数値解析レポート　12/21 出題分

J4-190507 木下裕太

2021 年 1 月 11 日

選択した問題: (1), (2)

(1)

以下では断りのない限り実数の範囲で考える.
区間 (a, b), 重み $w(x)$ 上の直交多項式系を $\{P_n(x)\}$ とする．初めに次の補題を示す.

Lemma 1. 任意の非負整数 n に対し, $P_n(x)$ は相異なる n 個の実根を持つ.

Proof. 多項式 $Q(x), R(x)$ が

$$P_n(x) = Q(x)R(x)$$

を満たし, $Q(x)$ は定数でないとする．$R(x)$ は高々 $n-1$ 次であるから

$$0 = \int_a^b P_n(x)R(x)w(x)dx = \int_a^b Q(x)R(x)^2 w(x)dx$$

$R(x)^2 w(x) \neq 0$ は常に非負値をとるので, $Q(x)$ は区間 (a, b) 上で正値, 負値のいずれもとる.
この事実により, $P_n(x)$ の根は n 個の実根を持ち, かつそれらは相異なることが分かる.

□

上の補題で存在が示された, $P_n(x)$ の相異なる実根を $\{x_k\}_{k=1}^n$ とし, 各 $k \in \{1, \cdots, n\}$ について $n-1$ 次多項式を

$$l_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

と定める．また $f(x)$ を高々 $2n-1$ 次の任意の多項式とする．このとき, 高々 $n-1$ 次の多項式

$$g(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x)$$

は $P_n(x)$ の n 個の零点全てで $f(x)$ と一致する．したがって $g(x)$ は $f(x)$ を $P_n(x)$ で割った余りであり,

$$f(x) = g(x) + P_n(x)h(x)$$

なる高々 $n-1$ 次の多項式 $h(x)$ が存在する．よって

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)w(x)dx &= \int_a^b g(x)w(x)dx + \int_a^b P_n(x)h(x)w(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\int_a^b l_k(x)w(x)dx\end{aligned}$$

であり, 示すべき主張が得られた．

(2)

便宜上 $t_i = (m+\frac{i}{2})\Delta t$ と定める．考えている範囲で F のあらゆる偏導関数は有界．
y の t_1 を中心とした Taylor 展開を考えると

$$\begin{aligned}y(t_2) - y(t_0) &= y'(t_1)\Delta t + O(\Delta t^3) \\ y(t_2) + y(t_0) &= 2y(t_1) + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

であり, F についても (t_1, t_1) を中心とした Taylor 展開を考えると

$$F(y(t_2), y(t_0)) = F(y(t_1), y(t_1)) + (y(t_2) - y(t_1))\frac{\partial F}{\partial x_1}(t_1, t_1) + (y(t_0) - y(t_1))\frac{\partial F}{\partial x_2}(t_1, t_1) + O(\Delta t^2)$$

となる．与えられた F の性質から

$$\begin{gathered}y'(t_1) = F(y(t_1), y(t_1)) \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(t_1, t_1) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(t_1, t_1)\end{gathered}$$

が成り立つことをふまえると,

$$R = (y(t_2) + y(t_0) - 2y(t_1))\frac{\partial F}{\partial x_1}(t_1, t_1) + O(\Delta t^2) = O(\Delta t^2)$$

という評価を得る．