Teoría Estadística (DES122). Unidad I

Dr. Jaime Lincovil

Universidad Nacional de Ingeniería

2024

1. **Población, muestra y modelos estadísticos. Familias exponenciales**

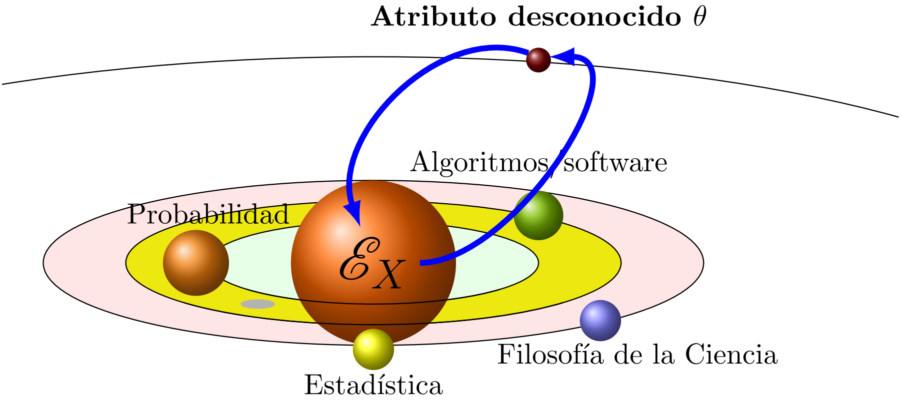
2. **Estadísticos, Suficiencia, Ancilaridad y Completitud**

3. **Perdida, función de perdida, regla de decisión y riesgo medio**

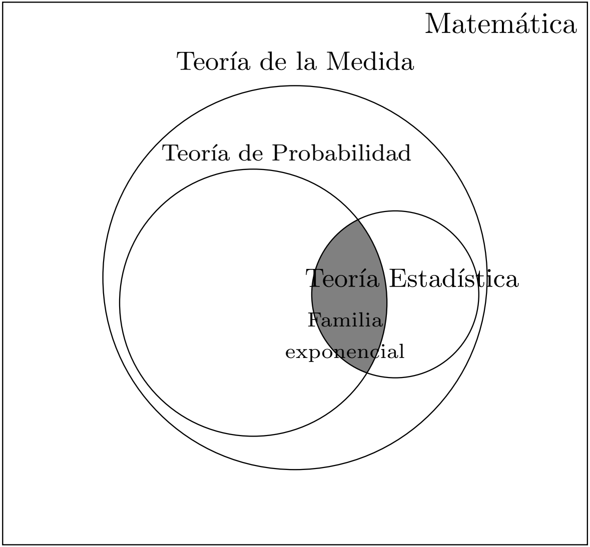
4. **Estimación puntual, insesgamento y eficiencia. Estadísticos U**

5. **Región e intervalos de confianza. Región de credibilidad**

Métodos de Inferencia Estadística



Teoría de Inferencia Estadística



Notación

Letras

- Letras caligraficas $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_\Theta$.
- Letras griegas: θ, Θ, π, Π, λ (lambda), Λ, η (eta), ξ (xi), ω (omega), Ω, ζ (Zeta) y ν (nu).
- $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$ espacio de probabilidad original.
- $X^{-1}(A)$es la imagen inversa de la variable X, $\sigma(X)$: sigma álgebra generada por X.
- $\mathcal{R}$, y $\mathcal{R}^k$: conjunto de los números reales y el conjunto euclideano de dimensión k
- $\frac{dP}{d\nu}$: derivada de Radon-Nykodym de P con respecto a ν.

Espacio de Probabilidad

- Un **espacio de probabilidad** es una tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$ en que Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F}$ es una σ-algebra de Ω y P_0 una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$ conocida.
- Sea Ω y Λ conjuntos nno vacíos y X una función

  $$X : \Omega \to \Lambda.$$

  La función X es llamada **variable aleatoria** de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(\Lambda, \mathcal{G})$ si y solo si

  $$X^{-1}(\mathcal{G}) = \left\{X^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}\right\} \subset \mathcal{F}.$$

  $X^{-1}(\mathcal{G})$ es llamada la **imagen inversa de $\mathcal{G}$ sobre X**.
- El modelo de probabilidad inducido por X es la tripla

  $$(\Lambda, \mathcal{F}, P_X),$$

  en que P_X es conocida. En el modelo de probabilidad, la incertidumbre esta en evento $X = x$.

Medidas y densidades

- Si $\nu(A) = 0$ implica $P(A) = 0$, entonces decimos que P es absolutamente continua con respecto a ν denotado por $P \ll \nu$
- Si P es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}$ (o $\mathcal{B}^k$), entonces

$$f(x) = \frac{dP}{d\nu}: \ \textbf{densidad} \text{ de } P \text{ con respecto a la medida de Lebesgue } \nu.$$

- Si P es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{A}$ (discreto), entonces

$$p(x) = \frac{dP}{d\nu}: \ \textbf{densidad} \text{ de } P \text{ con respecto a la medida de Conteo } \nu.$$

- Una función $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ es llamada de Boreleana si sus imagenes inversas estan contenidas en $\mathcal{B}$., i.e. $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ para todo $A \subset \mathcal{R}$.

Inferencia $\rightarrow$ Teoría de Estadística

- Consideremos una variable aleatoria "$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$" con espacio muestral $\Lambda = \bar{\mathcal{R}}$ y espacio paramétrico $\Theta = (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$.
- Por "$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$", entendemos que X tiene una función de densidad f_{μ,σ^2}.
- En **Inferencia Estadística**, dada una muestra $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de X, una estimación putual consiste en encontrar una función tal que:

$$(x, f) \rightarrow (\mu_0, \sigma_0^2) \in \Theta.$$

- En **Teoría Estadística**, por "$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$" entendemos que X tiene una una medida de probabilidad P_{μ,σ^2}. En estimación puntual buscaremos una función tal que

$$(x, P_{\mu,\sigma^2}) \rightarrow P_{\mu_0,\sigma_0^2} \in \mathcal{P}.$$

Población, muestra y modelos estadísticos. Familias exponenciales

Medidas de probabilidad Normal y de Poisson

- Sea X una variable con densidad normal, media μ y varianza σ^2, luego la medida de probabilidad definida por $\mathrm{P}_{\mu,\sigma^2} : \mathcal{B} \to [0,1]$ es dada por

$$\mathrm{P}_{\mu,\sigma^2}(A) = \int_A f_{\mu,\sigma^2}(x)dx.$$

- Consideremos un vector $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables i.i.d con densidad normal con media μ y varianza σ^2, luego la medida de probabilidad conjunta $\mathrm{P}'_{\mu,\sigma^2} : \mathcal{B}^n \to [0,1]$ es dada por

$$\mathrm{P}'_{\mu,\sigma^2}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mathrm{P}_{\mu,\sigma^2}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{P}_{\mu,\sigma^2}(A_n).$$

- Consideremos un vector $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables i.i.d con función de probabilidad Poisson de parametro λ, luego la medida de probabilidad conjunta es definida por $\mathrm{P}'_\lambda : \mathcal{A}' \to [0,1]$ es dado por

$$\mathrm{P}'_\lambda(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mathrm{P}_\lambda(A_1) \times \ldots \times \mathrm{P}_\lambda(A_n) = \prod_{i=1}^{n} \Big[\sum_{x \in A_i} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \Big].$$

El problema Estadístico

En Teoría Estadística los *datos* se consideran una observación de una variable aleatoria $X : \Omega \to \Lambda$ modelado por $(\Lambda, \mathcal{G}, P_X)$ definido acorde el experimento aleatorio.

Definición 1

- Los datos o evento observado $\mathbf{x}$ será llamado de una **muestra de una medida de probabilidad** P.
- La *verdadera* medida de probabilidad que genero los datos x será llamada de **población** de x.
- **El problema estadístico: inferir** propiedades de la población P basado una muestra $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ observada en un experimento.

Modelo estadístico paramétrico

Definición 2. Modelo Estadístico Clásico

Una clase $\{P_\theta\}$ en $(\Lambda, \mathcal{G})$ indexada por un **parámetro** $\theta \in \Theta$ es una **familia paramétrica** si y solo si $\Theta \subset \mathcal{R}^d$ para $d \in \mathcal{N}_+$ y cada P_θ es una medida de probabilidad totalmente especificada. Θ es llamado **espacio paramétrico** de dimensión d. Un **modelo estadístico paramétrico** para los eventos en $(\Lambda, \mathcal{G})$ es la tripla

$$\Big(\Lambda, \mathcal{G}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\}\Big). \quad (1)$$

- Un modelo paramétrico asume que la población P pertenece a una familia de medidas de probabilidad **paramétrizada** o **indexada** por $\theta \in \Theta$.
- Una familia paramétrica $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ es **identificable** si y solo si $\theta_1 \neq \theta_2$ y $\theta_i \in \Theta$ implican $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$.
- Si la familia está dominada por ν, entonces esta puede ser identificada por la familia de densidades $\{f_\theta\} = \left\{\frac{dP}{d\nu} : P_\theta \in \mathcal{P}\right\}$ de P con respecto a ν.

