Branko J. Malešević

NAJBOLJE RACIONALNE APROKSIMACIJE REALNIH BROJEVA

Polazimo od realnih brojeva sa proizvoljno dugačkim i konačnim decimalskim zapisom

$$\alpha = \mathfrak{a}_0.\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_m$$

za neko $m \in \mathbb{N}_0$ i gde je $\mathfrak{a}_0 \in \mathbb{Z}$ i $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Takvi brojevi su racionalni i mogu se odrediti u obliku redukovanog razlomka

$$\alpha = \frac{P}{Q}$$

za neke $P \in \mathbb{Z}$ i $Q \in \mathbb{N}$. U primenama P i Q mogu da budu relativno veliki i ideja da se izvši što kvalitetnija aproksimacija

$$\alpha \approx \frac{p}{q}$$

za neke $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ pod uslovom

$$q < Q\,.$$

Jedan od načina je da merimo kvalitet aproksimacije je da razmatramo kad je vrednost apsolutne greške

$$\varepsilon = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

što manja. U cilju da se navedeno ostvari koristimo Teoriju verižnih razlomaka.

Veržni razlomci. Za zadan ceo broj a_0 i zadan konačan niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ složen razlomak oblika:

(1)
$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

nazivamo pravilan konačan verižni razvoj racionalnog broja α i zapisujemo ga kraće sa

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

Niz brojeva $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazivamo *verižnim decimalama* broja α. Svaki racionalan broj α ima končan verižno-decimalski zapis. Pri tom složen razlomak oblika (1) se može dovesti do standardnog razlomka

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n}$$

za neko $p_n \in \mathbb{Z}$ i $q_n \in \mathbb{N}$. Razlomak p_n/q_n nazivamo *konvergentom* broja α.

Navodimo neke osnovne postupke i osobine veržnih razlomaka.

$\boxed{1.}$ Određivanje verižnih decimala

U ovom delu pokazujemo kako za konkretan racionalan broj α se određuju verižne decimale $a_0; a_1, \ldots, a_\kappa$ za neko κ

Primer. *Za racionalni broj*

$$\alpha = \frac{355}{113}$$

jedan postupak određivanja veržnih decimala je sledeći:

$$\begin{aligned}
\frac{355}{113} &= \frac{3\cdot 113 + 16}{113} = 3 + \frac{16}{113} \qquad \left(\frac{16}{113}\ \textit{se invertuje}\right)\\
&= 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{7\cdot 16+1}{16}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16}} \qquad \left(\frac{1}{16}\ \textit{se invertuje}\right)\\
&= 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{\frac{16}{1}}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{\frac{16\cdot 1+0}{1}}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{16+\frac{0}{1}}} \qquad \left(\frac{0}{1}\ \textit{se ne invertuje}\right).
\end{aligned}$$

U ovom primeru racionalni broj $\alpha = \dfrac{355}{113} = 3 + \dfrac{1}{7+\frac{1}{16}}$ *(konkretno* $\kappa = 2$*) je sa verižnim decimalama*

$$a_0 = 3; a_1 = 7, a_2 = 16$$

koje se dobijaju celobrojnim deljenjem, tj. računarski pomoću funkcije floor.

Generalno, ako je dat decimalski broj $\alpha = \mathfrak{a}_0.\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_m$, za $m \geq 1$, tada verižne decimale $a_0; a_1, \ldots, a_\kappa$, za neko $\kappa \in \mathbb{N}$, određujemo pseudokodom

```
i := 0;
x[i] := α;
a[i] := floor (x[i]);
d := x[i] − a[i];
repeat
   d[i] := d;
   i := i + 1;
   x[i] := 1/d[i − 1];
   a[i] := floor(x[i]);
   d := x[i] − a[i];
until (d ≠ 0);
κ := i;
```

Primer. *Za broj* $\alpha = 3.1415926$ *prema prethodnom pseudokodu imamo sledeće korake*

