Teoría Estadística. Unidad II

Dr. Jaime Lincovil

Universidad Nacional de Ingeniería

2024

1. **Elementos de pruebas de hipótesis. Lema fundamental de Neyman-Pearson. Test uniformemente más poderoso**

2. **Test de la razón de verosimilitud Monótono. Test Uniformemente Más Poderosos (UMP) Bilaterales**

3. **Test de la Razón de Verosimilitud Generalizada (RVG). Test asintóticos.**

Elementos de pruebas de hipótesis. Lema fundamental de Neyman-Pearson. Test uniformemente más poderoso

Contraste/prueba/test de hipótesis

Definición 31. Prueba/contraste de hipótesis

Una **hipótesis estadística** es una afirmación lógica acerca de la población P_θ. Un **contraste de hipótesis estadístico** consiste en dos hipótesis estadísticas contrastando diferentes (parcial o totalmente) caracteristicas de P_θ. Sea una $\mathcal{P}$ clase de medidas de probabilidad indexadas por θ, luego, la **hipótesis nula y alternativa** son hipótesis estadísticas definidas en términos de clases disjuntas dada por:

$$H_0 : P_\theta \in \mathcal{P}_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1,$$

en que $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$ en la mayoría de los casos.

Nota: de entre Contraste/prueba/test, emplearemos **test**.

Procedimiento de decisión

Definición 31. Procedimiento de decisión de un test

Sea $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, en donde 1 significa rechazar H_0, entonces, $T : \Lambda \rightarrow \mathbb{A}$ es llamada de **función (decisión) test** con

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \text{Rechazamos } H_0 \\ 0, & \text{No rechazamos } H_0. \end{cases}$$

La **región de rechazo** A_1 y **no rechazo** A_0 de H_0 es una partición de Λ:

$$A_1 = \{\, x \in \Lambda : T(x) = 1\} \cup A_0 = \{\, x \in \Lambda : T(x) = 0\} = \Lambda.$$

Para decidir entre H_1 y H_0 consideramos una función de perdida $L(\theta, T)$ y riesgo medio $R_T(\theta) = E_j[L(\theta, T)]$, según $P_\theta \in \mathcal{P}_0$ o $P_\theta \in \mathcal{P}_1$.

Nota: Un procedimiento de decisión de una prueba consiste en construir las regiones A_1 y A_2 basado en un fijar un error mínimo y/o maximizar el poder detección de un test .

Errores y sus probabilidades

Definición 32. Error del tipo I y Tipo II

Table: Posibles errores al decidir sobre H_0.

	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
No rechazar H_0	Correcta	Error tipo II
Rechazar H_0	Error tipo I	Correcta

Error tipo I: $T(X) = 1$, es decir, rechazamos H_0, a pesar de que esta es verdadera. **Error tipo II:** $T(X) = 0$, es decir, NO rechazamos H_0, a pesar de que esta es falsa.

Definición 33. Probabilidades del error del tipo I y Tipo II

La probabilidad del error tipo I: $R_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 1) = \alpha$, dado que $P_\theta \in \mathcal{P}_0$. **La probabilidad del error tipo II:** $R_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 0) = \beta$, dado que $P_\theta \in \mathcal{P}_1$.

Función poder de un test

Definición 34. Función poder de un test

$$\Gamma_T(\theta) = P_\theta(T(X) = 1) = 1 - \beta, \text{dado que } P_\theta \in \mathcal{P}_1.$$

Es la probabilidad de rechazar H_0 para un cierto $P_\theta \in \mathcal{P}_1$. En palabras, simples, la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es falsa.

Definición 35. Test de nivel α

Una función test T es llamada de **función test de nivel** α si y solamente si

$$\sup_{P_\theta \mathcal{P}_0} \{P_\theta(T(X) = 1)\} \leq \alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Es decir, la probabilidad del error tipo I es como máximo α.

Nota:

Test Uniformemente más Poderoso (TUP)

Definición 36. Test Uniformemente más Poderoso (TUP)

Una función test T' de tamaño α es llamado de **Test Uniformemente más Poderoso** (TUP) para decidir sobre las hipótesis H_0 y H_1 si y solamente si

$$\Gamma_{T'}(\theta) \leq \Gamma_T(\theta) \quad \forall P_\theta \in \mathcal{P}_1,$$

para todo otra función test T de nivel α.

Nota: Un test T' de nivel α es TUP si su poder es mayor o igual al poder de cualquier otro test T para cada $P_\theta \in \mathcal{P}_1$.

Medidas sobre hipótesis H_0 y H_1

- Sea $P_0 \in \mathcal{P}$ y $P_1 \in \mathcal{P}_1$ dos medidas de probabilidad pertenecientes al las subfamilias que especifican H_0 y H_1, respectivamente.
- Denotamos por $f_0(x)$ y $f_1(x)$ las funciones de densidad de P_0 y P_1, respectivamente. Alternativamente, podríamos denotar las densidades por $f_{\theta_0}(x)$ y $f_{\theta_1}(x)$, respectivamente.
- La probabilidad de un evento $A(X)$ sobre la hipótesis H_0 es denotado por

$$P_0(A(X)).$$

Análogamente, para H_1 y $P_1(A(X))$.

- El valor esperado de una función $\psi(X)$ sobre la hipótesis H_0 es denotada por

$$E_0(\psi(X)) = \int \psi(x) f_0(x) dx.$$

Análogamente, $E_1(\psi(X)) = \int \psi(x) f_1(x) dx$ para H_1.

Lema de Neyman-Pearson (LNP)

Teorema 16. Lema de Neyman-Pearson

Consideremos las subfamilias $\mathcal{P}_0 = \{P_{\theta_0}\}$, $\mathcal{P}_1 = \{P_{\theta_1}\}$ y sea f_{θ_j} la densidad de P_{θ_j} para $j = 0, 1$. (i) Existencia de un TUP. Para todo α, existe un TUP de tamaño α dado por

$$T(X) = \begin{cases} 1, & Y > c(U) \\ \gamma, & Y = c(U) \\ 0, & Y < c(U). \end{cases}$$

en que $\gamma \in [0, 1]$ y c son constantes elegidas tales que $E_0[T'(X)] = \alpha$ en el caso de que $P_\theta = P_{\theta_0}$. (ii) Unicidad. Si T' es un TUP de tamaño α, entonces:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & f_{\theta_1}(X) > cf_{\theta_0}(X) \\ 0, & f_{\theta_1}(X) < cf_{\theta_0}(X). \end{cases}$$

Ejemplo media Normal contra Exponencial doble

- Sea una muestra de una observación $X = x$, en que $\mathcal{P}_0 = \{P_0\}$ y $\mathcal{P}_1 = \{P_1\}$, en que $P_0 \sim \text{Normal}(0,1)$ y $P_1 \sim \text{D-Exponencial}(0,2)$ con densidades f_0 y f_1, respectivammente.
  Dado que $P[f_1(X) = cf_0(X)] = 0$, un test T del tipo TUP tiene la forma:
  $$T(X) = \begin{cases} 1, & f_{\theta_1}(X) > cf_{\theta_0}(X) \\ 0, & f_{\theta_1}(X) < cf_{\theta_0}(X). \end{cases}$$
- Es posible de demostrar que $f_1(X)/f_0(X) > c$ ssi $\frac{\pi}{8} e^{\frac{x^2}{2} - \frac{|x|}{2}} > c$.
- Lo cual es equivalente a $|x| < t$ o $|x| < 1 - t$ para $t > 1/2$.
- El valor de t que le da a T un tamaño α es dado por $t = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ y el TUP tiene la forma
  $$T(X) = \begin{cases} 1, & |X| > t \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo modelo Bernoulli

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra tal que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$. Consideremos las hipótesis $H_0 : p = p_0$ contra $H_1 : p = p_1$ en que $0 < p_0 < p_1 < 1$.
- Por el LNP un TUOP de tamaño α tiene la forma:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \lambda(Y) > c \\ \gamma, & \lambda(Y) = c \\ 0, & \lambda(Y) < c. \end{cases}$$

en que $\lambda(Y) = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^Y \left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{n-Y}$.

- Para encontrar el test T es necesario encontrar m tal que

$$\alpha = E_0(T(X)) = P_0(T(X) = 1) + \gamma P(Y = m).$$

- El valor de γ es seleccionado de manera de completar lo que falte para que el valor esperado sea exactamente igual a α.

Extensión del LNP

Proposición 4.

Supongamos que existe un test T' de tamaño α tal que para toda $P_\theta \in \mathcal{P}_1$ es un TUP para testar $H_0 : P_\theta = P_0$ contra la alternativa $P_\theta = P_1$ para toda $P_1 \in \mathcal{P}_1$. Entonces, T' es tambien TUP para testar

$$H_0 : P_\theta = P_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1.$$

Ejemplo de la extensión del LNP

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de una población Normal $(\mu, 1)$. Consideremos las hipótesis $H_0 : \mu = 0$ contra $H_1 : \mu = 1$.
- Es posible demostrar que

$$\frac{f_1(X)}{f_0(X)} = e^{\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2}} \geq c,$$

- O, equivalentemente, $T(X) = 1$ cuando $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq c'$, para alguna constante c'.
- Para $\alpha = 0.05$, necesitamos una constante c' tal que $P_0(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq c') = \alpha$ de tal manera que el test sea de nivel $\alpha = 0,05$. Dado que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Normal}(0, n)$, el la constante es dada por $c' = 1,64\sqrt{n}$.
- El test que rechaza H_0 es TUP. Dado que el mismo test continua siendo TUP para todo $\mu > 0$, entonces el es un TUP para testar $H_0 : \mu = 0$ contra $H_0 : \mu > 0$. Este debido a que la región crítica $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq c'$ no depende de un partícular valor de $\mu > 0$.

Ejemplo de test Bayesiano

- Una forma de comparar la evidencia a favor o en contra de $X = x$ a facor de las hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$ es comparando las razones
$$\widehat{\pi}_j = \frac{E_{\Theta_j}(\ell(\theta))}{E_{\Theta}(\ell(\theta))}, \quad \text{para } j = 0, 1.$$
Podríamos decidir rechazar H_0 en el caso de que $\widehat{\pi}_1 > \widehat{\pi_0}$.
- En el caso en que $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ y $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ son hipótesis simples. Para una única observación, tenemos que
$$\widehat{\pi}_j = \frac{\pi_j f_{\theta_j}(x)}{\pi_0 f_{\theta_0}(x) + \pi_1 f_{\theta_1}(x)}, \quad \text{para } j = 0, 1,$$
en que $\pi_j = \int_{\Theta_j} \pi(\theta) d\theta = \pi(\theta_j)$ en este caso.
- Finalmente, un test Bayesiano para las hipótesis es dado por
$$T(X) = \begin{cases} 1, & \widehat{\pi}_1 > \widehat{\pi_0} \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Test de la razón de verosimilitud Monótono. Test Uniformemente Más Poderosos (UMP) Bilaterales

Razón de Verosimilitud Monótona (RVM)

Definición 37. Razón de Verosimilitud Monótona (RVM

Supongamos que el modelo para X está en la clase $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ dominada por una medida σ-finita. Decimos que $\mathcal{P}$ posee una **Razón de Verosimilitud Monótona (RVM)** en el estadístico $\Psi(X)$ si, y solamente si para $\theta_0 < \theta_1$ cualesquiera, $\lambda(X) = f_1(X)/f_0(X)$ es una función no decreciente de $\Psi(X)$ para valores de X para los cuales al menos $f_1(X)$ y $f_0(X)$ son positivos.

