је излазни свјетлосни зрак паралелно помјерен у односу на упадни свјетлосни зрак за величину Δ .



Слика 116. Преламање светлости на планпаралелној плочи

Са слике видимо да је:

$$\Delta = [AB] \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} d, \quad (364)$$

где је d дебљина слоја планпаралелне плочице. Ако у горњој једначини примјенимо израз за индекс преламања $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ и тригонометријске трансформације:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (365)$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}, \quad (366)$$

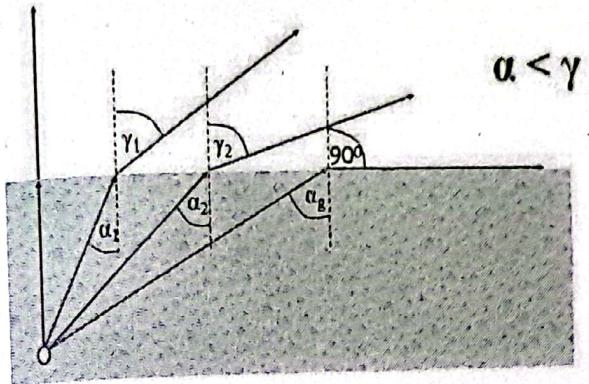
након сређивања добијемо:

$$\Delta = \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) d \sin \alpha. \quad (367)$$

Видимо да паралелно помјерање зависи од дебљине слоја планпаралелне плоче, од упадног угла и оптичке карактеристике материјала слоја, тј. његовог индекса преламања. Једини случај код којег неће доћи до лома светлости је када светлост улази под правим углом у средину, тј. када је $\alpha = 0$, тј. $\sin \alpha = 0$.

9.1.2. Тотална рефлексија

Сљедећа посљедица преламања светлости је појава тоталне рефлексије. У овом случају светлост се креће из оптички гушће у оптички рђеју средину, тј. прелама се на такав начин да светлост „одлази“ или „блежи“ од нормале. На слици 117 су приказана 4 различита светлосна зрака који полазе из воде у ваздух. Први зрак са лијеве стране слике који долazi на граничну површину вода-ваздух под правим углом се не прелама. Сви наредни зраци који долазе на граничну површину под угловима α_1 и α_2 се преламају под угловима γ_1 и γ_2 . Видимо да како упадни угао расте, тако расте и преломни угао, а зрак све више „блежи“ од нормале.

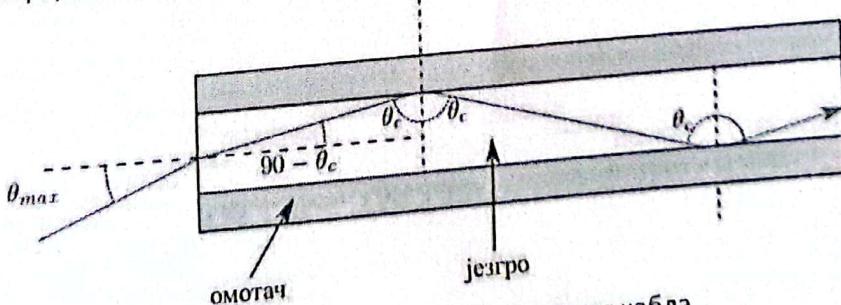


Слика 117. Тотална рефлексија

Када свјетлост дође на граничну површину вода-ваздух под упадним углом α_x , свјетлосни зрак ће се кретати по граничној површини, а када би још повећали упадни угао $\alpha > \alpha_g$, свјетлосни зрак би се рефлектовао назад у воду. Ова појава се назива тотална рефлексија. Израчунаћемо вриједност граничног угла за тоталну рефлексију. Са слике видимо да је при α_g преломни угао једнак $\gamma = 90^\circ$. Када примјенимо израз (363) за овај случај добићемо $n_v \sin 90^\circ = n \sin \alpha_g$, где је $n_v \approx 1$ - индекс премања ваздуха. Одавде је:

$$\sin \alpha_g = \frac{1}{n}. \quad (368)$$

Тотална рефлексија је нашла своју примјену у оптичким кабловима, који су сачињени од језгра оптичког кабла и његовог омотача (плашта), слика 118. Омотач је дизајниран управо на такав начин да је начињен од материјала који има мањи индекс преламања и који ће тотално рефлектовати свјетлост назад у језгро материјала оптичког кабла. На овај начин нема губитка сигнала у провођењу код оптичког кабла. Осим ове предности (провођење без губитака у јачини сигнала), оптички каблови могу симултано преносити велики број различитих информација, јер ће се свака таласна дужина преносити независно.

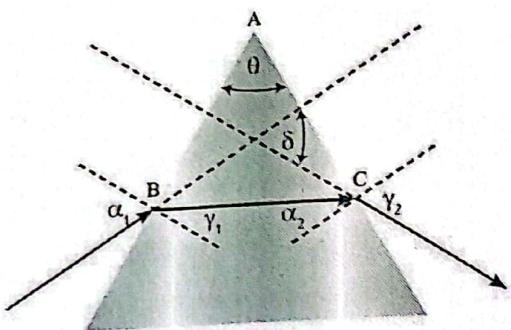


Слика 118. Језгро и омотач оптичког кабла

9.1.3. Преламање свјетlostи кроз призму

Призма је геометријско провидно тијело чији је угао при врху једнак θ , као на слици 119. Када свјетлосни зрак пролази кроз призму он се прелама два пута: једном када улази у призму (ако се призма налази у ваздуху и сачињена је од материјала са индексом преламања већим од 1, онда ће се призма преламати ка нормали), а други пут се свјетлост прелама када излази из призме (тада ће се свјетлост преламати тако што „бјежи“ од

нормале, јер излази из призме у ваздух). Ако нацртамо продужетак упадног свјетлосног зрака, онда се може дефинисати угао скретања призме као угао између улазног и излазног свјетлосног зрака из призме δ .



Слика 119. Преламање светлости кроз призму

Може се показати да ће овај угао бити минималан $\delta = \delta_{\min}$ ако је свјетлосни зрак који пролази кроз призму паралелан са базом призме – тј. ако је $\alpha_1 = \gamma_2$, као и $\alpha_2 = \gamma_1$. Ако напишемо израз за индекс преламања призме:

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1}, \quad (369)$$

можемо наћи везу између угла призме θ , α_1 , γ_1 и δ_{\min} . Посматрањем троугла ΔABC можемо видјети да је $2(90 - \gamma_1) + \theta = 180$. Одавде је:

$$\gamma_1 = \frac{\theta}{2}. \quad (370)$$

Такође се са слике може видјети да је $\delta_{\min} = 2(\alpha_1 - \gamma_1)$. Одавде се сређивањем добија да је:

$$\alpha_1 = \frac{\delta_{\min} + \theta}{2}. \quad (371)$$

Уврштавањем израза (371) и (372) у (370) добијамо:

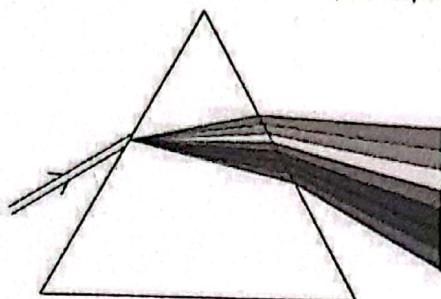
$$n = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + \theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (372)$$

Ако се ограничимо на веома оштре призме, где је мали угао θ и ако је упадни угао α_1 мали, онда ће и минимални угао скретања δ_{\min} свјетлосног зрака бити мали. За мале углове вриједи да је $\sin \alpha \approx \alpha$, па из израза (372) можемо изразити δ_{\min} :

$$\delta_{\min} = (n-1)\theta. \quad (373)$$

Из израза (373) видимо да минимани угао скретања зависи од индекса преламања призме и њеног угла. Како је индекс преламања функција од таласне дужине светлости, то значи да приликом проласка бијеле светлости кроз призму свака таласна дужина (боја) ће се другачије да преломити, јер свака таласна дужина има свој минимални угао скретања. Ова

појава се назива дисперзија свјетлости и приказана је на слици 120. Дисперзију свјетлости видимо често као дугу послије кише, а то се дешава зато јер су капљице кише издужене (због дејства гравитационог привлачења Земље) и могу се апроксимирати малим призмама.



Слика 120. Дисперзија свјетлости

Иразићемо квантитативно дисперзију призме помоћу израза (373), као разлику минималних углова скретања двије таласне дужине (боје): црвене (δ_1 , која најмање скреће приликом кретања кроз призму) и љубичасте (δ_2 , која највише скреће приликом кретања кроз призму).

$$\delta_2 - \delta_1 = (n_2 - n_1)\gamma. \quad (374)$$

Сада можемо изразити и диспезиону моћ призме, као однос дисперзије призме (374) и минималног угла скретања жуте натријумове Д-линије⁶¹, δ_D :

$$\omega = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_D}. \quad (375)$$

Ако у израз (375) уврстимо у бројник израз (374), а у називник уврстимо израз (373) за натријумову жуту Д линију, након сређивања добијемо:

$$\omega = \frac{n_2 - n_1}{n_D - 1}. \quad (376)$$

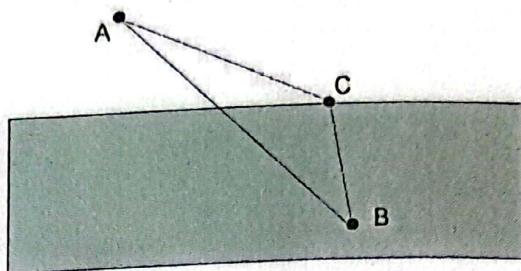
9.2. Фермаов принцип

Пјер де Ферма је у 17. вијеку разматрао простирање свјетлости у оптички хомогеним и нехомогеним срединама (тј. оним срединама у којима се индекс преламања мијења локално, од тачке до тачке и који није константна величина). Ферма је дошао до закључка да ће се свјетлост простирати оним путем за које јој је потребно најкраће вријеме.

Иако се овај закључак чини сасвим логичан, он може створи на први поглед нелогичну слику о начину простирања свјетлости. Да би смо ово показали, замислимо да имамо утопљеника у мору који се налази у тачки В, док се у спасилац налази на обали у тачки А, слика 121. На питање који је геометријски пут најкраћи од спасиоца до утопљеника – одговор је јасан и то је пут АВ. Међутим, на питање за које најкраће вријеме ће спасилац доћи до утопљеника – одговор ће бити изломљена путања ACB. Наиме, спасилац тражи такву путању за које му је

⁶¹ Ова жута Д-линија се добија приликом изгарања натријума и види се као интензивна жута свјетлост. Прецизније, постоје две линије (Д1 и Д2), али обе припадају самој средини видљивог спектра и због тога је веома згодно упоредити дисперзију и израчунати диспезиону моћ призме у односу на неку конзистентну и јаку линију из средине видљивог спектра као што је жута Д линија.

потребно најкраће вријеме, јер ће спасилац сигурно брже трчати по обали, него што ће пливати у води. На сличан начин и свјетлост „тражи“ такву путању за које јој је потребно најрађе вријеме.



Слика 121. Геометријска и оптичка дужина пута

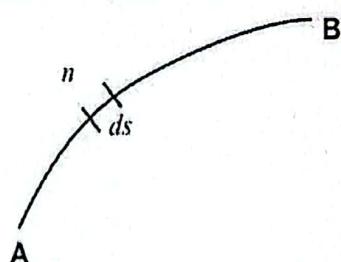
Ако дефинишемо геометријску дужину пута s и оптичку дужину пута l , онда ће у оптички хомогеним срединама (са константним индексом преламања) ове две дужине бити повезане на сљедећи начин:

$$l = ns. \quad (377)$$

Међутим, уколико је средина оптички нехомогена, где индекс преламања није константна, већ локално промјенљива величина, веза између оптичке и геометријске дужине пута је:

$$l = \int_A^B n ds. \quad (378)$$

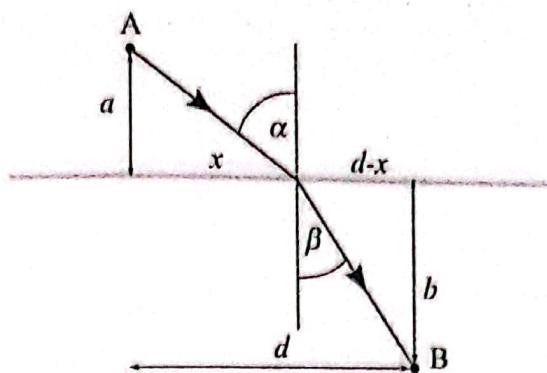
У оптички нехомогеним срединама свјетлост се неће кретати праволинијски већ криволинијски, као што је то приказано на слици 122. Наравно и овдје свјетлост поштује Фермаов принцип бирајући од свих могућих путања управо ону која је временски најкраћа.



Слика 122. Простирање свјетлости у оптички нехомогеној средини

Фермаов принцип је универзалан и он представља начело по којој се свјетлост креће у било којој средини. Показаћемо да из овог принципа и физичке дефиниције индекса преламања (361) сlijedi геометријска дефиниција индекса преламања (363) Декарта и Снелијуса⁶². Нека се свјетлосни зрак прелама из оптички рјеђе у оптички гушћу средину, као на слици 123.

⁶² Физичка и геометријска дефиниција индекса преламања на први поглед немају везе једна са другом, мада обје дају дефиницију исте величине – индекса преламања!



Слика 123. Примјена Фермаовог принципа на преламање свјетлости

Свјетлост се у горњој средини креће брзином v_1 и има индекс преламања n_1 , док се у доњој средини свјетлост креће брзином v_2 и има индекс преламања n_2 . Можемо изразити вријеме проласка свјетлости као збир времена потребног да свјетлост пређе пут у горњој средини и времена потребног да свјетлост пређе пут у доњој средини:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}. \quad (379)$$

Фермаов принцип ћemo примјенити тако што ћemo наћи екстрем горње функције зависности времена t од промјењиве x , а то ћemo урадити тако што нађемо први извод ове функције и изједначимо га са нулом, тј.:

$$\frac{dt}{dx} = 0. \quad (380)$$

На овај начин ћemo од свих могућих варијанти путева којим свјетлост може да дође из горње тачке А у доњу тачку В одабрати онај за који је вријеме екстремно, тј. има минимум.

