

# **ВЕЖБЕ ИЗ ОСНОВА РАЧУНАРСКЕ ТЕХНИКЕ 1**

**ВЕРЗИЈА 2017 1.0**

# МИНИМИЗАЦИЈА ПРЕКИДАЧКИХ ФУНКЦИЈА

Минимизација је поступак одређивања најпростијег израза између више израза, којима се може представити прекидачка функција.

За поређење израза служи нека величина која у најпростијем изразу има минималну вредност, као на пример: минималан број производа/сума у ДНФ/КНФ, минималан број симбола променљивих,...

Највећи значај код прекидачких функција има минимизација израза представљеног у облику ДНФ и КНФ.

Функција  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  је **импликанта** функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ако има вредност 0 на свим векторима на којима и  $f$  има вредност 0.

Функција  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  је **имплицента** функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ако има вредност 1 на свим векторима на којима и  $f$  има вредност 1.

Сваки елементарни производ у ДНФ представља **импликанту**  $f$ -је.

Свака елементарна сума у КНФ представља **имплиценту**  $f$ -је.

**Проста импликанта**  $f$ -је  $f$  - елементарни производ чији ни један део није импликанта  $f$ -је  $f$ .

**Проста имплицента**  $f$ -је  $f$  - елементарни сума чији ни један део није имплицента  $f$ -је  $f$ .

**Битна импликанта** - проста импликаната којој припада неки вектор на којем  $f$ -ја има вредност 1, а који не припада ни једној другој простој импликанти.

**Битна имплицента** - проста имплицента којој припада неки вектор на којем  $f$ -ја има вредност 0, а који не припада ни једној другој простој имплиценти.

**Члан** - елементарни производ или сума.

**Дегенерисани члан** - члан који се састоји од само једног слова.

## Критеријуми минимизације:

1. ДНФ (КНФ) прекидачке  $f$ -је је **минимална** ако не постоји друга са мање недегенерисаних чланова, или са истим бројем недегенерисаних чланова али са мање слова у тим члановима.

2. ДНФ (КНФ) прекидачке  $f$ -је је **минимална** уколико не постоји друга у којој је збир броја слова у недегенерисаним члановима и броја (свих) чланова мањи.

Минимална ДНФ (КНФ) према 1. или 2. критеријуму мора представљати суму простих импликанти (производ простих имплиценти). Обрнуто не важи.

ДНФ (КНФ) је **непреопширна** ако се ни један члан из ње не може удаљити или заменити својим делом а да добијени израз представља и даље ту функцију.

Методe минимизације се деле на **графичке** и **алгоритамске**. Графичке су једноставније али су погодне само за функције мањег броја променљивих

## Графичка метода минимизације, помоћу *Karnaugh*-ових карата

Карноова карта је таблица са  $2^n$  ћелија. Свакој ћелији је придружен један вектор из скупа  $\{0,1\}^n$ , и то тако да се физички суседни вектори разликују само по једној координати. Карноова карта за  $f$ -ју од 4 променљиве  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  представљена је на слици.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

У ћелије су уписани индекси вектора који су им придружени: првој ћелији вектор 0000 (0), другој ћелији вектор 0001 (1), трећој ћелији 0011 (3), четвртој 0010 (2),...

**Правилна фигура ранга  $r$**  - скуп  $2^r$  ћелија са  $(n-r)$  једнаких координата.

$r=0$  – појединачне ћелије (*потпуни члан*)

$r=n$  – цела карта (*константа*)

Фигуре:

Фигура која обухвата вектор са индексом 4:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

Фигура која обухвата векторе са индексима 8,9:

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$\{1000, 1001\} = \{100X\}$$

Фигура која обухвата векторе са индексима 2,3,6,7:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_3$$

$$\{001X, 011X\} = \{0X1X\}$$

### Задатак 16.

Одредити помоћу Карноове карте бар једну минималну ДНФ потпуно дефинисане прекидачке функције  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  задате скупом индекса:

а)  $f(1) = \{2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13\}$

б)  $f(0) = \{1, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15\}$

### Решење

а) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. У овом случају ситуација је једноставна, јер је потребно пронаћи минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ , па директно попуњавамо Карноову карту.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

Сада треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = \bar{x}_1 x_3$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити векторе који је чине. Затим формирамо фигуру В, ранга 1:

$$B = x_2 \bar{x}_3 x_4$$

Вектори које покрива ова фигура, могли су бити покривени другачијим фигурама истог ранга, али би нас то довело до решења које није минимално. На крају формирамо фигуру С, ранга 1:

$$C = x_1 \bar{x}_2 x_4$$

Вектори које покрива ова фигура, могли су бити покривени другачијим фигурама истог ранга, али би нас то довело до решења које није минимално. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = \bar{x}_1 x_3 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4$$

Треба обратити пажњу да је могуће погрешним избором правилних фигура направити грешку и за исту Карноову карту добити и другачија решења, која нису минимална, па нису ни тачна. Пример једног погрешног одабира правилних фигура дат је у наставку.

C

	$x_1 x_2$	00	01	11	10
$x_3 x_4$	00	0	0	0	0
	01	0	1	1	1
B	11	1	1	0	1
	10	1	1	0	0
A		0	4	12	8
		1	5	13	9
		3	7	15	11
		2	6	14	10

D

У овом случају формирали смо фигуру А, ранга 2, као и у тачном решењу:

$$A = \bar{x}_1 x_3$$

Затим формирамо фигуру В, ранга 1, како би покрили вектор 0101:

$$B = \bar{x}_1 x_2 x_4$$

Затим формирамо фигуру С, ранга 1, како би покрили вектор 1101:

$$C = x_1 \bar{x}_3 x_4$$

Затим формирамо фигуру D, ранга 1, како би покрили вектор 1011:

$$D = x_1 \bar{x}_2 x_4$$

Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = \bar{x}_1 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_4 + x_1 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4$$

Као што се види поређењем овог решења са претходним, прво је минимално, док друго није. Треба водити рачуна осим о томе да се формирају правилне фигуре што већег ранга, такође и да буде што мањи број правилних фигура.

б) У овом случају потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ , јер се тражи минимална ДНФ. Пошто се ради о потпуно дефинисаној функцији, која зависи од 4 променљиве, имамо 16 различитих вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(1)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност нула.

$$f(1) = \{0, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$$

Сада је потребно нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Пошто је потребно пронаћи минималну ДНФ, а одредили смо скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ , можемо попунити Карноову карту.

		$x_1x_2$			
		00	01	11	10
$x_3x_4$	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	1
	11	1	1	0	0
	10	1	0	0	1
		0	4	12	8
		1	5	13	9
		3	7	15	11
		2	6	14	10

Сада треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = \bar{x}_2\bar{x}_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити векторе који је чине. Затим формирамо фигуру В, ранга 1:

$$B = \bar{x}_1x_3x_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 0111. Затим формирамо фигуру С, ранга 1:

$$C = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 1001. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = \bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

Могуће је усвојити и другачији распоред променљивих приликом цртања Карноове карте и добити тачно решење. Треба водити рачуна о томе да је у том случају распоред вектора у Карноовој карти другачији, него што је када применимо стандардни начин обележавања. У овом случају приказан је један другачији начин обележавања променљивих у Карноовој карти.

