Teoría Estadística. Unidad II

Dr. Jaime Lincovil

Universidad Nacional de Ingeniería

2024

Elementos de pruebas de hipótesis. Lema fundamental de Neyman-Pearson. Test uniformemente más poderoso

Contraste/prueba/test de hipótesis

Definición 31. Prueba/contraste de hipótesis

Una **hipótesis estadística** es una afirmación lógica acerca de la población P_θ. Un **contraste de hipótesis estadístico** consiste en dos hipótesis estadísticas contrastando diferentes (parcial o totalmente) caracteristicas de P_θ. Sea una $\mathcal{P}$ clase de medidas de probabilidad indexadas por θ, luego, la **hipótesis nula y alternativa** son hipótesis estadísticas definidas en términos de clases disjuntas dada por:

$$H_0 : P_\theta \in \mathcal{P}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1,$$

en que $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$ en la mayoría de los casos.
Nota: de entre Contraste/prueba/test, emplearemos **test**.

Procedimiento de decisión

Definición 31. Procedimiento de decisión de un test

Sea $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, en donde 1 significa rechazar H_0, entonces, $T : \Lambda \to \mathbb{A}$ es llamada de **función (decisión) test** con

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \text{Rechazamos } H_0 \\ 0, & \text{No rechazamos } H_0. \end{cases}$$

La **región de rechazo** A_1 y **no rechazo** A_0 de H_0 es una partición de Λ:

$$A_1 = \{\, x \in \Lambda : T(x) = 1\} \cup A_0 = \{\, x \in \Lambda : T(x) = 0\} = \Lambda.$$

Para decidir entre H_1 y H_0 consideramos una función de perdida $L(\theta, T)$ y riesgo medio $R_T(\theta) = E_j[L(\theta, T)]$, según $P_\theta \in \mathcal{P}_0$ o $P_\theta \in \mathcal{P}_1$.

Nota: Un procedimiento de decisión de una prueba consiste en construir las regiones A_1 y A_2 basado en un fijar un error mínimo y/o maximizar el poder detección de un test .

Errores y sus probabilidades

Definición 32. Error del tipo I y Tipo II

Table: Posibles errores al decidir sobre H_0.

	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
No rechazar H_0	Correcta	Error tipo II
Rechazar H_0	Error tipo I	Correcta

Error tipo I: $T(X) = 1$, es decir, rechazamos H_0, a pesar de que esta es verdadera. **Error tipo II:** $T(X) = 0$, es decir, NO rechazamos H_0, a pesar de que esta es falsa.

Definición 33. Probabilidades del error del tipo I y Tipo II

La probabilidad del error tipo I: $R_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 1) = \alpha$, dado que $P_\theta \in \mathcal{P}_0$. **La probabilidad del error tipo II:** $R_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 0) = \beta$, dado que $P_\theta \in \mathcal{P}_1$.

Función poder de un test

Definición 34. Función poder de un test

$$\Gamma_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 1) = 1 - \beta, \text{dado que } P_\theta \in \mathcal{P}_1.$$

Es la probabilidad de rechazar H_0 para un cierto $P_\theta \in \mathcal{P}_1$. En palabras, simples, la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es falsa.

Definición 35. Test de nivel α

Una función test T es llamada de **función test de nivel** α si y solamente si

$$\sup_{P_\theta \mathcal{P}_0} \{P_\theta(T(X) = 1)\} \leq \alpha, \quad \alpha \in (0,1).$$

Es decir, la probabilidad del error tipo I es como máximo α.

Nota:

Test Uniformemente más Poderoso (TUP)

Definición 36. Test Uniformemente más Poderoso (TUP)

Una función test T' de tamaño α es llamado de **Test Uniformemente más Poderoso** (TUP) para decidir sobre las hipótesis H_0 y H_1 si y solamente si

$$\Gamma_{T'}(\theta) \leq \Gamma_T(\theta) \quad \forall P_\theta \in \mathcal{P}_1,$$

para todo otra función test T de nivel α.

Nota: Un test T' de nivel α es TUP si su poder es mayor o igual al poder de cualquier otro test T para cada $P_\theta \in \mathcal{P}_1$.

Medidas sobre hipótesis H_0 y H_1

- Sea $P_0 \in \mathcal{P}$ y $P_1 \in \mathcal{P}_1$ dos medidas de probabilidad pertenecientes al las subfamilias que especifican H_0 y H_1, respectivamente.
- Denotamos por $f_0(x)$ y $f_1(x)$ las funciones de densidad de P_0 y P_1, respectivamente. Alternativamente, podríamos denotar las densidades por $f_{\theta_0}(x)$ y $f_{\theta_1}(x)$, respectivamente.
- La probabilidad de un evento $A(X)$ sobre la hipótesis H_0 es denotado por
$$P_0(A(X)).$$
Análogamente, para H_1 y $P_1(A(X))$.
- El valor esperado de una función $\psi(X)$ sobre la hipótesis H_0 es denotada por
$$E_0(\psi(X)) = \int \psi(x) f_0(x) dx.$$
Análogamente, $E_1(\psi(X)) = \int \psi(x) f_1(x) dx$ para H_1.