$\boldsymbol{i = 0}$**:**

$x_0 = 3.1415926\,(= a_0 + d_0)$

$a_0 = 3$

$d_0 = 0.1415926$

Ovim je

$$x_0 = a_0 + d_0 = 3 + 0.1415926\,.$$

$\boldsymbol{i=1:}$

$$x_1 = \frac{1}{d_0} = \frac{1}{0.1415926} = 7.0625134\ldots (= a_1 + d_1)$$

$a_1 = 7$

$d_1 = 0.0625134\ldots$

Ovim je

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 + d_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + d_1} \\ &= 3 + \frac{1}{7 + 0.0625134} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{i=2:}$

$$x_2 = \frac{1}{d_1} = \frac{1}{0.0625134\ldots} = 15.996549\ldots (= x_2 + d_2)$$

$a_2 = 15$

$d_2 = 0.9965499\ldots$

Ovim je

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 + d_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + d_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + d_2}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 0.9965499\ldots}} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{i=3:}$

$$x_3 = \frac{1}{d_2} = \frac{1}{0.9965499\ldots} = 1.00410637\ldots (= a_3 + d_3)$$

$a_3 = 1$

$d_3 = 0.00410637\ldots$

Ovim je

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + d_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + d_3}}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + 0.00410637\ldots}}} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{i=4:}$

$$x_4 = \frac{1}{d_3} = \frac{1}{0.004106373\ldots} = 243.5239078\ldots (= a_4 + d_4)$$

$a_4 = 243$

$d_4 = 0.5239078\ldots$

Ovim je

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + d_3}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \frac{1}{x_4}}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + d_4}}}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{243 + 0.5239078\ldots}}}} \end{aligned}$$

Nastavljajući navedeni postupak dobija se

$\boldsymbol{i=5}$:	$x_5 = 1.9052631\ldots,$	$a_5 = 1,$	$d_5 = .9052631\ldots$
$\boldsymbol{i=6}$:	$x_6 = 1.1046511\ldots,$	$a_6 = 1,$	$d_6 = 0.1046511\ldots$
$\boldsymbol{i=7}$:	$x_7 = 9.5555555\ldots,$	$a_7 = 9,$	$d_7 = 0.5555555\ldots$
$\boldsymbol{i=8}$:	$x_8 = 1.7999999\ldots,$	$a_8 = 1,$	$d_8 = 0.7999999\ldots$
$\boldsymbol{i=9}$:	$x_9 = 1.25000000\ldots,$	$a_9 = 1,$	$d_9 = 0.2500000\ldots$
$\boldsymbol{i=10}$:	$x_{10} = 3.9999999\ldots,$	$a_{10} = 3,$	$d_{10} = 0.9999999\ldots$
$\boldsymbol{i=11}$:	$x_{11} = 1.0000000\ldots,$	$a_{11} = 1,$	$d = \underline{0.0000000\ldots}$

Postupak se ovde zaustavlja i tačan rezultat je

$$\alpha = 3.1415926 = [3; 7, 15, 1, 243, 1, 1, 9, 1, 1, 3, 1] \qquad (\kappa = 11)\,.$$

U praksi, uz upotrebu računara, prethodni se račun odvija u nekoj, po mogućnosti, što većoj numeričkoj tačnosti. Praktičan kriterijum za korektno zaustavljanje razmatrane repeat/until-petlje je da se ona onkonačava kada je d-vrednost bliska nuli. Svako ranije zaustavljanje daje samo približne aproksimacije racionalnog broja α. Na kraju napomenimo da ako je poslednja verižna decimala $a_\kappa = 1$ tada