Definición 38. P-valor

El **P-valor** de un test $T(X)$ para las hipótesis $H_0 : P_\theta \in \mathcal{P}_0$ contra $H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1$ es

$$\text{P-valor} = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\lambda(X) > \lambda(x_0)),$$

donde $\lambda(\bullet)$ es la RV del modelo. **Regla de decisión:** Rechazamos H_0, $T(X) = 1$ ssi P-valor$< \alpha$. Nota: también llamado de valor descriptivo del test.

Proposición 5

Si la variable X posee una familia paramétrica $\mathcal{P}$ con RVM $\lambda(\Psi(X))$. Si d es una función no decreciente de $\Psi(X)$, entonces $g(\theta) = Ed(\Psi(X))$ es no decreciente en θ.

Teorema 17

Supongamos que X posee un modelo perteneciente a una familia paramétrica $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ en que $\Theta \subset R^k$ con RVM $\lambda(\Psi(X))$ en $\Psi(X)$. Consideremos las hipótesis $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$ en que $\theta_0 \in R$. Entonces:

(i) Existe un TUP de nivel α que toma la forma de test de la RV: en que c y γ son determinados tal que $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(X) = 1) \leq \alpha$.

(ii) $P_\theta(T(X) = 1) = g(\theta)$ es estrictamente creciente para todo θ para los cuales $0 < g(\theta) < 1$.

Lista de modelos con RVM

Las siguientes familias tienen una Razón de Verosimilitud Monótona (RVM):

- La familia de distribucion exponenciales dobles $\{\mathrm{DE}(\theta, c)\}$ con una c conocida;
- La familia de distribucion exponencial $\{\mathrm{E}(\theta, c)\}$ con una c conocida;
- La familia de distribucion logistica $\{\mathrm{LG}(\theta, c)\}$ con una c conocida;
- La familia de distribucion uniforme $\{\mathrm{U}(\theta, \theta + 1)\}$;
- La familia de distribucion hipergeometrica $\{\mathrm{HG}(r, \theta, N - \theta)\}$ con valores conocidos r y N;
- La familia Cauchy $\{\mathrm{Cauchy}(\theta, c)\}$ con c conocido no posee RVM.

RVM en familia exponencial

- Si la variable X pertenece a la familia exponencial con densidad

$$f_\theta(x) = \exp\{\eta(\theta)\Psi(X) - \xi(\theta)\}h(X)$$

en que $\eta(\theta)$ es una función no decreciente en θ, entonces, su modelo posee una RVM en $\Psi(X)$.
- Si $X \sim \text{Normal}(\theta, \sigma^2)$ para las hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$ para $\theta_0 < \theta_1$. Entonces, $\lambda(X)$ posee RVM en $\Psi(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.
- Si $X \sim \text{Poisson}(\theta)$ para las hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$ para $\theta_0 < \theta_1$. Entonces, $\lambda(X)$ posee RVM en $\Psi(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.
- Si $X \sim \text{Bernoulli}(p, n)$ para las hipótesis $H_0 : p = p_0$ contra $H_1 : p = p_1$ para $p_0 < p_1$. Entonces, $\lambda(X)$ posee RVM en $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

Región de rechazo: caso continuo y discreto

- Si $X \sim \text{Normal}(\theta, \sigma^2)$ para las hipótesis $H_0 : \theta = 0$ contra $H_1 : \theta = 1$ para $n = 9$. Entonces, para $\alpha = 0,05$, $\lambda(X)$ posee RVM en $\Psi(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ y $c_\alpha = 4,92$. De esta manera:

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n X_i > 4,92 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

  es un TUP de nivel $\alpha = 0,05$.
- Si $X \sim \text{Bernoulli}(p, n)$ para las hipótesis $H_0 : p = 0,4$ contra $H_1 : p = 0,6$. Entonces, $\lambda(X)$ posee RVM en $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $\alpha = 0,05$, consideremos un $\gamma = 0,04$ y $m = 9$, luego

$$T(X) = \begin{cases} 1, & Y > 9 \\ 0,04, & y = 9 \\ 0, & Y < 9. \end{cases}$$

  es un TUP de nivel $\alpha = 0,05$.

