

Course Notes EVD2

ir. P.A.C.Ypma

September 2, 2014

Contents

1	Introduction	5
1.1	Planning	5
1.2	Relevant Theory	6
2	Begrippen uit de statistiek	11
2.1	Gemiddelde waarde	11
2.2	Variantie en standaardafwijking	11
2.3	Mediaan	12
2.4	Draaien met matrices	13
3	Operaties in binaire plaatjes	15
3.1	Morphologische operaties	15
4	Programmeeroefeningen	17
5	Matrixrekening	19
5.1	Inleiding	19
5.2	Definities en benamingen	19
5.3	Matrixbewerkingen; matrix-algebra	21
5.3.1	Optellen en aftrekken	21
5.3.2	Vermenigvuldigen met een scalar	21
5.3.3	Vermenigvuldigen van twee matrices	21
5.3.4	Transponeren van een matrix	22
5.3.5	Determinant van een matrix	23
5.3.6	Eigenwaarden van een matrix	25
5.3.7	Bepaling van de inverse van een matrix	26
5.4	Oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen	28
5.5	Matrices en Matlab	29
5.6	Opgaven Matrices	30
6	Berekenen van momenten	33
6.1	Histogrammen	33
6.2	Nulde orde moment; Oppervlakte	33
6.3	Eerste orde momenten; Zwaartepunt	33
6.4	Hogere orde momenten	34
6.5	Positie-onafhankelijke momenten	34
6.6	Schalingsonafhankelijke momenten	34
6.7	Rotatie-onafhankelijke momenten	35
6.8	Matlab simulatie	40

7	Notes on Geometric Optics	43
7.1	Introduction	43
7.2	Object-Image Relations for Lenses	43
7.3	Object-Image Relations for Mirrors	45
7.4	Physical background of light rays	46
7.4.1	Reflection	46
7.4.2	Refraction	47
7.4.3	Parabole Antenna	48
7.4.4	Hyperbolic Lens	49
7.5	Excerzises Geometric Optics	50
8	Illumination	53
A	Uitwerkingen	55
A.1	Opgaven Matrices	55
A.2	Problems chapter 2	57
A.3	Problems chapter 3	61
A.4	Answers chapter 2	66
A.5	Answers chapter 3	69

Chapter 1

Introduction

1.1 Relevant Theory

Book

Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods,
Digital Image Processing, Third Edition,
878-0-13-168728-8,
Prentice Hall

Below is indicated what is irrelevant in this book for the actual course

1. Introduction

3dbu

- 1.1. What Is Digital Image Processing? 1
- 1.2. The Origins of Digital Image Processing 3
- 1.3. Examples of Fields that Use Digital Image Processing 7
 - 1.3.1. Gamma-Ray Imaging 8
 - 1.3.2. X-Ray Imaging 9
 - 1.3.3. Imaging in the Ultraviolet Band 11
 - 1.3.4. Imaging in the Visible and Infrared Bands 12
 - 1.3.5. Imaging in the Microwave Band 18
 - 1.3.6. Imaging in the Radio Band 20
 - 1.3.7. Examples in which Other Imaging Modalities Are Used 20
- 1.4. . Fundamental Steps in Digital Image Processing 25
- 1.5. Components of an Image Processing System 28

2. Digital Image Fundamentals

- 2.1. Elements of Visual Perception 36
 - 2.1.1. Structure of the Human Eye 36
 - 2.1.2. Image Formation in the Eye 38
 - 2.1.3. Brightness Adaptation and Discrimination 39
- 2.2. Light and the Electromagnetic Spectrum 43
- 2.3. Image Sensing and Acquisition 46
 - 2.3.1. Image Acquisition Using a Single Sensor 48
 - 2.3.2. Image Acquisition Using Sensor Strips 48
 - 2.3.3. Image Acquisition Using Sensor Arrays 50
 - 2.3.4. A Simple Image Formation Model 50
- 2.4. Image Sampling and Quantization 52
 - 2.4.1. Basic Concepts in Sampling and Quantization 52
 - 2.4.2. Representing Digital Images 55
 - 2.4.3. Spatial and Intensity Resolution 59
 - 2.4.4. Image Interpolation 65
- 2.5. Some Basic Relationships between Pixels 68
 - 2.5.1. Neighbors of a Pixel 68
 - 2.5.2. Adjacency, Connectivity, Regions, and Boundaries 68
 - 2.5.3. Distance Measures 71
- 2.6. An Introduction to the Mathematical Tools Used in Digital Image Processing 72
 - 2.6.1. Array versus Matrix Operations 72
 - 2.6.2. Linear versus Nonlinear Operations 73
 - 2.6.3. Arithmetic Operations 74
 - 2.6.4. Set and Logical Operations 80
 - 2.6.5. Spatial Operations 85
 - 2.6.6. Vector and Matrix Operations 92
 - 2.6.7. Image Transforms 93
 - 2.6.8. Probabilistic Methods 96

3. Intensity Transformations and Spatial Filtering

- 3.1. Background 105
 - 3.1.1. The Basics of Intensity Transformations and Spatial Filtering 105
 - 3.1.2. About the Examples in This Chapter 107
- 3.2. Some Basic Intensity Transformation Functions 107
 - 3.2.1. Image Negatives 108
 - 3.2.2. Log Transformations 109
 - 3.2.3. Power-Law (Gamma) Transformations 110
 - 3.2.4. Piecewise-Linear Transformation Functions 115
- 3.3. Histogram Processing 120
 - 3.3.1. Histogram Equalization 122
 - 3.3.2. Histogram Matching (Specification) 128
 - 3.3.3. Local Histogram Processing 139
 - 3.3.4. Using Histogram Statistics for Image Enhancement 139
- 3.4. Fundamentals of Spatial Filtering 144
 - 3.4.1. The Mechanics of Spatial Filtering 145
 - 3.4.2. Spatial Correlation and Convolution 146
 - 3.4.3. Vector Representation of Linear Filtering 150
 - 3.4.4. Generating Spatial Filter Masks 151
- 3.5. Smoothing Spatial Filters 152
 - 3.5.1. Smoothing Linear Filters 152
 - 3.5.2. Order-Statistic (Nonlinear) Filters 156
- 3.6. Sharpening Spatial Filters 157
 - 3.6.1. Foundation 158
 - 3.6.2. Using the Second Derivative for Image Sharpening-The Laplacian 160
 - 3.6.3. Unsharp Masking and Highboost Filtering 162
 - 3.6.4. Using First-Order Derivatives for (Nonlinear) Image Sharpening-The Gradient 165
- 3.7. Combining Spatial Enhancement Methods 169
- 3.8. Using Fuzzy Techniques for Intensity Transformations and Spatial Filtering 173
 - 3.8.1. Introduction 173
 - 3.8.2. Principles of Fuzzy Set Theory 174
 - 3.8.3. Using Fuzzy Sets 178
 - 3.8.4. Using Fuzzy Sets for Intensity Transformations 186
 - 3.8.5. Using Fuzzy Sets for Spatial Filtering 189

4. Filtering in Frequency Domain

- 4.1. Background 200
 - 4.1.1. A Brief History of the Fourier Series and Transform 200
 - 4.1.2. About the Examples in this Chapter 201
- 4.2. Preliminary Concepts 202
 - 4.2.1. Complex Numbers 202
 - 4.2.2. Fourier Series 203
 - 4.2.3. Impulses and Their Sifting Property 203
 - 4.2.4. The Fourier Transform of Functions of One Continuous Variable 205
 - 4.2.5. Convolution 209
- 4.3. Sampling and the Fourier Transform of Sampled Functions 211
 - 4.3.1. Sampling 211
 - 4.3.2. The Fourier Transform of Sampled Functions 212
 - 4.3.3. The Sampling Theorem 213
 - 4.3.4. Aliasing 217
 - 4.3.5. Function Reconstruction (Recovery) from Sampled Data 219
- 4.4. The Discrete Fourier Transform (DFT) of One Variable 220
 - 4.4.1. Obtaining the DFT from the Continuous Transform of a Sampled Function 221
 - 4.4.2. Relationship Between the Sampling and Frequency Intervals 223
- 4.5. to Functions of Two Variables 225
 - 4.5.1. The 2-D Impulse and Its Sifting Property 22
 - 4.5.2. The 2-D Continuous Fourier Transform Pair 226
 - 4.5.3. Two-Dimensional Sampling and the 2-D Sampling Theorem 227
 - 4.5.4. Aliasing in Images 228
 - 4.5.5. The 2-D Discrete Fourier Transform and Its Inverse 235
- 4.6. Some Properties of the 2-D Discrete Fourier Transform 236
 - 4.6.1. Relationships Between Spatial and Frequency Intervals 236
 - 4.6.2. Translation and Rotation 236
 - 4.6.3. Periodicity 237

4.6.4.	Symmetry Properties	239
4.6.5.	Fourier Spectrum and Phase Angle	245
4.6.6.	The 2-D Convolution Theorem	249
4.6.7.	Summary of 2-D Discrete Fourier Transform Properties	253
4.7.	The Basics of Filtering in the Frequency Domain	255
4.7.1.	Additional Characteristics of the Frequency Domain	255
4.7.2.	Frequency Domain Filtering Fundamentals	257
4.7.3.	Summary of Steps for Filtering in the Frequency Domain	263
4.7.4.	Correspondence Between Filtering in the Spatial and Frequency Domains	263
4.8.	Image Smoothing Using Frequency Domain Filters	269
4.8.1.	Ideal Lowpass Filters	269
4.8.2.	Butterworth Lowpass Filters	273
4.8.3.	Gaussian Lowpass Filters	276
4.8.4.	Additional Examples of Lowpass Filtering	277
4.9.	Image Sharpening Using Frequency Domain Filters	280
4.9.1.	Ideal Highpass Filters	281
4.9.2.	Butterworth Highpass Filters	284
4.9.3.	Gaussian Highpass Filters	285
4.9.4.	The Laplacian in the Frequency Domain	286
4.9.5.	Unsharp Masking, Highbost Filtering, and High-FrequencyEmphasis Filtering	288
4.9.6.	Homomorphic Filtering	289
4.10.	Selective Filtering	294
4.10.1.	Bandreject and Bandpass Filters	294
4.10.2.	Notch Filters	294
4.11.	Implementation	298
4.11.1.	Separability of the 2-D DFT	298
4.11.2.	Computing the IDFT Using a DFT Algorithm	299
4.11.3.	The Fast Fourier Transform (FFT)	299
4.11.4.	Some Comments on Filter Design	303
5.	Image Restoration and Reconstruction	
	N.A.	
6.	Color Image Processing	
6.1.	Color Fundamentals	395
6.2.	Color Models	401
6.2.1.	The RGB Color Model	402
6.2.2.	The CMY and CMYK Color Models	406
6.2.3.	The HSI Color Model	407
6.3.	Pseudocolor Image Processing	414
6.3.1.	Intensity Slicing	415
6.3.2.	Intensity to Color Transformations	418
6.4.	Basics of Full-Color Image Processing	424
6.5.	Color Transformations	426
6.5.1.	Formulation	426
6.5.2.	Color Complements	430
6.5.3.	Color Slicing	431
6.5.4.	Tone and Color Corrections	433
6.5.5.	Histogram Processing	438
6.6.	Smoothing and Sharpening	439
6.6.1.	Color Image Smoothing	439
6.6.2.	Color Image Sharpening	442
6.7.	Image Segmentation Based on Color	443
6.7.1.	Segmentation in HSI Color Space	443
6.7.2.	Segmentation in RGB Vector Space	445
6.7.3.	Color Edge Detection	447
6.8.	Noise in Color Images	451
6.9.	Color Image Compression	454
7.	Wavelet and Multiresolution Processing	
	N.A.	
8.	Image Compression.	
	N.A.	

9. Morphologic Image Processing

- 9.1. Preliminaries 628
- 9.2. Erosion and Dilation 630
 - 9.2.1. Erosion 631
 - 9.2.2. Dilation 633
 - 9.2.3. Duality 635
- 9.3. Opening and Closing 635
- 9.4. The Hit-or-Miss Transformation 640
- 9.5. Some Basic Morphological Algorithms 642
 - 9.5.1. Boundary Extraction 642
 - 9.5.2. Hole Filling 643
 - 9.5.3. Extraction of Connected Components 645
 - 9.5.4. Convex Hull 647
 - 9.5.5. Thinning 649
 - 9.5.6. Thickening 650
 - 9.5.7. Skeletons 651
 - 9.5.8. Pruning 654
 - 9.5.9. Morphological Reconstruction 656
 - 9.5.10. Summary of Morphological Operations on Binary Images 664
- 9.6. Gray-Scale Morphology 665
 - 9.6.1. Erosion and Dilation 666
 - 9.6.2. Opening and Closing 668
 - 9.6.3. Some Basic Gray-Scale Morphological Algorithms 670
 - 9.6.4. Gray-Scale Morphological Reconstruction 676

10. Image Segmentation

- 10.1. Fundamentals 690
- 10.2. Point, Line, and Edge Detection 692
 - 10.2.1. Background 692
 - 10.2.2. Detection of Isolated Points 696
 - 10.2.3. Line Detection 697
 - 10.2.4. Edge Models 700
 - 10.2.5. Basic Edge Detection 706
 - 10.2.6. More Advanced Techniques for Edge Detection 714
 - 10.2.7. Edge Linking and Boundary Detection 725
- 10.3. Thresholding 738
 - 10.3.1. Foundation 738
 - 10.3.2. Basic Global Thresholding 741
 - 10.3.3. Optimum Global Thresholding Using Otsu's Method 742
 - 10.3.4. Using Image Smoothing to Improve Global Thresholding 747
 - 10.3.5. Using Edges to Improve Global Thresholding 749
 - 10.3.6. Multiple Thresholds 752
 - 10.3.7. Variable Thresholding 756
 - 10.3.8. Multivariable Thresholding 761
- 10.4. Region-Based Segmentation 763
 - 10.4.1. Region Growing 763
 - 10.4.2. Region Splitting and Merging 766
- 10.5. Segmentation Using Morphological Watersheds 769
 - 10.5.1. Background 769
 - 10.5.2. Dam Construction 772
 - 10.5.3. Watershed Segmentation Algorithm 774
 - 10.5.4. The Use of Markers 776
- 10.6. The Use of Motion in Segmentation 778
 - 10.6.1. Spatial Techniques 778
 - 10.6.2. Frequency Domain Techniques 782

11. Representation and Description

- 11.1. Representation 796
 - 11.1.1. Boundary (Border) Following 796
 - 11.1.2. Chain Codes 798
 - 11.1.3. Polygonal Approximations Using Minimum-Perimeter Polygons 801
 - 11.1.4. Other Polygonal Approximation Approaches 807
 - 11.1.5. Signatures 808
 - 11.1.6. Boundary Segments 810
 - 11.1.7. Skeletons 812
- 11.2. Boundary Descriptors 815
 - 11.2.1. Some Simple Descriptors 815

- 11.2.2. Shape Numbers 816
 - 11.2.3. Descriptors 818
 - 11.2.4. Statistical Moments 821
- 11.3. Regional Descriptors 822
 - 11.3.1. Some Simple Descriptors 822
 - 11.3.2. Topological Descriptors 823
 - 11.3.3. Texture 827
 - 11.3.4. Moment Invariants 839
- 11.4. Use of Principal Components for Description 842
- 11.5. Relational Descriptors 852
- 12. **Object Recognition**
 - 12.1. Patterns and Pattern Classes 861
 - 12.2. Recognition Based on Decision-Theoretic Methods 866
 - 12.2.1. Matching 866
 - 12.2.2. Optimum Statistical Classifiers 872
 - 12.2.3. Neural Networks 882
 - 12.3. Structural Methods 903
 - 12.3.1. Matching Shape Numbers 903
 - 12.3.2. String Matching 904

Chapter 2

Begrippen uit de statistiek

We beperken ons tot eindige verzamelingen van getallen. Plaatjes bijvoorbeeld bestaan bijvoorbeeld uit een set van $M \times N$ getallen. Van deze set gaan we dan statistische grootheden onderzoeken. We doen dat aan de hand van een rij getallen f . Een voorbeeld van f kan zijn $[0, -1, 100, 2, 7, \pi, 23]$. Ieder getal apart kunnen we benoemen met een index. In ons voorbeeld is $f_2 = -1$. Het totale aantal getallen in de set noemen we K (in ons voorbeeld geldt $K = 7$).