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{\kappa-1}, a_\kappa] \ \ \textit{zamenjujemo sa istom vrednošću} \ \ \alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{\kappa-1} + 1]\,,$$

kraćeg zapisa. U prethodnom verižnom razvoju broja α poslednja verižna decimala nije jednaka 1*. Sa tom konvekcijom veržni zapisi su sa jedinstvenim zapisom verižnih decimala. Saglasno prethodnom:*

$$\alpha = 3.1415926 = [3; 7, 15, 1, 243, 1, 1, 9, 1, 1, 4]\,. \qquad \blacksquare$$

$\boxed{2.}$ Određivanje konvergenti verižnih rzlomaka

U ovom delu pokazujemo kako za verižne decimale $a_0; a_1, \ldots, a_\kappa$, za neko $\kappa \in \mathbb{N}_0$, se određuje racionalan broj - konvergenta $\alpha = \dfrac{p_\kappa}{q_\kappa} = [a_0; a_1, \ldots, a_\kappa]$.

Primer. *Za verižne decimale* $3; 7, 16$ *je*

$$\alpha = \frac{p_\kappa}{q_\kappa} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} = 3 + \cfrac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}\,.$$

Ako su za broj α izračunate verižne decimale $a_0, a_1, \ldots, a_\kappa$ tada konvergente

$$\frac{p_j}{q_j} = [a_0; a_1, \ldots, a_j],$$

za $2 \le j \le \kappa$, ispunjavaju rekuretne relacije

$$\left\{ \begin{array}{c} p_j = p_{j-1} \cdot a_j + p_{j-2}, \\ q_j = q_{j-1} \cdot a_n + q_{j-2} \end{array} \right\} \tag{2}$$

uz početne vrednosti $p_0 = a_0, q_0 = 1$ i $p_1 = a_0\, a_1 + 1, q_1 = a_1$. Pojedinačne konvergente daju približne aproksimacije polaznog broja α

Primer. *Za broj* $\alpha = 3.1415926$ *imamo tačan rezultat*

$$\alpha = 3.1415926 = [3; 7, 15, 1, 243, 1, 1, 9, 1, 1, 4]\,.$$

Konveregente su:

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= 3, \\ \frac{p_1}{q_1} &= \frac{22}{7}, \\ \frac{p_2}{q_2} &= \frac{333}{106}, \\ \frac{p_3}{q_3} &= \frac{355}{113}, \\ \frac{p_4}{q_4} &= \frac{86598}{27565}, \\ \frac{p_5}{q_5} &= \frac{86953}{27678}, \\ \frac{p_6}{q_6} &= \frac{173551}{55243}, \\ \frac{p_7}{q_7} &= \frac{1648912}{524865}, \\ \frac{p_8}{q_8} &= \frac{1822463}{580108}, \\ \frac{p_9}{q_9} &= \frac{3471375}{1104973}, \\ \frac{p_{10}}{q_{10}} &= \frac{15707963}{5000000}\,. \end{aligned}$$

i one su izračunate sa

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= a_0 = \frac{a_0}{1} = 3, \\ \frac{p_1}{q_1} &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0\, a_1 + 1}{a_1} = \frac{3 \cdot 7 + 1}{7} = \frac{22}{7}, \\ \frac{p_2}{q_2} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{p_1\, a_2 + p_0}{q_1\, a_2 + q_0} = \frac{22 \cdot 15 + 3}{7 \cdot 15 + 1} = \frac{333}{106}, \\ \frac{p_3}{q_3} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = \frac{p_2\, a_3 + p_1}{q_2\, a_3 + q_1} = \frac{333 \cdot 1 + 22}{106 \cdot 1 + 7} = \frac{355}{113}, \end{aligned}$$

itd. zaključno sa

$$\begin{aligned}\frac{p_{10}}{q_{10}} &= a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots+\cfrac{1}{a_{10}}}}}}\\ &= \frac{p_9\,a_{10}+p_8}{q_9\,a_{10}+q_8}=\frac{3471375\cdot 4+1822463}{1104973\cdot 4+580108}=\frac{15707963}{5000000}=3.1415926\,.\end{aligned}$$

