

# Teoría Estadística. Unidad II

**Dr. Jaime Lincovil**

**Universidad Nacional de Ingeniería**

2024

**1 Elementos de pruebas de hipótesis. Lema fundamental de Neyman-Pearson. Test uniformemente más poderoso**

**2 Test de la razón de verosimilitud Monótono. Test Uniformemente Más Poderosos (UMP) Bilaterales**

**Elementos de pruebas de hipótesis. Lema fundamental de Neyman-Pearson. Test uniformemente más poderoso**

# Contraste/prueba/test de hipótesis

## Definición 31. Prueba/contraste de hipótesis

Una **hipótesis estadística** es una afirmación lógica acerca de la población  $P_\theta$ . Un **contraste de hipótesis estadístico** consiste en dos hipótesis estadísticas contrastando diferentes (parcial o totalmente) características de  $P_\theta$ . Sea una  $\mathcal{P}$  clase de medidas de probabilidad indexadas por  $\theta$ , luego, la **hipótesis nula y alternativa** son hipótesis estadísticas definidas en términos de clases disjuntas dada por:

$$H_0 : P_\theta \in \mathcal{P}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1,$$

en que  $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$  en la mayoría de los casos.

**Nota:** de entre Contraste/prueba/test, emplearemos **test**.

# Procedimiento de decisión

## Definición 31. Procedimiento de decisión de un test

Sea  $\mathbb{A} = \{0, 1\}$ , en donde 1 significa rechazar  $H_0$ , entonces,  $T : \Lambda \rightarrow \mathbb{A}$  es llamada de **función (decisión) test** con

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \text{Rechazamos } H_0 \\ 0, & \text{No rechazamos } H_0. \end{cases}$$

La **región de rechazo**  $A_1$  y **no rechazo**  $A_0$  de  $H_0$  es una partición de  $\Lambda$ :

$$A_1 = \{x \in \Lambda : T(x) = 1\} \cup A_0 = \{x \in \Lambda : T(x) = 0\} = \Lambda.$$

Para decidir entre  $H_1$  y  $H_0$  consideramos una función de perdida  $L(\theta, T)$  y riesgo medio  $R_T(\theta) = E_j[L(\theta, T)]$ , según  $P_\theta \in \mathcal{P}_0$  o  $P_\theta \in \mathcal{P}_1$ .

**Nota:** Un procedimiento de decisión de una prueba consiste en construir las regiones  $A_1$  y  $A_2$  basado en un fijar un error mínimo y/o maximizar el poder detección de un test .

# Errores y sus probabilidades

## Definición 32. Error del tipo I y Tipo II

Table: Posibles errores al decidir sobre  $H_0$ .

	$H_0$ es verdadera	$H_0$ es falsa
No rechazar $H_0$	Correcta	Error tipo II
Rechazar $H_0$	Error tipo I	Correcta

**Error tipo I:**  $T(X) = 1$ , es decir, rechazamos  $H_0$ , a pesar de que esta es verdadera. **Error tipo II:**  $T(X) = 0$ , es decir, NO rechazamos  $H_0$ , a pesar de que esta es falsa.

## Definición 33. Probabilidades del error del tipo I y Tipo II

**La probabilidad del error tipo I:**  $R_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 1) = \alpha$ , dado que  $P_\theta \in \mathcal{P}_0$ . **La probabilidad del error tipo II:**  $R_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 0) = \beta$ , dado que  $P_\theta \in \mathcal{P}_1$ .

# Función poder de un test

## Definición 34. Función poder de un test

$$\Gamma_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 1) = 1 - \beta, \text{ dado que } P_\theta \in \mathcal{P}_1.$$

Es la probabilidad de rechazar  $H_0$  para un cierto  $P_\theta \in \mathcal{P}_1$ . En palabras, simples, la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando esta es falsa.

## Definición 35. Test de nivel $\alpha$

Una función test  $T$  es llamada de **función test de nivel  $\alpha$**  si y solamente si

$$\sup_{P_\theta \in \mathcal{P}_0} \{P_\theta(T(X) = 1)\} \leq \alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Es decir, la probabilidad del error tipo I es como máximo  $\alpha$ .

**Nota:**

# Test Uniformemente más Poderoso (TUP)

## Definición 36. Test Uniformemente más Poderoso (TUP)

Una función test  $T'$  de tamaño  $\alpha$  es llamado de **Test Uniformemente más Poderoso** (TUP) para decidir sobre las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  si y solamente si

$$\Gamma_{T'}(\theta) \leq \Gamma_T(\theta) \quad \forall P_\theta \in \mathcal{P}_1,$$

para todo otra función test  $T$  de nivel  $\alpha$ .