2.1 Gemiddelde waarde

De eerste grootheid die gebruikt wordt is de gemiddelde waarde (mean value)

$$\bar{f}_K = \frac{1}{K}(f_1 + f_2 + \dots + f_K) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K f_i$$

Als K steeds groter wordt dan zal het laatste getal steeds minder invloed hebben op de waarde van \bar{f} . Dat is de basis van statistische overwegingen. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat de rij van getallen is ontstaan door het herhalen van een experiment. Bij de uitkomst van dit experiment wordt maar één getal verwacht, maar door de praktijk zal altijd het waargenomen getal wat of behoorlijk wat afwijken. Het axioma is dan dat als we het experiment maar vaak genoeg herhalen en steeds weer opnieuw \bar{f}_K bepalen uit het tot dan toe gedane experimenten, we uiteindelijk uitkomen op die verwachtingswaarde. In wiskundige termen luidt dit axioma

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \bar{f}_K = E(f)$$

waarbij $E(f)$ de verwachtingswaarde (expectation value) van het experiment is

2.2 Variantie en standaardafwijking

De kwaliteit van het experiment is te meten door vast te stellen in hoeverre de meetgetallen f_i blijven afwijken van de verwachtingswaarde. We gebruiken hiervoor de variantie (variance)

$$v_K = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (f_i - \bar{f}_K)^2$$

Met wat rekenen valt na te gaan dat

$$v_K = \overline{f^2}_K - (\bar{f}_K)^2$$

waarin

$$\overline{f^2}_K = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K f_i^2$$

Het statistische axioma dat hiermee samenhangt kunnen we dan formuleren als

$$E \left((f - E(f))^2 \right) = E(f^2) - (E(f))^2$$

Een bekendere grootheid is de standaardafwijking σ_K (standard deviation) die direct gerelateerd is met de variantie door

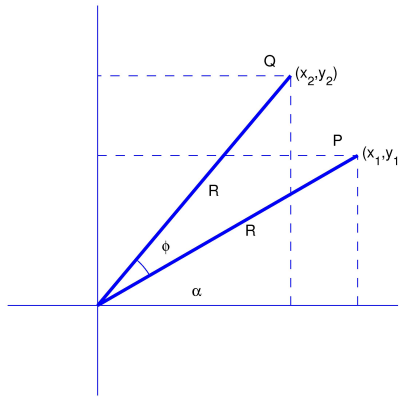
$$v_K = \sigma_K^2$$

2.3 Mediaan

Om de mediaan te bepalen sorteren we de getallen op grootte. Het waarde van het getal dat ‘midden’ in de rij staat, noemen we de mediaan. Is het aantal waarnemingen oneven, dan kan dat. Als het aantal even is valt het ‘midden’ tussen 2 getallen in. We nemen dan voor de mediaan het gemiddelde van de 2 getallen die meteen naast het ‘midden’ staan. We geven de mediaan van de getallenreeks f aan met \tilde{f}

Beschouw de rij $f = [1, 4, 9, 16, 25]$ dan is daarvan de gemiddelde waarde $\mu = 11$, de variantie $v = 74, 8$, de standaardafwijking $\sigma = 8, 65$ en de mediaan $\tilde{f} = 9$

2.4 Draaien met matrices



In deze tekening wordt punt Q gevonden door punt P te draaien over een hoek ϕ . Het beste is te starten met de complexe weergaven:

$$z_P = x_1 + j y_1 (= R \cos \alpha + j R \sin \alpha) = R e^{j \alpha} \quad (2.1)$$

en

$$z_Q = x_2 + j y_2 (= R \cos(\alpha + \phi) + j R \sin(\alpha + \phi)) = R e^{j(\alpha + \phi)} = R e^{j \alpha} \cdot e^{j \phi} \quad (2.2)$$

Uit deze 2 vergelijkingen kunnen we door substitutie het volgende afleiden

$$x_2 + j y_2 = (x_1 + j y_1) \cdot e^{j \phi} = (x_1 + j y_1) \cdot (\cos \phi + j \sin \phi) = x_1 \cos \phi - y_1 \sin \phi + j(x_1 \sin \phi + y_1 \cos \phi) \quad (2.3)$$

dus apart voor de coördinaten

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \phi - y_1 \sin \phi \\ y_2 &= x_1 \sin \phi + y_1 \cos \phi\end{aligned}\tag{2.4}$$

Dit kan je overzichtelijker in een matrix zetten:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\tag{2.5}$$

Chapter 3

Operaties in binaire plaatjes

3.1 Morphologische operaties

We nemen aan dat de pixels met de waarde 1 (true) het object zijn en de pixels met de waarde 0 (false) de achtergrond.

1. Samenvoegen

$$C = A \cup B \Leftrightarrow C(x, y) = A(x, y) \vee B(x, y)$$

2. Doorsnijden

$$C = A \cap B \Leftrightarrow C(x, y) = A(x, y) \wedge B(x, y)$$

3. Complement

$$C = A^c \Leftrightarrow C(x, y) = \neg A(x, y)$$

4. Dilatie

Punt (x,y) wordt deel van het object als in de omgeving B van (x,y) een deel van het object aanwezig is. Notatie

$$C = A \oplus B$$

Te berekenen a.v.: $C(x, y) = (b_1 | b_2 | \dots == \text{true})$. B wordt beschreven d.m.v. een structuring element (zie boek)

5. Erosie

Punt (x,y) wordt deel van de achtergrond als in de omgeving B van (x,y) een deel van de achtergrond aanwezig is. Notatie

$$A \ominus B$$

Te berekenen a.v.: $C(x, y) = (\neg b_1 | \neg b_2 | \dots == \text{true})$ of ook $C(x, y) = (b_1 \wedge b_2 \wedge \dots == \text{false})$

6. Hole Filling

Dit wordt gedaan met een iteratief proces.

Start met een leeg "plaatje" X_0 even groot als A, waarbij voor een pixel binnen iedere hole van A een "1" gezet is op de overeenkomstige pixel in X_0 .

Bereken dan vervolgens

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Het proces kan gestopt worden als $X_k == X_{k-1}$

Ik heb (nog) geen slim algoritme gevonden die holes kunnen aanwijzen, zodat X_0 automatisch gegenereerd kan worden.

Chapter 4

Programmeeroefeningen

De bedoeling is steeds C++ te gebruiken. Testen is mogelijk in Matlab.

Gemiddelde waarde

Gegeven een reeks getallen a_i die random waarden hebben tussen 0 en 255 ($0 \leq a_i < 256$). Schrijf een programma dat de gemiddelde waarde van deze reeks bepaalt. Mathematisch luidt de formule

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i$$

Hierbij is N de lengte van de reeks.

Programmeertechnisch zul je te maken krijgen met overflow of te grote afrondingen. Realiseer een programma voor een 8 bits processor terwijl de getallen zijn opgeslagen in een extern geheugen. Ga na wat het effect is van de grootte van N .

Optimaliseren lineair filteren

In § 3.4.3 in het boek wordt uitgelegd wat filteren is. Implementeer een filter routine met de volgende eisen:

1. masker maximaal 5×5
2. masker heeft symmetrieën
3. plaatje maximaal $800 \times 600 \times 3 \times 8$ bit
4. werkgeheugen processor 1Mbyte
5. woordlengte processor 16 bit
6. minimaliseer de rekestijd

Berekenen momenten

Zie § 6 van deze notes. Maak een routine met de volgende eisen:

1. de volgende momenten moeten berekend worden:
 - 1.1. zwaartepunt
 - 1.2. "grootte" in x - en y - richting
 - 1.3. oriëntatie
2. plaatje is binair en maximaal 800×600
3. werkgeheugen processor 1Mbyte
4. woordlengte processor 16 bit
5. minimaliseer de rekestijd

Panorama

Dit is een probleem van een andere orde. Het gaat erom dat er van 1 standpunt opnames zijn gemaakt van een vergezicht steeds onder een andere hoek en dat van deze opnames een zeer brede foto berekend wordt waarin zo naadloos mogelijk de verschillende opnames 'aan elkaar geplakt' zijn.

Morphen

Maak routines die zowel in in C++, Visual C als C# te gebruiken zijn die de volgende bewerkingen uitvoeren op binaire plaatjes:

1. Dilatie
2. Erosie
3. Opening
4. Closing
5. Hole filling

Test deze op de plaatjes munten.tif en rijstkorrels.tif. Je moet zelf via thresholding hier binaire plaatjes van maken

objecten analyse

Gebruik visionlab of matlab om uit de plaatjes munten.tif en rijstkorrels.tif de volgende informatie te halen

- munten:
aantal munten, per munt grootte, positie en kleur
- rijstkorrels:
aantal, histogrammen voor grootte en een histogram voor de orientatie

Chapter 5

Matrixrekening

5.1 Inleiding

Het begrip matrix is voor Matlab de basis. Het is niets voor niets de afkorting voor ‘Matrix Laboratory’. Veel zal voor zich spreken. Een paar zaken worden pas duidelijk in toepassingen die (nog) niet in deze reader behandeld worden.

Daarom kan §5.3.6 worden overgeslagen

5.2 Definities en benamingen

Een matrix is een rechthoekige rangschikking van zogenaamde elementen. Deze elementen kunnen getallen, functies, operatoren e.d. zijn.

De elementen van de matrix staan in rijen en in kolommen. Zijn er p rijen en q kolommen, dan spreken we van een $p \times q$ -matrix, of ‘ p bij q ’-matrix; $p \times q$ is de afmeting, het formaat of de dimensie van de matrix.

Bij een $n \times n$ -matrix noemen we n de orde van de matrix.

De rangschikking van de elementen in de matrix staat tussen haken; de matrix zelf wordt met een vetgedrukte letter aangeduid

voorbeeld 1

$$\begin{array}{rcll} \text{kolom} & : & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \mathbf{A} & = & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \Leftarrow \text{rij 1} \\ \Leftarrow \text{rij 2} \\ \Leftarrow \text{rij 3} \end{array} \end{array}$$

In dit voorbeeld is de matrix A een 3×4 -matrix, er zijn immers 3 rijen en 4 kolommen.

De rijen worden van boven naar beneden en de kolommen van links naar rechts genummerd. De algemene notatie van een $p \times q$ -matrix wordt daarmee als volgt:

voorbeeld 2

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \dots & e_{1q} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & \dots & e_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{p1} & e_{p2} & e_{p3} & \dots & e_{pq} \end{pmatrix}$$

De indices van de elementen geven aan tot welke rij, respectievelijk tot welke kolom het element behoort.

Indien een matrix slechts één kolom heeft en meer dan één rij, dan wordt de matrix aangeduid als kolomvector. Bevat de kolomvector n elementen, dan noemen we dit een n -dimensionele vector. In voorbeeld 3 is een vierdimensionele kolomvector aangegeven; de kolomindex wordt nu weggelaten.

voorbeeld 3

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Nu we de opbouw van matrices hebben vastgelegd komen vervolgens enkele eigenschappen aan de orde.

Eigenschap 1

Twee matrices zijn aan elkaar gelijk indien alle overeenkomstige elementen aan elkaar gelijk zijn en de matrices het zelfde formaat hebben.

Eigenschap 2

Een vierkante matrix heeft evenveel rijen als kolommen.

Eigenschap 3

Een matrix O waarvan alle elementen gelijk aan nul zijn heet een nulmatrix.

Eigenschap 4

Een diagonaalmatrix is een vierkante matrix, waarvan alle elementen die niet op de hoofddiagonaal liggen, nul zijn.

Eigenschap 5

De eenheidsmatrix \mathbf{I} is een diagonaalmatrix waarvan alle elementen op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 1.

Eigenschap 6

De getransponeerde matrix \mathbf{A}^T van een matrix \mathbf{A} wordt verkregen door in de matrix \mathbf{A} de i -de rij tot de i -de kolom te maken.

Eigenschap 7

Een symmetrische matrix is een matrix waarvan voor elk element geldt: $e_{ij} = e_{ji}$.

Hierna worden de meest elementaire matrixbewerkingen behandeld waarbij gebruik wordt gemaakt van de hiervoor genoemde eigenschappen.

5.3 Matrixbewerkingen; matrix-algebra

5.3.1 Optellen en aftrekken

De som van twee matrices A en B is een matrix S waarvan elk element bestaat uit de optelling van de overeenkomstige elementen van matrices A en B . Voorwaarde is dat beide matrices A en B hetzelfde formaat hebben. Er geldt dus:

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & \dots & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1q} + b_{1q} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & \dots & a_{2q} + b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} + b_{p1} & \dots & \dots & a_{pq} + b_{pq} \end{pmatrix}$$

Voor het verschil van twee matrices geldt eenzelfde definitie, nu worden overeenkomstige elementen van elkaar afgetrokken.

Voor de optel- en aftrekprocedure bij meer dan twee matrices geldt de associatieve eigenschap 9:

Eigenschap 8

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \pm \mathbf{C} = \mathbf{A} \pm (\mathbf{B} \pm \mathbf{C})$$

Het maakt dus niet uit in welke combinatie of in welke volgorde wordt opgeteld of afgetrokken.

5.3.2 Vermenigvuldigen met een scalar

Indien een matrix wordt vermenigvuldigd met een scalaire grootte wordt elk element met deze grootte vermenigvuldigd. Er geldt dus:

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1q} \\ \lambda a_{21} & \dots & \dots & \lambda a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{p1} & \dots & \dots & \lambda a_{pq} \end{pmatrix}$$

Voor het delen van een matrix door een scalar geldt eenzelfde definitie. Nu wordt elk element gedeeld door deze scalar.

