Ex 1

$y = 0$

- $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$

$D_f =]0, +\infty[$

- $\mathcal{C}_f \cap \{y = 0\} \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{0} = 1$

$x = 1 \quad A(1, 0)$

$\mathcal{C}_f \cap \{x = 0\}$ ~~(A~~ impossible car $x \neq 0$

$f(x) = 0 \iff x = 1$ $\qquad \frac{\ln x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Si $\lim_{\substack{a^+ \\ a^-}} f(x) = \infty \iff \mathcal{C}_f$ admet

$x = a$ $\quad$ A.V

Dojit-C.

$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln \frac{1}{x} = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln x$

$$\lim_{0^+} \frac{\ln x}{x} =$$

on pose $X = \frac{1}{x}$

$x \to 0^+$

$X \to +\infty$

$$\lim_{+\infty} X \times \ln \frac{1}{X} = \lim_{+\infty} -X \ln X$$

$$\frac{+}{+\infty}$$

$= -\infty$

$$\lim_{0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \times \underbrace{\ln x}_{-\infty} = -\infty$$

Si $\lim\limits_{a^+} f(x) = \infty$ $x = a$ A.V

$\lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$ $x = 0$ A.V

Si $\lim\limits_{\infty} f(n) = a \iff C_f$

admet une A.H $y = a$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{A.H}$$

$$f(x) = \frac{3x-5}{5x-2} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3\cancel{x}}{5\cancel{x}} = \frac{3}{5} \qquad y = \frac{3}{5} \quad \frac{\text{A.H}}{V(\pm\infty)}$$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{3\cancel{x}}{5\cancel{x}} = \frac{3}{5}$ $y = \frac{3}{5}$

A.H $V(+\infty)$

$n = \frac{2}{5}$ A.V

$y = \to 0$

$$\lim_{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow d°P < d°Q \quad \frac{a}{b} \times \frac{1}{x^{k}}$$

$$\frac{ax^{m}}{bx^{p}} = \frac{a}{b} \times X^{m-p}$$

$dp > dq$

$\frac{a}{b} x^{n-p} > 0$

$x^{(n)}$

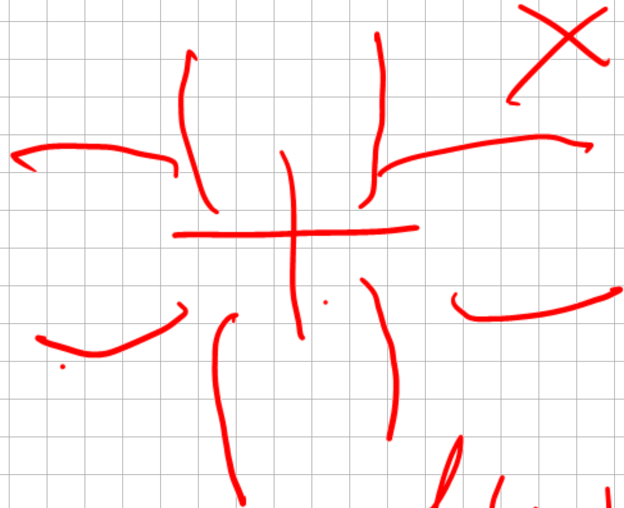
$\lim_{\infty} f(x) = a \cdot - ct$

$\lim_{\infty} f(x) = \infty$

$* \quad \lim_{\substack{+\infty \\ -\infty}} f(x) = a \longrightarrow y = a \qquad A \geq H$

| sinon

$\lim_{\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\begin{cases} \infty \\ 0 \\ a \neq \end{cases}$



$f(x) - ax$

$ax + b = A.O$

$f'(x) = 0$

$$\frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \qquad 1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1 \iff x = e^{1} = e$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

T tangent a C_f un pt $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

d'ap T.V. 2 e f admet un max

T_1 tangente en $x = e^2$

$T : y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2)$

$$= \left(\frac{1 - xe^x}{e^x}\right)(x - e^x) + \frac{xe^x}{e^x}$$

$$\tan \alpha = f'(x_0) = f'(1) = 1$$

$$\tan \alpha = 1 \iff \alpha = \tan^{-1}(1)$$

$$45^\circ \qquad \boxed{\text{Arctan}}$$

$$\tan 45 = 1 \iff \arg(1) = 45$$

$F(x)$ une Fonction

primitive de f

$x \longrightarrow F(x)$ est dérivable

$$F'(x) = f(x)$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln^{2}(x)\right)'$$

$$\left(f^{n}\right)' = n f' f^{n-1}$$

$n = 1$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\,\ln(x) \times (\ln x)'$$

$$\ln^{1}(x) \times \frac{1}{n} = \frac{\ln x}{x} = f(x)$$

$$\int_{1/e}^{e^2} |f(x) - 0| \, dx \quad \boxed{u.A}$$

$$\mathcal{C}_f - \mathcal{C}_g$$

$$\int_{1/e}^{1} (-f(x)) \, dx + \int_{1}^{e^2} f(x) \, dx \qquad \int |f(x) - g(x)| \, dx$$

$|x| = -x$ si $x < 0$

$|x| = x$ si $x > 0$

$f < 0 \quad \overline{|f|} = -f$

$f > 0 \quad |f| = f$

$$A = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{e^2} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$\int_a^b f(x)$

$\ln$ F $\|$ sans

$F(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$

$$= -\left[F(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[F(x)\right]_{1}^{e^2}$$

$\left[F(x)\right]_a^b$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{5}(x + e^{-x})$.

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{4}{5}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une unique solution α et que $\alpha \in]1,2\,;1,3[$.

4) soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$.

c) Déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

e) Comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} prés.

$f'(x) = \frac{4}{5}(1 - e^{-x})$

$x > 0$

$-x < 0$

$e^{-x} < 1$

$-e^{-x} > -1$

$1 - e^{-x} > 0$

$\frac{4}{5}(1 - e^{-x}) > 0$

$f'(x) \geq 0$

f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$f'(x) - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(1 - e^{-x}) - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(\cancel{1} - e^{-x} \cancel{-1})$

$= \frac{4}{5}(-e^{-x}) < 0$

$f'(x) - \frac{4}{5} < 0$ $\quad f'(x) < \frac{4}{5}$

$0 < e^{-x} < 1$

$0 > -e^{-x} > -1$

$\frac{4}{5} \times 1 > \frac{4}{5}(1 - e^{-x}) > 0$

• $h(x) = f(x) - x$

h est continue sur $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$

• $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$

or $0 < f'(x) < \frac{4}{5} < 1$

$h \searrow$

• $h(1,1) = +$

$h(1,3) = -$

D + TVI $\exists ! \alpha \in]1,1.$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{5}(x + e^{-x})$.

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{4}{5}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une unique solution α et que $\alpha \in]1,2\,;1,3[$.

4) soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$.

c) Déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

d) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

e) Comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} prés.

$P_n = \{ n \in \mathbb{N},\ U_n > 0 \}$

pour $n = 0$ $U_0 = \frac{1}{2} > 0$

P_0 est vrai

Supposons $U_n > 0$

Dem $U_{n+1} > 0$

on f

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{5}(x + e^{-x})$.

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \le f'(x) \le \frac{4}{5}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une unique solution α et que $\alpha \in]1, 2;$

4) soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge 0$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$.

c) Déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$. 4

d) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

e) Comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} prés.

on a $U_n > 0$

$f(U_n) > f(0) = \frac{4}{5}(0 + e^{-0})$

$U_{n+1} > \frac{4}{5} > 0$

$U_n > 0$ $f'(x)$

$a < b$ $f \nearrow$

$f(a) < f(b)$

$U_n > 0 \quad \forall_n \quad e^{-U_n} > 0$

$$\underbrace{\frac{1}{5}\left(U_n + e^{-U_n}\right) > 0}_{U_{n+1} > 0}$$

Si $\exists M \quad |f'(x)| < M \quad \forall x \in \underline{I} = \underline{[0,+\infty[}$

$\forall a,b \in I \quad \dfrac{|f(a) - f(b)|}{|a-b|} < M = \dfrac{1}{5}$

$\underline{a = U_n}, \underline{b = \alpha} \quad \alpha > 0$

$f(\alpha) = \alpha$

$$\left|\frac{f(U_n) - f(\alpha)}{U_n - \alpha}\right| < \frac{1}{5}$$

$$|f(u_n) - \alpha| < \frac{4}{5} |u_n - \alpha|$$

Si f est dérivable I, si il $\exists\, m \mid |f'(x)| < m$.

$\forall\, a, b \in I \quad \dfrac{|f(a) - f(b)|}{|a-b|} \leq m$.

$0 < f'(x) < \frac{4}{5} \longrightarrow |f'(x)| < \frac{4}{5}$ ① $I = [0, +\infty[$

$u_n > 0$

$\alpha > 0$

$$\frac{|f(u_n) - f(\alpha)|}{|u_n - \alpha|} < \frac{4}{5}$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5} |u_n - \alpha|$$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5}(x + e^{-x})$.

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \le f'(x) \le \frac{4}{5}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une unique solution α et que $\alpha \in]1,2\,;1,3[$.

4) soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge 0$.

   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$.

   c) Déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

   d) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$. $= \alpha$

   e) Comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} prés.

$P_n = \{ |u_n - \alpha| < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$n = 0$

$u_0 - \alpha < 1$

$\frac{1}{2}$

$1,2 < \alpha < 1,3$

$-1,3 < -\alpha < -1,2$

$1 - 1,3 < 1 - \alpha$

$0,5 - 1,3 < \frac{1}{2} - \alpha < 0,5 - 1,2$

$0 < |u_n - \alpha| \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$0 \quad \left|\frac{4}{5}\right| < 1$

$u_n = \alpha - 1,3$

$|u_n - \alpha| \to 0$

$u_n \to \alpha$

$a < b$

$b < c$

$a < c$

$|u_n - \alpha| < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Dem $|u_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$|u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$\lim \left(\frac{4}{5}\right)^n < 10^{-3}$ ln

I) 1)a) Représenter le nuage de points de la série (X , Y) dans un repère orthogonal

b) Ce nuage permet-il d'envisager un ajustement affine ? Justifier.

c) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique. $\frac{5}{1}$

2) Calculer, à 10^{-3} près, le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série (X , Y).

II) Dans cette partie, tous les résultats seront donnés à 10^{-3} près. On pose $T = \frac{5}{X}$ $T = \frac{5}{X}$

$\frac{5}{2}$ $\frac{5}{3}$ 1,6666 $\frac{5}{4}$

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	5	2,5	1,667	1,25	1	0,833	0,714	0,625
y_i	6	3,5	2,6	2,2	2	1,8	1,7	1,6

2) a) Calculer le coefficient r_2 de corrélation linéaire de la série (T, Y).

b) Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite D de régression de Y en T.

c) Donner alors, en utilisant la droite D, une estimation des dépenses de l'entreprise pour l'année 2022.

2010

$$\boxed{y = 6x + y}$$

$$y = \underbrace{0{,}97\,\bar{x} + 1{,}}$$

$$T = 0{,}455$$