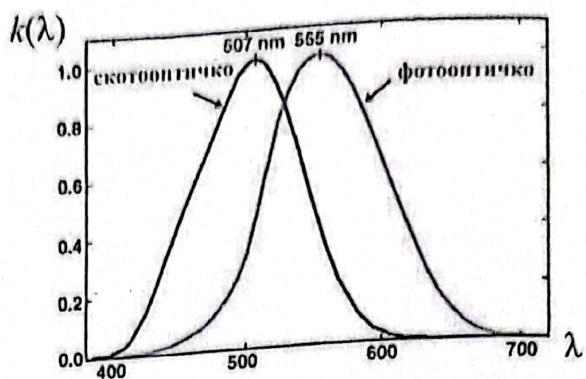
Након израчунавања извода и сређивања израза, при чему узимамо у обзир да је

$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ и $\sin \beta = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$, као и $n_1 = \frac{c}{v_1}$ и $n_2 = \frac{c}{v_2}$, лако се показује да се

добије геометријска дефиниција индекса преламања (363), тј. $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$.

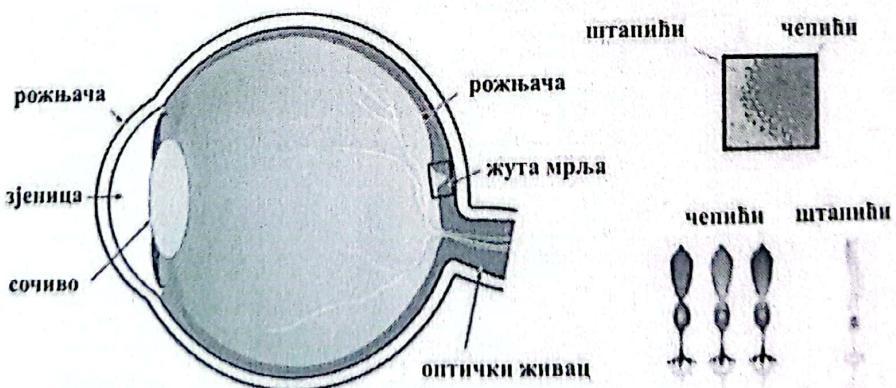
9.3. Фотометрија

Област оптике која изучава различите особине свјетлости, као и начине мјерења ових особина назива се фотометрија. Како се људско око разликује од мјерног уређаја, морамо подијелити све фотометријске величине на субјективне (оне које карактеришу одређену фотометријску величину на начин како га људско око види) и објективне (онако како га мјерни уређај „види“). Зашто људско око види другачије од мјерног уређаја? Одговор треба тражити у еволуционом развоју човјека. Током дугог временског развоја човјека као врсте, његове очи су еволуирале на такав начин да дијапазон таласних дужина које здраво људско око види лежи у интервалу 400 – 800 пм. Међутим, људско око не види једнако добро све таласне дужине, али исто тако не види једнако у току дана (у условима дневне свјетlosti) и ноћи. Начин на који људско око види даљу се назива photoоптичко виђење, а то се назива скотоптичко виђење, слика 124.



Слика 124. Фотооптичко и сктооптичко виђење

На слици 124 дата је спектрална осјетљивост $k(\lambda)$ здравог људског ока од таласне дужине λ у условима дневне (фотооптичко виђење) и ноћне (сктооптичко виђење) свјетlostи. Видимо да је око најосјетљивије на таласној дужини од 555 nm (жута боја) дању, док је ноћу најосјетљивије на таласној дужини од 507 nm (зелена боја). Овај ефекат помјерња спектралне осјетљивости ока се назива Пуркињеов ефекат (по чешком анатому Јану Пуркињеу). Пуркињеов ефекат може постати јасан када се упознамо на који начин људско око види. На слици 125 је приказана шема људског ока. Свјетlost улази на зјеницу, кроз сочиво ока. Сочиво је повезано са тзв. цилијарним мишићима који га могу издужити или скупити и на тај начин сочиво ока мијења жижну даљинu и оптичку јачинu⁶³, фокусирајући се на мање или више удаљене предмете. Свјетlost фокусира лик на рожњачи, где се налази жута мрља – подручје на којем се налазе рецептори за боју и интензитет свјетlostи. Рецептори за боју се називају чепићи и има их око 7 милиона, док се рецептори за интензитет свјетlostи називају штапићи и има их скоро 20 пута више од чепића, тј. око 130 милиона. Разлог зашто око мијења своју спектралну осјетљивост при дневној или ноћној свјетlostи је због чињенице да чепићи постају неосјетљиви ноћу и остају активни само штапићи⁶⁴. Људско око је само орган виђења, док се информација о посматраном објекту оптичким живцем доводи до дијела мозга у којем се формира свијест о виђеном.



Слика 125. Пресек људског ока

⁶³ У поглављу 9.4.3 ће више бити ријечи о карактеристикама сочива.

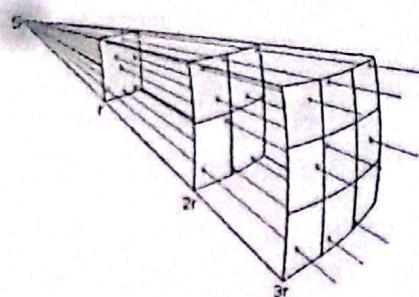
⁶⁴ Постоје људи (тзв. далтонисти) који не разазнају боје чак ни дању, тј. који или немају довољно чепића или њихови чепићи остају неактивни при дневној свјетlostи.

Извешћемо фотометријске величине, али ћемо их подијелити на енергетске или објективне величине (онако како их уређај види) и визуелне или субјективне величине (онако како их људско око види).

9.3.1. Свјетлосни флукс

Нека имамо неки извор свјетlostи (S) као на слици 126. Свјетлосни флукс се тада дефинише као израчена енергија у јединици времена, тј.:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}. \quad (381)$$



Слика 126. Флукс свјетlostи

У литератури се осим термина свјетлосни флукс може срести и свјетлосни ток или свјетлосна снага. Сходно томе, објективна мјерна величина за свјетлосни флукс је ват [W], док је субјективна мјерна величина [lm] и назива се лумен. Веза између [W] и [lm] није једноставна, због спектралне осјетљивости ока (слика 124). На примјер, за таласну дужину $\lambda=555$ [nm], на којој при фотооптичком виђењу око има максималну осјетљивост $1[W]=683 [lm]$. За сваку другу таласну дужину морамо познавати карактер спектралне зависности и тада је веза између визуелног (субјективног) Φ_λ и енергетског (објективног) флуksa $\Phi_{e\lambda}$ једнака:

$$\Phi_\lambda = k(\lambda) \Phi_{e\lambda}. \quad (382)$$

Ако желимо изразити израчену количину свјетlostи, као енергију која се израчи из неког свјетlosног извора у току времена:

$$dQ = \Phi dt, \quad (383)$$

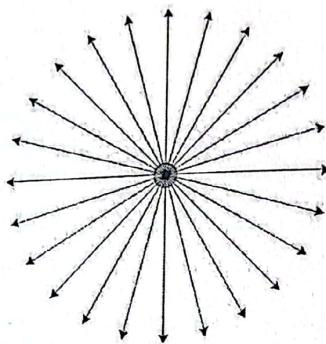
онда је јасно да ће објективна мјерна јединица за израчену количину свјетlostи бити [J], док ће субјективна мјерна јединица бити [lm · s].

9.3.2. Јачина свјетlostи

Колико је јак неки извор свјетlostи? Како наћи стандардну величину за јачину свјетlostи? У прошлости је јединица за јачину свјетlostи била везана за свијеђу, па је основна субјективна мјерна јединица за јачину свјетlostи названа кандела [cd]. Ова мјерна јединица је уједно и једна од 7 основних мјерних јединица, као што је већ наведено у Глави 1. Ако дефинишишемо јачину свјетlostи као свјетлосни флукс којег неки свјетlосни извор еmitује у просторном углу, тј.:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \quad (384)$$

онда можемо закључити да је објективна мјерна јединица за свјетлосну јачину $\left[\frac{W}{sr} \right]$. Јачина свјетlostи се мора дефинисати диференцијално, јер извори свјелости не морају бити изотропни. Вјештачки извори свјетlostи углавном и нису изотропни, јер су доминантно усмјерени у неком правцу⁶⁵. Међутим, наше Сунце јесте изотропни извор свјетlostи (слика 127, мада и оно флукутира локално по интензитету, иако га за интензитет свјетlostи којег Сунце израчи у просторном углу на путањи према нашој планети можемо сматрати изотропним извором свјетlostи).



Слика 127. Изотропни извор свјетlostи (нпр. Сунце)

Ако изотропан извор свјетlostи (Синце) израчи свјетlost по цјелокупном просторном углу ($\Omega = 4\pi$), тада је укупан флукс свјетlostи изотропног извора једнак:

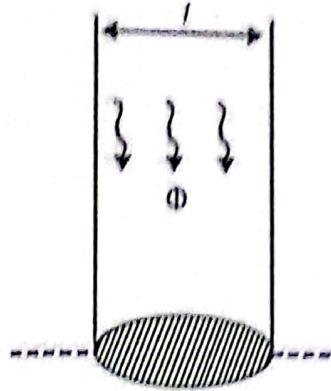
$$\Phi_{uk} = \Omega I = 4\pi I. \quad (385)$$

У околини изотропног извора свјетlostи интензитет је једнак на концентричним сферним површинама, које су једнако удаљене од изотропног извора свјетlostи. Овај резултат ће нам бити од користи за израчунавање сљедеће фотометријске величине – освјетљаја.

9.3.3. Освјетљај

Веома је важно знати колико свјетlostи треба да пада на неку површину. У пројектовању простора ово је дефинисано одређеним грађевинским стандардима, па су тако тачно одређени и прецизирани неопходни освјетљаји потребни за поједине просторе. На примјер, у ходницима ће сигурно бити неопходан мањи освјетљај него у хируршкој сали. Са слике 126 можемо видјети како освјетљеност површине опада са квадартом растојања – тј. ако је на удаљености r освјетљена површина A , на удаљености $2r$ ће исти флукс свјетlostи бити распоређен на $4A$, на удаљености $3r$ флукс ће се распостирати на $9A$, итд. Закључак је да се на удаљености $n \cdot r$ флукс свјетlostи распоређује на $n^2 \cdot A$, тј. освјетљај опада пропорционално са квадратом растојања. Ово ћемо доказати помоћу слике 128 и слике 127.

⁶⁵ Сијалица такође није изотропни извор свјетlostи, јер ни она не зрачи свјетlost једнако у свим правцима.



Слика 128. Освјетљај површине од стране свјетлости одређеног интензитета

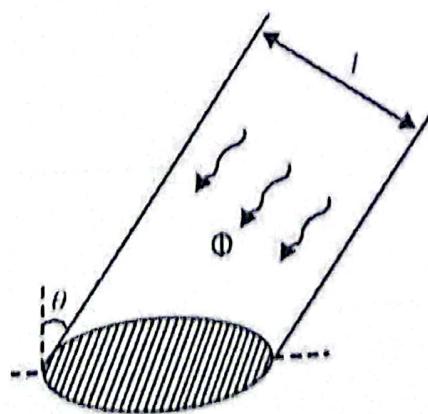
Освјетљај се дефинише као флукс свјетлости који пада на неку површину:

$$E = \frac{d\Phi_{pad}}{ds}. \quad (386)$$

Из израза (386) закључујемо да је објективна мјерна јединица једнака $\left[\frac{W}{m^2} \right]$. Субјективна мјерна јединица се назива лукс и једнака је $\left[lx = \frac{lm}{m^2} \right]$. Нека флукс свјетлости долази са неког изотропног извора свјетлости, за који знамо везу између укупног флуksа свјетлости и његовог интензитета (385). Замислимо да изотропан извор свјетлости поставимо у центар концентричне сфере (слика 127) која се налази на растојању r од изотропног извора свјетлости. Израчунајмо освјетљај било које тачке ове сфере – пошто флукс свјетлости пада нормално на сваку тачку концентричне сфере онда ће освјетљај у свакој тачки сфере бити једнак и износиће:

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{4\pi I}{4\pi r^2} = \frac{I}{r^2}. \quad (387)$$

Горња релација је доказала да освјетљај квадратно опада са растојањем од извора свјетлости јачине I . Међутим, што ако свјетлост не пада под правим углом на површину коју освјетљава, већ под неким углом α , као што је то приказано на слици 129.



Слика 129. Освјетљај када свјетлост пада под углом – Ламберов закон

Видимо да извор свјетlostи не „види“ цijelu површину S , већ мању површину $S_{\text{осв}}$. Сходно томе, ако је извор свјетlostи постављен под неким углом у односу на нормалу освјетљај ће бити једнак:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \theta. \quad (388)$$

Горњи израз представља Ламберов закон и показује нам да свјетlost, поред квадратно опадајуће зависности од полупречника, директно зависи и од косинуса угла под којим долазећи флукс свјетlostи пада на посматрану површину. Освјетљај ће бити максималан када свјетlost пада на површину под правим углом и када је извор свјетlostи што ближе површини коју освјетљава.

Једна важна фотометријска величина повезана са освјетљајем се назива свјетlosnina експозиција. Она представља умножак освјетљаја и времена освјетљавања:

$$H = E \cdot t. \quad (389)$$

Субјективна мјерна јединица је $[lx \cdot s]$, док је објективна мјерна јединица једнака $\left[\frac{J}{m^2} \right]$.