■

$\boxed{3.}$ Svojstva verižnih razlomaka

Svojstvo 1. *Za brojeve p_j i q_j određene sa (2) važi*

$$\mathrm{NZD}(p_j,q_j)=1,$$

čime su

$$\textit{konvergente } \frac{p_j}{q_j} \textit{ redukovani razlomci.}$$

Svojstvo 2. *Za razliku dve uzastopne konverente važi:*

$$\Delta_j=\frac{p_j}{q_j}-\frac{p_{j-1}}{q_{j-1}}=\frac{(-1)^j}{q_{j-1}\cdot q_j}\,,$$

za ma koje $1\leq j\leq n$.

Svojstvo 3. *Za broj α važi:*

$$\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\ldots<\frac{p_{2i}}{q_{2i}}\leq\alpha\leq\frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}}<\ldots<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_1}{q_1}\,,$$

za ma koje $i\geq 1$.

Svojstvo 4. *Niz brojeva $q_0,q_1,q_2,\ldots,q_j$ je niz rastućih prirodnih brojeva i važi:*

$$\left|\alpha-\frac{p_j}{q_j}\right|<\frac{1}{q_{j-1}^2}\qquad\qquad (\textit{za ma koje } j\geq 1).$$

Najbolje racionalne aproksimacije. Kvalitet racionalnih aproksimacija definišemo prema A. Хинчин-у:

Definicija 1. *Racionalni broj $\dfrac{p}{q}$ je najbolja racionalna aproksimacija I vrste broja α ako važi*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\left|\alpha-\frac{r}{s}\right|\,,$$

za sve razlomke $\dfrac{r}{s}\neq\dfrac{p}{q}$ takve da je $0<s\leq q$.

Definicija 2. *Racionalni broj $\dfrac{p}{q}$ je najbolja racionalna aproksimacija II vrste broja α ako važi*

$$|q\,\alpha-p|<|s\,\alpha-r|\,,$$

za sve razlomke $\dfrac{r}{s}\neq\dfrac{p}{q}$ takve da je $0<s\leq q$.

Za dve uzastopne konvergente $\frac{p_k}{q_k}$ i $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ broja α uvodimo niz razlomaka

$$\frac{p_{k,j}}{q_{k,j}} = \frac{p_k + j \cdot p_{k+1}}{q_k + j \cdot q_{k+1}}$$

za $j \in \{1, 2, \ldots, a_{k+2} - 1\}$. Prethodni niz razlomaka nazivamo *sekundarnim konvergentama* za dve uzastopne konvergente. Dalje važe svojstva.

Svojstvo 5. *Najbolje racionalne aproksimacije I vrste broja α su ili konvergente ili sekundarne konvergente.*

Najbolje racionalne aproksimacije I vrste broja α koje su konvergente nazivamo *verižnim aproksimacijama*. Najbolje racionalne aproksimacije I vrste broja α koje su sekundarne konvergente (i nisu konvergente) nazivamo *međuverižnim aproksimacijama*.

Svojstvo 6. *Svaka najbolja racionalna aproksimacija II vrste broja α je konvergenta. Obrnuto, svaka konvergenta je najbolja racionalna aproksimacija II vrste broja α, sem pri izolovanom izboru $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ i $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$.*

Prethodno svojstvo pokazuje da se skupovi najboljih racionalnih aproksimacija II vrste i konvergenti (verižnih razlomaka) podudaraju, sem navedenog izolovanog slučaja.

Svojstvo 7. *Svaka najbolja racionalna aproksimacija II vrste je ujedno najbolja racionalna aproksimacija I vrste*[*)]*, tj.*

$$II \Longrightarrow I$$

i time važi kontrapozicija

$$\neg I \Longrightarrow \neg II\,.$$

Postoje najbolje racionalne aproksimacije I vrste koje nisu konvergente.

