Odabrana Poglavlja Numeričke Analize, MASTER STUDIJE, ETF 2023.

Predispitne obaveze na ovom predmetu rade se sa tri projektna zadatka. Projektni zadaci se šalju mejlom predmetnom profesoru

`Branko Malešević <malesevic@etf.rs>`

pre ispita. Bitno je da subject mail-a bude sledećeg oblika:

`SUBJECT: OPNA_2023_SEMINARSKI_k_Ime_Prezime_Br._indeksa`

Svaki projektni zadatak se sastoji samo od jednog pdf fajla sledećeg naziva

`OPNA_2023_SEMINARSKI_k_Ime_Prezime_Br._indeksa.pdf`

(u prethodnim zapisima `k` je redni broj projektnog zadatka).

Ispit se sastoji u odbrani projektnih zadataka - posebno ako nije sve izloženo u projektnim zadacima.

1. Projektni zadatak.

Najbolje racionalne aproksimacije I i II vrste. *Neka je dat realan broj x. Racionalni broj p/q je najbolja racionalna aproksimacija realnog broja I vrste ako važi nejednakost*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \left|x - \frac{r}{s}\right|$$

za sve razlomke $r/s \neq p/q$ takve da $0 < s \leq q$. Racionalni broj p/q je najbolja racionalna aproksimacija II vrste ako važi nejednakost

$$|q\,x - p| < |s\,x - r|$$

za sve razlomke $r/s \neq p/q$ takve da $0 < s \leq q$.

Projektni zadatak: *Neka je dat pozitivan realan broj x sa konačnim decimalskim zapisom i neka su dati prirodni brojevi n i m, tako da $n < m$. Formirati niz razlomaka p/q takvih da za imenilac q važi $n \leq q \leq m$ (tj. $q = n, n+1, \ldots, m$) i pri tom imeniocu q pridružujemo brojilac p koji određujemo zaokruživanjem na najbliži priodan broj proizvoda $x \cdot q$. Predstaviti svaki razlomak p/q u obliku verižnog razlomaka. U nizu razlomaka p/q izdvojiti*:

- *najbolje racionalne aproksimacije I vrste*,
- *najbolje racionalne aproksimacije II vrste*,
- *sortirati sve razlomke p/q po uslovu minimalnosti apsolutne greške $|x - p/q|$.*

2. Projektni zadatak.

Šturmova teorema. *Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima koji razmatamo nad realnim segementom $[a, b]$, pod pretpostavkom da na tom segmentu ima samo jednostruke nule. Formirajmo niz polinoma $P_0, P_1, \ldots, P_r$ na sledeći način*:

(*i*) $P_0(x) = P(x)$,

(*ii*) $P_1(x) = P'(x)$,

(*iii*) $P_{i+1}(x) = -\mathtt{REM}(P_i(x), P_{i-1}(x))$ *redom za* $i = 1, 2, \ldots, r-1$ *i* $P_r(x) = C\text{–}Const.$

Neka je $\xi \in [a,b]$ označimo $V(\xi)$ broj promena znakova u nizu $P_0(\xi), P_1(\xi), \ldots, P_r(\xi)$, ignoršući eventualno javljanje korena polinoma u tom nizu. Tada razlika

$$N = V(a) - V(b)$$

određuje broj nula polinoma $P(x)$ na segmentu $[a,b]$.

Projektni zadatak: *Neka je dat realni polinom $P(x)$ nad realnim segmentom $[a,b]$.*

(i) **1.** *Odrediti Euklidovim algoritmom najveći zajednički delilac $G(x) = \texttt{GCD}(P(x), P'(x))$.*

2. *Za polinom $P(x) := P(x)/G(x)$, upotrebom Šturmove teoreme, odrediti broj nula na $[a,b]$.*

(ii) *Primena Šturmove teoreme.*

Neka je k broj decimala na koji se zaokružuje neki realan broj. Za polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

sa realnim koeficijentima

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$$

odrediti niz naniže zaokruženih racionalnih koeficijenata

$$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$$

određenih po sledećim pravilima:

* ako je $a_k = \mathrm{a}_0.\mathrm{a}_1 \ldots \mathrm{a}_k \mathrm{a}_{k+1} \ldots > 0$ tada $\alpha_k = \mathrm{a}_0.\mathrm{a}_1 \ldots \mathrm{a}_k$;
* ako je $a_k = \mathrm{a}_0.\mathrm{a}_1 \ldots \mathrm{a}_k \mathrm{a}_{k+1} \ldots < 0$ tada $\alpha_k = \mathrm{a}_0.\mathrm{a}_1 \ldots \mathrm{a}'_k$, gde je a'_k naviše zaokružena cifa (uz eventualno posledično zaokruživanje i prethodnih cifara za jedan broj naviše).

Odrediti proceduru za formiranje racionalnog polinoma

$$\mathsf{P}(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \,.$$

Neka je $[a,b]$ segment sa racionalnim rubnim tačkama. Naći takav polinom $P(x)$ sa realnim koeficijentima i broj k, da na osnovu pozitivnosti polinoma $\mathsf{P}(x)$ nad segmentom $[a,b]$ imamo dokaz o pozitivnosti polinoma $P(x)$ nad segmentom $[a,b]$.

3. Projektni zadatak.

Miksovano trigonometrijsko polinomske nejdnakosti. *Pod MTP - miksovano trigonometrijsko polinomskom funkcijom podrazumevamo funkciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$$

za $\alpha_i \in R\backslash\{0\}$ i $p_i, q_i, r_i \in N_0$ $(i=1,\ldots,n)$ za vrednosti argumenta $x \in (0,c)$, pri standardnoj vrednosti $c = \pi/2$. Za MTP funkciju f osnovni problem naništne aproksimacije je da se odredi polinom P takav da

$$f(x) > P(x)$$

za $x \in (0,c)$. Ukoliko za polinom P važi polinomska nejednakost

$$P(x) > 0$$

za $x \in (0,c)$, tada za MTP funkciju f važi MTP nejdnakost

$$f(x) > 0$$

za $x \in (0,c)$.