5.3.3 Vermenigvuldigen van twee matrices

De matrix \mathbf{B} kan alleen dan met matrix \mathbf{A} worden vermenigvuldigd indien het aantal kolommen van matrix \mathbf{A} gelijk is aan het aantal rijen van matrix \mathbf{B} . Als de dimensie van \mathbf{A} gelijk is aan $m \times n$ moet de dimensie van \mathbf{B} gelijk zijn aan $n \times p$. Het resultaat van de vermenigvuldiging $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ is dan een $m \times p$ -matrix. Alleen bij een vierkante matrix zijn zowel $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ als $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gedefinieerd. Let erop dat dan de volgorde bepalend is, dus : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Voor elk element van de produktmatrix \mathbf{C} geldt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{met : } i = 1, 2, \dots, m \quad \text{en} \quad j = 1, 2, \dots, p$$

voorbeeld 4

$m = 3, n = 2, p = 4$

A is een 3×2 -matrix, B is een 2×4 -matrix, C is een 3×4 -matrix

$$c_{11} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$c_{34} = \sum_{k=1}^2 a_{3k} \cdot b_{k4} = a_{31} \cdot b_{14} + a_{32} \cdot b_{24}$$

Elk element c_{ij} van de produktmatrix ontstaat dus uit de sommatie van de produkten van de elementen van rij i met de overeenkomstige elementen van kolom j .

voorbeeld 5

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 7 - 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 6 \cdot 1 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 31 \\ 8 & 19 \\ 17 & 16 \end{pmatrix}$$

Voor de vermenigvuldiging van meer dan twee matrices geldt de associatieve eigenschap 10.

Eigenschap 9

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

Tevens geldt de distributieve eigenschap 11.

Eigenschap 10

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad \text{en} \\ \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Eigenschap 11

De geïnverteerde matrix \mathbf{A}^{-1} van de matrix \mathbf{A} is die matrix waarvoor geldt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

5.3.4 Transponeren van een matrix

De getransponeerde matrix \mathbf{A}^T van de matrix \mathbf{A} ontstaat door in de matrix \mathbf{A} de rijen en kolommen te verwisselen. De dimensie $m \times n$ van de matrix \mathbf{A} verandert in de dimensie $n \times m$ van \mathbf{A}^T .

voorbeeld 6

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Het zal duidelijk zijn dat nu ook eigenschap 12 geldt:

Eigenschap 12

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

Eigenschap 13

Een matrix waarvoor geldt $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ wordt een symmetrische matrix genoemd.

Een belangrijke regel bij het transponeren van een produkt van twee matrices geeft eigenschap 14.

Eigenschap 14

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

5.3.5 Determinant van een matrix

We definiëren eerst de determinant van een vierkante matrix met 2 rijen en 2 kolommen. Hiervoor geldt

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

De determinant van een uitgebreidere maar wel vierkante matrix wordt als volgt bepaald:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \mathbf{M}_{11} - a_{12} \cdot \mathbf{M}_{12} + a_{13} \cdot \mathbf{M}_{13} + \dots + (-1)^{1+k} \cdot a_{1k} \cdot \mathbf{M}_{1k} + \dots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \mathbf{M}_{1n} \end{aligned}$$

In bovenstaande formule zijn \mathbf{M}_{1k} zogenaamde onderdeterminanten of minoren. Dit zijn determinanten van matrices die ontstaan als in de matrix \mathbf{A} de eerste rij en de k -de kolom worden weggelaten. Hierbij wordt een ontwikkeling naar de eerste rij toegepast. Er kan ook worden ontwikkeld naar een andere rij, dit kan interessant zijn indien bijvoorbeeld een rij veel elementen met waarde nul bevat. Het rekenwerk kan dan aanzienlijk worden gereduceerd. Zijn de matrices in de onderdeterminanten nog groter dan 2×2 , dan moet nogmaals een ontwikkeling volgens een der rijen in deze matrices plaatsvinden. Zodra de minoren alle matrices bevatten van het formaat 2×2 , dan kan de uiteindelijke determinant worden uitgerekend.

voorbeeld 7

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + \\ &\quad a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + \\ &\quad a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{aligned}$$

Zoals uit dit voorbeeld blijkt, moet goed worden gelet op het teken dat geplaatst wordt bij de elementen uit de rij waarnaar wordt ontwikkeld. Steeds geldt dat indien de som van de beide indices van het element even is, het teken plus is en anders min.

voorbeeld 8

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

We ontwikkelen eerst naar de eerste rij, dit geeft:

$$\begin{aligned} &= -1 \left(-2 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) + 2 \left(1 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) - 3 \left(1 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2(7 \cdot 6 - 5 \cdot 2) + 2(7 \cdot 3 - 4 \cdot 2) - 4(7 \cdot 1 - 6 \cdot 2) - 3(7 \cdot 6 - 5 \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 32 + 2 \cdot 13 + 4 \cdot 5 - 3 \cdot 32 = 14 \end{aligned}$$

Een betere keus is de ontwikkeling naar de derde rij omdat hierin twee elementen de waarde nul hebben. We vinden dan:

$$\begin{aligned} |A| &= -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -1 \left(-2 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) - 2 \left(-1 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2(7 \cdot 3 - 4 \cdot 2) - 3(7 \cdot 6 - 5 \cdot 2) + 2(7 \cdot 6 - 2 \cdot 5) - 4(7 \cdot 1 - 6 \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 13 - 3 \cdot 32 + 2 \cdot 32 + 4 \cdot 5 = 14 \end{aligned}$$

Eigenschap 15

De determinant van een diagonaalmatrix heeft de waarde van het produkt van de elementen van de hoofddiagonaal.

voorbeeld 9

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Eigenschap 16

Een singuliere matrix heeft een determinant die de waarde nul heeft, anders heet de matrix regulier.

voorbeeld 10

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(4 - 1) - 3(-2 + 1) = 0$$

Deze matrix is dus singulier.

Enkele belangrijke regels die soms veel werk kunnen besparen bij het bepalen van determinanten zijn de eigenschappen 17, 18 en 19.

Eigenschap 17

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$$

Eigenschap 18

$$|\lambda \cdot \mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}|, n \text{ is de orde van } \mathbf{A}$$

Eigenschap 19

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Zoals we reeds meerdere malen zagen is het voor het bepalen van de determinant gunstig te ontwikkelen naar een zogenaamde rij met zoveel mogelijk nullen, zie voorbeeld 8.

Een belangrijke eigenschap die kan bijdragen tot vergroting van het aantal nullen in een rij of kolom van een matrix waarvan de determinant moet worden bepaald is

Eigenschap 20

Een determinant behoudt dezelfde waarde indien we een rijvector vermeerderen met een aantal malen een andere rijvector. Voor de kolomvectoren geldt dezelfde eigenschap.

Indien eigenschap 20 wordt toegepast voor het vergroten van het aantal nullen in rijen en/of kolommen, noemen we dit het schoonvegen van rijen en/of kolommen.

5.3.6 Eigenwaarden van een matrix**definitie**

De eigenwaarden λ van een matrix A zijn de oplossingen van de vergelijking:

$$|\lambda \cdot I - A| = 0$$

voorbeeld 11

Bepaald wordt de eigenwaarden van \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

We nemen ook voor \mathbf{I} een vierkante matrix van de orde 3, daarmee wordt gesteld:

$$\mathbf{P} = \lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{pmatrix}$$

Vervolgens wordt:

$$|P| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & \lambda + 6 \end{vmatrix} &= \lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 11) + 1(6) \\ &= \lambda^3 + 6\lambda + 11\lambda + 6 = 0 \\ &\iff (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgen de eigenwaarden: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ en $\lambda_3 = -3$.

5.3.7 Bepaling van de inverse van een matrix

Voor de inverse matrix \mathbf{A}^{-1} van matrix \mathbf{A} geldt volgens eigenschap 8:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Eisen voor het bestaan van de inverse matrix zijn dat de oorspronkelijke matrix vierkant is en niet-singulier. Voor de inverse matrix \mathbf{A}^{-1} van matrix \mathbf{A} geldt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & -\mathbf{M}_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\mathbf{M}_{n1} \\ -\mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{22} & \dots & (-1)^{n+2}\mathbf{M}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{1+n}\mathbf{M}_{1n} & \dots & \dots & (-1)^{2n}\mathbf{M}_{nn} \end{pmatrix}$$

Recept

voor het bepalen van de inverse van een matrix

- Vervang elk element van A door de bij dat element behorende onderdeterminant.
- Zorg voor het goede teken bij deze onderdeterminant, als de som van de indices van het element oneven is, dan een minteken, anders een plusteken.
- Verwissel daarna de rijen en kolommen.
- Deel elk element door de onderdeterminant van de oorspronkelijke matrix.

voorbeeld 12

Bepaal \mathbf{A}^{-1} , indien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

We bepalen eerst de determinant van \mathbf{A} , ter controle of de matrix niet singulier is:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2 + 2) + 1(3 - 2) = 9$$

Vervolgens bepalen we voor elk element van A de onderdeterminant:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, & \mathbf{M}_{12} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & \mathbf{M}_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \\ \mathbf{M}_{21} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & \mathbf{M}_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & \mathbf{M}_{23} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ \mathbf{M}_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, & \mathbf{M}_{32} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4, & \mathbf{M}_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \end{aligned}$$

Dan wordt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -(-1) & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ -5 & -(-1) & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

Soms kan men voor de bepaling van de inverse van een produkt van twee matrices gebruik maken van

Eigenschap 21

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Bij een 2×2 -matrix kan de inversie-procedure op dezelfde wijze worden uitgevoerd als hiervoor beschreven. In plaats van de bij elk element behorende minoren neemt men dan het overblijvende element.

voorbeeld 13

Bepaal \mathbf{A}^{-1} , indien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = -1 - 2 = -3 \quad \text{en} \quad M_{11} = -1, \quad M_{12} = 2, \quad M_{21} = 1, \quad M_{22} = 1$$

dus wordt:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Controle van dit resultaat levert:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4 Oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen

Als \mathbf{A} een $m \times n$ -matrix is, dan is $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden (x_1 t/m x_n), en wel een 'inhomogeen' stelsel als $\mathbf{b} \neq 0$ en een 'homogeen' stelsel als $\mathbf{b} = 0$.

Eigenschap 22

Als \mathbf{A} een onderdeterminant ongelijk aan 0 van orde r heeft en geen onderdeterminant ongelijk aan 0 van orde $> r$, dan heet r de rang van \mathbf{A} .

voorbeeld 14

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

De rang van \mathbf{A} is 2, want

$$|\mathbf{A}| = 0, \quad \text{maar} \quad |\mathbf{M}_{13}| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Eigenschap 23

Als r de rang van \mathbf{A} is, dan heeft deze matrix r onderling onafhankelijke rijen (kolommen), waarvan de eventuele andere rijen (kolommen) afhankelijk zijn.

In het bijzonder geldt, dat als $|\mathbf{A}| = 0$, de rang van \mathbf{A} kleiner is dan de orde van \mathbf{A} , dus dan heeft \mathbf{A} afhankelijke rijen.

Eigenschap 24

Als \mathbf{A} een $k \times n$ matrix is, terwijl de rang van \mathbf{A} gelijk is aan r en $r < n$, dan heeft $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ juist $n - r$ onderling onafhankelijke oplossingen, waar alle andere oplossingen dus lineaire combinaties van zijn.

voorbeeld 15

Gegeven het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \quad \text{ofwel :} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{afgekort :} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$|\mathbf{A}| = 7$, dus de matrix is niet-singulier; de rang is 3. Er is dus slechts 1 oplossing van dit stelsel. Door vegen (zelf uitvoeren) of door te berekenen $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ volgt dat deze ene oplossing is:

$$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 9$$

5.5 Matrices en Matlab

invoeren van een matrix:	<code>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]</code>
nulmatrix:	<code>O=zeros(3,3)</code>
eenheidsmatrix:	<code>I=eye(3)</code>
vermenigvuldigen met een scalar:	<code>B=5*A</code>
optellen:	<code>C=A+B</code>
getransponeerde matrix:	<code>AT=A'</code>
determinant:	<code>d=det(A)</code>
inverse:	<code>Ainv=A^(-1)</code>
kolomvector:	<code>b=[10,11,12]'</code>
oplossen van $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$:	<code>x=A\b</code>
matrixvermenigvuldiging:	<code>C=A*B</code> aantal kolommen in A = aantal rijen in B
punt vermenigvuldiging:	<code>C=A.*B</code> voor iedere i en j wordt berekend $c_{i,j} = a_{i,j} \cdot b_{i,j}$ A en B moeten even 'groot' zijn!
punt deling:	<code>C=A./B</code> B mag geen nul bevatten !
punt machtsverheffen:	<code>C=A.^B</code>

5.6 Opgaven Matrices

- E 1.**
- Voor welke bijzondere matrix geldt $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$?
 - Een afstandentabel kan worden genoteerd als een symmetrische matrix. Geef hiervan een voorbeeld.

E 2. Gegeven:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 11 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 4$$

Bereken:

- $\lambda \cdot (A + C)$
- $A - C$
- $C \cdot A$ en $A \cdot C$
- de matrix D indien geldt: $2A - C - D = 0$
- $B^T \cdot C$

E 3. Gegeven:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Laat zien dat eigenschap 14 geldt.

E 4. Gegeven:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Bepaal $|A|$ eerst door ontwikkeling volgens de eerste rij en daarna door ontwikkeling naar de derde rij.

Wat is het bijzondere aan deze matrix?

E 5. Gegeven:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 12 \\ 7 & -2 & 8 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bepaal de determinant van B .

E 6. Gegeven:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Bepaal de determinant van D .

E 7. Laat zien dat matrix P singulier is als geldt:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 13 & -5 \end{pmatrix}$$

E 8. Maak gebruik van eig. 17 bij het berekenen van de determinant van de matrix Q , als geldt:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

E 9. Maak gebruik van eig. 18 bij het bepalen van de determinant van de matrix R :

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 20 & -8 & 0 \\ 8 & 28 & 16 \end{pmatrix}$$

E 10. Maak gebruik van eig. 19 bij het bepalen van de determinant van de matrix A^2 , indien geldt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

E 11. Gegeven:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 12 & 9 \\ 0 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Bepaal de determinant van B door te ontwikkelen naar de eerste rij, waarbij eerst door schoonvegen in deze rij twee nullen zijn ontstaan.

E 12. Bepaal de eigenwaarden van matrix C :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

E 13. Gegeven:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Bepaal D^{-1} en F^{-1} en controleer het resultaat.

E 14. Gegeven:

$$\begin{aligned} 2x &- 3y &+ 4z &= 1 \\ 3x &- y &+ 2z &= 2 \\ x &+ y &+ z &= -1 \end{aligned}$$

- Is dit een afhankelijk stelsel vergelijkingen?
- Bereken de oplossing(en) van dit stelsel.

Chapter 6

Berekenen van momenten

We gaan uit van een binair $M \times N$ plaatje $f(x, y)$. f kan dus alleen de waarden 0 en 1 als pixelwaarde hebben. We nemen aan dat de pixels met de waarde 1 het object zijn en de pixels met de waarde 0 de achtergrond. De benaming van de diverse grootheden is gehaald uit de statistiek.

6.1 Histogrammen

Van dit plaatje kunnen we 2 histogrammen maken.

In de x -richting:

$$h_x(x) = \sum_{y=1}^N f(x, y) \quad (6.1)$$

en in de y -richting

$$h_y(y) = \sum_{x=1}^M f(x, y) \quad (6.2)$$

matlab: `hx=sum(f,1);hy=sum(f,2);`

6.2 Nulde orde moment; Oppervlakte

Het nulde orde moment wordt aangeven door $m_{0,0}$ en is gedefinieerd door

$$m_{0,0} = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N f(x, y) \quad (6.3)$$

Daarmee geeft $m_{0,0}$ precies de oppervlakte van het object aan.