9.3.4. Еmitанција

У уводном поглављу Оптике видјели смо да извори свјетlostи могу еmitovati свјетlost примарно (топлотно, стимулисаном емисијом или луминесцентно) или секундарно (рефлексијом или трансмисијом). У том случају се може дефинисати еmitанција или емисиона способност свјетlosног извора:

$$R = \frac{d\Phi_{em}}{dS}, \quad (390)$$

где се Φ_{em} односи на флукс свјетlostи еmitован са површине тијела које еmitује свјетlost. Иако се формално може учинити да је израз (390) за еmitанцију димензионо једнак изразу за освјетљај (386) треба нагласити да је суштинска разлика у флукусу свјетlostи. Код освјетљаја се ради о флукусу који пада на неку површину, док је код еmitанције у питању флукус свјетlostи еmitован са неке површине. Међутим, ако се свјетlost еmitује секундарно, рефлексијом или транспаренцијом – онда освјетљена површина практично постаје извор свјетlostи⁶⁶ и може се формално повезати са освјетљајем као:

$$R = \rho E, \quad (391)$$

уколико је секундарна емисија повезана са освјетљајем усљед рефлексије, где је ρ коефицијент рефлексије, као и:

$$R = \tau E, \quad (392)$$

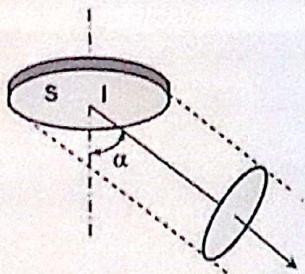
Када је секундарна емисија повезана са освјетљајем усљед транспаренције, где је τ коефицијент транспаренције. Уколико је коефицијент рефлексије $\rho = 1$, ради се о идеално бијелом тијелу – оном које је у стању да рефлектује сво зрачење које нађе на њега. Уколико

⁶⁶ Ова чињеница се веома много користи у новим начинима освјетљавања простора. На пример, модерне уличне лампе користе освјетљавање помоћу вертикално навише усмјереног свјетlosног спонга изнад којега је одређена закривљена и храпава површина која дифузно освјетљава улицу. На овај начин смањује се свјетlosno загађење, које је веома штетно по птице.

је $I = 1$, ради се о идеално провидном тијелу – тј. тијелу које има способност да пропусти своје зрачење које нађе на њега, без апсорције.

9.3.5. Луминанција

Сјајност или луминанција неког извора светлости је величина која описује колики интензитет светлости се емитује са неке површине, а коју наше око перцепира. Ова величина је највише везана за субјективни осјећај јачине посматране светлости. Да бисмо ово демонстрирали посматрајмо слику 130, где је приказана нека површина ΔS са које се емитује интензитет светлости I .



Слика 130. Луминанција или сјајност

Међутим, ако посматрач не посматра извор светлости у правцу нормале, већ под неким углом посматрања α , тада посматрач не „види“ стварну површину извора светлости, већ мању површину $\Delta S_n = \Delta S \cos \alpha$. Тада ћемо дефинисати луминанцију или сјај као:

$$L = \frac{I}{\Delta S_n} = \frac{I}{\Delta S \cos \alpha}. \quad (393)$$

Објективна мјерна јединица за луминанцију је $\left[\frac{W}{sr \cdot m^2} \right]$, док се субјективна мјерна јединица

назива „нит“ и једнака је $[nt] = \left[\frac{cd}{m^2} \right]$. Субјективност луминанције се може схватити кроз

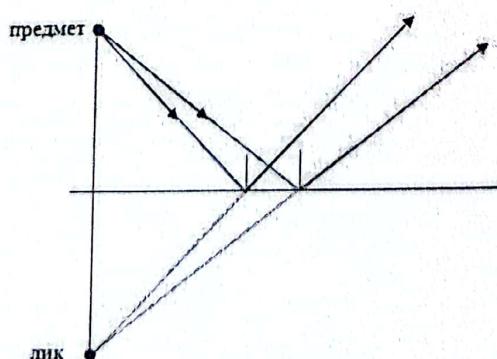
неколико примјера: када се возите аутомобилом ноћу, светлосни фарови аутомобила који се крећу из супротног правца ће вам вјероватно засметати (нарочито ако возач аутомобила који се креће у супрот вами укључи дуга светла), мада та иста укључена светла не сметају дању. Сличан ефекат се може примјетити ако се за вријеме сунчаног дана уђе у подрумске просторије које су освјетљене неким малим прозором. И тада ће вам светлост са малог прозора засметати. И један и други случај представљају примјере са релативно великим вриједностима луминанције, јер су површине извора светлости релативно мале, са релативно великим вриједностима интензитета светлости, док је наше око акомодирано на услове слабијег освјетљења. Драстичан примјер је покушај гледања у Сунце. Оно је извор веома великог интензитета светлости и релативно мале површине – што даје субјективан осјећај огромних вриједности луминанције, тако великих вриједности да могу изазвати и неспособљавајући ефекат (засљепљујући за посматрача). Овако велике вриједности луминанције изазивају рефлексно затварање ока, тако да је директно посматрање Сунца рефлексно онемогућено. Поред овога ниже вриједности луминанције такође могу иззврати и осјећај нелагоде.

9.4. Геометријска оптика

Геометријска оптика је област оптике која посматра простирање свјетlostи кроз различите средине искључиво уз помоћ геометријских законитости, не водећи при томе обзира о таласној природи свјетlostи. Због ове чињенице геометријска оптика не може да објасни дифракцију, поларизацију и интерференцију свјетlostи⁶⁷. Без обзира на ове недостатке, геометријска оптика је у стању да веома успјешно објасни простирање свјетlostи, формирање ликова на сферним и равним огледалима, сочивима, и осталим оптичким инструментима. Геометријска оптика уводи различите апроксимације и упрощења, које ћемо навести. Прва (груба) апроксимација је да свјетlosни зраци не утичу једни на друге. Ово наравно није тачно, јер је интеракција између свјетlosних зрака основа интерференције. Друга апроксимација је да се свјетlost простире праволинијски. Међутим, уколико је средина оптички нехомогена и локално (од тачке, до тачке) мијења свој индекс преламања – онда се свјетlost неће простирати праволинијски, већ криволинијски. Како свјетlosне зраке сматрамо (и цртамо) линијама, онда и свјетlosне изворе апроксимирамо тачкастим изворима. Наравно, ово није тачно, јер свјетlosни извори имају коначну запремину или површину са које се свјетlost еmitује. Може се рећи да је геометријска оптика гранични случај таласне оптике, када $\lambda \rightarrow 0$ (или када $\lambda \rightarrow \infty$), тј. када нема таласа!

9.4.1. Равна огледала

Равна огледала представљају равне површине које потпуно рефлектују свјетlost. Ако имамо тачкаст изотрапан хомоцентричан⁶⁸ извор свјетlostи (предмет), у око посматрача могу да дођу сви они зраци које површина отвора зјенице ока може да прими. Нека имамо такав флукс свјетlostи оивичен са два гранична свјетlosна зрака као на слици 131. По законима одбијања свјетlostи (362) упадни угао једнак је одбојном угулу и као што видимо, одбијени свјетlosни зраци се удаљују један од другог (дивергирају, тј. расипају се). Међутим, продужеци одбијених свјетlosних зрака се сакупљају у једној тачки, која представља лик предмета. Како се лик гради од продужетака зрака (од имагинарних, непостојећих – слику) предмета. Како се лик гради од продужетака зрака (од имагинарних, непостојећих – слику) предмета. Како се лик гради од продужетака зрака (од имагинарних, непостојећих – слику) предмета. Све ликове које ћемо убудуће добијати од имагинарних зрака граде имагинарне ликове.

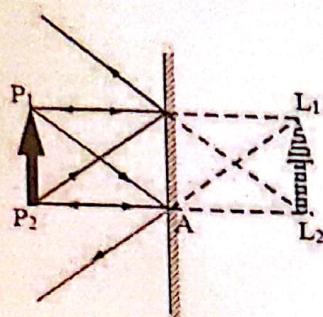


Слика 131. Формирање лика тачкастог предмета код равног огледала

⁶⁷ Овим феноменима ће бити више ријечи у глави 9.5.

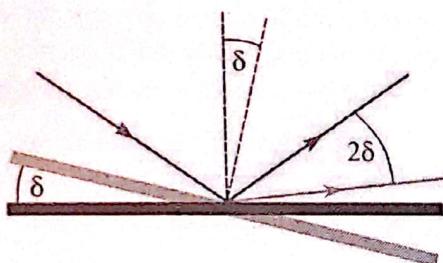
⁶⁸ Хомоцентричан извор свјетlostи се назива тако јер код ње свјетlost полази из једне тачке и шири се на све стране једнако.

Све што вриједи за једну тачку, вриједи и за низ тачака – тако да ће огледало рефлектовати дуж облика стрелице на начин као што је приказано на слици 132.



Слика 132. Формирање лика стрелице у равном огледалу

Предмет и лик су у симетричном односу, која се и назива огледалска симетрија. У овој врсти симетрије лијева и десна страна мијењају мјесто. На примјер, када стојимо испред огледала и подигнемо нашу десну руку, наш лик у огледалу ће подићи своју лијеву руку. Ово нам је познато, мада нисмо свјесни чињенице да уствари посматрамо свој лик који је огледалски симетричан. Равна огледала су нашла велики број примјена, а једна интересантна је кориштење огледала за мјерење малих углова⁶⁹. На слици 133 видимо упадни свјетлосни зрак који пада под неким углом на равно огледало. Ако не мијењамо упадни правац свјетлосног зрака, већ закренемо огледало за неки мали угао δ , онда ће рефлектовани свјетлосни зрак бити закренут за двоструки угао 2δ .

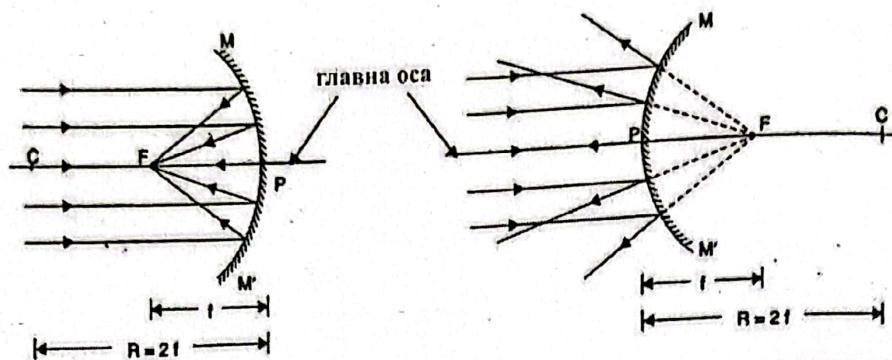


Слика 133. Кориштење равног огледала за мјерење малих углова

9.4.2. Сферна огледала

Сферна огледала представљају закривљене рефлексивне површи које су добијене као исјечак сфере. Међутим, рефлексивна страна може бити на унутрашњој или спољашњој страни сфере, као што је приказано на слици 134, па разликујемо конкавна (удубљена) и конвексна (испуњена) огледала.

⁶⁹ Ако уврћемо металну жицу за неки мали угао, један од начина да измјеримо угао увртања је да на жицу причврстимо огледало и усмјеримо лазерски зрак на њега. На неком заклону тада можемо посматрати рефлектован лазерски зрак и измјерити угао увртања. Један од познатих примјена је Кевендишев експеримент у којем је он користећи равно огледало мјерио мале углове увртања жице и на тај начин одредио гравитациону константу.



Слика 134. Удубљена или конкавна (лијево) и испупчена или конвексна огледала (десно)

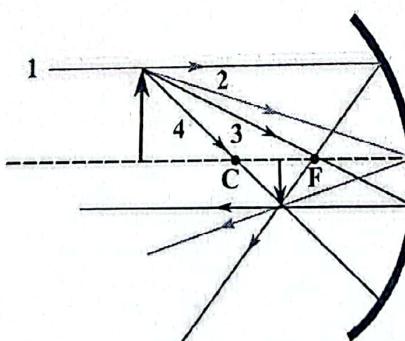
Посматрајмо удубљено огледало на лијевој страни слике 132. Код њега ће се сви паралелни зраци одбити од удубљене рефлексионе површине на такав начин да ће се скupiti у једној тачки (зраци конвергирају у тачку). Ова тачка се назива жижка или фокус, а удаљена је од огледала за величину која се назива жижна даљина f . Како је огледало само исјечак сфере чији је полупречник једнак R , видимо да се жижка налази тачно на половини полупречника сфере, тј.:

$$f = \frac{R}{2}. \quad (394)$$

Горњи израз је универзалан и важи за сва сферна огледала.

Ако посматрамо простирање паралелних зрака које наилазе на испупчено огледало (слика 134, десно), видимо да се они рефлектију на такав начин да се зраци расипају (дивергирају). Међутим, ако замислимо продужетке ових зрака на супротну страну (имагинарне зраке), они ће се скupiti такође у једну тачку – жижу испупченог огледала.

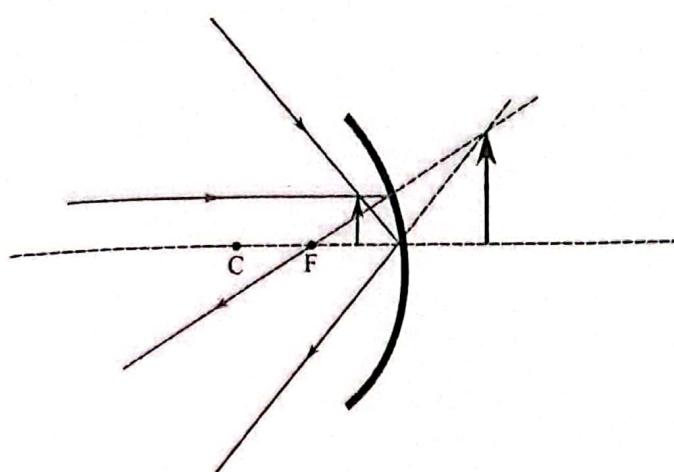
Конструкција лика код сферних огледала базира се на 4 карактеристична свјетлосна зрака, који су приказани на слици 135.



Слика 135. Карактеристични зраци при конструкцији лица код сферних огледала

Први зрак (1) се простире паралелно оптичкој оси и одбија се тако што пролази кроз жижу сферног огледала. Други зрак (2) се одбија од тјемена осе сферног огледала на такав начин као да је у тој тачки сферно огледало – равно огледало. Свјетлосни зрак (3) пролази кроз жижу сферног огледала и одбија се паралелно са оптичком осом. Можемо примјетити да су свјетлосни зраци (1) и (3) један другом инверзни. На крају, зрак (4) пролази кроз центар сфере чије је сферно огледало исјечак. Због тога се свјетлосни зрак када дође до огледала одбија назад под правим углом (јер свјетлосни зрак пролази кроз центар сферног огледала). Најчешће је за конструкцију лица довољно повући и само два карактеристична зрака.