Svojstvo 8. *Neka su za broj α određene dve uzastopne verižne aproksimacije-konvergente:*

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k] \quad i \quad \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}].$$

Ukoliko postoji međuverižna aproksimacija-sekundarna konvergenta:

$$\frac{p'_k}{q'_k} = [a_0, a_1, \ldots, a_k, a'_{k+1}]$$

sa nekom međuverižnom decimalom a'_{k+1} tada su svi razlomci

$$\frac{p''_k}{q''_k} = [a_0, a_1, \ldots, a_k, a''_{k+1}]$$

za $a''_{k+1} \in \{a'_{k+1}+1, \ldots, a_{k+1}-1\}$ takođe međuverižne aproksimacije-sekundarne konvergente.

U vezi sa prethodnim svojstvom ukoliko postoji a'_{k+1} najmanju vrednost takve međuverižne decimale nazivamo *prva međuverižna decimala*.

$*$) *Nadalje* koristimo oznaku u crvenoj boji II za konvergente i u plavoj boji I ukoliko želimo da istaknemo da je u pitanju najbolja racionalna aproksimacija prve vrste koja nije konvergenta.

Primer. *Za broj* $\alpha = 3.1415926$ *izdvojimo verižne i međuverižne aproksimacije u obliku razlomaka* $\frac{p}{q}$ *sa imeniocem* $0 < q \leq 10$. *Za svaki izbor imenioca* $q = 1, \ldots, 10$ *birajmo brojioce u obliku*

$$p = \langle \alpha \cdot q \rangle \,,$$

gde je $\underline{\langle \ldots \rangle}$ *funkcija zaokrživanja na najbliži ceo broj*. *Navodimo takav niz razlomaka, postupak formiranja i načine provere kvaliteta aproksimacije broja* α *takvim razlomcima*

$$q = \mathbf{1} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 1 \rangle = \langle 3.1415926 \rangle = \mathbf{3} \qquad \frac{p}{q} = \frac{3}{1} = 3 \quad \underline{II\ vrsta}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = 0.1415926$$

$$q = \mathbf{2} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 2 \rangle = \langle 6.2831852 \rangle = \mathbf{6} \qquad \frac{p}{q} = \frac{6}{2} = 3 \quad \underline{II\ vrsta}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = 0.1415926$$

$$q = \mathbf{3} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 3 \rangle = \langle 9.4247778 \rangle = \mathbf{9} \qquad \frac{p}{q} = \frac{9}{3} = 3 \quad \underline{II\ vrsta}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = 0.1415926$$

$$q = \mathbf{4} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 4 \rangle = \langle 12.5663704 \rangle = \mathbf{13} \qquad \frac{p}{q} = \frac{13}{4} \neq 3 \quad \underline{I\ vrsta}$$

sa vrednošću apsolutne greške$^{*)}$

$$\varepsilon = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| 3.1415926 - \frac{13}{4} \right| = 0.1084074$$

U pitanju je najbolja racionalna aproksimacija I vrste jer $\varepsilon = \left| \alpha - \frac{13}{4} \right| < |\alpha - 3| \leq \left| \alpha - \frac{r}{s} \right|$ *za svaki razlomak* $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ *i* $s = 1, 2, 3, 4$. *Dalje nastavljamo*

$$q = \mathbf{5} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 5 \rangle = \langle 15.7079630 \rangle = \mathbf{16} \qquad \frac{p}{q} = \frac{16}{5} \neq 3 \quad \underline{I\ vrsta}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| 3.1415926 - \frac{16}{5} \right| = 0.058407400$$

U pitanju je najbolja racionalna aproksimacija I vrste jer $\left| \alpha - \frac{16}{5} \right| < \left| \alpha - \frac{13}{4} \right| \leq \left| \alpha - \frac{r}{s} \right|$ *za svaki razlomak* $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ *i* $s = 1, 2, 3, 4, 5$. *Dalje nastavljamo*

$$q = \mathbf{6} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 6 \rangle = \langle 18.8495556 \rangle = \mathbf{19} \qquad \frac{p}{q} = \frac{19}{6} \neq 3 \quad \underline{I\ vrsta}$$