Als je de histogrammen al hebt berekend, kun je de oppervlakte ook als volgt uitrekenen

$$m_{0,0} = \sum_{x=1}^M h_x(x) = \sum_{y=1}^N h_y(y) \quad (6.4)$$

matlab: `m00=sum(sum(f));` of `m00=sum(hx);` resp. `m00=sum(hy);`

6.3 Eerste orde momenten; Zwaartepunt

De eerste orde momenten worden a.v. gedefinieerd

$$m_{1,0} = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N x \cdot f(x, y) \quad \text{en} \quad m_{0,1} = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N y \cdot f(x, y) \quad (6.5)$$

De coördinaten van het zwaartepunt zijn de gemiddelde x resp y-waarde van de objectpixels. Deze gemiddelde waarden geven we aan met \bar{x} en \bar{y} en kunnen hiermee bepaald worden:

$$\bar{x} = \frac{m_{1,0}}{m_{0,0}} \quad \text{en} \quad \bar{y} = \frac{m_{0,1}}{m_{0,0}} \quad (6.6)$$

De momenten $m_{1,0}$ en $m_{0,1}$ kunnen uit de 2 bovengenoemde histogrammen bepaald worden:

$$m_{1,0} = \sum_{x=1}^M x \cdot h_x(x) \quad \text{en} \quad m_{0,1} = \sum_{y=1}^N y \cdot h_y(y) \quad (6.7)$$

matlab:

```
x=1:length(hx);    y=1:length(hy);
m10=sum(x.*hx);    m01=sum(y.*hy);
```

6.4 Hogere orde momenten

Deze worden gedefinieerd door

$$m_{p,q} = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N x^p \cdot y^q \cdot f(x,y) \quad (6.8)$$

De meetkundige betekenis van hogere orde momenten is moeilijk aan te geven.

Wel is het mogelijk met behulp van deze momenten informatie van niet alleen de grootte ($m_{0,0}$) en de ligging (\bar{x}, \bar{y}) maar ook van vorm het object en de oriëntatie

Om puur alleen informatie van de vorm te krijgen, moeten we de momenten cq combinaties van momenten bepalen die onafhankelijk zijn van de grootte, de positie en de oriëntatie

6.5 Positie-onafhankelijke momenten

We kunnen positie onafhankelijke momenten krijgen als we het coördinatiesysteem verschuiven naar het zwaartepunt van het object. Dit gaat dan a.v.

$$\mu_{p,q} = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N (x - \bar{x})^p \cdot (y - \bar{y})^q \cdot f(x,y) \quad (6.9)$$

Dan zal natuurlijk altijd gelden dat $v_{0,0} = m_{0,0}$ en $v_{1,0} = v_{0,1} = 0$

De meest gebruikte grootheden zijn

$$\mu_{2,0} = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N (x - \bar{x})^2 \cdot f(x,y) = \sum_{x=1}^M (x - \bar{x})^2 \cdot \sum_{y=1}^N f(x,y) = \sum_{x=1}^M (x - \bar{x})^2 h_x(x) \quad (6.10)$$

respectievelijk

$$\mu_{0,2} = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N (y - \bar{y})^2 \cdot f(x,y) = \sum_{y=1}^N (y - \bar{y})^2 \cdot \sum_{x=1}^M f(x,y) = \sum_{y=1}^N (y - \bar{y})^2 h_y(y) \quad (6.11)$$

6.6 Schalingsonafhankelijke momenten

Als we een object $g(x,y)$ av. geven

$$g(x,y) = f\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) \quad (6.12)$$

dan heeft g dezelfde vorm als f maar is zowel in hoogte als breedte $s \times$ zo groot als f . Als we vervolgens de momenten van g aangeven met $\mu_{p,q}(s)$ zal gelden

$$\mu_{p,q}(s) = \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N (x - \bar{x})^p \cdot (y - \bar{y})^q \cdot f\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) \quad (6.13)$$

Nu gaan we de sommatie veranderen mbv van de substitutie $x = s \cdot u$ en $y = s \cdot v$. Let op dat we dan per positie (u, v) in één keer s^2 pixels meenemen! Dat levert

$$\mu_{p,q}(s) = \sum_u \sum_v (s \cdot u)^p \cdot (s \cdot v)^q \cdot f(u, v) \cdot s^2 \quad (6.14)$$

Als we nu alle factoren s buiten de sommatie schrijven krijgen we

$$\mu_{p,q}(s) = s^{p+q+2} \cdot \sum_u \sum_v (u)^p \cdot (v)^q \cdot f(u, v) = s^{p+q+2} \cdot \mu_{p,q}(1) \quad (6.15)$$

Voor $p = q = 0$ geldt dan

$$\mu_{0,0}(s) = s^2 \cdot \mu_{0,0}(1) \Rightarrow s = \left(\frac{\mu_{0,0}(s)}{\mu_{0,0}(1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Vullen we dit in (6.15) dan levert dat

$$m_{p,q}(s) = \left(\frac{m_{0,0}(s)}{m_{0,0}(1)} \right)^{\frac{1}{2} \cdot (p+q+2)} m_{p,q}(1) \quad (6.16)$$

of anders

$$\frac{\mu_{p,q}(s)}{\mu_{0,0}^\gamma(s)} = \frac{\mu_{p,q}(1)}{\mu_{0,0}^\gamma(1)} \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{2}(p+q+2) \quad (6.17)$$

Hieruit volgt dat de breuk $\frac{\mu_{p,q}(s)}{\mu_{0,0}^\gamma(s)}$ niet van s afhangt en dus schalingsonafhankelijk. De moment-grootheden die zowel positie- als schalingsonafhankelijk zijn geven we aan met $\eta_{p,q}$, dus

$$\eta_{p,q} = \frac{\mu_{p,q}}{m_{0,0}^\gamma} \quad (6.18)$$

Let op: deze afleiding is geldig zolang $s > 1$ èn geheel. Andere waarden voor s zijn in benadering correct zolang het object een voldoende aantal pixels bevat.

6.7 Rotatie-onafhankelijke momenten

Hu en Furster hebben hier de basis voor gelegd. Hier zal daarvan een samenvatting worden gegeven.

Alleerst voeren we complexe momenten als volgt in.

$$c_{p,q} = \frac{1}{m_{0,0}^\gamma} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N \left((x - \bar{x}) + j(y - \bar{y}) \right)^p \cdot \left((x - \bar{x}) - j(y - \bar{y}) \right)^q \cdot f(x, y) \quad (6.19)$$

voorbeelden (t/m de derde orde):

$$\begin{aligned}
c_{0,0} &= \eta_{0,0} = 1 \\
c_{1,0} &= \eta_{1,0} + j \eta_{0,1} = 0 \\
c_{0,1} &= \eta_{1,0} - j \eta_{0,1} = 0 \\
c_{2,0} &= \eta_{2,0} - \eta_{0,2} + 2j \eta_{1,1} \\
c_{0,2} &= \eta_{2,0} - \eta_{0,2} - 2j \eta_{1,1} \\
c_{1,1} &= \eta_{2,0} + \eta_{0,2} \\
c_{3,0} &= \eta_{3,0} - 3\eta_{1,2} + j(3\eta_{2,1} - \eta_{0,3}) \\
c_{0,3} &= \eta_{3,0} - 3\eta_{1,2} - j(3\eta_{2,1} - \eta_{0,3}) \\
c_{2,1} &= \eta_{3,0} + \eta_{1,2} + j(\eta_{2,1} + \eta_{0,3}) \\
c_{1,2} &= \eta_{3,0} + \eta_{1,2} - j(\eta_{2,1} + \eta_{0,3}) \\
&\text{etc.}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Controleer zelf dat $c_{q,p} = c_{p,q}^*$ en dat $c_{p,p}$ reëel is voor alle p .

Het rijtje 'relevante' momenten kunnen we tot 4 terug brengen, als ons tot de 3de orde beperken:

$$\begin{aligned}
c_{2,0} &= \eta_{2,0} - \eta_{0,2} + 2j \eta_{1,1} \\
c_{1,1} &= \eta_{2,0} + \eta_{0,2} \\
c_{3,0} &= \eta_{3,0} - 3\eta_{1,2} + j(3\eta_{2,1} - \eta_{0,3}) \\
c_{2,1} &= \eta_{3,0} + \eta_{1,2} + j(\eta_{2,1} + \eta_{0,3})
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Voorbeelden voor eenvoudige figuren

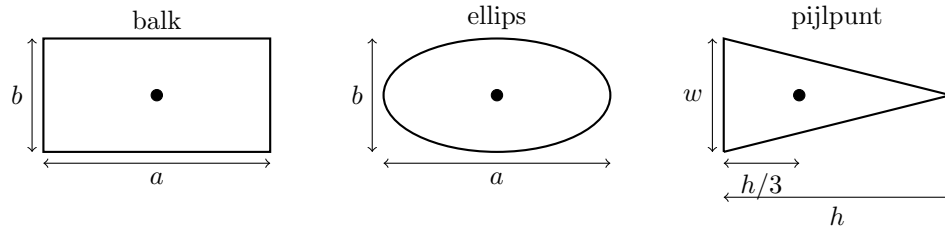


Figure 6.1: voorbeelden van eenvoudige figuren

	balk	ellips	pijlpunt
$m_{0,0}$	ab	$\frac{1}{4}\pi ab$	$\frac{1}{2}wh$
$c_{2,0}$	$\frac{1}{12}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$	$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$	$\frac{1}{9}\frac{h}{w} - \frac{1}{12}\frac{w}{h}$
$c_{1,1}$	$\frac{1}{12}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$	$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$	$\frac{1}{9}\frac{h}{w} + \frac{1}{12}\frac{w}{h}$
$c_{3,0}$	0	0	$\frac{2\sqrt{2}}{135}\left(\frac{h}{w}\right)^{3/2} + \frac{\sqrt{2}}{30}\left(\frac{w}{h}\right)^{1/2}$
$c_{2,1}$	0	0	$\frac{2\sqrt{2}}{135}\left(\frac{h}{w}\right)^{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{30}\left(\frac{w}{h}\right)^{1/2}$

Figure 6.2: 'complexe' momenten van eenvoudige figuren

Controleer mbv van deze tabel dat $c_{2,0} = 0$ voor zowel een vierkant, een cirkel als voor een gelijkzijdige driehoek.

Rotatie-onderzoek

Om nu de rotatie eigenschappen te onderzoeken, voeren we de volgende substitutie in

$$\begin{aligned} x - \bar{x} &= R \cdot \cos \phi & \text{en} & \quad y - \bar{y} = R \sin \phi \Rightarrow \\ (x - \bar{x}) + j(y - \bar{y}) &= R e^{j\phi} & \text{en} & \quad (x - \bar{x}) - j(y - \bar{y}) = R e^{-j\phi} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Dit levert

$$c_{p,q} = \frac{1}{m_{0,0}^\gamma} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N R^{p+q} e^{j(p-q)\phi} \cdot f(x, y) \quad (6.23)$$

Als we nu het object roteren over een hoek α moeten we ϕ vervangen door $\phi - \alpha$ dus

$$\begin{aligned} c_{p,q}(\alpha) &= \frac{1}{m_{0,0}^\gamma} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N R^{p+q} e^{j(p-q)(\phi-\alpha)} \cdot f(x, y) = \\ &= \frac{1}{m_{0,0}^\gamma} e^{-j(p-q)\alpha} \cdot \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N R^{p+q} e^{j(p-q)\phi} \cdot f(x, y) \end{aligned} \quad (6.24)$$

dus

$$c_{p,q}(\alpha) = e^{-j(p-q)\alpha} \cdot c_{p,q}(0) \quad (6.25)$$

Oriëntatie

De hoek α noemen we de oriëntatie van het object. Deze kunnen we met (6.25) bepalen als $p \neq q$. Voor 2de en 3de momenten levert dat o.a. de volgende mogelijkheden op:

1. $c_{2,1}(\alpha) = e^{-j\alpha} \cdot c_{2,1}(0) \Rightarrow e^{-j\alpha} = \frac{c_{2,1}(\alpha)}{c_{2,1}(0)}$
2. $c_{2,0}(\alpha) = e^{-2j\alpha} \cdot c_{2,0}(0) \Rightarrow e^{-2j\alpha} = \frac{c_{2,0}(\alpha)}{c_{2,0}(0)}$
3. $c_{3,0}(\alpha) = e^{-3j\alpha} \cdot c_{3,0}(0) \Rightarrow e^{-3j\alpha} = \frac{c_{3,0}(\alpha)}{c_{3,0}(0)}$
4. $c_{3,0}(\alpha) \cdot c_{0,2}(\alpha) = e^{-j\alpha} \cdot c_{3,0}(0) \cdot c_{0,2}(0) \Rightarrow e^{-j\alpha} = \frac{c_{3,0}(\alpha) \cdot c_{0,2}(\alpha)}{c_{3,0}(0) \cdot c_{0,2}(0)}$

Met de 2de en 3de mogelijkheid kunnen we geen oriëntaties bepalen over het gehele gebied van $0 < \alpha < 2\pi$ (waarom niet?). Voor de andere 2 moeten de 3de orde momenten $\neq 0$ zijn. De eerste ($c_{2,1}(\alpha)$) is daarbij het eenvoudigste.

Om daar mee te kunnen werken, moeten we onze referentie (coördinatenstelsel) aanpassen aan ons object. We spreken af dat we dit systeem zo aanpassen dat $\text{Re}(c_{2,1}(0)) > 0$ en $\text{Im}(c_{2,1}(0)) = 0$. Dit kan altijd, zolang $c_{1,2}(\alpha) \neq 0$.

Dan geldt namelijk, dat

$$|c_{2,1}(\alpha)| = |c_{2,1}(0)| = c_{2,1}(0) \quad (6.26)$$

en kunnen we α bepalen uit

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Re}(c_{2,1}(\alpha))}{|c_{2,1}(\alpha)|} \quad \text{en} \quad \sin(\alpha) = \frac{\text{Im}(c_{2,1}(\alpha))}{|c_{2,1}(\alpha)|} \quad (6.27)$$

waarbij

$$|c_{2,1}(\alpha)| = \sqrt{(\text{Re}(c_{2,1}(\alpha)))^2 + (\text{Im}(c_{2,1}(\alpha)))^2} \quad (6.28)$$

Invariantie

Uit de uitdrukking (6.25) valt verder af te leiden dat

1. $c_{p,p}$ rotatie invariant (=onafhankelijk van α) is voor alle $p \geq 0$,
2. $c_{p,q} \cdot c_{q,p} = |c_{p,q}|^2$ ook rotatie invariant is
3. volgens Furster hiermee nog andere combinaties te formuleren zijn die rotatie invariant zijn nl.

$$\prod_{i=1}^n (c_{p_i, q_i})^{k_i} \text{ is rotatie - invariant als } \sum_{i=1}^n k_i \cdot (p_i - q_i) = 0 \quad (6.29)$$

Hiermee is dan het volgende overzicht te maken (met de notatie die Gonzales aangeeft):

tweede orde invariante combinaties

$$T_1 = c_{1,1} = \phi_1$$

$$T_2 = c_{2,0} \cdot c_{0,2} = \phi_2$$

derde orde invariante combinaties

$$T_3 = c_{3,0} \cdot c_{0,3} = \phi_3$$

$$T_4 = c_{2,1} \cdot c_{1,2} = \phi_4$$

$$T_5 = c_{2,0} \cdot c_{1,2}^2 \text{ met}$$

$$T_{5r} = \text{Re}(T_5) = \phi_6$$

$$T_{5i} = \text{Im}(T_5) \text{ noemt Hu niet}$$

$$T_6 = c_{3,0} \cdot c_{1,2}^3 \text{ met}$$

$$T_{6r} = \text{Re}(T_6) = \phi_5$$

$$T_{6i} = \text{Im}(T_6) = \phi_7$$

In dit overzicht zijn een paar momenten van elkaar afhankelijk. Er geldt namelijk dat

$$c_{2,0} \cdot c_{0,2} = c_{2,0} \cdot c_{0,2} \frac{c_{2,1}^2 \cdot c_{1,2}^2}{c_{2,1}^2 \cdot c_{1,2}^2} = \frac{|c_{2,0} \cdot c_{1,2}^2|^2}{(c_{2,1} \cdot c_{1,2})^2}$$

en dus

$$T_2 = \frac{T_{5r}^2 + T_{5i}^2}{T_4^2}$$

en zo ook

$$c_{3,0} \cdot c_{0,3} = c_{3,0} \cdot c_{0,3} \frac{c_{2,1}^3 \cdot c_{1,2}^3}{c_{2,1}^3 \cdot c_{1,2}^3}$$

en dus

$$T_3 = \frac{T_{6r}^2 + T_{6i}^2}{T_4^3}$$

We laten daarom T_{5i} en T_{6i} buiten beschouwing en gebruiken alleen ϕ_1 t/m ϕ_6 als we ons beperken tot de tweede en derde orde momenten.