El Problema Estadístico y notación

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio con una familia de probabilidad $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Adicionalmente, sea Λ^n el espacio muestral del vector, T una funcion sobre Λ^n y I_Θ la clase de todos los intervalos contenidos en Θ.

- (Estimación puntual) Encontrar una función $T : \Lambda^n \to \Theta$ con propiedades óptimas para asi determinar la población $P_{T(x)}$.
- (Estimación intervalar) Encontrar una función $T : \Lambda^n \to I_\Theta$ con propiedades óptimas.
- (Prueba de hipótesis) Sea $\mathcal{P}_0$ y $\mathcal{P}_1$ dos subfamilias disjuntas de $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. y las hipótesis $H_0 : P \in \mathcal{P}_0$ contra $H_1 : P \in \mathcal{P}_1$. Encontrar una función $T : \Lambda^n \to \{0, 1\}$ tal que $T(x) = 1$ implica rechazar H_0 y $T(x) = 0$ implica no rechazar H_0.

Familia Exponencial

Definición 3 A

Una familia paramétrica $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ dominada por una medida σ-finita ν en $(\Lambda, \mathcal{G})$ se llama **familia exponencial** si y solo si

$$\frac{dP_\theta}{d\nu}(x) = \exp\left\{\eta^\top(\theta) T(x) - \xi(\theta)\right\} h(x), \quad x \in \Lambda, \tag{2}$$

donde $\exp\{x\} = e^x$, T y $\eta(\theta)$ son vectores de dimensión p, η es una función de θ y T función de X, h es una función Boreliana no negativa y $\xi(\theta)$ es llamada de constante de normalización de la densidad[a].

[a] T y h son funciones de x. η y ξ son funciones de θ.

- La función T tiene la forma $T(x) = (T_1(x), T_2(x), \ldots, T_p(x))$ y η tiene la forma $\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \eta_2(\theta), \ldots, \eta_p(\theta))$.
- Notemos que $\eta^\top(\theta) T(x) = \sum_{k=1}^{p} \eta_k(\theta) T_k(x)$.

Parametrización natural

Definición 3 B

La reparametrización $\eta = \eta(\theta)$ es llamada de **parametrización natural** con $\eta \in \Xi$ y

$$f_\eta(x) = \exp\left\{\eta^\top T(x) - \zeta(\eta)\right\} h(x), \quad \textbf{densidad canonica},$$

$x \in \Lambda$, en que $\zeta(\eta)$ es una función de η obtenida al invertir $\xi(\theta)$. El conjunto $\Xi = \{\eta(\theta) : \theta \in \Theta\}$ es llamado de **espacio parametrico natural**.

(a) Si $\dim(\theta) < p$, la medida de probabilidad pertenece a una **familia exponencial curvada**.
(b) Si $\dim(\theta) = p$, la medida de probabilidad pertenece a una **familia exponencial de rango completo**.

Modelo de Poisson

Sea P_θ una familia de medidas de probabilidad Poisson(θ) con parámetro $\theta > 0$. La función de probabilidad de P_θ puede ser rescrita por:

$$f_\theta(x) = \exp\left\{\log(\theta)x + \theta\right\} \frac{1}{x!} I_{\mathcal{N}}(x)$$

Aqui $p = 1$, $\eta(\theta) = \log(\theta)$, $T(x) = x$, $\xi(\theta) = \theta$ and $h(x) = \frac{1}{x!} I_{\mathcal{N}}(x)$.

Consideremos la reparametrización natural $\eta = \log(\theta)$ y $\zeta(\eta) = \exp(\eta)$. El espacio paramétrico natural es $\Xi = \mathcal{R}_+$. Luego:

$$f_\eta(x) = \exp\{\eta x - \exp(\eta)\} h(x).$$

Dado que $\dim(\theta) = \dim(\eta) = 1$, el modelo de Poisson es de rango completo.

Modelo Normal

Consideremos la familia de medidas de probabilidad Normal $\left(\mu, \sigma^2\right)$ pertenece a la familia exponencial, desde que su función de densidad puede ser escrita

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2 - [\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\sigma] \right\}.$$

Tenemos que $p = 2,\ T(x) = \left(x, -x^2\right), \eta(\theta) = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right), \theta = \left(\mu, \sigma^2\right), \xi(\theta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\sigma$, and $h(x) = 1/\sqrt{2\pi}$.

Sea $\eta = (\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$. Entonces, $\Xi = \mathcal{R} \times (0, \infty)$ y podemos obtener una familia exponencial natural f_η con $\zeta(\eta) = \eta_1^2/\left(4\eta_2\right) + \log\left(1/\sqrt{2\eta_2}\right)$. Dado que θ y η tienen dimensión 2, la familia natural es de rango completo.

Nota: La familia $N(\mu, \mu^2)$ no tiene rango completo (ejercicio).

Modelo Binomial

Consideremos una familia de medidas de probabilidad Binomial(θ, n) con parametro θ, en que n conocido y fijo. La función de probabilidad para P_θ es

$$f_\theta(x) = \exp\left\{x \log \frac{\theta}{1-\theta} + n \log(1-\theta)\right\} \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

en que $p = 1$, $T(x) = x$, $\eta(\theta) = \log \frac{\theta}{1-\theta}$, $\xi(\theta) = -n \log(1-\theta)$, y $h(x) = \binom{n}{x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$. Considerando $\eta = \log \frac{\theta}{1-\theta}$, then $\Xi = \mathcal{R}$ con función de densidad

$$f_\eta(x) = \exp\{x\eta - n \log(1+e^\eta)\} \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

es una familia exponencial de rango completo.

Modelo Estadístico Bayesiano

Definición 4

Sea $(\Lambda, \mathcal{G})$ y $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ dos espacios medibles, $X : \Omega \to \Lambda$ y $\theta : \Omega \to \Theta$ variables aleatorias. El modelo **estadístico Bayesiano** es una familia de medidas de probabilidad conjunta para el vector aleatorio $(X, \theta) \sim P_{X\theta}$. La **familia paramétrica** para X es

$$\mathcal{P} = \{P_{\theta_0} : P_{\theta_0}(A) = P(X \in A | \theta = \theta_0), \quad \theta_0 \in \Theta\}. \tag{3}$$

Si cada $P_{\theta_0} << \nu$, luego la densidad es $f(x|\theta = \theta_0) := f(x|\theta_0) = \frac{dP_{\theta_0}}{d\nu}$. Por tanto, podemos escribir:

$$P_{\theta_0}(A) = \int_A f(x|\theta_0)dx. \tag{4}$$

La densidad conjunta de (X, θ) es dada por:

$$f(x, \theta) = \pi(\theta)f(x|\theta) \text{ o } f(\mathbf{x}, \theta) = \pi(\theta)f(\mathbf{x}|\theta).$$

Modelo Bayesiano a posteriori

Definición 5

Un modelo de probabilidad **a priori** para θ es $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta, \Pi_\theta)$, en que $\Pi_\theta(B) = \int_B \pi(\theta)d\theta$ y $\pi(\theta)$ es la densidad a priori de θ (o probabilidad cambiando la integral por una sumatoria).
Luego de observar $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, el **modelo Bayesiano a posteriori** de $\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}$ es la tripla $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta, P_{\theta|\mathbf{X}=\mathbf{x}})$ en que

$$P_{\theta|\mathbf{X}=\mathbf{x}}(B) = \int_B \pi(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x})d\theta \text{ para } B \in \mathcal{F}_\Theta. \tag{5}$$

y $\pi(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x})$ es la densidad a posteriori de θ dado la muestra observada $\mathbf{X} = \mathbf{x}$.

Por el teorema de Bayes, la densidad a posteriori se rescribe:

$$\pi(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{\pi(\theta)f(\mathbf{x}|\theta)}{\int_\Theta \pi(\theta)f(\mathbf{x}|\theta)d\theta}, \quad g(\mathbf{x}) = \int_\Theta \pi(\theta)f(\mathbf{x}|\theta)d\theta \text{ marginal de } \mathbf{x}.$$

Ejemplo de modelo Bernoulli y Poisson

- Consideremos que el parametro de interes es la proporción $\theta \in (0,1)$ y que a priori (antes de observar los datos) le provemos de un modelo Beta(a,b). Supongamos, que $X_i|\theta = \theta_0 \sim$ Bernoulli(θ_0). El modelo de probabilidad a posteriori de $\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}$ es la medida de probabilidad Beta$(\sum_{i=1}^{n} x_i + a; n - \sum_{i=1}^{n} + b)$.
- Supongamos que el parametro de interes es la taza de ocurrencia $\theta > 0$ y que a priori (antes de observar los datos) le provemos de un modelo Gama(a,b). Supongamos, que $X_i|\theta = \theta_0 \sim$ Poisson(θ_0). El modelo de probabilidad a posteriori de $\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}$ es la medida de probabilidad Gama $(\sum_{i=1}^{n} x_i + a; n + b)$.
- Un modelo a priori para θ, representado por π, es **conjugado** con $f(\mathbf{x}|\theta)$ cuando $\pi(\theta)$ y $\pi(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x})$

Ejemplo de modelo Normal

- Si el parametro de interes es la media $\theta \in \mathcal{R}$ y que a priori (antes de observar los datos) le provemos de un modelo Normal(a, b). Supongamos, que $X_i|\theta = \theta_0 \sim$ Normal(θ_0, σ_0^2) (σ_0^2 es conocido). El modelo de probabilidad a posteriori de $\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}$ es la medida de probabilidad

$$\text{Normal}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_o^2} + \frac{a}{b^2}}{\frac{n}{\sigma_0^2} + \frac{1}{b^2}}; \frac{1}{\frac{n}{\sigma_0^2} + \frac{1}{b^2}}\right\}.$$

Modelo no parametrico

Un **modelo estadístico no paramétrico** es una tripla

$$\Big(\Lambda, \mathcal{G}, \{P_s : s \in S\}\Big),$$

en que s es una **función** que pertenece a una clase de funciones S bien definida. Por ejemplo, el espacio L^2 en los reales o en el intervalo unitario.

- Sea $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$, una variable X de modelo desconocido e $Y = s(X) + \epsilon$, en que s es una función Boreleana en L^2. El modelo para $Y|X \sim N(s(X), \sigma^2)$ es no paramétrico. El problema estadístico consiste en estimar la función $s(X)$.
- Sea $H : \mathcal{R} \to [0, 1]$ conocida (por ejemplo Φ o la Logística) y s antes definida. Un modelo no paramétrico para una variable Bernoulli $Y|X$ considera una función de probabilidad

$$p_s(y) = H(s(x))^y [1 - H(s(x))]^{1-y}.$$

Ejemplos de modelo estadístico no paramétrico 1

- Consideremos una familia de funciones de probabilidad acumulada (f.d.a) $\mathcal{L} = \left\{F : \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) < \infty\right\}$. El modelo de probabilidad indexado por $\mathcal{L}$ es la tripla $(\mathcal{R}, \mathcal{B}, \{P_F : F \in \mathcal{L}\})$, en que

$$\left\{P_F : P_F(A) = \int_A dF(x) \quad A \subset \mathcal{R} \text{ y } F \in \mathcal{L}\right\}.$$

  Podemos estimar $\theta = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$ por $\widehat{\theta} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Consideremos una familia de f.d.a $\mathcal{L} = \left\{F : \int |x|^2 dF(x) < \infty\right\}$. El modelo de probabilidad indexado por $\mathcal{L}$ es la tripla $(\mathcal{R}, \mathcal{B}, \{P_F : F \in \mathcal{L}\})$. Podemos estimar el funcional

$$\theta = \int \int 2^{-1}(x_1 - x_2)^2 dF(x_1)dF(x_2) \quad \text{(varianza de } F).$$

  por $\widehat{\theta} = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} 2^{-1}(X_i - X_j)^2$.

Ejemplos de modelo estadístico no paramétrico 2

- Consideremos una familia de f.d.a bivariada

$$\mathcal{L} = \left\{ F : \int |xy|^2 dF(x,y) < \infty \right\}.$$

El modelo de probabilidad indexado por $\mathcal{L}$ es la tripla $(\mathcal{R}, \mathcal{B}, \{P_F : F \in \mathcal{L}\})$. Podemos estimar el funcional

$$\theta = \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathcal{R}} 2^{-1}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) dF(x_1, y_2) dF(x_2, y_2) \quad \text{(cov. de F)}$$

por $\widehat{\theta} = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} 2^{-1}(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)$.

Estadísticos, Suficiencia, Ancilaridad y Completitud

Estadístico y disminución de dimensión

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ el espacio medible original del experimento y $(\Lambda, \mathcal{G})$ el espacio medible del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Una operación de reducción es una función

$$\mathbf{X} \rightarrow T, \quad \dim(T) < \dim(\mathbf{X}).$$

Ejemplos:

- Reducción de una muestra: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ al escalar $x \in \mathcal{R}$.
- Reducción de un matriz: $X_{n\times p}$ al vector $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)$, en que $\bar{x}_i$ es el promedio de la i-ésima columna de $X_{n\times p}$.
- Reducción de un matriz por condicionamiento: $X_{n\times p}|A = (1, p)$ reduce la matriz a $Y_{2\times(p-1)}$. El estadístico A será conecido como estadístico **ancilar**.

Estadístico y sub σ-álgebra generada

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ el espacio medible original del experimento y $(\Lambda, \mathcal{G})$ el espacio medible del vector X.

Definición 6

Consideremos el espacio medible $(\Phi, \mathcal{T})$, una función mensurable $T : \Lambda \to \Phi$ es llamado de **estadístico**, esto es, siempre que $T(\mathcal{T})^{-1} \subset \mathcal{F}$.

Resultado de la Teoría de la medida de Probabilidad.

$$\sigma(T(x)) \subset \sigma(X) \subset \mathcal{F}.$$

- La media $\bar{X}_n$ y varianza muestral S^2.
- El estadístico conjunto $T = (\bar{X}, S^2)$.
- El vector de estadísticos de orden $T = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$.
- Una clase de equivalencia puede ser un estadístico. Por ejemplo, sea $T(x) = [x] = \{y \in \mathcal{X} : \exists k, f_\theta(x) = kf_\theta(y)\ \forall \theta \in \Theta\}$. Es decir, $T(x)$ es el conjunto de todos puntos del espacio muestral con función de densidad proporcional a $f_\theta(x)$.

Sufficiencia Clásica

Definición 7. Suficiencia clásica

Sea X un vector aleatorio de una población desconocida $P_\theta \in \mathcal{P}$, donde $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Un estadístico $T(X)$ es **suficiente para** $\theta \in \Theta$ en el sentido **clásico** si y solo si la densidad de P_θ para X condicional a $T = t$ no depende de θ, o equivalentemente, es invariante con respecto a θ.

Ejemplos:

- Modelo Bernoulli: $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.
- Modelo Poisson: $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.
- Modelo Normal: $T(X) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$.
- Modelo Gamma: $T(X) = \left(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right)$.

Criterio de Factorización

Teorema 1 A. Criterio de Factorización

Supongamos que x es una muestra de $P_\theta \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ es una familia de medidas en $(\mathcal{R}^n, \mathcal{B}^n)$ dominada por medida σ-finita ν. Entonces, $T(X)$ es suficiente para $P_\theta \in \mathcal{P}$ si y solo si existe una funcion medible de Borel nonegativa h (que no depende de θ) sobre $\mathcal{R}^n$ and g_θ (la cual depende de θ) sobre el rango de T tal que

$$\frac{dP_\theta}{d\nu}(x) = g_\theta(T(x))h(x).$$

Si $\mathcal{P}$ es una familia exponencial y $X(\omega) = x$, por el teorema, $g_\theta(t) = \exp\left\{[\eta(\theta)]^\top T(x) - \xi(\theta)\right\}$ implica que T es suficiente para $\theta \in \Theta$.

Vector de estadísticos de orden

Sea $X_1, \ldots, X_n$ sean v.a i.i.d. con medida $P \in \mathcal{P}$, en que $\mathcal{P}$ es la familia de medidas en $\mathcal{R}$ que posee f.d.d de Lebesgue. El estadístico $T(X) = \left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ es suficiente para $\theta \in \Theta$.

Definición 8. Suficiencia minimal

Sea T un estadístico suficiente para $\theta \in \Theta$. Luego, T es llamado de **estadístico suficiente minimal** si y solamente si

(a) T es suficiente para $\theta \in \Theta$;

(b) Para cualquier otro estadístico suficiente S para $\theta \in \Theta$, existe una función medible ψ tal que $T = \psi(S)$ casi ciertamente en $\mathcal{P}$.

Si ambos T y S son estadísticos suficiente minimal, entonces, por definición existe una función medible 1 a 1 ψ tal que $T = \psi(S)$ c.c $\mathcal{P}$. es decir, los estadísticos mínimos suficientes son **únicos** en el sentido de que dos de ellas funciones uno a uno del otro con probabiliodad 1.

Ejemplo de estadísticos suficientes minimal para modelos.

- Modelo Bernoulli: $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Modelo Uniforme$(0, \theta)$: $T(X) = \max\{X_1, \ldots, X_n\} = X_{(n)}$.
- Modelo Poisson: $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Modelo Normal: $T(X) = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2)$.

Criterio de Factorización

Teorema 1 B. Criterio para un estadístico suficiente minimal

Sea $f_\theta(x)$ la función de densidad o de probabilidad de un vector X y una estadística T tal que:
$T(x) = T(y)$ si y solamente si $y \in D(x)$, en que

$$D(x) = \{y \in \Lambda : f_\theta(y) = f_\theta(x)h(x,y), \quad \theta \in \Theta; h(x,y) > 0\}.$$

Entonces, tal T es un estadístico suficiente minimal.

Ejemplos

- Modelo Bernoulli: $h(x,y) = 1$.
- Modelo Normal:
- Modelo Exponencial:

Interpretaciones de la Suficiencia

- Modelo Binomial: $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i = t$. La suma total t de caras observadas al lanzar n veces una moneda contiene toda la información necesaria para estimar la probabilidad $\Pr(X_i = 1) = \theta$.
- Modelo Uniforme: $T(X) = X_{(n)}$. El máximo observado $x_{(n)}$ contiene contiene toda la información necesaria para estimar θ.