U cilju određivanja navišnih i nanižnih polinomskih aproksimacija MTP funkcija koristićemo Makloren-ove polinome[*)] *trigonometrijskih funkcija* cos *i* sin *određenih redom sa*

$$T_{2n}^{\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

i

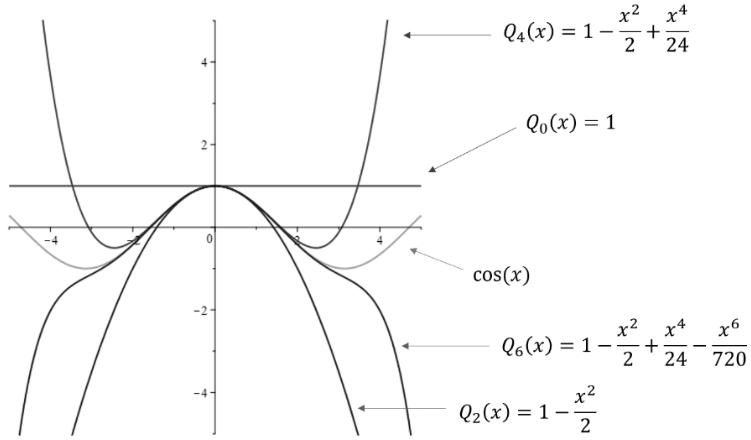
$$T_{2n+1}^{\sin,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

za $n \in N_0$ *i* $x \in (0, c)$.

Lema 1. *Za Maklorenov polinom* cos *funkcije* $T_m^{\cos,0}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m/2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$, *parnog stepena* m, *važi:*

$$m = 4\,k \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall x \in \Big[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\,\Big]\Big)\ \overline{T}_m^{\cos,0}(x) \geq \overline{T}_{m+4}^{\cos,0}(x) \geq \mathbf{cos}\, x,$$

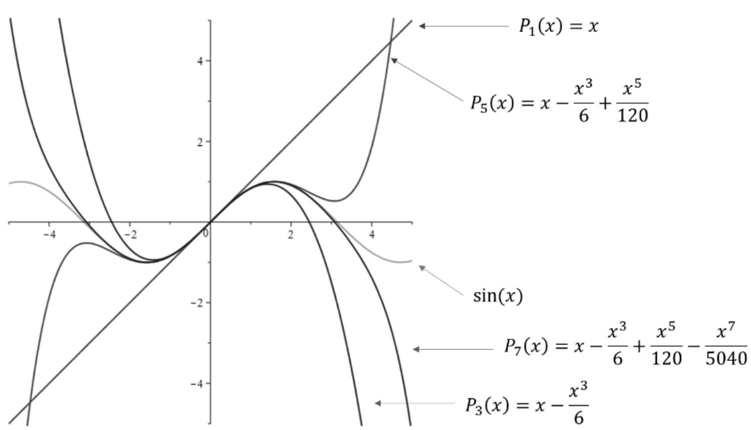
$$m = 4\,k+2 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall x \in \Big[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\,\Big]\Big)\ \underline{T}_m^{\cos,0}(x) \leq \underline{T}_{m+4}^{\cos,0}(x) \leq \mathbf{cos}\, x.$$



Lema 2. *Za Maklorenov polinom* sin *funkcije* $T_m^{\sin,0}(x) = \sum\limits_{i=0}^{(m-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$, *neparnog stepena* m, *važi:*

$$m = 4\,k+1 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall x \in \Big[0, \sqrt{(m+3)(n+4)}\,\Big]\Big)\ \overline{T}_m^{\sin,0}(x) \geq \overline{T}_{m+4}^{\sin,0}(x) \geq \mathbf{sin}\, x,$$

$$m = 4\,k+3 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall x \in \Big[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\,\Big]\Big)\ \underline{T}_m^{\sin,0}(x) \leq \underline{T}_{m+4}^{\sin,0}(x) \leq \mathbf{sin}\, x.$$



*) pri tom koristimo oznaku $T_k^{\varphi,a}(x)$ za *Tejlorov polinom* stepena k funkcije φ u tački a i specijalno za $a = 0$ takav polinom uobičajeno nazivamo *Maklorenov polinom*

Teorema 1.
Za Maklorenove polinome odgovarajućeg stepena cos *i* sin *funkcija važe nejednakosti*

$$(*)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} T_{4s+2}^{\cos,0}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2s+1} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\, x^{2i} & < \cos x < & \displaystyle\sum_{i=0}^{2s} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\, x^{2i} = T_{4s}^{\cos,0}(x) \\ T_{4r+3}^{\sin,0}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2r+1} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\, x^{2i+1} & < \sin x < & \displaystyle\sum_{i=0}^{2r} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\, x^{2i+1} = T_{4r+1}^{\sin,0}(x) \end{array}\right\} \quad (r, s \in N_0),$$

za realne vrednosti argumenata x.

Teorema 2
Za ma koju MTP funkciju

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$$

postoji polinom P kao naništa polinomska aproksimacija MTP funkcije f takva da važi

$$f(x) > P(x),$$

za vrednosti argumenta $x \in (0, c)$.