6.8 Matlab simulatie

Als test object gebruiken we het volgende plaatje



Figure 6.3: pijlpunt als object

In Matlab laten we het plaatje 360° ronddraaien terwijl we steeds de oriëntatie en de Hu invarianten uitrekenen. De bovenste grafiek is de oriëntatie, de volgende 6 zijn de Hu invarianten

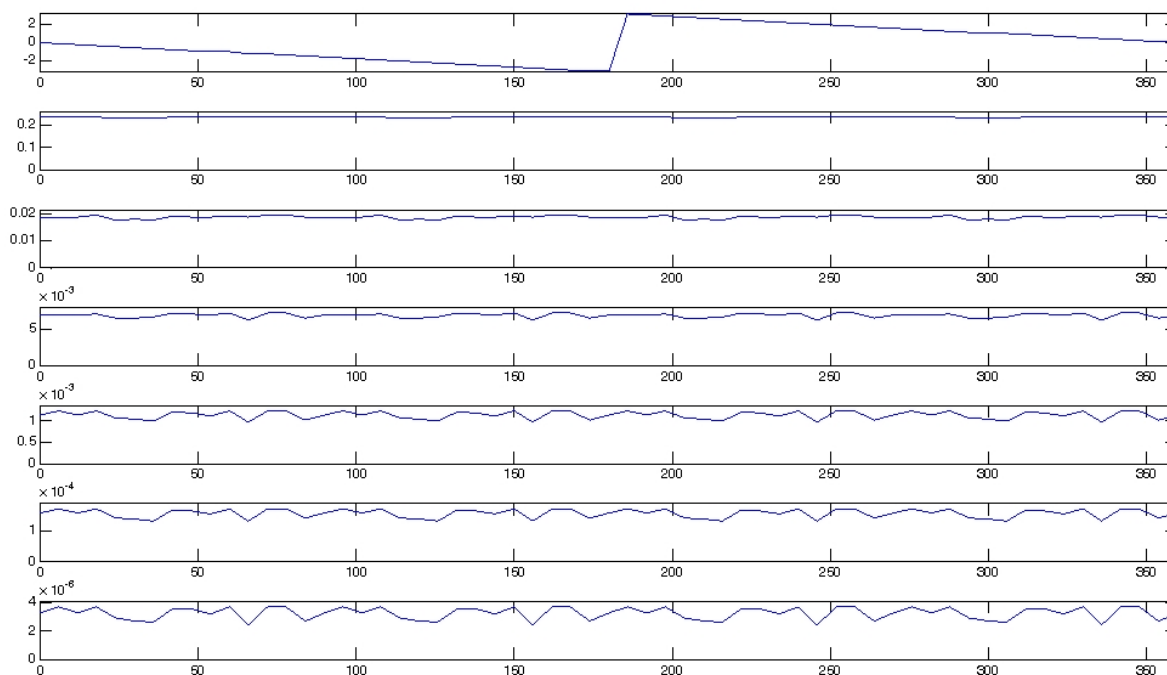


Figure 6.4: resultaat van de simulatie (zie tekst)

Goed is te zien dat de oriëntatie goed is te bepalen, ϕ_1 t/m ϕ_3 redelijk invariant zijn maar dat ϕ_4 t/m ϕ_6 veel last hebben van de pixel afronding die bij iedere oriëntatie steeds anders is.

Matlab code van de moment berekening:

```
function [m00,z,alpha,phi]=momentcalc(pictm)
ic=sqrt(-1);
% pictm must be a matrix of a binary image filled with only '1'-s and '0'-s
% calculates
% m00    : the 'area' of the object (in number of pixels)
% z      : centre of gravity
% alpha  : orentation ( in radian)
% phi    : 'Hu' invariants 1 to 6
%
m00=sum(sum(pictm));
[M,N]=size(pictm);
[x,y]=meshgrid(1:M,1:N);

z(1)=sum(sum(x.*pictm))/m00;
z(2)=sum(sum(y.*pictm))/m00;

x=x-z(1);y=y-z(2);

e20=sum(sum(x.*x.*pictm))/m00^2;
e11=sum(sum(x.*y.*pictm))/m00^2;
e02=sum(sum(y.*y.*pictm))/m00^2;
%
e30=sum(sum(x.*x.*x.*pictm))/sqrt(m00^5);
e21=sum(sum(x.*x.*y.*pictm))/sqrt(m00^5);
e12=sum(sum(x.*y.*y.*pictm))/sqrt(m00^5);
e03=sum(sum(y.*y.*y.*pictm))/sqrt(m00^5);
%
c20=e20-e02+2*ic*e11;
c11=e20+e02;
c30=e30-3*e12+ic*(3*e21-e03);
c21=e30+e12+ic*(e21+e03);
c12=conj(c21);
%
alpha=angle(c21)
%
phi(1)=c11;
phi(2)=abs(c20)^2;
phi(3)=abs(c30)^2;
phi(4)=c21*c12;
phi(5)=real(c20*c12^2);
phi(6)=real(c30*c12^3);
```

Test m-file:

```
close all;clear all;
pii=imread('pijlpunt2n.bmp');

blok=pii(:,:,1)>0.5;
imshow(blok,'InitialMagnification','fit')
N=61;phi=zeros(1,N);

alphap=zeros(1,N);ch=alphap;check=zeros(6,N);
testi=5;
for i=1:N;
    phi(i)=(i-1)*360/(N-1);
    piir=imrotate(pii,phi(i),'nearest','crop');
    blok=piir(:,:,1)>0.5;
    if i==testi
        figure
        imshow(blok,'InitialMagnification','fit')
    end
    [m00,z,alpha,phip]=momentcalc(blok);
    check(:,i)=phip(:);
    alphap(i)=alpha;
end
figure
Np=7;
subplot(Np,1,1);
plot(phi,alphap);
axis([0 360 -pi pi])
for ip=2:Np
    ch=check(ip-1,:);
    subplot(Np,1,ip);
    plot(phi,ch);
    axis([0 360 min(0,min(ch)*1.1) max(0,max(ch)*1.1)])
end
```

Chapter 7

Notes on Geometric Optics

PURPOSE

To review the basics of geometric optics and to observe the function of some simple and compound optical devices.

APPARATUS

Optical bench, lenses, mirror, target & light source, meter stick

7.1 Introduction

Optical instruments serve many functions. Microscopes can magnify an image to make extremely small objects visible. While telescopes can collect and concentrate light from very faint and distant objects. Lenses in photographic and video cameras form images for recording. Geometric optics ignores the true electromagnetic wave nature of light and assumes instead that light travels in straight lines called a ray whose path through an optical instrument can be calculated with simple rules to predict the location of an image. In the next few pages we will review these rules.

7.2 Object-Image Relations for Lenses

In geometrical optics we can get a good intuitive feeling for the behavior of lenses using these basic concepts:

1. All rays incident on a converging lens parallel to its axis are refracted in such a way that they cross the axis at a common point called the focal point or focus of the lens. The distance from the lens center to the focus is called the focal length, f . Each lens has two focal points.
2. After refraction by the lens, rays coming from an object will either converge to form a real image (as in a camera) or diverge so that they appear to come from a ‘virtual’ image (as in a magnifying glass).
3. If the distance from the object to the lens is called s and the distance from the lens to the image s' (where s' is positive for a real image and negative for a virtual image) then the ‘thin lens’ equation holds:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \quad (7.1)$$

The relationship between object, real image and focal length for a converging lens is illustrated in Fig 7.1. Two rays are drawn from the object to the lens. One ray is incident parallel to the axis

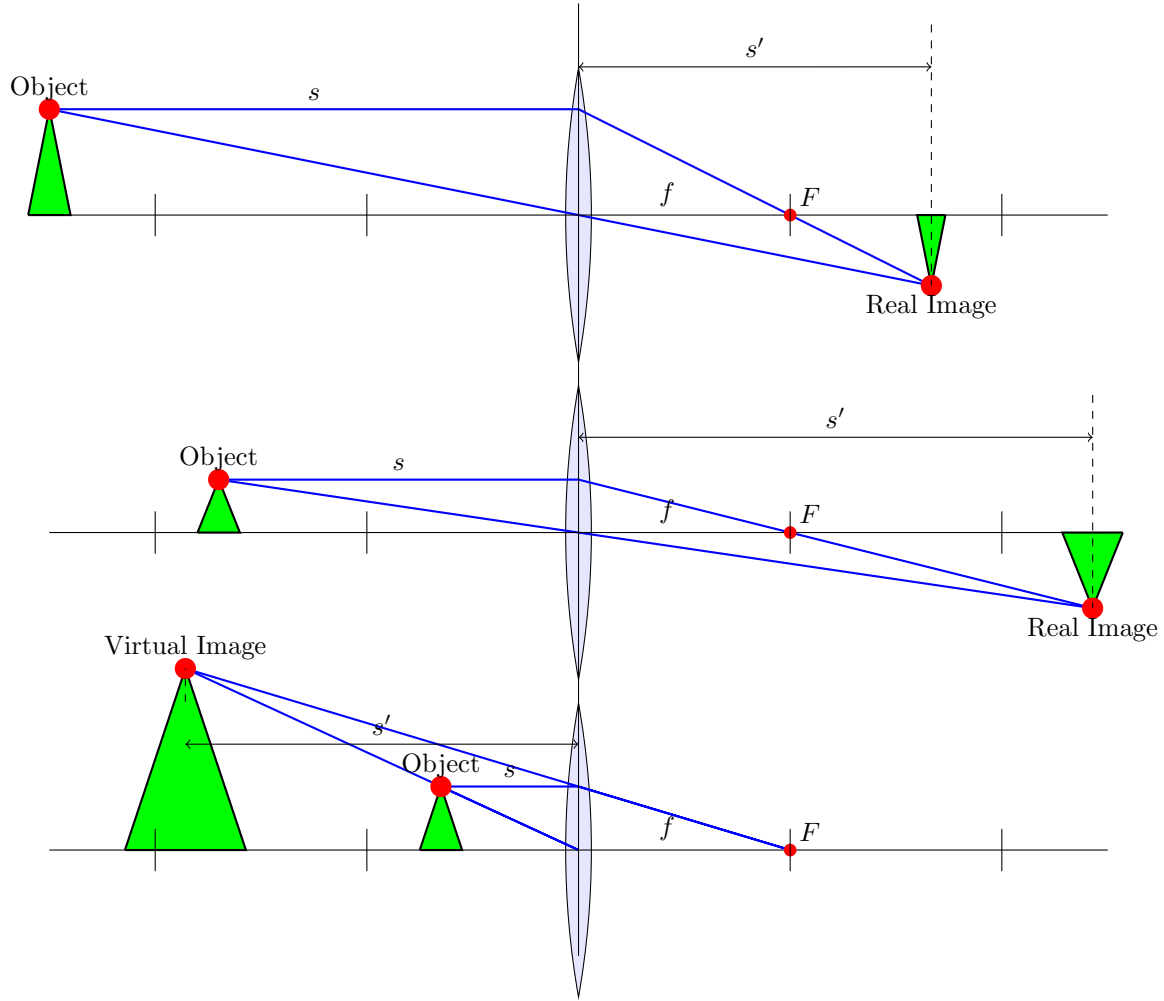


Figure 7.1: lens geometrics

and is refracted toward the focus, f . The other ray passes through the center of the lens, and will not be deviated because the surfaces of a "thin" lens are essentially parallel at the center.

Using this you can construct any optical system.

It may be seen from the figure that the ratio of the distance of the image from the axis to the distance from the object to the axis (called the lateral magnification, m) is equal to $-(s'/s)$.

The magnification is positive for an upright image and negative for an inverted image.

The thin-lens equation can be used to show that

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{s1 - f}{f} \quad (7.2)$$

A special case of the thin lens equation occurs when the object distance, s , is very large ($s \gg s'$) compared to the image distance s' . Under these circumstances the $1/s$ term will be small enough to be neglected and the thin lens equation reduces to

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{or} \quad s1 = f \quad (7.3)$$

We will use this special case to estimate the focal length of the lenses used in the experiment. In the table below we summarize the sign convention for m and s' .

Sign	m , magnification	s' , image distance
+	upright image	real image
-	upside down image	virtual image

Table 7.1: sign table

Example 1: The converging lens and the simple magnifier

Case a) $s > f$.

Suppose $f = (+)20$ cm for the converging lens of figure 1 above. Then, if the object distance $s = +30$ cm, the thin lens formula is

$$1/s + 1/s' = 1/f \Rightarrow 1/(+30) + 1/s' = 1/(+20) \Rightarrow 1/s' = 1/20 - 1/30 = 1/60 \Rightarrow s' = +60 \text{ cm}$$

where the + sign for s' means the image is real and on the other side of the lens from the object.

The lateral magnification is $m = (\text{height of image}/\text{height of object}) = (h_i/h_o)$. In this case it is equal to $-(s'/s) = -60/30 = -2$, indicating an enlarged image. The minus sign for m means that the image is inverted. For a real image it is possible to place a screen at the focal plane and directly measure the height of the image.

Case b) $s < f$.

Suppose the object distance $s = +15$ cm for the converging lens of $f = 20$ cm. Then the thin lens equation becomes

$$1/(+15) + 1/s' = 1/20 \Rightarrow 1/s' = 1/20 - 1/15 = -1/60 \Rightarrow s' = -60 \text{ cm}$$

The $-$ sign for s' means that the image is virtual (on the same side of the lens as the object, impossible to view or measure on a screen). The magnification is $m = -s'/s = -(-60)/(+20) = +3$. The + sign for m here means that the image is upright. We see that a converging lens can give both real and virtual images, depending on the location of the object relative to the focal point.

Example 2: The diverging lens

Suppose the focal length of a diverging lens is $f = -20$ cm. If the object is at $s = +30$ cm, solving the lens equation gives $s' = -12$, the $-$ sign again indicating a virtual image:

$$1/(+30) + 1/s' = 1/(-20) \Rightarrow 1/s' = -1/20 - 1/30 = -5/60 \Rightarrow s' = -12.$$

The magnification is $m = -(s'/s) = +12/30 = +0.4$, so the image is reduced and erect (see figure 2). A diverging lens by itself can produce only virtual images.

7.3 Object-Image Relations for Mirrors

Once you understand refractive optics, reflective optics are easy. In this case both object and image distances (s and s_1 , respectively) are measured on the same side of the reflective surface. The math and equations are the same as with lenses as long as the difference of the real focus f and the value f_1 are very small.

Consider for that the concave mirror in Fig. 7.2.

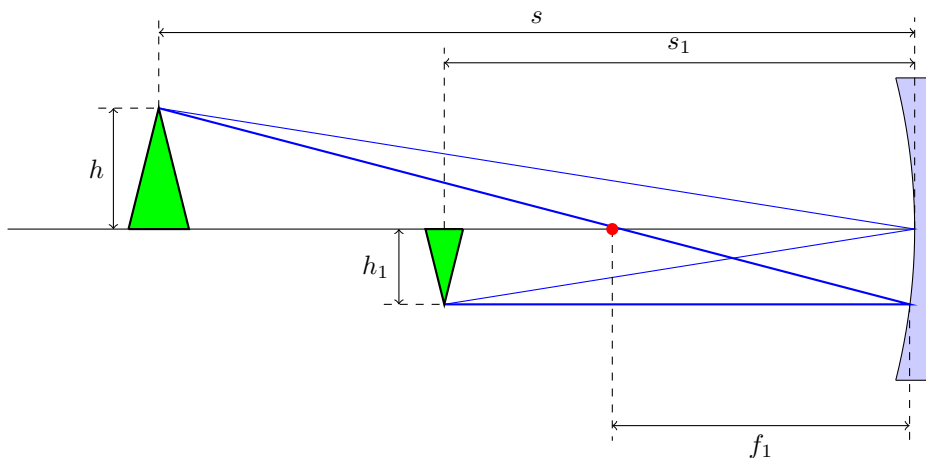
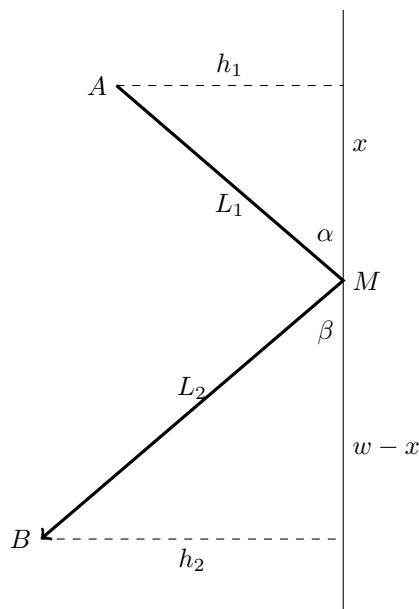


Figure 7.2: geometrics of a mirror

7.4 Physical background of light rays

7.4.1 Reflection



The distance from A over M to B is given by

$$L(x) = L_1 + L_2 = \sqrt{x^2 + h_1^2} + \sqrt{(w - x)^2 + h_2^2} \quad (7.4)$$

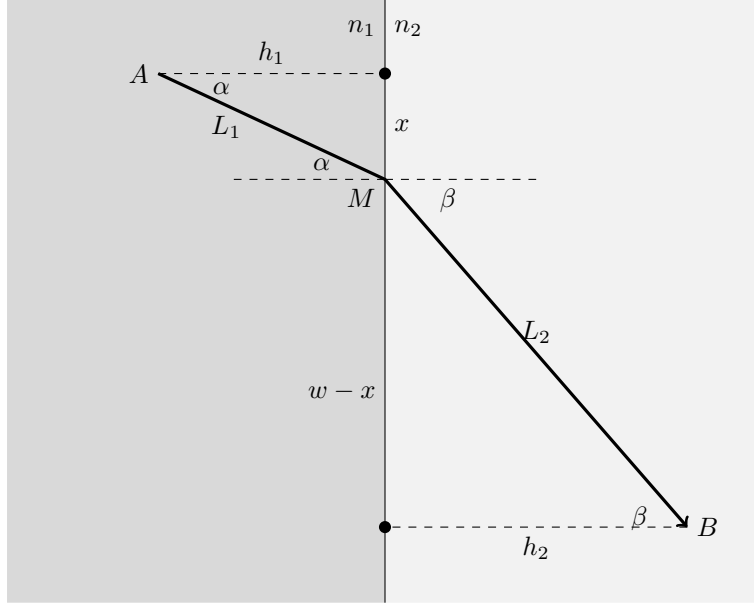
The minimum distance can be found by looking to the derivative to x

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{w - x}{\sqrt{(w - x)^2 + h_2^2}} = \sin \alpha - \sin \beta \quad (7.5)$$

Taken the derivative to zero for the minimum distance gives the Law of Reflection

$$\sin \alpha = \sin \beta \quad \text{or} \quad \alpha = \beta \quad (7.6)$$

7.4.2 Refraction



The optical distance from A over M to B is given by

$$L(x) = n_1 \cdot L_1 + n_2 \cdot L_2 = n_1 \cdot \sqrt{x^2 + h_1^2} + n_2 \cdot \sqrt{(w - x)^2 + h_2^2} \quad (7.7)$$

The minimum distance can be found by looking to the derivative to x

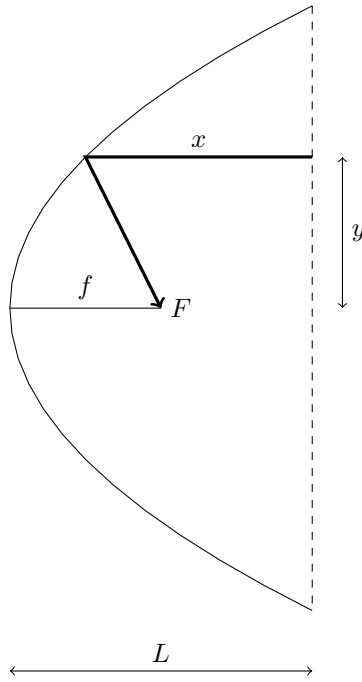
$$\frac{dL(x)}{dx} = n_1 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - n_2 \cdot \frac{w - x}{\sqrt{(w - x)^2 + h_2^2}} = n_1 \cdot \sin \alpha - n_2 \cdot \sin \beta \quad (7.8)$$

Taken the derivative to zero for the minimum distance gives the Law of Refraction (Snell's Law)

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta \quad (7.9)$$

Check that the drawing suggests that $n_1 > n_2$.

7.4.3 Parabole Antenna



The distance to the focus should be constant for all the rays, independant of y , so

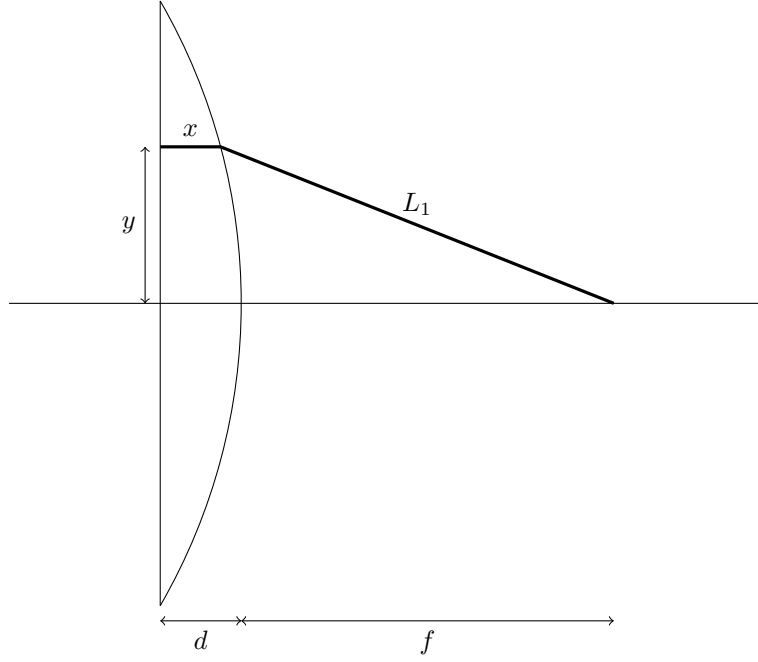
$$x + \sqrt{y^2 + (x + f - L)^2} = \text{constant} = L + f \quad (7.10)$$

Simplifying this equations leads to

$$y^2 = 4 \cdot f \cdot (L - x) \quad (7.11)$$

which is indeed the formule for a parabole

7.4.4 Hyperbolic Lens



The optical distance to the focus should be constant for all the rays, independent of y , so

$$n \cdot x + L_1 = n \cdot x + \sqrt{y^2 + (f + d - x)^2} = \text{constant} = L \quad (7.12)$$

For $y = x = d$ so $L = n \cdot d + f$ and

$$n \cdot x + \sqrt{y^2 + (f + d - x)^2} = n \cdot d + f \quad (7.13)$$

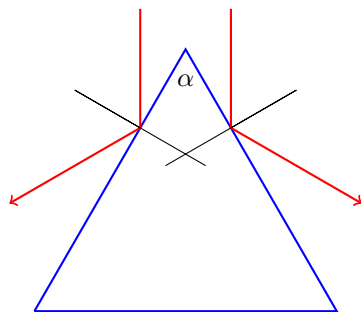
Simplifying this equation leads to

$$y^2 = (n^2 - 1)(d - x)^2 + 2f(n - 1)(d - x) \quad (7.14)$$

which is a formula of a hyperbole

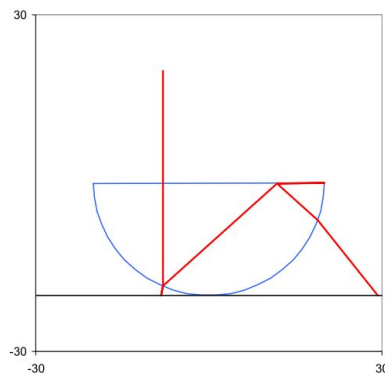
7.5 Exercises Geometric Optics

- E 1.** Let α be the angle between the two faces of a symmetric triangular prism. Let the edge A where the two faces meet be perpendicular to the plane which contains the incident and emergent rays.



Two parallel beams of light are reflected off the two symmetric faces of the prism. Show that the angle between the two reflected beams is twice the angle between the two reflecting surfaces.

- E 2.** Assume that a thin beam is incident on a plane parallel slab of glass in air, as in section. But now the beam is not monochromatic; it is white light, so the beam is spread out into a spectrum as it passes through the slab.
- Will the emerging rays of different colors be parallel or not?
 - What determines the thickness of the beam as it exits the slab?
- E 3.** Assume that we have a semi-circular bowl of water at 25°C . A light-ray from a 632.8 nm laser enters perpendicular to the surface $4/10$ of the radius from the bowl centre.



We want to obtain grazing refraction and total internal reflection of the light beam that is reflected towards the water / air interface.

- Does the material of the bowl play any role in this?
- How much do we have to raise the refractive index of the water by increasing the salinity?

- E 4.** Assume that the absolute values of the radii of curvature of the two surfaces of a thin lens in air are 10.0 cm and 5.0 cm and that the index of refraction is 1.5.
- a. What is the focal length of the lens if both surfaces are convex ?
 - b. What is the focal length if one surface is convex and the other concave?
 - c. What is the focal length if the lens is double-concave?
 - d. Does it matter if we interchange the left and right surface?

Chapter 8

Illumination

(<http://www.advancedillumination.com/>)

The effectiveness of an illuminating source in an inspection is determined by the direction at which light strikes an object, and the direction of the reflected light into or away from the camera. Suitable illumination covers the required field of view, creates a consistently measurable degree of contrast, and does not cause reflected glare. Different light types are required to provide successful illumination for the broad range of products being inspected by automated systems.

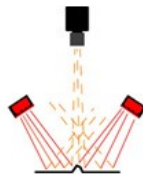
Bright Field

Light is aimed directly at an object, often creating distinct shadows. This type of lighting is effective when used on objects requiring high degrees of contrast, but creates specular reflections when used with shiny or reflective materials.



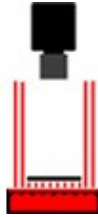
Dark Field

Light is projected at an angle to the surface, causing any variations to deflect light up into the camera, creating bright spots on a dark background or field. Nothing is seen by the vision system if there are no aberrations on the surface.

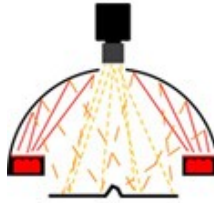


Back Lighting

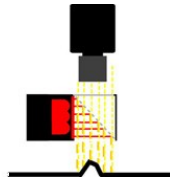
An even field of illumination is projected from behind an object, which is seen as a silhouette by the camera. Backlighting is most commonly used for taking measurements or determining part orientation.

**Diffuse Light**

Reflected light, providing a non-directional, soft illumination free of harsh shadows that is well suited for highly specular objects. This illumination effect is similar to the type of light found on an overcast day.

**Co-Axial Illumination**

A variation of diffuse light in which light is aimed at an angled beam splitter that reflects the light down. The object is viewed from above through the beam splitter. This light type is particularly helpful on highly reflective objects or in situations where the area of inspection is obscured by shadows from its surroundings.



Each light type has a specific purpose, but is also adaptable for a range of applications not immediately related to its function. For example, a spotlight, which provides bright field illumination, can be placed at an angle to create a dark field effect. For some applications, the best results are achieved by combining multiple light types.

Appendix A

Uitwerkingen

A.1 Opgaven Matrices

1. a. De matrix A moet dan symmetrisch zijn.

- b. Voorbeeld van een afstandstabel tussen de steden P, Q, R en S:

	P	Q	R	S
P	0	17	91	46
Q	17	0	3	11
R	91	3	0	60
S	46	11	60	0

2.

a.
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 28 \\ 52 & 12 & 4 \\ 24 & 32 & 28 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -9 & -3 & 1 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

c.
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 39 & 11 & 47 \\ 16 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

d.
$$\begin{pmatrix} -2 & 27 & 13 \\ -7 & 6 & 7 \\ -5 & 42 & 27 \end{pmatrix}$$

e.
$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ -7 & -3 & 2 \\ 15 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

f.
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 67 & 12 & -1 \end{pmatrix}$$

3.
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 22 & 20 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

4. 0, De matrix A is singulier.

5. -630

6. -192

7. $|P| = 0$, Deze matrix is dus singulier.

