III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.1 OSNOVNI POJMOVI

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.1 OSNOVNI POJMOVI

Minimizacija se naziva određivanje najprostijeg između više izraza kojima se u jednoj klasi izraza može predstaviti prekidačka funkcija. To može da bude, na primer, klasa DNF izraza, klasa KNF izraza itd.

Za poređenje izraza služi neka veličina koja u najprostijem izrazu ima minimalnu vrednost, kao, na primer, minimalan broj simbola promenljivih, simbola operacija itd.

Najveći značaj ima minimizacija DNF i KNF izraza prekidačkih funkcija.

Najpre se daje definicija određenih pojmova koji se koriste praktično u svim metodama minimizacije DNF i KNF izraza prekidačkih funkcija.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.1 OSNOVNI POJMOVI

Neka su $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ dve prekidačke funkcije.

Za funkciju $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ se kaže da predstavlja implikantu funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ako ima vrednost 0 na svim vektorima na kojima i funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ima vrednost 0. Za funkciju $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ se kaže da predstavlja implicentu funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ako ima vrednost 1 na svim vektorima na kojima i funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ima vrednost 1. Iz definicije implikante i implicente sledi da suma implikanti funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ predstavlja implikantu funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i da proizvod implicenti funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ predstavlja implicentu funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Iz definicije DNF i KNF proizlazi da svaki elementarni proizvod koji ulazi u neku DNF prekidačke funkcije mora da bude implikanta te funkcije i da svaka elementarna suma koja ulazi u neku KNF prekidačke funkcije mora da bude implicenta te funkcije. Isto to važi i za potpune proizvode i SDNF i potpune sume i SKNF.

<u>Primer:</u> Prekidačka funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ data je skupovima indeksa $f(1) = \{0, 1, 2, 3, 10, 11, 15\}$ i $f(0) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14\}$
SDNF prekidačke funkcije je:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

Svaki od potpunih proizvoda $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$, $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$, $x_1\bar{x}_2x_3x_4$ i $x_1x_2x_3x_4$ ima vrednost 1 samo na po jednom od vektora sa indeksima 0, 1, 2, 3, 10, 11 i 15, respektivno, dok na svima ostalima ima vrednost 0. Svaki od potpunih proizvoda ima vrednost 0 na vektorima sa indeksima 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13 i 14 na kojima i funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ima vrednost 0.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.1 OSNOVNI POJMOVI

Za elementarni proizvod $\tilde{x}_{i_1}\tilde{x}_{i_2}...\tilde{x}_{i_h}$ se kaže da je deo elementarnog proizvoda $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_k}$ ako je $\{\tilde{x}_{i_1},\tilde{x}_{i_2},...,\tilde{x}_{i_h}\}$ pravi podskup skupa $\{\tilde{x}_{j_1},\tilde{x}_{j_2},...,\tilde{x}_{j_k}\}$. Za elementarnu sumu $\tilde{x}_{i_1}+\tilde{x}_{i_2}+...+\tilde{x}_{i_h}$ se kaže da je deo elementarne sume $\tilde{x}_{j_1}+\tilde{x}_{j_2}+...+\tilde{x}_{j_k}$ ako je $\{\tilde{x}_{i_1},\tilde{x}_{i_2},...,\tilde{x}_{i_h}\}$ pravi podskup skupa $\{\tilde{x}_{j_1},\tilde{x}_{j_2},...,\tilde{x}_{j_k}\}$.

<u>Za elementarni proizvod $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_k}$ se kaže da predstavlja prostu implikantu prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ako je implikanta prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i ako nijedan njegov deo nije implikanta funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.</u> Za elementarnu sumu $\tilde{x}_{j_1}+\tilde{x}_{j_2}+...+\tilde{x}_{j_k}$ se kaže da predstavlja prostu implicentu prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ako je implicenta prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i ako nijedan njegov deo nije implicenta funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Svaki vektor na kojem prekidačke funkcija ima vrednost 1 pripada bar jednoj prostoj implikanti i svaki vektor na kojem prekidačke funkcija ima vrednost 0 propada bar jednoj prostoj implicenti.

<u>Primer:</u> U izrazu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

potpuni proizvod $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ je implikanta ali ne prosta, jer elementarni proizvod $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, koji predstavlja deo potpunog proizvoda $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, je takođe implikanta. Elementarni proizvod $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ je implikanta ali ne prosta, jer elementarni proizvod $\bar{x}_1\bar{x}_2$, koji predstavlja deo elementarnog proizvoda $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, je takođe implikanta. Tek je elementarni proizvod $\bar{x}_1\bar{x}_2$ prosta implikanta, jer nijedan njegov deo nije više implikanta. Zato sada može da se piše

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.1 OSNOVNI POJMOVI

Za elementarni proizvod i elementarnu sumu u DNF i KNF koristi se zajednički naziv član.