**Nota:** Un test  $T'$  de nivel  $\alpha$  es TUP si su poder es mayor o igual al poder de cualquier otro test  $T$  para cada  $P_\theta \in \mathcal{P}_1$ .



# Medidas sobre hipótesis $H_0$ y $H_1$

- Sea  $P_0 \in \mathcal{P}$  y  $P_1 \in \mathcal{P}_1$  dos medidas de probabilidad pertenecientes a las subfamilias que especifican  $H_0$  y  $H_1$ , respectivamente.
- Denotamos por  $f_0(x)$  y  $f_1(x)$  las funciones de densidad de  $P_0$  y  $P_1$ , respectivamente. Alternativamente, podríamos denotar las densidades por  $f_{\theta_0}(x)$  y  $f_{\theta_1}(x)$ , respectivamente.
- La probabilidad de un evento  $A(X)$  sobre la hipótesis  $H_0$  es denotado por

$$P_0(A(X)).$$

Análogamente, para  $H_1$  y  $P_1(A(X))$ .

- El valor esperado de una función  $\psi(X)$  sobre la hipótesis  $H_0$  es denotada por

$$E_0(\psi(X)) = \int \psi(x)f_0(x)dx.$$

Análogamente,  $E_1(\psi(X)) = \int \psi(x)f_1(x)dx$  para  $H_1$ .

# Lema de Neyman-Pearson (LNP)

## Teorema 16. Lema de Neyman-Pearson

Consideremos las subfamilias  $\mathcal{P}_0 = \{P_{\theta_0}\}$ ,  $\mathcal{P}_1 = \{P_{\theta_1}\}$  y sea  $f_{\theta_j}$  la densidad de  $P_{\theta_j}$  para  $j = 0, 1$ . (i) Existencia de un TUP. Para todo  $\alpha$ , existe un TUP de tamaño  $\alpha$  dado por

$$T(X) = \begin{cases} 1, & Y > c(U) \\ \gamma, & Y = c(U) \\ 0, & Y < c(U). \end{cases}$$

en que  $\gamma \in [0, 1]$  y  $c$  son constantes elegidas tales que  $E_0[T'(X)] = \alpha$  en el caso de que  $P_\theta = P_{\theta_0}$ . (ii) Unicidad. Si  $T'$  es un TUP de tamaño  $\alpha$ , entonces:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & f_{\theta_1}(X) > cf_{\theta_0}(X) \\ 0, & f_{\theta_1}(X) < cf_{\theta_0}(X). \end{cases}$$

# Ejemplo media Normal contra Exponencial doble

- Sea una muestra de una observación  $X = x$ , en que  $\mathcal{P}_0 = \{P_0\}$  y  $\mathcal{P}_1 = \{P_1\}$ , en que  $P_0 \sim \text{Normal}(0, 1)$  y  $P_1 \sim \text{D-Exponencial}(0, 2)$  con densidades  $f_0$  y  $f_1$ , respectivamente.  
Dado que  $P[f_1(X) = cf_0(X)] = 0$ , un test  $T$  del tipo TUP tiene la forma:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & f_{\theta_1}(X) > cf_{\theta_0}(X) \\ 0, & f_{\theta_1}(X) < cf_{\theta_0}(X). \end{cases}$$

- Es posible de demostrar que  $f_1(X)/f_0(X) > c$  ssi  $\frac{\pi}{8}e^{\frac{x^2}{2} - \frac{|x|}{2}} > c$ .
- Lo cual es equivalente a  $|x| < t$  o  $|x| < 1 - t$  para  $t > 1/2$ .
- El valor de  $t$  que le da a  $T$  un tamaño  $\alpha$  es dado por  $t = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$  y el TUP tiene la forma

$$T(X) = \begin{cases} 1, & |X| > t \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

# Ejemplo modelo Bernoulli

- Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra tal que  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ . Consideremos las hipótesis  $H_0 : p = p_0$  contra  $H_1 : p = p_1$  en que  $0 < p_0 < p_1 < 1$ .
- Por el LNP un TUOP de tamaño  $\alpha$  tiene la forma:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \lambda(Y) > c \\ \gamma, & \lambda(Y) = c \\ 0, & \lambda(Y) < c. \end{cases}$$

en que  $\lambda(Y) = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^Y \left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{n-Y}$ .

- Para encontrar el test  $T$  es necesario encontrar  $m$  tal que

$$\alpha = E_0(T(X)) = P_0(T(X) = 1) + \gamma P(Y = m).$$

- El valor de  $\gamma$  es seleccionado de manera de completar lo que falte para que el valor esperado sea exactamente igual a  $\alpha$ .