Napomena. *Važi implikacija koja dokazuje pozitivnost MTP funkcije*:

$$(\forall x \in (0, c)) P(x) > 0 \implies (\forall x \in (0, c)) f(x) > 0\,.$$

Postupci određivanja polinoma $P(x)$

(*i*) *Metoda direktnog poređenja. Koristi se za klasu prostih MTP funkcija oblika*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x^{p_i} \cos^{q_i} x + \sum_{j=1}^{m} \beta_i\, x^{p_j} \sin^{r_j} x,$$

gde $\alpha_i, \beta_j \in R \backslash \{0\}$ i $p_i, q_i, p_j, r_j \in N_0$ $(i = 1, \ldots, n \wedge j = 1, \ldots, m)$ za vrednosti argumenta $x \in (0, c)$, pri standardnoj vrednosti $c = \pi/2$. U cilju određivanja polinoma $P(x)$ moguće je koristiti[*)] *prethodno navedene procene*:

$$(**)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \alpha_i > 0: & \cos x > T_{4s+2}^{\cos,0}(x), \\ \alpha_i < 0: & \cos x < T_{4s}^{\cos,0}(x), \\ \beta_j > 0: & \sin x > T_{4r+3}^{\sin,0}(x), \\ \beta_j < 0: & \sin x < T_{4r+1}^{\sin,0}(x); \end{array}\right\}$$

za $x \in (0, c)$.

Napomena 1. (*Ograničenje metode direktnog poređenja*) *Primetimo da*

$$\cos x > T_{4s+2}^{\cos,0}(x) \qquad (x \in (0, \pi/2))$$

i pri tom $T_{4s+2}^{\cos,0}(x)$ ima jedinstven koren $c_s \in (0, \pi/2)$. Stoga za sabirke sa pozitivnim koeficijentima uz parne stepene $\cos^{2\ell} x$ $(q_i = 2\ell)$ važi

$$\cos^{2\ell} x \geq \left(T_{4s+2}^{\cos,0}(x)\right)^{2\ell} \qquad (x \in (0, c_s)).$$

Dakle, metoda direktnog poređenja može da se razmatra u ovom slučaju samo na $(0, c_s) \subset (0, \pi/2)$.

[*)] Uzimajući u obzir Napomenu 1 i Napomenu 2.

Napomena 2. (*Prevazilaženje ograničenja metode direktnog poređenja*) *Ostvaruje se transformacijom proste MTP funkcije tako što se za sabirke sa pozitivnim koeficijentima uz parne stepene* $\cos^{2\ell}x$ $(q_i = 2\ell)$ *primeni transformacija*

$$\cos^{2\ell}x = (1-\sin^2 x)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k\sin^k x\,.$$

(ii) *Metoda višestrukih uglova. Koristi se za opštu MTP funkciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, x^{p_i}\cos^{q_i}x\sin^{r_i}x$$

tako što se svaki izraz $\cos^{q_i}x\sin^{r_i}x$ *transformiše prema tablici*

$\mathbf{cos}^n x\,\mathbf{sin}^m x$		
$n=q_i$	$m=r_i$	smena
parno	parno	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\mathbf{cos}((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{m+\frac{n}{2}+j}\binom{n}{j}\binom{m}{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-j}}{2^{n+m}}$
neparno	parno	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\mathbf{cos}((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$
parno	neparno	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j-\frac{1}{2}}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\mathbf{sin}((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$
neparno	neparno	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j-\frac{1}{2}}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\mathbf{sin}((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$

Prethodne smene za konkretne vrednosti stepena $n, m \leq 4$ *su tabelirane u Dodatku na kraju ovog teksta.*

Navedene semene omogućavaju da se dobije zapis MTP funkcije preko višestrukih uglova u sledećem obliku

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, x^{p_i}\left(\mathbf{cos}^{q_i}x\,\mathbf{sin}^{r_i}x\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, x^{p_i}\left(\sum_{k=0}^{m_i}\theta_k\,\mathbf{trig}_k^{(q_i,r_i)}\Big(\underbrace{(q_i-r_i-2k)\,x}_{(=t)}\Big)\right)$$

pri čemu

$$\mathbf{trig}_k^{(q_i,r_i)} = \begin{cases}\mathbf{cos}\ : & q_i\text{-neparno}, r_i\text{-parno ili } q_i\text{-parno}, r_i\text{-parno}\\ \mathbf{sin}\ : & q_i\text{-neparno}, r_i\text{-neparno ili } q_i\text{-parno}, r_i\text{-neparno}\end{cases} \qquad i \quad m_i = m_i(q_i,r_i) = \left\lceil\frac{q_i+r_i}{2}\right\rceil - 1$$

dok se koeficijenti θ_k *određuju spram navedene tablice. Na osnovu prethodnog*

$$\mathbf{trig}_k^{(q_i,r_i)}\text{-}\textit{funkcije su ili } \mathbf{cos}\text{-}\textit{funkcija ili } \mathbf{sin}\text{-}\textit{funkcija}.$$

Samim tim moguće je koristiti prethodno navedene procene (bez ikakvih ograničenja):

$$(**)\qquad \left\{\begin{array}{l}\alpha_i\theta_k > 0: \quad \mathbf{cos}\,t > T_{4s+2}^{\cos,0}(t),\\ \alpha_i\theta_k < 0: \quad \mathbf{cos}\,t < T_{4s}^{\cos,0}(t),\\ \alpha_i\theta_k > 0: \quad \mathbf{sin}\,t > T_{4r+3}^{\sin,0}(t),\\ \alpha_i\theta_k < 0: \quad \mathbf{sin}\,t < T_{4r+1}^{\sin,0}(t);\end{array}\right\}$$

gde je $t = (q_i - r_i - 2k)\,x$, *u cilju određivanja naničžne polinomske aproksimacije* $P(x)$ *nad* $(0, c)$.