Za DNF ili KNF prekidačke funkcije se kaže da je nepreopširan ako se nijedan član iz nje ne može udaljiti ili zameniti nekim svojim delom a da tako dobijeni izraz i dalje predstavlja posmatranu prekidačku funkciju. U suprotnom DNF ili KNF je preopširna.

Nepreopširna DNF mora predstavljati sumu prostih implikanti i nepreopširna KNF mora predstavljati proizvod prostih implicenti.

Svaka minimalna DNF ili KNF je nepreopširna.

Primer: DNF

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 +$$
$$+ x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

je preopširna jer se članovi $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ i $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$ mogu ili zamenjivati svojim delovima sve dok u njima ne ostane samo $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ili se mogu i kompletno izbaciti tako da ostane samo

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 .$$

I ovo je još uvek preopširna DNF jer se umesto $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ može staviti $\bar{x}_2x_3$ tako da i

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

predstavlja DNF.

I ovo je još uvek preopširna DNF jer iz nje može izbaciti $x_1\bar{x}_2x_3x_4$ tako da i

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2x_3 + x_1x_2x_3x_4$$

predstavlja DNF.

Tek je sada dobijena nepreopširna DNF.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.1 OSNOVNI POJMOVI

Za prostu implikantu se kaže da je bitna ili esencijalna ako joj pripada neki vektor na kojem prekidačka funkcija ima vrednosti 1 koji ne pripada nijednoj drugoj prostoj implikanti. Za prostu implicentu se kaže da je bitna ili esencijalna ako joj pripada neki vektor na kojem prekidačka funkcija ima vrednosti koji ne pripada nijednoj drugoj prostoj implicenti.

Bitna prosta implikanta je član svake nepreopširne DNF, pa saglasno tome i svake minimalne DNF. Bitna prosta implicenta je član svake nepreopširne KNF, pa saglasno tome i svake minimalne KNF.

Primer: U DNF

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4$

sve tri implikante su bitne. Implikanta $\bar{x}_1\bar{x}_2$ je bitna jer jedino njoj pripadaju vektori 0 i 1. I implikanta $\bar{x}_2 x_3$ je bitna jer jedino njoj pripadaju vektori 10 i 11. Pri tome vektori 2 i 3 pripadaju i jednoj i drugom implikanti. Na kraju je i implikanta $x_1 x_2 x_3 x_4$ bitna jer jedino njoj pripada vektor 15.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.1 OSNOVNI POJMOVI

Koriste se dva kriterijuma za određivanje minimalne DNF i KNF. U njima se član koji se sastoji samo od jednog slova naziva degenerisani član, dok se član koji se sastoji od dva ili više slova naziva nedegenerisan član.

Prvi kriterijum:
Za DNF odnosno KNF prekidačke funkcije se kaže da je minimalna ako ne postoji druga DNF odnosno KNF te funkcije sa manje nedegenerisanih članova ili sa istim brojem nedegenerisanih članova ali sa manje slova u tim članovima.

Drugi kriterijum:
Za DNF odnosno KNF prekidačke funkcije se kaže da je minimalna ako ne postoji druga DNF odnosno KNF te funkcije u kojoj je zbir slova u nedegenerisanim članovima i broja članova manji.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.1 OSNOVNI POJMOVI

Najopštija podela metoda za minimizaciju DNF i KNF je na grafičke i algoritamske.

U grafičkim metodama određivanje minimalnih DNF i KNF se zasniva na vizuelnoj analizi grafički predstavljene prekidačke funkcije.

U algoritamskim metodama određivnje minimalnih DNF i KNF se zasniva na različitim algoritmima za transformisanje analitički ili tablično predstavljene prekidačke funkcije.

Daje se grafička metoda minimizacije DNF i KNF zasnovana na predstavljanju prekidačkih funkcija pomoću tablica poznatim pod imenom Karnaugh-ove karte, dok se algoritamske metode ne daju jer se u ostatku ne koriste.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH–OVIH KARTI

Za predstavljanje prekidačke funkcije od n promenljivih potrebna je Karnaugh-ova karta sa 2^n ćelija, tako da svakom od 2^n vektora iz skupa $\{0,1\}^n$ može da se pridruži posebna ćelija.

Karnaugh-ova karta je tablica sa
$2^{n/2}$ vrsta i $2^{n/2}$ kolona za parno n i
$2^{(n-1)/2}$ vrsta i $2^{(n+1)/2}$ kolona ili obratno za neparno n.

Svakoj ćeliji u Karnaugh-ovoj karti je prodružen jedan vektor iz skupa $\{0,1\}^n$ i to tako da fizički susednim ćelijama odgovaraju vektori koji se razlikuju samo po jednoj koordinati.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Karnaugh-ove karte za n = 4

Za prekidačku funkciju od n = 4 promenljive u skupu $\{0,1\}^4$ ima 16 vektora, pa tablica ima 16 ćelija (slika 1). Binarne oznake vrsta i kolona u tablici se za dve fizički susedne ćelije razlikuju samo u jednoj poziciji oznake.