# Extensión del LNP

## Proposición 4.

Supongamos que existe un test  $T'$  de tamaño  $\alpha$  tal que para toda  $P_\theta \in \mathcal{P}_1$  es un TUP para testar  $H_0 : P_\theta = P_0$  contra la alternativa  $P_\theta = P_1$  para toda  $P_1 \in \mathcal{P}_1$ . Entonces,  $T'$  es también TUP para testar

$$H_0 : P_\theta = P_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1.$$

# Ejemplo de la extensión del LNP

- Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra de una población Normal  $(\mu, 1)$ . Consideremos las hipótesis  $H_0 : \mu = 0$  contra  $H_1 : \mu = 1$ .
- Es posible demostrar que

$$\frac{f_1(X)}{f_0(X)} = e^{\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2}} \geq c,$$

- O, equivalentemente,  $T(X) = 1$  cuando  $\sum_{i=1}^n x_i \geq c'$ , para alguna constante  $c'$ .
- Para  $\alpha = 0.05$ , necesitamos una constante  $c'$  tal que  $P_0(\sum_{i=1}^n X_i \geq c') = \alpha$  de tal manera que el test sea de nivel  $\alpha = 0,05$ . Dado que  $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Normal}(0, n)$ , el la constante es dada por  $c' = 1,64\sqrt{n}$ .
- El test que rechaza  $H_0$  es TUP. Dado que el mismo test continua siendo TUP para todo  $\mu > 0$ , entonces el es un TUP para testar  $H_0 : \mu = 0$  contra  $H_0 : \mu > 0$ . Este debido a que la región crítica  $\sum_{i=1}^n x_i \geq c'$  no depende de un particular valor de  $\mu > 0$ .

# Ejemplo de test Bayesiano

- Una forma de comparar la evidencia a favor o en contra de  $X = x$  a favor de las hipótesis  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  versus  $H_1 : \theta \in \Theta_1$  es comparando las razones

$$\hat{\pi}_j = \frac{E_{\Theta_j}(\ell(\theta))}{E_{\Theta}(\ell(\theta))}, \quad \text{para } j = 0, 1.$$

Podríamos decidir rechazar  $H_0$  en el caso de que  $\hat{\pi}_1 > \hat{\pi}_0$ .

- En el caso en que  $\Theta_0 = \{\theta_0\}$  y  $\Theta_1 = \{\theta_1\}$  son hipótesis simples. Para una única observación, tenemos que

$$\hat{\pi}_j = \frac{\pi_j f_{\theta_j}(x)}{\pi_0 f_{\theta_0}(x) + \pi_1 f_{\theta_1}(x)}, \quad \text{para } j = 0, 1,$$

en que  $\pi_j = \int_{\Theta_j} \pi(\theta) d\theta = \pi(\theta_j)$  en este caso.

- Finalmente, un test Bayesiano para las hipótesis es dado por

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \hat{\pi}_1 > \hat{\pi}_0 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

**Test de la razón de verosimilitud Monótono.  
Test Uniformemente Más Poderosos (UMP)  
Bilaterales**



# Razón de Verosimilitud Monótona (RVM)

## Definición 37. Razón de Verosimilitud Monótona (RVM)

Supongamos que el modelo para  $X$  está en la clase  $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$  dominada por una medida  $\sigma$ -finita. Decimos que  $\mathcal{P}$  posee una **Razón de Verosimilitud Monótona (RVM)** en el estadístico  $\Psi(X)$  si, y solamente si para  $\theta_0 < \theta_1$  cualesquiera,  $\lambda(X) = f_1(X)/f_0(X)$  es una función no decreciente de  $\Psi(X)$  para valores de  $X$  para los cuales al menos  $f_1(X)$  y  $f_0(X)$  son positivos.

## Definición 38. P-valor

El **P-valor** de un test  $T(X)$  para las hipótesis  $H_0 : P_\theta \in \mathcal{P}_0$  contra  $H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1$  es

$$\text{P-valor} = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\lambda(X) > \lambda(x_0)),$$

donde  $\lambda(\bullet)$  es la RV del modelo. **Regla de decisión:** Rechazamos  $H_0$ ,  $T(X) = 1$  ssi  $\text{P-valor} < \alpha$ . Nota: también llamado de valor descriptivo del test.

## Proposición 5

Si la variable  $X$  posee una familia paramétrica  $\mathcal{P}$  con RVM  $\lambda(\Psi(X))$ . Si  $d$  es una función no decreciente de  $\Psi(X)$ , entonces  $g(\theta) = Ed(\Psi(X))$  es no decreciente en  $\theta$ .

