Clase 08:

Unidimensional

$n = 1$

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad \lambda, x > 0$$

$X_1 = x_1$

$$L_{x_1}(\lambda) = f_\lambda(x_1) \qquad x_1 = 2,6$$

$p_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$

$x_1, \ldots, x_n$

$$L_x(\lambda) = f_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i).$$

Sea $f_\theta(x)$ función de verosimilitud.

θ argumento

x se evalua.

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$; $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

$f_{H_0}(x) : f_\theta(x) : \theta \in \Theta_0$.

$f_{\theta_0}(x) : \theta_0 \in \Theta_0$

Elementos de Contraste / Prueba / Test / Comparación de evidencia } de Hipótesis.

X: consumo de leña en m^3 para cocinar. $N \geq 5.000$

$X_1, \dots, X_{300}$, $n = 300$ y $X_i \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

(1)

$H_0: \mu \geq 15$,

$H_1: \mu < 15$.

H_0 := "No existe efecto en el tratamiento"

H_1: "Existe efecto"

$\alpha \in (0,1)$: nivel de significancia

2. $\cdot\ \alpha = 0{,}05$
   $\cdot\ \alpha = 0{,}1$ } Región de Rechazo

3. Región de rechazo H_0: $\{t \in \mathbb{R} : t < t_\alpha\}$

t_α: cuantil modelo T_{n-1}.

4. P-valor: p-valor $\in (0,1)$

{ Rechazar H_0 si p-valor $< \alpha$.
  No rechazo H_0 si p-valor $\geq \alpha$.

Teoría del Falsiamento. Karl Popper.

La ciencia avanza manteniendo hipótesis cientifico, que hasta la fecha, no poseen evidencia en contra.

H: Hipótesis.

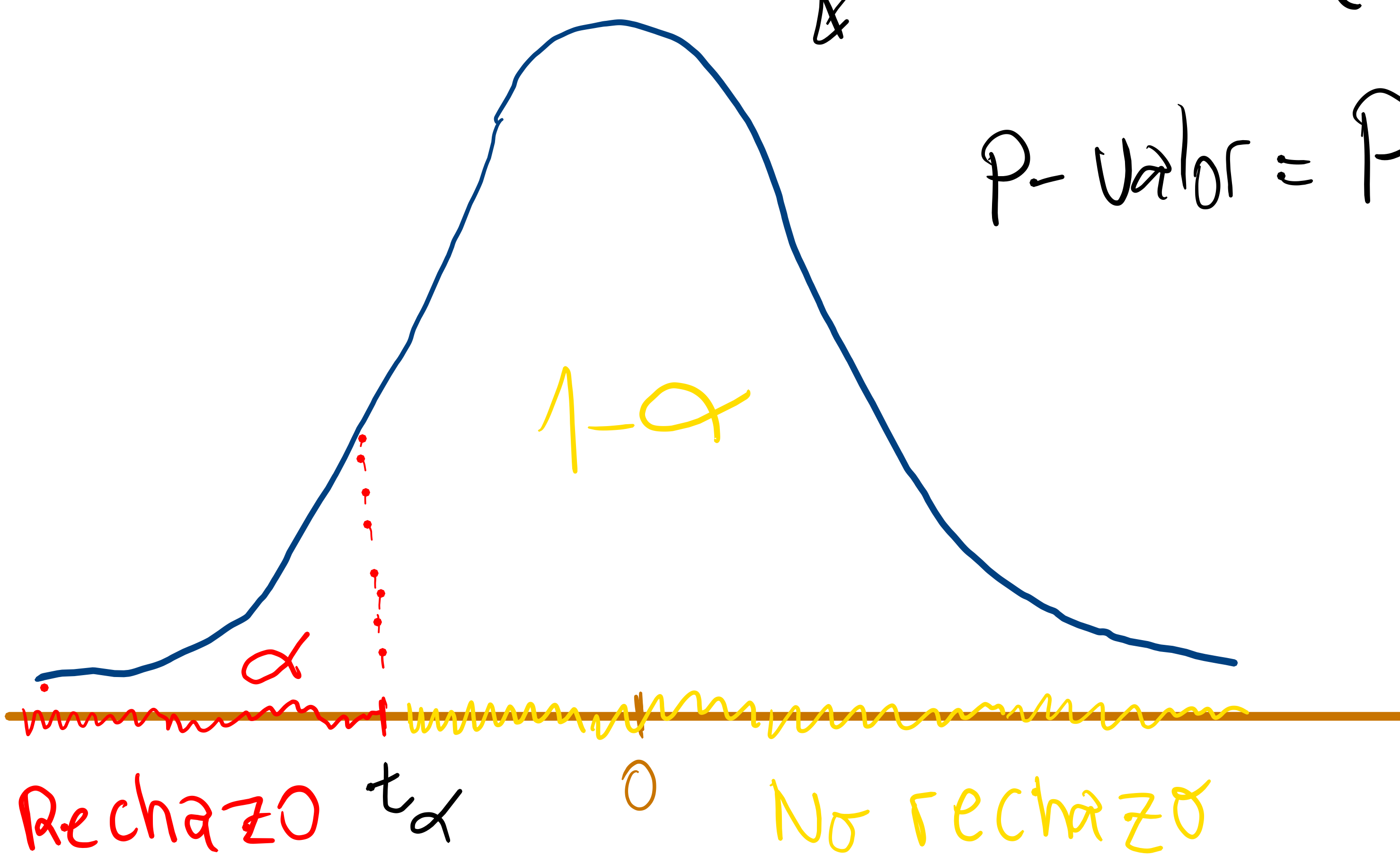
$$t_{obs} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \longrightarrow T_{n-1} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$H_1: \mu < 15.$$

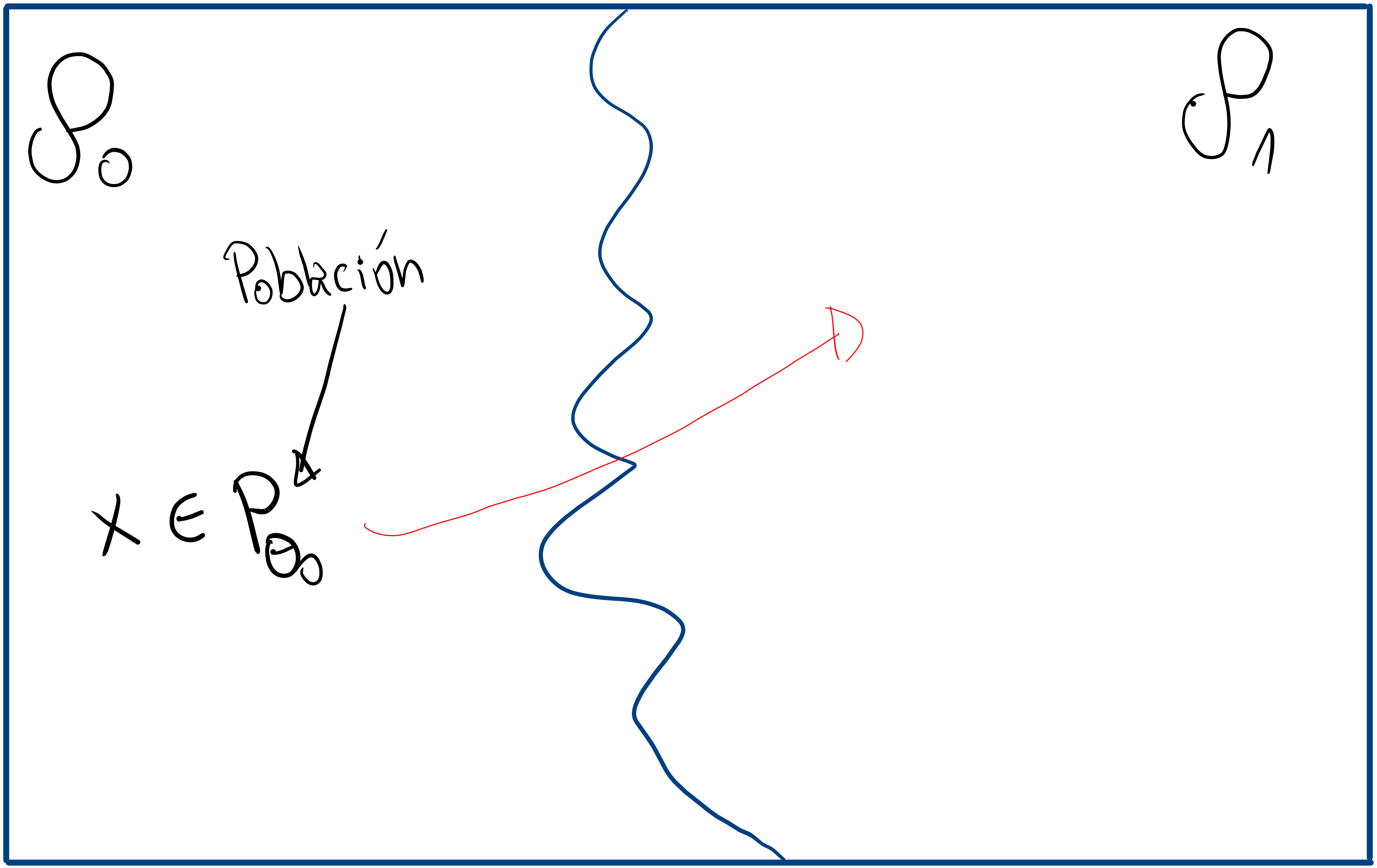
$$\mu_0 = 15$$

$$T(x) = \begin{cases} 1, & t_{obs} < t_\alpha \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$p\text{-valor} = P(T_{n-1} < t_{obs})$$



$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}.$$



En Teoría Estadística

Definimos la medida de probabilidad

$$P_{\mu,\sigma^2}(A) = \int_A f_{\mu\sigma^2}(x)\,dx, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

El modelo paramétrico Normal:

$$\mathcal{P} = \{P_{\mu\sigma^2} : \mu \in \mathbb{R} \text{ y } \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Las hipótesis H_0 y H_1 dadas por

Eq 1:

$$H_0 : P_\Theta \in \mathcal{P}_0 = \{P_{\mu\sigma^2} \in \mathcal{P} : \mu \geq 15\}$$

$$H_1 : P_\Theta \in \mathcal{P}_1 = \{P_{\mu\sigma^2} \in \mathcal{P} : \mu < 15\}$$

$$\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset.$$

Lemas
Proposiciones
Teoremas

$\left.\begin{array}{l}\text{Lemas}\\ \text{Proposiciones}\\ \text{Teoremas}\end{array}\right\} \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}.$ Sin restrincción paramétrica.

$$\mathcal{P} = \{ P_s : s \in \mathcal{L} \}$$

H : af. (θ) no siempre se puede escribir.

$$\left.\begin{aligned} H_0 &: P \in \mathcal{P}_0 \\ H_1 &: P \in \mathcal{P}_1 \end{aligned}\right\} \text{Eq } 1$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ y $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

$\Theta = \{ \theta = (\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R} \text{ y } \sigma^2 \in \mathbb{R}_+ \}$

$\Theta_0 = \{ \theta \in \Theta : \mu \geq 15 \}$

$\Theta_1 = \{ \theta \in \Theta : \mu < 15 \}$

H_0 y H_1:

H_0 y H_1 $\longrightarrow$ Paramétrico

$\downarrow$

$\wp_0$ y $\wp_1$ $\longrightarrow$ General.

Test de antigenos

$H_0: \mu \geq c$ ("tiene el virus")

$H_1: \mu < c$ ("no tiene el virus")

Error tipo I: $T(x) = 1$, a pesar de $\mu \geq c$ verdadero.

Falso −

Error tipo II: $T(x) = 0$, a pesar de que $\mu < c$.

Falso +

Sensibilidad del Test "$P(+ \mid \mu \geq c)$"

Funciones L y $R_T(\theta)$ para una función test $T(x)$ cuando $a=b=1$.

$$L(\theta,T)=\begin{cases} 1, & T(x)=1,\ \theta\in\Theta_0 \\ 1, & T(x)=0,\ \theta\in\Theta_1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

$$R_T(\theta)=\begin{cases} P(T(x)=1), & \theta\in\Theta_0 \quad \text{Prob. del E.T.I } \alpha \\ P(T(x)=0), & \theta\in\Theta_1 \quad \text{Prob. del E.T.II } \beta \end{cases}$$

Fijar Prob. del E.T.I $=\alpha\in(0,1)$.

Dado que $\theta \in \Theta_1$

$$P_\theta(T(x)=1) = 1 - P_\theta(T(x)=0)$$

$$= 1-\beta$$, Función poder de T

$$= \Gamma_T(\theta)$$

$X \sim \text{Modelo}_1(\theta)$.

$T(x) \sim \text{Modelo}_2(\theta)$

Será requerido que mi test T (criterio de Neyman-Pearson)

$$\Gamma_{T'}(\theta) \leq \Gamma_T(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

$\forall T'$ test.

Cuando fijo P.E.T.I α.

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \{ P_\theta(T(x)=1) \} \leq \alpha$$

$$\| $$

$$\alpha - \varepsilon ,$$

Diremos que $T(x)$ es de nivel o tamaño α.

Lema de Neyman-Pearson

$$H_0 : P \in \{P_{\theta_0}\} \quad (*)$$

$$H_1 : P \in \{P_{\theta_1}\}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{\theta_0} &: P_{\theta_0}(A) = \int_A f_{\theta_0}(x)\,dx \\ f_{\theta_1} &: P_{\theta_1}(A) = \int_A f_{\theta_1}(x)\,dx \end{aligned}\right\}$$

$f_\theta \in \{f_{\theta_0}, f_{\theta_1}\}$

$f_{\theta_0}(x)$: "la verosimilitud sobre H_0" $(f_0(x))$

$f_{\theta_1}(x)$: "La verosimilitud sobre H_1" $f_1(x)$

La medida de probabilidad P_θ sobre H_0.

$$P_{H_0}(A) \; ; \; P_{\theta_0}(A) \; ; \; P_0(A).$$

La medida de probabilidad P_0 sobre H_1.

$$P_{H_1}(A) \; ; \; P_{\theta_1}(A) \; ; \; P_1(A).$$

$$\Psi : \Lambda \to \mathbb{R}$$

$$E(\Psi(X)) = \int_\Lambda \Psi(x) f_\theta(x)\, dx$$

$E_{\theta_0}(\Psi(X))$, sobre H_0.

$E_{\theta_1}(\Psi(X))$, sobre H_1.

Prop. 4

$H_0: P = P_{\theta_0}$

$H_1: P \in \mathcal{P}_1$

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta \in \Theta_1$

$$T(x) = \begin{cases} 1, & f_{\theta_1}(x) > c f_{\theta_0}(x), \quad \forall \theta_1 \in \Theta_1 \\ 0, & f_{\theta_1}(x) < c f_{\theta_0}(x), \quad \forall \theta_1 \in \Theta_1 . \end{cases}$$

En términos de la razón de verosimilitud

$$T(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} > c \\ 0, & \dfrac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} < c \end{cases}$$

<u>Ejemplo:</u> $X_1, \dots, X_n$, en que $X \sim N(\mu, 1)$

$H_0: \mu = 0$; $H_1: \mu = 1$. $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f_\mu(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2}}, \quad x_i, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\lambda(x) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - 1)^2}{2}}}{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} > c$$

$$= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - 1)^2}{2} + \sum x_i^2\right\}$$

$$\vdots$$

$$= \exp\left\{\sum x_i - \frac{n}{2}\right\}$$

$$\lambda(x) = e^{\sum x_i - \frac{M}{2}} > c.$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Normal}(n\mu, n\sigma^2)$$

1

Prob. E.T.I. Dado que $\mu = 0$ (H_0)

$$P(T(x)=1) = P\left(e^{\sum X_i - \frac{M}{2}} > c\right) = \alpha$$

$$= P\left(\sum X_i - \frac{M}{2} > \ln(c)\right)$$

$$= P\left(\sum X_i > \ln(c) + \frac{M}{2}\right)$$

$$= P\left(\sum X_i > K\right), \quad \boxed{K = \ln(c) + \frac{M}{2}}$$

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \sum X_i > K_\alpha \\ 0, & \sum X_i < K_\alpha \end{cases}$$

$\to$ $T(x)$ suficiente minimal para θ.

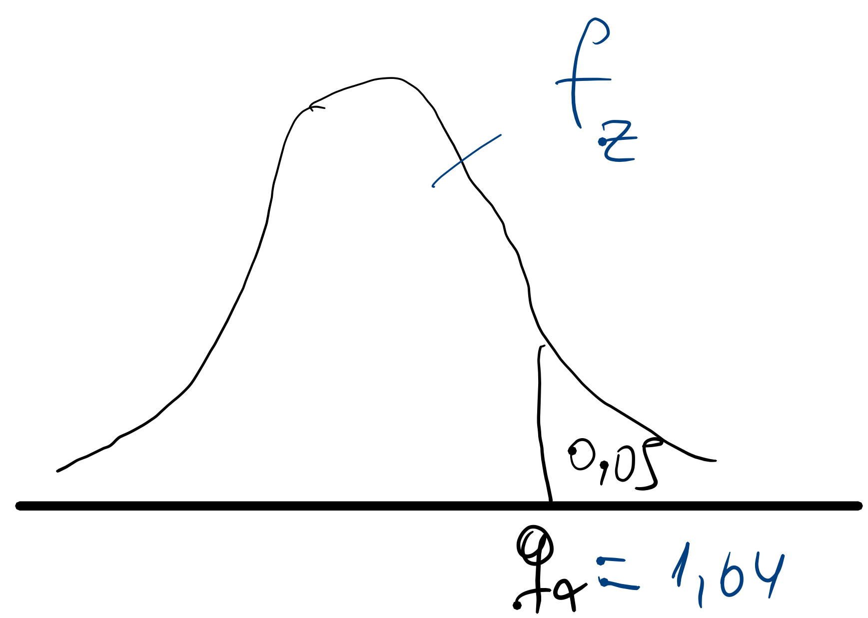
$\mu = 0$

$$P\left(\sum X_i > K_{0,05}\right) = 0,05$$

Sobre H_0, $\sum X_i \sim \text{Normal}(0, n)$

$$P\left(\sum X_i/\sqrt{n} > K_{0,05}/\sqrt{n}\right) = 0,05$$

$$= P\left(Z > K_{0,05}/\sqrt{n}\right) = 0,05.$$

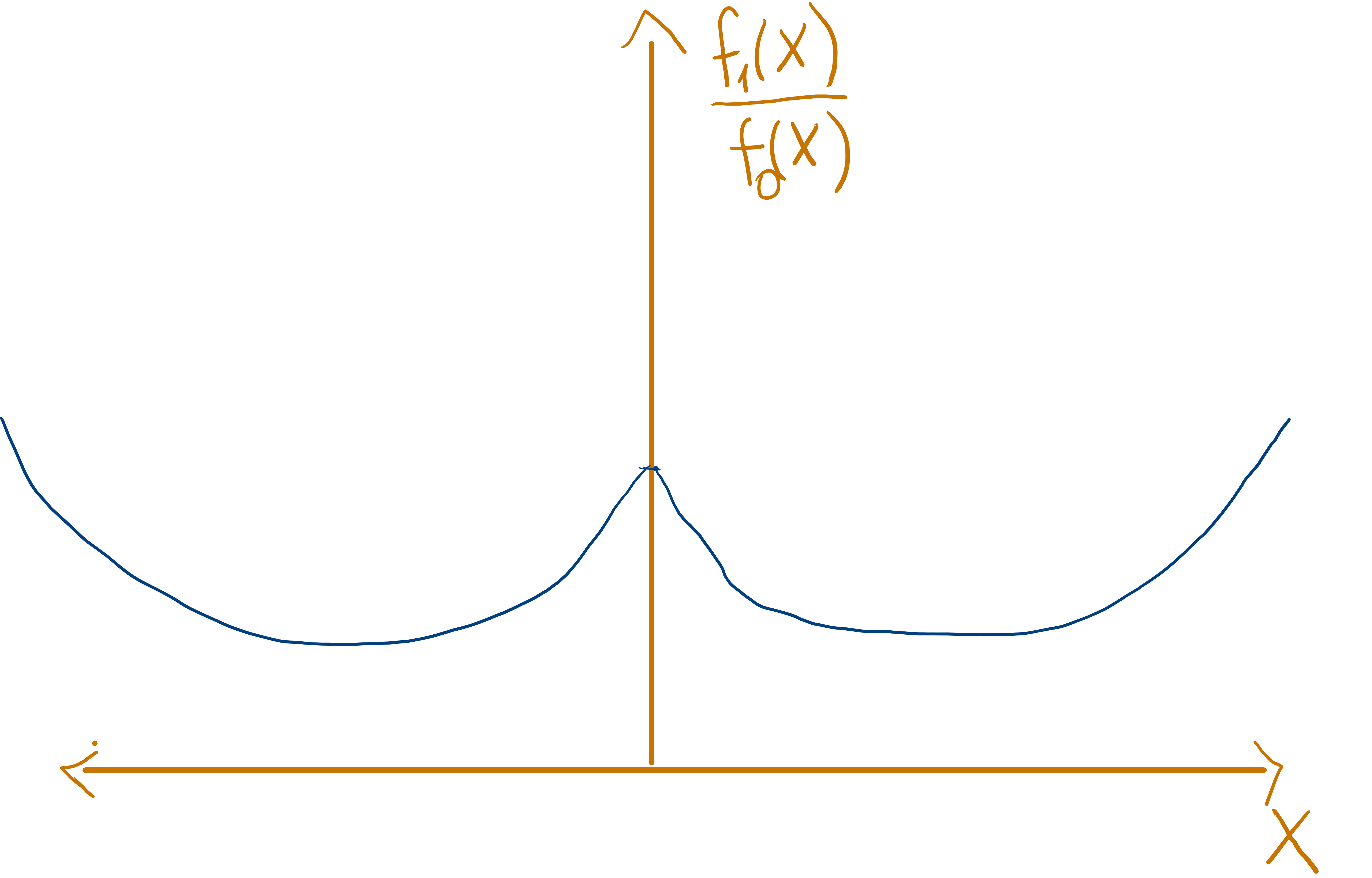


$$\frac{K_{0,05}}{\sqrt{n}} = 1,64$$

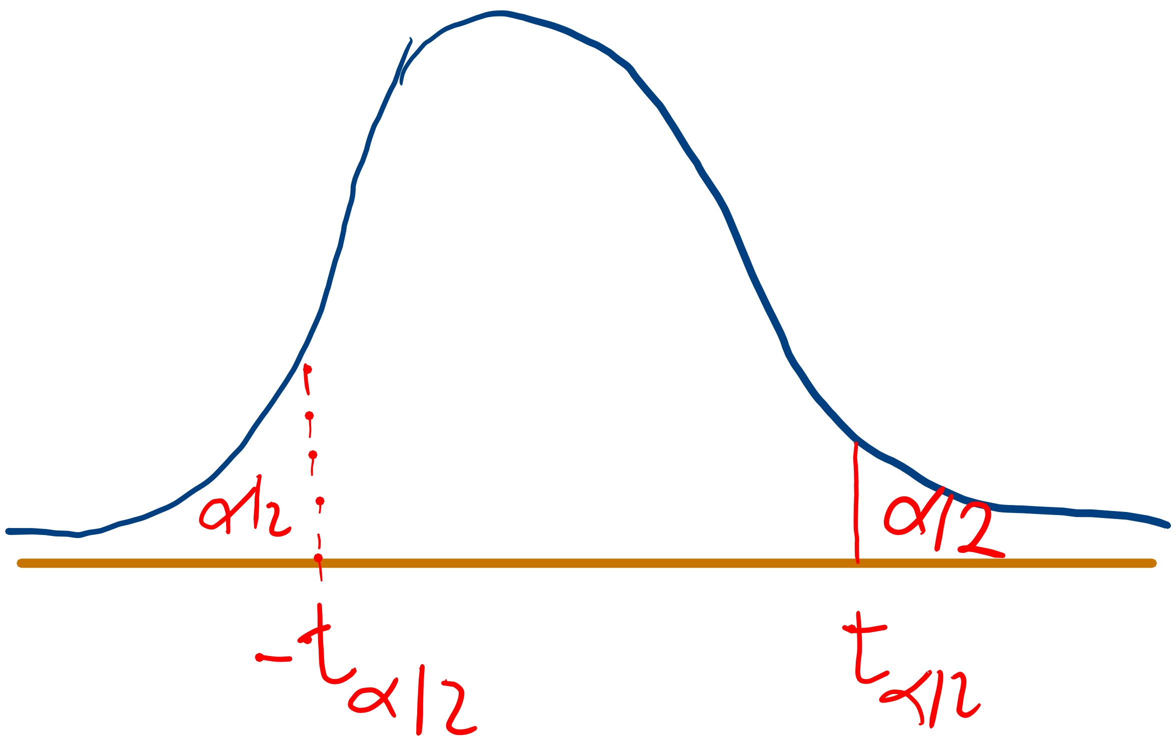
$$\Leftrightarrow K_{0,05} = 1,64 \cdot \sqrt{n}.$$

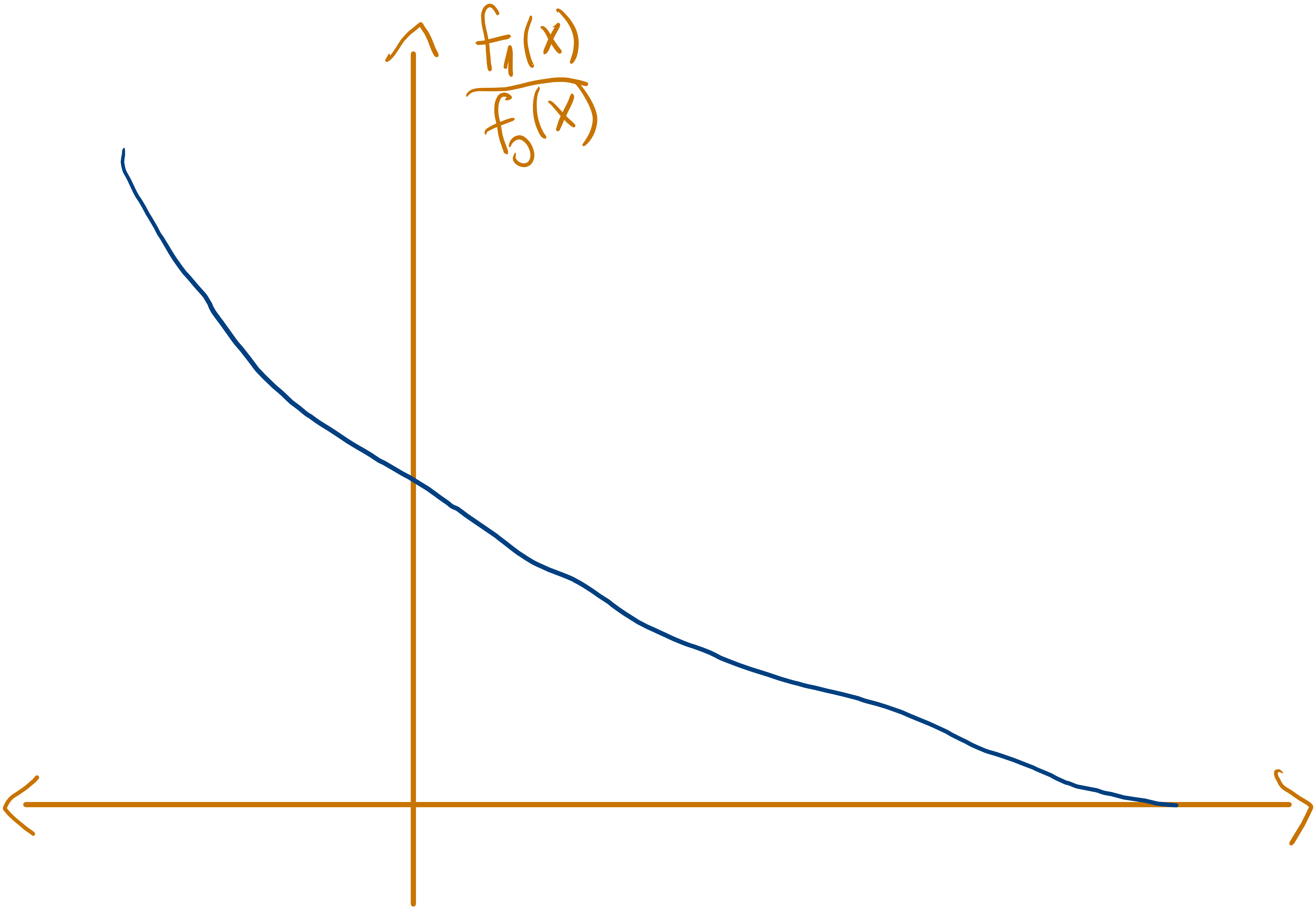
Finalmente, el TUP para $H_0: \mu = 0$ v/s $H_1: \mu = 1$ con nivel α es de la forma

$$T(x) = \begin{cases} 1, & \sum x_i > 1,64\sqrt{n} \\ 0, & \sum x_i < 1,64\sqrt{n}. \end{cases}$$



$\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$
x


α/2
α/2
$-t_{\alpha/2}$
$t_{\alpha/2}$


$\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$