		$x_1x_3$			
		00	01	11	10
$x_2x_4$	00	1	1	1	1
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	0
	10	0	0	0	0
		0	2	10	8
		1	3	11	9
		5	7	15	13
		4	6	14	12

Сада треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити векторе који је чине. Затим формирамо фигуру В, ранга 1:

$$B = \bar{x}_1 x_3 x_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 0111. Затим формирамо фигуру С, ранга 1:

$$C = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 1001. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

## Задатак 17.

Одредити помоћу Карноове карте бар једну минималну КНФ прекидачке  $f$ -је  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  задате скупом индекса:

а)  $f(0) = \{0, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14\}$

б)  $f(1) = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 14, 15\}$

## Решење

а) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. У овом случају ситуација је једноставна, јер је потребно пронаћи минималну КНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ , па директно попуњавамо Карноову карту.

	$x_1 x_2$			
	00	01	11	10
$x_3 x_4$	00	1	0	1
F	0	4	12	8
01	1	0	0	0
E <sub>2</sub>	1	5	13	9
11	0	0	1	0
E <sub>1</sub>	3	7	15	11
10	1	0	0	1
	2	6	14	10
			D	B

Сада треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). У овом случају распоред нула је такав да је могуће пронаћи неколико различитих једнако минималних решења. На горњој слици приказана су два различита решења која су једнако минимална. Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 1:

$$A = \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4$$

Затим формирамо фигуру В, ранга 1:

$$B = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4$$

Затим формирамо фигуру С, ранга 1:

$$C = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4$$

Затим формирамо фигуру D, ранга 1:

$$D = x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

Затим формирамо фигуру E<sub>1</sub>, ранга 1:

$$E_1 = x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$$

Затим формирамо фигуру  $E_2$ , ранга 1:

$$E_2 = x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$$

Затим формирамо фигуру  $F$ , ранга 0:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

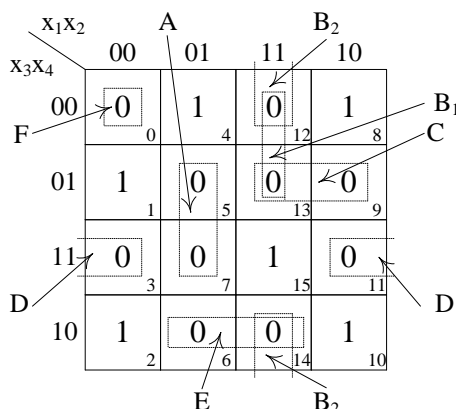
Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама. Имамо два различита једнако минимална решења, у зависности од тога да ли користимо фигуру  $E_1$ :

$$f = (\bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

или  $E_2$ :

$$f = (\bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Треба обратити пажњу да је могуће другачијим избором правилних фигура за исту Карноову карту добити и потпуно другачија решења, која су минимална. Пример једног другачијег одабира правилних фигура које доводе до тачног решења дат је у наставку.



Прва фигура коју формирамо је фигура  $A$ , ранга 1:

$$A = x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4$$

Затим формирамо фигуру  $B_1$ , ранга 1:

$$B_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$$

Затим формирамо фигуру  $B_2$ , ранга 1:

$$B_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4$$

Затим формирамо фигуру  $C$ , ранга 1:

$$C = \bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4$$

Затим формирамо фигуру  $D$ , ранга 1:

$$D = x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$$

Затим формирамо фигуру  $E$ , ранга 1:

$$E = \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4$$

Затим формирамо фигуру  $F$ , ранга 0:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама. Имамо два различита једнако минимална решења, у зависности од тога да ли користимо фигуру  $B_1$ :

$$f = (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4)(x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

или  $B_2$ :

$$f = (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4)(x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Као што се види поређењем овог решења са претходна два, сва решења су једнако минимална и међусобно различита.

б) У овом случају потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ , јер се тражи минимална КНФ. Пошто се ради о потпуно дефинисаној функцији, која зависи од 4 променљиве, имамо 16 различитих вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(0)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност један.

$$f(0) = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

Сада је потребно нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Пошто је потребно пронаћи минималну КНФ, а одредили смо скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ , можемо попунити Карноову карту.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	1	0

Сада треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = x_3 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 1100. Затим формирамо фигуру В, ранга 2:

$$B = x_1 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 0110. Затим формирамо фигуру С, ранга 2:

$$C = x_2 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 1010. Затим формирамо фигуру D, ранга 1:

$$D = x_1 + \bar{x}_2 + x_3$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 0101. Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама:

$$f = (x_3 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)$$

## Задатак 18.

Применом Карноових карата наћи минималну

а) ДНФ  $f$ -је:  $f = \bar{x}_1x_2 + x_1x_2\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3$

б) КНФ  $f$ -је:  $f = (x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_2 + x_4)(x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4)$

## Решење

а) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију која зависи од 4 променљиве и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. У задатку под а) тражи се минимална ДНФ, а дат је израз у облику ДНФ. Потребно је одредити векторе на којима функција има вредност један, што је у овом случају једноставно.



$$f(1)=\{01XX, 11X0, X100, 111X, 0X10, 110X\}$$

$$f(1)=\{2, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$$

Након тога можемо попунити Карноову карту.

$x_1x_2$		00	01	11	10
$x_3x_4$	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	1	1	1	0

B

Сада треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 3:

$$A = x_2$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити векторе који је чине. Затим формирамо фигуру В, ранга 1:

$$B = \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 0010. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = x_2 + \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$$

б) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију која зависи од 4 променљиве и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. У задатку под б) тражи се минимална КНФ, а дат је израз у облику КНФ. Потребно је одредити векторе на којима функција има вредност нула, што је у овом случају једноставно.

$$f(0)=\{000X, X1X0, XX01, 1X01\}$$

$$f(0)=\{0, 1, 4, 5, 6, 9, 12, 13, 14\}$$

Након тога можемо попунити Карноову карту.

$x_1x_2$		00	01	11	10
$x_3x_4$	00	0	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	0	0	1

B

Сада треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = x_3 + \bar{x}_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 1001. Затим формирамо фигуру В, ранга 2:

$$B = \bar{x}_2 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити векторе које покрива. Затим формирамо фигуру C, ранга 2:

$$C = x_1 + x_3$$

Ово је фигура највећег ранга којом је могуће покрити вектор 0000. Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама:

$$f = (x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + x_4)(x_1 + x_3)$$

## Задатак 19.

Наћи помоћу Карноове карте минималну КНФ и минималну ДНФ прекидачке функције  $f(x_1, x_2, x_3)$  задате скупом индекса:

а)  $f(1) = \{0, 1, 4, 5, 6\}$

б)  $f(0) = \{2, 3, 6, 7\}$

## Решење

У овом задатку демонстрирано је како изгледа Карноова карта за функцију која зависи од 3 променљиве.