8. 225

9. -8000

10. 144

11. 105

12. We vinden de eigenwaarde uit de vergelijking:

$$|\lambda \cdot I - C| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ontwikkelen naar de eerste rij geeft:

$$(\lambda - 2) \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Dit verder uitwerken geeft $\lambda_{1,2} = 1$ en $\lambda_3 = 5$

$$13. \quad D^{-1} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 14 \\ -1 & -2 & -6 \\ 11 & -4 & -12 \end{pmatrix} \quad F^{-1} = 158 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

14. a. Uit de berekening van de determinant ($D = 13$) volgt dat het geen afhankelijk stelsel vergelijkingen is.

b. Door te vegen of uit $x = A^{-1} \cdot b$ volgt: $x = 1, y = -1, z = -1$

A.2 Problems chapter 2

- E 1.** Using the background information provided in Section 2.1, and thinking purely in geometric terms, estimate the diameter of the smallest printed dot that the eye can discern if the page on which the dot is printed is 0.2 m away from the eyes. Assume for simplicity that the visual system ceases to detect the dot when the image of the dot on the fovea becomes smaller than the diameter of one receptor (cone) in that area of the retina. Assume further that the fovea can be modeled as a square array of dimensions 1.5 mm x 1.5 mm, and that the cones and spaces between the cones are distributed uniformly throughout this array
- E 2.** When you enter a dark theater on a bright day, it takes an appreciable interval of time before you can see well enough to find an empty seat. Which of the visual processes explained in Section 2.1 is at play in this situation?
- E 3.** Although it is not shown in Fig. 2.10, alternating current certainly is part of the electromagnetic spectrum. Commercial alternating current in the United States has a frequency of 60 Hz. What is the wavelength in kilometers of this component of the spectrum?
- E 4.** You are hired to design the front end of an imaging system for studying the boundary shapes of cells, bacteria, viruses, and protein. The front end consists, in this case, of the illumination source(s) and corresponding imaging camera(s). The diameters of circles required to enclose individual specimens in each of these categories are 50, 1, 0.1, and 0.01 μm , respectively.
- Can you solve the imaging aspects of this problem with a single sensor and camera? If your answer is yes, specify the illumination wavelength band and the type of camera needed. By "type," we mean the band of the electromagnetic spectrum to which the camera is most sensitive (e.g., infrared).
 - If your answer in (a) is no, what type of illumination sources and corresponding imaging sensors would you recommend? Specify the light sources and cameras as requested in part (a). Use the minimum number of illumination sources and cameras needed to solve the problem.
- By "solving the problem," we mean being able to detect circular details of diameter 50, 1, 0.1, and 0.01 μm , respectively.
- E 5.** A CCD camera chip of dimensions 7 x 7 mm, and having 1024 x 1024 elements, is focused on a square, flat area, located 0.5 m away. How many linepairs per mm will this camera be able to resolve? The camera is equipped with a 35-mm lens. (Hint: Model the imaging process as in Fig. 2.3, with the focal length of the camera lens substituting for the focal length of the eye.)
- E 6.** An automobile manufacturer is automating the placement of certain components on the bumpers of a limited-edition line of sports cars. The components are color coordinated, so the robots need to know the color of each car in order to select the appropriate bumper component. Models come in only four colors: blue, green, red, and white. You are hired to propose a solution based on imaging. How would you solve the problem of automatically determining the color of each car, keeping in mind that cost is the most important consideration in your choice of components?

- E 7.** Suppose that a flat area with center at (x_0, y_0) is illuminated by a light source with intensity distribution

$$i(x, y) = K e^{-((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}$$

Assume for simplicity that the reflectance of the area is constant and equal to 1.0, and let $K = 255$. If the resulting image is digitized with k bits of intensity resolution, and the eye can detect an abrupt change of eight shades of intensity between adjacent pixels, what value of k will cause visible false contouring?

- E 8.** Sketch the image in Problem 2.7 for $k = 2$.

- E 9.** A common measure of transmission for digital data is the baud rate, defined as the number of bits transmitted per second. Generally, transmission is accomplished in packets consisting of a start bit, a byte (8 bits) of information, and a stop bit. Using these facts, answer the following:

- How many minutes would it take to transmit a 1024×1024 image with 256 intensity levels using a 56K baud modem?
- What would the time be at 3000K baud, a representative medium speed of a phone DSL (Digital Subscriber Line) connection?

- E 10.** High-definition television (HDTV) generates images with 1125 horizontal TV lines interlaced (where every other line is painted on the tube face in each of two fields, each field being 1/60th of a second in duration). The width-to-height aspect ratio of the images is 16:9. The fact that the number of horizontal lines is fixed determines the vertical resolution of the images. A company has designed an image capture system that generates digital images from HDTV images. The resolution of each TV (horizontal) line in their system is in proportion to vertical resolution, with the proportion being the width-to-height ratio of the images. Each pixel in the color image has 24 bits of intensity resolution, 8 bits each for a red, a green, and a blue image. These three "primary" images form a color image. How many bits would it take to store a 2-hour HDTV movie?

- E 11.** Consider the two image subsets, S_1 and S_2 , shown in the following figure. For $V = \{1\}$, determine whether these two subsets are (a) 4-adjacent, (b) 8-adjacent, or (c) m-adjacent.

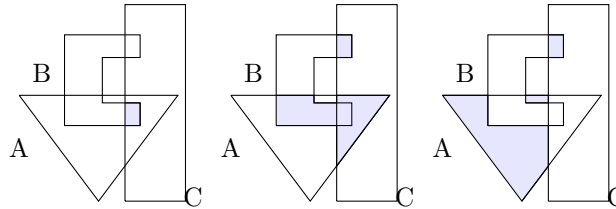
	S_1				S_2				
	0	0	0	0	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	0	0	1	0	0
	1	0	0	1	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	1	0	0	0	0
	0	0	1	1	1	0	0	1	1

- E 12.** Develop an algorithm for converting a one-pixel-thick 8-path to a 4-path.

- E 13.** Develop an algorithm for converting a one-pixel-thick m -path to a 4-path.

- E 14.** Refer to the discussion at the end of Section 2.5.2, where we defined the background as $(R_u)^c$, the complement of the union of all the regions in an image. In some applications, it is advantageous to define the background as the subset of pixels $(R_u)^c$ that are not region hole pixels (informally, think of holes as sets of background pixels surrounded by region pixels). How would you modify the definition to exclude hole pixels from $(R_u)^c$? An answer such as "the background is the subset of pixels of $(R_u)^c$ that are not hole pixels" is not acceptable. (Hint: Use the concept of connectivity.)
- E 15.** Consider the image segment shown.
- Let $V = \{0, 1\}$ and compute the lengths of the shortest 4-, 8-, and m -path between p and q . If a particular path does not exist between these two points, explain why.
 - Repeat for $V = \{1, 2\}$.
- | | | | | |
|---------|---|---|---|-----------|
| | 3 | 1 | 2 | 1 (q) |
| | 2 | 2 | 0 | 2 |
| | 1 | 2 | 1 | 1 |
| (p) | 1 | 0 | 1 | 2 |
- E 16.**
- Give the condition(s) under which the D_4 distance between two points p and q is equal to the shortest 4-path between these points.
 - Is this path unique?
- E 17.** Repeat Problem 2.16 for the D_8 distance.
- E 18.** In the next chapter, we will deal with operators whose function is to compute the sum of pixel values in a small subimage area, S . Show that these are linear operators.
- E 19.** The median, ζ , of a set of numbers is such that half the values in the set are below ζ and the other half are above it. For example, the median of the set of values $\{2, 3, 8, 20, 21, 25, 31\}$ is 20. Show that an operator that computes the median of a subimage area, S , is nonlinear.
- E 20.** Prove the validity of Eqs. (2.6-6) and (2.6-7). [Hint: Start with Eq. (2.6-4) and use the fact that the expected value of a sum is the sum of the expected values]
- E 21.** Consider two 8-bit images whose intensity levels span the full range from 0 to 255
- Discuss the limiting effect of repeatedly subtracting image (2) from image (1). Assume that the result is represented also in eight bits.
 - Would reversing the order of the images yield a different result?
- E 22.** Image subtraction is used often in industrial applications for detecting missing components in product assembly. The approach is to store a "golden" image that corresponds to a correct assembly; this image is then subtracted from incoming images of the same product. Ideally, the differences would be zero if the new products are assembled correctly. Difference images for products with missing components would be nonzero in the area where they differ from the golden image. What conditions do you think have to be met in practice for this method to work?

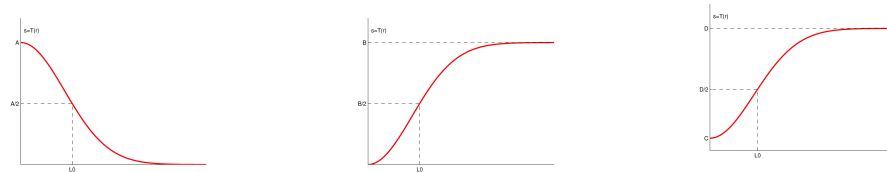
- E 23.**
- With reference to Fig. 2.31, sketch the set $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c$.
 - Give expressions for the sets shown shaded in the following figure in of sets A , B , and C . The shaded areas in each figure constitute one give one expression for each of the three figures.



- E 24.** What would be the equations analogous to Eqs. (2.6-24) and (2.6-25) that would result from using triangular instead of quadrilateral regions?
- E 25.** Prove that the Fourier kernels in Eqs. (2.6-34) and (2.6-35) are separable and symmetric.
- E 26.** Show that 2-D transforms with separable, symmetric kernels can be computed by (1) computing 1-D transforms along the individual rows (columns) of the input, followed by (2) computing 1-D transforms along the columns (rows) of the result from step (1).
- E 27.** A plant produces a line of translucent miniature polymer squares. Stringent quality requirements dictate 100% visual inspection, and the plant manager finds the use of human inspectors increasingly expensive. Inspection is semiautomated. At each inspection station, a robotic mechanism places each polymer square over a light located under an optical system that produces a magnified image of the square. The image completely fills a viewing screen measuring 80 x 80 mm. Defects appear as dark circular blobs, and the inspector's job is to look at the screen and reject any sample that has one or more such dark blobs with a diameter of 0.8 mm or larger, as measured on the scale of the screen. The manager believes that if she can find a way to automate the process completely, she will increase profits by 50%. She also believes that success in this project will aid her climb up the corporate ladder. After much investigation, the manager decides that the way to solve the problem is to view each inspection screen with a CCD TV camera and feed the output of the camera into an image processing system capable of detecting the blobs, measuring their diameter, and activating the accept/reject buttons previously operated by an inspector. She is able to find a system that can do the job, as long as the smallest defect occupies an area of at least 2 x 2 pixels in the digital image. The manager hires you to help her specify the camera and lens system, but requires that you use off-the-shelf components. For the lenses, assume that this constraint means any integer multiple of 25 mm or 35 mm, up to 200 mm. For the cameras, it means resolutions of 512 x 512, 1024 x 1024, or 2048 x 2048 pixels. The individual imaging elements in these cameras are squares measuring 8 x 8 VLM, and the spaces between imaging elements are 2 VLM. For this application, the cameras cost much more than the lenses, so the problem should be solved with the lowest-resolution camera possible, based on the choice of lenses. As a consultant, you are to provide a written recommendation, showing in reasonable detail the analysis that led to your conclusion. Use the same imaging geometry suggested in Problem 2.5.

A.3 Problems chapter 3

- E 1.** Give a single intensity transformation function for spreading the intensities of an image so the lowest intensity is 0 and the highest is $L - 1$.
- E 2.** Exponentials of the form e^{-ar^2} , with a a positive constant, are useful for constructing smooth intensity transformation functions. Start with this basic function and construct transformation functions having the general shapes shown in the following figures. The constants shown are *input* parameters, and your proposed transformations must include them in their specification. (For simplicity in your answers, L_0 is not a required parameter in the third curve.)



- E 3.**
- Give a continuous function for implementing the contrast stretching transformation shown in Fig. 3.2(a). In addition to m , your function must include a parameter, E , for controlling the slope of the function as it transitions from low to high intensity values. Your function should be normalized so that its minimum and maximum values are 0 and 1, respectively.
 - Sketch a family of transformations as a function of parameter E , for a fixed value $m = L/2$, where L is the number of intensity levels in the image.
 - What is the smallest value of E that will make your function effectively perform as the function in Fig. 3.2(b)? In other words, your function does not have to be identical to Fig. 3.2(b). It just has to yield the same result of producing a binary image. Assume that you are working with 8-bit images, and let $m = 128$. Let C denote the smallest positive number representable in the computer you are using.
- E 4.** Propose a set of intensity-slicing transformations capable of producing all the individual bit planes of an 8-bit monochrome image. (For example, a transformation function with the property $T(r) = 0$ for r in the range $[0, 127]$, and $T(r) = 255$ for r in the range $[128, 255]$ produces an image of the 8th bit plane in an 8-bit image.)
- E 5.**
- What effect would setting to zero the lower-order bit planes have on the histogram of an image in general?
 - What would be the effect on the histogram if we set to zero the higher-order bit planes instead?
- E 6.** Explain why the discrete histogram equalization technique does not, in general, yield a flat histogram.

E 7. Suppose that a digital image is subjected to histogram equalization. Show that a second pass of histogram equalization (on the histogram-equalized image) will produce exactly the same result as the first pass.

E 8. In some applications it is useful to model the histogram of input images as Gaussian probability density functions of the form

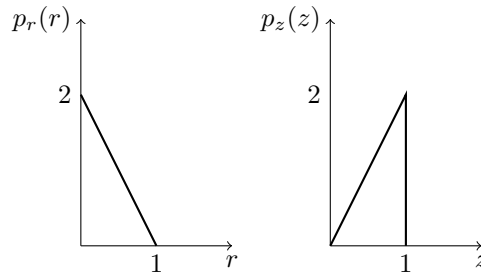
$$p_r(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

where μ and σ , are the mean and standard deviation of the Gaussian PDF. The approach is to let μ and σ be measures of average intensity and contrast of a given image. What is the transformation function you would use for histogram equalization?

E 9. Assuming continuous values, show by example that it is possible to have a case in which the transformation function given in Eq. (3.3-4) satisfies conditions (a) and (b) in Section 3.3.1, but its inverse may fail condition (a').

E 10. a. Show that the discrete transformation function given in Eq. (3.3-8) for histogram equalization satisfies conditions (a) and (b) in Section 3.3.1.
b. Show that the inverse discrete transformation in Eq. (3.3-9) satisfies conditions (a') and (b) in Section 3.3.1 only if none of the intensity levels r_k , $k = 0, 1, \dots, L - 1$, are missing.

E 11. An image with intensities in the range $[0,1]$ has the PDF $p_r(r)$ shown in the following diagram. It is desired to transform the intensity levels of this image so that they will have the specified $p_z(z)$ shown. Assume continuous quantities and find the transformation (in terms of r and z) that will accomplish this.



E 12. Propose a method for updating the local histogram for use in the local enhancement technique discussed in Section 3.3.3.

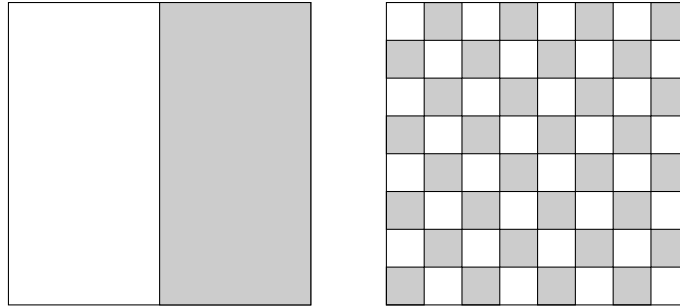
E 13. Two images, $f(x, y)$ and $g(x, y)$, have histograms h_f and h_g . Give the conditions under which you can determine the histograms of

- $f(x, y) + g(x, y)$
- $f(x, y) - g(x, y)$
- $f(x, y) \times g(x, y)$
- $f(x, y) \div g(x, y)$

in terms of h_f and h_g . Explain how to obtain the histogram in each case.

