Clase 03

"$X = x$" ; $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$

"$P_\theta \in \mathcal{P}$" : $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$

$\downarrow$

Población

$T(X) \overset{dim}{\leq} X$ y $T(X)$ información relevante.

Teoria de Decisión + Estadística

Teoria de Decisión
- Normativa
  - TDP
  - TDC ✓
  - TDB ✓
- Descriptiva $\longrightarrow$ Heurística.
  - $\neq$ Formal.

Bayesiano: Def. de Prob. dif. Kolmogorov

Def. $A \precsim B \iff P(A) \leq P(B)$

Elementos básicos

1) Estado de la naturaleza. $(\theta ; P_\theta)$

2) Conjunto de todos los estados posibles. (Θ)

3) Espacio de las posibles decisiones. (A)

4) Función utilidad/perdida para medir la ganancia/perdida de tomar una desición.

Utilidad: arriesgado

$\text{Utilidad} = \dfrac{1}{\text{perdida}}$

Perdida: conservador. (Aqui)

TDE

$$X_1, \dots, X_n \sim (\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$$

$$x_1, \dots, x_n$$

θ: estado de la naturaleza.

Θ: conjunto de estados.

$T: \Omega \to \mathcal{A}$

- $\to \Theta$: espacio parametrico (E. Puntual)
- $\to \mathcal{I}_{\Theta}$: clase de subconjuntos (Estimación intervalar)
- $\to \{H_0, H_1\}$: T es un test estadístico.

Estimación Puntual Al $= \Theta$

$$T : \Lambda \to \Theta$$

$$x \to T(x) = \theta_0 \; ; \quad P_{\theta_0} \in \{ \underline{P_\theta} : \theta \in \Theta \}$$

Perdida:

Eventos

- Perdida: $T(x) \neq \theta$.
- Sin Perdida: $T(x) = \theta$.

Magnitud: $f(T(x) - \theta)$.

· Ejemplos de Estimador puntual

Sea $\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{\theta}(x_i)$ una f. de verosimilitud

- $T(x) = \arg \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.
- Estimador de los momentos
- Mínimos cuadrados (regresión)
-

Esperanza y parámetro

$$X \sim \text{modelo}(\theta)$$

$$E(X) = \int_{\Lambda} x f_{\theta}(x)\, dx = g(\theta)$$

$$\Psi(X): \quad E(\Psi(X)) = \int_{\Lambda} \Psi(x) f_{\theta}(x)\, dx.$$

X: aleatorio.

Perdida aleatoria

Función de perdida media.

$$L(\theta_0, T(X)) = (\theta_0 - T(X))^2 = \Psi(X)$$

$$E_{\theta_0}(\Psi(X)) = E_{\theta_0}(L(\theta_0, T(X))) = R_T(\theta_0)$$

Admisibilidad e insesgamento

D: todos los estimadores T de Θ

$\cdot T_0 \quad \cdot T$

$$R_{T_0}(\theta) \leq R_T(\theta), \ \forall \theta \in \Theta, \ \forall T \in D$$

$\hookrightarrow$ Admisible.

Sesgo T: $E(T) - g(\theta)$.

T insesgado: $E(T) = g(\theta)$.