$x_1 x_2$		$x_3$			
		00	01	11	10
$x_3$	0	0	2	6	4
	1	1	3	7	5

$x_1$		$x_2 x_3$	
		0	1
$x_2 x_3$	00	0	4
	01	1	5
	11	3	7
	10	2	6

а) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ и минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ , потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ . Пошто се ради о потпуно дефинисаној функцији, која зависи од 3 променљиве, имамо 8 различитих вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(0)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност један.

$$f(0) = \{2, 3, 7\}$$

Након тога попуњавамо Карноову карту.

$x_1 x_2$		$x_3$			
		00	01	11	10
$x_3$	00	1	0	1	1
	01	1	0	0	1

Додатно су на карти означене групе покривања: A (покрива 000, 010, 100, 110), B (покрива 001, 011, 101, 111), C (покрива 000, 001, 010, 011), D (покрива 010, 011, 100, 101).

Да бисмо добили минималну ДНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура A, ранга 2:

$$A = \bar{x}_2$$

Затим формирамо фигуру В, ранга 1:

$$B = x_1 \bar{x}_3$$

Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_3$$

Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти).

Прва фигура коју формирамо је фигура С, ранга 1:

$$C = x_1 + \bar{x}_2$$

Затим формирамо фигуру D, ранга 1:

$$D = \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама:

$$f = (x_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

б) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ и минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ , потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ . Пошто се ради о потпуно дефинисаној функцији, која зависи од 3 променљиве, имамо 8 различитих вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(1)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност нула.

$$f(1) = \{0, 1, 4, 5\}$$

Након тога попуњавамо Карноову карту.

		B			
		$x_1 x_2$			
$x_3$	00	00	01	11	10
	00	1	0	0	1
A	01	1	0	0	1
		1	3	7	5

Да бисмо добили минималну ДНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти).

Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = \bar{x}_2$$

Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама, а како имамо само једну фигуру, то је уједно и решење:

$$f = \bar{x}_2$$

Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти).

Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = \bar{x}_2$$

Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама, а како имамо само једну фигуру, то је уједно и решење:

$$f = \bar{x}_2$$

## Задатак 20.

Наћи применом Карноових карата минималну КНФ и минималну ДНФ прекидачке функције

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  задате скупом индекса:

a)  $f(0) = \{0, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 20, 25, 27, 29, 31\}$

б)  $f(1) = \{1, 2, 6, 7, 9, 13, 14, 15, 17, 22, 23, 25, 29, 30, 31\}$

## Решење

У овом задатку демонстрирано је како изгледа Карноова карта за функцију која зависи од 5 променљивих.

$x_2x_3$ $x_4x_5$		$x_1=0$			
		00	01	11	10
00	0	4	12	8	
01	1	5	13	9	
11	3	7	15	11	
10	2	6	14	10	

$x_2x_3$ $x_4x_5$		$x_1=1$			
		00	01	11	10
00	16	20	28	24	
01	17	21	29	25	
11	19	23	31	27	
10	18	22	30	26	

а) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ и минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ , потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ . Пошто се ради о потпуно дефинисаној функцији, која зависи од 5 променљивих, имамо 32 различита вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(1)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност нула.

$f(1) = \{1, 2, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 30\}$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне ДНФ.

$x_2x_3$ $x_4x_5$		$x_2x_3$			
		00	01	11	10
00	0	0	1	1	
01	1	1	0	0	
11	0	0	0	0	
10	1	1	1	1	

$x_1=0$

$x_2x_3$ $x_4x_5$		$x_2x_3$			
		00	01	11	10
00	0	0	1	1	
01	1	1	0	0	
11	1	1	0	0	
10	1	1	1	1	

$x_1=1$

Да бисмо добили минималну ДНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 3:

$$A = x_4 \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру В, ранга 3:

$$B = x_2 \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру С, ранга 2:

$$C = \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру D, ранга 2:

$$D = x_1 \bar{x}_2 x_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = x_4 \bar{x}_5 + x_2 \bar{x}_5 + \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 + x_1 \bar{x}_2 x_5$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне КНФ.

		$x_2 x_3$			
		00	01	11	10
$x_4 x_5$	00	0	0	1	1
	01	1	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	1	1
		$x_1=0$			

		$x_2 x_3$			
		00	01	11	10
$x_4 x_5$	00	0	0	1	1
	01	1	1	0	0
	11	1	1	0	0
	10	1	1	1	1
		$x_1=1$			

Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура A, ранга 3:

$$A = \bar{x}_2 + \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру B, ранга 2:

$$B = x_1 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру C, ранга 2:

$$C = x_2 + x_4 + x_5$$

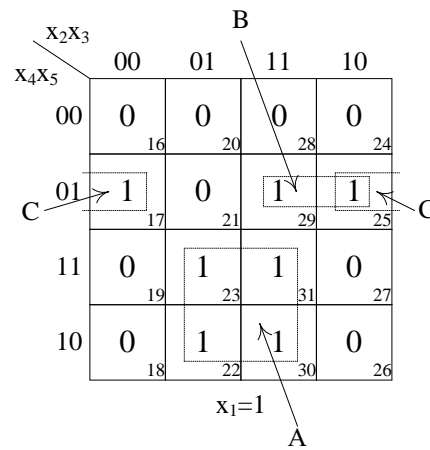
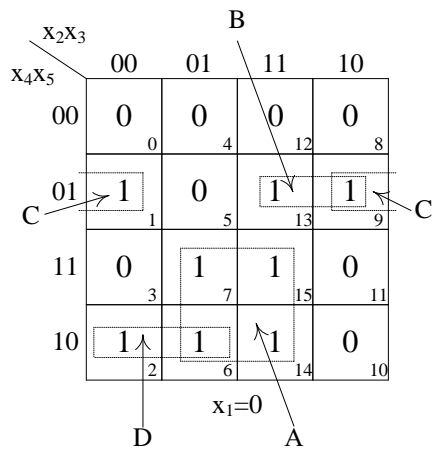
Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама:

$$f = (\bar{x}_2 + \bar{x}_5)(x_1 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5)(x_2 + x_4 + x_5)$$

б) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попуњити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ и минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ , потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ . Пошто се ради о потпуно дефинисаној функцији, која зависи од 5 променљивих, имамо 32 различита вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(0)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност један.

$$f(0) = \{0, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 16, 18, 19, 20, 21, 24, 26, 27, 28\}$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне ДНФ.