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Slika 1 Karnaugh-ova karta za n = 4

Da bi se dobila Karnaugh-ova karta potrebno je uspostaviti korespondenciju između koordinata vektora iz skupa $\{0,1\}^4$ i pozicija binarnih oznaka vrsta i kolona u tablici. Kako se od 4 koordinate vektora može izabrati 6 različitih parova, to se korespondencija između ćelija tablice i vektora iz skupa $\{0,1\}^4$ može uspostaviti na 6 različitih načina. Pri tome nije uzeta u obzir mogućnost da se koordinate vektora pridružene vrstama zamene sa koordinatama pridruženim kolonama.

Dva od više mogućih načina uspostavljanja korespondencije su prikazana na slikama 2 i 3, pri čemu to ne utiče na njihovo korišćenje u minimizaciji prekidačkih funkcija. Na kartama su vektori označeni odgovarajućim indeksima.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

Slika 2 Karnaugh-ova karta za n = 4 i oznakama kolona x_1x_2 i vrsta x_3x_4

x_2x_4 \ x_1x_3	00	01	11	10
00	0	2	10	8
01	1	3	11	9
11	5	7	15	13
10	4	6	14	12

Slika 3 Karnaugh-ova karta za n = 4 i oznakama kolona x_1x_3 i vrsta x_2x_4

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Binarne oznake vrsta i kolona u Karnaugh-ovoj karti nazivaju se koordinate ćelija.

Fizički susedne ćelije u Karnaugh-ovoj karti se razlikuju samo po jednoj koordinati.
Sve ćelije koje se razlikuju samo po jednoj koordinati nisu fizički susedne.
Metoda minimizacije korišćenjem Karnaugh-ovih karti zahteva da sve ćelije koje se razlikuju samo po jednoj koordinati budu fizički susedne.

Ako se
  tablica savije u cilindar, tako da se poklope gornja i donja ivica, a zatim cilindar savije u torus, tako da mu se poklope osnove,
sve ćelije koje se razlikuju samo po jednoj koordinati postaju i fizički susedne.

Prekidačka funkcija se zadaje pomoću Karnaugh-ove karte tako što se
  u ćelije koje odgovaraju vektorima na kojima funkcija ima vrednost 1 upisuje jedinica,
  u ćelije koje odgovaraju vektorima na kojima funkcija ima vrednosti 0 upisuje nula i
  u ćelije koje odgovaraju vektorima na kojima vrednost funkcije nije definisana upisuje se simbol "b".

<u>Primer 3.2.1.</u> Prekidačka funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadata skupovima indeksa $f(1) = \{4, 5, 6, 12, 13\}$ i $f(b) = \{0, 7, 8, 15\}$ predstavljena je Karnaugh-ovom kartom na slici 4.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	b $_{0}$	1 $_{4}$	1 $_{12}$	b $_{8}$
01	0 $_{1}$	1 $_{5}$	1 $_{13}$	0 $_{9}$
11	0 $_{3}$	b $_{7}$	b $_{15}$	0 $_{11}$
10	0 $_{2}$	1 $_{6}$	0 $_{14}$	0 $_{10}$

Slika 4 Karnaugh-ova karta za primer 3.2.1.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Pravilnom figurom ranga r naziva se skup od 2^r ćelija Karnaugh-ove karte koje imaju k = n-r zajedničkih koordinata, pri čemu je r = 0, 1, ..., n. Pravilne figure su :

za r = 0, pojedinačne ćelije,

za r = n, cela Karnaugh-ova karta, dok se

za ostale vrednosti r ne može u opštem slučaju tako lako odrediti koje ćelije obrazuju pravilne figure.

Za n = 4, na torusu koji se dobija savijanjem Karnaugh-ove karte, pravilne figure su:

za r = 1, svi pravougaonici sa po dve susedne ćelije,

za r = 2, svi pravougaonici i kvadrati sa po četiri ćelije i

za r = 3, svi pravougaonici sa po osam ćelija.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Neka su $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}$, gde su $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, zajedničke koordinate ćelija pravilne figure ranga $r = n-k$. Svih 2^r vektora koji odgovaraju ćelijama ove pravilne figure pripadaju

elementarnom proizvodu $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}\ldots\tilde{x}_{j_n}$ u kojem je

$\tilde{x}_{j_i} = x_{j_i}$ ako je $a_{j_i} = 1$ i

$\tilde{x}_{j_i} = \overline{x}_{j_i}$ ako je $a_{j_i} = 0$ i

elementarnoj sumi $\tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + \ldots + \tilde{x}_{j_k}$ u kojoj je

$\tilde{x}_{j_i} = x_{j_i}$ ako je $a_{j_i} = 0$ i

$\tilde{x}_{j_i} = \overline{x}_{j_i}$ ako je $a_{j_i} = 1$ i

Za ovakav elementarni proizvod i ovakvu elementarnu sumu se kaže da odgovaraju pravilnoj figuri.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Iz prethodnog i osobina elementarnih proizvoda proizlazi sledeći zaključak:

Ako su na Karnaugh-ovoj karti neke prekidačke funkcije u sve ćelije neke pravilne figure upisane jedinice, onda elementarni proizvod koji toj figuri odgovara predstavlja implikantu funkcije.

