Clase 06: Resultados asintóticos de v.a.

Ejemplo: $T(x) \subset \mathbb{R}$, $X_i \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$Q(x;\theta) = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}. \quad f_Q;\ E(Q)$$

Ejemplo: $X_i \overset{iid}{\sim} \text{Model}(\theta)$, $\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$

$H_0: \theta \in \Theta_0$ v/s $H_1: \theta \in \Theta_1$

$$\lambda(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x) \Big/ \sup_{\theta \in \Theta} f_\theta(x), \quad X = (X_1, \ldots, X_n)$$

$$T(x) = -2\ln\{\lambda(x)\} \sim \text{Model}(\theta)$$

> desconocido

> Analiticamente es dificil de trabajar.

$T_1(X), T_2(X), \dots, T_m(X)$, n: tamaño muestral.

Para $n \to \infty$, $F_{T_m}(x) \approx F(x)$, $\forall x \; \Delta$.

modelo real

T'_m es un estimador sesgado, $E(T'_m) \neq g(\theta)$

$$T'_m \xrightarrow{P} g(\theta), \; n \to \infty.$$

$$E(T_m) \xrightarrow{n \to \infty} g(\theta), \text{ ess. insesgado.}$$

Repaso

Una secuencia númerica $\{f_n\}_n$ posee limite f_0 siempre que $\forall \varepsilon > 0$ es posible obtener n_0 tal que:

$$|f_n - f_0| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \ \left(\lim_{n \to \infty} f_n = f_0 \right)$$

Una secuencia de funciones $\{f_n\}_n$, todas con el mismo dominio y recorrido, posee limite $f(x)$ ssi

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0), \ \forall x_0 \in \text{Dominio}$$

Considerar un e.p $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una secuencia de funciones mensurables/medibles

$$X_i : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Una secuencia $X_1, \dots, X_n$ o $X_i \overset{iid}{\sim} \text{Modelo}(\theta)$ o $\{X_n\}_n$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{G}, P_X)$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{P_X(X \in B) = P(\{w : X(w) \in B\}), \ B \in \mathcal{G}}$$

Sea $\{X_n\}_n$ una secuencia de v.a y X otra v.a definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que $\{X_n\}$, converge a X en un conjunto $A \subseteq \Omega$ siempre que

$$X_n(w) \xrightarrow{n \to \infty} X(w), \ \forall w \in A.$$

Cuando $A = \Omega$, la convergencia es llamando puntual.

① $\exists B \subseteq \Omega$ y $B \neq \emptyset$ tal que

$$A \cup B = \Omega.$$

② $P(B) = 0$

Consideremos $\{X_n\}$ y X v.a sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$A_{n,\varepsilon} = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_0\}$$

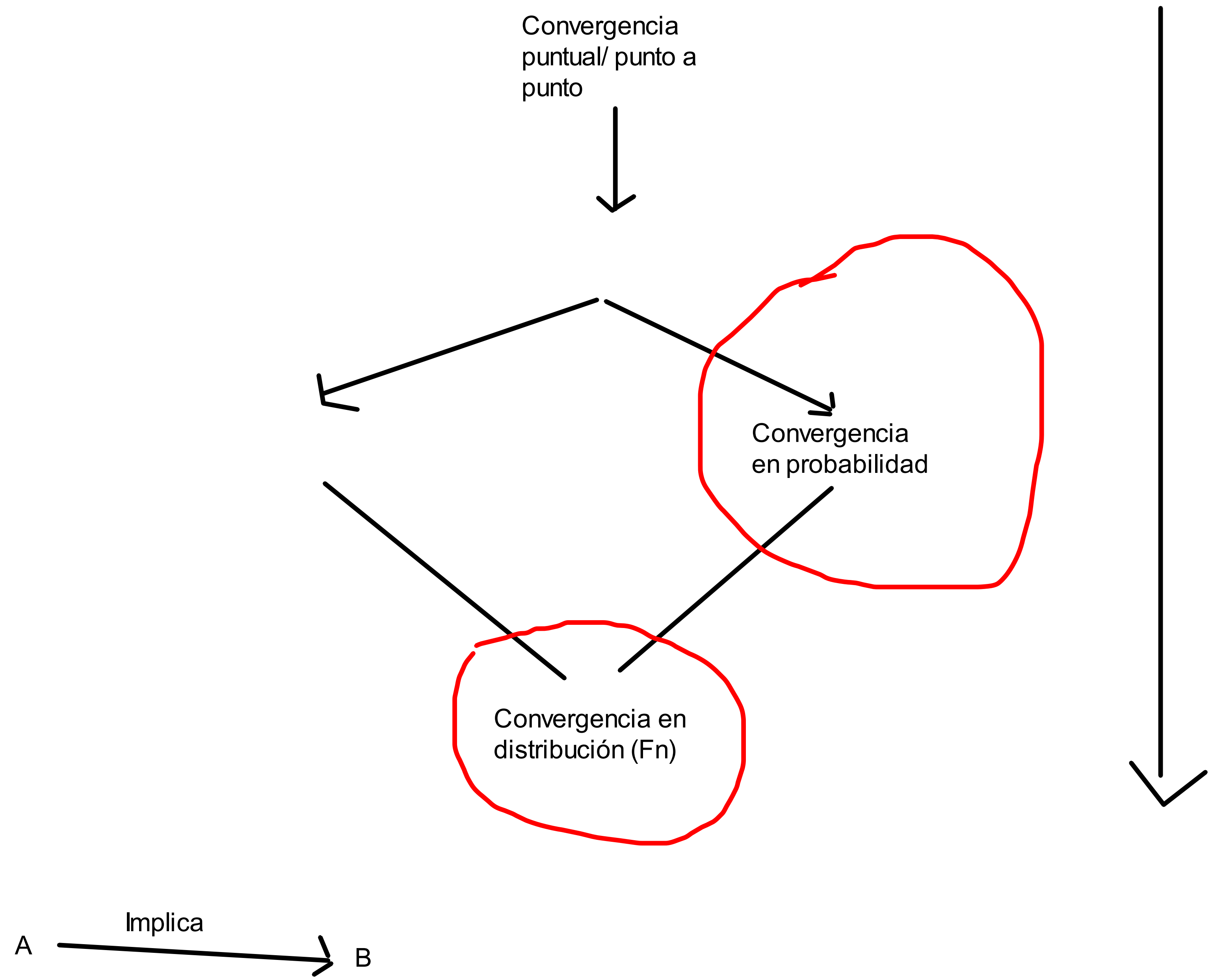
$$= \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n \to \infty} X(\omega)\}$$

$$B_n = \{\omega \in \Omega : \cancel{X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty}} X(\omega) \text{ para al } \varepsilon > 0\}$$

Decimos que X_n converge en "casi ciertamente" de Ω a X si

$$P(A_{n,\varepsilon}) = 1 \text{ y } P(B_n) = 0.$$

$$X_n \xrightarrow{c.c} X$$


Convergencia puntual/ punto a punto
Convergencia en probabilidad
Convergencia en distribución (Fn)
A
Implica
B

Convergencia en Probabilidad

Definamos el evento

$$A_{n,\varepsilon} = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

$$P(A_{n,\varepsilon}) = C_{n,\varepsilon}$$

Decimos que X_n converge en probabilidad a X ($X_n \xrightarrow{P} X$) siempre que

$$C_{n,\varepsilon} \xrightarrow{n \to \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Ejempo: Ley debil de ________________

Sea $\{X_n\}$ una secuencia i.i.d con modelo Bernoulli(θ) y defino $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \theta.$$

$$X_n^* = \frac{S_n}{n} \; ; \; X(\omega) = \theta \quad \forall \omega \in \Omega.$$

$T(x)$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\omega \in \Omega : \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - \theta \right| > \epsilon \right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

$$T(X) = \frac{S_n}{n} \; ; \; T : \mathcal{X} \to \Theta$$

$$T_n(X) \xrightarrow{P} \theta \text{ . (consistencia)}$$

El estimador Tn es consistente para estimar theta

$$\Rightarrow E(T_n(X)) \xrightarrow{n \to \infty} \theta \text{ , } \exists n \; E(T_n(X)) \neq \theta \text{ ,}$$

$$\lim_{n \to \infty} E(T_n(X)) = \theta \text{ .}$$

Tn es asintóticamente insesgado

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X$ $\quad \{X_n\}$ s.v.a sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y X

$F_1, F_2, F_3, \ldots, F$ $\quad F_i : \mathbb{R} \to (0,1)$ .t detalle.