Да бисмо добили минималну ДНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 3:

$$A = x_3 x_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру В, ранга 2:

$$B = x_2 \bar{x}_4 x_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру С, ранга 2:

$$C = \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$$

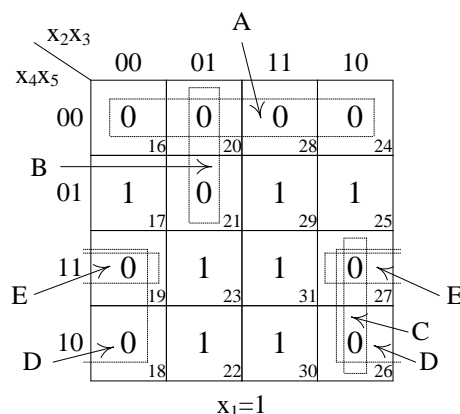
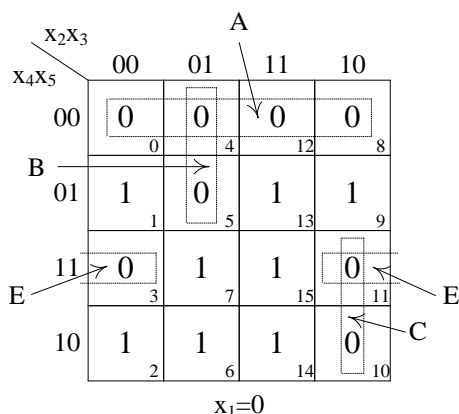
Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру D, ранга 1:

$$D = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 00010. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = x_3 x_4 + x_2 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне КНФ.



Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 3:

$$A = x_4 + x_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру В, ранга 2:

$$B = x_2 + \bar{x}_3 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру C, ранга 2:

$$C = \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 01010. Затим формирамо фигуру D, ранга 2:

$$D = \bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 10010. Затим формирамо фигуру E, ранга 2:

$$E = x_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 00011. Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама:

$$f = (x_4 + x_5)(x_2 + \bar{x}_3 + x_4)(\bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4)(x_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5)$$

## Задатак 21.

Наћи применом Карноових карата минималну ДНФ прекидачке функције  $f(x_1, \dots, x_6)$  задате скупом индекса  $f(1) = \{1, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 24, 27, 30, 31, 40, 43, 45, 47, 56, 59, 62, 63\}$

## Решење

У овом задатку демонстрирано је како изгледа Карноова карта за функцију која зависи од 6 променљивих.

$x_3x_4$ $x_5x_6$		00	01	11	10
		00	01	11	10
00	00	0	4	12	8
01	01	1	5	13	9
11	11	3	7	15	11
10	10	2	6	14	10

$x_1=0$   
 $x_2=0$

$x_3x_4$ $x_5x_6$		00	01	11	10
		00	01	11	10
00	00	32	36	44	40
01	01	33	37	45	41
11	11	35	39	47	43
10	10	34	38	46	42

$x_1=1$   
 $x_2=0$

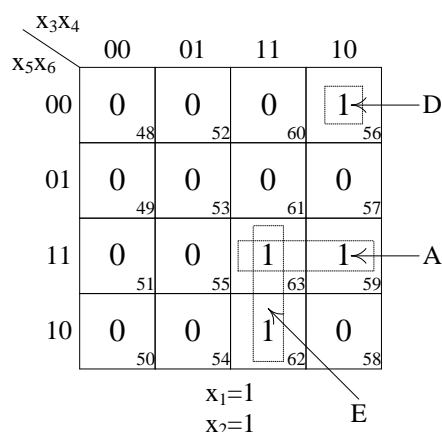
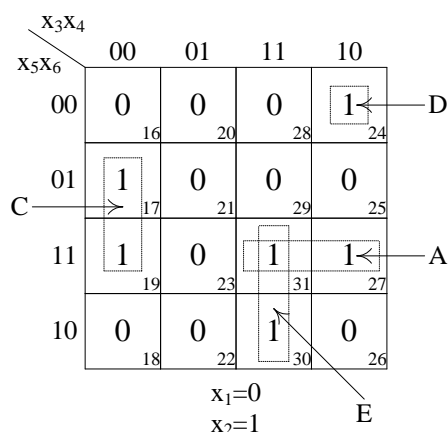
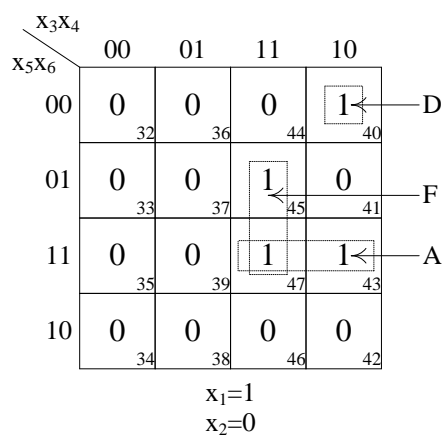
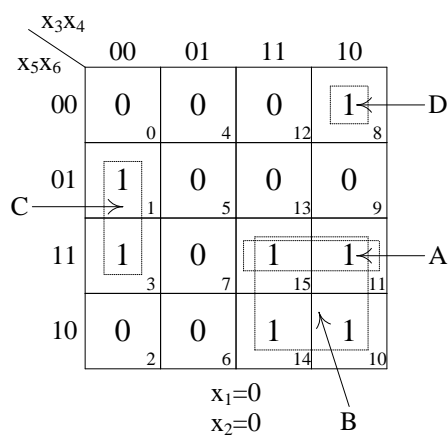
$x_3x_4$ $x_5x_6$		00	01	11	10
		00	01	11	10
00	00	16	20	28	24
01	01	17	21	29	25
11	11	19	23	31	27
10	10	18	22	30	26

$x_1=0$   
 $x_2=1$

$x_3x_4$ $x_5x_6$		00	01	11	10
		00	01	11	10
00	00	48	52	60	56
01	01	49	53	61	57
11	11	51	55	63	59
10	10	50	54	62	58

$x_1=1$   
 $x_2=1$

Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$  можемо директно да попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне ДНФ.



Да бисмо добили минималну ДНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 3:

$$A = x_3 x_5 x_6$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру В, ранга 2:

$$B = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру С, ранга 2:

$$C = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_6$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру D, ранга 2:

$$D = x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру Е, ранга 2:

$$E = x_2 x_3 x_4 x_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру F, ранга 1:

$$F = x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_6$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 101101. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = x_3 x_5 x_6 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_6 + x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 + x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_6$$



## Задатак 22.

Наћи помоћу Карноове карте минималну ДНФ и минималну КНФ следећих непотпуно дефинисаних прекидачких функција задатих скуповима индекса:

а)  $f(0)=\{0,4,10,12,14\}$   $f(b)=\{6,7,8,9,11,15\}$   $n=4$

б)  $f(1)=\{1,4,6,10,20,22,24,26\}$   $f(b)=\{0,11,16,27\}$   $n=5$

в)  $f(0)=\{0,2,3,6,7\}$   $f(b)=\{1,4,5\}$   $n=3$

г)  $f(0)=\{0,2,3,6,7\}$   $f(b)=\{1,4,5\}$   $n=4$

$n$  представља број променљивих од којих функција зависи.