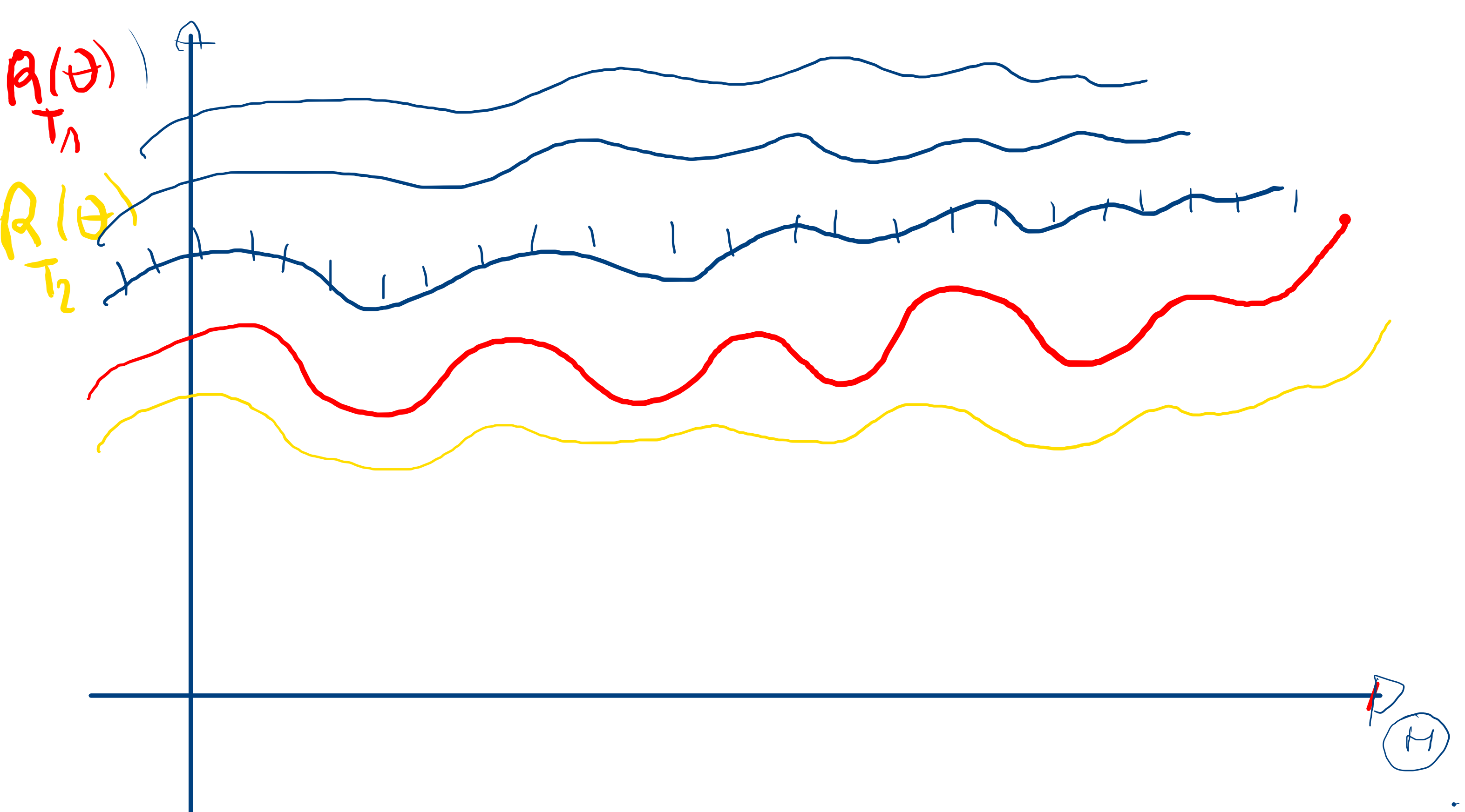
Teorema de Rao-Blackwell

T: suficiente para θ

T_0: estima θ $\qquad R_{T_0}(\theta)$

$$T_1 = f(T) = E(T_0(X) \mid T).$$

$$R_{T_1}(\theta) \le R_{T_0}(\theta), \ \forall \theta \in \Theta$$



Riesgo de Bayes

En el modelo Bayesiano $(\theta, X) \sim P_{\theta X}$

$\theta \sim \pi(\theta)$

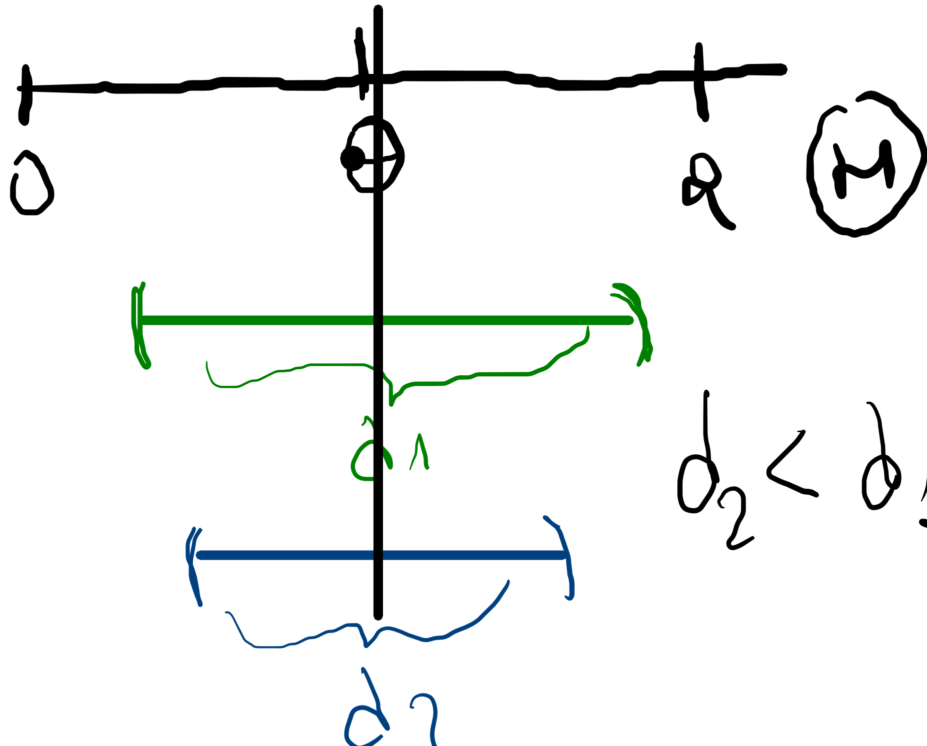
$$R_T(\theta) = U(\theta) \sim \text{Modelo}(a, b)$$

$$\underbrace{\Gamma(\pi, T)}_{\text{Riesgo de Bayes}} = E_\pi R_T(\theta) = \int_\Theta R_T(\theta)\, \pi(\theta)\, d\theta$$

$$\exists\, T_B : \Gamma(\pi, T_B) = \min_{T \in D} \Gamma(\pi, T)$$

T_B es la desición de Bayes. //

Perdida en estimación intervalar



$d_2 < d_1$

- El intervalo en azul es más eficiente/preciso que el intervalo en verde.

$$\mathcal{I}_{\Theta} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$T : \Lambda \to \mathcal{I}_{\Theta}$$

$$x \to T(x) = (a,b) \subseteq \Theta = \mathbb{R}.$$

$$I_T(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in T(x), \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Perdida : $I_T(\theta) = 0$ ssi $\theta \notin T(x)$

La longuitud de $T(x)$ sea grande.

Sin Perdida : $I_T(\theta) = 1$ ssi $\theta \in T(x)$

La longuitud de $T(x)$ es pequeña.

Magnitud de la perdida : prop. a la longuitud de $T(x)$, castigada/penalizada por una cobertura errada.

$$L(\theta, T(x)) = a \cdot \text{length}(T(x)) - b\, I_T(\theta)$$

Riesgo medio

$$R_T(\theta) = E\{L(\theta, T(X))\}$$

$$= E\{a\,\text{length}(T(x)) - b I_T(\theta)\}$$

$$= a E[\text{length}(T(x))] - b E(I_T(\theta))$$

$$= a E[\text{length}(T(x))] - b P(I_T(\theta) = 1)$$

$$= a E[\text{length}(T(x))] - b P(\theta \in T(X))$$

Ejemplo

$X_1, \ldots, X_n$; $X_i \overset{iid}{\sim} \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ $i = 1, \ldots, n$.

$$T(x) = \left(\bar{x} - d\frac{s}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{x} + d \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right) ; \ \underset{T}{I}(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \in T(x) \\ 0, & \mu \notin T(x). \end{cases}$$

$$\text{length}(T(x)) = \cancel{\bar{x}} + d\frac{s}{\sqrt{n}} - \left(\cancel{\bar{x}} - d\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= 2d\frac{s}{\sqrt{n}} \,//$$

d: quantil x ejemplo del $(1-\alpha) \times 100\%$.

$\alpha = 0{,}05$.