Decimos que X_n converge en distribución X ssi

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in D \subseteq \mathbb{R}$$

puntos de continuidad de F.

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos secuencian nº reales.

$c > 0$ y $\forall n$

- $|a_n| \leq c|b_n|$ representamos lo siguiente "la secuencia b_n va a dominar superior o inferiormente a la secuencia a_n".

$$\boxed{a_n = O(b_n)}$$

- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 > 0$: $\left| \dfrac{a_n}{b_n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$$\boxed{a_n = o(b_n)}$$

Ejemplo: Sea $a_n = n$ y $b_n = n^2$.

Como $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, escribimos $n = O(n^2)$

a_n y b_n crecientes.

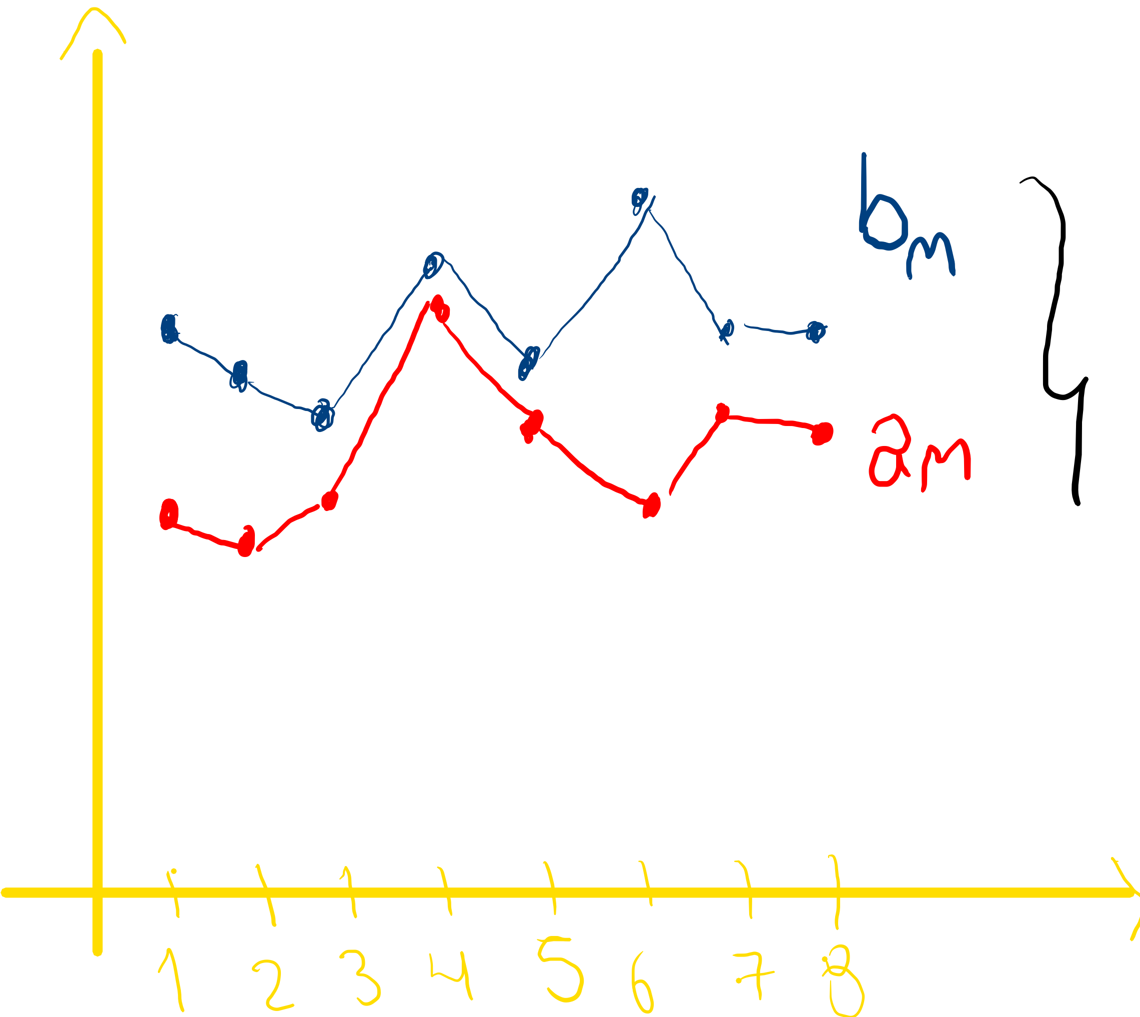
Ejemplo: Sea $a_n = \frac{1}{n^2}$ y $b_n = \frac{1}{n}$.

Como $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2} \div \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

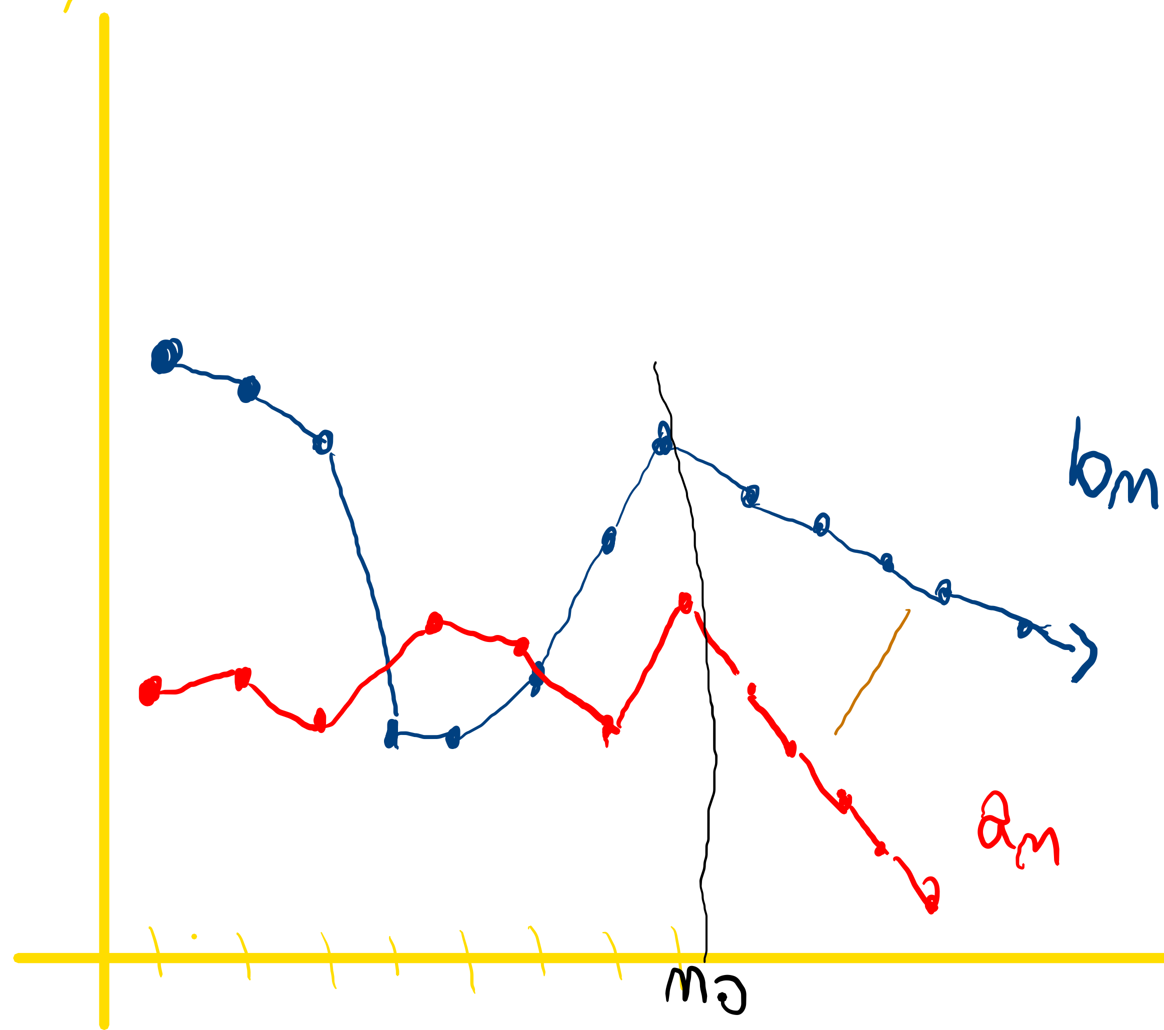
a_n decrece más rápido que b_n.