$^{*)}$ primetimo da takvim izborom manje grešimo: $\left| 3.1415926 - \frac{13}{4} \right| = 0.1084074 < 0.1415926 = \left| 3.1415926 - \frac{12}{4} \right|$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|3.1415926 - \frac{19}{6}\right| = 0.0250740\ldots$$

U pitanju je najbolja racionalna aproksimacija I vrste jer $\left|\alpha - \frac{19}{6}\right| < \left|\alpha - \frac{16}{5}\right| \leq \left|\alpha - \frac{r}{s}\right|$ *za svaki razlomak* $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ *i* $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Dalje nastavljamo*

$$q = \mathbf{7} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 7 \rangle = \langle 21.9911482 \rangle = \mathbf{22} \qquad \frac{p}{q} = \frac{22}{7} \quad \underline{\mathit{II\ vrsta}}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|3.1415926 - \frac{22}{7}\right| = 0.0012645\ldots$$

Može se i po definiciji proveriti da u je najbolja racionalna aproksimacija II vrste jer $|7\,\alpha - 22| = 0.0088518 < |s\,\alpha - r|$ *za svaki razlomak* $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ *i* $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. *Dalje nastavljamo*

$$q = \mathbf{8} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 8 \rangle = \langle 25.1327408 \rangle = \mathbf{25} \qquad \frac{p}{q} = \frac{25}{8} \neq \frac{22}{7} \quad \underline{\mathit{nije\ I\ vrsta}}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|3.1415926 - \frac{25}{8}\right| = 0.0165926$$

Dobijena racionalna aproksimacija nije I vrsta vrste jer $\left|\alpha - \frac{22}{7}\right| < \left|\alpha - \frac{25}{8}\right|$. *Dalje nastavljamo*

$$q = \mathbf{9} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 9 \rangle = \langle 28.2743334 \rangle = \mathbf{28} \qquad \frac{p}{q} = \frac{28}{9} \neq \frac{22}{7} \quad \underline{\mathit{nije\ I\ vrsta}}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|3.1415926 - \frac{28}{9}\right| = 0.0304814\ldots$$

Dobijena racionalna aproksimacija nije I vrsta jer $\left|\alpha - \frac{22}{7}\right| < \left|\alpha - \frac{28}{9}\right|$. *Dalje nastavljamo*

$$q = \mathbf{10} \qquad p = \langle \alpha \cdot q \rangle = \langle 3.1415926 \cdot 10 \rangle = \langle 31.415926 \rangle = \mathbf{31} \qquad \frac{p}{q} = \frac{31}{10} \neq \frac{22}{7} \quad \underline{\mathit{nije\ I\ vrsta}}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|3.1415926 - \frac{31}{10}\right| = 0.0415926$$

Dobijena racionalna aproksimacija nije I vrsta jer $\left|\alpha - \frac{22}{7}\right| < \left|\alpha - \frac{31}{10}\right|$. *Ovim je primer završen.* ■

Napomena. *Bitno je istaći da sledeća bolja racionalna aproksimacija I vrste je*

$$\frac{p_{57}}{q_{57}} = \frac{179}{57}$$

sa vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left|\alpha - \frac{p_{57}}{q_{57}}\right| = \left|3.1415926 - \frac{179}{57}\right| = 0.0012417\ldots$$

