Simulacija kretanja Zemlje i Mjeseca oko Sunca

Jelena Marković

Simulacija kretanja Zemlje i Mjeseca oko Sunca rađena je u programskom jeziku Python, verzija 3.7. Kretanje je posmatrano u dvije dimenzije, a kretanje Sunca je zanemareno. Za rješavanje diferencijalnih jednačina korišćena je Runge Kutta metoda četvrtog reda. Za vremenske korake u intervalu od 1s do 1000s određen je položaj Zemlje nakon jedne revolucije i određena je prosječna vrijednost sinodičkog mjeseca.

Uvod

Kada se posmatra sistem dva tijela koja međusobno interaguju samo gravitacionom interakcijum trajektorije oba tijela se mogu pronaći ukoliko su poznati početni uslovi (početne brzine i položaji oba tijela). Ukoliko se posmatra sistem od tri tijela, isti problem nije moguće riješiti analitički u opštem slučaju.

Za planete u Sunčevom sistemu koje nemaju satelite, ili kod kojih je masa satelita jako mala, mogu se primijeniti Keplerovi zakoni. Masa Mjeseca je oko 80 puta manja od mase Zemlje, ali je ipak njegov uticaj na kretanje Zemlje mjerljiv.U slučaju kretanja Zemlje, Mjeseca i Sunca, kretanje Sunca se može zanemariti jer je masa Sunca mnogo veća od masa Zemlje i Mjeseca, tako da se centar mase nalazi unutar Sunca.

Analiza kretanja

Jednačina kretanja Zemlje i Mjeseca su redom

$$m_z \frac{d^2\vec{r}_z}{dt^2} = -G\frac{m_z * m_s}{r_{zs}^3}(\vec{r}¿¿z-\vec{r}_s) - G\frac{m_z * m_m}{r_{zm}^3}(\vec{r}¿¿z-\vec{r}_m)¿¿$$

$$m_m \frac{d^2\vec{r}_m}{dt^2} = -G\frac{m_m * m_s}{r_{ms}^3}(\vec{r}¿¿m-\vec{r}_s) - G\frac{m_z * m_m}{r_{mz}^3}(\vec{r}¿¿m-\vec{r}_z)¿¿$$

gdje je $m_z, \vec{r}_z$ masa i radijus vektor Zemlje,$m_s, \vec{r}_s$ masa i radijus vektor Sunca, $m_m, \vec{r}_m$ masa i radijus vektor Mjeseca, a r_{zs}, r_{ms}i r_{zm} su redom rastojanja između Zemlje i Sunca, Mjeseca i Sunca te Zemlje i Mjeseca. Ako se koordinatni početak postavi u centar Sunca, onda je $\vec{r}_s=0$.Sa dvije diferencijalne jednačine drugog reda može se preći na četiri diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\frac{d\vec{r}_z}{dt} = \vec{v}_z$$

$$m_z \frac{d\vec{v}_z}{dt} = -G\frac{m_z * m_s}{r_{zs}^3}\vec{r}_z - G\frac{m_z * m_m}{r_{zm}^3}(\vec{r}¿¿z-\vec{r}_m)¿$$

$$\frac{d\vec{r}_m}{dt} = \vec{v}_m$$

$$m_m \frac{d\vec{v}_m}{dt} = -G\frac{m_m * m_s}{r_{ms}^3}\vec{r}_m - G\frac{m_z * m_m}{r_{mz}^3}(\vec{r}\text{¿¿}m - \vec{r}_z)\text{¿}$$

Runge Kutta metoda

U numeričkoj analizi, Runge-Kutta metode su važan skup iterativnih metoda koje se koriste u vremenskoj diskretizaciji za aproksimaciju rješenja diferencijalnih jednačina. U ovoj analizi korišćena je Runge-Kutta metoda četvrtog reda.

Kada je potrebno riješiti diferencijalnu jednačinu (za koju su zadati početni uslovi)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tada je formula Euler-ovog metoda

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Koja pronalazi rješenje za y_{n+1} na osnovu y_n. Euler-ova metoda za interval h koristi izvod samo na početku intervala, te nije dovoljno precizna za ovo razmatranje (greška reda h^2). Runge Kutta metoda drugog reda računa aproksimativno rješenje na polovini intervala, a onda na osnovu izvoda u toj tački računa konačan priraštaj funkcije:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2$$

Greška kod ove metode je reda h^3. U praksi se najčešće korist RK metoda četvrtog reda kod koje je greška izračunavanja reda h^5, a postupak je sljedeći:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

Kako se u slučaju razmatranja kretanja Zemlje (Mjeseca) oko Sunca rješava sistem od dvije diferencijalne jednačine prvog reda potrebno ih je simultano rješavati. Neka z predstavlja jednu od projekcija, bilo na x ili na y osu (predstavljeno dalje kao *z*), tada je sistem diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dz}{dt} = v_z = F_1(t, z, v_z)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -G\text{¿} = F_2(t, z, v_z)$$