Projektni zadatak: *Za pogodno*[*)] *izabranu MTP funkciju* $f:(0,c)\longrightarrow R$ *dokazati MTP nejednakost* $f(x)>0$ *nad* $(0,c)$, *određujući pozitivnu nanižnu polinomsku aproksimaciju* $P(x)>0$ *nad* $(0,c)$.

1. Projektni zadatak (test primer rešenja).

Za konstantu

$$\nu=\log_2 3-1=\mathbf{0.5849625007211561815\ \ldots}$$

pri izboru

$$n=7 \quad \mathrm{i} \quad m=53$$

najbolje racionalne aproksimacije I vrste su

$$4/7, 7/12, 17/29, 24/41, 31/53$$

i najbolje racionalne aproksimacije II vrste su

$$7/12\ (*), 24/41\ (*), 31/53\ (*).$$

Svi redukovani razlomci sortirani po rastućoj vrednosti apsolutne greške su dati tabelom:

razlomak	verižni zapis	odstupanje
$31/53$	$[0;1,1,2,2,4]$ (*)	-0.000056840343797690
$24/41$	$[0;1,1,2,2,3]$ (*)	$+0.000403352937380403$
$17/29$	$[0;1,1,2,2,2]$	$+0.001244395830567956$
$7/12$	$[0;1,1,2,2]$ (*)	-0.001629167387822848
$27/46$	$[0;1,1,2,2,1,2]$	$+0.001994021017974301$
$10/17$	$[0;1,1,2,3]$	$+0.003272793396490891$
$25/43$	$[0;1,1,2,1,1,3]$	-0.003567151883946851
$18/31$	$[0;1,1,2,1,1,2]$	-0.004317339430833567
$23/39$	$[0;1,1,2,3,2]$	$+0.004781089022433571$
$29/50$	$[0;1,1,2,1,1,1,2]$	-0.004962500721156227
$13/22$	$[0;1,1,2,4]$	$+0.005946590187934753$
$11/19$	$[0;1,1,2,1,2]$	-0.006015132300103532
$19/49$	$[0;2,1,1,2,1,2]$	$+0.006874233972721355$
$26/45$	$[0;1,1,2,1,2,2]$	-0.007184722943378463
$16/27$	$[0;1,1,2,5]$	$+0.007630091871436373$
$15/26$	$[0;1,1,2,1,3]$	-0.008039423798079315
$19/32$	$[0;1,1,2,6]$	$+0.008787499278843813$
$19/33$	$[0;1,1,2,1,4]$	-0.009204924963580385
$22/37$	$[0;1,1,2,7]$	$+0.009632093873438441$
$23/40$	$[0;1,1,2,1,5]$	-0.009962500721156231
$25/42$	$[0;1,1,2,8]$	$+0.010275594516939046$
$27/47$	$[0;1,1,2,1,6]$	-0.010494415614773156

[*)] Pod tim podrazumevamo da je izbor funkcije takav de je grafički - vizuelno pozitivna nad posmatranim intervalom i da se sastoji od bar dva sabirka od kojih je bar jedan sa pozitvnim i bar jedan sa negativnim koeficijentom.

$4/7$	$[0; 1, 1, 3]$	-0.013533929292584752
$13/23$	$[0; 1, 1, 3, 3]$	-0.019745109416808404
$9/16$	$[0; 1, 1, 3, 2]$	-0.022462500721156187
$11/18$	$[0; 1, 1, 1, 1, 3]$	$+0.026148610389954974$
$5/9$	$[0; 1, 1, 4]$	-0.029406945165600606
$8/13$	$[0; 1, 1, 1, 1, 2]$	$+0.030422114663459232$
$6/11$	$[0; 1, 1, 5]$	-0.039507955266610772
$5/8$	$[0; 1, 1, 1, 2]$	$+0.040037499278843818$

2. Projektni zadatak (test primer rešenja).

(*i*) *Neka je dat polinom*

$$\boldsymbol{P(x) = x^9 - 3x^7 - x^6 + 3x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 1}$$

odrediti broj nula na segmentu $[0, 3]$.

Rešenje. Primenom Euklidovog algoritma za polinome

$P(x) = x^9 - 3x^7 - x^6 + 3x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 1$ i $P'(x) = 9x^8 - 21x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 6x$

najveći zajednički delilac je

$$G(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1.$$

Dovoljno je primeniti Šturmovu teoremu na polinom

$$P_0(x) = P(x)/G(x) = x^4 + x^3 - x - 1$$

koji ima samo jednostruke nule. Primenom Šturmovog algoritma

$P_0, P_1 := P_0'$

`WHILE` $(\mathrm{dg}\, P_0 \neq 1)$ `DO`

$Q := -\mathrm{rem}(P_0, P_1, x)$:

`PRINT(`Q`):`

$P_0 := P_1$;

$P_1 := Q$;

`END DO`

dobijamo Šturmov niz polinoma

$P_0(x) = x^4 + x^3 - x - 1$

$P_1(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$

$P_2(x) = \dfrac{3}{16}x^2 + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{15}{16}$

$P_3(x) = -32x - 64$

$P_4(x) = -\dfrac{3}{16}.$

U nizu realnih brojeva

$$P_0(0) = -1,\ P_1(0) = -1,\ P_2(0) = \frac{15}{16},\ P_3(0) = -64,\ P_4(0) = -\frac{3}{16}$$

postoji

$$V(0) = 2 \text{ promene znaka u } x = 0.$$

Sa druge strane u nizu realnih brojeva

$$P_0(3) = 104,\ P_1(3) = 134,\ P_2(3) = \frac{39}{8},\ P_3(3) = -160,\ P_4(3) = -\frac{3}{16}$$

postoji

$$V(3) = 1 \text{ promena znaka u } x = 3.$$

Odatle imamo zaključak

$$\text{polinom } P(x) \text{ ima } N = V(0) - V(3) = 1 \text{ realnu nulu na } [0,3].$$

(ii) Na primeru polinomske funkcije:

$$P(x) = \left(\frac{\pi}{1260} - \frac{1}{420}\right)x^8 + \left(-\frac{\pi^2}{1680} + \frac{\pi}{840}\right)x^7 + \left(-\frac{\pi}{30} + \frac{1}{10}\right)x^6 + \left(-\frac{\pi^2}{60} + \frac{\pi}{30}\right)x^5 + \left(\frac{2\pi}{3} - 2\right)x^4$$

pokazaćemo kako se može uz *nanižnu aproksimaciju koeficjenata* razlomcima i uz upotrebu Šturmove teoreme dokazati

$$P(x) > 0$$

nad $(0, 1.35)$. Svaki koeficijent posmatranog polinoma je iz polja $\mathbb{Q}(\pi)$ i na osnovu činjenice da se π može obostrano aproksimirati racionalnim brojevima tada se i svaki koeficijent može izračunati sa proizvoljnom tačnošću. Odatle imamo polinomsku funkciju $P(x)$ datu uz numerčki zapis koeficjenata sa proizvoljnom tačnošću:

$$P(x) = 1.12375...10^{-4}x^8 - 2.13477...10^{-3}x^7 - 4.71975...10^{-3}x^6 - 5.97736...10^{-2}x^5 + 9.43951...10^{-2}x^4.$$

Izvršimo zaokruživanje cifara prema algoritmu

- $*$ ako je $a_k = \mathfrak{a}_0.\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_{k+1} \ldots > 0$ tada $\alpha_k = \mathfrak{a}_0.\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k$;
- $*$ ako je $a_k = \mathfrak{a}_0.\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_{k+1} \ldots < 0$ tada $\alpha_k = \mathfrak{a}_0.\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}'_k$, gde je $\mathfrak{a}'_k$ naviše zaokružena cifa.

birajući

$$k = 2.$$

Na taj način dobijamo nanižni polinom sa racionalnim koeficijentima

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(x) &= 1.12 \cdot 10^{-4}x^8 - 2.14 \cdot 10^{-3}x^7 - 4.72 \cdot 10^{-3}x^6 - 5.98 \cdot 10^{-2}x^5 + 9.43 \cdot 10^{-2}x^4 \\
&= 1.12 \cdot \frac{1}{10^4}x^8 - 2.14 \cdot \frac{1}{10^3}x^7 - 4.72 \cdot \frac{1}{10^3}x^6 - 5.98 \cdot \frac{1}{10^2}x^5 + 9.43 \cdot \frac{1}{10^2}x^4 \\
&= \frac{112}{10^6}x^8 - \frac{214}{10^5}x^7 - \frac{472}{10^5}x^6 - \frac{598}{10^4}x^5 + \frac{943}{10^4}x^4 \\
&= \frac{112}{1000000}x^8 - \frac{214}{100000}x^7 - \frac{472}{100000}x^6 - \frac{598}{10000}x^5 + \frac{943}{10000}x^4 \\
&= \boldsymbol{\frac{7}{62500}x^8 - \frac{107}{50000}x^7 - \frac{59}{12500}x^6 - \frac{299}{5000}x^5 + \frac{943}{10000}x^4}.
\end{aligned}$$

Prema Šturmovoj teoremi (i) razmatrani polinom sa racionalnim koeficijentima nema nula na intervalu

$$(0, 1.35) = \left(0, \frac{27}{20}\right).$$

Pri tom na osnovu

$$\mathsf{P}\Big(\frac{27}{20}\Big) = \frac{198243967671}{800000000000000} = 0.0002478... > 0$$

sleduje zaključak

$$(\forall x \in (0, 1.35))\ \mathsf{P}(x) > 0.$$

Na osnovu poretka

$$(\forall x \in (0, 1.35))\ P(x) > \mathsf{P}(x),$$

ujedno je dokazana pozitivnost polaznog polinoma

$$(\forall x \in (0, 1.35))\ P(x) > 0.$$

<u>3. Projektni zadatak (test primer rešenja).</u>

(i) <u>*Metoda direktnog poređenja*</u>

Primer. *Dokazati pozitivnost proste MTP funkcije*

$$f(x) = x^3 \sin x - x\cos^3 x + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4$$

nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rešenje. Koristimo poređenja

$$\sin x > T^{\sin,0}_{4k_1+3}(x) \quad \text{i} \quad \cos x < T^{\cos,0}_{4k_2+0}(x),$$

nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i za $k_1, k_2 \in N_0$. Pomoću ovih aproksimacija formiramo polinom

$$P_{k_1,k_2}(x) = x^3\, T^{\sin,0}_{4k_1+3}(x) - x\left(T^{\cos,0}_{4k_2+0}(x)\right)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4,$$

koji razmatramo nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i za $k_1, k_2 \in N_0$. Po načinu formiranja

$$f(x) > P_{k_1,k_2}(x)$$

nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i za svaki izbor indeksa $k_1, k_2 \in N_0$. Tražimo neki izbor indeksa $k_1, k_2 \in N_0$ za koji je tačna nejednakost

$$P_{k_1,k_2}(x) > 0$$

nad intervalom sa racionalnim rubovima

$$(0, 1.58) = \left(0, \frac{79}{50}\right)$$

koji sadrži posmatrani interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1.570796\ldots)$.