Da bi se dobila neka DNF prekidačke funkcije zadate Karnaugh-ovom kartom, potrebno je na toj karti

1. formirati pravilne figure koje pokrivaju samo jedinice i to tako da svaka jedinica bude pokrivena bar jednom pravilnom figurom,
2. formirati elementarne proizvode koji odgovaraju tako formiranim pravilnim figurama i
3. formirane elementarne proizvode povezati znakom disjunkcije.

Ako se pravilna figura koja pokriva samo jedinice ne može uključiti u pravilnu figuru višeg ranga koja bi takođe pokrivala samo jedinice, onda elementarni proizvod koji odgovara takvoj pravilnoj figuri predstavlja prostu implikantu posmatrane funkcije.

Da bi se dobila minimalna DNF prekidačke funkcije zadate Karnaugh-ovom kartom potrebno je da

1. se formiraju pravilne figure što je moguće višeg ranga, jer njima odgovaraju proste implikante,
2. se svaka jedinica uključi u barem jednu takvu pravilnu figuru i
3. da broj tih pravilnih figura bude minimalan.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Po analogiji za elementarne sume proizlazi sledeći zaključak:

Ako su na Karnaugh-ovoj karti neke prekidačke funkcije u sve ćelije neke pravilne figure upisane nule, onda elementarna suma koji toj figuri odgovara predstavlja implicentu funkcije.

Da bi se dobila neka KNF prekidačke funkcije zadate Karnaugh-ovom kartom, potrebno je na toj karti

1. formirati pravilne figure koje pokrivaju samo nule i to tako da svaka nula bude pokrivena bar jednom pravilnom figurom,
2. formirati elementrarne sume koji odgovaraju tako formiranim pravilnim figurama i
3. formirane elementarne sume povezati znakom konjunkcije.

Ako se pravilna figura koja pokriva samo nule ne može uključiti u pravilnu figuru višeg ranga koja bi takođe pokrivala samo nule, onda elementarna suma koji odgovara takvoj pravilnoj figuri predstavlja prostu implicentu posmatrane funkcije.

Da bi se dobila minimalna KNF prekidačke funkcije zadate Karnaugh-ovom kartom potrebno je da

1. se formiraju pravilne figure što je moguće višeg ranga, jer njima odgovaraju proste implicente,
2. se svaka nula uključi u barem jednu takvu pravilnu figuru i
3. da broj tih pravilnih figura bude minimalan.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

U vezi prethodno definisanog postupka određivanja minimalne DNF i minimalne KNF treba uočiti sledeće tri stvari:

1. Kriterimum za određivanje da li je DNF ili KNF minimalna

Prethodno definisani postupak daje minimalne DNF i KNF po prvom kriterijumu.
Kod većine prekidačkih funkcija sa malim brojem promenljivih DNF i KNF minimalne prema prvom kriterijumu su ujedno minimalne i prema drugom kriterijumu.
Kako se Karnaugh-ove karte koriste za određivanje minimalne DNF i KNF prekidačkih funkcija sa malim brojem premenljivih, to će se dalje koristiti samo prvi kriterijum

2. Nepotpuno definisane prekidačke funkcije

Ćelije Karnaugh-ove karte koje odgovaraju vektorima na kojima vrednost funkcije nije definisana, pa su njima upisani simboli "b", mogu se uključivati u pravilne figure kojima se pokrivaju jedinice ili nule. Time se može:

1. smanjiti broj potpunih figura,
2. povećati rang nekih figura, a veoma često
3. i jedno i drugo.

Time se iz familije prekidačkih funkcija bira funkcija koja ima najpovoljniju DNF ili KNF.

3. Bitne proste implikante i implicente

Ako se u Karnaugh-ovoj karti neka jedinica može pokriti samo jednom pravilnom figurom kojoj odgovara prosta implikanta, onda je ta prosta implikanta bitna. S toga je pri određivanju minimalne DNF potrebno najpre formirati pravilne figure kojima odgovaraju bitne proste implikante.

