Clase 2

> Suficiencia clasica y Bayesiana.

> Ancilaridad como estadísti- cos auxiliares

> completitud.

Exp. aleatorio cualquiera

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$X : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Exp.}}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la variable}}}{\Lambda}$$

$$T : \Lambda \longrightarrow \Upsilon \; ; \; \dim(X) > \dim(T)$$

Ejemplo

$P(X_i = 1) = \theta$

Lanzar 10 veces una moneda de manera independiente.

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10})$ $\quad \omega_i = \begin{cases} \text{cara} \\ \text{sello} \end{cases}$

$\omega \in \Omega$

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_{10})$ $\quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{cara} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$

$T(X) = \sum_{i=1}^{10} X_i$; nº de caras "$X \overset{E}{\equiv} T(x)$"

Suficiencia Clásica (Fisheriana)

" $X \overset{F}{\equiv} T(X)$ " son equivalentes en evidencia. //

1.- La muestra X tiene toda la información del exp. acerca de θ.

(1.) $P_\theta(X \mid X = x) = g(x) \quad \forall x \in \Delta$

2.- Una función $T(x)$ tiene esencialmente la misma información de X si

(2) $P_\theta(X \mid T(x) = t) = h(t) \quad \forall \theta.$

$X \stackrel{F}{\equiv} T(x)$. $T(x)$ es un estadístico suficiente para $\theta \in \Theta$.

Ejemplos de estadísticos

$$T : \Delta \to \Upsilon$$

$T_1(X) = \bar{X}_n$; $T_2(X) = S_n$

$T_3(X) = (\bar{X}_n, S_n)$ estadístico conjunto.

$T_4(X) = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$

$T_5(X) = \{X' \in \Delta : f_\theta(X) \propto f_\theta(X') \ \forall \theta\} \subseteq \Delta$

Retomando el ejemplo de las monedas.

$$x = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$$

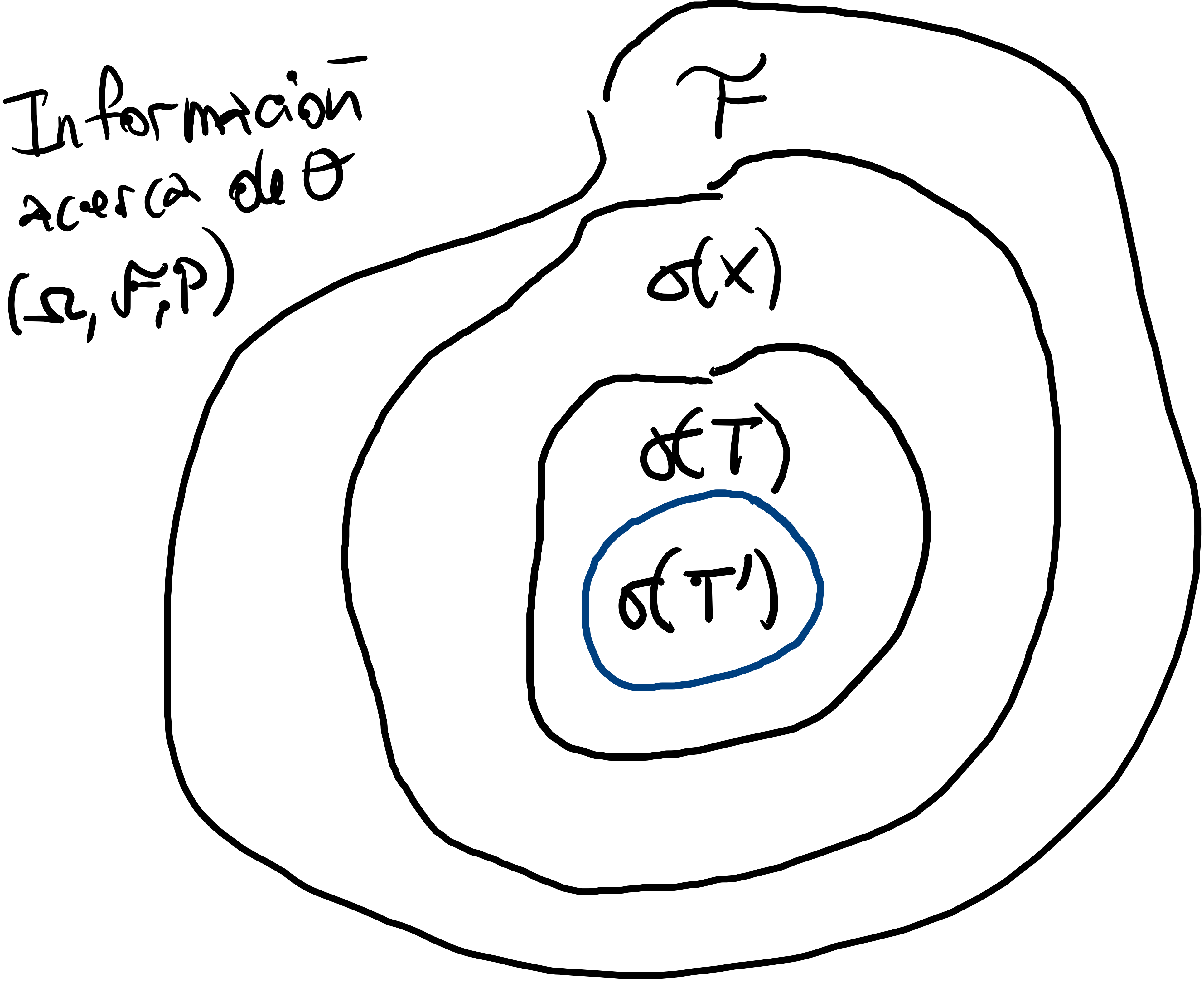
$$T(x) = \sum x_i = 6.$$

"$\hat{\theta}$ es un estimador de θ."