1. $\boldsymbol{k_1 = 0, k_2 = 0}$**:**

$$\begin{aligned} P_{0,0}(x) &= x^3\, T^{\sin,0}_{3}(x) - x\Big(T^{\cos,0}_{0}(x)\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\ &= x^3\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) - x\Big(1\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\ &= -\frac{1}{6}x^6 + \frac{35}{32}x^4 - \frac{3}{2}x^3. \end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme može se zaključiti

$$(\forall x \in (0, 79/50))\; P_{0,0}(x) < 0.$$

Samim tim:

$P_{0,0}(x)$ nije traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.

2. $\boldsymbol{k_1 = 0, k_2 = 1}$:

$$\begin{aligned}
P_{0,1}(x) &= x^3\, T_3^{\sin,0}(x) - x\Big(T_4^{\cos,0}(x)\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= x^3\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) - x\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= -\frac{1}{13824}x^{13} + \frac{1}{384}x^{11} - \frac{7}{192}x^9 + \frac{1}{4}x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{7}{8}x^5 + \frac{35}{32}x^4.
\end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme može se zaključiti

$$(\forall x \in (0, 153/100))\; P_{0,1}(x) > 0$$

i $P_{0,1}(x)$ ima jednu nulu $x = 1.53570...$ na $(1.53, \pi/2)$. Samim tim:

$P_{0,1}(x)$ nije traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.

3. $\boldsymbol{k_1 = 1, k_2 = 0}$:

$$\begin{aligned}
P_{1,0}(x) &= x^3\, T_7^{\sin,0}(x) - x\Big(T_0^{\cos,0}(x)\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= x^3\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7\right) - x\Big(1\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= -\frac{1}{5040}x^{10} + \frac{1}{120}x^8 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{35}{32}x^4 - \frac{3}{2}x^3.
\end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme može se zaključiti

$$(\forall x \in (0, 79/50))\; P_{1,0}(x) < 0.$$

Samim tim:

$P_{1,0}(x)$ nije traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.

4. $\boldsymbol{k_1 = 1, k_2 = 1}$:

$$\begin{aligned}
P_{1,1}(x) &= x^3\, T_7^{\sin,0}(x) - x\Big(T_4^{\cos,0}(x)\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= x^3\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7\right) - x\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= -\frac{1}{13824}x^{13} + \frac{1}{384}x^{11} - \frac{1}{5040}x^{10} - \frac{7}{192}x^9 + \frac{1}{120}x^8 + \frac{1}{4}x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{7}{8}x^5 + \frac{35}{32}x^4.
\end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme može se zaključiti

$$(\forall x \in (0, 79/50))\; P_{1,1}(x) > 0.$$

Samim tim:

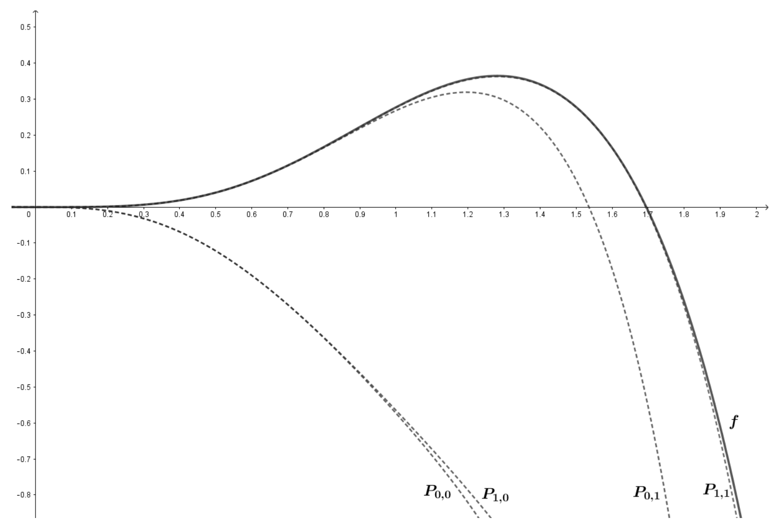
$P_{1,1}(x)$ jeste traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.

Zaista, na osnovu poretka

$$(\forall x \in (0, \pi/2))\; f(x) > P_{1,1}(x),$$

ujedno je dokazana pozitivnost polazne MTP funkcije:

$$(\forall x \in (0, \pi/2))\; f(x) > 0.$$



(ii) *Metoda višestrukih uglova*

Primer. *Dokazati pozitivnost MTP funkcije*

$$f(x) = \cos x \sin^2 x + x \sin x - 2x^2 \cos x$$

nad $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Rešenje. Koristimo sledeću transformaciju[*)]

$$(\star) \qquad \cos x \sin^2 x = -\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x.$$

Samim tim imamo sledeću transformaciju polazne MTP funkcije na višestruke uglove

$$f(x) \;=\; \cos x \sin^2 x + x \sin x - 2x^2 \cos x$$

$$\underset{(\star)}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x + x \sin x - 2x^2 \cos x}.$$

Koristimo poređenja

$$\begin{aligned} \cos 3x &< T^{\cos,0}_{4k_1+0}(3x), \\ \cos x &> T^{\cos,0}_{4k_2+2}(x), \\ \sin x &> T^{\sin,0}_{4k_3+3}(x), \\ \cos x &< T^{\cos,0}_{4k_4+0}(x), \end{aligned}$$