  En inferencia estadística, un estadístico suficiente es utilizado para la construcción de estimadores que son funciones de este.

Principio de Suficiencia*

Dada una muestra $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de una variable X con modelo estadístico que contempla un estadistico suficiente (mínimal) T para $\theta \in \Theta$. Entonces, los estimadores puntuales, intervalares y estadístico de prueba de un contraste hipótesis inferencia acerca de θ deben ser funciones de T. [Reid, N., & Cox, D. (2013). Principles of Statistical Inference].

Estadísticos ancilares

Definición 9. Estadísticos ancilares de primer y segundo orden.

Un estadístico $V(X)$ es llamado de **ancilar de primer orden** si su medida de probabilidad no depende de θ y será llamada de **ancilar de segundo orden** si $E[V(X)]$ no depende de θ.

Consideremos una secuencia de variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ en que X_i tiene medida Normal(μ, σ^2).

- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ con medida Chi$(n-1)$ que no depende de $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
- $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$ con medida Student$(n-1)$ no depende de $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ con medida Chi(n) no depende de $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
- Estadístico F.

Interpretaciones de la Ancilaridad

- Modelo Normal. La construcción de un intervalo de confianza para μ debe ser basado condicionando en el valor observado de $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$ sin agregar sesgo a la estimación.
- La construcción de un intervalo de confianza para σ debe ser basado condicionando en el valor observado de $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ sin agregar sesgo a la estimación.
- En inferencia estadística, un estadistico ancilar es empleado para condicionar en el y trabajar con las distribución condicional.

Principio de Condicionalidad*

Dada una muestra $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de una variable X con modelo estadístico que contempla un estadistico suficiente (mínimal) T y un estadístico ancilar A para $\theta \in \Theta$. Entonces, los estimadores puntuales, intervalares y estadístico de prueba de hipótesis de inferencia acerca de θ deben ser funciones de $T|A$ (condicional).

[Reid, N., & Cox, D. (2013). Principles of Statistical Inference]

Estadístico Completo

Definición 10. Completitud

Un estadístico $T(X)$ es llamado de **completo** para $\theta \in \Theta$ en relación a una familia $\mathcal{P}$ si y solo si para cualquier función Boreleana f, $E_\theta[f(T)] = 0$ para todo $\theta \in \Theta$ implica $f(T) = 0$ casi ciertamente en $\mathcal{P}$. Adicionalmente, T es llamado de **limitadamente completo** si el requerimiento anterior es verdadero solo para funciones Boreleanas limitadas f.

Nota: Un estadístico completo y suficiente podría ser minimal, lo cual es provado por Lehmann and Scheffé (1950) and Bahadur (1957) (ver Exercise 48). Sin embargo, un estadístico suficiente minimal no es necesariamente completo.

Intuitivamente, **un estadístico completo no posee información ancilar dentro de si**, es decir, contiene alta información necesaria para estimar θ.

Goal: Estadístico suficiente, minimo y completo***.

Completitud en familias exponenciales

Proposición 1.

(a) Si P_θ pertenece a la familia exponencial con rango completo con la densidad canonica f_η, entonces $T(X)$ es completo y suficiente para $\eta \in \Xi$.
(b) Si existe una correspondencia 1-1 entre η y θ ($\eta(\theta)$ es inyectora), entonces T es también completo para θ.

Ejemplo de estadísticos completos para modelos.

- Modelo Bernoulli: $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ es completo para θ.
- Modelo Poisson: $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ es completo para θ.
- Modelo Normal: $T(X) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ es completo para $\eta = \left(\frac{\mu}{\sigma^2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$ la cual es una función inyectora, por lo tanto, también es completa para $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
- (Demostración directa) Modelo Uniforme$(0, \theta)$: $T(X) = X_{(n)}$ es completa para θ.

Teorema 2. Teorema de Basu.

Sea V y T dos estadísticos de X con población $P_\theta \in \mathcal{P}$. Si V es ancilar y T es limitadamente completa y suficiente para $\theta \in \Theta$, entonces V y T son independientes con respecto cualquier $P \in \mathcal{P}$.

El Teorema de Basu es útil para probar la independencia, si fue el caso, de dos estadísticos.

- Para una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ del modelo Normal(μ, σ^2), las estadísticas $\bar{X}$ y S^2 son independientes.

Suficiencia Bayesiana

Recordemos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\Lambda, \mathcal{G})$ y (Θ, ν) dos espacios medibles y sean $X : \Omega \to \Lambda$ y $\theta : \Omega \to \Theta$ funciones medibles. Tambien recordemos que $P_{\theta_0}(A) = P(X \in A|\theta = \theta_0)$.

Definición 11. Suficiencia Bayesiana.

El estadístico $T(X)$ es suficiente (en el sentido **Bayesiano**) para θ si y solamente si, para toda medida de probabilidad a priori Π_θ,

$$P_{\theta|\mathbf{X}=\mathbf{x}}(B) = P_{\theta|T(\mathbf{x})=t}(B), \text{ para todo } B \text{ tal que } P_{\mathbf{X}}(B) \neq 0,$$

en que $P_{\mathbf{X}}$ es la medida marginal de $\mathbf{X}$.

Un criterio operacional derivado del anterior de este Teorema es el siguiente: T cumple la Definición 11 si y solo si

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \pi(\theta|T(\mathbf{x}) = t), \text{ casi ciertamente.}$$

Ver Lema 2.6 en Schervish (1995), página 85.

Equivalencia entre Suficiencia Clásica y Bayesiana

Teorema 2. Equivalencia entre suficiencias

Sea $(\Phi, \mathcal{T})$ un espacio medible y T un estadístico. Supongamos que existe una medida σ-finita ν tal que $P_{X|\theta=\theta_0}(\cdot \mid \theta_0) \ll \nu$ para todo $\theta_0 \in \Theta$. Entonces, T es suficiente en el sentido clásico si y solo si T es suficiente en el sentido Bayesiano.

Ejemplo de estadísticos suficientes para el modelo clásico y Bayesiano.

- Modelo Bernoulli conjugado: $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Modelo Poisson conjugado: $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Modelo Normal conjugado: $T(X) = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \prod_{i=1}^{n} X_i^2)$.

Función de Verosimilitud

- Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio con función de densidad conjunta $f_\theta(x_1, \ldots, x_n)$. La función de verosimilitud θ de la muestra $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es la función

$$\mathcal{L} = (\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) : \Theta \to \mathcal{R}.$$

- Caso Bernoulli.
- Caso Poisson.
- Si cada $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\mathcal{L}(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \times \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

en que $\theta = (\mu, \sigma^2)$

Interpretaciones de la "Verosimilitud"

- La función de verosimilitud L induce una relación de orden (preferencia) sobre Θ dada por $\theta_1 \leq \theta_2$ siempre que $\mathcal{L}(\theta_1) \leq \mathcal{L}(\theta_2)$.
- Criterio del más preferente: $\theta^\star$ tal que $\theta \leq \theta^\star$ para todo $\theta \in \Theta$.

Principio de Verosimilitud*

Dada una muestra $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de una variable X con modelo estadístico que contempla una función de verosimilitud $\mathcal{L}(\theta)$. Entonces, las inferencias acerca de θ deben ser basadas en $\mathcal{L}(\theta)$.
[Reid, N., & Cox, D. (2013). Principles of Statistical Inference].

Principio frecuentista clásico

- Sea T un estimador de θ y $L(L, \theta)$ una medida de error en la estimación.
- Consideremos una secuencia infinita de variables de X: $X_1, X_2, \ldots,$.

Principio frecuentista clásico*

Las propiedades de inferencia de T sobre θ medidas por una funcion $L(T, \theta)$ deben ser evaluadas según las propiedades de L el repetir el experimento un número infinito de veces.
Evans(2014).

Perdida, función de perdida, regla de decisión y riesgo medio

Añadir

La **Teoria de la Decisión** se preocupa del proceso de toma de decisión basado en modelo probabilisticos. La **Teoria de la Decisión Estadística** empleo modelo estadísticos y datos.

Abordajes

- Normativa: busca maximizar ganancias y/o minimizar perdidas.
- Descriptiva: empleo técnicas heuristicos en contextos prácticos

El fundamento teorico en el caso normativo esta el la **Teoria de la Utilidad** que toma como base los axiomas de compartamiento racional de los jugadores.

Tipos de metodologías:

- Clasica: basada en modelos de probabilidad.
- Bayesiana: incluye un modelo de probabilidad para el estado de la naturaleza.
- Estadística clasica; empleao modelos estadísticos estimados desde datos.
- Estadística Bayesiana: emplea modelos Bayesianos a posteriores.

Elementos de la Teoria de Decisión

- El objetivo es estimar el **estado de naturaleza** desconocido dentro del **conjunto de los posibles estados**.
- La estimación se realiza por medio de una función de decisión que asume valores en el **espacio de las posibles decisiones**.
- Decimos que ocurre una perdida cuando nuestra decisión no acierta a estimar el verdadero estado de la naturaleza.
- Medimos la magnitud de la perdida con una función de perdida.
- La Teoria de Decisiones Estadística utiliza datos y una función de decisión T para estimar el "verdadero estado de la naturaleza" especifico dentro de un "conjunto de estados posible" **minimizando** una función de perdida (A. conservador) o **maximizando** una función de utilidad (A. riesgoso).

T. Decisiones Estadística $\subset$ T. Decisión

- El parametro θ es el **estado de naturaleza** desconocido y Θ el **conjunto de los posibles estados**.
- El estadístico $T : \Lambda \to \mathbb{A}$ es llamado de función de decisión y $\mathbb{A}$ el **espacio de las posibles decisiones**. Además, $\mathcal{F}_{\mathbb{A}}$ es la σ-álgebra sobre $\mathbb{A}$. El espacio medible $(\mathbb{A}, \mathcal{F}_{\mathbb{A}})$ es llamado de **espacio de decisiones**.
- La Teoria de Decisiones Estadística (TDE) busca utilizar una muestra X de $P_\theta \in \mathcal{P}$ atraves de una función de decisión T para estimar el "verdadero estado de la naturaleza" especifico dentro de un "conjunto de estados posible" **minimizando** una función de perdida L (A. conservador) o **maximizando** una función de utilidad U (A. riesgoso).
- En el contexto de la TDE, existe tres opciones para $\mathbb{A}$
  - Si $\mathbb{A} = \Theta$, entonces T es un estimador puntual de θ.
  - Si $\mathbb{A} = I_\Theta$ (clase de intervalos abiertos), entonces, T es un estimador intervalar de θ.
  - Si $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, en donde 1 significa rechazar H_0, entonces, T es una función del tipo *test* .

Perdida en estimación puntual

Definición 12. Función de perdida.

Decimos que **ocurre una perdida** en la estimación de θ por $T(x)$ siempre que $T(x) \neq \theta$.
La magnitud de la perdida es medida por una función. Una **función de perdida** L, es una función $L : \Theta \times \mathbb{A} \to [0, \infty)$ para una medida fija $P_\theta \in \mathcal{P}$.
Cuando $X = x$ es observada y tomamos la decisión $T(x)$, entonces nuestra "magnitud de la perdida" es $L(\theta, T(x))$.

Ejemplos

- $L(\theta, T) = \dfrac{\theta}{2}(\theta - T(x))^2$.
- $L(\theta, T) = (\theta - T(X))^2$ llamada de perdida cuadratica.
- $L(\theta, T) = |\theta - T(x)|$ llamada de perdida absoluta.

Riesgo medio

Definición 13. Función de Riesgo medio.

Para una medida P_θ fija, la función $L(\theta, T(X))$ es una función aleatoria de X con medida P_θ. El **riesgo** de T, denotado por R_T es el valor esperado:

$$R_T(\theta) = E_X[L(\theta, T(X))].$$

Ejemplo

- Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra tal que $X_i \sim \text{Modelo}(\theta)$. Entonces, para $T(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$, tenemos que $R_T(\theta) = (\theta - E\bar{X})^2 + \dfrac{\sigma^2}{n}$.
- Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra tal que $X_i \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Entonces, para $T(X) = \bar{X}$, tenemos que $R_T(\theta) = (\mu - E\bar{X})^2 + \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Admisibilidad e insesgamiento

Definición 14. Admisibilidad

Sea $\mathcal{D}$ una clase de funciones de decisión. Una función de decisión $T \in \mathcal{D}$ es llamada de **admisible** en $\mathcal{D}$ si y solo si no existe alguna otra función $S \in \mathcal{D}$ con un riesgo medio menor que T.

En palabras simples, una función de división es inadmisible si existe otra función con un riesgo menor a ella.

Definición 15. Insesgamiento.

En un problema de estimación, el **sesgo** de un estimador puntual $T(X)$ de un parámetro real $g(\theta)$ de una población desconocida es definida como la función $b_T(g(\theta)) = E[T(X)] - g(\theta)$. Un estimador $T(X)$ es llamado de **insesgado** para $g(\theta)$ si y solo si $b_T(g(\theta)) = 0$ para cualquier medida $P_\theta \in \mathcal{P}$.

Resultado de optimalidad

Teorema 3. Rao-Blackwell.

Sea T un estadistico suficiente para $\theta \in \Theta$, T_0 una función de decisión real tal que $E\,\|T_0\| < \infty$ y definamos $T_1 = E\,[T_0(X) \mid T]$. Entonces, $R_{T_1}(\theta) \leq R_{T_0}(\theta)$ para cualquier $P_\theta \in \mathcal{P}$.

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d tal que $X_i \sim$ Poisson(θ). Queremos estimar el parametro $P(X = 0) = g(\theta) = e^{-\theta}$. Temos que a estatística $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es suficiente para θ. Consideremos el estimador insesgado

$$S(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } X_1 = 0 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Luego, el estimador

$$\widehat{g(\theta)} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

es insesgado com menor varianza que S.

Decisión Minimax

Definición 16

Una función de decisión T_0 es llamada de **decisión minimax** de uma clase $\mathcal{D}$ de funciones siempre que:

$$\sup_{\theta\in\Theta} R_{T_0}(\theta) = \inf_{T\in\mathcal{D}} \sup_{\theta\in\Theta} R_T(\theta),$$

en que $\sup_{\theta\in\Theta} R_{T_0}(\theta)$: es el riesgo máximo al decidir T_0.
$\inf_{T\in\mathcal{D}} \sup_{\theta\in\Theta} R_T(\theta)$: el menor riesgo máximo en Θ de todas las posibles decisiones en $\mathcal{D}$.

- Interpretaciones: La función de decisión minimax es la decisión que nos protege del riesgo máximo.
- Nota: el supremo es la menor de las cotas inferiores.

Decisión de Bayes

Definición 17

El **riesgo de Bayes** de la decisión T con respecto a la función de perdida de $L(\theta, T)$ es la esperanza:

$$r(\pi, T) = E_\pi[R_T(\theta)] = \sum_{\theta \in \Theta} R_T(\theta)\pi(\theta) \quad \text{o} \quad \int_\Theta R_T(\theta)\pi(\theta) d\theta$$

Una función de decisión T_B es llamada de **decisión de Bayes** para una función de perdida de $L(\theta, T)$ siempre que $r(\pi, T_B) = \min_{T \in \mathcal{D}} r(\pi, T)$.

Resultado (Teorema)

Sea $\mathcal{D}$ la clase de todas las funciones decisión. Cuando consideramos la función cuadratica, entonces la decisión de Bayes que minimiza el riesgo medio dada una priori $\pi(\theta)$ es el valor esperado $T_B(\mathbf{X}) = E(\theta|\mathbf{X})$. **Nota:** $R_T(\theta)$ es una variable aleatoria función de θ.

Ejemplo de decisión de Bayes

- Para el modelo Bayesiano Conjugado de $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$ y $X_i|\theta = \theta_0 \sim \text{Bernoulli}(\theta_0)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. La decisión de Bayes es:

$$d_B(\mathbf{X}) = E(\theta|\mathbf{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + a}{n + a + b}.$$

- Consideremos un modelo conjugado Poisson en que $X_i|\theta = \theta_0 \sim \text{Poisson}(\theta_0)$ y $\theta \sim \text{Gamma}(a, b)$.

$$d_B(\mathbf{X}) = E(\theta|\mathbf{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + a}{n + b}.$$

Estimación puntual en Teoría de la Desición

- Si $\mathbb{A} = \Theta$, entonces $T : \Lambda \rightarrow \Theta$ es un función de decisión puntual o estimador puntual de θ.
- La función de perdida L puede ser escrita de forma generalizada de la forma
$$L(\theta, T) = c(\theta)|\theta - T(x)|^r, \quad c(\theta) > 0.$$
- La función de riesgo es el valor esperado $E_T[L(\theta, T(X))]$.
- Podemos considerar la función cuadratica:
$$L(\theta, T) = (\theta - T(X))^2$$
- La función de perdida de diferencia de valor absoluto.
$$L(\theta, T) = |\theta - T(x)|.$$

Estimación intervalar y Teoría de la Desición

- Si $\mathbb{A}$ es la clase de los intervalos abiertos $IC \subset \Theta$, entonces, T es una función de decision intervalar o estimador intervalar de θ.
- Consideremos la perdida $L : \theta \times \mathbb{A}$ dada por [1]:

$$L(\theta, T) = a \times \text{length}(T(x)) - b \times I_{T(x)}(\theta), \quad a, b > 0.$$

- En este caso, la función de riesgo es el valor esperado

$$\begin{aligned}
R(\theta, T(X)) &= E_T\left[a \times \text{length(T(X))} - b \times I_{T(X)}(\theta)\right] \\
&= E_T\left[a \times \text{length}(T(X))\right] - b \times P(I_{T(X)}(\theta) = 1) \\
&= aE_T\left[\text{length}(T(X))\right] - b \times P(\theta \in T(X)). \\
&= \text{El valor medio de la longuitud del intervalo por a} \\
&\quad \text{menos la probabilidad de } \theta \in T(X) \text{ por b.}
\end{aligned}$$

[1]Denotamos $\text{length}(T(X)) = \text{length}([a, b]) = b - a$.

Prueba de hipótesis y Teoría de la Desición

- Si $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, en donde 1 significa rechazar H_0, entonces, T es una función de decisiondel tipo *test*.
- Consideremos la partición $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$.

Consideremos las hipótesis

$$H_0 : P_\theta \in \mathcal{P}_0 \ (\theta \in \Theta_0) \quad \text{versus} \quad H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1 \ (\theta \in \Theta_1).$$

Con

$$L(\theta, T) = \begin{cases} a & \text{si } \theta \in \Theta_0 \text{ y } T(x) = 1 \\ b & \text{si } \theta \in \Theta_1 \text{ y } T(x) = 0. \end{cases}$$

Con riesgo medio $R_T(\theta) = aP_{\theta_0}(T(x) = 1) + bP_{\theta_1}(T(x) = 0)$

$$R_T(\theta_0) = \begin{cases} aP(T(X) = 1) & \text{si } \theta \in \Theta_0 \\ bP(T(X) = 0) & \text{si } \theta \in \Theta_1. \end{cases}$$

Estimación puntual, insesgamento y eficiencia. Estadísticos U

Ejemplo de estimadores puntuales

Ejemplo de estimadores puntuales.

- **Book:** Casella, G., & Berger, R. (2024). Statistical inference. CRC Press.
- Estimadores de Máxima Verosimilitud EMV
- Estimadores de los momentos Generalizados (E MG).
- Estadísticos U. **Book:** Lee, A. J. (2019). U-statistics: Theory and Practice. Routledge.

Definición 19

Sea X una muestra de la población $P_\theta \in \mathcal{P}$ sea $g(\theta)$ un parámetro real $g(\theta)$. Diremos que un estimador $T(X)$ de $g(\theta)$ es dicho **insesgado** si y solo si $E[T(X)] = g(\theta)$ para cualquier $\theta \in \Theta$. Si existe un estimador insesgado de $g(\theta)$, entonces $g(\theta)$ es llamado de **parametro estimable**.

Definición 20

Un estimador $T(X)$ insesgado de $g(\theta)$ es llamado de **Estimador Insesgado de Varianza Minima Uniforme (EIVMU)** si y solamente si $\text{Var}(T(X)) \leq \text{Var}(U(X))$ para todo $\theta \in \Theta$ y cualquier otro estimador insesgado $U(X)$ de $g(\theta)$.

Teorema 4 (Lehmann-Scheffé).

Supongamos que existe un estadístico suficiente y completo $T(X)$ para $\theta \in \Theta$. Si θ es un parametro estimable, entonces:

(i) Existe un unico estimador insesgado de θ que tiene la forma $h(T)$ para una función Boreliana h;

(ii) Adicionalmente, $h(T)$ es el único EIVMU de θ.

Nota: Si dos estimadores son iguales casi ciertamente en toda $\mathcal{P}$, entonces ambos son tratados como un mismo estimador.

- Sea $X_i \sim$ Uniforme$(0, \theta)$, $\theta > 0$, $g(\theta)$ diferenciable en $(0, \infty)$. Luego, un EIVMU para $g(\theta)$ es

$$h(X_{(n)}) = g(X_{(n)}) + n^{-1} X_{(n)} g(X_{(n)}).$$

- Sea $X_i \sim$ Poisson(θ), $\theta > 0$. Luego, un EIVMU para $g(\theta) = \theta^r$ es

$$h(T) = \frac{T!}{n^r (T-r)!}, \quad t \geq r, \quad h(T) = 0, \quad t < r.$$

Teorema 5

Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los estimadores insesgados de 0 con varianza finita y sea T un estimador insesgado de θ con $E\left(T^2\right) < \infty$.

(i) Una condición necesaria y suficiente para que $T(X)$ sea un EIVMU de θ es: $E[T(X)U(X)] = 0$ para cualquier $U \in \mathcal{U}$ y cualquier $\theta \in \Theta$.

(ii) Supongamos que $T = h(\tilde{T})$, donde $\tilde{T}$ es un estadístico suficiente para $\theta \in \Theta$ y h es una función Boreliana. Sea $\mathcal{U}_{\tilde{T}}$ un subconjunto de $\mathcal{U}$ que contiene funciones Borelianas de $\tilde{T}$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que T sea un EIVMU de θ es que $E[T(X)U(X)] = 0$ para cualquier $U \in \mathcal{U}_{\tilde{T}}$ y cualquiera $\theta \in \Theta$.

Información de Fisher

Definición 21. Información de Fisher y función Score

La cantidad
$$\frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial \theta}$$
es llamada de **función Score** de θ contenida en x.
La cantidad
$$\mathrm{IF}_n(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f_\theta(X)}{\partial \theta}\right)^2\right].$$
es llamada de **Información de Fisher** de θ contenida en $X = (X_1, \ldots, X_n)$.
Denotamos por $\mathrm{IF}_i(\theta)$ la información de Fisher contenida en una observación particular x_i.

Ejemplos: escores e información de Fisher

- En el caso de la familia Normal con σ^2 conocida, tenemos la función escore dada por
$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log f_\mu(x) = -\frac{n}{\sigma^2}.$$
Luego, $\mathrm{IF}_n(\mu) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log f_\theta(X)\right] = n/\sigma^2$.
- En el caso de la familia Poisson(θ), tenemos la función escore dada por
$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log p_\mu(x) = -\frac{x_i}{\theta^2}.$$
Luego, $\mathrm{IF}_n(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log p_\theta(X)\right] = n/\theta$.

Teorema 6 (Límite inferior de Cramér-Rao)

Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra de P_θ, donde Θ es un conjunto abierto de $\mathcal{R}^k$. Supongamos que $T(X)$ es un estimador tal que $E[T(X)] = g(\theta)$ es una función diferenciable de θ y P_θ tiene p.d.f. f_θ con respecto a una medida ν para todo $\theta \in \Theta$, f_θ es diferenciable como función de θ y satisface

$$[\textbf{Condición T6}] \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\int_\Lambda h(x)f_\theta(x)d\nu = \int_\Lambda h(x)\frac{\partial}{\partial\theta}f_\theta(x)d\nu,\ \forall\theta\in\Theta,$$

para $h(x) \equiv 1$ y $h(x) = T(x)$. Entonces,

$$\mathrm{Var}(T(X)) \geq \mathrm{LI}(\theta) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)\right]^2 [\mathrm{IF}_n(\theta)]^{-1}.$$

Definición 22. Estimador eficiente

Un estimador $T(X)$ es llamado de **eficiente** para estimar θ si y solo si

$$\text{Var}(T(X)) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta} g(\theta)\right]^2 [\text{IF}_n(\theta)]^{-1}.$$

Ejemplo de estimadoes eficientes:

- En el caso de la familia Normal con σ^2 conocida, $g(\mu) = \mu$, $\text{CI}(\mu) = [\text{IF}_n(\theta)]^{-1} = \sigma^2/n$ que es igual a $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$. Por ende, $\bar{X}$ es eficiente para estimar μ.
- En el caso de la familia Poisson con media θ, $g(\theta) = \theta$, $\text{CI}(\theta) = [\text{IF}_n(\theta)]^{-1} = \theta/n$ que es igual a $\text{Var}(\bar{X}) = \theta/n$. Por ende, $\bar{X}$ es eficiente para estimar θ.

Proposición 2

(i) Sea X e Y variables independientes con matrices de información de Fisher $\mathrm{IF}_X(\theta)$ y $\mathrm{IF}_Y(\theta)$, respectivamente. Entonces, la información de Fisher acerca de θ contenida en (X, Y) es $\mathrm{IF}_X(\theta) + \mathrm{IF}_Y(\theta)$. En particular, si $X_1, \ldots, X_n$ son i.i.d. y $\mathrm{IF}_1(\theta)$ es la información de Fisher de θ contenida en un único X_i, entonces la información de Fisher acerca de θ contenida en $X_1, \ldots, X_n$ es $n\mathrm{IF}_1(\theta)$.

(ii) Supongamos que X tiene densidad f_θ la cual es dos veces diferenciable en θ y que (3.3) es válido con $h(x) \equiv 1$ y f_θ es reemplazada por $\partial f_\theta/\partial\theta$. Entonces

$$\mathrm{IF}_n(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(X)\right], \quad n \geq 1.$$

Proposición 3

Supongamos que el modelo de probabilidad de X pertenece a la familia exponencial.

$$\frac{dP_\theta}{d\nu}(x) = \exp\left\{\eta^\top(\theta)T(x) - \xi(\theta)\right\} h(x), \quad x \in \Lambda, \tag{6}$$

Entonces:
(i) La Condición 1 es satisfecha para cualquier función h tal que $E(h(X)) < \infty$ y la información de Fisher puede ser escrita como

$$\mathrm{IF}_n(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(X)\right].$$

(ii) Si $\mathrm{IF}_n(\theta)$ es la información de Fisher de $\theta = E[T(X)]$, entonces $\mathrm{Var}[T(X)] = \mathrm{IF}_n(\theta)^{-1}$.

Teoría de Estadisticos U (No paramétrico)

Book: Lee, A. J. (2019). U-statistics: Theory and Practice. Routledge.

- Consideramos un modelo estadístico no paramétrico $\left(\Lambda, \mathcal{G}, \{P_F : F \in \mathcal{L}\}\right)$, en que $\mathcal{L}$ es un espacio funcional de funciones de probabilidad acumulada $F(x) = P(X \leq x)$.
- Este abordaje incluye posibles variables del tipo **continua, absolutamente continua, discreta y mixta** desde que todas ellas poseen una función F.
- Algunas suposiciones sobre F:
- $\int xdF(x) < \infty$, es decir, la media es finita.
- $\int |x|^2 dF(x) < \infty$, el segundo momento es finito.
- $\int |xy|^2 dF(x, y) < \infty$, en que $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, la covarianza es finita.
- $\int h(x)dF(x)$ es una integral de Riemann-Stieltjes.

Suposiciones de La Teoría de Estadisticos U

- El parametro θ objetivo es una función $\theta = h(F)$ finita y estimable, es decir, existe un estadístico $T(X)$ tal que $E(T(X)) = \theta$.
- **Teorema:**Si existe $E(T(X)) = \theta$ ssi existe una funcion $\psi(\bullet)$ tal que $E(\psi(X_1, \ldots, X_k)) = E(T(X)) = \theta$ para $k \leq n$.
- θ es llamado de funcional regular de grado $k \leq n$.
- $\psi(\bullet)$ es llamado de kernel de θ.
- **Teorema:** $\psi(\bullet)$ es único kernel para θ casi ciertamente.

Ejemplos de Estadisticos U

- **[El promedio]:** El estadístico $T(X) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estimador insesgado para $\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$.
- **[La varianza muestral]:** El estadístico $T(X) = \binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} 2^{-1}(X_i - X_j)^2$ es un estimador insesgado para
$$\theta = \int\int 2^{-1}(x_1 - x_2)^2 dF(x_1)dF(x_2).$$
- **[La covarianza muestral]:** El estadístico $T(X) = \binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} 2^{-1}(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)$ es un estimador insesgado para el funcional
$$\theta = \int_{\mathcal{R}}\int_{\mathcal{R}} 2^{-1}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)dF(x_1, y_2)dF(x_2, y_2).$$
- Los estadísticos U tiene optimas propiedades asintóticas ($n \to \infty$).

Región e intervalos de confianza. Región de credibilidad

Región, intervalos y limites de confianza

Definición 26

Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio en que cada X_i es una muestra de la misma población P_θ y sea $T(x) \subset \Theta$. Si

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta \left(\theta \in T(X)\right) \geq 1 - \alpha,$$

entonces $T(x)$ es llamado de **región de confianza** del θ de coeficiente de confianza $(1 - \alpha) \times 100\%$ para $\alpha \in (0, 1)$.

Si $T(x)$ tiene la forma de un intervalo $[a, b]$ para $a < b$, entonces $T(x)$ es llamado de **intervalo de confianza** de θ. Si $T(x)$ tiene la forma $(-\infty, b)$ o $(a, +\infty)$, entonces $T(x)$ es llamado de **limite de confianza** de θ.

Nota: En el caso continuo tenemos que

$$P_\theta \left(\theta \in T(X)\right) = 1 - \alpha$$

para los intervalos y limites de confianza.

Muestras de una población Normal

Resultado

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de un modelo $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Entonces:

(i) $\bar{X}$ e S^2 son independientes;

(ii) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$;

(iii) $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$; donde χ^2_{n-1} denota una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad y t_{n-1} denota una variable aleatoria con distribución de Student t con $n-1$ grados de libertad y $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ e $S^2 = \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2/(n-1)$.

- Los estadísticos (ii) y (iii) son ejemplos de estadísticos ancilares de primera orden.
- $\bar{X}$ e S^2 son independientes por el **Teorema de Basu**.

Métodos del estadístico pivotal

Definición 27

Decimos que una variable aleatoria $Q(X_1, \ldots, X_n; \theta) = Q(\mathbf{X}; \theta)$ es una **cantidad pivotal** para el parámetro θ si su medida de probabilidad es independiente de θ.

Entonces, en el caso continuo, para $1-\alpha$ fijo, podemos encontrar los cuantiles λ_1 y λ_2 en la densidad de $Q(\mathbf{X}; \theta)$ de modo que

$$P_\theta\left[\lambda_1 \leq Q(\mathbf{X}; \theta) \leq \lambda_2\right] = 1 - \alpha.$$

Luego, determinar t_1 y t_2 tales que:

$$P\left[t_1(\mathbf{X}) \leq \theta \leq t_2(\mathbf{X})\right] = 1 - \alpha.$$

Ejemplo de cantidades pivotales

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $\mathrm{Exp}(\theta)$. Luego, $Q(\mathbf{X};\theta) = 2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$.
- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria $\mathrm{Unifome}(0,\theta)$. La cantidad $Q(\mathbf{X};\theta)$ $X_{(n)}/\theta$ tiene densidad de probabilida $f_Q(q) = nq^{n-1}I_{[0,1]}(q)$.
- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de un modelo $N\left(\mu,\sigma^2\right)$.
  - Suponiendo que se conoce σ^2, luego $Q(\mathbf{X};\mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene modelo $N(0,1)$.
  - Si σ^2 es desconocido, tenemos que $Q(\mathbf{X},\mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim$ t-Student$(n-1)$.
  - Considerando μ desconocido, tenemos que $Q\left(\mathbf{X},\sigma^2\right) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ es una cantidad pivotal para σ^2.

IC para una media de poblaciones Normales

- Suponiendo que se conoce σ^2, luego $Q(\mathbf{X};\mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene modelo $N(0,1)$.
- Para un coeficiente de confianza $1-\alpha$, determinamos λ_1 y λ_2 tal que

$$P\left[\lambda_1 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \lambda_2\right] = 1-\alpha$$

- Entonces sea $\lambda_1 = -z_{\alpha/2}$ y $\lambda_2 = z_{\alpha/2}$, donde $P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha/2$, $Z \sim N(0,1)$ por lo que el intervalo de longitud más pequeño viene dado por

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

IC para una media de poblaciones Normalesl

- Si σ^2 es desconocido, tenemos que $Q(\mathbf{X}, \mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim$ t-Student$(n-1)$.
- Entonces, dado $1-\alpha$, hay λ_1 y λ_2 en el modelo t_{n-1} de modo que

$$P\left[\lambda_1 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq \lambda_2\right] = 1-\alpha.$$

- Como Q es simétrica, debemos elegir λ_1 y λ_2 para que el área a la derecha de λ_2 sea igual al área a la izquierda de λ_1, es decir $\lambda_1 = -t_{\alpha/2}$ y $\lambda_2 = t_{\alpha/2}$, donde $P\left(T \leq t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha/2$, $T \sim t_{n-1}$ de modo que el intervalo de longitud más pequeño está dado por

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

IC para dos poblaciones Normales

- Considerando μ desconocido, tenemos que $Q\left(\mathbf{X}, \sigma^2\right) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ es una cantidad pivotal para σ^2.
- Por lo tanto, dado $1-\alpha$, podemos determinar λ_1 y λ_2 tal que

$$P\left[\lambda_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \lambda_2\right] = 1-\alpha.$$

- Considerando o intervalo simétrico, ou seja, $\lambda_1 = q_1$ e $\lambda_2 = q_2$, onde $P\left[\chi^2_{n-1} \geq \ q_2\right] = P\left[\chi^2_{n-1} \leq q_1\right] = \alpha/2$, temos de (5.3.3), o intervalo

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{q_2}; \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right].$$

IC para dos poblaciones Normales

- Consideremos que $X_1, \ldots, X_n$ una muestra $X \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$ y $Y_1, \ldots, Y_m$, una muestra $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma^2\right)$, donde X y Y son independientes.
- Sabemos que:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right)$$

de modo que, siendo $\theta = \mu_1 - \mu_2$ y σ es conocido.

- Consideramos la cantidad pivotal

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \theta) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0, 1).$$

- Siendo σ^2 conocido, tenemos el intervalo

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}; \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right].$$

IC para dos poblaciones Normales.

- En el caso que se desconosca σ^2, tenemos que una cantidad pivotal viene dada por

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \theta) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

en donde

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{(n+m-2)}, \quad S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

$$\text{e} \quad S_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2.$$

- Un intervalo de confianza para $\theta = \mu_1 - \mu_2$, con coeficiente de confianza $1-\alpha$ viene dado por

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha/2}S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}; \quad \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha/2}S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right].$$

IC para razón de varianzas

- En el caso donde $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ y $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ y el interés es la construcción de un IC para σ_1^2/σ_2^2, teniendo en cuenta que

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{e} \quad \frac{(m-1)S_y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

  tenemos que

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \theta) = \frac{(m-1)S_y^2/\sigma_2^2(m-1)}{(n-1)S_x^2/\sigma_1^2(n-1)} \sim F_{m-1,n-1}$$

  donde $F_{m-1,n-1}$ denota la distribución F con $m-1$ y $n-1$ grados de libertad, respectivamente.

- El IC esta dado por:

$$\left[F_1 \frac{S_x^2}{S_y^2}; F_2 \frac{S_x^2}{S_y^2}\right].$$

Densidades muestrales

- $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$ tiene densidad t-Student:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

- $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ tiene desidad Chi-cuadrado

$$f(x) = \frac{1}{2^{(n-1)/2}\Gamma((n-1)/2)}x^{(n-3)/2}e^{-x/2}$$

- $F_{m-1,n-1} = \frac{(m-1)S_y^2/\sigma_2^2(m-1)}{(n-1)S_x^2/\sigma_1^2(n-1)} \sim$ con densidad F de Snedector dada por

$$f(x) = \frac{\sqrt{(\frac{n1x}{n2})^{n1}\cdot(\frac{n2}{n1x+n2})^{n2}}}{x\cdot B(\frac{n1}{2},\frac{n2}{2})}$$

Intervalos de Confianza Aproximados.

- Consideramos IC aproximados para θ basados en la distribución asintótica del EMV $\hat{\theta}$ de θ. Recordemos que

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{(\mathrm{IF}_n(\theta))^{-1}}} \to_d N(0,1)$$

Como $\mathrm{IF}_n(\theta)$ puede depender de θ, es substituindo por $\mathrm{IF}_n(\hat{\theta})$. Luego,

- $$Q(\mathbf{X},\theta) = \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\left(\mathrm{IF}_n(\hat{\theta})\right)^{-1}}} \to_d N(0,1)$$

entonces $Q(\mathbf{X},\theta)$ es una cantidad pivotal con un modelo asintótico $N(0,1)$.

-

Intervalos de Confianza Aproximados

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. El EMV de θ es $\hat{\theta} = \bar{X}$ y $\text{IF}_n(\theta) = 1/\theta(1-\theta)$, tenemos una cantidad pivote para θ es

$$Q(\mathbf{X}, \theta) = \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \to_d N(0, 1).$$

- Un IC para θ con un coeficiente de confianza de aproximadamente $1-\alpha$ viene dado por

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right].$$

Intervalos de Confianza Aproximados

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, con función de densidad $f(x \mid \theta) = \theta e^{-\theta x}; \quad x > 0, \quad \theta > 0.$
- Como $\mathrm{IF}_n^{-1}(\theta) = \theta^2$ y $\hat{\theta} = 1/\bar{X}$, se sigue de (5.4.1) que una cantidad fundamental para θ viene dada por

$$Q(\mathbf{X}, \theta) = \frac{1/\bar{X} - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}^2/n}} \rightarrow_d N(0,1).$$

- Un IC con coeficiente de confianza aproximado $1 - \alpha$ viene dado por

$$\left[\frac{1}{\bar{X}} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n\bar{X}^2}}; \frac{1}{\bar{X}} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n\bar{X}^2}} \right].$$

Límites de Confianza

Para una muestra de una población Normal considerando σ^2 desconocida.

- El limite inferior de confianza para estimar μ es dado por:

$$\left[\bar{X}_n - t_{n-1,1-\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \infty\right].$$

- El limite superior de confianza para estimar μ es dado por:

$$\left[\infty, \quad \bar{X}_n + t_{n-1,1-\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalos de Confianza Bayesianos

Definición 28. Intervalo de Credibilidad (Caso continuo)

Sea $\pi(\theta \mid \mathbf{x})$ una densidad a posteriore de θ dado $\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Decimos que $[t_1; t_2]$ es un **Intervalo de Credibilidad** Bayesiano (ICB) para θ, con coeficiente de confianza $1 - \alpha$ si

$$\int_{t1}^{t2} \pi(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta = 1 - \alpha.$$

Siempre que sea posible, la longitud del $[t_1; t_2]$ debe ser el menor posible. El ICB más corto ubicados en los valores más altos de $\pi(\theta \mid \mathbf{x})$ conoce como el **Intervalo de Densidad Máxima a Posteriori** (IDMP) satisfaciendo las siguientes condiciones

$$\{\theta : \pi(\theta|x) > k_\alpha\} \subset \text{ICB} \subset \{\theta : \pi(\theta|x) \geq k_\theta\}.$$

Intervalos de Confianza Bayesianos

Sea $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d Normal$(\mu, 1)$. Consideremos para μ la modelo a priori $N(\mu_0, 1)$. Tenemos que el modelo a posteriori de μ dada $\mathbf{X}$ que denotamos por $\mu \mid \mathbf{X}$, está dada por $\mu \mid \mathbf{X} \sim N\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$
Siendo $1-\alpha = 0.95$, entonces tenemos de la tabla de probabilidades $N(0,1)$ que $[t_1; t_2]$ debe elegirse como sigue:

$$\frac{t_1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}}} = -1,96 \quad \text{e} \quad \frac{t_2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}}} = 1,96,$$

es decir $t_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1} - 1,96\sqrt{\frac{1}{n+1}}$ y $t_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1} + 1,96\sqrt{\frac{1}{n+1}}$, por lo que el intervalo bayesiano de menor longitud (HPD) para μ con coeficiente de confianza $\gamma = 0.95$ está dado por

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1} - 1,96\sqrt{\frac{1}{n+1}}; \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1} + 1,96\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right].$$

Intervalos de Confianza Bayesianos

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma muestra aleatória de tamaño n da variable aleatória $X \sim U(0, \theta)$. Consideremos para θ una priori com densidad de Pareto

$$\pi(\theta) = \frac{b}{\theta^{b+1}} I_{(a,\infty)}(\theta).$$

Es posible probar que la densidad a posterior de θ dado $X = (X_1 \ldots, X_n)$ es

$$h(\theta|X) = \frac{(n+b)(\max(a, X_{(n)})^{n+b}}{\theta^{n+b+1}} I_{(\max(a,X_{(n)}),\infty)}(\theta).$$

El Intervalo Bayesiano simétrico para θ, con coeficiente de confianza $1-\alpha$, siendo $a < \theta < a'$:

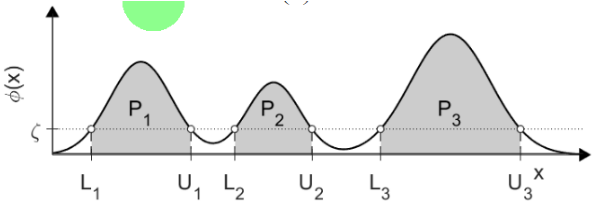
$$\left[\frac{\max\{a, X_{(n)}\}}{(1-\alpha)^{1/n+b}}; \frac{\max\{a, X_{(n)}\}}{\alpha^{1/n+b}}\right] \tag{7}$$

IC para modelo multimodal

Definición SS. IC caso multimodal (Caso continuo)

Consideremos una secuencia de puntos $L_1 < U_1 < L_2 < U_2 < \ldots < L_k < U_k$ del espacio paramétrico Θ de un modelo estadístico indexado por θ con k modas $\theta_1, \ldots, \theta_k$. Definimos un IC multimodal paraθ, a la secuencia de intervalos $[L_1, U_1], \ldots, [L_k, U_k]$ tal que

$$P\Big(\theta_k \in [L_1, U_1] \cup \ldots \cup \theta_k \in [L_k, U_k]\Big) = 1 - \alpha. \tag{8}$$



Regiones generales de confianzal

Una **región de confianza** basada en la verosimilitud con nivel α es

$$\Theta_\alpha = \{\theta \in \Theta : T_\theta \leq F_\alpha^{-1}\},$$

donde $T_\theta = 2(l(\widehat{\theta}) - l(\theta))$, $\widehat{\theta} = \arg\sup_{\theta\in\Theta} l(\theta)$ es el estimador de máxima verosimilitud, l es la función de log-verosimilitud y $F_\alpha^{-1} = (1-\alpha)$-cuantil calculado a partir de una función de distribución acumulativa F, es decir, $F(F_\alpha^{-1}) = 1-\alpha$.

Aquí, F_θ es (una aproximación para) la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria T_θ, que no depende de θ_0, donde θ_0 es el valor verdadero.

Patriota, A. G. (2013). A classical measure of evidence for general null hypotheses. Fuzzy Sets and Systems, 233, 74-88.

Observaciones finales

- Un IC clásico es interpretado en término de la probabilidad de que un estadístico T varie en un intervalo, mientras que θ se interpreta como una constante (vector) fijo.

$$P\left[\lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}} + \mu \leq \bar{X} \leq \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}} + \mu\right] = 1 - \alpha.$$

- Cuando $X = x$ la muestra es observada, el IC se interpreta de la siguiente manera: "De 100 nuevas muestras de la misma población P_θ, aproximadamente el $(1-\alpha) \times 100\%$ de estas generaran un IC $T(x_i)$ que contenga θ, para $i = 1, \ldots, 100$."
- Cuando $X = x$ la muestra es observada, un ICB es una región de Θ al cual θ puede pertenecer con probabilidad $1 - \alpha$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1} - 1,96\sqrt{\frac{1}{n+1}} \leq \theta \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \mu_0}{n+1} + 1,96\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right]$$