Ako se u Karnaugh-ovoj karti neka nula može pokriti samo jednom pravilnom figurom kojoj odgovara prosta implicenta, onda je ta prosta implicenta bitna. S toga je pri određivanju minimalne KNF potrebno najpre formirati pravilne figure kojima odgovaraju bitne proste implicente.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA
III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH–OVIH KARTI

<u>Primer 3.2.2.</u> Naći bar jednu minimalnu DNF prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadate skupovima indeksa f(1) = {1, 3, 7, 9, 13, 15} i f(b) = {6, 8, 12}.

<u>Rešenje:</u> Minimalna DNF prekidačke funkcije je

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_3$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	$0_{\;0}$	$0_{\;4}$	$b_{\;12}$	$b_{\;8}$
01	$1_{\;1}$	$0_{\;5}$	$1_{\;13}$	$1_{\;9}$
11	$1_{\;3}$	$1_{\;7}$	$1_{\;15}$	$0_{\;11}$
10	$0_{\;2}$	$b_{\;6}$	$0_{\;14}$	$0_{\;10}$

Slika 5 Minimalna DNF za primer 3.2.2.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

<u>Primer 3.2.3.</u> Naći bar jednu minimalnu KNF prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadate skupovima indeksa f(0) = {1, 2, 3, 4, 5, 9, 11, 12} i f(b) = {10, 13, 15}.

<u>Rešenje:</u> Postoje dve minimalne KNF prekidačke funkcije i to

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x}_2 + x_3)\ (x_2 + \overline{x}_3)\ (x_3 + \overline{x}_4)$ (slika 6.a) i

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x}_2 + x_3)\ (x_2 + \overline{x}_3)\ (x_2 + \overline{x}_4)$ (slika 6.b) i

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1 (0)	0 (4)	0 (12)	1 (8)
01	0 (1)	0 (5)	b (13)	0 (9)
11	0 (3)	1 (7)	b (15)	0 (11)
10	0 (2)	1 (6)	1 (14)	b (10)

Slika 6.a Minimalna KNF za primer 3.2.3.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1 (0)	0 (4)	0 (12)	1 (8)
01	0 (1)	0 (5)	b (13)	0 (9)
11	0 (3)	1 (7)	b (15)	0 (11)
10	0 (2)	1 (6)	1 (14)	b (10)

Slika 6.b Minimalna KNF za primer 3.2.3.

Primer 3.2.4. Naći bar jednu minimalnu DNF prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadate skupovima indeksa $f(1) = \{0, 1, 3, 4, 11, 12, 14, 15\}$.

Rešenje: Postoje dve minimalne DNF prekidačke funkcije i to

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 x_3 x_4$ (slika 7.a) i

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3$ (slika 7.b).

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{4}	1_{12}	0_{8}
01	1_{1}	0_{5}	0_{13}	0_{9}
11	1_{3}	0_{7}	1_{15}	1_{11}
10	0_{2}	0_{6}	1_{14}	0_{10}

Slika 7.a Minimalna DNF za primer 3.2.4.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{4}	1_{12}	0_{8}
01	1_{1}	0_{5}	0_{13}	0_{9}
11	1_{3}	0_{7}	1_{15}	1_{11}
10	0_{2}	0_{6}	1_{14}	0_{10}

Slika 7.b Minimalna DNF za primer 3.2.4.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA
III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Primer 3.2.5. Naći bar jednu minimalnu KNF prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadate skupom indeksa $f(0) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 15\}$.

Rešenje: Mminimalna KNF prekidačke funkcije je (slika 8) i

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x}_2 + x_3)\ (x_2 + x_3 + \overline{x}_4)\ (x_1 + x_2 + \overline{x}_3)\ (\overline{x}_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4)$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1_{0}	0_{4}	1_{12}	1_{8}
01	0_{1}	0_{5}	1_{13}	0_{9}
11	0_{3}	0_{7}	0_{15}	1_{11}
10	0_{2}	1_{6}	1_{14}	1_{10}

Slika 8 Minimalna KNF za primer 3.2.5.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Primer 3.2.6. Naći bar jednu minimalnu DNF prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadate skupovima indeksa $f(1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 15\}$.

Rešenje: Minimalna DNF prekidačke funkcije (slika 9) je

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 + x_2 x_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{4}	0_{12}	1_{8}
01	1_{1}	1_{5}	0_{13}	0_{9}
11	1_{3}	1_{7}	1_{15}	0_{11}
10	1_{2}	1_{6}	1_{14}	1_{10}

Slika 9 Minimalna DNF za primer 3.2.6.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Karnaugh-ove karte za n = 2 i n = 3

Za prekidačku funkciju od n = 2 promenljive u skupu $\{0,1\}^2$ ima 4 vektora, pa tablica ima 4 ćelije (slika 10).

Za prekidačku funkciju od n = 3 promenljive u skupu $\{0,1\}^3$ ima 8 vektora, pa tablica ima 8 ćelije (slika 11).

Binarne oznake vrsta i kolona u tablici se za dve fizički susedne ćelije razlikuju samo u jednoj poziciji oznake.

	0	1
0		
1		

Slika 10 Karnaugh-ova karta za n = 2

	00	01	11	10
0				
1				

Slika 11 Karnaugh-ova karta za n = 3

Da bi se dobila Karnaugh-ova karta za n = 2 potrebno je uspostaviti korespondenciju između koordinata vektora iz skupa $\{0,1\}^2$ i pozicija binarnih oznaka vrsta i kolona u tablici. Korespondencija između vektora iz skupa $\{0,1\}^2$ i ćelija tablice može se uspostaviti na dva načina.

Da bi se dobila Karnaugh-ova karta za n = 3 potrebno je uspostaviti korespondenciju između koordinata vektora iz skupa $\{0,1\}^3$ i pozicija binarnih oznaka vrsta i kolona u tablici. Korespondencija između vektora iz skupa $\{0,1\}^3$ i ćelija tablice može se uspostaviti na tri načina.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

U tablici za n = 2 sve ćelije koje se razlikuju po jednoj koordinati su fizički susedne.

U tablici za n = 3 to nije slučaj. Međutim, ako se
tablica savije u cilindar, tako da se poklope leva i desna ivica,
sve ćelije koje se razlikuju samo po jednoj koordinati postaju i fizički susedne.

U Karnaugh-ovoj karti za n = 2 pravilne figure su :
- za r = 0, pojedinačne ćelije,
- za r = 2, cela Karnaugh-ova karta, dok su
- za r = 1, svi pravougaonici sa po dve susedne ćelije.

U Karnaugh-ovoj karti za n = 3 pravilne figure su :
- za r = 0, pojedinačne ćelije,
- za r = 3, cela Karnaugh-ova karta, dok su
- za r = 1, svi pravougaonici sa po dve susedne ćelije, i
- za r = 2, svi pravougaonici i kvadrati sa po četiri ćelije

Minimalne DNF i KNF prekidačkih funkcija sa 2 i 3 promenljive, određuju se pomoću Karnaugh-ovih karti na isti način kao i u slučaju prekidačkih funkcija sa 4 promenljive.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Karnaugh-ove karte za n = 5

Za prekidačku funkciju od n = 5 promenljivih u skupu $\{0,1\}^5$ ima 32 vektora, pa tablica ima 32 ćelije (slika 12).

	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Slika 12 Karnaugh-ova karta za n=5

U tablici se po jednoj koordinati razlikuju ne samo

1. fizički susedne ćelije, već i
2. ćelije koje pripadaju i-toj vrsti (i = 0, 1, 2 i 3) kolona označenih sa 000 i 100, zatim kolona označenih sa 001 i 101, i na kraju kolona označenih sa 011 i 111, a takođe i
3. ćelije koje propadaju i-toj koloni (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7) vrsta označenih sa 00 i 10.

Pošto se od tablice sa slike 12 ne može formirati pogodna figura na kojoj bi bile fizički susedne sve ćelije koje se razlikuju samo po jednoj koordinati, to je određivanje minimalnih DNF i KNF prekidačkih funkcija sa 5 promenljivih pomoću Karnaugh-ove karte ovog oblika veoma teško.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Karnaugh-ova karta prekidačkih funkcija za n = 5 promenljivih se češće crta u obliku datom na slici 13.

Ova karta se crta kao dve karte prekidačkih funkcija sa n = 4 promenljive, gde

1. sve ćelije leve tablice imaju koordinatu $x_j = 0$, dok
2. sve ćelije desne tablice imaju koordinatu $x_j = 1$, pri čemu se
3. x_j proizvoljno bira iz skupa promenljivih, dok
4. korespondencija između preostale četiri koordinate vektora iz skupa $\{0,1\}^5$ i ćelija leve i desne tablice mora biti ista.

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$x_j=0$

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$x_j=1$

Slika 13 Drugi oblik Karnaugh-ove karte za n=5

U Karnaugh-ovoj karti za n = 5

1. za r = 0, pravilne figure su pojedinačne ćelije koje se mogu nalaziti samo u levoj ili samo u desnoj tablici,
2. za r = 5, pravilna figura pokriva obe tablice, dok se
3. za r = 1, 2, 3 i 4 pravilne figure mogu formirati na dva načina i to
   a) posebno u levoj i desnoj tablici i
   b) kombinovanjem ćelija iz obe tablice, tako da pravilna figura ranga r-1 iz leve tablice i pravilna figura ranga r-1 istog položaja u desnoj tablici obrazuju pravilnu figuru ranga r.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Primer 3.2.7. Naći bar jednu minimalnu DNF prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ zadate skupovima indeksa f(1) = {1, 4, 7, 14, 17, 20, 21, 22, 23} i f(b) = {0, 3, 6, 19, 30}.