[*)]do navedene jednakosti se moglo doći trigonometrijskim transformacijama ili prema formulama navedenim u pregledu teorije, a koje su tabelirane u Dodatku nad $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ i za $k_1,k_2,k_3,k_4\in N_0$. Pomoću ovih aproksimacija formiramo polinom

$$P_{k_1,k_2,k_3,k_4}(x)=-\frac{1}{4}T_{4k_1}^{\cos,0}(3x)+\frac{1}{4}T_{4k_2+2}^{\cos,0}(x)+xT_{4k_3+3}^{\sin,0}(x)-2x^2T_{4k_4}^{\cos,0}(x),$$

koji razmatramo nad $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ i za $k_1,k_2,k_3,k_4\in N_0$. Po načinu formiranja

$$f(x)>P_{k_1,k_2,k_3,k_4}(x)$$

nad $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ i za svaki izbor indeksa $k_1,k_2,k_3,k_4\in N_0$. Tražimo neki izbor indeksa $k_1,k_2,k_3,k_4\in N_0$ za koji je tačna nejednakost

$$P_{k_1,k_2,k_3,k_4}(x)>0$$

nad intervalom sa racionalnim rubovima

$$(0,1.58)=\left(0,\frac{79}{50}\right)$$

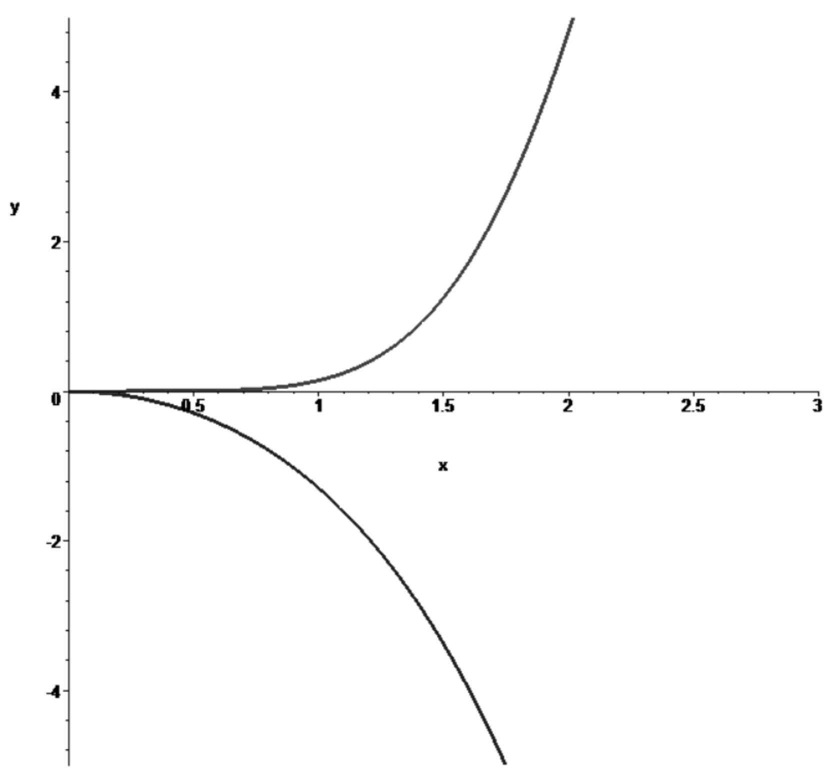
koji sadrži posmatrani interval $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=(0,1.570796\ldots)$.

$\boldsymbol{k_1=0,k_2=0,k_3=0,k_4=0:}$

$$\begin{aligned}P_{0,0,0,0}(x)&=-\frac{1}{4}\,T_0^{\cos,0}(3x)+\frac{1}{4}\,T_2^{\cos,0}(x)+x\,T_3^{\sin,0}(x)-2x^2\,T_0^{\cos,0}(x)\\&=-\frac{1}{4}\Big(1\Big)+\frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{2!}x^2\Big)+x\Big(x-\frac{1}{3!}x^3\Big)-2x^2\Big(1\Big)\\&=-\frac{1}{6}x^4-\frac{9}{8}x^2<0,\end{aligned}$$

za $x\in\left(0,\dfrac{79}{50}\right)$. Samim tim

$P_{0,0,0,0}(x)$ nije traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0,\pi/2)$.

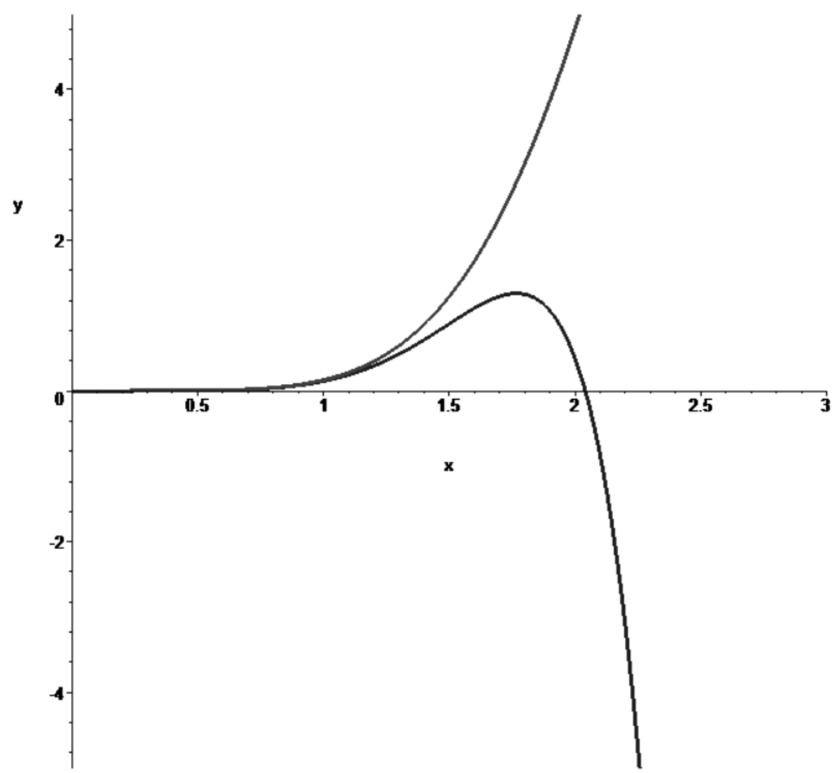


$\boldsymbol{k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = 1:}$

$$
\begin{aligned}
P_{2,1,0,1}(x) &= -\frac{1}{4}\,T_8^{\cos,0}(3x) + \frac{1}{4}\,T_6^{\cos,0}(x) + x\,T_3^{\sin,0}(x) - 2x^2\,T_4^{\cos,0}(x)\\
&= -\frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{2!}(3x)^2 + \frac{1}{4!}(3x)^4 - \frac{1}{6!}(3x)^6 + \frac{1}{8!}(3x)^8\Big)\\
&\quad +\frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6\Big)\\
&\quad +x\Big(x - \frac{1}{3!}x^3\Big)\\
&\quad -2x^2\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\Big)\\
&= -\frac{729}{17920}x^8 + \frac{61}{360}x^6 > 0,
\end{aligned}
$$

za $x \in \Big(0, \dfrac{79}{50}\Big)$. Preciznije, prva pozitivna nula ovog polinoma je $x_0 = \dfrac{8}{81}\sqrt{427} = 2.04\ldots$. Samim tim

$P_{2,1,0,1}(x)$ jeste traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.



Napomena. *Izložena metoda višestrukih uglova za dokazivanja MTP nejednakosti predstavlja jedan pristup za automatsko dokazivanje ove klase analitičkih nejednakosti nad razmatranim intervalom. Bitno je napomenuti da u opštem slučaju problem dokazivanja pozitivnosti neke analitičke funkcije nad nekim intervalom jeste algoritamski neodlučiv problem.*

Dodatak (tablica transformacija na višestruke uglove)

Neka je p oznaka za paran i n oznaka za neparan broj, tada navodimo transformacije

$\cos^p x \cdot \sin^p x$:

- $\cos^2 x = 1/2 \cdot \cos(2 \cdot x) + 1/2$
- $\cos^4 x = 1/8 \cdot \cos(4 \cdot x) + 1/2 \cdot \cos(2 \cdot x) + 3/8$
- $\sin^2 x = 1/2 - 1/2 \cdot \cos(2 \cdot x)$
- $\sin^4 x = 1/8 \cdot \cos(4 \cdot x) - 1/2 \cdot \cos(2 \cdot x) + 3/8$
- $\cos^2 x \cdot \sin^2 x = -1/8 \cdot \cos(4 \cdot x) + 1/8$
- $\cos^4 x \cdot \sin^2 x = -1/32 \cdot \cos(6 \cdot x) - 1/16 \cdot \cos(4 \cdot x) + 1/32 \cdot \cos(2 \cdot x) + 1/16$
- $\cos^2 x \cdot \sin^4 x = 1/32 \cdot \cos(6 \cdot x) - 1/16 \cdot \cos(4 \cdot x) - 1/32 \cdot \cos(2 \cdot x) + 1/16$
- $\cos^4 x \cdot \sin^4 x = 1/128 \cdot \cos(8 \cdot x) - 1/32 \cdot \cos(4 \cdot x) + 3/128$,

$\cos^p x \cdot \sin^n x$:

- $\cos^2 x \cdot \sin x = 1/4 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1/4 \cdot \sin(x)$
- $\cos^4 x \cdot \sin x = 1/16 \cdot \sin(5 \cdot x) + 3/16 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1/8 \cdot \sin(x)$
- $\sin^3 x = -1/4 \cdot \sin(3 \cdot x) + 3/4 \cdot \sin(x)$
- $\cos^2 x \cdot \sin^3 x = -1/16 \cdot \sin(5 \cdot x) + 1/16 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1/8 \cdot \sin(x)$
- $\cos^4 x \cdot \sin^3 x = -1/64 \cdot \sin(7 \cdot x) - 1/64 \cdot \sin(5 \cdot x) + 3/64 \cdot \sin(3 \cdot x) + 3/64 \cdot \sin(x)$,

$\cos^n x \cdot \sin^p x$:

- $\cos x \cdot \sin^2 x = -1/4 \cdot \cos(3 \cdot x) + 1/4 \cdot \cos(x)$
- $\cos x \cdot \sin^4 x = 1/16 \cdot \cos(5 \cdot x) - 3/16 \cdot \cos(3 \cdot x) + 1/8 \cdot \cos(x)$
- $\cos^3 x = 1/4 \cdot \cos(3 \cdot x) + 3/4 \cdot \cos(x)$
- $\cos^3 x \cdot \sin^2 x = -1/16 \cdot \cos(5 \cdot x) - 1/16 \cdot \cos(3 \cdot x) + 1/8 \cdot \cos(x)$
- $\cos^3 x \cdot \sin^4 x = 1/64 \cdot \cos(7 \cdot x) - 1/64 \cdot \cos(5 \cdot x) - 3/64 \cdot \cos(3 \cdot x) + 3/64 \cdot \cos(x)$,

$\cos^n x \cdot \sin^n x$:

- $\cos x \cdot \sin x = 1/2 \cdot \sin(2 \cdot x)$
- $\cos^3 x \cdot \sin x = 1/8 \cdot \sin(4 \cdot x) + 1/4 \cdot \sin(2 \cdot x)$
- $\cos x \cdot \sin^3 x = -1/8 \cdot \sin(4 \cdot x) + 1/4 \cdot \sin(2 \cdot x)$
- $\cos^3 x \cdot \sin^3 x = -1/32 \cdot \sin(6 \cdot x) + 3/32 \cdot \sin(2 \cdot x)$.