Tipo de hipótesis y contraste de hipótesis

- **Hipótesis simple**: $H_i : \theta \in \{\theta_i\}$ o $H_i : \theta = \theta_0$. Determinan un punto del espacio parametrico.
- **Hipótesis compuesta**: $H_i : \theta \in \Theta_0$ con $\dim(\Theta_i) \geq 1$. Determinan un subconjunto no simple del espacio parametrico.
- **Hipótesis del tipo general:** $H_0 : \theta \in \Theta_i \subset R^d$ y $\dim(\Theta_i) > 0$.

Ejemplos para $\Theta \subset R$.

- **Contraste unilateral a la derecha** para un parámetro θ: $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{H}_1 : \theta \geq \theta_0$.
- **Contraste unilateral a la izquierda** para un parámetro θ: $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{H}_1 : \theta \leq \theta_0$.
- **Contraste bilaterales:** $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{H}_1 : \theta \neq \theta_0$. (p.e. $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ contra $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$).

Test de la Razón de Verosimilitud Generalizada (RVG). Test asintóticos.

Tópicos

- En las siguientes condiciones, no es posible aplicar el Lema de Neyman-Pearson para construir un TUP:
  - Cuando el modelo de X no pertenece a la familia exponencial.
  - Cuando H_0 es simple y H_1 es bilateral.
  - Cuando uno de los parametro se asume desconocido (p.e. (μ_0, σ^2))
- Asi como existen estimadores insesgados, también existen tests insesgados, es decir, acotan superior e inferiormente la probabilidad do erro de tipo I y el poder.
- Para hipótesis del tipo generales, la generalización de la estadística de la razón de verosimilitud resulta ser una excelente alternativa.
- Si continuidad de la función de verosimilitud $L_x(\theta) = f_\theta(x)$ es continua, $\sup_{\theta \in \Theta_1} L_x(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta} L_x(\theta)$ siempre que $\dim(\Theta) > \dim(\Theta_0)$.
- Cuando empleamos la distribución asintotica de un estadístico de test, para el calculo de probabilidades, esta probabilidad es **aproximada**.
- P-valores asintóticos proximados basados en la distribución asintótica.

Definición 39. Test insesgado

Sea α un nivel de significancia. Un test T para las hipótesis $H_0 : P_\theta \in \mathcal{P}_0$ contra $H_1 : P_\theta \in \mathcal{P}_1$ es llamado de **insesgado** de nivel α si y solo si (i) T es de nivel α y (ii) su poder es al menos α para todo $\theta \in \Theta_1$.
Un test de nivel α es llamado de **Test Insesgado Uniformemente más Poderoso** (TIUP) si y solo si T es TUP e insesgado.

- Decimos que el modelo de X pertenece a la **familia exponencial natural multiparametrica** si su función de densidad o función de probabilidad:

$$f_{\theta,\psi} = \exp\{\theta Y(x) + \psi^\top U(x) - \zeta(\theta, \psi)\}h(x),$$

en que θ es un vector y $\psi(\theta)$ a valores reales.

- Sea (X_1, X_2) el vector de $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ para $i = 1, 2$ independientes con densidad conjunta:

$$\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{x_1! x_2!} \exp\{x_2 \log(\lambda_1/\lambda_1) + (x_1 + x_2)\log(\lambda_1)\}, \quad \theta = log(\lambda_2/\lambda_1).$$

Teorema 18

Para testar las hipótesis $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$, un TIUP de nivel α es un test

$$T'(Y, U) = \begin{cases} 1, & Y > c(U) \\ \gamma(U), & Y = c(U) \\ 0, & Y < c(U). \end{cases}$$

en que $c(u)$ y $\gamma(u)$ son funciones de Borel determinadas por $E_{\theta_0}(T'(Y, U)|U = u) = \alpha$, para todo u y E_{θ_0} es el valor esperado con respecto a $f_{\theta_0,\psi}$.