Rešenje: Minimalna DNF prekidačke funkcije je

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{x}_2\overline{x}_3x_5 + \overline{x}_2x_4x_5 + \overline{x}_2x_3\overline{x}_5 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_3x_4\overline{x}_5$$

$x_1=0$

x_4x_5 \ x_2x_3	00	01	11	10
00	b_{0}	1_{4}	0_{12}	0_{8}
01	1_{1}	0_{5}	0_{13}	0_{9}
11	b_{3}	1_{7}	0_{15}	0_{11}
10	0_{2}	b_{6}	1_{14}	0_{10}

$x_1=1$

x_4x_5 \ x_2x_3	00	01	11	10
00	0_{16}	1_{20}	0_{28}	0_{24}
01	1_{17}	1_{21}	0_{29}	0_{25}
11	b_{19}	1_{23}	0_{31}	0_{27}
10	0_{18}	1_{22}	b_{30}	0_{26}

Slika 14 Minimalna DNF za primer 3.2.7.

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Karnaugh-ove karte za n = 6

Za prekidačku funkciju od n = 6 promenljivih u skupu $\{0,1\}^6$ ima 64 vektora, pa tablica ima 64 ćelije (slika 15).

	000	001	011	010	110	111	101	100
000								
001								
011								
010								
110								
111								
101								
100								

Slika 15 Karnaugh-ova karta za n=6

U tablici se po jednoj koordinati razlikuju ne samo

1. fizički susedne ćelije, već i
2. ćelije koje pripadaju i-toj vrsti (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7) kolona označenih sa 000 i 100, zatim kolona označenih sa 001 i 101, i na kraju kolona označenih sa 011 i 111, a takođe i
3. ćelije koje propadaju i-toj koloni (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7) vrsta označenih sa 000 i 100, zatim kolona označenih sa 001 i 101, i na kraju kolona označenih sa 011 i 111.

Pošto se od tablice sa slike 15 ne može formirati pogodna figura na kojoj bi bile fizički susedne sve ćelije koje se razlikuju samo po jednoj koordinati, to je određivanje minimalnih DNF i KNF prekidačkih funkcija sa 6 promenljivih pomoću Karnaugh-ove karte ovog oblika veoma teško.

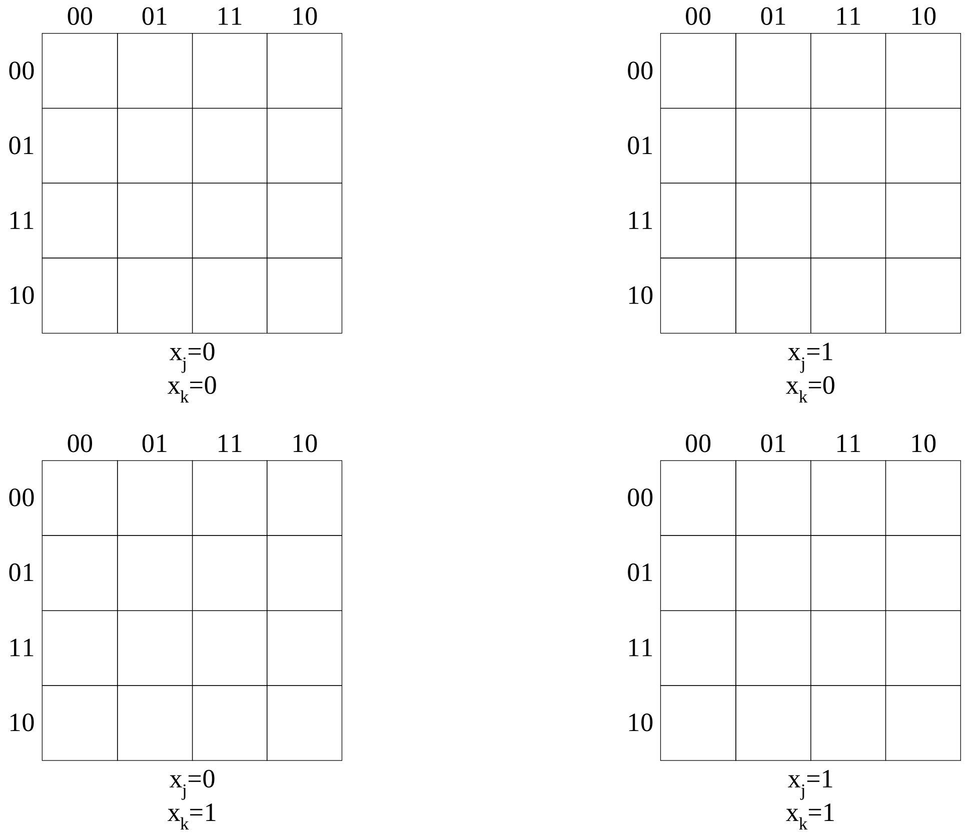
III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

Karnaugh-ova karta prekidačkih funkcija za n = 6 promenljivih se češće crta u obliku datom na slici 16.