'$x \stackrel{E}{\equiv} T(x)$'

$$\hat{\theta} = \frac{T(x)}{10}$$

$$P_\theta(X_i = 1) = \theta.$$



Información acerca de θ
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$
$\mathcal{F}$
$\sigma(X)$
$\sigma(T)$
$\sigma(T')$

Equivalencia casi cierta

T y S suf. min.

$T = \psi(S)$ en casi todo punto x.

$$T(x) = \psi(S(x)), \; \forall x \in A, \; P(A) = 1$$

$$T(x) \neq \psi(S(x)), \; \forall x \in B, \; P(B) = 0.$$

Ejemplo del Teorema de Factorización

$X_i \overset{iid}{\sim} Ber(\theta)$, $i=1,\dots,n>0$. $P(X_i=1)=\theta$.

$X=(X_1,\dots,X_n)$; $T(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P_\theta(X=x \mid T=t) = \frac{P(X=x,\ T=t)}{P(T=t)} = \begin{cases} 0, & \sum x_i \neq t \\ ¿?, & \sum x_i = t \end{cases}$$

$$= \frac{P(X=x)}{P(T=t)}, \quad \forall x: \sum x_i = t$$

$T \sim \text{Binomial}(n,\theta)$

$$= \frac{P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}}, \quad \sum x_i = t$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}}{\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}}$$

$$= \frac{\cancel{\theta^{\sum x_i}} \cdot \cancel{(1-\theta)^{n-\sum x_i}}}{\binom{n}{t} \cancel{\theta^t} \cancel{(1-\theta)^{n-t}}} = \frac{1}{\binom{n}{t}} = g(t) \quad \forall \theta \in \Theta$$

$$P(X = x \mid T = t) = \begin{cases} 0, & \sum x_i \neq t \\ \dfrac{1}{\binom{n}{t}}, & \sum x_i = t. \end{cases}$$

$$= g'(t).$$

$\therefore$ $T(X) = \sum X_i$ es suficiente para $\theta \in \Theta$.

Ejemplo: $X_i \overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$

$$T(X) = \sum X_i$$

$$f_\theta(x_i) = \frac{e^{-\theta}\,\theta^{x_i}}{x_i!}\,;\quad X = (X_1, \dots, X_n)$$

$$P(X = x \mid T = t) = \frac{P(\overbrace{X = x}^{A}, T = t)}{P(T = t)}\,,\quad \sum x_i = t$$

$$= \frac{P(X = x)}{P(T = t)}\,,$$

$T \sim \text{Poisson}(n\theta)$
$\quad\;\; \| $
$\quad\;\; \theta^*$

$$= \frac{\dfrac{e^{-\theta}\,\theta^{x_1}}{x_1!} \times \cdots\cdots \times \dfrac{e^{-\theta}\,\theta^{x_m}}{x_m!}}{\dfrac{e^{-n\theta}\cdot(n\theta)^t}{t!}}$$

$$\cdots$$

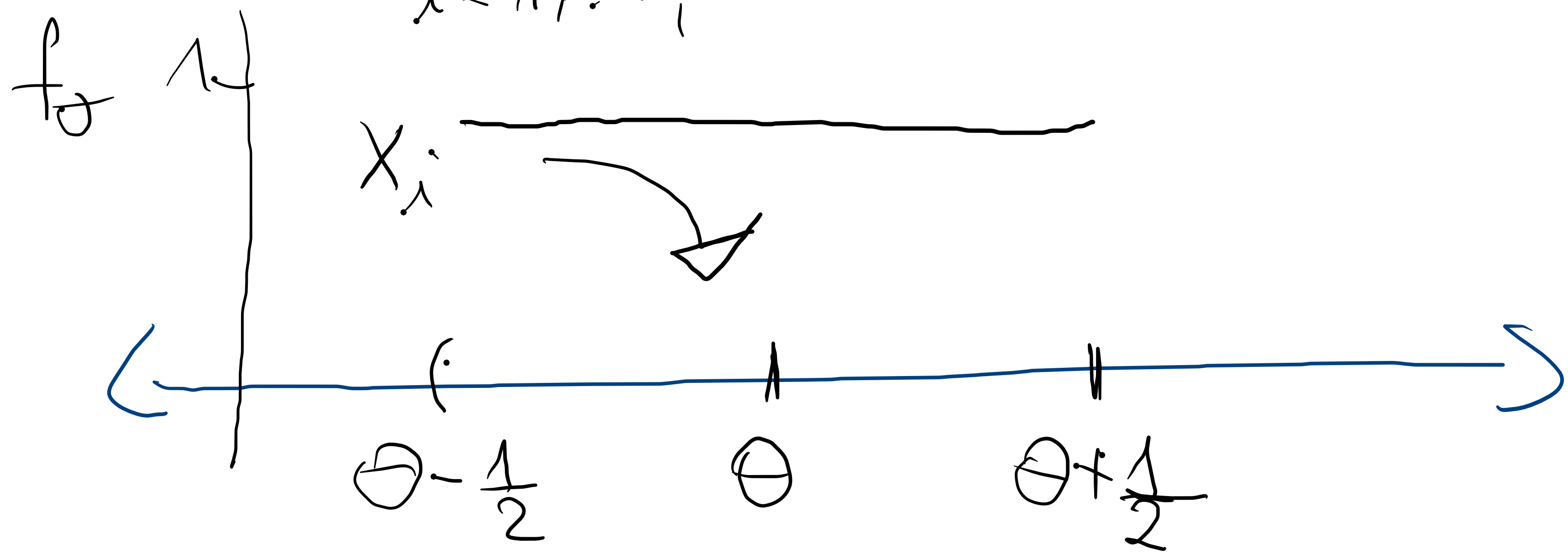
$$= \frac{t!}{x_1! \cdots\cdots x_m!\, n^t}$$

No depende de θ.

$\therefore$ $T(x) = \sum x_i$ es suficiente para $\theta \in \Theta$.

Ejemplo: $X_i \overset{iid}{\sim} U\left(\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}\right)$

$i=1,\dots,n>0$



$$f_\theta(x_i) = 1 \cdot I_{\left(\theta-\frac{1}{2},\, \theta+\frac{1}{2}\right)}(x_i)$$

Est. de orden obs.

$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$

$$\theta-\frac{1}{2} < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta+\frac{1}{2} \iff I_{\left(\theta-\frac{1}{2},\, \theta+\frac{1}{2}\right)}(x_i) = 1, \ \forall i$$

I.- Encontrar T suficiente

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta-\frac{1}{2},\,\theta+\frac{1}{2})}(x_i)$$

$$= \underbrace{I_{(\theta-\frac{1}{2},\,\theta+\frac{1}{2})}(x_{(1)}) \times I_{(\theta-\frac{1}{2},\,\theta+\frac{1}{2})}(x_{(n)})}_{g_\theta(T(x))} \cdot \underbrace{1}_{h(x)}$$

$\therefore$ $T(X) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente para $\theta \in \Theta$.

$$(\Rightarrow)\quad x, y \in \Lambda : \underline{T(x) = T(y) = (x_{(1)}, x_{(n)}) = (y_{(1)}, y_{(n)})}$$

$$\left.\begin{aligned}
f_\theta(x) &= I_{(\theta-\frac{1}{2},\, \theta+\frac{1}{2})}(x_{(1)}) \cdot I_{(\theta-\frac{1}{2},\, \theta+\frac{1}{2})}(x_{(n)}) \\
f_\theta(y) &= I_{(\theta-\frac{1}{2},\, \theta+\frac{1}{2})}(y_{(1)}) \cdot I_{(\theta-\frac{1}{2},\, \theta+\frac{1}{2})}(y_{(n)})
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f_\theta(x) = f_\theta(y) \cdot \underbrace{1}_{h(x,y)} \Rightarrow y \in D(x)$$

$(\Leftarrow)$ $y \in D(x)$, es decir

$$f_\theta(x) = f_\theta(y)\, h(x,y) \quad \forall \theta \in \Theta$$

$$I_{(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})}(x_{(1)}) \cdot I_{(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})}(x_{(n)}) = I_{(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})}(y_{(1)}) \cdot I_{(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})}(y_{(n)}) \cdot h(x,y)$$

$\Rightarrow T(x) = T(y)$.

$T(X) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ es minimal (mínimo).

Estadístico Ancilar: $A : 1 \to \mathcal{A}$ Cox(1958)

no contie información relevante sobre θ.

<u>Ejemplo:</u> $X_1, \dots, X_{100}$ X_i: nivel de leucocitos

μ: media de leucocitos en la sangre

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\ A=1 \qquad A \qquad A=0\ \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$N(\mu, 10) \qquad N(\mu, 100)$$

$P(A=0) = P(A=1) = \frac{1}{2}$

Dado que $A=1$.

$g(a)$

Estimado "Premium" para θ

Función de T: suficiente
mimimo
completo //

Modelo Bayesiano

$(X, \theta) \sim P_{\theta x}$, $P_{\theta | x}$ a posterior.

Densidad/Probabilidad $\pi(\theta | x)$

Dos muestras $x, y \in \Delta$ o un función T de esta son equivalentes $(\overset{B}{\equiv})$ en el sentido Bayesiano ssi

1. $\pi(\theta | x) = \pi(\theta | y)$, C.P
2. $\pi(\theta | x) = \pi(\theta | T = t)$, C.P