Neposredno pre ove racionalne aproksimacije se nalazi osmi-umnožak verižne racionalne aproksimacije $22/7$:

$$\frac{p_{56}}{q_{56}} = \frac{176}{56} = \frac{8 \cdot 22}{8 \cdot 7} = \frac{22}{7}$$

sa većom vrednošću apsolutne greške

$$\varepsilon = \left|\alpha - \frac{p_{56}}{q_{56}}\right| = \left|3.1415926 - \frac{22}{7}\right| = 0.0012645\ldots$$

od sledećeg u nizu razlomka $p_{57}/q_{57} = 179/57$. *Napomenimo još da razlomak* $p_{57}/q_{57} = 179/57$ *ima sledeću verižnu reprezentaciju*

$$\frac{p_{57}}{q_{57}} = \frac{179}{57} = [3; 7, 8]$$

sa prvom međuverižnom decimalom $a'_2 = 8$. *Saglasno Svojstvu* 8 *sve preostale sve bolje i bolje međuverižne aproksimacije su:* $[3; 7, 9] = 201/64$, $[3; 7, 10] = 223/71$, $[3; 7, 11] = 245/78$, $[3; 7, 12] = 267/85$, $[3; 7, 13] = 289/92$, $[3; 7, 14] = 311/99$ *i posle toga dolazi verižna aproksimacija:* $[3; 7, 15] = 333/106$. ■

Dodatak. *Rezultat prethodnog računanja možemo pregledno prikazati u obliku tabele*

$\alpha = 3.141256$:

q	p/q	$\alpha - p/q$	$p/q = [a_0; \ldots]$	vrsta	ε-rang
1	$3/1 = 3$	$+0.1415926$	$[3]$	II	8-10
2	$6/2 = 3$	$+0.1415926$	$[3]$	II	8-10
3	$9/3 = 3$	$+0.1415926$	$[3]$	II	8-10
4	$13/4$	-0.1084074	$[3; 4]$	I	7
5	$16/5$	-0.0584074	$[3; 5]$	I	6
6	$19/6$	$-0.0250740\ldots$	$[3; 6]$	I	3
7	$22/7$	$-0.0012645\ldots$	$[3; 7]$	II	1
8	$25/8$	$+0.0165926$	$[3; 8]$	N	2
9	$28/9$	$+0.0304814\ldots$	$[3; 9]$	N	4
10	$31/10$	$+0.0415926$	$[3; 10]$	N	5

odnosno sortirano po ε*-rangu:*

q	p/q	$\alpha - p/q$	$p/q = [a_0; \ldots]$	vrsta	ε-rang
7	$22/7$	$-0.0012645\ldots$	$[3; 7]$	II	1
8	$25/8$	$+0.0165926$	$[3; 8]$	N	2
6	$19/6$	$-0.0250740\ldots$	$[3; 6]$	I	3
9	$28/9$	$+0.0304814\ldots$	$[3; 9]$	N	4
10	$31/10$	$+0.0415926$	$[3; 10]$	N	5
5	$16/5$	-0.0584074	$[3; 5]$	I	6
4	$13/4$	-0.1084074	$[3; 4]$	I	7
1	$3/1 = 3$	$+0.1415926$	$[3]$	II	8-10
2	$6/2 = 3$	$+0.1415926$	$[3]$	II	8-10
3	$9/3 = 3$	$+0.1415926$	$[3]$	II	8-10

■

Projektni zadatak. *Neka je dat pozitivan realan broj α sa konačnim decimalskim zapisom i neka su dati prirodni brojevi n i m, tako da $n < m$. Formirati niz razlomaka p/q takvih da za imenilac q važi $n \leq q \leq m$ (tj. $q = n, n+1, \ldots, m$) i pri tom imeniocu q pridružujemo brojilac p koji određujemo zaokruživanjem na najbliži priodan broj proizvoda $\alpha \cdot q$. Predstaviti svaki razlomak p/q u obliku verižnog razlomaka. U nizu razlomaka p/q izdvojiti*:

- *najbolje racionalne aproksimacije I vrste*,
- *najbolje racionalne aproksimacije II vrste*,
- *sortirati sve razlomke p/q po uslovu minimalnosti apsolutne greške $|x - p/q|$* (tj. ε-ranga) .