Lema de Neyman-Pearson (LNP)

Teorema 16. Lema de Neyman-Pearson

Consideremos las subfamilias $\mathcal{P}_0 = \{P_{\theta_0}\}$, $\mathcal{P}_1 = \{P_{\theta_1}\}$ y sea f_{θ_j} la densidad de P_{θ_j} para $j = 0, 1$. (i) Existencia de un TUP. Para todo α, existe un TUP de tamaño α dado por

$$T(X) = \begin{cases} 1, & Y > c(U) \\ \gamma, & Y = c(U) \\ 0, & Y < c(U). \end{cases}$$

en que $\gamma \in [0, 1]$ y c son constantes elegidas tales que $E_0[T'(X)] = \alpha$ en el caso de que $P_\theta = P_{\theta_0}$. (ii) Unicidad. Si T' es un TUP de tamaño α, entonces:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & f_{\theta_1}(X) > cf_{\theta_0}(X) \\ 0, & f_{\theta_1}(X) < cf_{\theta_0}(X). \end{cases}$$

Ejemplo media Normal contra Exponencial doble

- Sea una muestra de una observación $X = x$, en que $\mathcal{P}_0 = \{P_0\}$ y $\mathcal{P}_1 = \{P_1\}$, en que $P_0 \sim \text{Normal}(0, 1)$ y $P_1 \sim \text{D-Exponencial}(0, 2)$ con densidades f_0 y f_1, respectivammente.
  Dado que $P[f_1(X) = cf_0(X)] = 0$, un test T del tipo TUP tiene la forma:
  $$T(X) = \begin{cases} 1, & f_{\theta_1}(X) > cf_{\theta_0}(X) \\ 0, & f_{\theta_1}(X) < cf_{\theta_0}(X). \end{cases}$$
- Es posible de demostrar que $f_1(X)/f_0(X) > c$ ssi $\dfrac{\pi}{8} e^{\frac{x^2}{2} - \frac{|x|}{2}} > c$.
- Lo cual es equivalente a $|x| < t$ o $|x| < 1 - t$ para $t > 1/2$.
- El valor de t que le da a T un tamaño α es dado por $t = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ y el TUP tiene la forma
  $$T(X) = \begin{cases} 1, & |X| > t \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo modelo Bernoulli

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra tal que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$. Consideremos las hipótesis $H_0 : p = p_0$ contra $H_1 : p = p_1$ en que $0 < p_0 < p_1 < 1$.
- Por el LNP un TUOP de tamaño α tiene la forma:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \lambda(Y) > c \\ \gamma, & \lambda(Y) = c \\ 0, & \lambda(Y) < c. \end{cases}$$

en que $\lambda(Y) = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^Y \left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{n-Y}$.

- Para encontrar el test T es necesario encontrar m tal que

$$\alpha = E_0(T(X)) = P_0(T(X) = 1) + \gamma P(Y = m).$$

- El valor de γ es seleccionado de manera de completar lo que falte para que el valor esperado sea exactamente igual a α.

Extensión del LNP

Proposición 4.

Supongamos que existe un test T' de tamaño α tal que para toda $P_\theta \in \mathcal{P}_1$ es un TUP para testar $H_0 : P_\theta = P_0$ contra la alternativa $P_\theta = P_1$ para toda $P_1 \in \mathcal{P}_1$. Entonces, T' es tambien TUP para testar

$$H_0 : P_\theta = P_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1.$$

Ejemplo de la extensión del LNP

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de una población Normal $(\mu, 1)$. Consideremos las hipótesis $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu = 1$.
- Es posible demostrar que

$$\frac{f_1(X)}{f_0(X)} = e^{\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2}} \geq c,$$

- O, equivalentemente, $T(X) = 1$ cuando $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq c'$, para alguna constante c'.
- Para $\alpha = 0.05$, necesitamos una constante c' tal que $P_0(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq c') = \alpha$ de tal manera que el test sea de nivel $\alpha = 0,05$. Dado que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Normal}(0, n)$, el la constante es dada por $c' = 1,64\sqrt{n}$.
- El test que rechaza H_0 es TUP. Dado que el mismo test continua siendo TUP para todo $\mu > 0$, entonces el es un TUP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_0 : \mu > 0$. Este debido a que la región crítica $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq c'$ no depende de un partícular valor de $\mu > 0$.

Ejemplo de test Bayesiano

- Una forma de comparar la evidencia a favor o en contra de $X = x$ a facor de las hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$ es comparando las razones
$$\widehat{\pi}_j = \frac{E_{\Theta_j}(\ell(\theta))}{E_{\Theta}(\ell(\theta))}, \quad \text{para } j = 0, 1.$$
Podríamos decidir rechazar H_0 en el caso de que $\widehat{\pi}_1 > \widehat{\pi_0}$.
- En el caso en que $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ y $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ son hipótesis simples. Para una única observación, tenemos que
$$\widehat{\pi}_j = \frac{\pi_j f_{\theta_j}(x)}{\pi_0 f_{\theta_0}(x) + \pi_1 f_{\theta_1}(x)}, \quad \text{para } j = 0, 1,$$
en que $\pi_j = \int_{\Theta_j} \pi(\theta) d\theta = \pi(\theta_j)$ en este caso.
- Finalmente, un test Bayesiano para las hipótesis es dado por
$$T(X) = \begin{cases} 1, & \widehat{\pi}_1 > \widehat{\pi_0} \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$