E 14. The images shown on the next page are quite different, but their histogram are the same. Suppose that each image is blurred with a 3×3 averaging mask.

- a. Would the histograms of the blurred images still be equal? Explain.
- b. If your answer is no, sketch the two histograms.



E 15. The implementation of linear spatial filters requires moving the center of a mask throughout an image and, at each location, computing the sum of products at the mask coefficients with the corresponding pixels at that location (see Section 3.4). A lowpass filter can be implemented by setting all coefficients to 1, allowing use of a so-called box-filter or moving-average algorithm, which consists of updating only the part of the computation that changes from one location to the next.

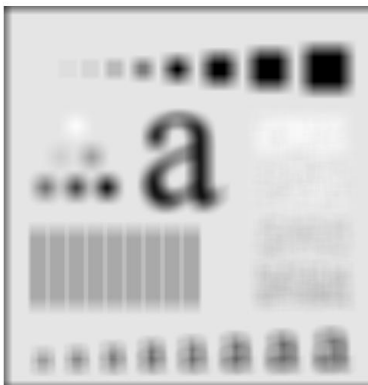
- a. Formulate such an algorithm for an $n \times n$ filter, showing the nature of the computations involved and the scanning sequence used for moving the mask around the image.
- b. The ratio of the number of computations performed by a brute-force implementation to the number of computations performed by the box-filter algorithm is called the computational advantage. Obtain the computational advantage in this case and plot it as a function of n for $n > 1$. The $1/n^2$ scaling factor is common to both approaches, so you need not consider it in obtaining the computational advantage. Assume that the image has an outer border of zeros that is wide enough to allow you to ignore border effects in your analysis.

E 16.

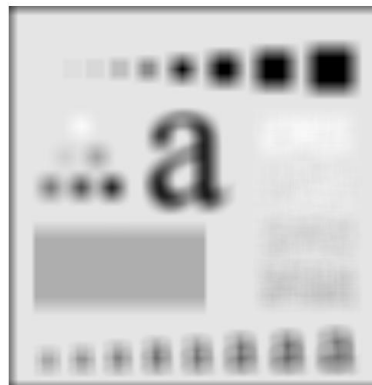
- a. Suppose that you filter an image, $f(x, y)$, with a spatial filter mask, $w(x, y)$, using convolution, as defined in Eq. (3.4.2), where the mask is smaller than the image in both spatial directions. Show the important property that, if the coefficients of the mask sum to zero, then the sum of all the elements in the resulting convolution array (filtered image) will be zero also (you may ignore computational inaccuracies). Also, you may assume that the border of the image has been padded with the appropriate number of zeros.
- b. Would the result to (a) be the same if the filtering is implemented using correlation, as defined in Eq. (3.4.1)?

E 17. Discuss the limiting effect of repeatedly applying a 3×3 lowpass spatial filter to a digital image. You may ignore border effects.

- E 18.**
- It was stated in Section 3.5.2 that isolated clusters of dark or light (with respect to the background) pixels whose area is less than one-half the area of a median filter are eliminated (forced to the median value of the neighbors) by the filter. Assume a filter of size $n \times n$, with n odd, and explain why this is so.
 - Consider an image having various sets of pixel clusters. Assume that all points in a cluster are lighter or darker than the background (but not both simultaneously in the same cluster), and that the area of each cluster is less than or equal to $n^2/2$. In terms of n , under what condition would one or more of these clusters cease to be isolated in the sense described in part (a)?
- E 19.**
- Develop a procedure for computing the median of an $n \times n$ neighborhood
 - Propose a technique for updating the median as the center of the neighborhood is moved from pixel to pixel.
- E 20.**
- In a character recognition application, text pages are reduced to binary form using a thresholding transformation function of the form shown in Fig. 3.2(b). This is followed by a procedure that thins the characters until they become strings of binary 1s on a background of 0s. Due to noise, the binarization and thinning processes result in broken strings of characters with gaps ranging from 1 to 3 pixels. One way to "repair" the gaps is to run an averaging mask over the binary image to blur it, and thus create bridges of nonzero pixels between gaps. Give the (odd) size of the smallest averaging mask capable of performing this task.
 - After bridging the gaps, it is desired to threshold the image in order to convert it back to binary form. For your answer in (a), what is the minimum value of the threshold required to accomplish this, without causing the segments to break up again?
- E 21.** The three images shown were blurred using square averaging masks of sizes $n = 23, 25$, and 45 , respectively. The vertical bars on the left lower part of (a) and (c) are blurred, but a clear separation exists between them. However, the bars have merged in image (b), in spite of the fact that the mask that produced this image is significantly smaller than the mask that produced image (c) plain the reason for this.



(a)



(b)



(c)

E 22. Consider an application such as the one shown in Fig. 3.34, in which it is desired to eliminate objects smaller than those enclosed by a square of size $q \times q$ pixels. Suppose that we want to reduce the average intensity of those objects to tenth of their original average value. In this way, those objects will be closer to the intensity of the background and they can then be eliminated by thresholding. Give the (odd) size of the smallest averaging mask that will accomplish the desired reduction in average intensity in only one pass of the mask over the image.

E 23. In a given application an averaging mask is applied to input images to reduce noise, and then a Laplacian mask is applied to enhance small details. Would the result be the same if the order of these operations were reversed?

E 24. Show that the Laplacian defined in Eq. (3.6-3) is isotropic (invariant to rotation). You will need the following equations relating coordinates for axis rotation by an angle θ :

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta\end{aligned}$$

where (x, y) are the unrotated and (x', y') are the rotated coordinates.

E 25. You saw in Fig. 3.38 that the Laplacian with a -8 in the center yields sharper results than the one with a -4 in the center. Explain the reason in detail.

E 26. With reference to Problem 3.25,

- a. Would using a larger "Laplacian-like" mask, say, of size 5×5 with a -24 in the center, yield an even sharper result? Explain in detail.
- b. How does this type of filtering behave as a function of mask size?

E 27. Give a 3×3 mask for performing unsharp masking in a single pass through an image. Assume that the average image is obtained using the filter in Fig. 3.32(a).

E 28. Show that subtracting the Laplacian from an image is proportional to unsharp masking. Use the definition for the Laplacian given in Eq. (3.6-6).

- E 29.**
 - a. Show that the magnitude of the gradient given in Eq. (3.6-11) is an isotropic operation. (See Problem 3.24.)
 - b. Show that the isotropic property is lost in general if the gradient is computed using Eq. (3.6-12).

E 30. A CCD TV camera is used to perform a long-term study by observing the same area 24 hours a day, for 30 days. Digital images are captured and transmitted to a central location every 5 minutes. The illumination of the scene changes from natural daylight to artificial lighting. At no time is the scene without illumination, so it is always possible to obtain an image. Because the range of illumination is such that it is always in the linear operating range of the camera, it is decided not to employ any compensating mechanisms on the camera itself. Rather, it is decided to use image processing techniques to post-process, and thus normalize, the images to the equivalent of constant illumination. Propose a method to do this. You are at liberty to use any method you wish, but state clearly all the assumptions you made in arriving at your design.

E 31. Show that the crossover point in Fig. 3.46(d) is given by $b = (a + c)/2$.

A.4 Answers chapter 2

** : answers given by Gonzalez

nap : not applicable

n.a. : not available (do it yourself)

1. **
2. brightness adaption, the adaption takes some time
3. $\frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{60 \text{ Hz}} = 5000 \text{ km}$
4. Table 1. Comparison of microscopy techniques

Microscope	Wavelength (nm)	Numerical aperture	Resolution (nm)	Depth of field (nm)
Optical	500	0.7	435	1244
		1.4	218	311
X-ray	3.2	0.02	90	8200
	2.5	0.6	20	520
STEM (100 kV)	-	0.005	0.5	0.37

' STEM, scanning transmission electron microscopy.

5. 5,12 lp/mm
6. **
7. Note: units of x and y are in pixels.
Using the information of the eye perception, the image can be found to be a square of three by three pixels. The contour of this square does not change if the data are rounded back to 3 bit (equals to a factor of 8):

$$\begin{bmatrix} 0.08555 & 1.718 & 4.672 & 1.718 & 0.08555 \\ 1.718 & 34.50 & 93.81 & 34.50 & 1.718 \\ 4.672 & 93.81 & 255.0 & 93.81 & 4.672 \\ 1.718 & 34.50 & 93.81 & 34.50 & 1.718 \\ 0.08555 & 1.718 & 4.672 & 1.718 & 0.08555 \end{bmatrix}$$

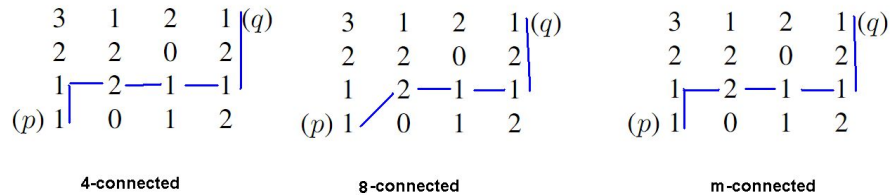
8. nap
9. **
10. $1125^2 \cdot \frac{16}{9} \cdot 30 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 3600 \text{ bit} = 11,7 \text{ Tbit}$
11. **
12. **
13. A diagonal connection in a m -path would be a disconnection if a 4 path connection was calculated from the original image. There is therefore no need to add pixels to the path as was possible by

converting 8-path to 4-path because of the ambiguity of the 8-path construction.. The algorithm therefore is the unity operator

14. nap

15. a. **

b.



16. a. **

b. no

17. nap

18. **

19. Choose 2 subsets S_1 and S_2 and consider the union of these two sets $S_0 = S_1 \cup S_2$. In general will $\zeta_1 + \zeta_2$ not be equal to ζ_0 what is needed for linearity. Therefore the median calculation is a nonlinear operation.

20. **

21. a. Subtracting is a linear operation so instead of $I_t = I_1 - I_2 - I_2 - I_2 - \dots$ you can calculate $I_t = I_1 - (I_2 + I_2 + I_2 + \dots)$. After n subtractions the resulting image will be $I_t \approx -nI_2$, if the wordlength is sufficient large. (So I_1 becomes invisible). If the wordlength is limited and negative pixel values are rounded up to zero, the resulting image becomes black. If no rounding is used (counter runs back from 0 further to 255) the resulting image becomes unpredictable

b. no, due to the linearity of the subtraction

22. **

23. a. **

- b.
- 1: $A \cap B \cap C$
 - 2: $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
 - 3: $(B \cap (A^c \cup C^c)) \cup (A \cap (B^c \cup C^c))$

24. 3 points in stead of 4 means the availability of only 6 parameters c instead of 8. The terms with the product vw will therefore disappear in the equations:

$$x = c_1v + c_2w + c_3$$

$$y = c_4v + c_5w + c_6$$

25. symmetry means: $r(x, y, u, v) = r(y, x, v, u)$ and it can simply be checked that this only holds when $M = N$
 separable: $r(x, y, v, u) = r_1(x, u) \cdot r_2(y, v)$ with $r_1(x, u) = e^{-j2\pi ux/M}$ and $r_2(y, v) = e^{-j2\pi vy/N}$
26. **
27. nap

A.5 Answers chapter 3

** : answers given by Gonzalez

nap: not applicable

n.a.: not available (do it yourself)

1. **
2. a. model will be: $s = P e^{-ar^2}$ so
 $r = 0, s = A \rightarrow A = P$
 $r = L_0, s = A/2 \rightarrow A/2 = P e^{-aL_0^2}$
 so: $P = A$ and $a = \ln(2)/L_0^2$
 - b. model will be: $s = P e^{-a(r-(L-1))^2}$ so
 $r = L - 1, s = B \rightarrow B = P$
 $r = L_0, s = B/2 \rightarrow B/2 = P e^{-a(L_0-(L-1))^2}$
 so: $P = B$ and $a = \ln(2)/(L_0 - (L - 1))^2$
 - c. model will be: $s = P e^{-a(r-(L-1))^2}$ so
 $r = L - 1, s = D \rightarrow D = P$
 $r = 0, s = C \rightarrow C = P e^{-a(L-1)^2}$
 so: $P = D$ and $a = \ln(D/C)/(L - 1)^2$
3. a. **
 b. n.a.
 c. The general form used by Gonzales is $s = \frac{A}{1 + (m/r)^E}$. If the resulting image looks binary only 2 values of s should occur : 0 and 255. That means that if $r < m$ E should be large enough to set s below 0.5 (to be rounded tot 0) and if $r > m$ s should be larger than 254.5 (to be rounded to 255). For values of E larger than about 710 (when $A = 255$) this will be achieved. Only when $r = m$ the output will be $A/2$ independent of the valuer of E so this is not a good approach for achieving binary images
- 4.
5. a. **
 b. If the MSB is set zero the range of s is reduced by a factor of 2 w.r.t r . So the histogram will shrink to lower values
6. **
7. n.a.
8. use formula (3.3-4): $s = (L - 1) \int_0^T p_r(w)dw$
9. **
10. a. n.a.
 b. **

11. tbf

12. **

13. a. **

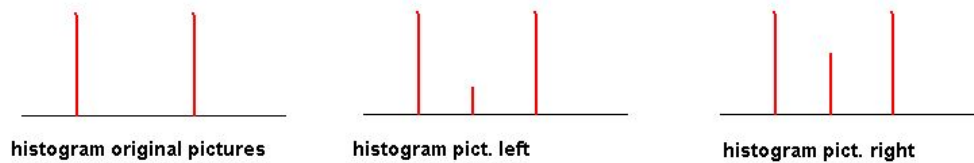
b. $f - g = f + (-g)$. So if we can construct the histogram of $-g$ from g , we can apply (a.). That is simple: $h_{(-g)}(r) = h_g(-r)$

c. Determination only when g and/or f are uniform distributed ($h_g(r) = \text{constant}$)

d. See c.

14. a. blurring has its most effect on the borders of objects. The picture left has less pixels on the borders than the right one. Therefore the histograms will be different

b.



15. a. **

b. When moving the box one position to the right, the sum on the new position can be added to the sum of the old position the sum of one subcolumn (rightside) and subtracting the sum of the subcolumn leftside. If you have stored the already calculated subcolumn sums, you only need $n + 1$ additions against n^2 so the computer advantage is $n^2/(n + 1) \approx n$

16. a. **

b. n.a.

17. tends to a flat image without details (try it by experiment)

18. a. **

b. if 2 clusters are close to each other. (check by experiment!)

19. a. **

b. n.a.

20. a. 7×7

b. If we make the average filter so that the maximum outcome from a binary image will be 49 then at least a value of 2 is needed to assume a gap to be repaired. so the threshold is 2

21. **

22. $10p \times 10q$. This only works if the distance between those objects is large compared to the size of this mask

23. Yes, because both averaging and Laplacian are linear masks:

$$\sum_{a,b} G_{a,b} (\sum_{p,q} F_{p,q} x_{m+a+p,n+b+q}) = \sum_{p,q} F_{p,q} (\sum_{a,b} G_{a,b} x_{m+a+p,n+b+q})$$

24. **

25. **

26. tbf

27. tbf

- 28.

- 29.

- 30.

- 31.