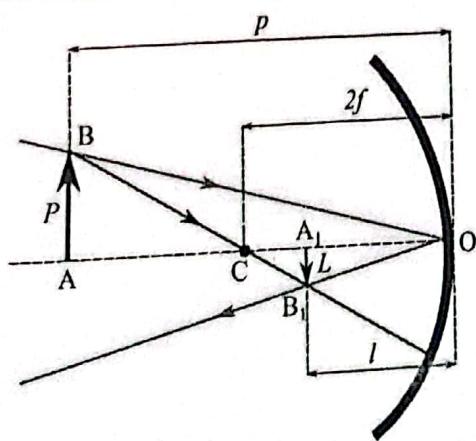
Примјер са слике 135 нам показује да је лик реалан (јер је добијен од реалних зрака, а не од његових продужетака), обрнут (изврнут) и умањен. Примјер у којем се добија имагинаран лик код удубљеног сферног огледала је приказан на слици 136. Имагинарне ликове не можемо пројектовати на неко платно, јер су добијени од продужетака реалних светлосних зрака.



Слика 136. Формирање имагинарног лика код сферних огледала

Са горње слике видимо да ће се имагинарни ликови код удубљених сферних огледала добити уколико се предмет смјести између огледала и жиже. Осим што је имагинаран, лик је увећан и усправан.

Да бисмо извели једначину огледала посматрајмо слику 137, на којој је предмет величине P и на којој се формира умањен, реалан и обрнут лик величине L .



Слика 137. Извођење једначине огледала

Из сличности троуглова ΔOAB и ΔOA_1B_1 можемо закључити да је:

$$\frac{L}{P} = \frac{l}{p}. \quad (395)$$

Такође, из сличности троуглова ΔA_1BC и ΔCAB видимо да је:

$$\frac{L}{P} = \frac{2f - l}{p - 2f}. \quad (396)$$

Како су лијеве стране једначина (395) и (396) једнаке, изједначавањем њихових десних страна након краћег сређивања добијамо да је:

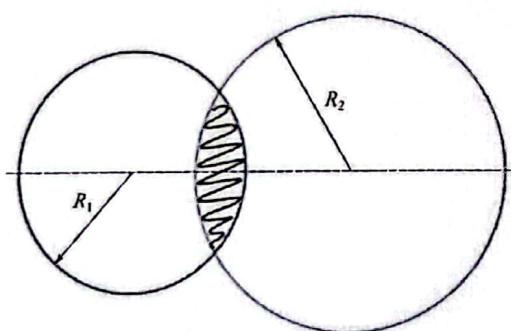
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}, \text{ или } \frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}. \quad (397)$$

Горњи израз представља једначину огледала.

9.4.3. Сочива

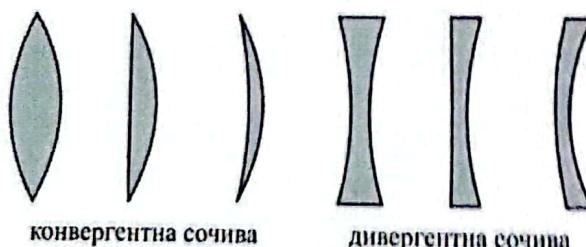
Сочива представљају провидна геометријска тијела која на специфичан начин преламају свјетлост. Сочива можемо добити ако направимо пресијек двије сфере, као што је то приказано на слици 136. На примјеру са слике, сочиво је добијено као пресијек двије неједнаке сфере, једна сфера је полупречника R_1 , док је друга сфера полупречника R_2 . У овом случају сочиво се назива биконвексно (јер је испупчено са обје своје стране).

Међутим, сочива могу настати и на другачије начине као што су: пресијецањем равни са сфером; празан простор између двије сфере које се не додирују; празан простор између двије неједнаке сфере од којих је једна сфера постављена у унутрашњост друге, итд. Тако осим биконвексних сочива разликујемо планконвексна, конкавно-конвексна, биконкавна, планконкавна, конвекс-конкавна. Овим редом су ове врсте сочива приказане на слици 138, гледајући од лијеве ка десној страни.



Слика 138. Сочиво добијено као пресјек двије сфере

Прва три сочива на слици 139 су конвергентна сочива, што значи да се паралелни свјетлосни зраци након преламања на сочиву сабирају у једну тачку (конвергирају), док су преостала три сочива дивергентна – тј. она се након проласка свјетлости кроз сочиво расипају (дивергирају).



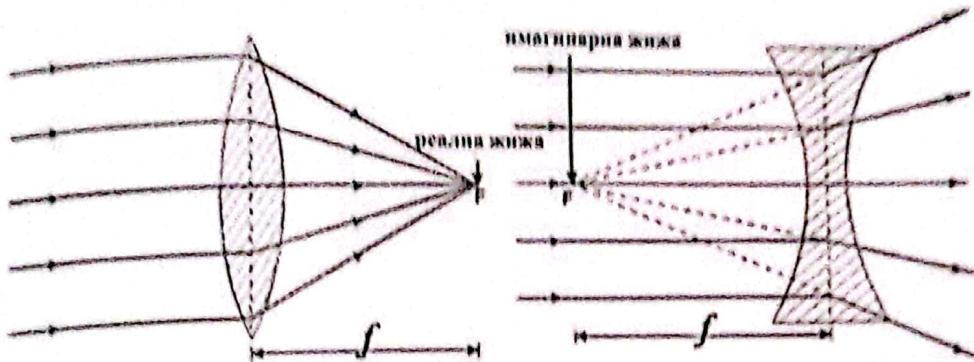
Слика 139. Врсте сочива

Реални свјетлосни зраци код конвергентних сочива формирају реалну жижу, док се код дивергентних сочива формира имагинарна жижка (јер је формирана од продужетака реалних зрака, тј. од имагинарних зрака), слика 140. Удаљеност жиже од сочива се назива

која је дужина и означава се са f . Инверзна вриједност жижне дужине се назива оптичка рефрактна сочива:

$$D = \frac{1}{f}, \quad (398)$$

амјери се у дипотријама $[D] = [\text{m}^{-1}]$.

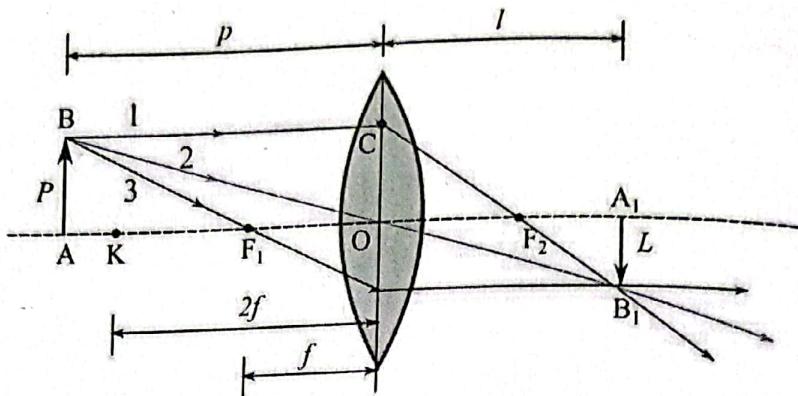


Слика 140. Конвергентна и дивергентна сочива

На слици 140 се види да се свјетлосни зраци не преламају одмах на улазу у сочиво, већ на једној замишљеној средњој линији сочива. Ово наравно није тачно, јер се свјетлосни зраци преламају и мијењају свој правац на граничној површини, сочиво – спољашња средина. На тај начин свјетлосни зраци се на реалним сочивима преламају два пута – једном при улазу а други пут при излазу свјетлосног зрака из сочива, али је због једноставности узета апроксимација да се свјетлосни зрак прелама само једном, на средини сочива. Ова апроксимација је одговарајуће прихватљива само за веома танка сочива, док се за дебела сочива морају урачунати поправке због двоструког преламања свјетлости. Дебела сочива имају много недостатака сочива (аберације), али о њима ће бити ријечи мало касније.

9.4.4. Карактеристични зраци и једначина сочива

Карактеристични зраци за конструкцију лика код сочива су приказани на слици 141. Предмет величине P формира лик величине L помоћу 3 карактеристична зрака. Први свјетлосни зрак полази паралелно са осом сочива и након преламања пролази кроз жижу F_2 . Други свјетлосни зрак пролази кроз центар сочива без преламања. Трећи свјетлосни зрак пролази кроз жижу F_1 и након доласка и преламања на сочиву простире се паралелно са оптичком осом сочива. Овај зрак је инверзан првом свјетлосном зраку.



Слика 141. Карактеристични свјетлосни зраци и формирање лика

На слици је поред удаљености жижа од сочива f означена и карактеристична тачка (К) која се налази на двострукој жижној даљини од сочива. Удаљеност предмета од сочива је означено са p , док је удаљеност лика од сочива означено са L .

Ако упоредимо троуглове ΔOAB и ΔOA_1B_1 видимо да је:

$$\frac{L}{P} = \frac{l}{p}. \quad (399)$$

Ако са друге стране упоредимо троуглове ΔOCF_2 и $\Delta F_2A_1B_1$ добијемо да је:

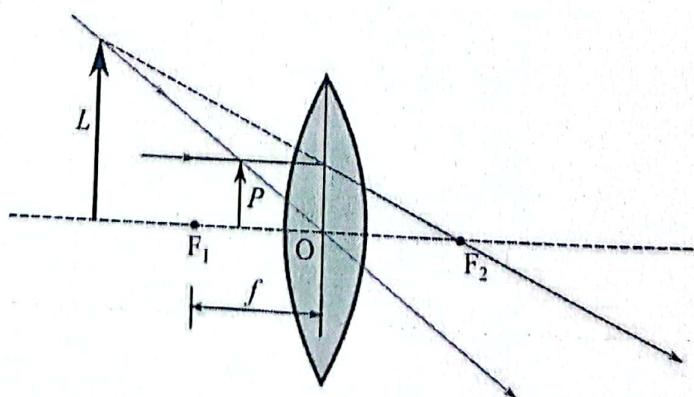
$$\frac{L}{P} = \frac{l-f}{f}. \quad (400)$$

Када упоредимо десне стране израза (399) и (400), јер су лијеве стране једнаке, добијемо:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}. \quad (401)$$

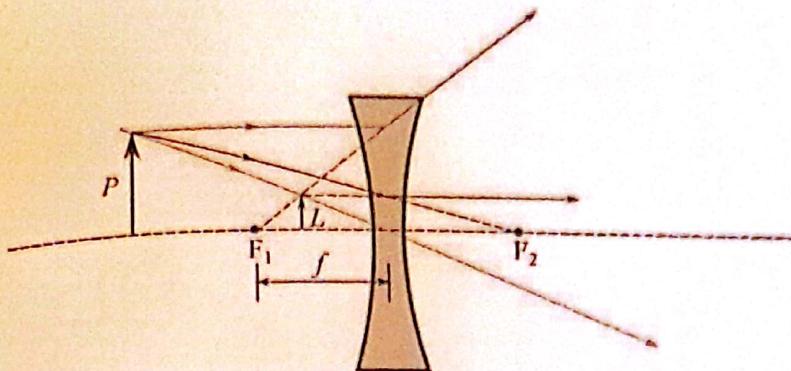
Горњи израз представља једначину сочива и видимо да је потпуно једнак изразу за једначину сферних огледала (осим што је код сферних огледала дефинисана веза између жижне даљине сочива и полупречника сфере чији исјечак представља сферно огледало).

Лик на слици 141 је добијен од реалних зрака, тј. лик је реалан. Такође видимо да је лик умањен, обрнут и са супротне стране сочива у односу на предмет. Исто сочиво може градити и имагинаран, усправан и увећан лик – ако се предмет постави између жиже и сочива, као на слици 142.



Слика 142. Лупа

Сочиво на овај начин служи као луна или повећало, о којем ће бити ријечи нешто касније. Дивергентна сочива расипају зраке, али њихови продолжеци се састају, као што је приказано на слици 143. Лик је као што се са слике види умањен, усправан, имагинаран и са исте стране сочива као и предмет.



Слика 143. Карактеристични зраци и формирање лика код дивергентног сочива

Анализирајмо једначину сочива (401) $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$ и узмимо да се предмет налази између

жиже F и карактеристичне тачке K , тј. $f < p < 2f$. Као што видимо, код сабирног сочива лик ће бити реалан, обрнут и са друге стране сочива у односу на предмет. Међутим, не знамо да ли ће лик бити увећан или умањен? Одговор на ово ћemo добити уколико предмет тежи једној граници горњег условия, тј. предмет тежи ка жижи, $p \rightarrow f$. У том случају ће $l \rightarrow \infty$. Ово је очекиван резултат, јер као што знамо свјетлосни зрак који пролази кроз жижу, након преламања се мора простирати паралелно са оптичком осом сочива – тј. никада је ће пресејти нити формирати лик. Ако уврстимо другу границу, тј. ако $p \rightarrow 2f$, увршавањем овог условия у (401) закључујемо да ће l из бесконачности тежити ка $2f$, тј. биће $l > 2f$. Знајући услов (399) и резултат ове анализе тј. када $f < p < 2f$, да се лик формира $2f < l < \infty$, закључујемо да је у том случају сигурно лик увећан, тј. $L > P$.

Анализу случаја када је предмет постављен иза карактеристичне тачке K , тј. $p > 2f$ (што је управо представљено на слици 141) можемо анализирати на сличан начин, увршавајући ову границу у једначину сочива (401), међутим можемо искористити и сљедећу чињеницу. За простирање свјетlostи кроз сочivo вриједи закон реципроцитета. То значи да када би замјенили предмет и лик – свјетлосни зраци би се простирали потпуно истим путем, само би смјер простирања био супротан. Дакле, уколико поставимо $p > 2f$, онда мора да важи даје и $f < l < 2f$. Из условия (399) закључујемо да ће лик бити умањен, тј. $L < P$.

На крају остаје да видимо шта ће се десити ако се предмет постави управо у карактеристичну тачку K , тј. ако је $p = 2f$. У том случају једино рјешење је да се лик формира са друге стране сочива такође у карактеристичној тачки, тј. $l = 2f$. Услов (399) нам тада даје да је $L = P$. Лик остаје реалан, обрнут и са супротне стране сочива.

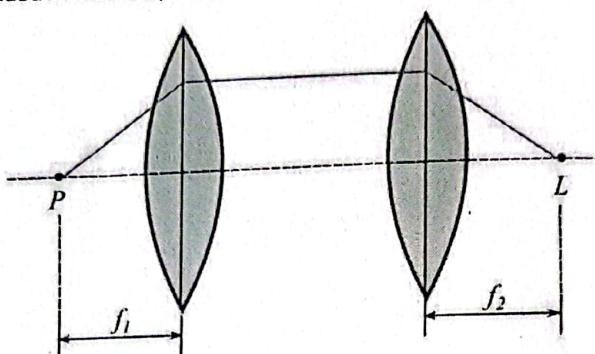
Погледајмо још једном слику 138, која представља биконвексно сочиво добијено пресјеком две сфере. Полупречници сфера R_1 и R_2 фигуришу у оптичарској једачини сочива⁷⁰:

⁷⁰ Назив потиче од чињенице да оптичари користе ову једначину за прављење сочива.