## Решење

Вектори на којима прекидачка функција није дефинисана у Карноовој карти се обележавају са  $b$  и могу да помогну да се добије минималније решење. Наиме, како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, можемо користити ту вредност или као нулу или као јединицу, уколико ће нам то помоћи да добијемо фигуру већег ранга.

а) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ и минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$  и скуп вектора на којима функција није дефинисана  $f(b)$ , потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ . Пошто се ради о непотпуно дефинисаној функцији, која зависи од 4 променљиве, имамо 16 различитих вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(1)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност нула и на којима нема вредност  $b$ .

$$f(1)=\{1, 2, 3, 5, 13\}$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне ДНФ.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$		$x_1x_2$			
		00	01	11	10
$x_3x_4$	00	0 0	0 4	0 12	b 8
	01	1 1	1 5	1 13	b 9
	11	1 3	b 7	b 15	b 11
	10	1 2	b 6	0 14	0 10

Да бисмо добили минималну ДНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = \bar{x}_1x_3$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 0010. Затим формирамо фигуру В, ранга 3:

$$B = x_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = \bar{x}_1x_3 + x_4$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне КНФ.

$x_1x_2$		00	01	11	10
$x_3x_4$	00	0	0	0	b
	01	1	1	1	b
	11	1	b	b	b
	10	1	b	0	0
		0	4	12	8
		1	5	13	9
		3	7	15	11
		2	6	14	10

A: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3)  
 B: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)  
 C: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3)

Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Захваљујући распореду нула и вектора на којима функција није дефинисана, имамо два различита решења, која су једнако минимална. Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = x_3 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру В, ранга 2:

$$B = \bar{x}_1 + \bar{x}_3$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру С, ранга 2:

$$C = \bar{x}_1 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама и то на два начина, у зависности од тога да ли желимо да употребимо фигуру В:

$$f = (x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)$$

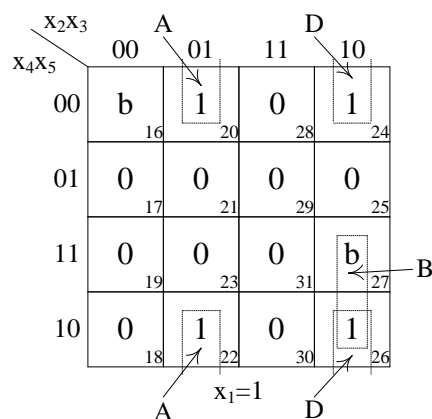
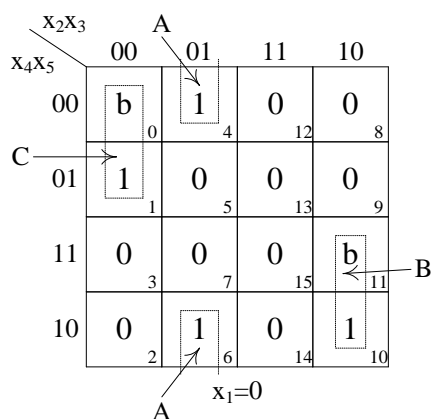
или фигуру С:

$$f = (x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + x_4)$$

б) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ и минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$  и скуп вектора на којима функција није дефинисана  $f(b)$ , потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ . Пошто се ради о непотпуно дефинисаној функцији, која зависи од 5 променљивих, имамо 32 различита вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(0)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност нула и на којима нема вредност  $b$ .

$$f(0) = \{2, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 28, 29, 30, 31\}$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне ДНФ.



Да бисмо добили минималну ДНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 2:

$$A = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру  $B$ , ранга 2:

$$B = x_2 \bar{x}_3 x_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 01010. Затим формирамо фигуру C, ранга 1:

$$C = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

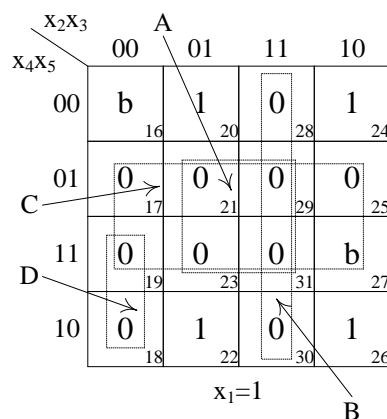
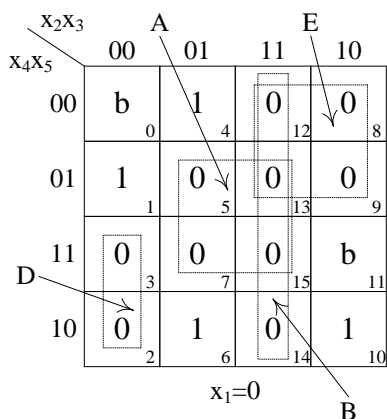
Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 00001. Затим формирамо фигуру D, ранга 1:

$$D = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива вектор 11000. Коначно решење добијамо као суму елементарних производа, који одговарају означеним фигурама:

$$f = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне КНФ.



Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 3:

$$A = \bar{x}_3 + \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру  $B$ , ранга 3:

$$B = \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру  $S$ , ранга 3:

$$C = \bar{x}_1 + \bar{x}_5$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру D, ранга 2:

$$D = x_2 + x_3 + \bar{x}_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру E, ранга 2:

$$E = x_1 + \bar{x}_2 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама:

$$f = (\bar{x}_3 + \bar{x}_5)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_5)(x_2 + x_3 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + x_4)$$

в) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ и минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$  и скуп вектора на којима функција није дефинисана  $f(b)$ , потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ . Пошто се ради о непотпуно дефинисаној функцији, која зависи од 3 променљиве, имамо 8 различитих вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(1)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност нула и на којима нема вредност  $b$ .

$$f(1) = \{ \}$$

У овом случају имамо ситуацију да је скуп вектора на којима функција има вредност један празан.

		$x_1 x_2$			
		00	01	11	10
$x_3$	0	0	0	0	b
	1	b	0	0	b

За овакву функцију није могуће пронаћи ДНФ, већ само КНФ. Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Прва и једина фигура коју формирамо је фигура A, ранга 3:

$$A = 0$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење представља једина фигура коју смо означили, што значи да ова функција има вредност константе нула:

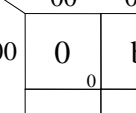
$$f = 0$$

г) Потребно је нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ и минималну ДНФ, а дат је скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$  и скуп вектора на којима функција није дефинисана  $f(b)$ , потребно је прво одредити скуп вектора на којима функција има вредност један  $f(1)$ . Пошто се ради о непотпуно дефинисаној функцији, која зависи од 4 променљиве, имамо 16 различитих вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(1)$  одређујемо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност нула и на којима нема вредност  $b$ .

$$f(1) = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне ДНФ.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$		00	01	11	10
		00	01	11	10
00	0 0	b 4	1 12	1 8	
01	b 1	b 5	1 13	1 9	
11	0 3	0 7	1 15	1 11	
10	0 2	0 6	1 14	1 10	



Да бисмо добили минималну ДНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 1 буду покривени (све јединице у Карноовој карти). Прва и једина фигура коју формирамо је фигура А, ранга 3:

$$A = x_1$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење представља једина фигура коју смо означили:

$$f = x_1$$

Након тога попуњавамо Карноову карту за проналажење минималне КНФ.

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$		00	01	11	10
		00	01	11	10
00	0 <sub>0</sub>	b <sub>4</sub>	1 <sub>12</sub>	1 <sub>8</sub>	
01	b <sub>1</sub>	b <sub>5</sub>	1 <sub>13</sub>	1 <sub>9</sub>	
11	0 <sub>3</sub>	0 <sub>7</sub>	1 <sub>15</sub>	1 <sub>11</sub>	
10	0 <sub>2</sub>	0 <sub>6</sub>	1 <sub>14</sub>	1 <sub>10</sub>	

Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Захваљујући распореду нула и вектора на којима функција није дефинисана, имамо два различита решења, која су једнако минимална. Прва и једина фигура коју формирамо је фигура А, ранга 3:

$$A = x_1$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење представља једина фигура коју смо означили:

$$f = x_1$$

У овом случају добили смо да ДНФ и КНФ функције изгледају исто.

## Задатак 23.

Помоћу Карноових карти наћи минималну КНФ функције  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  задате следећим изразом  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_4 \cdot (x_1 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4)) \cdot (x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)$ .

## Решење

Да бисмо могли да формирамо Карноову карту како би одредили минималну КНФ функције која нам се тражи у задатку треба да одредимо скуп вектора на којима функција има вредност нула  $f(0)$ . Да бисмо одредили овај скуп, прво треба да средимо израз којим је описана функција.

Прво примењујемо Де Морганову теорему на израз  $\overline{(x_1 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})}$  и добијамо  $\overline{x_1}(x_2 + x_3 + x_4)$ .

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \overline{x_2}\overline{x_3} + \overline{x_1}x_4(x_2 + x_3 + x_4) \cdot (x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2})$$

Након тога извршимо множење израза  $\overline{x_1}x_4(x_2 + x_3 + x_4)$  и добијамо  $(\overline{x_1}x_2x_4 + \overline{x_1}x_3x_4 + \overline{x_1}x_4)$ .

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \overline{x_2}\overline{x_3} + (\overline{x_1}x_2x_4 + \overline{x_1}x_3x_4 + \overline{x_1}x_4) \cdot (x_3 + \overline{x_1}\overline{x_2})$$

Затим помножимо заграде и применимо правила Булове алгебре  $x_i\overline{x_i} = 0$ ,  $x_ix_i = x_i$  и  $x_i + x_i = x_i$ .

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \overline{x_2}\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + \overline{x_1}x_3x_4 + \overline{x_1}\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}\overline{x_2}x_4$$

Затим извлачимо изразе испред заграде, тако да добијемо заграде у којима имамо операцију сабирања са један.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \overline{x_2}\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3x_4(x_2 + 1) + \overline{x_1}\overline{x_2}x_4(x_3 + 1)$$

На крају примењујемо правило Булове алгебре  $x_i + 1 = 1$  и добијамо сређени израз у облику ДНФ.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \overline{x_2}\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3x_4 + \overline{x_1}\overline{x_2}x_4$$

На основу ДНФ лакше нам је да одредимо скуп вектора на којима функција има вредност један. То радимо тако што за сваки елементарни производ у ДНФ формирамо одговарајући куб и на тај начин добијамо скуп кубова на којима функција има вредност један  $f(1)$ .

$$f(1) = \{1XXX, X00X, 0X11, 00X1\}$$

Затим извршимо потпуно развијање кубова из скупа  $f(1)$  и добијамо скуп свих вектора на којима функција има вредност један.

$$f(1) = \{1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 0000, 0001, 1000, 1001, 0011, 0111, 0001, 0011\} = \{0, 1, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Пошто се ради о потпуно дефинисаној функцији која зависи од 4 променљиве, имамо 16 различитих вектора на којима је функција дефинисана, па  $f(0)$ , који нам је потребан да бисмо одредили минималну КНФ, формирамо као скуп свих вектора на којима функција нема вредност један.

$$f(0) = \{2, 4, 5, 6\}$$

Сада је потребно нацртати Карноову карту за функцију  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и означити координате на уобичајен начин (тако да се суседна поља у карти разликују само по једној координати). Након тога треба попунити Карноову карту за конкретну функцију. Због тога што је потребно пронаћи минималну КНФ, а одредили смо скуп вектора на којима функција има вредност нула, можемо попунити Карноову карту за проналажење минималне КНФ.

		$x_1x_2$		A			
				00	01	11	10
$x_3x_4$	00	1	0	1	1	1	1
	01	1	0	1	1	1	1
B	11	1	1	1	1	1	1
	10	0	0	1	1	1	1

Да бисмо добили минималну КНФ треба пронаћи правилне фигуре што је могуће већег ранга, тако да сви вектори на којима функција има вредност 0 буду покривени (све нуле у Карноовој карти). Прва фигура коју формирамо је фигура А, ранга 1:

$$A = x_1 + \overline{x_2} + x_3$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Затим формирамо фигуру В, ранга 1:

$$B = x_1 + \bar{x}_3 + x_4$$

Ово је фигура највећег ранга која покрива векторе који јој припадају. Коначно решење добијамо као производ елементарних сума, које одговарају означеним фигурама:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_3 + x_4)$$

## Задатак 24.

а) Дате су функције  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и  $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Користећи кубове одредити скуп вектора на којима се ове две функције разликују:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_4)$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot \bar{x}_3 + x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$$

б) Одредити СКНФ функције:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_4) + (\bar{x}_1 + x_2 \cdot \bar{x}_4) \right) \cdot \left( (x_2 + x_2 \cdot \bar{x}_4) + (x_2 + x_2 \cdot x_4) \right)$$

## Решење

а) Функције се разликују на оним векторима где имају различите вредности, односно где важи да је  $f(0) = g(1)$  и  $f(1) = g(0)$ . Да бисмо то урадили, можемо за сваку функцију да одредимо вредности на свим векторима, а затим да их упоредимо. Како је функција  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције, а како је функција  $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$  дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_4)$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot \bar{x}_3 + x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$$

$$f(0) = \{000X, 11X1, X11X, 1XX0\}$$

$$g(1) = \{001X, 11X1, 1X0X, X100\}$$

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција  $f$  има вредност нула, односно све векторе на којима функција  $g$  има вредност један:

$$f(0) = \{0000, 0001, 1101, 1111, 0110, 0111, 1110, 1111, 1000, 1010, 1100, 1110\}$$

$$= \{0, 1, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15\}$$

$$g(1) = \{0010, 0011, 1101, 1111, 1000, 1001, 1100, 1101, 0100, 1100\}$$

$$= \{2, 3, 4, 8, 9, 12, 13, 15\}$$

Када одредимо  $f(0)$  и  $g(1)$ , морамо да одредимо и  $f(1)$  и  $g(0)$ . Пошто се ради о потпуно дефинисаној прекидачкој функцији, функција  $f$  има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију  $g$ , која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

$$f(1) = \{2, 3, 4, 5, 9, 11\}$$

$$g(0) = \{0, 1, 5, 6, 7, 10, 11, 14\}$$

Комбинациона таблица за функције  $f$  и  $g$  изгледа овако:

i	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	f	g
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	1	1
4	0	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1	1
10	1	0	1	0	0	0
11	1	0	1	1	1	0
12	1	1	0	0	0	1
13	1	1	0	1	0	1
14	1	1	1	0	0	0
15	1	1	1	1	0	1

Као што видимо скуп вектора на којима се функције разликују, односно где важи  $f(0) = g(1)$  и  $f(1) = g(0)$  је следећи: { 5, 8, 11, 12, 13, 15 }

$$\begin{aligned}
 6) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{(\overline{x_1 \cdot x_3} + \overline{x_4}) + (\overline{x_1 + x_2 \cdot x_4})} \cdot \overline{(\overline{x_2 + x_2 \cdot x_4}) + (\overline{x_2 + x_2 \cdot x_4})} \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{(\overline{x_1 \cdot x_3} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1 + x_2 \cdot x_4})} \cdot \overline{(\overline{x_2 + x_2 \cdot x_4}) \cdot (\overline{x_2 + x_2 \cdot x_4})} \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (\overline{x_1 \cdot x_3} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1 + x_2 \cdot x_4}) \cdot (\overline{x_2 + x_2 \cdot x_4}) \cdot (\overline{x_2 + x_2 \cdot x_4}) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= ((x_1 + x_3) + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + (\overline{x_2} + x_4)) \cdot (x_2 + (\overline{x_2} + x_4)) \cdot (x_2 + (\overline{x_2} + \overline{x_4})) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + x_3 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_4) \cdot (x_2 + \overline{x_2} + x_4) \cdot (x_2 + \overline{x_2} + \overline{x_4}) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + x_3 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_4) \cdot ((x_2 + \overline{x_2}) + x_4) \cdot ((x_2 + \overline{x_2}) + \overline{x_4}) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + x_3 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_4) \cdot (1 + x_4) \cdot (1 + \overline{x_4}) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + x_3 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_4)
 \end{aligned}$$

$$f(0) = \{0X01, 11X0\} = \{0001, 0101, 1100, 1110\} = \{1, 5, 12, 14\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + \overline{x_4})(x_1 + \overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 + x_4)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + x_4)$$

## Задатак 25.

Помоћу Карноових карти наћи минималну:

а) ДНФ функције:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{((x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot x_4 + (x_1 + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_3} + \overline{x_4}) + (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4})) \cdot (x_1 \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot x_4)}$$

б) КНФ функције:  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_3}$

в) минималну ДНФ функције  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  задате скупом индекса  $f(0) = \{1, 3, 4, 12, 14, 15\}$

г) минималну КНФ функције  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  задате скупом индекса  $f(1) = \{1, 3, 10, 12, 13\}$  и  $f(b) = \{5, 7, 8, 15\}$ .



**Решење**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{((x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot x_4 + (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_3 + \bar{x}_4) + (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4))} \cdot (x_1 \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot x_4) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{(x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot x_4} \cdot \overline{(x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_3 + \bar{x}_4)} \cdot \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)} \cdot (x_1 \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot x_4) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{((x_1 + \bar{x}_2 + x_3) + \bar{x}_4)} \cdot \overline{((x_1 + \bar{x}_2) + (\bar{x}_3 + \bar{x}_4))} \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 + (\bar{x}_2 + \bar{x}_3) + \bar{x}_4) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= ((x_1 + \bar{x}_2 + x_3) + \bar{x}_4) \cdot ((x_1 + \bar{x}_2) + (\bar{x}_3 + \bar{x}_4)) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)
 \end{aligned}$$

$$f(0) = \{ 0101, 0111, 1101, 1111 \} = \{ 5, 7, 13, 15 \}$$

$$f(1) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14 \}$$

	$x_1 x_2$		$C$	
	00	01	11	10
$x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 + \bar{x}_4$$

$$\text{б) } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_3$$

Функција  $f$  је дата у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

$$f(1) = \{ 101, 011, X00, XX0 \}$$

$$f(1) = \{ 101, 011, 000, 100, 000, 010, 100, 110 \}$$

$$f(1) = \{ 0, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Сада је потребно одредити  $f(0)$ , а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема  $f(b)$ ), функција  $f$  има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

$$f(0) = \{ 1, 7 \}$$

Према правилима за одређивање минималне КНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију  $f$  која има три променљиве  $x_1, x_2, x_3$ , добијамо:

	$x_1 x_2$		$B$	
	00	01	11	10
$x_3$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	1

На крају формирамо минималну КНФ функције, као производ елементарних сума, при чему сваку суму представља једна заокружена фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

в)

	$x_1x_2$	00	01	11	10
$x_3x_4$	00	1	0	0	1
	01	0	1	1	1
	11	0	1	0	1
	10	1	1	0	1

Кубови: A (0, 1, 2, 3), B (8, 9, 10, 11), C (4, 5, 6, 7), D (0, 4, 8, 12)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3$$

г)

	$x_1x_2$	00	01	11	10
$x_3x_4$	00	0	0	1	b
	01	1	b	1	0
	11	1	b	b	0
	10	0	0	0	1

Кубови: A (0, 1, 2, 3), B (6, 7, 14, 15), C (8, 9, 10, 11)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4)$$

## Задатак 26.

а) Дате су функције  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и  $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Користећи кубове одредити скуп вектора на којима се ове две функције разликују:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2$$

б) Одредити СКНФ функције:  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4) + (\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot x_3)$ .

## Решење

а) Функције се разликују на оним векторима где имају различите вредности, односно где важи да је  $f(0) = g(1)$  и  $f(1) = g(0)$ . Да бисмо то урадили, можемо за сваку функцију да одредимо вредности на свим векторима, а затим да их упоредимо. Како је функција  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције, а како је функција  $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$  дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

$$f(0) = \{00X1, 1X10, X110, 110X\}$$

$$g(1) = \{00X0, 01X1, 100X, 11XX\}$$

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција  $f$  има вредност нула, односно све векторе на којима функција  $g$  има вредност један:

$$f(0) = \{0001, 0011, 1010, 1110, 0110, 1110, 1100, 1101\} = \{1, 3, 6, 10, 12, 13, 14\}$$

$$g(1) = \{0000, 0010, 0101, 0111, 1000, 1001, 1100, 1101, 1110, 1111\} = \{0, 2, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15\}$$

Када одредимо  $f(0)$  и  $g(1)$ , морамо да одредимо и  $f(1)$  и  $g(0)$ . Пошто се ради о потпуно дефинисаној прекидачкој функцији, функција  $f$  има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију  $g$ , која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

$$f(1) = \{0, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 15\}$$

$$g(0) = \{1, 3, 4, 6, 10, 11\}$$

Комбинациона таблица за функције  $f$  и  $g$  изгледа овако:

i	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	f	g
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1
10	1	0	1	0	0	0
11	1	0	1	1	1	0
12	1	1	0	0	0	1
13	1	1	0	1	0	1
14	1	1	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	1

Као што видимо скуп вектора на којима се функције разликују, односно где важи  $f(0) = g(1)$  и  $f(1) = g(0)$  је следећи:  $\{4, 11, 12, 13, 14\}$ .

$$б) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4})} + \overline{(\overline{x_2} \cdot \overline{x_4} + x_2 \cdot x_3)}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4})} + \overline{(\overline{x_2} \cdot \overline{x_4} \cdot x_2 \cdot x_3)}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4})} + ((x_2 + x_4) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_3}))$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + x_2 + x_4)) + (x_2 \overline{x_2} + \overline{x_2} x_4 + x_2 \overline{x_3} + \overline{x_3} x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \overline{x_1} + \overline{x_1} x_2 + \overline{x_1} x_4 + x_1 x_2 + x_2 x_2 + x_2 x_4) + (\overline{x_2} x_4 + x_2 \overline{x_3} + \overline{x_3} x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \overline{x_1} + \overline{x_1} x_2 + \overline{x_1} x_4 + x_1 x_2 + x_2 x_2 + x_2 x_4) + (\overline{x_2} x_4 + x_2 \overline{x_3} + \overline{x_3} x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + \overline{x_1} x_2 + x_2 + x_2 x_4 + x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_4 + \overline{x_2} x_4 + \overline{x_3} x_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 (x_1 + \overline{x_1} + 1 + x_4 + \overline{x_3}) + x_4 (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 + x_4 (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4) (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4) (1 + \overline{x_1} + \overline{x_3})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4)$$

$$f(0) = \{X0X0\} = \{0000, 0010, 1000, 1010\} = \{0, 2, 8, 10\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) (x_1 + x_2 + \overline{x_3} + x_4) (\overline{x_1} + x_2 + x_3 + x_4) (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + x_4)$$

## Задатак 27.

Помоћу Карноових карти наћи минималну:

а) КНФ функције:  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \bar{x}_3 + \overline{(x_1 \cdot (x_2 + \bar{x}_3 + x_4) + (x_1 + \bar{x}_4) + x_3 \cdot (\bar{x}_2 + x_3 + x_4))}$

б) ДНФ функције:  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3) \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$

в) минималну КНФ функције  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  задате скупом индекса  $f(1) = \{3, 4, 6, 7, 11, 12, 14\}$

г) минималну ДНФ функције  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  задате скупом индекса  $f(0) = \{0, 1, 4, 6, 8, 12, 14\}$  и  $f(b) = \{2, 7, 11, 13\}$ .

## Решење

а) На самом почетку, применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у ДНФ или КНФ облик, како бисмо знали где функција има вредност 0 или 1. Сређивање почињемо применом Де Морганове теореме на изразе КНФ функције:  $(x_2 + \bar{x}_3 + x_4)$ ,  $(x_1 + \bar{x}_4)$  и  $x_3 \cdot (\bar{x}_2 + x_3 + x_4)$ :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \bar{x}_3 + \overline{(x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot x_4 + \bar{x}_3 + (\bar{x}_2 + x_3 + x_4))}$$

Даљом применом Де Морганове теореме добијамо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \bar{x}_3 + \overline{(x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_4 + \bar{x}_3 + x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4)}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_1 \cdot x_4 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot (x_1 + \bar{x}_4) \cdot x_3 \cdot (\bar{x}_2 + x_3 + x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot (x_1 + \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_2 + x_3 + x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot (x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_4 + x_3 \bar{x}_4 + x_4 \bar{x}_4)$$

Даљим сређивањем, применом закона о комплементу, када је  $x_i \cdot \bar{x}_i = 0$ , добијамо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot (x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_4 + x_3 \bar{x}_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \bar{x}_3 + (x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \bar{x}_3 + (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова, сада ћемо функцију, коју смо добили у ДНФ облику да представимо овако:

$$f(1) = \{X10X, 0010\} = \{0100, 0101, 1100, 1101, 0010\} = \{2, 4, 5, 12, 13\}$$

$x_1 x_2$		$x_3 x_4$			
		00	01	11	10
		00	01	11	10
00		0	1	1	0
01		0	1	1	0
11		0	0	0	0
10		1	0	0	0

На крају формирамо минималну КНФ функције, као производ елементарних сума:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3)(\bar{x}_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2)$$

б) Функција  $f$  је дата у облику КНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност нула, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

$$f(0) = \{0X0, X11, 000, 100\} = \{000, 010, 011, 111, 000, 100\} = \{0, 2, 3, 4, 7\}$$

Сада је потребно одредити  $f(1)$ , а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема  $f(b)$ ), функција  $f$  има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула:

$$f(1) = \{1, 5, 6\}$$

Према правилима за одређивање минималне ДНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију  $f$  која има три променљиве  $x_1, x_2, x_3$ , добијамо:

$x_1x_2$		00	01	11	10
$x_3$	00	0	0	1	0
	01	1	0	0	1

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарни производа, при чему сваки производ представља једну заокружену фигуру:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција  $f$  има вредност један -  $f(1)$ , а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула -  $f(0)$ .

$$f(1) = \{3, 4, 6, 7, 11, 12, 14\} \quad f(0) = \{0, 1, 2, 5, 8, 9, 10, 13, 15\}$$

Дакле, функција  $f$  има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један. Затим нацртамо Карноову карту за функцију  $f$  која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност нула -  $f(0)$ :

$x_1x_2$		00	01	11	10
$x_3x_4$	00	0	1	1	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	0	1
	10	0	1	1	0

У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара тој фигури и добијамо минималну КНФ, као производ елементарних сума:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4)(x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4)$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција  $f$  има вредност нула -  $f(0)$  и скуп вектора на којима функција није дефинисана -  $f(b)$ , а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један -  $f(1)$ .

Дакле, функција  $f$  има вредност један на свим векторима, осим оних на којима има вредност нула и на којима није дефинисана. Затим нацртамо Карноову карту за функцију  $f$  која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност један и она поља где функција није

дефинисана -  $f(b)$ . Вектори на којима функција није дефинисана у Карноовој карти се обележавају са  $b$  и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу, у циљу добијања минималнијег решења.

$$f(0) = \{0, 1, 4, 6, 8, 12, 14\}$$

$$f(b) = \{2, 7, 11, 13\}$$

$$f(1) = \{3, 5, 9, 10, 15\}$$

$x_1x_2$		00	01	11	10
$x_3x_4$	00	0	0	0	0
	01	0	1	b	1
	11	1	b	1	b
	10	b	0	0	1

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарни производ, који одговара свакој од тих фигура и добијамо минималну ДНФ, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_4$$