$$\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

a_n y b_n son decrecientes.



$$a_n \le c\, b_n \Rightarrow a_n = O(b_n)$$



$$a_n = O(b_n)$$

Obs: Para cada $w \in \Omega$, $\{X_n(w)\}$ es una secuencia de valores reales.

$$X_n(w) = a_n \in \mathbb{R}.$$

$$Y_n(w) = b_n \in \mathbb{R}. \quad //$$

Órdenes de convergencia estocásticos

Sea $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ dos s.v.a sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- $P(\{w : |X_n(w)| = O(|Y_n(w)|)\}) = 1$, se denota por $\boxed{X_n = O(Y_n) \text{ c.c}}$

- Si $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{c.c} 0$, entonces usamos $\boxed{X_n = o(Y_n)}$

- $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{P(|X_n| \geq c|Y_n|)\} < \varepsilon$, $\boxed{X_n = O_p(Y_n)}$

- $\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{X_n}{Y_n} - 0\right| > \varepsilon\right\} = 0, \forall \varepsilon > 0$

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} 0$$

$$\shortparallel$$

$$\boxed{X_n = o_p(Y_n)}$$

Análisis de $X_n = o_P(Y_n)$ ✓

Obs. $Z_n = o_P(1)$ ssi $Z_n \xrightarrow{P} 0$.

La notación $o_P(\cdot)$ nos permite escribir

$$\boxed{X_n = Y_n + R_n}$$

, cuando $\underbrace{R_n \xrightarrow{P} 0}_{(i)}$ o $\underbrace{nR_n \xrightarrow{P} 0}_{(ii)}$

(i) $\boxed{X_n = Y_n + o_P(1)}$

(ii) $\boxed{X_n = Y_n + o_P(1/n)}$

Ejemplo: sabemos $X_i \overset{iid}{\sim} P_\theta$, $E(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma^2 \overset{<\infty}{} \; \forall i$.

Por Ley debil de los grandes números.

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

$Var(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ y $\boxed{\sigma_i^2 = \sigma_j^2}$ para $i \neq j$ y $\exists i,j : \sigma_i^2 = \sigma_j^2$

(iii) $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 / n^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$ (como hipótesis)

Teorema: Una condición necesaria y suficiente para que $Z_n \xrightarrow{P} c$ es que $E(Z_n - c)^2 \to 0$.

$$Z_n \sim \bar{X}_n$$

$$c \sim \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n - \mu)^2$$

$$= \mathrm{Var}\left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i\right),$$ ind. e igual distribución

$$= n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / n^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Por el teorema, sobre (iii) tenemos que

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = o(n^2)}$$

Probabilidad $X_n \xrightarrow{d} X$

$F_n \xrightarrow{d} F$

Estadística $(\Omega, \mathcal{G}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$

$F_{\theta n}(x) = P_\theta(X_n \leq x)$

$$\boxed{F_{\theta, n} \xrightarrow{d} F_{\theta}, \quad \forall \theta \in \Theta.}$$

nada