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (402)$$

где су: n_2 - индекс преламања материјала од којег је сочиво начињено, n_1 - индекс преламања околине (нпр. ваздуха). Код планконвексних (или планконкавних) сочива раван која пресеца сферу је представљена и узразу као бесконачно велика сфера, тј. $R \rightarrow \infty$.

Израз (398) представља оптичку јачину сочива. При слагању сочива њихове јачине се алгебарски сабирају, тако што су сабирна сочива представљена са позитивним вриједностима оптичких јачина, а расипна сочива са негативним вриједностима оптичких јачина. Ово ћемо доказати помоћу слике 144.



Слика 144. Слагање сочива

Нека се предмет (тачка P) постави управо у жижу првог сочива, чија је жижна даљина f_1 , што значи да је $p = f_1$. Познато је да ће овај зрак који полази из жиже, након преламања на првом сочиву, да се простира паралелно са оптичком осом. Међутим паралелни зрак који наилази на друго сочиво мора након преламања да прође кроз жижу другог сочива. То значи да је $l = f_2$. Када уврстимо вриједности за p и l у једначину сочива (401), добијемо:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (403)$$

Горњи резултат можемо генерализовати на систем од n паралелно постављених сочива, тј.:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_n}, \quad (404)$$

или горњи израз се може написати као:

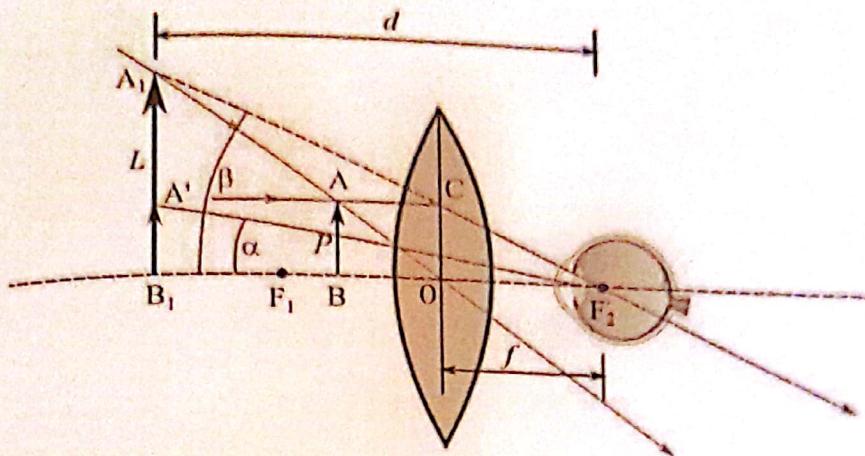
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n, \quad (405)$$

што представља доказ о алгебарској адитивности оптичких јачина сочива⁷¹.

⁷¹ Ова законитост нам омогућава да „поправимо“ вид код далековидних или кратковидних људи, али и остала недостатке сочива људског ока. Наиме, здраво људско око има око 59 диоптрија, тј. при овој јачини сочива формира се оштар лик на жутој мрљи ока. Уколико сочиво људског ока не може да формира оштар лик на жутој мрљи него мало прије жуте мрље у унутрашњости ока (или мало послиje жуте мрље, изван ока) – испред њега поставимо сочиво које ће помјерити жижну даљину тако да се формира лик тачно у жутој мрљи ока.

9.4.5. Лупа и микроскоп

На слици 140 смо већ приказали лупу где смо видјели да ће се увећан, имагинарен и усправан лик формирати са исте стране сочива само уколико се предмет постави између жиже и сочива. Нека се оштар лик формира од ока на удаљености d , као што је приказано на слици 145.



Слика 145. Увећање код лупе

Беличина d се назива и даљина јасног вида и код здравог ока износи око 25 см. Ако дефинишемо угао α као угао под којим се предмет види на даљини јасног вида, а угао β као онај угао под којим се предмет због сочива лупе види увећан, онда се може дефинисати увећање:

$$u = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (406)$$

Пошто су углови α и β мали углови, онда вриједи да је:

$$\tan \beta = \frac{L}{d} \approx \beta, \quad (407)$$

$$\tan \alpha = \frac{P}{d} \approx \alpha. \quad (408)$$

Ако уврстимо (407) и (408) у (406) добијемо да је увећање једнако:

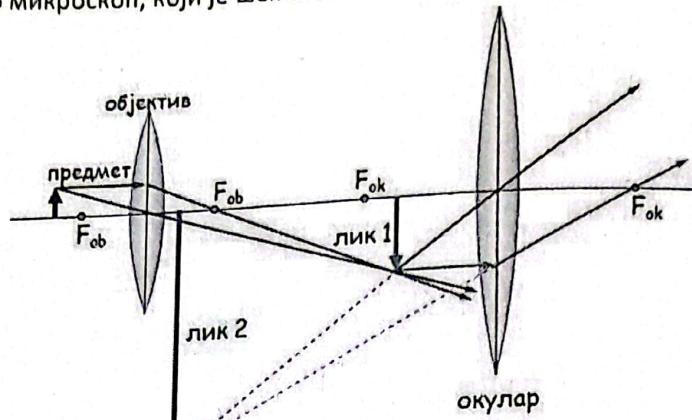
$$u = \frac{L}{P}. \quad (409)$$

Ово је и очекивано (и раније дефинисано) увећање. Како су троуглови ΔBRF_2 и ΔCOF_2 слични, видимо да је:

$$u = \frac{L}{P} = \frac{d}{f}, \quad (410)$$

Из израза (410) видимо да је увећање лупе веће уколико је жижна даљина сочива лупе мања (јер на даљину јасног вида не можемо утицати и она је приближно константна). Дакле, ако желimo што веће увећање код лупе – морамо да имамо јаче сочиво, али онда настаје проблем како „смјестити“ предмет на тако мале удаљености између сочива и жиже (јер

једино тада сочиво лупе увећава и гради имагинарни, увећан лик)? У том случају јамјесто лупе користимо микроскоп, који је шематски приказан на слици 146.



Слика 146. Шема микроскопа

Микроскоп се састоји од два сочива: окулара (очиво које се налази до ока посматрача) и објектива (очиво које се налази до објекта посматрања). Сочиво објектива је обично много јаче од сочива окулара (што се види и на слици 146, јер је жижна даљина код објектива мања од жижне даљине код окулара). Оба сочива се налазе у једној цијеви која се назива тубус и чија је дужина једнака t . Као што видимо са слике, објектив је сабирно очиво, а објекат посматрања (предмет) је постављен иза жиже – тако да се формира реалан, увећан и обратут лик. Микроскоп је конструисан на такав начин да лик формиран од објектива пада између жиже и сочива окулара – што значи да окулар има улогу лупе! Из претходне дискусије о лупи одмах можемо написати увећање окулара:

$$u_{ok} = \frac{d}{f_{ok}}. \quad (411)$$

Како је сочиво објектива веома јако, то значи да је жижна даљина објектива веома мала, а како се лик формиран од стране објектива формира између жиже и сочива окулара (које је такође прилично јако сочиво), можемо са великом оправданошћу тврдити да је дужина на којој се формира лик објектива приближно једнака дужини тубуса. У том случају је увећање објектива једнако:

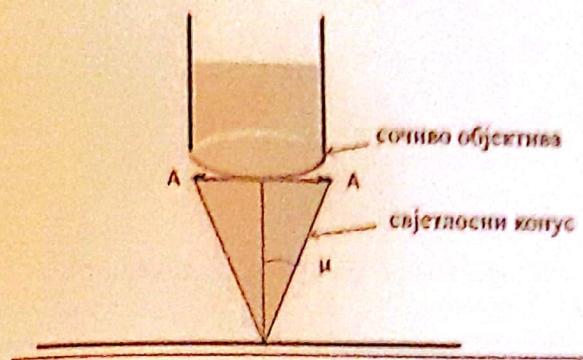
$$u_{ob} = \frac{t}{f_{ob}}. \quad (412)$$

Укупно увећање микроскопа се дефинише као производ увећања објектива и окулара:

$$u = u_{ob} \cdot u_{ok} = \frac{td}{f_{ob} f_{ok}}. \quad (413)$$

Из горњег израза закључујемо да је увећање микроскопа веће што су сочива окулара и објектива оптички јача, а тубус већи. Наравно, и овдје постоје ограничења код максималног увећања микроскопа, а узроковано је таласном природом свјетlostи, тј. оптичким „прозором“ нашег ока. Наше око је способно да види у опсегу таласних дужина од 400 – 800 nm. У наредној глави ћемо се упознати са таласним својствима и дифракцијом свјетlostи, а управо појава дифракције лимитира оптичке микроскопе на резолуцију од око 200 nm или половину најкраћих таласа које је људско око у стању да види.

На слици 147 је приказан максимални конус свјетlostи који може да уђе у микроскоп. Он је дефинисан величином која се назива нумеричка апертура⁷².



Слика 147. Нумеричка апертура

Наравно, више свјетlostи ће ући уколико је шири отвор сочива објектива (па ће бити и већи конусни угао μ). Нумеричка апертура (NA) се дефинише као:

$$NA = n \sin \mu, \quad (414)$$

где је n индекс преламања средине кроз коју свјетlost улази и која је најчешће ваздух. Сада видимо да се нумеричка апертура може повећати уколико користимо средину већег индекса преламања између објекта посматрања и сочива објектива. Уколико је то технички изводиво – објекат посматрања се урони у имерзионе течности (течности које имају велики индекс преламања). Поред тога, као што је речено, таласна дужина свјетlostи у којој се објекат посматра је исто тако ограничавајући фактор. Нека је са величином δ дефинисана најмања удаљеност између двије тачке које посматрамо микроскопом, али тако да их још увијек видимо раздвојене. Због таласних својстава свјетlostи и дифракционих ограничења очигледно је $\delta \sim \lambda$. Што је мања величина δ – већа је резолуција микроскопа. Резолуцију микроскопа можемо повећати посматрањем са мањим таласним дужинама, тако да је могуће разлагања (резолуција) микроскопа:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{NA}{\lambda} = \frac{n \sin \mu}{\lambda}. \quad (415)$$

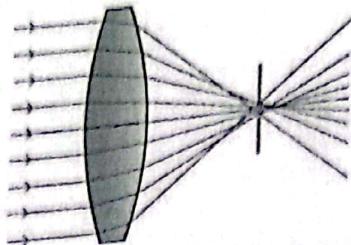
9.4.6. Недостаци сочива

Модел сочива претпоставља да је сочиво танко, док у реалности сочиво има коначну дебљину. Због тога сочива испољавају одређене недостатке или аберације. Без улажења у детаље, набројаћемо најчешће аберације сочива:

- Сферна аберација – је директна посљедица неједнаке дебљине сочива на његовим крајевима и средини сочива. Због тога се паралелни сноп свјетлосних зрака који пролази на средини слабије прелама од свјетлосних зрака који пролазе на крајевима сочива, слика 148. Овај недостатак се може уклонити ако се улазни свјетлосни сноп сузи (нпр. помоћу бленде или дијафрагме), али тада се губи дио информација коју свјетlost преноси. Други метод је да се комбинују сабирно и

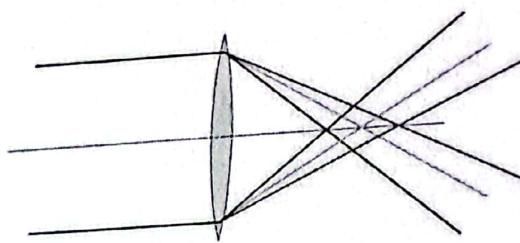
⁷² Нумеричка апертура није важна само код микроскопа, већ и код оптичких влакана (слика 118). Видимо да је и код влакана битно имати што већу нумеричку апертуру, али је она ограничена максималним углом под којим свјетlost може да уђе, али да би се и даље тотално рефлектовала.

расипно сочиво, које су начињени од материјала различитих индекса преламања. Оваква сочива се називају асферична.



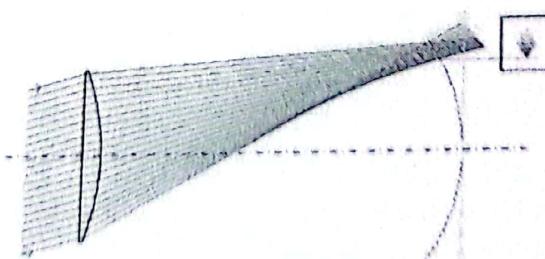
Слика 148. Сферна аберација

- Хроматична аберација – се догађа због тога што је индекс преламања функција од таласне дужне $n = n(\lambda)$, па ће се различите боје и различито преламати, слика 149. Рјешење је комбинација сабирног и расипног сочива сачињених од двије врсте стакла (кровн стакла са релативно малим индексом преламања и флинт стакла са релативно великим индексом преламања), а овако начињено сочivo се назива ахроматично сочиво.



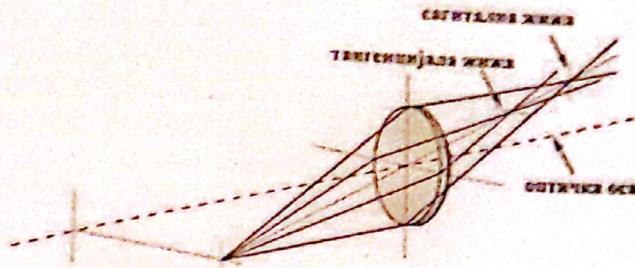
Слика 149. Хроматична аберација

- Кома – је абеарација која се примјећује код косог спонга паралелних свјетлосних зрака. Након преламања кроз сочиво, формира се лик који личи на комету (због појаве репа – попут репа код комете), па је отуда и назив кома, слика 150. Оптички системи за минимизацију овог ефекта излазе из оквира овог курса.



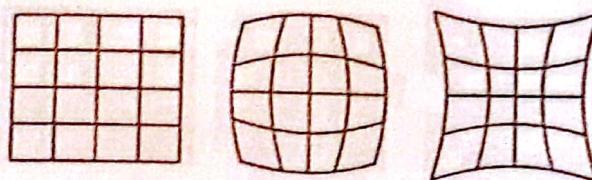
Слика 150. Кома

- Астигматизам – представља недостатак сочива који се огледа у неједнаком положају жиже код различитих упадних свјетлосних равни која долазе на сочиво, слика 151. Сочиво са овим недостатком формира двије различите жиже (тангенцијалну и сагиталну), тако да лик неће бити оштар. Овај недостатак се отклања комбинацијом сочива.



Слика 151. Астигматизам

- Дисторзија – је недостатак сочива који се огледа у томе да ће лик усправног предмета бити искривљен. На примеру са слике 152 се види да ће слика предмета мреже код сочива које имају овај недостатак бити испупчена или удубљена.



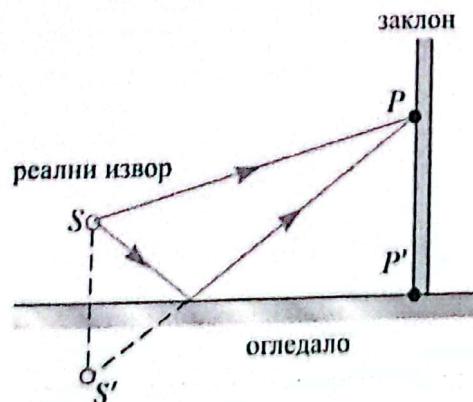
Слика 152. Дисторзија сочива

9.5. Таласна оптика

Како што је раније назначено, таласна оптика може да објасни интерференцију, дифракцију и поларизацију светлости, за разлику од геометријске оптике. У глави 6.4 је било ријечи о механичким таласима и њиховој суперпозицији (или сабирању). У суштини, интерференција и дифракција се своде на суперпозицију кохерентних таласа.

9.5.1. Интерференција светлосних таласа

Кохерентни таласи, о којима је већ било ријечи у Глави 6.4, су таласи који су истих фреквенција и амплитуда, али имају одређену разлику у фази (или у путној разлици) – која се одржава у времену. Светлосне кохерентне таласе је прилично лако добити, слика 153.



Слика 153. Добијање кохерентних извора светлости

На слици видимо извор свјетлости S који има имагинаран лик S' . Ова два извора су кохерентна, јер су потпуно идентични, али не долазе са истог мјеста, па су фазно (и путно) помјерени. Са слике је одмах уочљиво да ће до тачке P (у којој желимо да видимо резултат интерференције ова два свјетлосна зрака) свјетлосни зрак из извора свјетлости S прећи краћи пут него свјетлосни зрак који полази из имагинарног извора свјелости S' . Уз то, овај други свјетлосни зрак се одбија од огледала и при томе долази до фазног помјерања за π (Глава 6.5, слика 75). Иако су свјетлосни таласи другачији по својој природи од механичких таласа, резултат интерференције и једних и других таласа у тачки P зависи од разлике путева δ коју ова два кохерентна таласа пређу. Уколико је путна разлика једнака цјелобројном производу таласних дужина свјетлости:

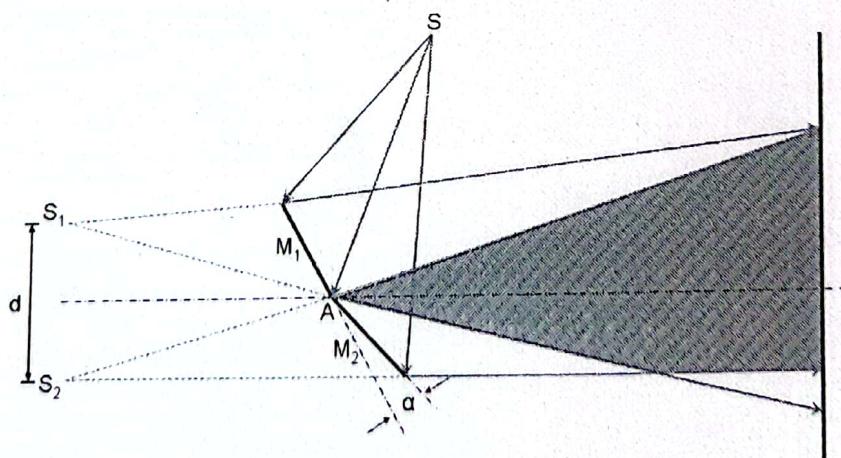
$$\delta = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (416)$$

долази до максималног појачања свјетлости у посматраној тачки P .
Уколико је путна разлика једнака непарном производу половина таласних дужина свјетлости:

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (417)$$

долази до максималног слабљења (или гашења) свјетлости у посматраној тачки P . Изрази (416) и (417) су општи изрази за интерференцију свјетлосних таласа и примјенићемо их на неколико примјера.

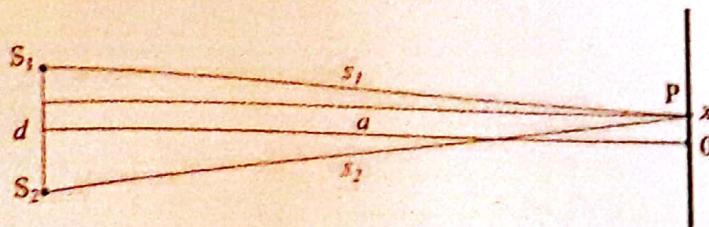
Френелова огледала представљају први пример на којима се лијепо може примјетити резултат интерференције свјетлости. Њих чине два огледала M_1 и M_2 која су међусобно закренута за неки мали угао α . Неки извор свјетлости S због мале закренутости огледала једног у односу на друго гради сва кохерентна имагинарна извора свјетлости, чију интерференцију на заклону посматрамо.



Слика 154. Френелова огледала

Да бисмо извели закључке о интерференцији Френелових огледала слику 154 ћemo нацртати на једноставнији начин, као што је приказано на слици 155. Нека је растојање од извора свјетлости S_1 до тачке P у којој желимо израчунати резултат интерференције једнако s_1 , и аналогно, нека је растојање од извора свјетлости S_2 до тачке P једнако s_2 . Растојање између свјетлосних извора је d , а средње растојање од тачке која полови растојање између свјетлосних извора до заклона једнако је a . На заклону смо ову тачку

означили као нулту (0), док је са x означено растојање од нулте тачке интерференције P .



Слика 155. Френелова огледала – слика уз извођење

На основу цртежа и Питагорине теореме видимо да је:

$$s_1^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2} - x \right)^2, \quad (418)$$

$$s_2^2 = a^2 + \left(\frac{d}{2} + x \right)^2. \quad (419)$$

Када одузмемо (418) од (419) и искористимо да је разлика квадрата $s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1)(s_2 + s_1)$, добијемо да је разлика путева δ два свјетлосна таласа једнака:

$$\delta = s_2 - s_1 = \frac{2d \cdot x}{s_2 + s_1}. \quad (420)$$

Како је угао закренутости једног огледала у односу на друго α веома мали, то значи да су имагинарни свјетлосни извори веома близки, тј. удаљеност d је веома мала у поређењу са удаљености од заклона a . У том случају су удаљености s_1 и s_2 приближно једнаке и можемо са добром апроскимацијом тврдити да је $s_2 + s_1 \approx 2a$. Тада израз (420) постаје:

$$\delta = s_2 - s_1 = \frac{d \cdot x}{a}. \quad (421)$$

Сада када знајмо чиме је једнака путна разлика, уврстимо горњи израз у услове (416) и (417) како бисмо добили једначине које дефинишу мјеста у којима ће резултат интерференције бити максимално појачање или слабљење свјетлосних таласа. Ако изједначимо (421) са (416) добијемо мјеста на којима се дешава максимално појачање свјетлосних таласа, тј.:

$$x_k = k \frac{a}{d} \lambda, \quad (422)$$

а када изједначимо (421) са (417) добијемо мјеста на којима се дешава максимално слабљење свјетлосних таласа, тј.:

$$x_k = (2k+1) \frac{a}{d} \frac{\lambda}{2}, \quad (423)$$

где су вриједности бројача $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

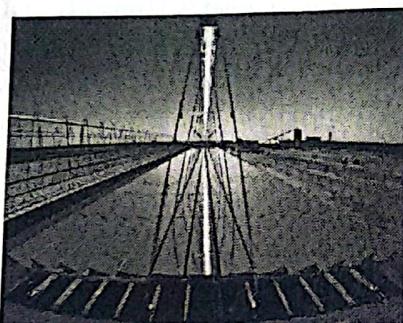
Резултат интерференције свјетлости код Френелових огледала ће бити наизмјеничне свјетле и тамне пруге, а мјеста њиховог позиционирања зависи од угла закренутости α (тј. удаљености између имагинарних извора d) и растојања од заклона a , али и од таласне дужине еmitоване свјетлости. Уколико на Френелова огледала долази монохроматска

свјетлост, ми можемо измјерити удаљености Δx узмеђу k -те и $k+1$ -ве свијетле (или тамне) пруге, тј. $\Delta x = x_{k+1} - x_k$. Када у овај израз убацимо (422) или (423) добијемо:

$$\lambda = \frac{d}{a} \Delta x, \quad (424)$$

тј. мјерењем Δx можемо помоћу Френелових огледала на једноставан начин измјерити непознату таласну дужину свјетlostи.

Френелова огледала су нашла практичну примјену у соларним електранама (слика 156), у којима се она помјерају уз помоћ рачунара и прате сунце на такав начин да се свјетlost максимално концентрише (услови максималног појачања свјетlostи) и повећава температуру медија (обично уља⁷³) на око 300 °C. Предност ових соларних електрана над уобичајеним соларним електранама које користе параболична сферна огледала је што су Френелова огледала равна (и јефтиња у изради) и знатно поједноствљују (и појефтињују) производњу.



Слика 156. Френелова огледала у соларним електранама

Сљедећи примјер интерференције свјетlostи је на танким слојевима. Један од (ружних) примјера представљају слојеви уља на води у језерима који потичу од загађења воде отпадним уљима, а како се уље и вода не мијешају, долази до формирања танког слоја уља на води. Резултат интерференције рефлектоване свјетlostи на овим танким слојевима видимо као дугине боје, слика 157.

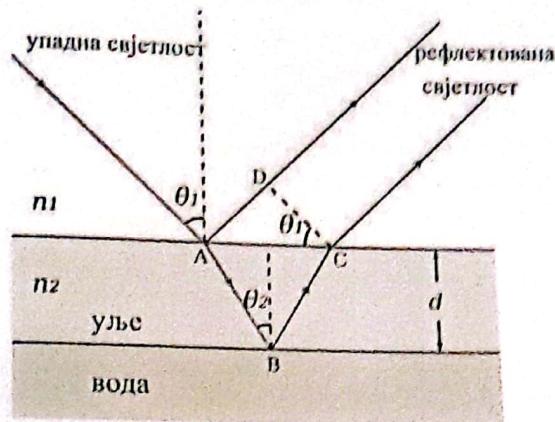


Слика 157. Интерференција рефлектоване свјетlostи од танког слоја уља на води

Када бисмо посматрали интерференцију монохроматске свјетlostи очигледно не бисмо видјели дугине боје, већ свијетле и тамне пруге (као код Френелових огледала). Упадни спон свјетlostи се једним дијелом рефлектује од горње површине уља, а једним дијелом

⁷³ Постоје варијанте соларних електрана са Френеловим огледалима које као радни медиј користе воду чијим се загријавањем вода претвара у презасићену пару на температури око 270 °C, а која затим покреће парну турбину. Инсталисане снаге су још увијек релативно мале (неколико MW), али се ове електране интензивно развијају и унапређују и очекују се у будућности повећања снаге.

преломи, па затим рефлектије од доње површине уља, као што је то приказано на слици 158.



Слика 158. Модел интерференције рефлектоване сјевтлости од танког слоја

Потребно је да израчунамо разлику путева између два сјевтлосна таласа. Са слике се види да је разлика путева првог таласа (који пређе дужину AD) и другог таласа (који пређе дужину ABC) једнака:

$$\delta = n \{ [AB] + [BC] \} - [AD] \pm \frac{\lambda}{2}. \quad (425)$$

Задњи члан је додат из разлога што приликом рефлексије првог сјевтлосног таласа од оптички гушће средине (уља) долази до промјене фазе за π (што је еквивалентно промјени дужине пута за пола таласа или $\frac{\lambda}{2}$). Дужина ABC пролази кроз уље и због тога се овај оптички пут множи са индексом преламања уља n . Са слике се види да је први члан:

$$n \{ [AB] + [BC] \} = \frac{2nd}{\cos \theta_2}, \quad (426)$$

Док се из троугла ΔABC може израчунати $[AC] = 2d \tan \theta_2$, па је дуж $[AD]$ једнака:

$$[AD] = 2d \tan \theta_2 \sin \theta_1. \quad (427)$$

Уврштавањем израза (426) и (427) у (425) као и замјеном израза за индекс преламања уља

$n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$, након сређивања добијемо да је:

$$\delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} \pm \frac{\lambda}{2}. \quad (428)$$

Горњи израз представља путну разлику рефлектованих таласа, која зависи од упадног угла и таласне дужине упадног монокроматског зрачења. Када уврстимо ову путну разлику у услов за максимално појачање таласа (416), добијемо:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad (429)$$

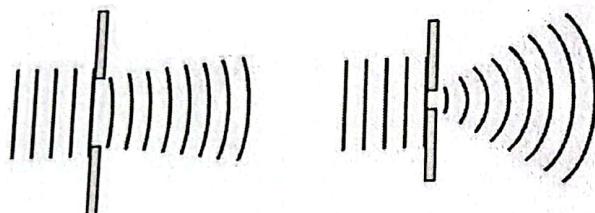
а када се (428) уврсти у услов за максимално слабљење таласа (417), добијемо:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i} = k\lambda. \quad (430)$$

Услови (429) и (430) дефинишу формирање интерференционих свијетлих (прецизније у боји мнохрмотаске свијетlostи) и тамних пруга рефлектоване свијетlostи од слоја уља на води. Међутим, када бисмо заронили под воду и посматрали интерференцију пропуштене свијетlostи, ови услови би били обрнути, тј. оно што би у рефлектованој свијетlostи била свијетла подручја, у пропуштеној свијетlostи би била тамна подручја и обрнуто. До ове промјене би дошло због тога што у изразу (425) не би било задњег члана $\frac{\lambda}{2}$, тј. код пропуштене свијетlostи не долази до промјене фазе за π (тј. помјерња таласа за пола таласне дужине).

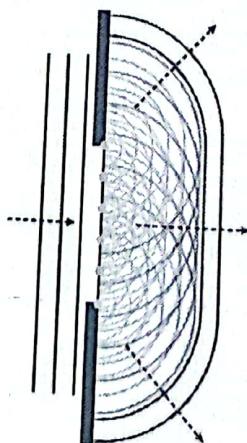
9.5.2. Дифракција свијетlosних таласа

Дифракција свијетlostи представља њено савијање приликом проласка кроз пукотину (или више пукотина). Свијетlost се савија под тачно одређеним угловима, који зависе од два параметра: таласне дужине свијетlostи и ширине пукотине (или пукотина). Експериментално је утврђено да је дифракција израженија (тј. скретање је јаче изражено) уколико је пукотина мања, што је приказано на слици 159.



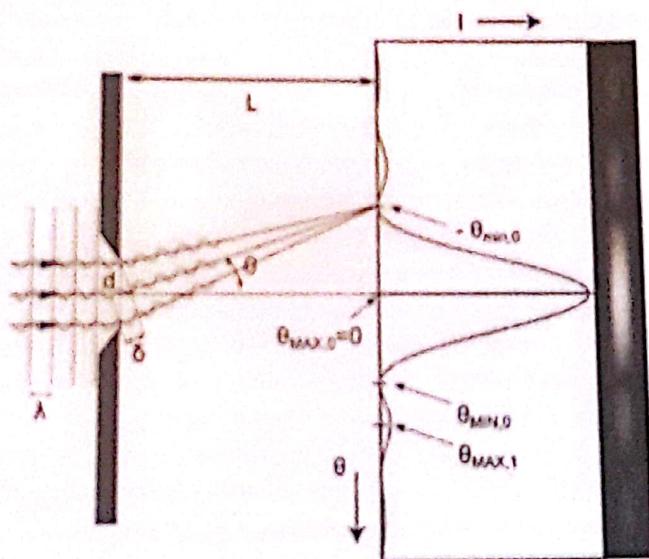
Слика 159. Дифракција је израженија уколико је отвор мањи

Зашто долази до дифракције свијетlostи? Одговор на ово нам даје Хејгенсов принцип који каже да приликом наиласка равних таласа на неки отвор (пукотину), свака тачка отвора (пукотине) постаје извор нових (или секундарних) таласа који се простиру на све стране једнако, слика 160. Затим ови таласи врше међусобну интерференцију. Они за то имају све потребне услове: кохерентни су и не долазе са истог мјеста. Резултати интерференције овако великог броја таласа су максимално појачање у одређеним правцима (дефинисаним условима за максимално појачање при интерференцији), али и њихово гашење у другим правцима (дефинисаним за максимално слабљење при интерференцији). Дакле, дифракција свијетlostи се заправо своди на њену интерференцију.



Слика 160. Хајгенсов принцип

разматраћемо дифракцију на једној пукотини, као и на дифракционој решетки (тј. дифракцију на великом броју пукотина). Када раван талас наилази на једну пукотину, резултат интерференције на неком заклону ће бити у виду низа максимума и минимума (појачања и гашења) свјетlostи као што је приказано на слици 161. На десној страни слике је приказан интензитет дифрактоване свјетlostи, где видимо да је централни (свијетли) дифракциони максимум највећег интензитета (што се могло и интуитивно очекивати), постоје мјеста која су тамна – тј. дифракциони минимуми, док су остали дифракциони максимуми мањег интензитета од централног максимума. Израчунаћемо услове за минимуме ако равни таласи монохроматске свјетlostи таласне дужине λ нађу на пукотину ширине d . Као што видимо са слике, лијево и десно од централног максимума стоје први дифракциони минимуми, тј. тамна мјеста на којима ће резултат интерференције равних таласа који скрену под углом θ бити једнак нули. На слици су приказана само три свјетlosна таласа (ради једноставности), међутим по Хајгенсовом принципу под углом θ скрене огроман број свјетlosних таласа (свака тачка пукотине постаје извор секундарних свјетlosних таласа који се простиру на све стране једнако). Од свих таласа посматрајмо први (са горње стране) и посљедњи (са доње стране). Међу њима постоји путна разлика δ , јер први талас није ни започео своје кретање под углом θ , док је посљедњи талас већ одмакао за δ .



Слика 161. Дифракција на пукотини

На пукотини ширине d имамо огроман број равних таласа, које можемо приказати на сљедећи начин:

$$y_{\omega} = y_{\omega 0} \sin(\omega t + \phi_i). \quad (431)$$

Како су сви равни таласи кохерентни, сви имају исте вриједности амплитуда $y_{\omega 0}$ и кружних фреквенција ω , али се међусобно разликују по фази ϕ_i . Када их све саберемо, добијемо:

$$y_{\omega} = \sum_{i=1}^n y_{\omega 0} \sin(\omega t + \phi_i), \quad n \rightarrow \infty. \quad (432)$$

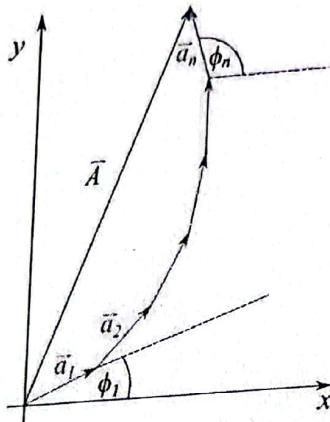
Овни збир можемо свести на збир од n вектора. Наиме, ако сваки талас прикажемо као вектор чији је модул једнак амплитуди, а нагиб вектора једнак фази, тада је резултантни вектор (тј. резултатни вектор који је једнак збиру од n вектора) приказан као на слици 162.

Са слике се јасно може предвидети да резултантни талас неће постојати уколико се сви вектори који се сабирају посложе тако да затворе пун круг. Тада ће резултантни вектор \vec{A} бити једнак нули, тј. тада ће се почетак првог вектора поклопити са крајем задњег вектора. Ово значи да ће фазна разлика између првог и задњег (n -тог) вектора бити једнака:

$$\Delta\phi_{1,n} = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (433)$$

У глави о таласима већ смо имали релацију (211) која је повезала фазну и путну разлику (тј. фазна разлика је једнака производу таласног вектора и путне разлике):

$$\Delta\phi_{1,n} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta. \quad (434)$$



Слика 162. Сабирање n таласа, као n вектора

Са слике 161 можемо видети да је путна разлика δ повезана са ширином пукотине d и углом скретања θ на сљедећи начин:

$$\delta = d \sin \theta. \quad (435)$$

Ако објединимо (433), (434) и (435) добијемо једначину дифракције на пукотини, која дефинише углове под којима ће се, као резултат интерференције великог броја кохерентних таласа, формирати тамна мјеста:

$$d \sin \theta = \pm k \lambda. \quad (436)$$

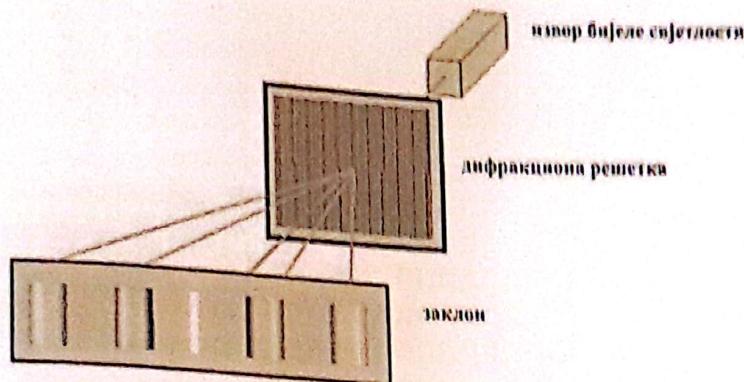
У једначини $\pm k$ преbroјава дифракционе минимуме на једну и другу страну од централног максимума. Већ за први минимум ($k = 1$), знајући да је $\sin \theta \in (-1; +1)$ видимо да је:

$$d \sim \lambda. \quad (437)$$

Горњи услов је заправо и кључан услов када ће се уопште моћи десити дифракција, тј. само ако су ширина пукотине и таласна дужина свјетlostи истог реда величине!

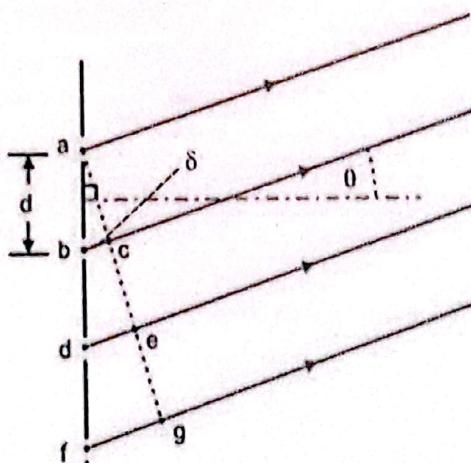
Дифракција на оптичкој решетки се разликује по томе што оптичку решетку чини велики број пукотина. Најчешће је решетка начињена тако што је на стаклену плочицу урезано (или „запарано“ дијамантским ножем) велики број паралелних линија (обично око 100 линија по милиметру). Овако густо распоређене линије се и не виде голим оком, али ако се на оптичку плочицу доведе сноп бијеле свјетlostи долази до дифракције као што је приказано на слици 63. Резултат дифракције бијеле свјетlostи су распоређени дифракциони максимуми у

дугим бојама (дисперзивни), осим централног максимума који остаје бијела светлост. Када би на оптичку решетку довели монокроматску светлост, дифракциони максимуми би били једнобојни, а били би и уско дефинисани (не би били „разливени“ у дугине боје као код дифракције бијеле светлости). Централни дифракциони максимум је највећег интензитета, док остали дифракциони максимуми опадају са интензитетом, како се удаљавају од централног дифракционог максимума.



Слика 163. Дифракција бијеле светлости на оптичкој решетки

Анализираћемо како долази до формирања дифракционих максимума. Свака пукотина дифракционе решетке постаје извор кохерентних извора светлости. Посматрајмо паралелан спон који скрене под углом θ у односу на нормалу на оптичку решетку. Ови кохерентни светлосни таласи су међусобно фазно помјерени, као што је то приказано на слици 164.



Слика 164. Путна разлика између сусједних светлосних таласа на оптичкој решетки

Посматрајући слику 164 можемо написати путну разлику између два сусједна кохерентна светлосна зрака:

$$\delta = d \sin \theta, \quad (438)$$

где је d - константа оптичке решетке (удаљеност између двије сусједне пукотине). Тада је фазна разлика између i -тог и $i+1$ -ог светлосног зрака једнака (аналогно изразу 434):

$$\Delta \phi_{i,i+1} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta, \quad (439)$$

И овдје се може интерференција кохерентних свјетлосних таласа свести на сабирање вектора, као што је то урађено код дифракције на једној пукотини. Међутим, сада нас интересују положаји максимума свјетlostи, тј. желимо знати услове када ће сабрани вектор бити највећи (или највећег интензитета). Када сабирамо N вектора, јасно је да је њихов збир највећи само ако су сви вектори које сабирамо колинеарни, а то значи да је фазна разлика између вектора сабирача једнака:

$$\Delta\phi_{i,i+1} = \pm 2n\pi, \quad (440)$$

где је $n = 0, 1, 2, \dots$

Када објединимо изразе (439) и (440), добијемо израз за дифракцију свјетlostи на оптичкој решетки:

$$d \sin \theta = \pm n\lambda. \quad (441)$$

За $n = 0$ формира се централни максимум (на слици 163 то је бијели централни максимум – он се формира као да нема оптичке решетке, или као да се дифракција није ни десила). За $n = 1$ формирају се дифракциони максимуми 1. реда (на слици 163 то су прве дуге са лијеве и десне стране од централног бијelog максимума), итд.

Оптичка решетка расипа (врши дисперзију) бијеле свјетlostи као и призма, али оптичка решетка то ради чак и боље! Наиме, скретање дугиних боја након дифракције на оптичкој решетки је линеарано за разлику од призме, где због облика призме зраци који се мање преламају (црвено) прелазе нешто мањи пут кроз призму од зрака који се јаче преламају (љубичаста) па прелазе дужи пут кроз призму – што може довести до одређене нелинеарности и издужења дугиних боја.

Колико „добро“ оптичка решетка врши дифракцију дефинише нам моћ разлагања, величина која је једнака изводу угла скретања по таласној дужини свјетlostи:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}. \quad (442)$$

Ако диференцирамо израз (441) и изразимо моћ разлагања:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{d \cdot \cos \theta}. \quad (443)$$

Како је угао скретања дифрактованих зрака релативно мали, то значи да је $\cos \theta \approx 1$. Тада се израз (443) своди на:

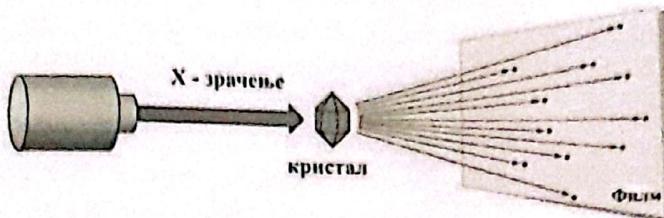
$$D \approx \frac{n}{d}. \quad (444)$$

Из горњег израза видимо да је оптичка решетка „боља“ уколико је већи ред дифракције. Међутим, као што знамо интензитет дифрактованих зрака јако опада са редом дифракције⁷⁴, па ће велику моћ разлагања имати решетке са малом константом оптичке решетке. Но и овдје треба бити пажљив, јер услов за дифракцију (437) мора остати у важности.

Овај услов да величина отвора или дифракционе решетке мора бити реда величине као и таласна дужина упадне свјетlostи искориштена је у кристалографији, где је X – зрачење искориштено за откривање унутрашњег распореда атома у кристалној решетки. Наиме,

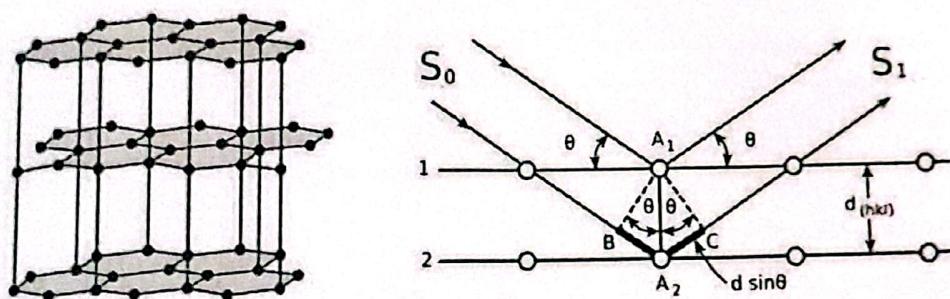
⁷⁴ Практично, обично су прва три реда дифракције довољно јасно видљива, код уобичајених оптичких решетки и свјетлосних извора већ четврти дифракциони максимуми се готово и не виде!

тадасна дужина λ – зрачења је реда величине $0,1 \text{ [pm]}$, што значи да би и отвори (или константа кристалне решетке) морали бити отприлике тог реда величине. И заиста, у кристалној⁷⁵ материји размак између кристалних равни је реда величине око $\sim 1 \text{ [pm]}$, што може довести до дифракције X –зрачења на кристалној решетки, слика 165.



Слика 165. Дифракција X –зрачења на кристалној решетки

Модел једне кристалне решетке је приказан на слици 166 (лијево) где се виде хоризонталне кристалне равни, чији међусобни размак чини константу кристалне решетке d на којима упадно X –зрачење дифрактује, што је приказано на слици 166 (десно).



Слика 166. Модел кристалне решетке (лијево) и дифракција на кристалним равнима (десно)

Дифракцију X –зрачења на кристалима су изучавали отац и син Браг, који су извели релацију за дифракцију:

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad (445)$$

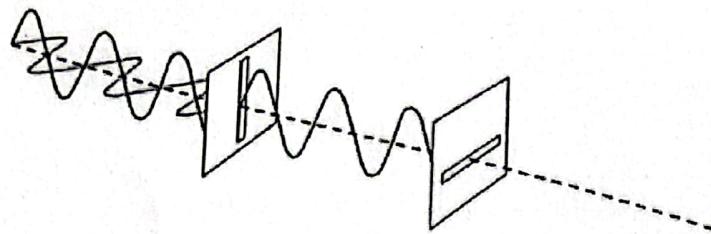
која се од израза (441) разликује само за фактор 2. Овде је d – константа кристалне решетке, која је на слици 166 означена са d_{hkl} , где hkl представљају такозване Милерове индексе⁷⁶ равни.

⁷⁵ Кристална структура је уређено чврсто стање, где су атоми распоређени у правилну форму кристалне решетке. У кристалографији се разликује 7 основних кристалографских система и на основу дифракције X –зрачења се може утврдити којем од ових 7 система припада испитивана материја.

⁷⁶ Милеровим индексима hkl означавамо равни у кристалима. Они се добију као најмањи међусобни односи реципрочних вриједности одсјечака равни у Декартовом простору. На тај начин вриједности hkl означавају одсјечке реципрочне равни у тзв. реципрочном простору. Како је кристал сачињен од великог броја еквивалентних равни –овољно је познавати само једну раван која има најмањи однос hkl , јер све остале се добију простим множењем свих Милерових индекса са неким мултипликатором.

9.5.3. Поларизација свјетлосних таласа

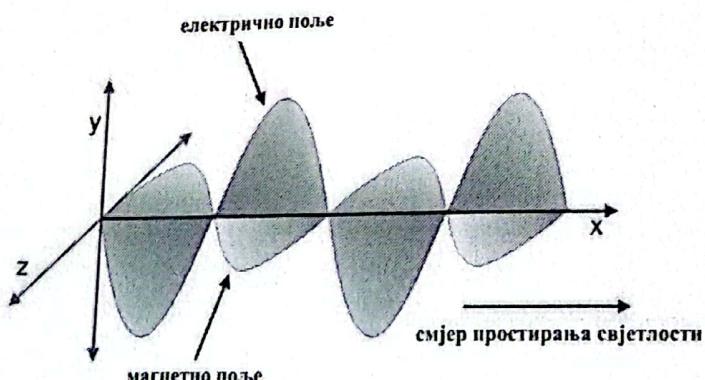
До сада смо утврдили да је свјетлост талас, јер испољава особине карактеристичне за таласе. У глави о таласима смо видјели да они могу бити трансверзални (осциловање се врши у равни нормалној на правца простирања таласа) или лонгитудинални (осциловање се врши у правцу осциловања таласа), а који су приказани на слици 70. За свјетлосне таласе је утврђено да они могу да се поларизују, тј. да се могу „укинути“ поједине осцилације на такав начин да остане само једна раван осциловања, као што је то приказано на слици 167.



Слика 167. Поларизација таласа

На горњој слици видимо да први прорез (који је вертикално усмјерен) омогућава пролаз само вертикалним осцилацијама. Након тога овакав талас називамо линеарно поларизован талас. Кажемо да је вертикални прорез извршио поларизацију неполаризованог таласа. Са слике видимо да када поларизован талас нађе на хоризонтално усмјерен прорез – талас ће се потпуно укинути и нестати. Поларизација лонгитудиналних таласа нема смисла, што значи да су свјетлосни таласи трансверзални таласи, јер могу да се поларизују.

Код свјетлосних таласа осцилују вектори електричног и магнетног поља у равни која је нормална на правец простирања свјетлосног таласа. Сваки осцилујући вектор електричног поља има своју компоненту осцилујућег вектора магнетног поља, слика 168.



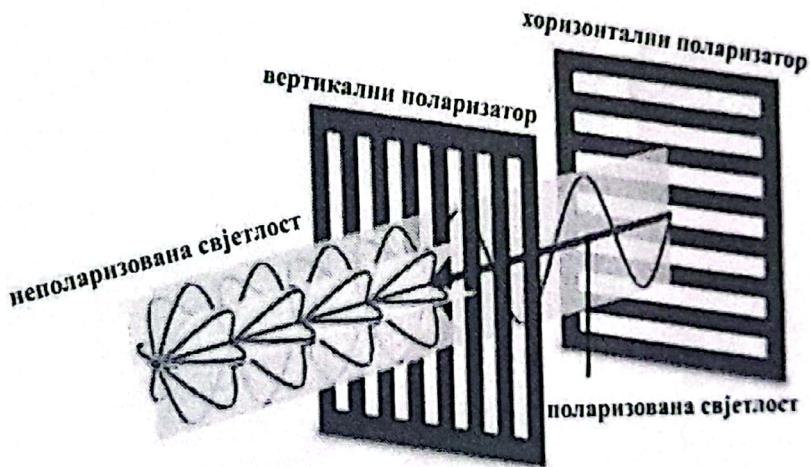
Слика 168. Свјетлост као електромагнетни талас

На горњој слици видимо да вектор електричног поља осцилује YX – равни док вектор магнетног поља осцилује у ZX – равни. Талас приказан на слици 168 је линеарно поларизован, јер оба вектора осцилују у једној равни. Природна свјетлост је неполаризована, што значи да су сви правци осциловања електричног (и њему нормалног – магнетног поља) дозвољени. Међутим, постоје начини на који се неполаризована свјетлост може поларизовати. Један од начина је помоћу поларизатора (нпр. полароид само електрично поље и подразумијева се да постоји нормално на њега магнетно поље). У

овом случају један поларизатор је вертикално усмјерен и када неполаризована свјетлост прође кроз њега биће вертикално поларизована. Сљедећи поларизатор, ако је хоризонтално усмјерен, потпуно ће укинути вертикално поларизовану свјетлост. На тај начин можемо овај други поларизатор назвати анализатором (јер проверава – анализира да ли је свјетлост поларизована). Ако би поларизатор и анализатор били једнако усмјерени – линеарно поларизована свјетлост (од стране поларизатора) не би губила на интензитету пролазећи кроз анализатор. Ако би анализатор био усмјерен под неким углом θ , онда би интензитет свјетlostи који прође кроз анализатор био:

$$I = I_0 \cos^2 \theta. \quad (446)$$

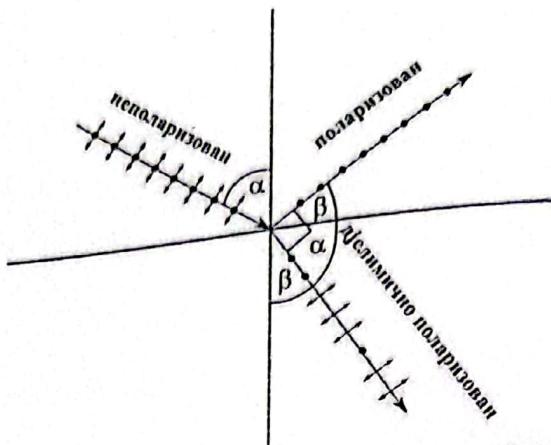
Горњи израз се назива Малусов закон и повезује интензитет свјетlostи након проласка кроз поларизатор и анализатор, ако је између њих угао θ .



Слика 169. Поларизација свјетlostи

На примјеру са слике 169 оба поларизатора чине полароид филмови, међутим поларизација се може извршити и помоћу неких других материјала (који испољавају тзв. двојно преламање свјетlostи), али и помоћу посебно подешеног одбијања свјетlostи.

Добијање поларизоване свјетlostи помоћу рефлексије је изучавао енглески физичар Брустор. Он је установио да се приликом наиласка неполаризованог свјетлосног зрака на неку граничну површину (између дviјe средине различитих индекса преламања), и рефлектован и преломљен свјетлосни зрак бивају дjелимично поларизовани. Али ако се упадни свјетлосни зрак намјести на такав начин да је угао између преломљеног и рефлектованог зрака тачно 90° тада ће рефлектовани зрак бити потпуно поларизован, као што је приказано на слици 170.



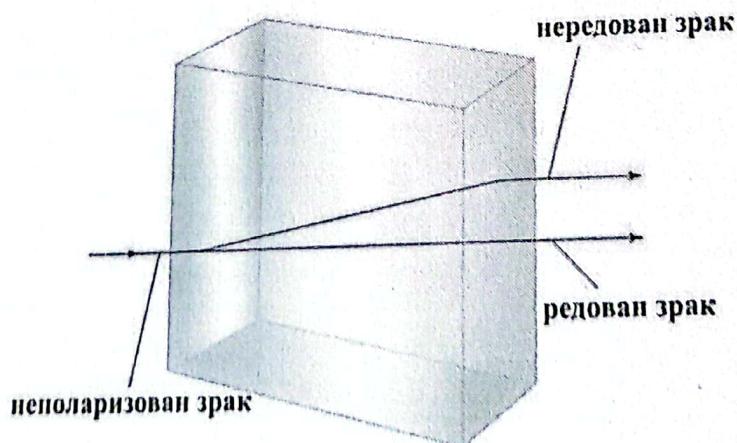
Слика 170. Поларизација светлости одбијањем

На горњој слици је са луним тачкама приказано осцилоовање вектора електричног поља нормално на раван папира, а стрелицама је означен смјер осцилоовања електричног поља у равни папира. Видимо да је у случају правог угла између рефлексованог и преломљеног зрака – рефлексовани зрак потпуно поларизован. Нека је горња средина ваздух из које наилази неполаризован светлосни талас, а доња средина одређен материјал оптичке густине (индекса преламања) n . Тада је:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \tan \alpha, \quad (447)$$

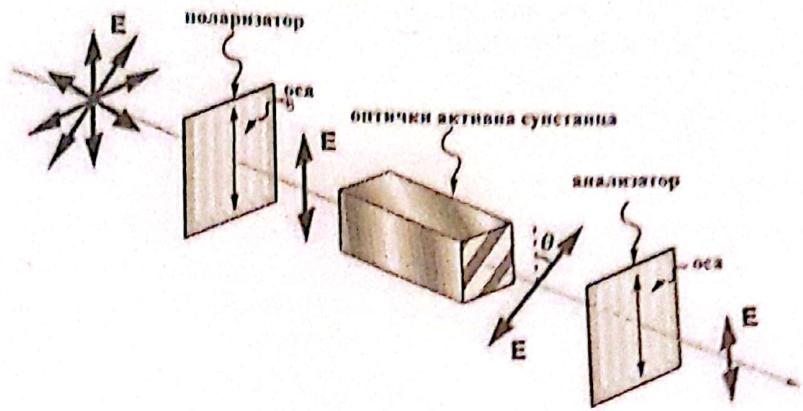
где се упадни угао α назива Брустеров угао.

Двојно преламање испољавају неки кристали попут исландског калцита, турмалина, квэрца или херапатита. Оно се огледа у томе што се након уласка неполаризованог зрака долази до разdvajaњa светлосних зрака (редовног и нередовног), као што је приказано на слици 171. Оба ова зрака су линеарно поларизовани.



Слика 171. Поларизација двојним преламањем

Неке супстанце (најчешће раствори) испољавају особину оптичке активности. Ове супстанце закрећу раван линеарно поларизоване светлости. Угао закретања зависи од особина саме супстанце (концентрације раствора), дужине проласка линеарно поларизоване светлости кроз супстанцу и особина линеарно поларизоване светлости, слика 172.



Слика 172. Оптичка активност

Са горње слике видимо да након поларизовања светлости (проласка неполаризоване светлости кроз поларизатор) оптички активна супстанца закреће раван поларизоване светлости за неки угао θ . Овај угао се може измерити помоћу анализатора, уз помоћ Малусовог закона и израза (445), тј. анализатор ће показати максимални интензитет када се поклопи са углом θ . Овај угао закретања линерано поларизоване светлости оптички активних супстанци једнак је:

$$\theta = [\alpha] \cdot c \cdot d, \quad (448)$$

где је $[\alpha]$ - специфична моћ ротације која квадратно опада са таласном дужином ($[\alpha] \sim \frac{1}{\lambda^2}$); c - концентрација супстанце; d - дужина проласка светлости кроз оптички активану супстанцу, тј. дужина кивете⁷⁷. Из релације (448) видимо да се мјерењем угла закретања поларизационе светлости код оптички активних супстанци може користити за брзо и ефикасно мјерење њихових (непознатих) концентрација⁷⁸.

⁷⁷ Кивете су мале посудице, најчешће квадратног облика као на слици 169, кроз коју пролази линеарно поларизована светлост.

⁷⁸ Једна од метода мјерења концентрације шећера у крви базира се управо на овој методи.