Primjenjujući RK4 metodu dobija se:

$$k_1 = F_1(t, z, v_z)$$

$$l_1 = F_2(t, z, v_z)$$

$$k_2 = hF_1(t + \frac{h}{2}, z + h\frac{k_1}{2}, v_z + h\frac{l_1}{2})$$

$$l_2 = hF_2(t + \frac{h}{2}, z + h\frac{k_1}{2}, v_z + h\frac{l_1}{2})$$

$$k_3 = hF_1(t + \frac{h}{2}, z + h\frac{k_2}{2}, v_z + h\frac{l_2}{2})$$

$$l_3 = hF_2(t + \frac{h}{2}, z + h\frac{k_2}{2}, v_z + h\frac{l_2}{2})$$

$$k_4 = hF_1(t + h, z + hk_3, v_z + hl_3)$$

$$l_4 = hF_2(t + h, z + hk_3, v_z + hl_3)$$

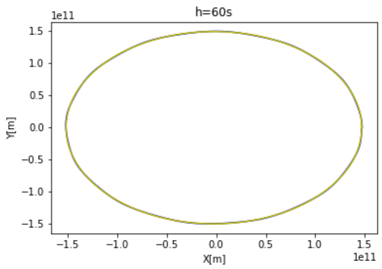
$$z_{n+1} = z_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$v_z^{n+1} = v_z^n + \frac{l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4}{6}$$

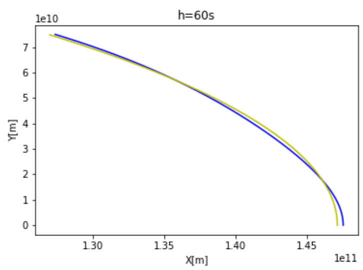
Rezultati

Simulacija je rađena u programskom jeziku Python verziji 3.7, a kod je dat u Dodatku.

Razmatrani su vremenski koraci u intervalu *h=1s* do *h=1000s*. Određeni su položaji Zemlje nakon godinu dana te prosječna dužina trajanja sinodičkog mjeseca. Na grafiku 1 prikazano je kretanje Zemlje i Mjeseca oko Sunca. Zbog mnogo većeg rastojanja između Zemlje i Sunca od rastojanja između Zemlje i Mjeseca, kretanje Mjeseca se ne vidi na grafiku 1. Na grafiku 2 prikazano je isto kretanje ali za period od 60 dana, na kom se vidi i kretanje Mjeseca.



Grafik 1.



Grafik 2.

Za korak ***h=60s***, početne koordinate Zemlje su bile (147099760000,0). Poslije t= 31523280s (364.8527dana) koordinate Zemlje su (147108636890.03703, -583948.71468), a nakon 31523340s odnosno 364.85347 dana su (147108637414.47941,1231604.66941). Ukoliko se kroz ove dvije tačke provuče prava, može se iz dobijenog koeficijenta pravca i odsječka odrediti vrijednost x koordinate kada je y=0. Dobijena vrijednos x komponente, a samim tim i rastojanja Zemlje od Sunca, je 147108637058.71698m ≈ 147108637km. Razlika između početnog rastojanja Zemlje od Sunca i rastojanja nakon godinu dana je 8877058.7169m≈8878km, što je oko 0.006% veće rastojanje od početnog.

Za korak ***h=1s*** i iste početne koordinate Zemlje poslije godinu dana Zemlja se nalazila na rastojanju većem za 9588km što je oko 0.0065% veće rastojanje od početnog.

U tabeli 1 dati su periodi potrebni Mjesecu da se vrati u istu fazu (sinodički mjesec). Prosječna dužina sinodičkog mjeseca je 29 dana, 12 sati, 44 minuta i 2,78 sekundi (tablična vrijednost). Pri koraku h=60s dobijena je vrijednost sinodičkog mjeseca 29 dana 12 sati 4 minuta i 45 sekundi, a pri koraku h=1s prosječna vrijednost sinodičkog mjeseca je 29 dana 9 sati 37 minuta i 52 sekunde.

Dužina jednog sinodičkog mjeseca [s]	
h=60s	**h=1s**
2552340	2542896
2554620	2551426
2556120	2556758
2556360	2558092
2554500	2555246
2550360	2548638
2545320	2539504
2541540	2530035
2540520	2523024
2542440	2520889
2545800	2524434
2549100	2532324
2549085	2540272
29d 12h 4m 45s	**29d 9h 37m 52s**

Tabela 1.

Kako je za vrijednost h=60s dobijeno bolje poklapanje sa tabličnim vrijednostima, odrađena je dodatna analiza za intervale h, čiji je pregled dat u tabeli 2. Za vrijednost h>200s broj sinodičkih mjeseci opada (primjer h=1000s gdje se dobijaju samo četiri mjesca), a greška za rastojanje raste. Za vrijednosti h<200s počinje da raste greška za rastojanje nakon godinu dana, dok dužina mjesece opada. Iznenađujući je rezultat da su odstupanja veća prilikom smanjenja h, što se može objasniti većom akumulacijom grešaka zbog većeg broja operacija.

h[s]	ΔX[m]	(ΔX/Xo)*100[%	<T>[s]
1000	17819342	0.01211	7451500
300	10505954	0.00714	2748464
200	283584	0.00019	2638945
120	5410964	0.00368	2575330
100	6962759	0.00473	2564742
80	8113902	0.00552	2555973
60	8877059	0.00603	2549085
40	9326374	0.00634	2544150
20	9543552	0.00649	2541205
1	9587597	0.00652	2540272

Tabela 2.

Literatura

1. Press ... [and others]. **Numerical Recipes in C** : the Art of Scientific Computing. Cambridge [Cambridgeshire] ; New York :Cambridge University Press, 1992.
2. Steinhauser, Martin Oliver**, Computer simulation in physics and engineering,** Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2013
3. **https://www.wikipedia.org/**