1° Lista de Ejercicios

1. Considere el modelo estadístico de serie de potencias cuya función de probabilidad es dada por:
$$f_\theta(x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \quad x = 0, 1, \ldots; a(x) > 0, \theta > 0;$$
$C(\theta)$ es positiva y con derivadas finitas.
   (a) Fórmula analíticamente la forma de la medida de probabilidad y el modelo estadístico como tripla (1 punto).
   (b) Determine la pertenecería o no pertenecía de este modelo a la familia exponencial. Demuestre que la función de probabilidad Binomial y *Poisson* son un caso especial de esta función de probabilidad (2 puntos).
   (c) En el caso de que pertenezca a la familia exponencial, reescribir su densidad en su forma canónica y determinar si es o no de rango completo. (2 puntos)

2. Considere una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de una variable $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Asumamos que σ^2 es conocido y que a priori $\mu \sim \text{Normal}(a_0, b_0^2)$, en que $a_0 \in \mathbb{R}$ y $b_0 > 0$.
   (a) Determina el estadístico suficiente en el sentido clásico para μ. ¿Es este estadístico es completo? ¿Es este estadístico es mínimo?
   (b) Encuentra la densidad a posterior de $\mu | X_1, \ldots, X_n$ (2 puntos).
   (c) Determina el estadístico suficiente para μ en el sentido Bayesiano. ¿Es equivalente al estadístico suficiente en el sentido clásico? (3 puntos)
   (d) Demuestra que el estadístico es además completo.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra i.i.d de un modelo exponencial en el intervalo (a, b),
$$f(x; a) = \frac{1}{b} e^{-(x-a)/b} I_{[a,\infty]}(x).$$
en que $a \leq 0$ y $b > 0$ es conocido.
   (a) Demuestre que el mínimo $X_{(1)}$ es un estadístico suficiente.
   (b) Demuestre que el mínimo no es completo.
   (c) Encuentre el EIVMU de a.

4. Considere el problema de estimar $\theta \in \Theta = \{0, 1\}$, basado en una única observación de la variable aleatoria X, con densidad
$$f(x; \theta) = 2^{-(x+\theta)}, \quad x = 1 - \theta, 2 - \theta, 3 - \theta, \ldots$$
Considere la función de perdida con valores 0 y 1, es decir,
$$L(0, 0) = L(1, 1) = 0 \quad \text{y} \quad L(0, 1) = L(1, 0) = 1.$$

Considere también los estimadores

$$\delta_1(X) = \begin{cases} 1, & X = 0, \\ 0, & X > 0. \end{cases} \qquad \delta_2(X) = \begin{cases} 0, & X \leq 1, \\ 1, & X > 1. \end{cases}$$

(a) Encuentre $R(\theta, \delta_i(X))$, $i = 1, 2$.

(b) ¿Cúal de los estimadores es Mínimax? ¿Alguno de los estimadores es inadmisible?.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra i.i.d de un modelo *Poisson* (θ). Encuentra el estimador insesgado de

   (a) $g_1(\theta) = e^{-\theta}$, la probabilidad de $X = 0$.

   (b) $g_2(\theta) = \theta e^{-\theta}$, la probabilidad de $X = 1$.

   (c) Para $g_1(\theta)$ y $g_2(\theta)$, calcula la cota inferior de Cramér-Rao de sus respectivos EMV. Asintóticamente, ¿cual de estos 4 estimadores son mejores son consistentes y/o asintóticamente eficientes?