Test de la Razón Verosimilitud (TRV)

Consideremos las hipótesis generales: $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$, en que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_1 \cap \Theta_0 = \emptyset$ y Θ_1 y Θ_0 son no vacíos.

Definición 40

Sea $L_x(\theta) = f_\theta(x)$ la función de verosimilitud del modelo para $X = x$. Para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$, la Razón de Verosimilitud (TRV) y la región de rechazo es:

$$\lambda(X) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_1} L_x(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L_x(\theta)} \text{ y } A_1 = \{x \in \Lambda : \lambda(x) \geq c\},$$

que rechaza H_0 si, y solo si $\lambda(X) < c$. El razonamiento para el test es el siguiente: si H_0 es verdadera, $\lambda(X)$ tendrá valores cerca de 0, en cambio si H_1 es verdadera, $\lambda(X)$ tiende tener valores cercanos a 1.

Test de la Razón Verosimilitud Generalizada (TRVG)

Sean $\widehat{\theta}_0$ y $\widehat{\theta}_1$ los estimadores de máxima verosimilitud de θ sobre Θ_0 y Θ_1. Entonces, la estadística TRV:

$$\lambda(X) = \frac{L(\widehat{\theta}_1)}{L(\widehat{\theta}_0)}.$$

Para un cierto $\alpha \in (0, 1)$, si existe una constante c_α tal que

$$P_\theta(\lambda(X) < c_\alpha) = \alpha \forall \theta \in \Theta_0, \text{ el test } \lambda(x) \text{ tiene nivel } \alpha.$$

Definición 41

El estadístico $\lambda'(x)$

$$\lambda'(X) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_x(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L_x(\theta)} \text{ y } A_1 = \{x \in \Lambda : \lambda'(x) \leq c\}.$$

es llamada de **Test de la Razón de Verosimilitud Generalizada** (TRVG).

Si H_0 es verdadera, $\lambda'(X)$ tendrá valores cerca de 0, si H_1 es verdadera, $\lambda'(X)$ tendrá valores cercanos a 1.

Teorema 19. Convergencia en distribución de $-2\log(\lambda_n'(X))$

Sean las hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$, en que $d_1 = \dim(\Theta)$ y $d_2 = \dim(\Theta_0)$. Sobre las condiciones del Teorema 6,

$$-2\log(\lambda_n'(X)) \rightarrow_d \chi_k^2,$$

en que $k = d_1 - d_2$.

Ejemplo de hipótesis y dimensiones:

- Si $B \subset R^k$, entonces $\dim(B) = k$. También, para $\theta_0 \in B$, tenemos que $\dim(\{\theta_0\}) = 0$, dado que θ_0 no tiene longuitud, altura ni anchura,etc.
- Sea $\theta \in \Theta_0$, si los componentes $\theta_{10}, \ldots, \theta_{s0}$ de θ son conocidos y fijos sobre $H_0 : \Theta_0$, para $s < k$, entonces $\dim(\Theta_0) = k - s$.

Aplicaciones del TRVG

- Modelo Normal. Test para una media con varianza desconocida $H_0 : \mu = \mu_0$. Rechazo:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \leq -c_\alpha \quad \text{or} \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \geq c_\alpha$$

- Modelo Normal. Test para una varianza con media desconocida $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$. Rechazo:

$$\frac{\sum_{i=1}(X_i - \bar{X})}{\sigma_0^2} \leq c_1 \quad \text{or} \quad \frac{\sum_{i=1}(X_i - \bar{X})}{\sigma_0^2} \geq c_2.$$

- Modelo Poisson. Test para una media $H_0 : \theta = \theta_0$. Rechazo:

$$-2\log\lambda'(X) \geq \chi^2_\alpha, \text{ cuantil asintótico.}$$

Aplicaciones del TRVG MLG

- Modelo Normal. Test para una media con varianza desconocida $H_0 : \mu = \mu_0$. Rechazo: