– Представљање целих бројева –

Увод

- **Преглед бројних система**
- **Представљање ненегативних целих бројева**
- **Конверзија**
- **Представљање целих бројева**
- **Аритметика целих бројева**

Преглед бројних система

- **Цифарска репрезентација**
  - Вектор цифара
    $x=(X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots X_i, \ldots X_1, X_0)= X_{n-1}X_{n-2}\ldots X_i \ldots X_1X_0$
- **Бројни систем је одређен следећим елементима:**
  - Скупом (нумеричких) вредности цифара
    $X_i \in D_i$
    $|D_i|$
  - Правила интерпретације
    $(X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_1, X_0) \rightarrow x$

    нередундантни (пресликавање 1:1)
    редундантни

Преглед бројних система

- **Тежински бројни системи (позициони код)**
  $$x = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot W_i$$
- **Вектор тежина**
  $W=(W_{n-1}, \ldots W_1, W_0)$
- **Вектор основа**
  $R=(R_{n-1}, \ldots R_1, R_0)$

$$W_0 = 1, (\forall i : 1 \le i \le n-1) \,|\, W_i = W_{i-1} \cdot R_{i-1}$$

$$W_0 = 1, (\forall i : 1 \le i \le n-1) \,|\, W_i = \prod_{j=0}^{i-1} R_j$$

Класификација бројних система

§ Према вектору основе

- Фиксна основа => W=(r^{n-1}, r^{n-2}, …, r^2 , r^1, 1)

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot r^i$$

- Мешовита основа
  нпр. представљање времена R=(24, 60, 60) => W=(3600, 60, 1)

§ Према скупу вредности цифара

- Канонички системи

$$D_i \in \{0,1,..., R_{i-1}\}$$

- Неканонички системи
  пример: Римски бројеви

Бројни системи

§ Конвенционални бројни системи са основом r

- Фиксна позитивна основа r
- Канонички скуп вредности

§ Најчешће коришћени системи:

- r=10, D={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} - децимални
- r=2, D={0,1} - бинарни
- r=8, D={0,1,2,3,4,5,6,7} - октални
- r=16, D={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F} - хексадецимални

Ненегативни цели бројеви

§ Терминологија: Cardinal, Unsigned

§ Број различитих ненегативних целих бројева K=2^n

§ Скуп кардиналаних бројева T={0, 1, 2, …, maxcardinal}

§ maxcardinal = 2^n - 1

Алгоритми конверзије

§ Из система са основом r у децимални

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot r^i = (...(X_{n-1} \cdot r + X_{n-2}) \cdot r + ... + X_1) \cdot r + X_0$$

- нпр. $11001101_{(2)} = 205_{(10)}$?

```
         1 = 1
  1*2 + 1 = 3
  3*2 + 0 = 6
  6*2 + 0 = 12
 12*2 + 1 = 25
 25*2 + 1 = 51
 51*2 + 0 = 102
102*2 + 1 = 205
```

- $11001101_{(2)}$=1*2^7+1*2^6+0*2^5+0*2^4+1*2^3+1*2^2+0*2^1+1*1=205

Алгоритми конверзије

§ Из децималног у систем са основом r

$$x=\sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot r^i = (\ldots(X_{n-1}\cdot r + X_{n-2})\cdot r + \ldots + X_1)\cdot r + X_0$$

- нпр. $272_{(10)} = 100010000_{(2)}$?

272/2	=	136	0
136/2	=	68	0
68/2	=	34	0
34/2	=	17	0
17/2	=	8	1
8/2	=	4	0
4/2	=	2	0
2/2	=	1	0
1/2	=	0	1 ↑

Алгоритми конверзије

§ Конверзија из бинарног у октални

- пример: $1100101000_{(2)} \rightarrow X_{(8)}$? (n=10)
  За представљање 8 различитих вредности довољно 3 бита
  ⇨групише се по 3 бита почевши од бита најмање тежине
  ⇨свака група представља једну окталну цифру
  ⇨број бита није дељив са 3→додају се водећи бити вредности 0
  $1100101000_{(2)} \rightarrow$ <u>00</u>1 100 101 000$_{(2)} \rightarrow 1450_{(8)}$

§ Конверзија из бинарног у хексадецимални

- пример: $1100101000_{(2)} \rightarrow X_{(16)}$? (n=10)
  ⇨групише се по 4 бита почевши од бита најмање тежине
  $1100101000_{(2)} \rightarrow$ <u>00</u>11 0010 1000$_{(2)} \rightarrow 328_{(16)}$

§ Пажња!!

- конверзија $1101110_{(2)} \rightarrow X_{(16)}$ (n=7) : 6E
- конверзија $01101110_{(2)} \rightarrow X_{(16)}$ (n=8) : 6E

Алгоритми конверзије

§ Конверзија из окталног у бинарни

- пример: $126_{(8)} \rightarrow X_{(2)}$? (n=7)
  ⇨свака цифра представља групу од три бита
  ⇨задржава се n бита најмање тежине (тзв. "доњи" бити)
  $126_{(8)} \rightarrow$ **<u>00</u>**1 010 110$_{(2)} \rightarrow 1010110_{(2)}$

§ Конверзија из хексадецималног у бинарни

- пример: $4FA_{(16)} \rightarrow X_{(2)}$? (n=11)
  ⇨свака цифра представља групу од четири бита
  $4FA_{(16)} \rightarrow$ **<u>0</u>**100 1111 1010$_{(2)} \rightarrow 10011111010_{(2)}$

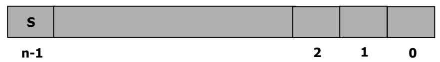
§ Конверзија октални↔хексадецимални

- не може директно, 16 није степен 8
- најједноставније: конвертовати најпре у бинарни

§ Питање: зашто програмери славе ноћ вештица (31. октобар) 25. децембра?

Цели бројеви

§ Терминологија: Integer



§ Број различитих ненегативних целих бројева $K=2^n$

§ Скуп целих бројева T={minint, ..., -1, 0, 1, ..., maxint}

§ $maxint = 2^{n-1} - 1$

§ $minint = -2^{n-1}$

Одређивање комплемента двојке

§ **Негативни бројеви се представљају**
$-|z|: (2^n - |z|)$ n – дужина кодне речи

§ **Практичан алгоритам**

- (1) Комплементирају се сви бити
  (одреди се тзв. *комплемент јединице* или *комплемент највише цифре*)
- (2) На добијени комплемент јединице дода се 1

§ **Једноставнији алгоритам**

- (1) Почевши од цифре најмање тежине прескоче се
  све нуле и прва јединица и тако се број подели на два дела
  нпр. 00010|100
- (2) У левом делу се све 1 замене са 0 и обрнуто,
  а десни део остаје непромењен
  нпр. 11101|100

Пример

§ **n = 4**
$x = 3_{(10)} = 0011_{(2)}$
$y = -3_{(10)} = 1101_{(2)}$?

§ **Алгоритам 1**
(1) 0011 => 1100
(2) 1100 + 1 = 1101

§ **Алгоритам 2**
(1) 001|1
(2) 110|1 => 1101

Аритметика целих бројева

§ **Пример 1**
n = 4
x = +7 : 0111
y = +1 : 0001
x+y : 1000 = -8 ?
пренос: <u>01</u>11

§ **Пример 2**
n = 4
x = -8 : 1000
y = -8 : 1000
x+y : 0000 = 0 ?
пренос: <u>10</u>00

Задатак **1**

§ **Садржај десетобитне меморијске локације је: $2A6_{(16)}$. Ако је у посматраној меморисјкој локацији смештен цео број (integer) представљен у комплементу двојке, колика је децимална вредност посматраног целог броја?**

§ **Решење:**
$x = 2A6_{(16)} = 1010100110_{(2)} < 0$
$-x = 0101011010_{(2)} = 346_{(10)} \Rightarrow x = -346_{(10)}$

Задатак **2**

- **На рачунару који има меморијску реч ширине 14 бита извршава се операција: Y:=maxint+X. Ако је пре операције садржај меморијске локације X: $2A6C_{(16)}$ колика је децимална вредност резултата Y након извршене операције?**

- **Решење:**

  maxint $= 01111111111111_{(2)} = 1FFF_{(16)}$

  X $= 10101001101100_{(2)} = 2A6C_{(16)} < 0$

  Y $= 00101001101011_{(2)} = 0A6B_{(16)} > 0$

  $Y = 0A6B_{(16)} = (10*16+6)*16+11 = 2667_{(10)}$

Задатак **3**

- **Цели бројеви A, B i C приказани су у другом комплементу на ширини од 8 bita. Нека је <u>вредност</u> броја $A=105_{10}$, а <u>бинарна представа</u> броја B у меморији се може записати као 75_{16}. Ако је потребно израчунати израз A:=A-B+C, који је услов неопходан и довољан да би се обезбедило да при рачунању не дође до прекорачења? Напомена: Прво се врши одузимање, па сабирање.**

  A) C>0 B) $C \geq -116_{10}$ C) $C \leq 104_{10}$

- **Решење**

  maxint = 127, minint = -128

  A = 105 представа B: 01110101_2, дакле B је позитиван

  B = 117 дакле: A - B = -12

  Да не би дошло до прекорачења, збир након додавања C не сме да буде већи од 127 и мањи од -128

Задатак **4**

- **Посматра се рачунар који ради са 9-битним бројевима представљеним у комплементу двојке. Која се <u>вредност</u> добије када се на овом рачунару израчуна израз (A-B)-(C-D)? <u>Вредности</u> операнада A i B су 217_{10} и $-F1_{16}$, <u>представе</u> операнада C и D су 115_{16} и 011000101_2.**

  A) -122_{10} B) -86_{16} C) 101111010_2

- **Решење: тражи се <u>вредност</u> резултата па ради лакшег рачунања, све вредности ће бити приказане у декадном систему. Приметити да приликом израчунавања израза <u>долази до прекорачења</u> али то није од интереса у задатку.**

  A = 217, B = -241, C = -235, D = 197

  A-B = 217-(-241) = 458 – прекорачење: резултат је -54

  C-D = -235-197 = -432 – прекорачење: резултат је 80

  Коначан резултат: -134

  Зашто C) није тачно решење?

  Зато што је то <u>вредност 378</u>

Задаци за самосталну вежбу

- **У неком рачунару цели бројеви се представљају у 10-битним локацијама у другом (потпуном) комплементу. У којем од наведених случајева ће приликом сабирања целих бројева I и J доћи до прекорачења?**

  А) **Садржај локације у коју је смештено I је $3FA_{16}$, а локације у коју је смештено J је $1FF_{16}$**

  В) **Вредност броја И је -202, а вредност броја J је -310 у декадном бројном систему.**

  (С) Вредност броја I је 110, а вредност броја J је 423 у декадном бројном систему.

- **На рачунару који има меморијску реч ширине 14 бита изврши се операција: Y:=minint-X. Ако је пре операције садржај меморијске локације X, која садржи 14-битни цео број, једнак $2A6C_{16}$, колика је децимална вредност целобројног резултата Y након извршене операције?**

  (А) -2668 В) **2668** С) **2667**

Задаци за самосталну вежбу

- **Уколико је садржај локације у коју је смештен највећи цео број MAXINT приказан у другом комплементу на неком рачунару $7FFF_{16}$, како онда на том рачунару изгледа приказ броја који се добија као збир MININT и броја чији је приказ $03F0_{16}$?**

  A) **$1000\ 0011\ 1111\ 0001_{2}$**
  B) **$101\ 740_{8}$**
  C) **$43F0_{16}$**

- **Два броја приказана су у другом комплементу на дужини од 8 бита. Вредност броја А износи -99, а бинарни садржај локације у којој се налази други број Б је 11001011. Колика је вредност разлике А-В?**

  A) **104** B) **-47** **(C) -46**