Ova karta se crta kao
dve karte prekidačke funkcije sa n = 5 promenljivih odnosno
četiri karte prekidačkih funkcija sa n = 4 promenljive.

U ovoj karti
1. sve ćelije levih tablica imaju koordinatu $x_j = 0$ a desnih $x_j = 1$, dok
2. sve ćelije gornjih tablica imaju koordinatu $x_k = 0$ a donjih $x_k = 1$, pri čemu se
3. x_j i x_k proizvoljno biraju iz skupa promenljivih, dok
4. korespondencija između preostale četiri koordinate vektora iz skupa $\{0,1\}^6$ i ćelija sve četiri tablice mora biti ista.



Slika 16 Drugi oblik Karnaugh-ove karte za n=6

III. MINIMIZACIJA PREKIDAČKIH FUNKCIJA

III.2 ODREĐIVANJE MINIMALNIH DNF I KNF POMOĆU KARNAUGH-OVIH KARTI

U Karnaugh-ovoj karti za n = 6

1. za r = 0, pravilne figure su pojedinačne ćelije koje se mogu nalaziti samo u jednoj od četiri tablice,
2. za r = 6, pravilna figura pokriva svečetiri tablice, dok se
3. za r = 1, 2, 3, 4 i 5 pravilne figure mogu se formirati na tri načina i to
   - a) posebno u svakoj od četiri tablice,
   - b) kombinovanjem ćelija iz dve leve, ili dve desne, ili dve gornje, ili dve donje tablice, tako da pravilne figure istog položaja ranga r-1 iz dve tablice obrazuju pravilnu figuru ranga r.
   - c) kombinovanjem ćelija iz sve četiri tablice, tako da
     - pravilna figura ranga r-1 iz gornje dve tablice i pravilna figura ranga r-1 istog položaja u donje dve tablice ili
     - pravilna figura ranga r-1 iz leve dve tablice i pravilna figura ranga r-1 istog položaja u desne dve tablice

     obrazuju pravilnu figuru ranga r.

Napomena: Karnaugh-ove karte mogu da se koriste za prekidačke funkcije do 6 promenljivih. U slučaju većeg broja promenljivih Karnaugh-ove karte su veoma nepregledne i ne mogu da se koriste.

Primer 3.2.8. Naći bar jednu minimalnu DNF prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ zadate skupovima indeksa f(1) = {0, 1, 3, 4, 5, 11, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 30, 31, 32, 33, 36, 37, 43, 47, 48, 49, 52, 53, 58, 62}.

Rešenje: Minimalna DNF prekidačke funkcije je

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \overline{x}_3\overline{x}_5 + \overline{x}_2x_3x_5x_6 + \overline{x}_1x_3x_4x_5 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4x_6 + x_1x_2x_3x_5\overline{x}_6$$

$x_5x_6 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	1 $_{4}$	0 $_{12}$	0 $_{8}$
01	1 $_{1}$	1 $_{5}$	0 $_{13}$	0 $_{9}$
11	1 $_{3}$	0 $_{7}$	1 $_{15}$	1 $_{11}$
10	0 $_{2}$	0 $_{6}$	1 $_{14}$	0 $_{10}$

$x_1=0$
$x_2=0$

$x_5x_6 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1 $_{32}$	1 $_{36}$	0 $_{44}$	0 $_{40}$
01	1 $_{33}$	1 $_{37}$	0 $_{45}$	0 $_{41}$
11	0 $_{35}$	0 $_{39}$	1 $_{47}$	1 $_{43}$
10	0 $_{34}$	0 $_{38}$	0 $_{46}$	0 $_{42}$

$x_1=1$
$x_2=0$

$x_5x_6 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1 $_{16}$	1 $_{20}$	0 $_{28}$	0 $_{24}$
01	1 $_{17}$	1 $_{21}$	0 $_{29}$	0 $_{25}$
11	0 $_{19}$	0 $_{23}$	1 $_{31}$	0 $_{27}$
10	0 $_{18}$	0 $_{22}$	1 $_{30}$	0 $_{26}$

$x_1=0$
$x_2=1$

$x_5x_6 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1 $_{48}$	1 $_{52}$	0 $_{60}$	0 $_{56}$
01	1 $_{49}$	1 $_{53}$	0 $_{61}$	0 $_{57}$
11	0 $_{51}$	0 $_{55}$	0 $_{63}$	0 $_{59}$
10	0 $_{50}$	0 $_{54}$	1 $_{62}$	1 $_{58}$

$x_1=1$
$x_2=1$

Slika 17 Minimalna DNF za primer 3.2.8.