Pêndulo Duplo e Pêndulo Impulsionado em HTML5 e JavaScript

Jelther Gonçalves

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Curso de Matemática Aplicada e Computacional

E-mail: jetolgon@gmail.com

22 de Março de 2017

Resumo

Este trabalho visa fornecer uma simulação computacional do pêndulo duplo e do pêndulo impulsionado em seu pivô.

As simulações são construídas utilizando a tecnologia HTML5 e Javascript, facilitando sua visualização em diferentes dispositivos e plataformas sem a necessidade de componentes extras.

Conteúdo

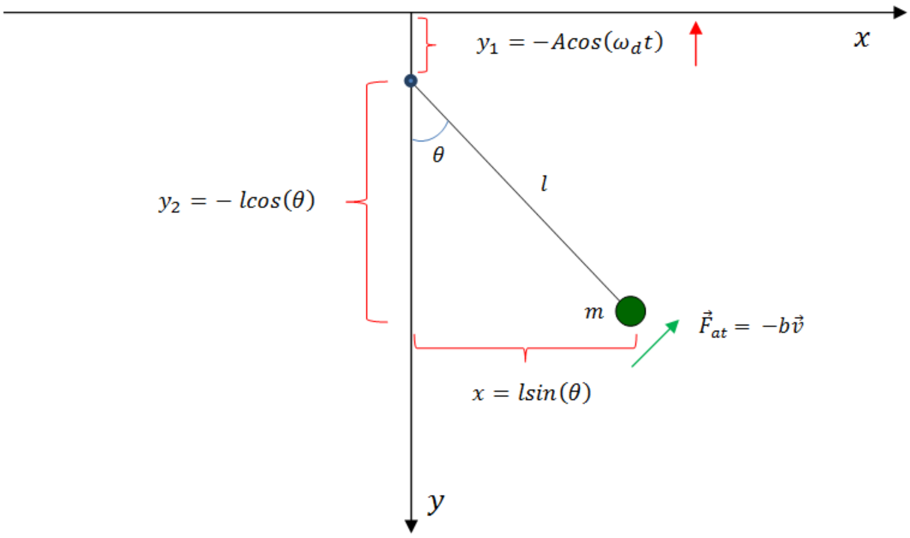
Capítulo 1

Pêndulo Impulsionado

1.1 Dedução das equações

Um pêndulo é um sistema composto por uma massa acoplada a um pivô que permite sua movimentação livremente.

No pêndulo impulsionado, partiremos do princípio que o pivô irá se mover de forma oscilatória verticalmente ou horizontalmente. Vamos iniciar com o pêndulo impulsionado verticalmente:



No esquema acima utilizamos x e y como coordenadas generalizadas para o pêndulo.Como podemos ver, o pivô se move verticalmente em função de um cosseno e uma amplitude.

Para obtermos a equação do movimento, devemos utilizar os conceitos de mecânica lagrangiana. Ou seja, devemos ter L = T - U, onde T é a soma das energias cinéticas e U a soma das energias potenciais do sistema.
Portanto, T fica:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Onde o ponto denota a derivada temporal. Os valores x e y serão as somas dos encontrados no esquema acima, então:

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta - A\omega_d \sin(\omega_d t)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + A^2\omega_d^2\sin^2(\omega_d t) + 2l\dot{\theta}A\omega_d\sin(\omega_d t)$$

Simplificando esta última, obteremos T:

$$T = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + A^2\omega_d^2\sin^2(\omega_d t) + 2l\dot{\theta}A\omega_d\sin(\omega_d t))$$

O próximo passo é encontrar a energia potencial U:

$$U = -mgy = -mg(l\cos\theta + A\cos(\omega_d t))$$

Portanto, a Lagrangiana será:

$$L = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + A^2\omega_d^2\sin^2(\omega_d t) + 2l\dot{\theta}A\omega_d\sin(\omega_d t)) + mg(l\cos\theta + A\cos(\omega_d t))$$

Vamos notar que existe uma força de atrito proporcional a velocidade da esfera. Esta força pode ser generalizada da seguinte forma:

$$Q_\theta = F_{atx}\frac{\partial x}{\partial \theta} + F_{aty}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Portanto, vamos encontrar F_{atx} e F_{aty}:

$$F_{atx} = -b\dot{x} = -bl\cos\theta\dot{\theta}$$

$$F_{aty} = -b\dot{y} = -bl\sin\theta\dot{\theta} + Ab\omega_d\sin(\omega_d t)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = l\cos\theta \ , \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = l\sin\theta$$

Então, Q_θ fica:

$$Q_\theta = -b\dot{\theta}l^2\cos^2\theta - b\dot{\theta}l^2\sin^2\theta + Abl\omega_d\sin\theta\sin(\omega_d t)$$

$$Q_\theta = -b\dot{\theta}l^2 + Abl\omega_d\sin\theta\sin(\omega_d t)$$

Finalmente, podemos determinar a equação de $\dot{\theta}$ a partir da definição da Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + mlA\omega_d\sin\theta\sin(\omega_d t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + mlA\omega_d\dot{\theta}\cos\theta\sin(\omega_d t) + mlA\omega_d^2\sin\theta\cos(\omega_d t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mlA\omega_d\dot{\theta}\cos\theta\sin(\omega_d t) - mgl\sin\theta$$

Chegamos então em:

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta\left[\frac{A\omega_d^2\cos(\omega_d t) + g}{l}\right] + \frac{Q_\theta}{ml^2}$$

Esta equação é a que descreve o movimento da massa ao redor do pivô.

1.2 Adequando para o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Claramente, a equação do movimento não possui uma solução analítica.Para resolver esta equação, devemos utilizar um método numérico.

O método utilizado para o desenvolvimento do applet é o de Runge-Kutta de 4ª Ordem.No apêndice A descrevemos como o método funciona para casos gerais.

Realizando uma mudança de variáveis ficamos com o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\sin\theta \left[\dfrac{A\omega_d^2 \cos(\omega_d t) + g}{l} \right] + \dfrac{1}{ml^2} \left(-bl^2\omega + Abl\omega_d \sin\theta \sin(\omega_d t) \right) \\ t = 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\theta} = f(t, \theta, \omega) \\ \dot{\omega} = g(t, \theta, \omega) \\ t = l(t, \theta, \omega) \end{cases}$$

Onde f,g e k são as funções acima representadas.Utilizaremos parâmetros extras ao escrever as funções (como t para função f) para que não haja confusão na construção do método numérico.

Portanto, a implementação em Javascript do método numérico é:

```
function f(tempo,theta,vel_angular) {
 temp = -(gravidade + Amp*omegad*omegad*Math.cos(omegad*tempo))*Math.sin(
     theta);
 temp = temp/(comprimento_pendulo1);
 temp = temp -((b_damping/massa1)*vel_angular) + (Amp*b_damping*omegad*Math.
     sin(theta)*Math.sin(omegad*tempo))/(massa1*comprimento_pendulo1);
 return temp;
}

function g(tempo,theta,vel_angular) {
  return vel_angular;
}

function k(tempo,theta,vel_angular) {
 return 1;
}

function rungeKuttaPendulo(timediff) {
 var h = timediff/1000;
 var a = [];
 var b = [];
 var c = [];
 var d = [];

 a[1] = g(tempo_n, theta_n_1 , vel_angular_n_1);
 a[2] = f(tempo_n, theta_n_1 , vel_angular_n_1);
 a[3] = k(tempo_n, theta_n_1 , vel_angular_n_1);

 b[1] = g(tempo_n + (h/2)*a[3] , theta_n_1 + (h/2)*a[1] , vel_angular_n_1 + (
     h/2)*a[2] );
 b[2] = f(tempo_n + (h/2)*a[3] , theta_n_1 + (h/2)*a[1] , vel_angular_n_1 + (
     h/2)*a[2] );
 b[3] = k(tempo_n + (h/2)*a[3] , theta_n_1 + (h/2)*a[1] , vel_angular_n_1 + (
     h/2)*a[2] );

 c[1] = g(tempo_n + (h/2)*b[3] , theta_n_1 + (h/2)*b[1] , vel_angular_n_1 + (
     h/2)*b[2] );
 c[2] = f(tempo_n + (h/2)*b[3] , theta_n_1 + (h/2)*b[1] , vel_angular_n_1 + (
     h/2)*b[2] );
 c[3] = k(tempo_n + (h/2)*b[3] , theta_n_1 + (h/2)*b[1] , vel_angular_n_1 + (
     h/2)*b[2] );

 d[1] = g(tempo_n + h*c[3] , theta_n_1 + h*c[1] , vel_angular_n_1 + h*c[2] );
 d[2] = f(tempo_n + h*c[3] , theta_n_1 + h*c[1] , vel_angular_n_1 + h*c[2] );
 d[3] = k(tempo_n + h*c[3] , theta_n_1 + h*c[1] , vel_angular_n_1 + h*c[2] );

 theta_n_1 = theta_n_1 + (h/6)*(a[1] + 2*b[1] + 2*c[1] + d[1]);
 vel_angular_n_1 = vel_angular_n_1 + (h/6)*(a[2] + 2*b[2] + 2*c[2] + d[2]);
 tempo_n = tempo_n + (h/6)*(a[3] + 2*b[3] + 2*c[3] + d[3]);

 delete a;delete b;delete c;delete d;
}
```

1.3 Mudança do ponto estável

Podemos perceber (experimentalmente) que o pêndulo muda seu comportamento quando escolhemos ângulos iniciais diferentes.

A mudança principal é o seu ponto estável : quando colocado a partir de um ângulo o mesmo fica estável acima do eixo Y.

Vamos tomar como exemplo os valores :

$$\text{Massa} = 13\ Kg$$
$$\text{Coef. Amortecimento} = 1\ Kg/s$$
$$\text{Vel. Angular Inicial} = 0\ rad/s$$
$$\text{Frequência de Vibração} = 5\ Hz$$
$$\text{Amplitude do Impulso} = 0.3\ m$$
$$\text{Comprimento do Pêndulo} = 3\ m$$
$$\text{Gravidade} = 9.8\ m/s^2$$

Com estes valores, vemos que o pêndulo se mantem estável na vertical a partir de $\pm 136^{\underline{o}} = \pm 2.374\ rad$ em relação ao eixo Y.

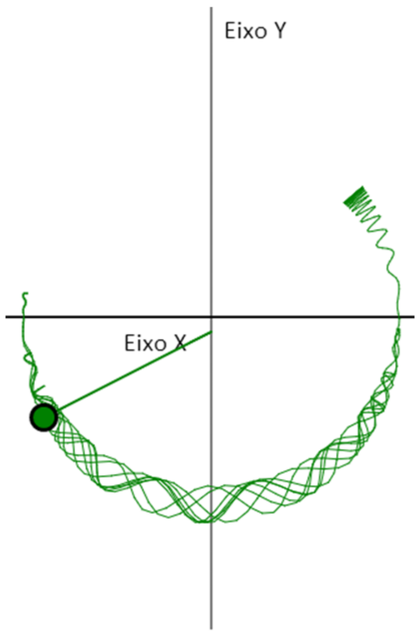


Figura 1: Traço do pêndulo após $14s$ *de movimento em um ângulo inicial de* $135^{\underline{o}}$

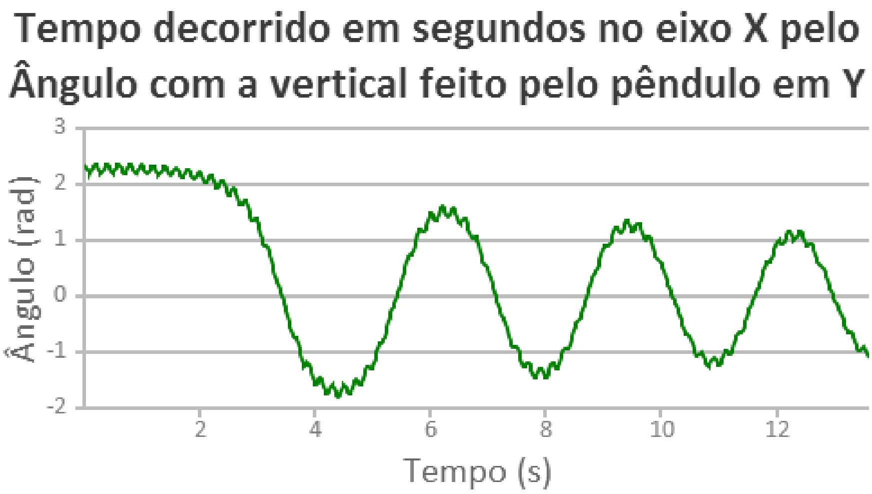


Figura 2: Gráfico do pêndulo após 14s de movimento em um ângulo inicial de 135º

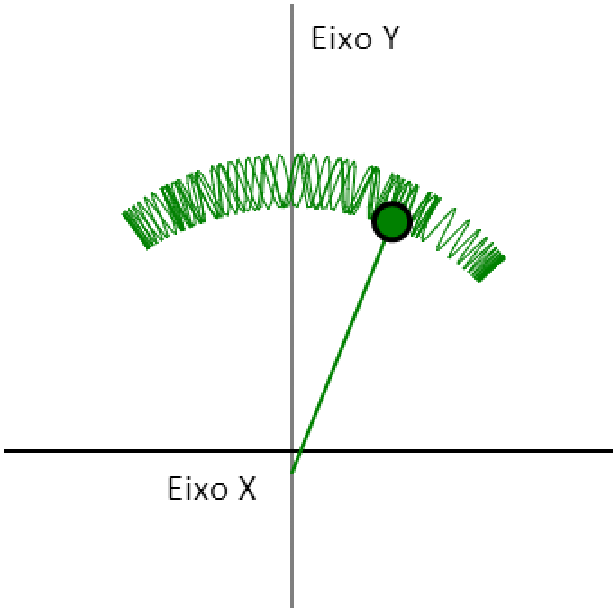


Figura 3: Traço do pêndulo após 14s de movimento em um ângulo inicial de 136º

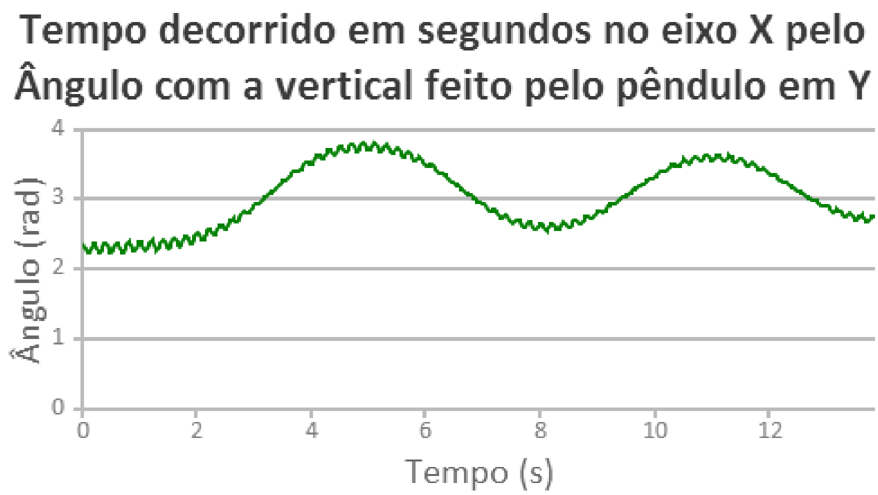


Figura 4: Gráfico do pêndulo após 14*s de movimento em um ângulo inicial de* 136º

1.4 Movimento caótico do pêndulo impulsionado

Este pêndulo apresenta comportamento caótico dependendo dos parâmetros iniciais que utilizamos, isto é, é impossível determinar seu movimento.

Vamos tomar como exemplo os seguintes parâmetros iniciais e comparar os traços e gráficos gerados:

$$\text{Massa} = 13\ Kg$$
$$\text{Coef. Amortecimento} = 0\ Kg/s$$
$$\text{Vel. Angular Inicial} = 0\ rad/s$$
$$\text{Frequência de Vibração} = 0.79\pi\ rad/s = 0.39\ Hz$$
$$\text{Amplitude do Impulso} = 0.7\ m$$
$$\text{Comprimento do Pêndulo} = 3\ m$$
$$\text{Gravidade} = 9.8\ m/s^2$$

Comparando os traços, gráficos e diagramas:

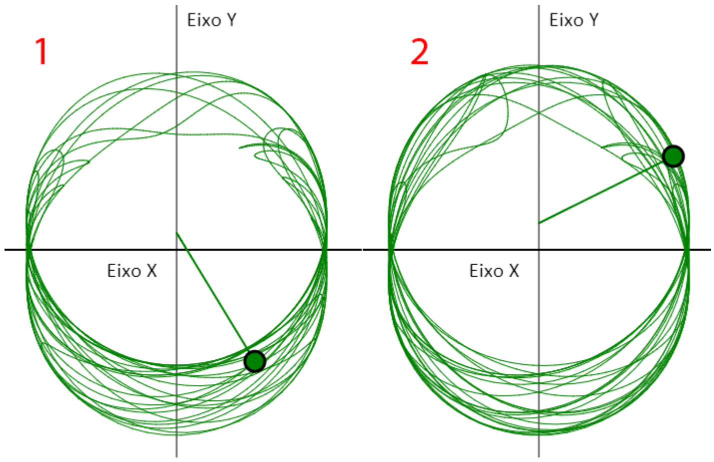


Figura 5: Traço dos pêndulos após $60s$ *de movimento em um ângulo inicial de* -108°

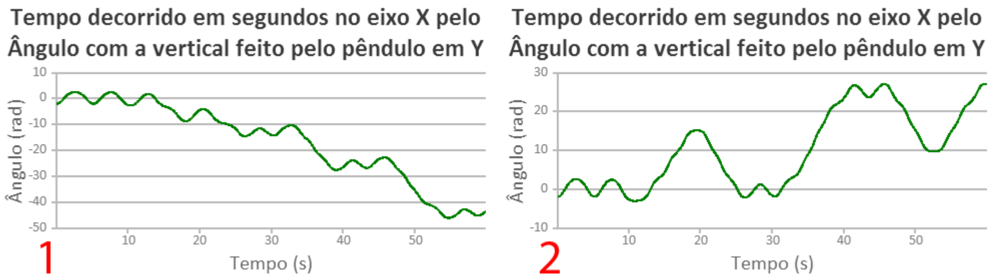


Figura 6: Gráfico dos pêndulos após 60*s de movimento em um ângulo inicial de* $-108^{\underline{o}}$

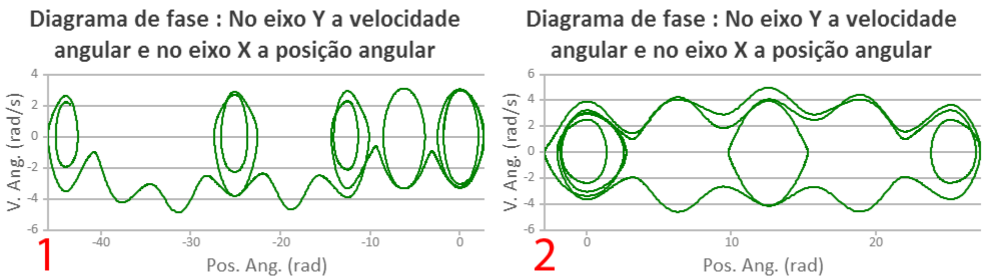


Figura 7: Diagramas de fase após 60*s de movimento em um ângulo inicial de* $-108^{\underline{o}}$

Através disso, podemos confirmar o movimento caótico que pode ser causado a partir de mesmos valores iniciais.

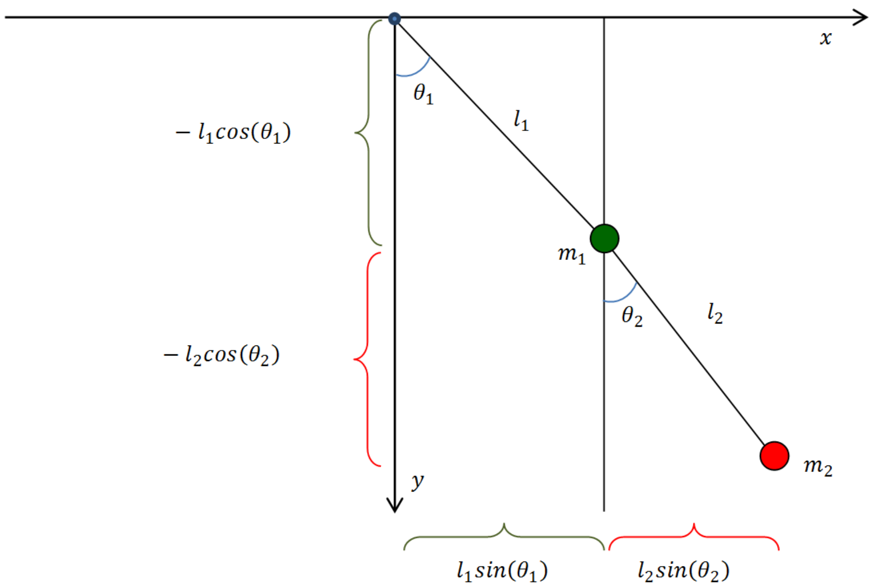
Capítulo 2

O Pêndulo Duplo

2.1 Dedução das equações

O pêndulo duplo consiste em um pêndulo acoplado a outro pêndulo através de sua massa.Em nosso caso, ilustraremos estes pêndulos como sendo simples.

Para certas condições, este sistema apresenta um comportamento caótico também. Vamos iniciar então com a dedução das equações do movimento deste sistema através da mecânica Lagrangiana.



Portanto, vamos calcular as energias envolvidas:
Massa 1:

$$\dot{x_1} = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \text{ e } \dot{y_1} = l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$
$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

Massa 2:

$$\dot{x_2} = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$
$$\dot{y_2} = l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$
$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

Então, T fica:

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$
$$T = \frac{m_1}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2)$$
$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_2}{2}(l_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

A energia potencial U depende somente de y, então:
Massa 1:

$$U = -m_1gl_1\cos\theta_1$$

Massa 2:

$$U = -m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

Então a energia U total será:

$$U = -m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$
$$U = -(m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2$$

A Lagrangiana será:

$$L = T - U$$
$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2}l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l_2^2\dot{\theta}_2^2\right) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)\,gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2$$

Para obter a equação para θ_1, devemos calcular os termos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)\, l_1^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) =$$

$$(m_1 + m_2)\, l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -l_1 g\,(m_1 + m_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Então, ficamos com:

$$(m_1 + m_2)\, l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ l_1 g\,(m_1 + m_2) \sin(\theta_1) = 0$$

Que simplificando por l_1, fica:

$$(m_1 + m_2)\, l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ g\,(m_1 + m_2) \sin(\theta_1) = 0$$

De forma análoga para θ_2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_2 m_2 g \sin\theta_2$$

Então, ficamos com:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 m_2 g \sin\theta_2 = 0$$

Que simplificando por l_2,fica :

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin\theta_2 = 0$$

Ambas as equações devem ser resolvidas em termos de $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ para serem utilizadas no método numérico. Ficamos então com:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g\,(2m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)\, m_2 \left(\dot{\theta}_2^2 l_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)}{l_1\,(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)\left(\dot{\theta}_1^2 l_1\,(m_1 + m_2) + g\,(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)}{l_2\,(2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

2.2 Adequando para o método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Conforme visto, as 2 equações do movimento para o pêndulo duplo não possuem uma solução analítica.

Vamos escrevê-las de forma que seja fácil utilizar o método de Runge-Kutta.

Fazendo a seguinte mudança de variáveis obteremos 4 equações diferenciais de primeira ordem:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1$$
$$\dot{\theta}_2 = \omega_2$$

Então:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{-g\left(2m_1+m_2\right)\sin\theta_1 - m_2 g\sin\left(\theta_1-2\theta_2\right) - 2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)m_2\left(\omega_2^2 l_2+\omega_1^2 l_1\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)}{l_1\left(2m_1+m_2-m_2\cos\left(2\theta_1-2\theta_2\right)\right)}$$
$$\dot{\omega}_2 = \frac{2\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\left(\omega_1^2 l_1\left(m_1+m_2\right)+g\left(m_1+m_2\right)\cos\theta_1+\omega_2^2 l_2 m_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)}{l_2\left(2m_1+m_2-m_2\cos\left(2\theta_1-2\theta_2\right)\right)}$$

Que podemos escrever na forma de funções da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = f_1\left(\theta_1,\theta_2,\omega_1,\omega_2\right) \\ \dot{\omega}_2 = f_2\left(\theta_1,\theta_2,\omega_1,\omega_2\right) \\ \dot{\theta}_1 = \omega_1 = f_3\left(\theta_1,\theta_2,\omega_1,\omega_2\right) \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 = f_4\left(\theta_1,\theta_2,\omega_1,\omega_2\right) \end{cases}$$

Onde em f_3 e f_4 realizamos o abuso de notação em relação aos parâmetros das funções.

Portanto, a implementação em Javascript do método numérico é:

```
function f1 (theta_1 , theta_2,vel_angular1,vel_angular2) {
 temp = -gravidade*(2*massa1 + massa2)*Math.sin(theta_1) - massa2*gravidade*Math.sin(theta_1 - 2*theta_2);
 temp = temp - 2*Math.sin(theta_1 - theta_2)*massa2*( Math.pow(vel_angular2,2)*comprimento_pendulo2 + Math.pow(vel_angular1,2)*comprimento_pendulo1*Math.cos(theta_1 -theta_2) );
 temp = temp / (comprimento_pendulo1*(2*massa1 + massa2 -massa2*Math.cos(2*theta_1 - 2*theta_2) ));
 return temp;
}

function f2 (theta_1 , theta_2,vel_angular1,vel_angular2) {
 temp = 2*Math.sin(theta_1 - theta_2);
 temp = temp * ( Math.pow(vel_angular1,2)*comprimento_pendulo1*(massa1 + massa2) + gravidade*(massa1 + massa2)*Math.cos(theta_1) + Math.pow(vel_angular2,2)*comprimento_pendulo2*Math.cos(theta_1 - theta_2) );
 temp = temp / (comprimento_pendulo2*(2*massa1 + massa2 - massa2*Math.cos(2*theta_1 -2*theta_2) ));
 return temp;
}

function rungeKuttaPendulo(timediff) {
 var h = timediff/1000;

 var a = [];
 var b = [];
 var c = [];
 var d = [];

 a[0] = f1(theta_n_1,theta_n_2,vel_angular_n_1,vel_angular_n_2);
 a[1] = f2(theta_n_1,theta_n_2,vel_angular_n_1,vel_angular_n_2);
 a[2] = vel_angular_n_1;
 a[3] = vel_angular_n_2;

 b[0] = f1(theta_n_1 + (h/2)*a[2] ,theta_n_2 + (h/2)*a[3] ,vel_angular_n_1 + (h/2)*a[0] ,vel_angular_n_2 + (h/2)*a[1] );
 b[1] = f2(theta_n_1 + (h/2)*a[2] ,theta_n_2 + (h/2)*a[3] ,vel_angular_n_1 + (h/2)*a[0] ,vel_angular_n_2 + (h/2)*a[1] );
 b[2] = vel_angular_n_1 + (h/2)*a[0];
 b[3] = vel_angular_n_2 + (h/2)*a[1];

 c[0] = f1(theta_n_1 + (h/2)*b[2] ,theta_n_2 + (h/2)*b[3] ,vel_angular_n_1 + (h/2)*b[0] ,vel_angular_n_2 + (h/2)*b[1] );
 c[1] = f2(theta_n_1 + (h/2)*b[2] ,theta_n_2 + (h/2)*b[3] ,vel_angular_n_1 + (h/2)*b[0] ,vel_angular_n_2 + (h/2)*b[1] );
 c[2] = vel_angular_n_1 + (h/2)*b[0];
 c[3] = vel_angular_n_2 + (h/2)*b[1];

 d[0] = f1(theta_n_1 + h*c[2] ,theta_n_2 + h*c[3] ,vel_angular_n_1 + h*c[0] ,vel_angular_n_2 + h*c[1] );
 d[1] = f2(theta_n_1 + h*c[2] ,theta_n_2 + h*c[3] ,vel_angular_n_1 + h*c[0] ,vel_angular_n_2 + h*c[1] );
 d[2] = vel_angular_n_1 + h*c[0];
 d[3] = vel_angular_n_2 + h*c[1];

 theta_n_1 = theta_n_1 + (h/6)*(a[2] + 2*b[2] + 2*c[2] + d[2]);
 theta_n_2 = theta_n_2 + (h/6)*(a[3] + 2*b[3] + 2*c[3] + d[3]);

 vel_angular_n_1 = vel_angular_n_1 + (h/6)*(a[0] + 2*b[0] + 2*c[0] + d[0]);
 vel_angular_n_2 = vel_angular_n_2 + (h/6)*(a[1] + 2*b[1] + 2*c[1] + d[1]);

 delete a; delete b; delete c; delete d;
}
```

2.3 Movimento caótico do pêndulo duplo

Este pêndulo também apresenta um movimento caótico com os mesmos parâmetros iniciais em lançamentos diferentes.

Vamos tomar os seguintes parâmetros iniciais e comparar os traços, gráficos e diagramas de fase de cada um:

$$\text{Massa } 1 = 13\ Kg$$
$$\text{Massa } 2 = 13\ Kg$$
$$\text{Vel. Angular Inicial } 1 = 0\ rad/s$$
$$\text{Vel. Angular Inicial } 2 = 0\ rad/s$$
$$\text{Comprimento do Pêndulo } 1 = 1\ m$$
$$\text{Comprimento do Pêndulo } 2 = 1\ m$$
$$\text{Ângulo Inicial } 1 = 90^o$$
$$\text{Ângulo Inicial } 2 = 125^o$$
$$\text{Gravidade} = 9.8\ m/s^2$$

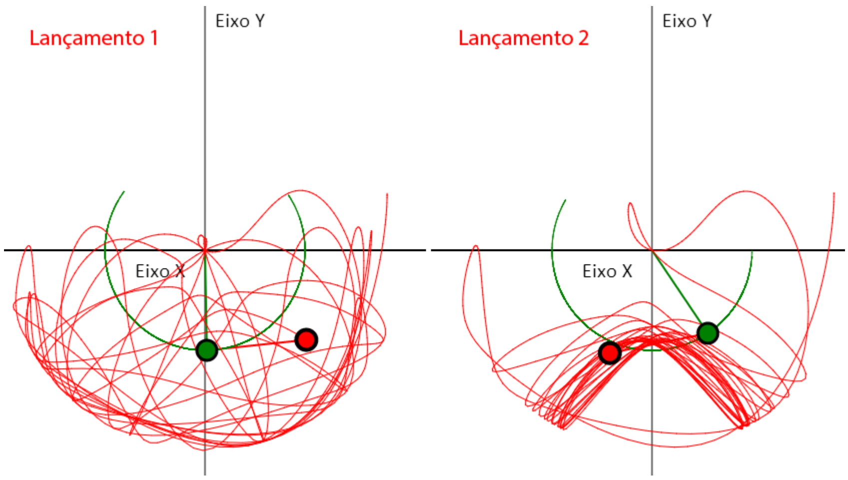


Figura 8: Traços dos pêndulos duplos após 30*s de movimento com os parâmetros iniciais definidos.*

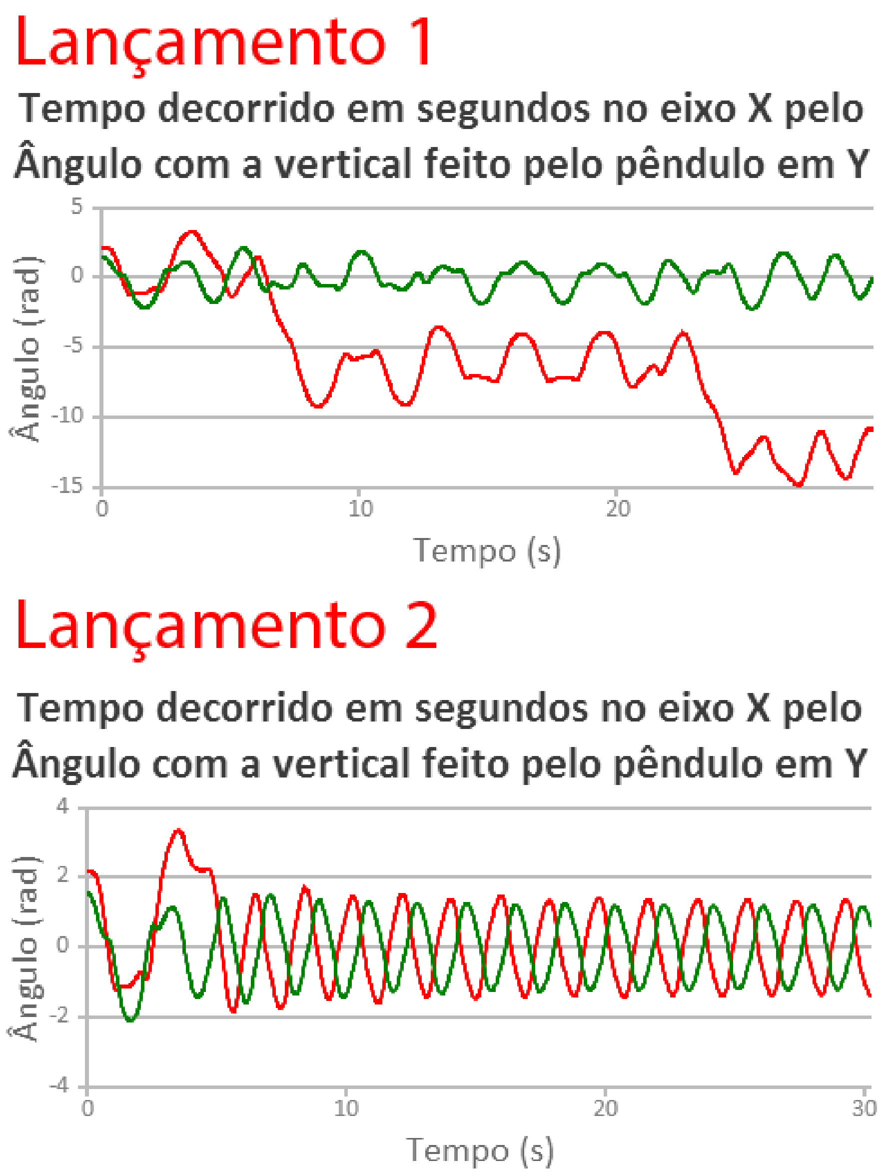


Figura 9: Gráficos dos pêndulos duplos após 30s de movimento com os parâmetros iniciais definidos.

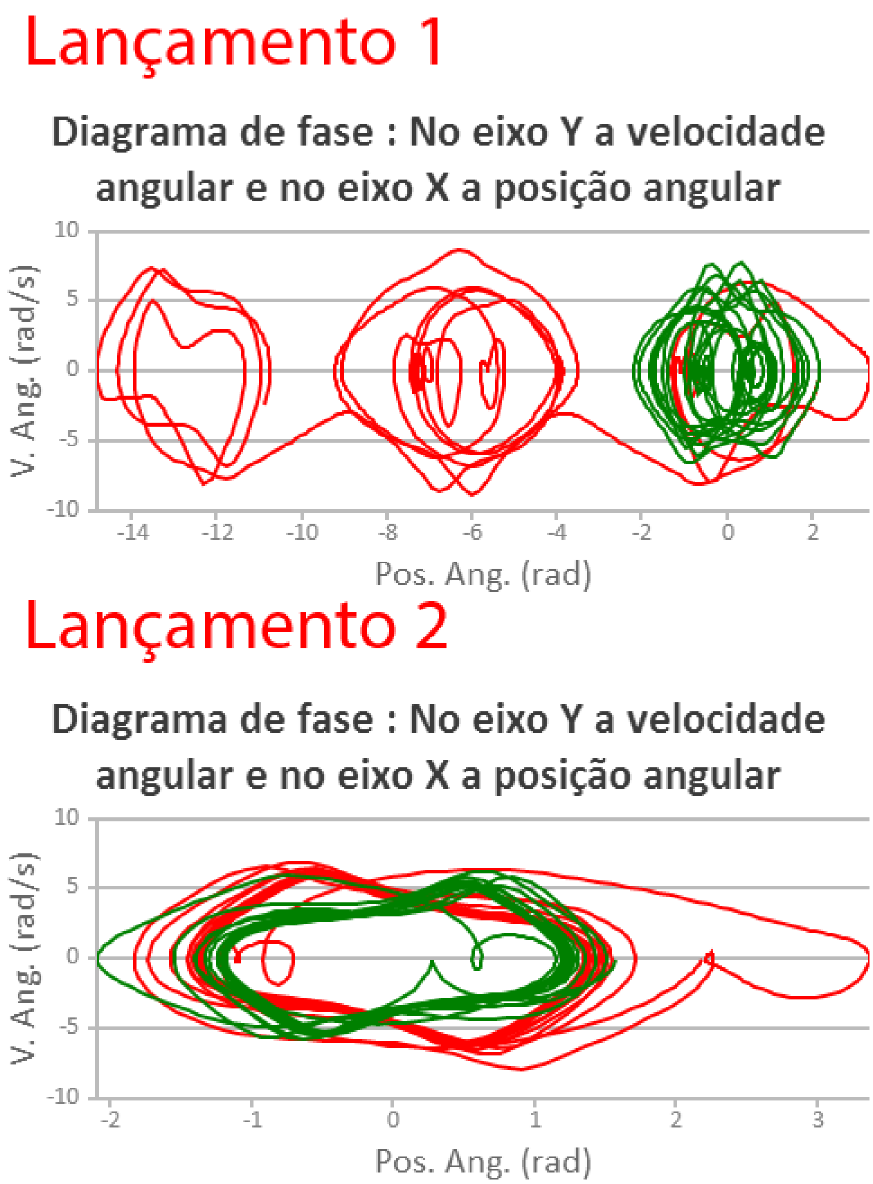


Figura 10: Diagramas de fase dos pêndulos duplos após 30*s de movimento com os parâmetros iniciais definidos.*

Através destes gráficos, podemos confirmar o movimento caótico que pode ser causado a partir de mesmos parâmetros iniciais.

Conclusões

De fato, os 2 tipos de pêndulos apresentados mostram resultados interessantes e que são mais fáceis de analisar do que um modelo real.

O primeiro, o pêndulo impulsionado, apresenta a mudança de ponto estável conforme variamos os parâmetros de oscilação do pivô. Em outros parâmetros podemos avaliar o movimento caótico que este apresenta.

Já o pêndulo duplo nos dá momentos interessantes de avaliação de como o caos age em sistemas relativamente simples.

Finalmente, estes applets desenvolvidos em HTML5 conseguem ser uma nova ferramenta de estudo e ensino por sua fácil utilização em dispositivos diferentes e por possuir uma melhor facilidade de desenvolvimento.

Apêndice A - Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Apresentação

Em análise numérica, os métodos de Runge-Kutta formam uma importante família de métodos iterativos implícitos e explícitos para resolução numérica de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Neste projeto utilizamos o método de 4ª ordem, sendo este o mais utilizado. Existem os métodos de ordem inferiores e superiores, mas para nossos propósitos o de 4ª ordem é o suficiente.

Vamos considerar uma EDO com PVI:

$$\begin{cases} y^{'} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Com um passo $h > 0$, devemos calcular:

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n2} &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n1}) \\ k_{n3} &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n2}) \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}) \end{aligned}$$

Para então, obter:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}\right)$$

Este é, então, o método mais utilizado em simulações físicas.

Generalizando para várias variáveis

Conforme visto em nossas deduções, as nossas equações não dependem de somente uma variável e sim várias.

O método de Runge-Kutta pode ser ampliado para estas equações, basta que haja uma transformação de variáveis para obter um sistema de equações diferenciais.

Então, suponha que tenhamos m variáveis com m equações:

$$\begin{cases} x_1^{'} = f_1\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \\ x_2^{'} = f_2\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \\ \vdots \\ x_m^{'} = f_m\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \end{cases}$$

Note que do lado direito não temos derivadas e que do lado esquerdo temos somente derivadas de primeira ordem.Estas equações podem ser resumidas na forma vetorial:

$$\bar{\mathbf{x}}^{'} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})$$

onde $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ é o vetor das variáveis e $\bar{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ o "vetor"das funções.Então, vamos definir o vetor de variáveis no passo n e $n+1$:

$$\bar{\mathbf{x}}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{m,n})$$
$$\bar{\mathbf{x}}_{n+1} = (x_{1,n+1}, x_{2,n+1}, ..., x_{m,n+1})$$

O método fica, então:

$$\bar{\mathbf{a}}_n = \bar{f}\left(\bar{\mathbf{x}}\right)$$
$$\bar{\mathbf{b}}_n = \bar{f}\left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{h}{2}\bar{\mathbf{a}}_n\right)$$
$$\bar{\mathbf{c}}_n = \bar{f}\left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{h}{2}\bar{\mathbf{b}}_n\right)$$
$$\bar{\mathbf{d}}_n = \bar{f}\left(\bar{\mathbf{x}} + h\bar{\mathbf{c}}_n\right)$$

Então, o vetor $\bar{\mathbf{x}}_{n+1}$ será:

$$\bar{\mathbf{x}}_{n+1} = \bar{\mathbf{x}}_n + \frac{h}{6}\left(\bar{\mathbf{a}}_n + 2\bar{\mathbf{b}}_n + 2\bar{\mathbf{c}}_n + \bar{\mathbf{d}}_n\right)$$

O vetor $\bar{\mathbf{x}}_{n+1}$ dará o estado das variáveis após o passo h.

Fica então fácil utilizar qualquer linguagem de programação para programar applets ou mesmo simulações numéricas e obter resultados para inúmeros problemas físicos que não possuem soluções analíticas.

Apêndice B – Frameworks Utilizados

Nos applets desenvolvidos e utilizados para obter os resultados foram utilizados alguns frameworks para facilitar o desenvolvimento.

O primeiro framework foi para organizar o documento HTML, sendo este o Bootstrap CSS Framework.

Já o utilizado para desenvolvimento em Javascript foram os seguintes:

1. JQuery - http://jquery.com
2. Kinetic JS - http://kineticjs.com

Foi utilizado também o framework CanvasJS Charts (http://canvasjs.com/) para mostrar gráficos das animações em tempo real.

Não é necessário utilizar estes frameworks para desenvolver o que foi visto, entretanto a utilização deles facilita muito o desenvolvimento além de gerar uma organização no código.

Apêndice C – Links para as simulações

Aqui estão os endereços para os applets que foram apresentados aqui:

Pêndulo Impulsionado:
http://www.ime.unicamp.br/ ra097254/penduloimpulsionado.html
Pêndulo Duplo:
http://www.ime.unicamp.br/ ra097254/penduloduplo-rk.html

Basta utilizar um navegador recente (Google Chrome, Mozilla Firefox, Opera , Safari ou Internet Explorer) para que as simulações sejam executadas.Não é necessário instalar nenhum plugin ou software adicional para executá-las.

Caso você tenha problemas na utilização das simulações,verifique se a versão do seu navegador é a mais recente e se todas as configurações relativas a drivers estão corretas em seu computador.

Bibliografia

[1] S. T. Thornton e J. B. Marion, Classical Dynamics. Thomson Brooks/Cole, 5a ediçao, 2004.

[2] W.E Boyce, R.C. DiPrima, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. LTC Books, 8a ediçao, 2005.

[3] M.A.G. Ruggiero, V.L.R Lopes, Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais. Pearson Makron Books, 2a ediçao, 2006.

[4] Halliday e Resnick, Fundamentos da Física, Volume II, Gravitação, Ondas e Calor. LTC Books, 8a ediçao, 2010.

[5] W3Schools – The world largest web development database, em http://www.w3schools.com/.

[6] JQuery - Javascript Framework, em http://www.jquery.com/.

[7] Kinetic JS – Javascript Framework, em http://kineticjs.com/.

[8] CanvasJS Charts – Javascript Charts Framework, em http://canvasjs.com/.

[9] Bootstrap - CSS Framework, em http://getbootstrap.com.