Función de desición tipo test

$$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\} = \{P_\theta : \theta \in \Theta_0\} \cup \{P_\theta : \theta \in \Theta_1\} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$$

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \quad y \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \, (P_\theta \in \mathcal{P}_0) \quad vs \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 \, (P_\theta \in \mathcal{P}_1)$$

$$T(x) = \begin{cases} 1, & \text{rechazo Ho.} \\ 0, & \text{No rechazo Ho.} \end{cases}$$

Perdida: No rechazo Ho y Ho es falsa
Rechazo Ho y Ho es verdadora.

Sin perdida. No rechazo Ho y Ho es verdadora
Rechazo Ho y Ho es falsa.

Perdida : $T(x)=0$ y $\theta \in \Theta_1$

$T(x)=1$ y $\theta \in \Theta_0$

Sin Perdida : $T(x)=0$ y $\theta \in \Theta_0$

$T(x)=1$ y $\theta \in \Theta_1$ $\Big\}$ $(*)$

<u>Magnitud de la perdida</u>

$$L(\theta, T(x)) = \begin{cases} a, & T(x)=1 \text{ y } \theta \in \Theta_0 \ (H_0) \\ b, & T(x)=0 \text{ y } \theta \in \Theta_1 \ (H_1) \ ; \quad a,b>0 \\ 0, & \text{c.c } (*) \end{cases}$$

Probabilidades $T(x) \in \{0,1\}$

$$P_\theta(T(x)=1) = \begin{cases} 0, & \theta \in \Theta_0, \\ P_\theta > 0, & \theta \in \Theta_1. \end{cases} \quad (1)$$

$$P_\theta(T(x)=0) = \begin{cases} 0, & \theta \in \Theta_1 \\ P_\theta > 0, & \theta \in \Theta_0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & P_{H_1}(T(x)=1) \\ (2) & P_{H_0}(T(x)=0). \end{array}\right\} \text{Notación.}$$

Riesgo medio

$$R_T(\theta) = E(L(\theta, T(x)))$$

$$= a \cdot P(L = a) + b\, P(L = b) + \cancel{0 \cdot P(L = 0)}$$

$$= a\, P_{H_0}(T(x) = 1) + b\, P_{H_1}(T(x) = 0)$$

$$= \begin{cases} a\, P_{H_0}(T(x) = 1), & \theta \in \Theta_0 \ (H_0 \text{ es verdadera}) \\ b\, P_{H_1}(T(x) = 0), & \theta \in \Theta_1 \ (H_0 \text{ es falsa}) \end{cases}$$

$a = b = 1$

$$R_T(\theta) = \begin{cases} P_{H_0}(T(X) = 1) = \alpha, & \text{Prob del error tipo I. (Ho es verdadera)} \\ P_{H_1}(T(X) = 0) = \beta, & \text{Prob del error tipo II (Ho es falsa)} \end{cases}$$

Ejemplo: $X_1, \ldots, X_n$; $X_i \overset{iid}{\sim} \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

$$\mathcal{P} = \{ P_\theta : \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \}$$

$$= \{ P_{(0,\sigma^2)} : \sigma^2 > 0 \} \cup \{ P_{(\mu,\sigma^2)} : \mu \neq 0, \sigma^2 > 0 \} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$$

$H_0: \mu = 0$; $H_1: \mu \neq 0$.

$H_0: P_\theta \in \mathcal{P}_0$; $H_1: P_\theta \in \mathcal{P}_1$.

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \; ;$$

$$T_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$T(x) = \begin{cases} 1, & |T_{n-1}(x)| > t_0 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Caso 1: $u = 0$ o $P_\theta \in \mathcal{P}_0$ $(a = b = 1)$

$$L(u, T) = \begin{cases} 1, & T(x) = 1 \\ 0, & T(x) = 0 \end{cases}$$

Caso 2: $u \neq 0$ o $P_\theta \in \mathcal{P}_1$

$$L(u, T) = \begin{cases} 1, & T(x) = 0 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$$R_T(u) = \begin{cases} P(T(x) = 1), & P_\theta \in \mathcal{P}_0 \\ P(T(x) = 0), & P_\theta \in \mathcal{P}_1 \end{cases}$$