## Teorema 17

Supongamos que  $X$  posee un modelo perteneciente a una familia paramétrica  $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$  en que  $\Theta \subset R^k$  con RVM  $\lambda(\Psi(X))$  en  $\Psi(X)$ . Consideremos las hipótesis  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  versus  $H_1 : \theta > \theta_0$  en que  $\theta_0 \in R$ . Entonces:

- (i) Existe un TUP de nivel  $\alpha$  que toma la forma de test de la RV: en que  $c$  y  $\gamma$  son determinados tal que  $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(X) = 1) \leq \alpha$ .
- (ii)  $P_\theta(T(X) = 1) = g(\theta)$  es estrictamente creciente para todo  $\theta$  para los cuales  $0 < g(\theta) < 1$ .

# Lista de modelos con RVM

Las siguientes familias tienen una Razón de Verosimilitud Monótona (RVM):

- La familia de distribución exponenciales dobles  $\{DE(\theta, c)\}$  con una  $c$  conocida;
- La familia de distribución exponencial  $\{E(\theta, c)\}$  con una  $c$  conocida;
- La familia de distribución logística  $\{LG(\theta, c)\}$  con una  $c$  conocida;
- La familia de distribución uniforme  $\{U(\theta, \theta + 1)\}$ ;
- La familia de distribución hipergeométrica  $\{HG(r, \theta, N - \theta)\}$  con valores conocidos  $r$  y  $N$ ;
- La familia Cauchy  $\{Cauchy(\theta, c)\}$  con  $c$  conocido no posee RVM.

# RVM en familia exponencial

- Si la variable  $X$  pertenece a la familia exponencial con densidad

$$f_{\theta}(x) = \exp\{\eta(\theta)\Psi(X) - \xi(\theta)\}h(X)$$

en que  $\eta(\theta)$  es una función no decreciente en  $\theta$ , entonces, su modelo posee una RVM en  $\Psi(X)$ .

- Si  $X \sim \text{Normal}(\theta, \sigma^2)$  para las hipótesis  $H_0 : \theta = \theta_0$  contra  $H_1 : \theta = \theta_1$  para  $\theta_0 < \theta_1$ . Entonces,  $\lambda(X)$  posee RVM en  $\Psi(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ .
- Si  $X \sim \text{Poisson}(\theta)$  para las hipótesis  $H_0 : \theta = \theta_0$  contra  $H_1 : \theta = \theta_1$  para  $\theta_0 < \theta_1$ . Entonces,  $\lambda(X)$  posee RVM en  $\Psi(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ .
- Si  $X \sim \text{Bernoulli}(p, n)$  para las hipótesis  $H_0 : p = p_0$  contra  $H_1 : p = p_1$  para  $p_0 < p_1$ . Entonces,  $\lambda(X)$  posee RVM en  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ .

## Región de rechazo: caso continuo y discreto

- Si  $X \sim \text{Normal}(\theta, \sigma^2)$  para las hipótesis  $H_0 : \theta = 0$  contra  $H_1 : \theta = 1$  para  $n = 9$ . Entonces, para  $\alpha = 0,05$ ,  $\lambda(X)$  posee RVM en  $\Psi(X) = \sum_{i=1}^n X_i$  y  $c_\alpha = 4,92$ . De esta manera:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n X_i > 4,92 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

es un TUP de nivel  $\alpha = 0,05$ .

- Si  $X \sim \text{Bernoulli}(p, n)$  para las hipótesis  $H_0 : p = 0,4$  contra  $H_1 : p = 0,6$ . Entonces,  $\lambda(X)$  posee RVM en  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ . Para  $\alpha = 0,05$ , consideremos un  $\gamma = 0,04$  y  $m = 9$ , luego

$$T(X) = \begin{cases} 1, & Y > 9 \\ 0,04, & y = 9 \\ 0, & Y < 9. \end{cases}$$

es un TUP de nivel  $\alpha = 0,05$ .

# Tipo de hipótesis y contraste de hipótesis

- **Hipótesis simple:**  $H_i : \theta \in \{\theta_i\}$  o  $H_i : \theta = \theta_0$ . Determinan un punto del espacio paramétrico.
- **Hipótesis compuesta:**  $H_i : \theta \in \Theta_0$  con  $\dim(\Theta_i) \geq 1$ . Determinan un subconjunto no simple del espacio paramétrico.
- **Hipótesis del tipo general:**  $H_0 : \theta \in \Theta_i \subset R^d$  y  $\dim(\Theta_i) > 0$ .

Ejemplos para  $\Theta \subset R$ .

- **Contraste unilateral a la derecha** para un parámetro  $\theta$ :  $H_0 : \theta = \theta_0$  contra  $H_1 : \theta \geq \theta_0$ .
- **Contraste unilateral a la izquierda** para un parámetro  $\theta$ :  $H_0 : \theta = \theta_0$  contra  $H_1 : \theta \leq \theta_0$ .
- **Contraste bilaterales:**  $H_0 : \theta = \theta_0$  contra  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . (p.e.  $H_0 : \mu = \mu_0$  contra  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ).