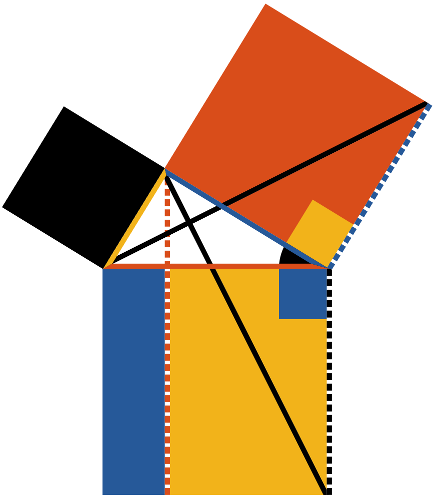
ПЕРВЫЕ ШЕСТЬ КНИГ
НАЧАЛ ЕВКЛИДА

В КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ЦВЕТНЫЕ СХЕМЫ И ЗНАКИ
ВМЕСТО БУКВ ДЛЯ БОЛЬШЕГО УДОБСТВА ОБУЧАЮЩИХСЯ

ОЛИВЕРА БИРНА



github.com/jemmybutton

2019 изд. 0.4

Введение

Искусства и науки достигли такого уровня развития, что облегчить их усвоение не менее важно, чем расширить их границы. Иллюстрация если и не уменьшает времени обучения, то по крайней мере делает его более приятным. Цель этой работы, однако, больше, чем просто иллюстрация; мы не вводим цвета лишь ради развлечения или услаждения взгляда *определенными сочетаниями окраски и формы*, но чтобы помочь разуму в его поисках истины, обогатить средства обучения и распространить постоянные знания. Пожелай мы услышать мнение великих о важности и полезности геометрии, мы могли бы вспомнить любого философа со времен Платона. У греков в древности, как и в школе Песталоцци и прочих в наши дни, геометрия преподается как лучшее упражнение для ума. В сущности, «Начала» Евклида стали, по общему признанию, основой математической науки во всем цивилизованном мире. Это не должно вызывать удивления, учитывая, что эта величественная наука не только больше прочих пригодна к тому, чтобы пробудить дух исследования, возвысить разум и усилить способности к рассуждению, но и составляет лучшее введение в наиболее полезные и важные для человека профессии. Арифметика, топография, гидростатика, пневматика, оптика, физическая астрономия и т. д. — все полагаются на предложения геометрии.

Многое, однако, зависит от того, как наука преподнесена учащемуся, и все же лучшие и самые простые методы применяются редко. Об утверждениях, которые открываются на самом пороге науки ученику, пусть даже и обладающему достаточным пониманием, говорится столь же мало, сколь неблагоприятное предубеждение он получает относительно будущего изучения этого занимательного предмета. Другими словами, «формальности и технические подробности настолько выставляются напоказ, что почти скрывают за собой действительность. Бесконечные озадачивающие повторения, не добавляющие ясности суждениям, делают доказательства запутанными и туманными и скрывают от ученика последовательность рассуждений». В результате у учащегося возникает отторжение, и предмет, предназначенный улучшить мыслительные способности и привить привычку к вдумчивости, через сухое и черствое изложение опускается до уровня скучного упражнения для памяти. Целью учителя должно быть возбуждение любопытства и пробуждение бесчисленных спящих сил молодых умов, но там, где более всего требуются образцы совершенства, попытки достичь его немногочисленны, при том, что выдающиеся примеры привлекают внимание и порождают подражания. Цель данной работы — представление метода обучения геометрии, получившего одобрение многих ученых этой страны, а также Франции и Америки. Предложенный здесь план состоит в обращении к глазам, самому чувствительному и всестороннему из наших органов, превосходство которого в запечатлевании своего предмета в разуме подтверждается неопровержимой максимой, выраженной известными словами Горация:

Цитата, по-видимому, из предисловия к «Первым шести книгам Начал Евклида» Дионисия Ларднера

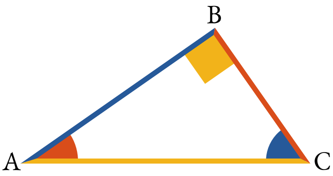
Segnius irritant animos demissa per aurem
Quam quae sunt oculis subjecta fidelibus.

Что к нам доходит чрез слух,
то слабее в нас трогает сердце,
Нежели то, что само представляется верному глазу.

Перевод М. Дмитриева

Язык целиком состоит из знаков, и те знаки лучшие, какие выполняют свое назначение с наибольшей точностью и быстротой. Так, для всех обычных целей применяются слышимые знаки, называемые словами, которые считаются слышимыми, доносятся ли они непосредственно через уши или опосредованно через глаза в виде букв. Геометрические построения — это не знаки, но принадлежности геометрической науки, задача которых — показать относительные размеры своих частей с помощью процесса рассуждения, называемого доказательством. Такое рассуждение чаще всего доносилось в виде слов, букв и черных, нераскрашенных диаграмм, но поскольку использование цветных символов, знаков и диаграмм в искусствах и науках делает ход рассуждения более точным, а усвоение более скорым, в данном случае они были соответствующим образом внедрены.

Этот весьма заманчивый способ донесения знаний столь действенен, что «Начала» Евклида могут быть усвоены менее чем за треть от времени, какое требуется обычно, а в памяти они сохранятся, напротив, намного дольше. Эти факты были установлены во множестве экспериментов, проведенных как автором, так и другими, внедрившими его задумку. Рецепт же короток и очевиден: буквы, присвоенные точкам, линиям или другим частям построения, в действительности всего лишь произвольные имена и представляют те в доказательстве, вместо этого части, получающие различные цвета, называют сами себя, так как их формы и соответствующие цвета представляют их в доказательстве.



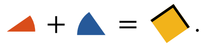
Чтобы дать лучшее представление об этой системе и преимуществах, получаемых от ее внедрения, возьмем прямоугольный треугольник и выразим некоторые его свойства как цветами, так и общепринятым способом.

Некоторые свойства прямоугольного треугольника ABC, выраженные общепринятым способом:

1. Угол BAC с углами BCA и ABC вместе равны двум прямым углам или дважды углу ABC.
2. Угол CAB с углом ACB вместе равны углу ABC.
3. Угол ABC больше как BAC, так и BCA.
4. Угол BCA, как и угол CAB, меньше угла ABC.
5. Если из угла ABC вычесть угол BAC, остаток будет равен углу ACB.
6. Квадрат стороны AC равен сумме квадратов сторон AB и BC.

Те же свойства, выраженные раскрашиванием различных частей:

1. 

   То есть красный угол вместе с желтым углом, вместе с синим углом равны дважды желтому углу, равны двум прямым углам.
2. 

   Или, словами, красный угол, добавленный к синему углу, равен желтому углу.
3. 

   Желтый угол больше красного или синего.
4. 

   И красный, и синий углы меньше желтого.

5.  −  = .
Иначе говоря, желтый угол за вычетом синего угла равен красному углу.

6. $\overline{\qquad}^{2} = \overline{\qquad}^{2} + \overline{\qquad}^{2}$.

То есть квадрат желтой линии равен сумме квадратов синей и красной.

Цвета в устных доказательствах дают нам то важное преимущество, что позволяют обратиться к глазам и ушам одновременно, так что для обучения геометрии и другим наукам в аудитории эта система является лучшей из когда-либо предложенных, что явствует из приведенных примеров.

Отсюда очевидно, что отсылки в тексте к построению считываются быстрее и надежнее, если приводить формы и цвета их частей или называть части по их цветам, чем если называть части и буквы на построении. Помимо превосходной легкости, система также замечательна тем, что помогает сосредоточиться и полностью исключает вредоносную, хотя и распространенную практику передоверять всё доказательство памяти, до тех пор, пока рассуждения, факты и доводы не оставят отпечаток в понимании.

Опять же если мы, говоря о свойствах фигур перед аудиторией, упомянем цвет части или частей, о которых идет речь, как то: красный угол, синяя линия или линии и т. п., обозначенные часть или часть будут сразу же видны всем; совсем не то что сказать про угол ABC, треугольник PFQ, фигуру EGKt и так далее, поскольку буквы приходится разыскивать по одной, прежде чем ученики составят в уме ту конкретную величину, о которой идет речь, что часто может привести к путанице и ошибкам, а также к потере времени. Кроме того, если части, принятые равными, окрашены в один цвет на построении, разуму не придется отклоняться от рассматриваемого объекта, то есть такая схема наглядно представляет части, равенство которых предстоит показать, и учащийся не упускает из виду эти сведения в течение всего рассуждения. Но какими бы ни были преимущества представленного плана, если даже не прибегать к нему всегда, он может стать мощным дополнительным инструментом, наряду с другими методами, для введения в материал, более быстрого запоминания или более надежного закрепления в памяти.

Опыт тех, кому приходилось создавать системы для закрепления фактов пониманием, доказывает, что цветные представления, такие как картинки, вырезанные фигуры, диаграммы и т. п., укладываются в сознании много легче, чем простые, ничем не выделяющиеся высказывания. Любопытно, что поэтам эта истина знакома лучше, чем математикам, многие современные поэты указывают на подобную систему донесения знаний, один из них выразился так:

Ведь жаждет знаний человек, и истины лучи
Охотней тронут пониманья глаз,
Чем уши звуков лесть,
Чем всякий вкус язык...

В оригинале автор, по-видимому по ошибке, приводит другой перевод тех же строк Горация. Здесь на его месте перевод фрагмента из поэмы Марка Эйкенсайда (1721–1770) The Pleasures Of Imagination.

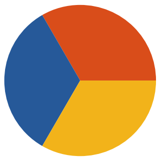
Это, возможно, единственное улучшение, которое получила геометрия со времен Евклида, а если до того и были значимые геометры, то успех Евклида затмил их в памяти до такой степени, что многие достижения в этой области приписываются ему, подобно Эзопу среди баснописцев. Также нелишним будет отметить, что как осязаемые построения представляют единственный способ донесения геометрии до слепых, так и зримая система не менее приспособлена к нуждам глухих и немых.

Следует уделить внимание объяснению того, что цвета не имеют иного отношения к линиям, углам и другим величинам, кроме как обозначают их. Математическая линия, представляющая собой длину без ширины, не может иметь цвета, но место соприкосновения двух цветов на одной плоскости дает хорошее представление о том, что такое линия в математике. Запомним, что, строго говоря, мы имеем в виду такое соприкосновение, а не цвет, когда говорим о черной линии, красной линии или линиях и т. п.

Цвета и раскрашенные диаграммы могут, на первый взгляд, показаться неуклюжим способом донесения правильных представлений о свойствах и частях математических фигур и величин, однако, как мы увидим, они являются средством более изящным и емким, чем любые предложенные ранее.

Теперь мы дадим определение точке, линии и поверхности и докажем теорему, чтобы показать верность этого суждения.

Точкой называют то, у чего есть положение, но нет величины, или точка — это одно лишь положение, лишенное длины, ширины и толщины. Следующее описание, возможно, более пригодно для объяснения сущности математической точки тем, кто еще не освоил идею, имеющую приведенное выше обманчивое определение.



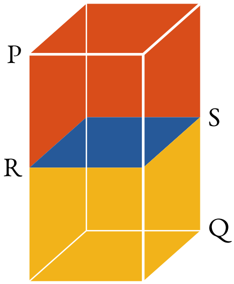
Пусть три цвета встречаются и покрывают участок бумаги. В месте, где они встречаются, цвет не будет ни синим, ни желтым, ни красным, так как оно не занимает пространства на бумаге, а если бы занимало, то относилось бы к синей, красной или желтой части. Но все же оно существует и имеет положение без величины, так что место встречи трех цветов на плоскости без особенных сложностей дает хорошее представление о математической точке.

Линия — это длина без ширины. С помощью цветов почти так же, как и выше, понятие линии можно донести следующим образом:

Пусть два цвета встречаются и покрывают участок бумаги. Где они встречаются, цвет не будет ни красным, ни синим. Следовательно, соединение не занимает никакой части плоскости, и значит, не имеет ширины, а только длину. Отсюда легко получить представление о том, что понимается под математической линией. Для иллюстрации было бы достаточно одного цвета, отличного от цвета бумаги или другой поверхности, на которую нанесен рисунок. Итак, в дальнейшем, когда мы будем говорить о красной линии, синей линии или линиях и т. п., в виду будет иметься место соприкосновения с плоскостью, на которой они нарисованы.

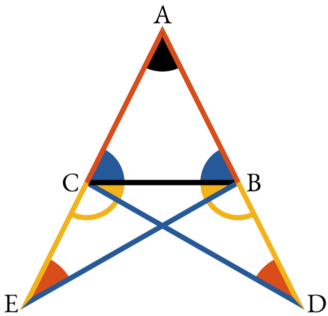
Поверхность — это то, у чего есть длина и ширина, но нет толщины.

Рассматривая объемное тело (PQ), мы сразу понимаем, что у него есть три измерения, а именно: длина, ширина и толщина. Теперь предположим, что одна часть тела (PS) красная, а другая (QR) желтая, и эти цвета раздельны и не смешиваются. Синяя поверхность (RS), разделяющая эти части, или, иначе говоря, разделяющая тело без потери материала, должна быть без толщины и иметь только длину и ширину. Это очевидно из рассуждений, подобных примененным выше для определения, а точнее для описания точки или линии.

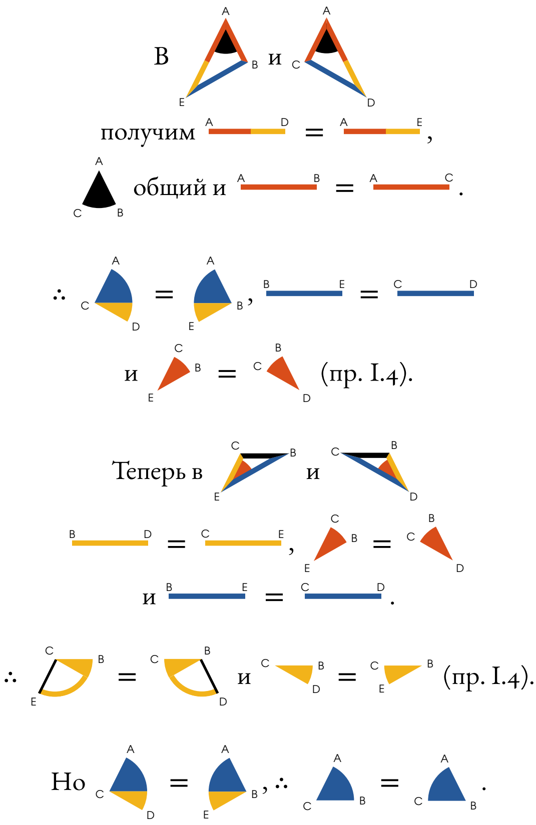


Для того чтобы прояснить, как именно применяются эти принципы, мы выбрали предложение из первой книги.

В равнобедренном треугольнике ABC внутренние углы при основании ABC и ACB равны, а если продлить стороны AB и AC, внешние углы при основании BCE, CBD также будут равны.



Продлим AB и AC,
сделаем BD = CE,
проведем BE и CD.



ч. т. д.

Если использовать буквы

Продлим равные стороны AB и AC через концы третьей стороны BC. На любой из продленных частей BD возьмем любую точку D и от другой отсечем AE, равную AD (пр. I.3). Теперь взятые таким образом на продленных сторонах точки E и D соединим прямыми линиями DC и BE с противолежащими концами третьей стороны треугольника.

В треугольниках DAC и EAB стороны DA и AC соответственно равны EA и AB, а прилежащий угол A общий обоим. Следовательно (пр. I.4), линия DC равна BE, угол ADC равен AEB, а угол ACD — углу ABE. Если из равных линий AD и AE вычесть равные AB и AC, остатки BD и CE также будут равны. А значит, в треугольниках BDC и CEB стороны BD и DC соответственно равны CE и EB и углы D и E, заключенные между этими сторонами, также равны. А значит (пр. I.4), углы DBC и ECB, заключенные между третьей стороной BC и продолжениями сторон AB и AC, также равны. Кроме того, углы DCB и EBC равны, если равные углы вычитаются из углов DCA и EBA, равенство которых было показано выше, а значит остатки, то есть углы ABC и ACB, противолежащие равным сторонам, будут равны.

Следовательно, в равностороннем треугольнике... и т. д.

ч. т. д.

Поскольку здесь нашей целью было представить систему, а не объяснить какой-либо набор предложений, мы взяли то, что выше, из самого курса. В школах и других общественных учебных заведениях с подобными построениями помогут цветные мелки, для индивидуального использования очень удобны цветные карандаши.

Мы очень рады, что начала математики теперь составляют часть любого достойного образования для женщин, поэтому мы призываем обратить внимание на этот привлекательный метод донесения знания и дальнейшую работу по его развитию тех, кто заинтересован или вовлечен в образование для дам.

В заключение отметим, что поскольку можно так же надежно и быстро обратиться к чувствам зрения и слуха тысячи, как и одного, *миллионы* можно обучить геометрии и другим отраслям математики с большой легкостью; это способствовало бы успехам образования больше, чем что-либо, что можно назвать, поскольку это научило бы людей, как думать, а не, что характерно для образования, чтó думать, в чем и берет начало его большая ошибка.

НАЧАЛА ЕВКЛИДА

КНИГА I

Определения

1
Точка есть то, что не имеет частей.

2
Линия — это длина без ширины.

3
Концы линии — точки.

4
Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

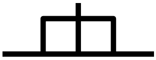
5
Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

6
Концы поверхности — линии.

7
Плоская поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.

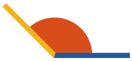
8
Плоский угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости встречающихся друг с другом, но не направленных одинаково.

9
Прямолинейный угол есть наклонение друг к другу двух пересекающихся и не совпадающих прямых линий.



10

Когда прямая восстановленная на другой прямой образует равные смежные углы, каждый из этих углов называется *прямым углом*, а каждая из этих прямых называется *перпендикуляром* к другой.



11

Тупым называется угол больше прямого.

12

Острым называется угол меньше прямого.

13

Граница есть то, что является оконечностью чего-либо.

14

Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.

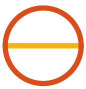
15

Круг есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии, называемой окружностью, в которой есть точка, все прямые падающие на окружность из которой равны.

16

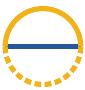
Точка в круге, все прямые к окружности из которой равны называется *центром.*

17



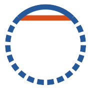
Диаметр круга есть прямая линия, проходящая через центр и ограниченная с обеих сторон окружностью.

18



Полукруг есть фигура, содержащаяся между диаметром и отсекаемой им частью окружность.

19



Сегментом круга называется фигура, содержащаяся между прямой линией и частью окружности, ей отсекаемой.

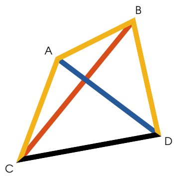
20

Прямолинейной фигурой называется фигура, содержащаяся между прямыми линиями.

21

Треугольником называется прямолинейная фигура с тремя сторонами.

22



Четырехсторонняя фигура та, у которой четыре стороны. Прямые линии 

и 

, соединяющие вершины противоположных углов четырехсторонней фигуры называются *диагоналями.*

23

Многоугольник есть прямоугольная фигура с более чем четырьмя сторонами.

24

Равносторонним называется треугольник, все стороны которого равны.

25

Треугольник у которого равны две стороны называется *равнобедренным.*

26

Разносторонним называется треугольник со всеми неравными сторонами.

27

Треугольник у которого есть прямой угол называется *прямоугольным.*

28

Тупоугольным называется треугольник, у которого есть тупой угол.

29

Остроугольным называется треугольник, все углы которого острые.

30

Из четырехсторонних фигур, *квадратом* называется та, все стороны которой равны между собой, и все углы прямые.

31

Ромбом называется четырехсторонняя фигура, все стороны которой равны, но углы не прямые.

32

Прямоугольник есть четырехугольник, все углы которого прямые, но не все стороны равны.

33

Ромбоид есть фигура, противоположные стороны которой равны, но ни все стороны равны, ни все углы прямые.

34

Все прочие четырехугольники называются *неправильными.*

35

Параллельными называются такие прямые линии, которые находясь в одной плоскости и будучи продолженными в обе стороны неограниченно не встречаются.

Постулаты

I

Будем считать, что прямую линию можно провести от любой точки до любой другой точки.

II

Будем считать, что ограниченную прямую линию можно непрерывно продолжить по прямой.

III

Будем считать, что из всякого центра и на любом расстоянии от центра можно построить круг.

Этими тремя положениями описываются разрешенные к использованию инструменты: *линейка* и *циркуль*. При этом линейка не имеет делений. А циркуль пригоден только для построения окружностей, то есть измерять и откладывать расстояния с его помощью также нельзя.

Аксиомы

I

Равные одному и тому же величины равны между собой.

II

Если к равным величинам прибавляются равные, то и суммы будут равны.

III

Если из равных величин вычитаются равные, то и остатки будут равны.

IV

Если к неравным величинам прибавляются равные, то суммы будут неравными.

V

Если из неравных величин вычитаются равные, остатки будут неравными.

VI

Удвоенные одной и той же или равных величин равны.

VII

Половины одной и той же или равных величин равны.

VIII

Совпадающие, или занимающие в точности равное пространство величины равны.

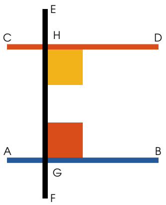
IX

Целое больше его части.

X

Две прямых линии не содержат пространства.

Аксиомы XI и XII обычно включаются в качестве IV и V в состав постулатов.



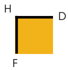
XI

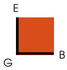
Все прямые углы равны между собой.

XII

Если две прямые (

) встречаются с третьей 

так, что два внутренних угла по одну сторону 

и 

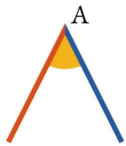
меньше двух прямых углов, эти две линии пересекутся, если их продлить по ту сторону, с которой углы меньше двух прямых углов.

Пояснения

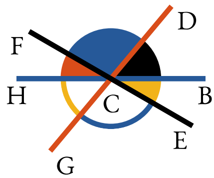
Двенадцатую аксиому можно сформулировать любым из следующих способов:

1. Две расходящиеся прямых линии не могут быть параллельны одной и той же прямой линии.
2. Если прямая линия пересекает одну из двух параллельных прямых линий, то она пересекает и вторую.
3. Через данную точку может быть проведена лишь одна прямая, параллельная данной.

Основными предметами геометрии являются изложение и объяснение свойств *фигур*, а фигура определяется как отношение, существующее между границами пространства. Пространство же или величина бывает трех видов: *линейного*, *поверхностного*, и *телесного*.



Углы справедливо называть четвертым видом величин. Угловые величины очевидно состоят из частей, и, следовательно, их нужно признать разновидностью количеств. Ученик не должен считать, что величина угла зависит от длин прямых линий, заключающих его, и мерой взаимного расхождения которых он является. *Вершиной* угла называется точка, в которой встречаются *стороны* угла, как, например, A.



Угол часто обозначается одной буквой, когда в вершине сходятся только его стороны. Так, красная и синяя линия образуют желтый угол, который иначе назывался бы углом A. Но если более двух линий встречаются в одной точке, с использованием старых методов во избежание путаницы было бы необходимо использовать три буквы, чтобы обозначить угол при этой точке, так что буква, обозначающая вершину, всегда помещалась бы посередине. Так, черная и красная линия, встречающиеся в точке C, образуют синий угол, и обычным способом он бы обозначался как угол FCD или DCF.

Линии FC и CD, стороны угла, а точка C — его вершина. Таким же образом черный угол обозначался бы DCB или BCD. Красный и синий углы вместе, или угол HCD вместе с FCD, составляли бы угол HCD, и так далее для других углов.

Когда стороны угла продлеваются далее вершины, углы, образованные ими по обе стороны вершины называются *вертикально противоположными* друг другу:

так  и  вертикально противоположны.

Совмещением называют действие, когда одну величину можно представить помещенной поверх другой так, что она точно покрывает ее, или так, что все их части в точности совпадают.

Линию называют *продленной*, когда она вытягивается, продолжается или увеличивается в длине, а увеличение в длине, которое получает линия, называется *продленной частью* или ее *продолжением*.

Полная длина линии или линий, заключающих фигуру, называется ее *периметром*. Линия, проведенная из центра круга к окружности, называется *радиусом*. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*. Все линии, рассматриваемые в первых шести книгах, считаются лежащими в одной плоскости.

В евклидовой геометрии разрешается пользоваться только *линейкой* и *циркулем*. Постулаты призваны донести это ограничение.

Аксиомы геометрии — это некоторые общие предложения, истинность которых принимается как самоочевидная, и которую нельзя показать с помощью доказательства.

Предложения — это результаты в геометрии, полученные через процесс рассуждения. В геометрии есть два типа предложений, *задачи* и *теоремы*.

Задача — это предложение, в котором предлагается что-либо сделать, например провести линию, соответствующую данным условиям, описать круг, построить фигуру и т. п.

Решение задачи состоит в том, чтобы показать, как можно сделать требуемое с помощью линейки и циркуля.

Доказательство состоит в обосновании того, что действия, представленные в решении, позволяют достичь требуемого.

Теорема — это предложение, в котором требуется доказать истинность некоего утверждения. Это утверждение должно быть выведено из аксиом и определений или ранее и независимо установленных истин. Это и является целью доказательства.

Задача подобна постулату.

Теорема напоминает аксиому.

Постулат — это задача, решение которой предопределено.

Аксиома — это теорема, истинность которой принимается как данность, без доказательства.

Следствие — это умозаключение, выводимое непосредственно из предложения.

Примечание — это заметка или наблюдение, касающееся предложения, не содержащее умозаключений достаточной важности, чтобы называться *следствием*.

Лемма — это предложение, введенное исключительно с целью доказательства более важного предложения.

Обозначения

$\therefore$ обозначает слово *следовательно*.

$\because$ обозначает слово *поскольку*.

$=$ обозначает слово *равно*. Знак равенства можно читать как *равно* или *равны*, род и число на геометрическую строгость не влияют.

$\neq$ обозначает то же, как если бы было написано *не равно*.

$>$ обозначает *больше чем*.

$<$ обозначает *меньше чем*.

$\ngtr$ обозначает *не больше чем*.

$\nless$ обозначает *не меньше чем*.

$+$ читается как *плюс* и обозначает сложение; будучи помещенным между двумя и более величинами, обозначает их сумму.

$-$ читается как *минус* и обозначает вычитание; будучи расположенным между двумя количествами, указывает на то, что последнее вычитается из первого.

$\times$ этот символ обозначает произведение двух или более чисел, будучи помещенным между ними в арифметике или алгебре. Но в геометрии он обычно используется для обозначения *прямоугольника*, когда помещен между «двумя прямыми линиями, содержащими один из его прямых углов». *Прямоугольник* может также обозначаться точкой между двумя смежными сторонами.

$: \; :: \; :$ обозначает *аналогию* или *пропорцию*. Так, если A, B, C и D представляют четыре величины и A имеет к B такое же отношение, как C к D, то пропорция кратко записывается следующим образом:

$$A : B :: C : D, \; A : B = C : D, \text{ или } \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Это равенство или одинаковость отношений читается:

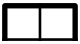
как A к *B, так и C* к *D;* или *A* к *B, как C* к *D.*

∥ обозначает *параллельно к.*

⊥ обозначает *перпендикулярно к.*

 обозначает *угол.*

 обозначает *прямой угол.*

 обозначает *два прямых угла.*

 или  кратко обозначает *точку.*

Квадрат, построенный на линии, кратко записывается так: ———^2.

Таким же образом дважды квадрат обозначается так: $2 \cdot \text{———}^2$.

опр. обозначает *определение.*

пост. обозначает *постулат.*

акс. обозначает *аксиому.*

гип. обозначает *гипотезу.* Здесь важно отметить, что *гипотеза* — это условие, которое принимается как данное. Так, гипотеза предложения, данного во введении, в том, что треугольник равнобедренный, или что две его стороны равны.

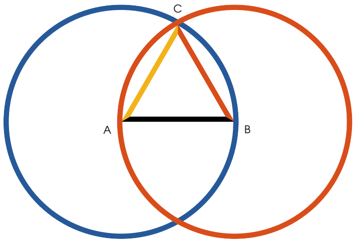
постр. обозначает *построение. Построения* — это изменения, сделанные в исходном изображении добавлением линий, углов, кругов и т. п. с целью приспособления его к доказательству или решению задачи. Условия, при которых сделаны эти изменения так же бесспорны, как и содержащиеся в гипотезе. Например, если мы делаем угол равным данному углу, то эти два угла равны по построению.

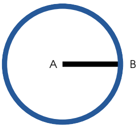
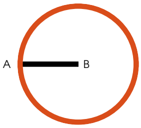
ч. т. д. обозначает *что и требовалось доказать.*

Книга I

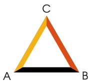
Предл. I. Задача

Н*а данной ограниченной прямой* AB *построить равносторонний треугольник.*

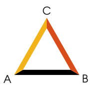


Опишем  и  (пост. III).

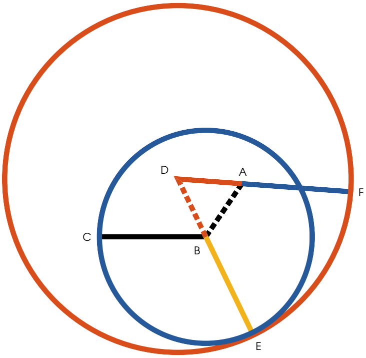
Проведем CA и BC (пост. I).

Тогда  равносторонний.

Поскольку AB = CA (опр. 15)
и AB = BC (опр. 15),
∴ CA = BC (акс. I),

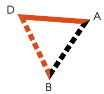
и значит,  и есть искомый треугольник.

ч. т. д.

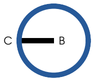
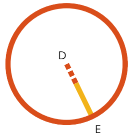


От *данной точки* A *отложить прямую, равную данной прямой* BC.

Проведем AB (пост. I),

построим  (пр. I.1),

продлим BD (пост. II),

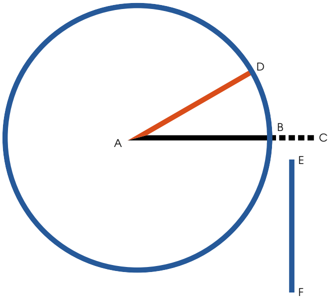
опишем  (пост. III) и  (пост. III).

Продлим DA (пост. II),
тогда искомая прямая — это AF.

Поскольку ED = DF (опр. 15)
и BD = DA (постр.),
∴ BE = AF (акс. III),
но (опр. 15) BC = BE = AF.

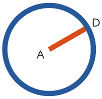
∴ AF, проведенная из данной точки A, равна данной прямой BC (акс. I).

ч. т. д.



От *большей*  *из двух данных прямых отнять прямую, равную меньшей* .

Проведем  =  (пр. I.2).

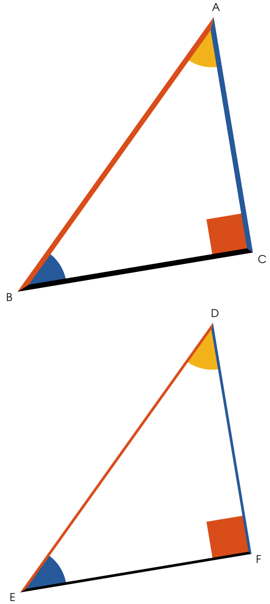
Опишем  (пост. III).

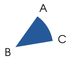
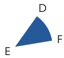
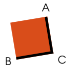
Тогда  = .

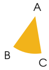
Поскольку  =  (опр. 15)
и  =  (постр.).

∴  =  (акс. I).

ч. т. д.



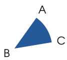
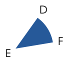
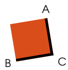
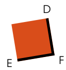
Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждая каждой ( =  *и*  =  *), и по равному углу (*  =  *), содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию (*  =  *), и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны каждый каждому (*  =  *и*  =  *).*

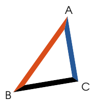
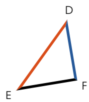
Представим, что два треугольника расположены таким образом, что вершина одного из двух равных углов,  или  , совпадает с вершиной другого и  совпадает с  .

Тогда  при наложении совпадет с  .

∴  совпадает с  ,
или же две прямые будут содержать пространство, что невозможно (акс. X).

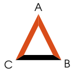
∴  =  ,

 =  и  =  .

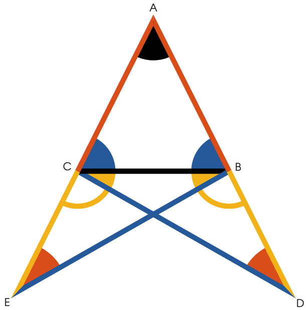
∴ треугольники  и  совпадают при наложении.

∴ они равны во всех отношениях.

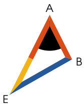
ч. т. д.

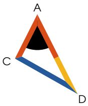
Углы *при основании любого равнобедренного треугольника* 

равны между собой, и по продолжении равных сторон углы под основанием будут равны между собой.

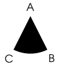


Продлим AB и AC (пост. II),
возьмем BD = CE (пр. I.3),
проведем BE и CD.

Тогда в 

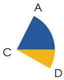
и 

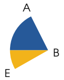
получим AD = AE (конст.),



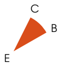
общий обоим,

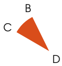
и AB = AC (гип.).

∴ 

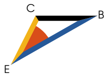
= 

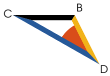
, BE = CD

и 

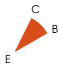
= 

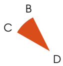
(пр. I.4).

Так же у 

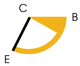
и 

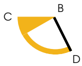
получим BD = CE,



= 

и BE = CD,

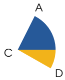
∴ 

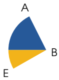
= 

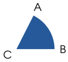
и 

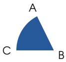
= 

(пр. I.4),

но 

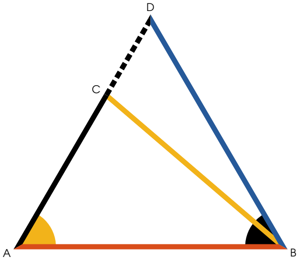
= 

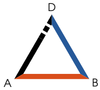
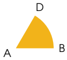
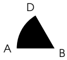
, ∴ 

= 

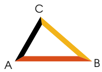
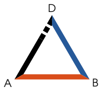
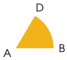
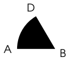
(акс. III).

ч. т. д.



Если у любого треугольника  *два угла*  *и*  *равны между собой, то и стороны*  *и*  *, стягивающие равные углы, будут равны.*

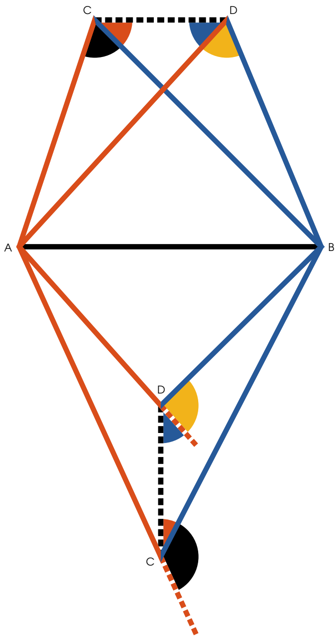
Предположим, что стороны не равны и одна из них  больше, чем другая  , тогда отрежем от нее  =  (пр. I.3) и проведем  .

Тогда в  и 
 =  (постр.),
 =  (гип.)
и  общая обоим.

∴ эти треугольники равны (пр. I.4),
часть равна целому, что невозможно.

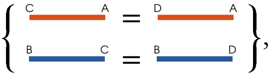
∴ ни одна из сторон 
или  не больше другой,
∴ они равны.

ч. т. д.

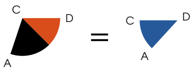


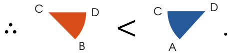
По одну сторону одной и той же прямой  *нельзя построить два разных треугольника с равными друг другу смежными сторонами*  =  *и*  = .

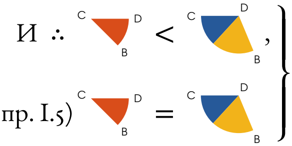
Если два треугольника построены на одном основании и по одну сторону от него, то вершина одного может находиться вовне другого, внутри или на одной из его сторон.

Если такое возможно, то построим два треугольника таких, что ,

затем проведем , тогда

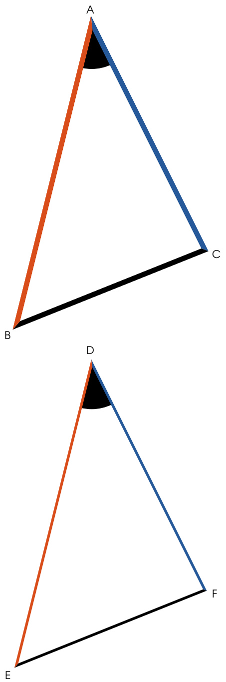
 (пр. I.5).

.

, что невозможно.

Следовательно, смежные стороны таких двух треугольников не могут быть равны.

ч. т. д.

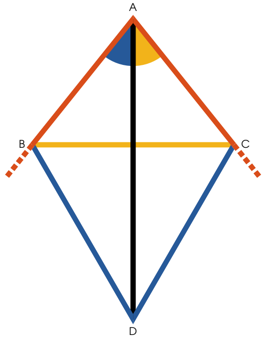


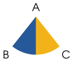
Если у двух треугольников по две попарно равных стороны (CA = FD и AB = DE), а также равные основания (BC = EF), то углы BAC и EDF, заключенные между равными сторонами, равны.

Если совместить равные основания BC и EF так, чтобы треугольники находились по одну сторону, а их равные стороны AB и DE, CA и FD были смежными, вершина одного будет совпадать с вершиной другого (пр. I.7).

∴ стороны AB и CA будут совпадать с DE и FD и ∴ BAC = EDF.

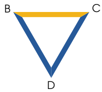
ч. т. д.



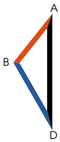
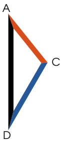
Рассечь *данный прямолинейный угол*  *пополам.*

Возьмем  =  (пр. I.3).

Проведем , на которой

построим  (пр. I.1),

проведем .

Поскольку в  и 

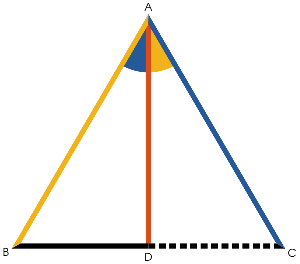
 =  (постр.),

 =  (постр.)

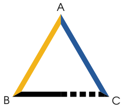
и  общая обоим,

∴  =  (пр. I.8).

ч. т. д.

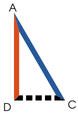


Рассечь *данную ограниченную прямую линию*  *пополам.*

Построим  (пр. I.1),

проведем , делая  =  (пр. I.9).

Тогда  =  (пр. I.4),

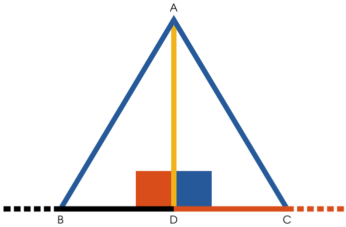
ведь в  и 

 = ,  =  (постр.)

и  общая обоим.

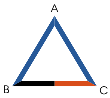
Следовательно, данная линия рассечена пополам.

ч. т. д.

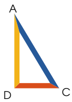


И*з данной точки* D *на данной прямой* B C *построить перпендикуляр.*

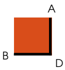
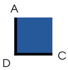
Возьмем любую точку C на данной прямой,
отсечем D B = C D (пр. I.3),

построим  (пр. I.1),

проведем A D, и она будет
перпендикуляром к данной прямой.

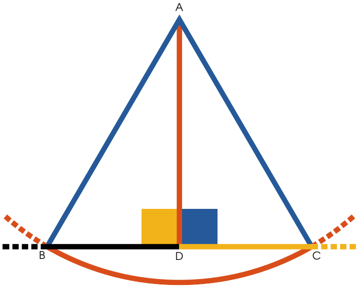
Поскольку в  и 

A B = C A (постр.),
C D = D B (постр.)
и A D общая обоим,

∴  =  (пр. I.8).

∴ A D ⊥ B C (опр. 10).

ч. т. д.



Провести *перпендикуляр к данной неограниченной прямой* BC *из данной не находящейся на ней точки* A.

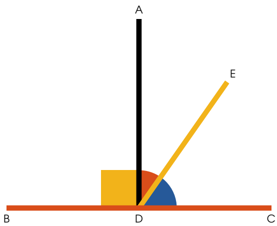
Взяв данную точку A в качестве центра по одну сторону прямой и любое расстояние, позволяющее достигнуть другой стороны, построим BC.

Возьмем DB = CD (пр. I.10),
проведем AB, CA и AD.

Тогда AD ⊥ BC.

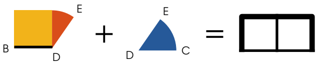
Поскольку в BAD и DAC
DB = CD (постр.),
AD общая обоим
и AB = CA (опр. 15),
∴ BAD = ADC (пр. I.8),
и ∴ AD ⊥ BC (опр. 10).

ч. т. д.



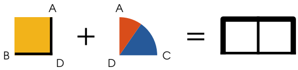
Если прямая линия ED*, восставленная на другой прямой линии* BC*, образует с ней углы, то это будут либо два прямых угла, либо их сумма будет равна двум прямым углам.*

Если ED ⊥ BC, тогда

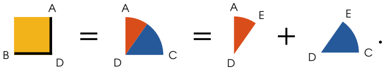


(опр. 10).

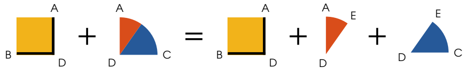
Но если ED будет не ⊥ к BC, проведем AD ⊥ BC (пр. I.11).



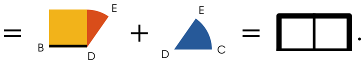
(постр.),



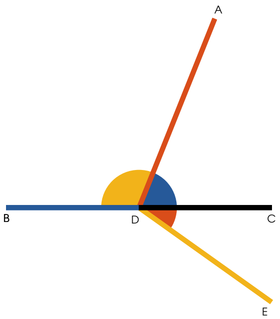
∴



(акс. II)



ч. т. д.



Если две прямые BD и DC образуют с третьей AD смежные углы, находясь по разные стороны от нее, и эти углы ABD и ADC равны двум прямым углам, то эти прямые будут лежать на одной прямой.

Действительно, пусть ED,
а не DC будет продолжением BD,
тогда ABD + ADE = .

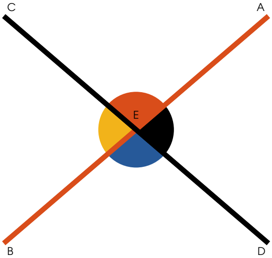
Но, согласно гипотезе, ABD + ADC =

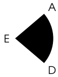
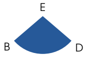
∴ ADE = ADC (акс. III),
что невозможно (акс. IX).

∴ ED не является продолжением BD,
и то же можно показать для любой другой
прямой линии, за исключением DC.

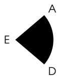
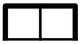
∴ DC является продолжением BD.

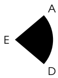
ч. т. д.



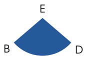
Е*сли две прямых линии*  *и*  *пересекаются, вертикальные углы*  *и* ,  *и*  *будут равны между собой.*

 +  =  (пр. I.13).

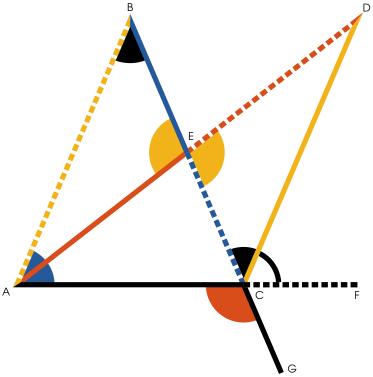
 +  =  (пр. I.13).

∴  =  (акс. III).

Таким же образом можно показать,

что  = .

ч. т. д.



При *продолжении стороны треугольника* *внешний угол* *будет больше любого из противолежащих ему внутренних углов* *или* .

Сделаем = (пр. I.10),
проведем и продлим до = ,
проведем .

В и

= , = (пр. I.15)

и = (постр.).

∴ = (пр. I.4),

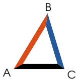
∴ > .

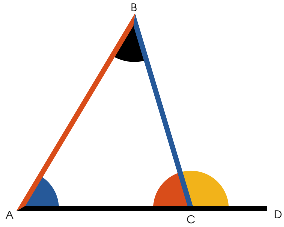
Так же можно показать, что при
продлении > ,

и, следовательно, , который

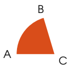
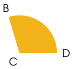
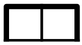
= , будет > .

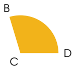
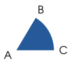
ч. т. д.

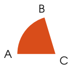
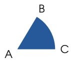
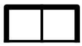
В*о всяком треугольнике*  *любые два угла, взятые вместе, меньше двух прямых углов.*



Продлим , тогда

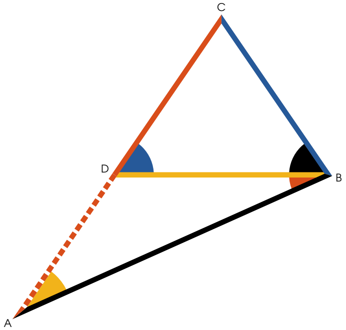
 +  = .

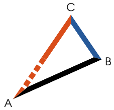
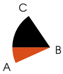
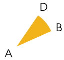
Но  >  (пр. I.16).

∴  +  < .

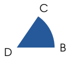
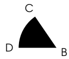
И таким же образом можно показать, что любые два других угла вместе будут меньше двух прямых углов.

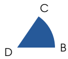
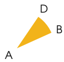
ч. т. д.

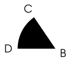
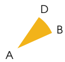


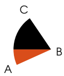
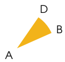
В*о всяком треугольнике*  *если одна сторона*  *больше другой* *, то противолежащий большей стороне угол будет больше противолежащего меньшей стороне угла, т. е.*  > .

Сделаем  =  (пр. I.3),
проведем .

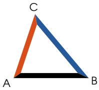
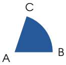
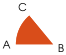
Тогда  =  (пр. I.5).

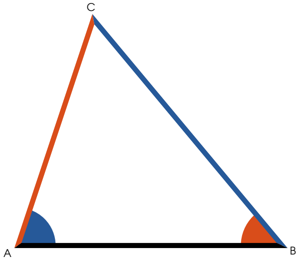
Но  >  (пр. I.16).

∴  > ,

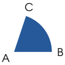
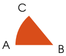
и тем более  > .

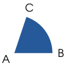
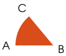
ч. т. д.

В *о всяком треугольнике*  *если один угол*  *больше другого*  *, то сторона*  *, противолежащая большему углу, больше стороны*  *, противолежащей меньшему.*



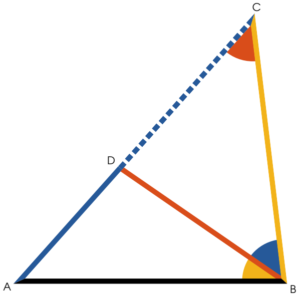
Если  не больше , тогда
 = или < .

Если  = , тогда
 =  (пр. I.5),
что противоречит гипотезе.

 также не меньше ,
поскольку если  < ,
то  <  (пр. I.18)
что противоречит гипотезе.

∴  > .

ч. т. д.



Любые *две стороны* $\overline{DA}$ *и* $\overline{BD}$ *всякого треугольника* $\triangle ADB$, *взятые вместе, больше третьей стороны* $\overline{AB}$.

Продлим $\overline{DA}$
и сделаем $\overline{CD} = \overline{BD}$ (пр. I.3).

Проведем $\overline{BC}$.

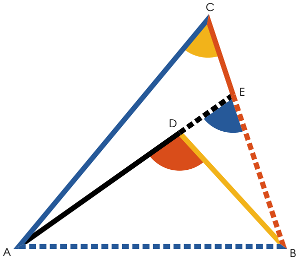
Тогда, поскольку $\overline{CD} = \overline{BD}$ (постр.),
$\angle DBC = \angle ACB$ (пр. I.5).

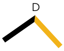
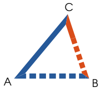
$\therefore$ $\angle ABC > \angle ACB$ (акс. IX).

$\therefore$ $\overline{DA} + \overline{CD} > \overline{AB}$ (пр. I.19).

И $\therefore$ $\overline{DA} + \overline{BD} > \overline{AB}$.

ч. т. д.



Е*сли из любой точки*  *внутри тре-угольника*  *провести прямые линии к концам стороны* *, эти прямые вместе меньше двух других сторон треугольника и будут заключать больший угол.*

Продлим ,

 +  >  (пр. I.20),

добавим к каждой ,

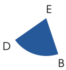
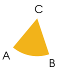
 +  >  +  (акс. IV).

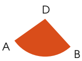
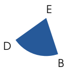
Таким же образом можно показать, что

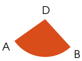
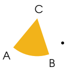
 +  >  + ,

∴  +  >  + ,

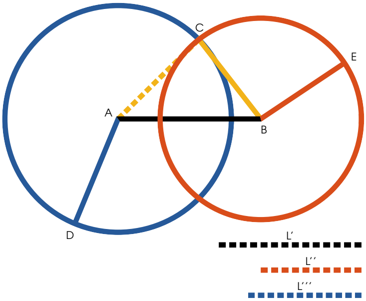
что и требовалось доказать.

Далее  >  (пр. I.16)

и так же  >  (пр. I.16).

∴  > .

ч. т. д.

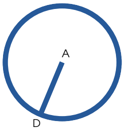
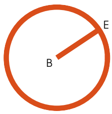


Из трех прямых линий {L′, L″, L‴} *таких, что любые две вместе длиннее третьей, составить треугольник.*

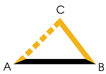
Предположим, AB = L′ (пр. I.3).

Проведем BE = L″ и AD = L‴ } (пр. I.2).

Взяв AD и BE как радиусы,

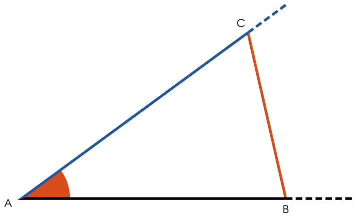
опишем  и  (пост. III).

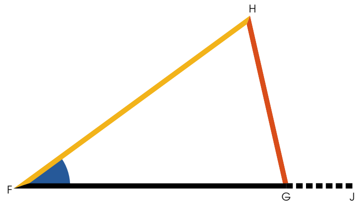
Проведем CA и BC.

Тогда  будет искомым треугольником.

Поскольку AB = L′,
BC = BE = L″
и CA = AD = L‴ } (постр.).

ч. т. д.





П*ри данной точке* 

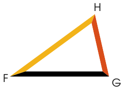
на данной прямой 

построить угол, равный данному прямолинейному углу 

.

Проведем 

между любыми двумя точками на сторонах данного угла.

Построим 

(пр. I.22) такой,
что 

= 

,


= 

и 

= 

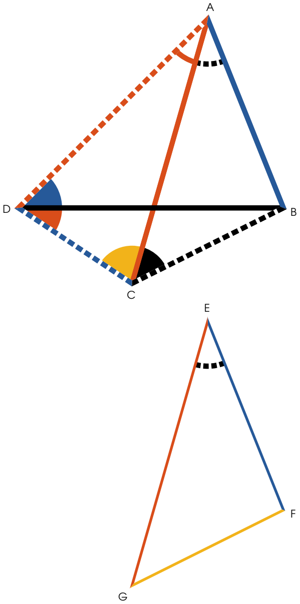
.

Тогда 

= 

(пр. I.8).

ч. т. д.



*Если у двух треугольников по две стороны соответственно равны друг другу (*AB = EF *и* AD = GE*) и угол, заключенный между ними в одном* DAB*, больше, чем в другом* GEF*, то сторона* DB*, противолежащая большему углу, больше стороны, противолежащей меньшему* FG.

Сделаем CAB = GEF (пр. I.23)
и CA = GE (пр. I.3),
проведем CD и BC.

Поскольку CA = AD (акс. I, гип., постр.)

∴ DA C = DAC (пр. I.5), но DBC < DAC,

и ∴ DBC < DBC.

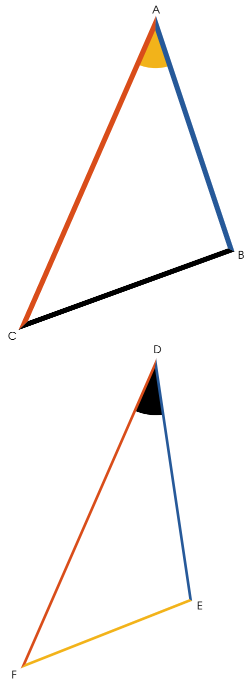
∴ DB > BC (пр. I.19).

Но BC = FG (пр. I.4).

∴ DB > FG.

ч. т. д.

Если у двух треугольников две стороны AB *и* CA *соответственно равны двум сторонам* DE *и* FD *другого, но основания неравны, то угол над большим основанием* BC *одного треугольника меньше угла под меньшим* EF *другого.*



A C B = , > или < D F E.

A C B не равен D F E,

поскольку если A C B = D F E,

то CB = FE (пр. I.4),

что противоречит гипотезе.

A C B не меньше D F E,

поскольку если A C B < D F E,

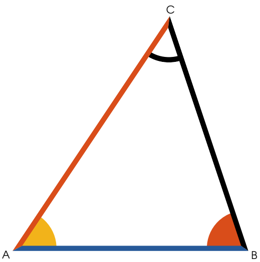
то CB < FE (пр. I.24),

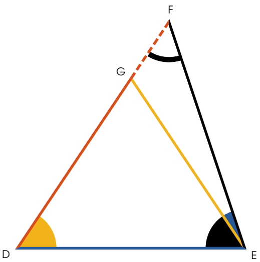
что противоречит гипотезе.

∴ A C B > D F E.

ч. т. д.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника (= и =) и одна сторона равна одного равна так же расположенной стороне другого, то остальные стороны и углы соответственно равны друг другу.

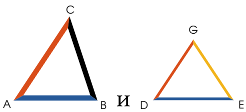




Случай I.

Пусть и , лежащие между равными углами, равны, тогда = .

Поскольку, если больше, сделаем = , проведем .

В 

получим
= ,
= , = ;
∴ = (pr. 4.)
но = (гип.).

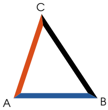
И следовательно = , что не имеет смысла, а значит ни , ни не больше другой, и ∴ они равны.

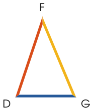
∴ = , и = (пр. I.4).

Случай II.

Теперь пусть CA = FD, лежат против равных углов CAB и FDE.

Если такое возможно, пусть DE > AB, тогда возьмем DG = AB, проведем FG.

Тогда в 

и 

получим CA = FD,

AB = DG и CAB = FDE.

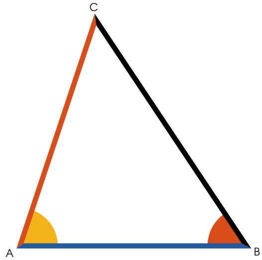
∴ CAB = FDG (пр. I.4),

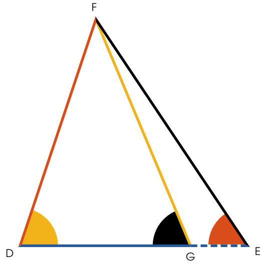
но CAB = FDE (гип.).

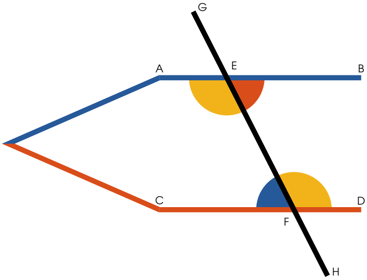
∴ FDG = FDE, что не имеет смысла (пр. I.16).

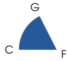
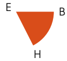
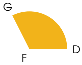
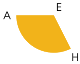
Следовательно, ни AB, ни DE не больше другой, а значит, они равны. Следовательно (согласно пр. I.4), треугольники равны во всех отношениях.

ч. т. д.

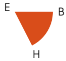
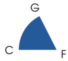




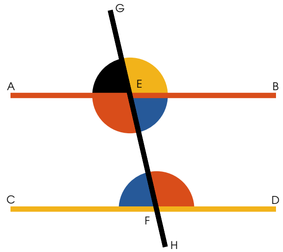


Если *прямая* , *пересекая две другие прямые*  *и* , *образует накрест лежащие углы* ,  *и*  *и* , *равные между собой, то две пересекаемые прямые параллельны.*

Если  не параллельна , то они сойдутся по продолжении.

Если это возможно, пусть они не будут параллельны, но сойдутся, если их продолжить; тогда внешний угол  будет больше  (пр. I.16), но они равны (гип.), что невозможно. Таким же образом можно показать, что они не сойдутся с другой стороны, ∴ они параллельны.

ч. т. д.



Если *прямая* G H, *падающая на две прямые* A B *и* C D, *образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны* G A E $=$ G C F *или* G E B $=$ G F D, *или внутренние углы с одной стороны* G F D *и* E B H *или* G C F *и* A E H *вместе равны двум прямым углам, то прямые параллельны.*

Во-первых, если G A E $=$ G C F,

то G A E $=$ E B H (пр. I.15),

$\therefore$ G C F $=$ E B H $\therefore$ A B $\parallel$ C D (пр. I.27).

Во-вторых, если G C F $+$ A E H $=$,

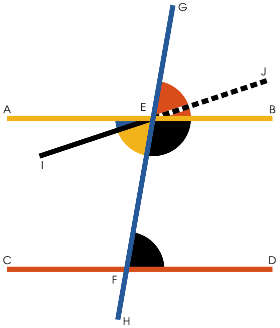
то A E H $+$ E B H $=$ (пр. I.13),

$\therefore$ G C F $+$ A E H $=$ A E H $+$ E B H (акс. I).

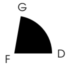
$\therefore$ G C F $=$ E B H (акс. III).

$\therefore$ A B $\parallel$ C D (пр. I.27).

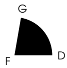
ч. т. д.



П рямая , *падающая на две параллельные прямые*  *и* , *образует накрест лежащие углы, равные между собой, внешний и противолежащий с той же стороны внутренний углы, равные между собой, а также внутренние односторонние углы, равные двум прямым углам.*

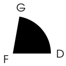
Если накрест лежащие углы  и  не равны,

проведем  так, чтобы

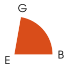
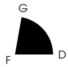
 =  (пр. I.23).

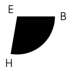
∴  ∥  (пр. I.27)

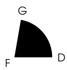
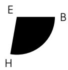
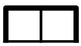
и ∴ две пересекающихся прямых параллельны одной и той же прямой, что невозможно (акс. XII).

А значит,  и  не являются неравными,

то есть они равны  =  (пр. I.15).

∴  = , внешний угол равен внутреннему, противолежащему с той же стороны:

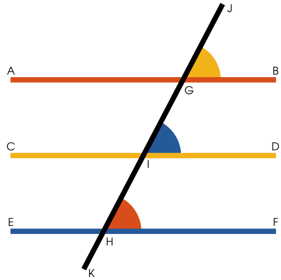
если к обоим добавить ,

то  +  =  =  (пр. I.13).

Другими словами, два внутренних угла по одну сторону пересекающей прямой равны двум прямым углам.

ч. т. д.

Прямые AB *и* EF, *параллельные одной и той же прямой* CD, *параллельны между собой.*



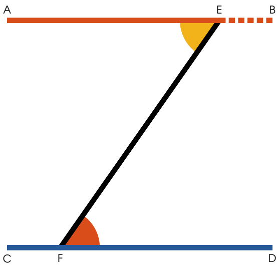
Пусть JK пересекает {AB, CD, EF}.

Тогда GJB = IJD = HJF (пр. I.29).

∴ GJB = HJF.

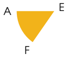
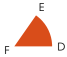
∴ AB ∥ EF (пр. I.27).

ч. т. д.



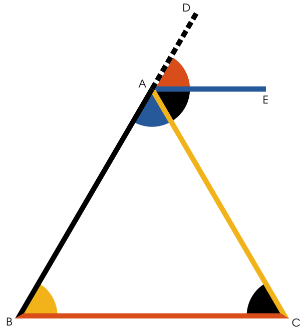
Провести *через данную точку*  *прямую, параллельную данной прямой* .

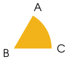
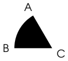
Проведем  из точки  к любой точке  на .

Сделаем  =  (пр. I.23).

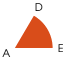
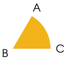
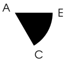
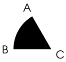
Тогда  ∥  (пр. I.27).

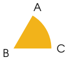
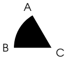
ч. т. д.

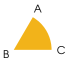
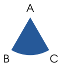
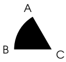
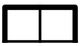


По *продлении любой стороны треугольника*  *внешний угол*  *равен сумме двух внутренних и противолежащих*  *и* *, а три внутренних угла треугольника вместе равны двум прямым углам.*

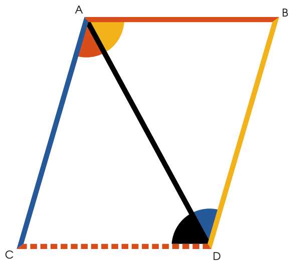
Через точку  проведем  ∥  (пр. I.31).

Тогда {  =  ;  =  } (пр. I.29).

∴  +  =  (акс. II).

∴  +  +  =  =  (пр. I.13).

ч. т. д.



Прямые AC *и* BD*, соединяющие с одной и той же стороны равные и параллельные прямые* AB *и* CD*, сами равны и параллельны.*

Проведем диагональ AD.

Поскольку в ACD и ABD

CD = AB (гип.),

ACD = ABD (пр. I.29)

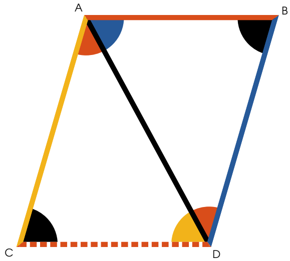
и AD общая обоим,

∴ AC = BD

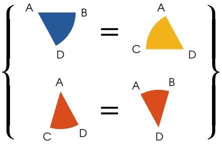
и ACD = ABD (пр. I.4).

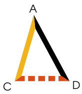
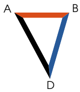
И ∴ AC ∥ BD (пр. I.27).

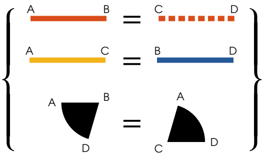
ч. т. д.

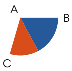
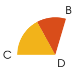


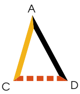
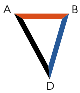
Противоположные *стороны и углы параллелограмма равны, а диагональ*  *делит его на две равные части.*

Поскольку  (пр. I.29)

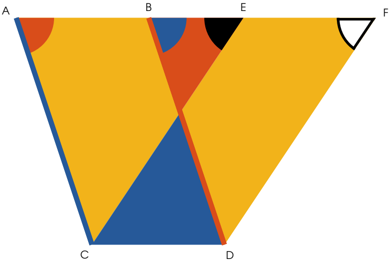
и  общая для  и .

∴  (пр. I.26)

и  =  (акс. II).

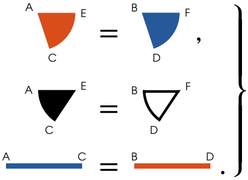
Следовательно, противоположные стороны и углы параллелограмма равны. И, поскольку треугольники  и  равны во всех отношениях (пр. I.4), диагональ делит параллелограмм на две равные части.

ч. т. д.

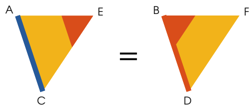


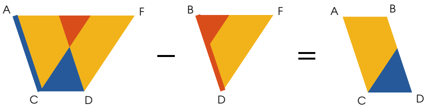
Параллелограммы, *находящиеся на одном и том же основании и между одними и теми же параллельными прямыми, равны по площади между собой.*

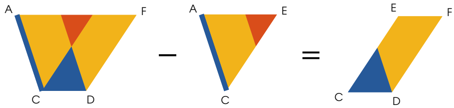
Из параллельности прямых следует, что

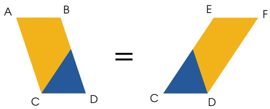


(пр. I.29)
(пр. I.29)
(пр. I.34)

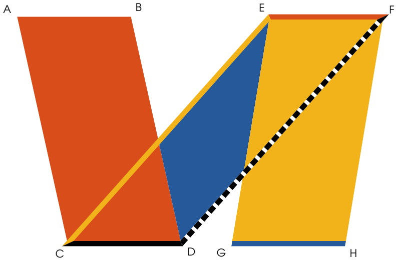
∴  (пр. I.26).

Но 

и  .

∴  .

ч. т. д.



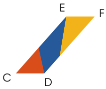
Параллелограммы  *и*  *на равных основаниях и между одними параллельными прямыми равны по площади.*

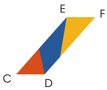
Проведем  и ,

 =  =  (гип.и пр. I.34).

∴  = и ∥ .

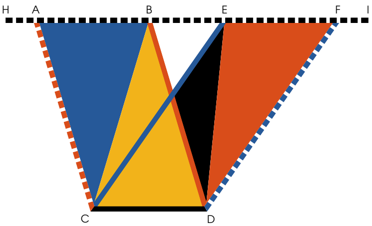
∴  = и ∥  (пр. I.33).

Следовательно,  параллелограмм.

Но  =  =  (пр. I.35).

∴  =  (акс. I).

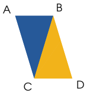
ч. т. д.

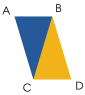
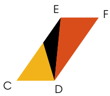


Треугольники  *и*  *на одном основании*  *и между одними и теми же параллельными прямыми равны.*

Проведем  ‖ 
 ‖  } (пр. I.31).

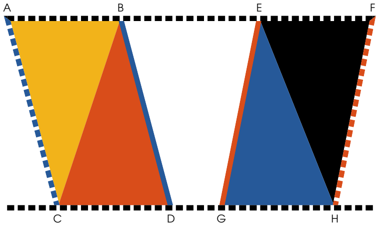
Проведем .

 и  являются параллелограммами на одном основании и между одними параллельными прямыми и, следовательно, равны между собой. (пр. I.35)

∴ {  = дважды 
 = дважды  } (пр. I.34).

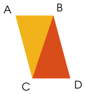
∴  = .

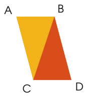
ч. т. д.



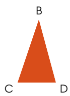
Треугольники  *и*  *на равных основаниях и между теми же параллельными прямыми равны.*

Проведем  ∥ 
и  ∥  } (пр. I.31).

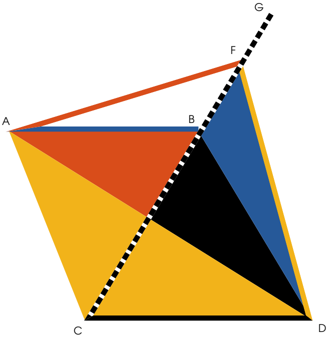
 =  (пр. I.36).

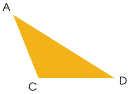
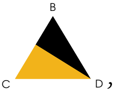
Но  = дважды  (пр. I.34)

и  = дважды  (пр. I.34).

∴  =  (акс. VII).

ч. т. д.

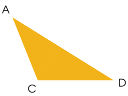
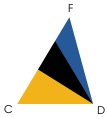


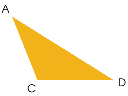
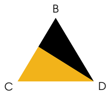
Равные *треугольники*  *и* , *находящиеся на одном основании* CD *и с одной и той же стороны, находятся между теми же параллельными прямыми.*

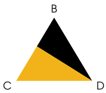
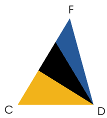
Если AB, соединяющая вершины треугольников, не ∥ CD, проведем AF ∥ CD (пр. I.31), касающуюся CG.

Проведем DF.

Поскольку AF ∥ CD (постр.)

 =  (пр. I.37).

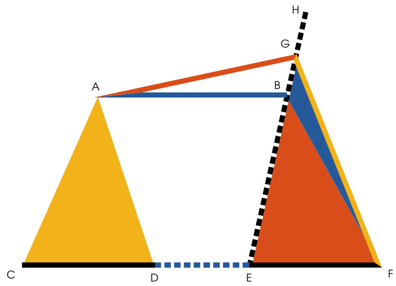
Но  =  (гип.).

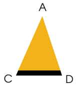
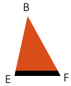
∴  = , часть равна целому, что невозможно.

∴ AF ∦ CD.

И таким же образом можно показать, что никакая другая линия, кроме AB, не ∥ CD; ∴ AB ∥ CD.

ч. т. д.

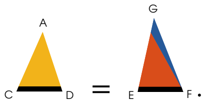


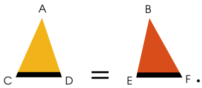
Равные *треугольники*  *и* , *находящиеся на равных основаниях и с одной и той же стороны, находятся между одними и теми же параллельными прямыми.*

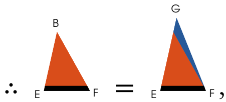
Если AB, соединяющая вершины треугольников, не ∥ CF, проведем AG ∥ CF (пр. I.31), касающуюся EH.

Проведем FG.

Поскольку AG ∥ CF (постр.),



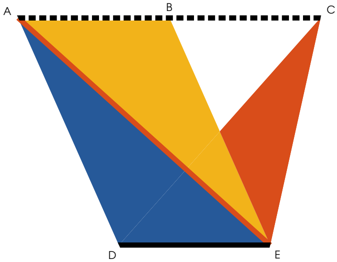
Но 

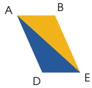
∴ , часть равна целому, что невозможно.

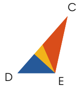
∴ AG ∦ CF: и таким же образом можно показать, что никакая другая линия, кроме AB, не ∥ CF.

∴ AB ∥ CF.

ч. т. д.



Если *параллелограмм* 

и треугольник 

стоят на одном основании 

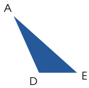
и между теми же параллельными прямыми 

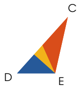
и 

, то параллелограмм вдвое больше треугольника.

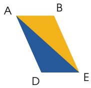
Проведем диагональ 

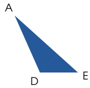
.

Тогда 

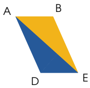
= 

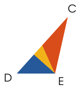
(пр. I.37),



= дважды 

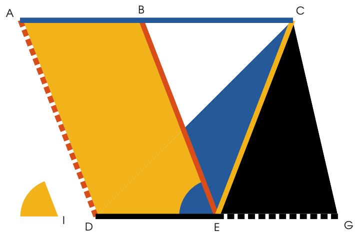
(пр. I.34).

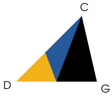
∴ 

= дважды 

(акс. VI).

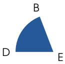
ч. т. д.



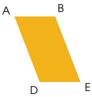
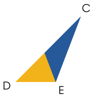
Построить *параллелограмм, равный данному треугольнику*  *и с данным углом* .

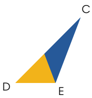
Сделаем  =  (пр. I.10).

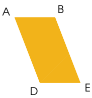
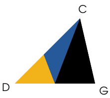
Проведем .

Сделаем  =  (пр. I.23).

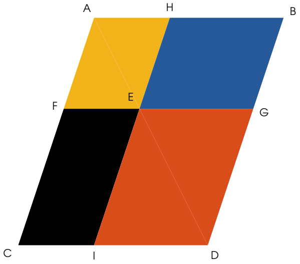
Проведем {  ∥  ;  ∥  } (пр. I.31).

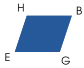
 = дважды  (пр. I.41),

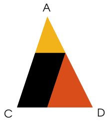
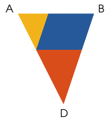
но  =  (пр. I.38).

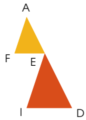
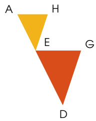
∴  =  (акс. VI).

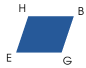
ч. т. д.



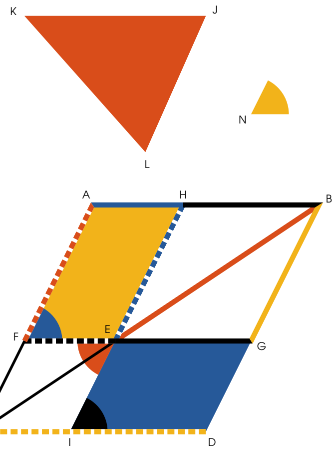
Дополнения  *и*  *параллелограммов на одной диагонали параллелограмма равны между собой.*

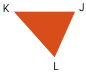
 =  (пр. I.34)

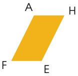
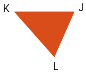
и  =  (пр. I.34).

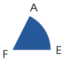
∴  =  (акс. III).

ч. т. д.



К данной *прямой линии*  *приложить параллелограмм, равный данному треугольнику*  *, и с углом, равным данному прямолинейному углу*  .

Сделаем  = 

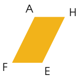
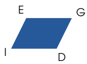
с  =  (пр. I.42)

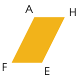
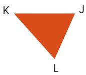
и со стороной , смежной и являющейся продолжением  .

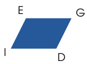
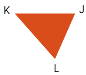
Продлим  до  ‖ 

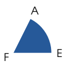
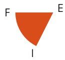
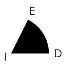
проведем , продлим ее до продолжения ;

проведем  ‖  до продолжения  и продлим  .

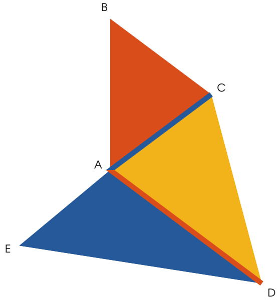
 =  (пр. I.43),

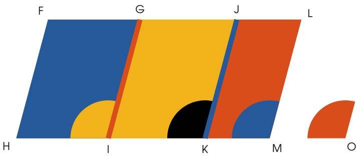
но  =  (постр.).

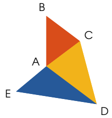
∴  =  .

И  =  =  = 
(пр. I.29 и постр.).

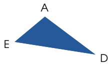
ч. т. д.



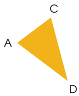


Построить *параллелограмм, равный данной прямолинейной фигуре*  *, в угле, равном данному прямолинейному углу*  .

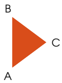
Проведем  и  , делящие прямолинейную фигуру на треугольники.

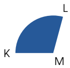
Построим  = 

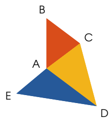
с  =  (пр. I.42).

К  приложим  = 

с  =  (пр. I.44).

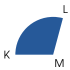
К  приложим  = 

с  =  (пр. I.44).

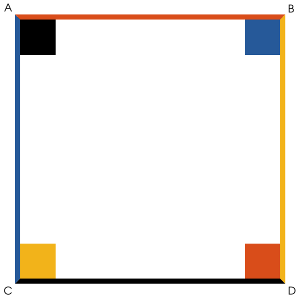
∴  = 

и  является

параллелограммом (пр. I.29, I.14, I.30)

с  =  .

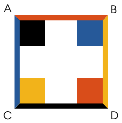
ч. т. д.

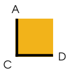


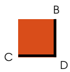
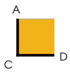
Н*а данной прямой* DC *построить квадрат.*

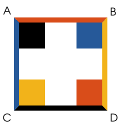
Проведем CA ⊥ и = DC (пр. I.11, I.3).

Проведем AB ∥ DC и касающуюся BD, проведенную ∥ CA.

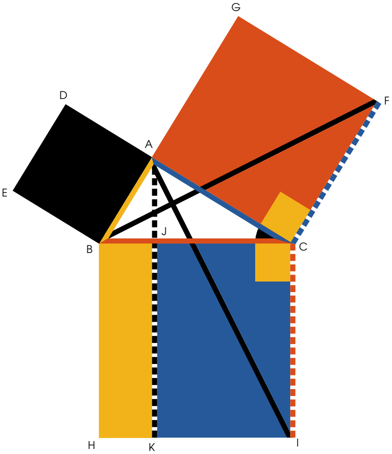
В  CA = DC (постр.),

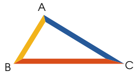
 = □ (постр.).

∴  =  = прямому углу (пр. I.29), и оставшиеся стороны и углы должны быть равны (пр. I.34).

И ∴  является квадратом (опр. 30).

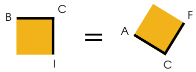
ч. т. д.



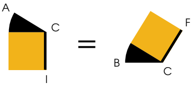
В прямоугольном *треугольнике*  *квадрат гипотенузы*  *равен сумме квадратов катетов*  *и* .

На , ,  построим квадраты (пр. I.46).

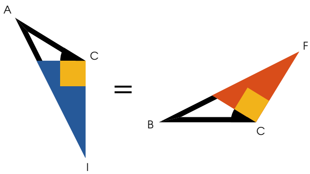
Проведем  ‖  (пр. I.31), также проведем  и .

.

К каждому добавим ,

∴ .

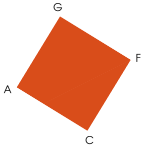
Вместе с тем  =  и  = .

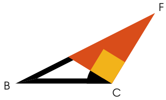
∴  (пр. I.4).

Теперь, поскольку 

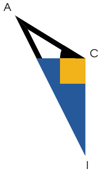
∥ 

,

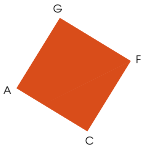


= дважды 

и 

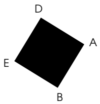
= дважды 

(пр. I.41).

∴ 

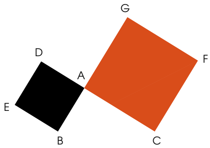
= 

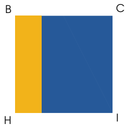
(акс. VI).

Так же можно показать, что 

= 

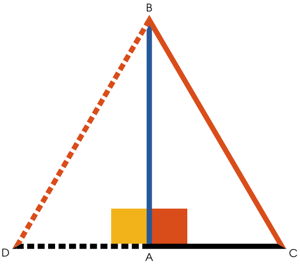
.

А значит, 

= 

(акс. II).

ч. т. д.



Если *в треугольнике квадрат одной стороны* BC *равен сумме квадратов двух других сторон* AB *и* AC, *то угол* BAC, *заключенный между этими двумя сторонами, прямой.*

Проведем $AD \perp AB$
и $= AC$ (пр. I.11, I.3),
также проведем BD.

Поскольку $AD = AC$ (постр.),
$AD^2 = AC^2$.

$\therefore AD^2 + AB^2 = AC^2 + AB^2$.

Но $AD^2 + AB^2 = BD^2$ (пр. I.47),
и $AC^2 + AB^2 = BC^2$ (гип.).

$\therefore BD^2 = BC^2$.

$\therefore BD = BC$.

И $\therefore$ $DAB = BAC$ (пр. I.8).

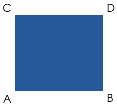
Следовательно, BAC — прямой угол.

ч. т. д.

Книга II

Определение I

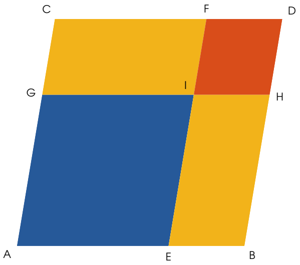
О всяком *прямоугольнике или прямоугольном параллелограмме говорят, что он заключается между любыми двумя своими смежными сторонами.*

Таким образом, про прямоугольный параллелограмм 

можно сказать, что он заключен между сторонами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, что можно записать короче в виде $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

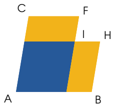
Если смежные стороны равны, т. е. $\overline{AB} = \overline{AC}$, то $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ обозначает прямоугольник, заключенный между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, являющийся квадратом

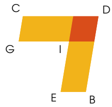
и равный $\begin{cases} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \text{ или } \overline{AC}^{\,2} \\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} \text{ или } \overline{AC}^{\,2}. \end{cases}$



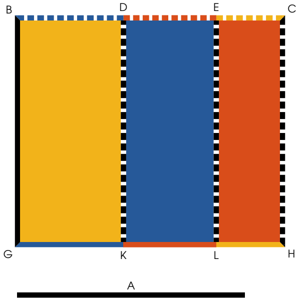
Определение II

Во *всяком параллелограмме фигура, образованная одним из параллелограммов на его диаметре вместе с двумя дополнениями, называется гномоном.*

Так, 

и 

являются гномонами.



Прямоугольник, *заключенный между двумя прямыми линиями, одна из которых рассечена на сколько угодно отрезков, равен сумме прямоугольников, заключенных между нерассеченной прямой и каждым из этих отрезков.*

$$GH \cdot A = \left\{ \begin{array}{l} A \cdot GK \\ + A \cdot KL \\ + A \cdot LH \end{array} \right.$$

Проведем $GB \perp GH$ и $= A$ (пр. I.2, пр. I.3).

Достроим параллелограммы, то есть

$$\text{проведем} \left\{ \begin{array}{l} BC \parallel GH \\ KD \\ LE \parallel GB \\ HC \end{array} \right\} \text{(пр. I.31).}$$

$$BCHG = BDKG + DELK + ECHL,$$

$$BCHG = GH \cdot GB,$$

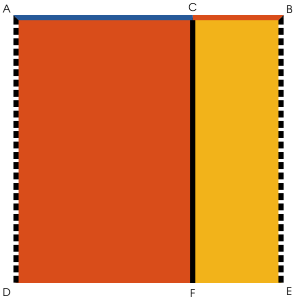
$$BDKG = GK \cdot GB, \quad DELK = KL \cdot GB,$$

$$ECHL = LH \cdot GB.$$

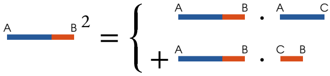
$$\therefore GH \cdot A =$$

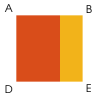
$$GK \cdot A + KL \cdot A + LH \cdot A.$$

ч. т. д.

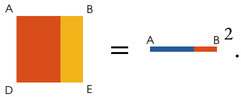


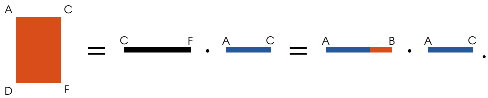
Если *прямая линия*  *как-либо рассечена, квадрат всей линии равен сумме прямоугольников, заключенных между целой линией и каждой из ее частей.*

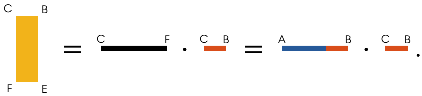


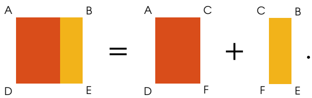
Опишем  (пр. I.46).

Проведем , параллельную  (пр. I.31).

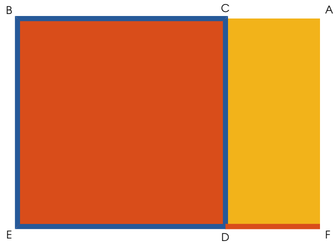








ч. т. д.



Если *прямая линия* EF *как-либо рассечена, то прямоугольник, заключенный между всей прямой и ее частью, равен квадрату этой части вместе с прямоугольником, заключенным между частями.*

$EF \cdot DE = DE^2 + DE \cdot DF$, *или*

$EF \cdot DF = DF^2 + DE \cdot DF$

Опишем $BCDE$ (пр. I.46).

Опишем $CAFD$ (пр. I.31).

Тогда $BAFE = BCDE + CAFD$, но

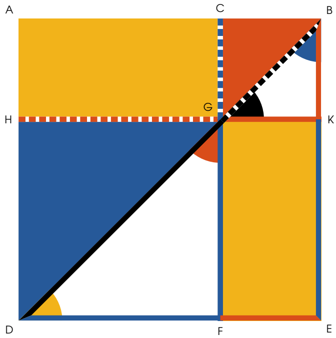
$BAFE = EF \cdot DE$

и $BCDE = DE^2$, $CAFD = DE \cdot DF$.

$\therefore EF \cdot DE = DE^2 + DE \cdot DF$.

Таким же образом можно показать, что
$EF \cdot DF = DF^2 + DE \cdot DF$.

ч. т. д.



Если прямая как-либо рассечена DE, *квадрат всей прямой равен квадратам частей с дважды взятым прямоугольником, заключенным между частями.*

$DE^2 = DF^2 + FE^2 +$ *дважды* $DF \cdot FE$

Опишем $ABED$ (пр. I.46),

проведем BD (пост. I)

и $\left\{ \begin{array}{l} FC \parallel EB \\ HK \parallel DE \end{array} \right\}$ (пр. I.31).

$\angle GBK = \angle GDF$ (пр. I.5), $\angle GBK = \angle DGF$ (пр. I.29),

$\therefore \angle GDF = \angle DGF$.

∴ согласно пр. I.6, пр. I.29 и пр. I.34,

$HGFD$ является квадратом $= DF^2$.

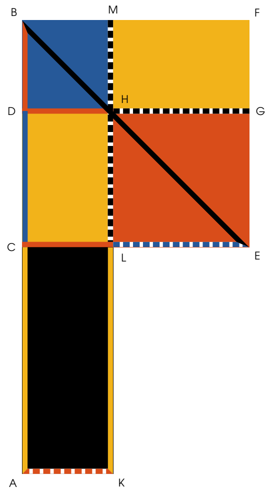
Аналогично $CBKG$ является квадратом $= GK^2$,

$ACGH = GKEF = DF \cdot GK$ (пр. I.43).

Но $ABED = HGFD + ACGH + GKEF + CBKG$.

$\therefore DE^2 = DF^2 + FE^2 +$ дважды $DF \cdot FE$.

ч. т. д.



Е*сли прямая* BA *рассечена на равные* BC CA *и неравные* BD DA *отрезки, прямоугольник, заключенный между неравными частями, вместе с квадратом отрезка между сечениями равен квадрату половины всей прямой.*

$BD \cdot DA + DC^2 = CA^2 = BC^2.$

Опишем BF CE (пр. I.46), проведем EB

и { DG ∥ CE, MK ∥ BA, AK ∥ CE } (пр. I.31).

CL AK = BM CL (пр. I.36), MF HG = DH CL (пр. I.43).

∴ (акс. II) BF CL HG = DH AK = $BD \cdot DA$.

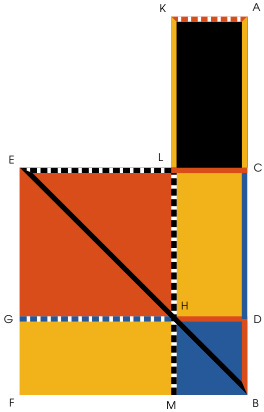
Но HG LE = DC^2 (пр. II.4)

и BF CE = BC^2 (постр.).

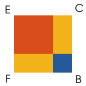
∴ (акс. II) BF CE = DG AK LE.

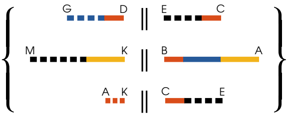
∴ $BD \cdot DA + DC^2 = CA^2 = BC^2.$

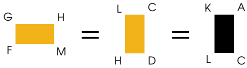
ч. т. д.

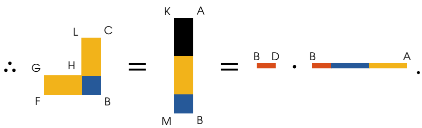


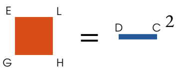
Если *прямая рассечена пополам*  *и продлена до любой точки* , *прямоугольник, заключенный между всей прямой и продленной частью, вместе с квадратом половины исходной линии равен квадрату линии, составленной из половины исходной линии и продленной части.*

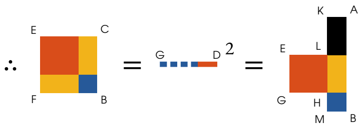
Опишем  (пр. I.46), проведем 

и  (пр. I.31).

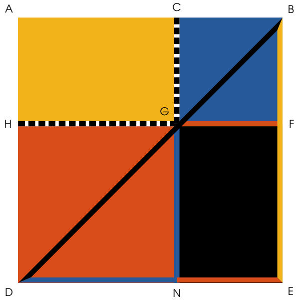
 (пр. I.36, пр. I.43).



Но  (пр. II.4),

 (постр., акс. II).

ч. т. д.



Если *прямая как-либо рассечена* DE, *то вместе квадрат всей прямой и одной из ее частей равны дважды взятому прямоугольнику, заключенному между всей прямой и этой ее частью, вместе с квадратом другой части.*

$$DE^2 + NE^2 = 2\,DE \cdot NE + DN^2$$

Опишем $ABDE$. (пр. I.46),

проведем BD (пост. I)

и $\left\{ \begin{matrix} NC \parallel EB \\ HF \parallel DE \end{matrix} \right\}$.

$$ACHG = GFNE \text{ (пр. I.43).}$$

Добавим $CBGF = NE^2$ к обоим (пр. II.4).

$$ABHF = CBNE = DE \cdot NE,$$

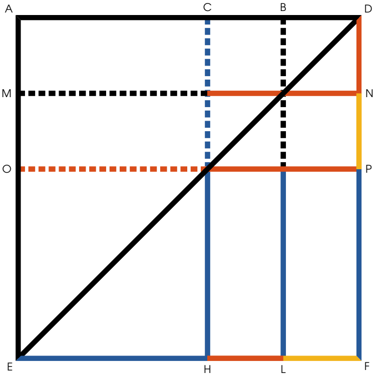
$$HGDN = DN^2 \text{ (пр. II.4),}$$

$$ABHF + CBNE + HGDN =$$

$$2\,DE \cdot NE + DN^2 = ABDE + CBGF.$$

$$DE^2 + NE^2 = 2\,DE \cdot NE + DN^2.$$

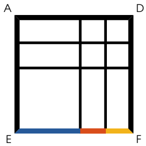
ч. т. д.



Если прямая как-либо рассечена EL, *квадрат всей прямой вместе с любой ее частью равен четырежды прямоугольнику, заключенному между всей прямой и этой ее частью, вместе с квадратом другой части.*

$$EF^2 = 4 \cdot EL \cdot HL + EH^2$$

Продлим EL и сделаем $LF = HL$.

Построим  (пр. I.46).

Проведем DE.

$$\left.\begin{array}{l} CH \\ BL \end{array}\right\} \parallel FD, \quad \left.\begin{array}{l} OP \\ MN \end{array}\right\} \parallel EF \quad \text{(пр. I.31).}$$

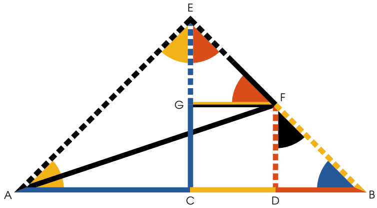
$$EF^2 = LF^2 + EL^2 + 2 \cdot EL \cdot LF$$
(пр. II.4).

Но $HL^2 + EL^2 = 2 \cdot EL \cdot HL + EH^2$
(пр. II.7).

$$\therefore\ EF^2 = 4 \cdot EL \cdot HL + EH^2.$$

ч. т. д.

Если *прямая рассечена на равные* AC CB *и неравные* AD DB *части, квадраты неравных частей вместе вдвое больше квадрата на половине вместе с квадратом отрезка между сечениями.*



$$AD^2 + DB^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot CD^2$$

Сделаем CE $\perp$ и $=$ AC или CB.

Проведем AE и EB,
$FD \parallel CE$, $GF \parallel CB$ и проведем AF.

$$\angle EAB = \angle AEC \text{ (пр. I.5)} = \tfrac{1}{2}\,\square \text{ (пр. I.32)},$$

$$\angle EBA = \angle DFB \text{ (пр. I.5)} = \tfrac{1}{2}\,\square \text{ (пр. I.32)},$$

$$\therefore \angle AEB = \square.$$

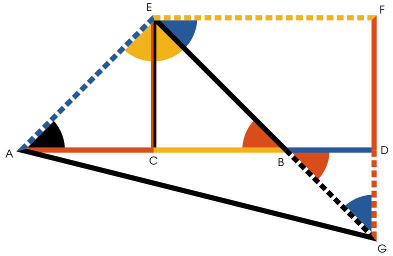
$$\angle EBA = \angle CEB = \angle EFG = \angle DFB \text{ (пр. I.5, пр. I.29).}$$

Значит, $FD = DB$,
$GE = GF = CD$ (пр. I.6, пр. I.34).

$$AF^2 = \left\{ \begin{array}{l} AD^2 + FD^2, \text{ или } + DB^2 \\ = \left\{ \begin{array}{l} = AE^2 + EF^2 \\ = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot CD^2 \end{array} \right. \end{array} \right. \text{ (пр. I.47).}$$

$$\therefore AD^2 + DB^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot CD^2.$$

ч. т. д.



Если *прямая линия* AB *рассечена пополам и продлена до любой точки* AD, *квадрат всей линии вместе с квадратом продленной части равны дважды квадрату половины исходной линии вместе с квадратом половины вместе с продленной частью.*

$$AD^2 + BD^2 = 2 \cdot CB^2 + 2 \cdot CD^2$$

Сделаем CE ⊥ и = AC или CB.

Проведем AE и EG

и { FG ∥ CE, EF ∥ CD } (пр. I.31)

также проведем AG.

AEC = AEC (пр. I.5) = ½ □ (пр. I.32),

CEB = CEB (пр. I.5) = ½ □ (пр. I.32).

∴ AEB = □.

CEB = BDG, EFB = CEB (пр. I.29).

BDG = CEB (пр. I.15).

∴ BDG = CEB = CEB =

EFB = BDG = ½ □.

$$\text{И } \overline{BD} = \overline{DG},$$

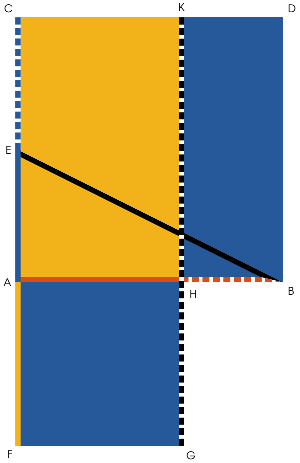
$$\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{FG}, \text{ (пр. I.6, I.34).}$$

Тогда, согласно (пр. I.47),

$$\overline{AG}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \overline{AD}^2 + \overline{DG}^2 \text{ или } \overline{BD}^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} + \overline{AE}^2 = 2 \cdot \overline{AC}^2 \\ + \overline{EG}^2 = 2 \cdot \overline{EF}^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

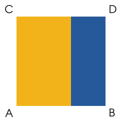
$$\therefore \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2 \cdot \overline{CB}^2 + 2 \cdot \overline{CD}^2.$$

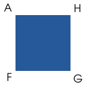
ч. т. д.



Данную *прямую* AB *рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между всей прямой и одной из ее частей, был равен квадрату другой части.*

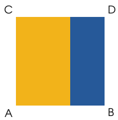
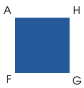
$AB \cdot HB = AH^2$

Опишем  (пр. I.46).

Сделаем $EA = CE$ (пр. I.10),
проведем BE,
возьмем $EF = BE$ (пр. I.3),
на AF опишем  (пр. I.46).

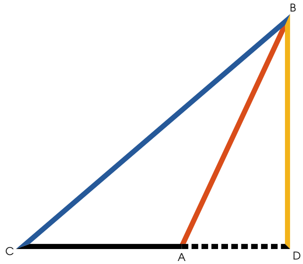
Продлим KG (пост. II).

Тогда (пр. II.6) $CF \cdot AF + EA^2 = EF^2 = BE^2 = AB^2 + EA^2$ ∴
$CF \cdot AF = AB^2$,

или  =  ∴  = 

∴ $AB \cdot HB = AH^2$.

ч. т. д.



Во всяком тупоугольном треугольнике квадрат на стороне, стягивающей тупой угол, больше суммы квадратов на сторонах, содержащих тупой угол, на дважды прямоугольник, заключенный между какой-либо из этих сторон и продолжением этой стороны от тупого угла до перпендикуляра, падающего от противоположного острого угла.

$$\overline{BC}^2 > \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2 \text{ на } 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AD}$$

Согласно пр. II.4

$$\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AD}^2 + 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AD}^2.$$

Добавим $\overline{DB}^2$ к обоим.

$$\overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AD}^2 + 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2.$$

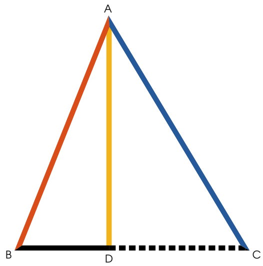
Но $\overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2$ (пр. I.47),
и $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{BA}^2$ (пр. I.47).

$$\therefore \overline{BC}^2 = 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AD} + \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2.$$

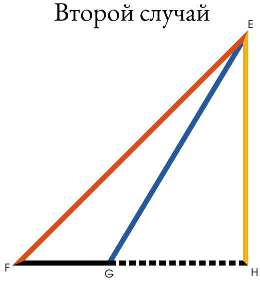
Значит, $\overline{BC}^2 > \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$
на $2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AD}^2$.

ч. т. д.

Первый случай



Второй случай



Во всяком треугольнике квадрат стороны, стягивающей острый угол, меньше суммы квадратов сторон, содержащих этот угол, на дважды прямоугольник, заключенный между любой из этих сторон и отрезком, отсекаемым перпендикуляром из противоположного угла от этого отрезка или от продленного отрезка.

Первый случай.

$\overline{CA}^2 < \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$ *на* $2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD}$.

Второй случай.

$\overline{EG}^2 < \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2$ *на* $2 \cdot \overline{FG} \cdot \overline{FH}$.

Предположим, перпендикуляр падает внутри треугольника, тогда (пр. II.7)

$$\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 = 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} + \overline{DC}^2.$$

К каждой добавим $\overline{AD}^2$, тогда

$$\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} + \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2.$$

∴ (пр. I.47)

$$\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} + \overline{CA}^2,$$

и ∴ $\overline{CA}^2 < \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$ на $2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DC}$.

Теперь предположим, что перпендикуляр падает вовне треугольника, тогда (пр. II.7)

$$\overline{FH}^2 + \overline{FG}^2 = 2 \cdot \overline{FH} \cdot \overline{FG} + \overline{GH}^2.$$

К каждой добавим $\overline{HE}^2$, тогда

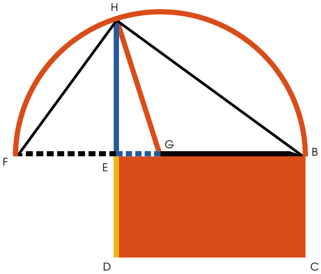
$$\overline{FH}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{HE}^2 = 2 \cdot \overline{FH} \cdot \overline{FG} + \overline{GH}^2 + \overline{HE}^2.$$

∴ (пр. I.47)

$$EF^2 + FG^2 = 2 \cdot FH \cdot FG + EG^2.$$

$$\therefore\ EG^2 < EF^2 + FG^2$$
$$\text{на } 2 \cdot FH \cdot FG.$$

ч. т. д.



Построить *квадрат, равный данной прямолинейной фигуре.*

Провести HE *такую, что* $HE^2 =$ 

Сделаем $EBDC =$  (пр. I.45).

Продлим EB до $FE = ED$.

Возьмем $FG = GB$ (пр. I.10).

Опишем FB (пост. III)

и продлим до нее ED : проведем HG.

HF^2 или $HG^2 = FE \cdot EB + EG^2$ (пр. II.5),

но $HG^2 = HE^2 + EG^2$ (пр. I.47).

$\therefore HE^2 + EG^2 = FE \cdot EB + EG^2$.

$\therefore HE^2 = FE \cdot EB$.

И $\therefore HE^2 = EBDC =$ .

ч. т. д.

Книга III

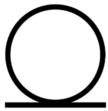
Определения

1

Равными кругами называют те, у которых равны диаметры.

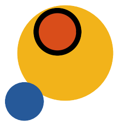
2

Про прямую говорят, что она касается круга, если она встречает круг, но при продолжении не пересекает его.



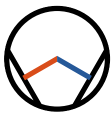
3

Про круги говорят, что они касаются друг друга, если они встречаясь, не пересекают друг друга.



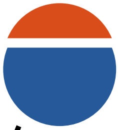
4

Про прямые говорят, что они равноотстоят от центра круга, если перпендикуляры проведенные к ним из центра круга равны.



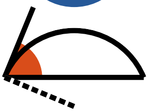
5

Про прямую, перпендикуляр к которой длиннее, говорят, что она отстоит дальше от центра круга.



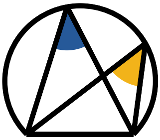
6

Сегментом круга называется фигура, заключающаяся между прямой и частью круга, отсекаемой этой прямой.



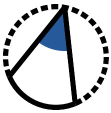
7

Углом сегмента называется угол между основанием сегмента и перпендикуляром к отрезку, соединяющему центр круга с одним из концов основания сегмента.



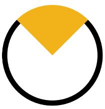
8

Углом в сегменте называют угол, заключающийся между прямыми, проведенными из какой-либо точки на окружности сегмента к концам основания сегмента.



9

Про угол говорят, что он опирается на дугу, если заключающие его прямые отсекают эту дугу.



10

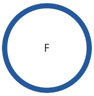
Сектором круга называют фигуру, заключающуюся между двумя радиусами и дугой между ними.

11

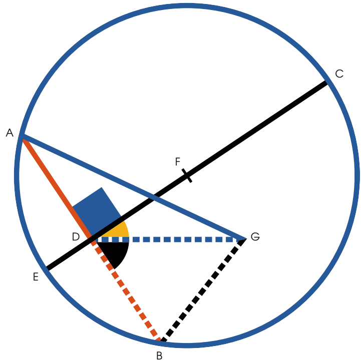
Подобными сегментами называют сегменты, углы в которых равны.

12

Круги, имеющие один центр называют концентрическими.

Найти *центр данного круга* 

.



Проведем внутри круга любую прямую 

,
сделаем 

= 

,
проведем 

⊥ 

.

Рассечем пополам 

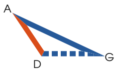
,
точка рассечения и есть центр.

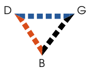
Действительно, пусть это не так, тогда пусть другая точка будет центром, и проведем от нее 

, 

и 

.

Поскольку в 

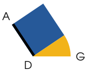
и 

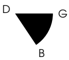
= 

(гип.и опр. 15),

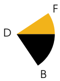

= 

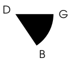
(постр.) и 

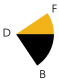
общая обоим,


= 

(пр. I.8), и,
сдедовательно, являются прямыми углами.

Но 

= 
(постр.), 

= 

(акс. XI)
что невозможно.

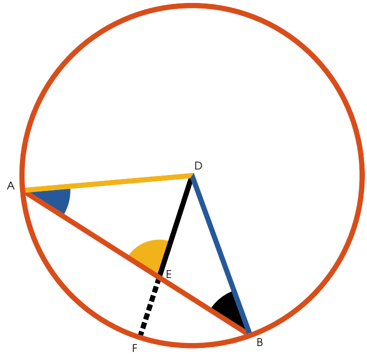
Значит, выбранная точка не центр круга, и так же можно показать, что никакая другая точка, не на 

не является центром, значит, центр находится на 

, и, следовательно, точка, где 

рассекается пополам и есть центр.

ч. т. д.



П*рямая* AB, *соединяющая две точки на окружности круга* (D), *целиком находится внутри круга.*

Найдем центр (D) (пр. III.1).

Из центра проведем DE к любой точке AB, пересекающую окружность.

Проведем AD и BD.

Тогда ∠ADB = ∠ADB (пр. I.5),

но ∠AED > ∠ADB или > ∠ADB (пр. I.16).

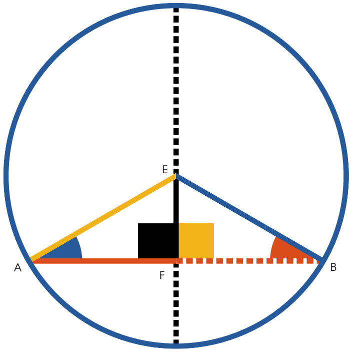
∴ AD > DE (пр. I.19),
но AD = DF.

∴ DF > DE.

∴ DE < DF.

∴ любая точка на AB находится внутри круга.

ч. т. д.



Если *некоторая прямая* EF, *проходящая через центр круга* E, *рассекает пополам хорду* AB, *не проходящую через центр, то эта прямая ей перпендикулярна; а если перпендикулярна, то рассекает хорду пополам.*

Проведем AE и EB к центру круга.

В AEF и FEB

AE = EB, EF общая,

и AF = FB.

∴ AFE = EFB (пр. I.8)

и ∴ EF ⊥ AB (опр. 10).

Теперь, пусть EF ⊥ AB.

Тогда в AEF и FEB

AEF = FBE (пр. I.5)

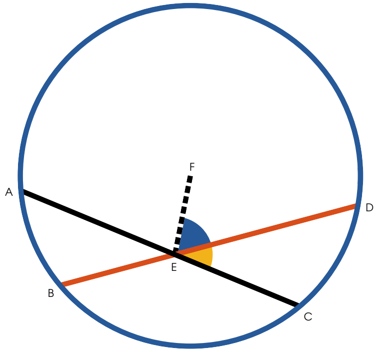
AFE = EFB (гип.)

и AE = EB.

∴ AF = FB (пр. I.26).

И ∴ EF рассекает AB пополам.

ч. т. д.

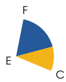


Е*сли в круге две прямые, не проходящие через центр, пересекаются, они не делят друг друга пополам.*

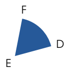
Если одна из прямых проходит через центр, очевидно, она ее не может рассекать пополам другая прямая, не проходящая через центр.

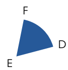
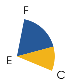
Но если ни одна из прямых  или  не проходит через центр, проведем  из центра к точке их пересечения.

Если  делится пополам,
 ⊥ ей (пр. III.3).

∴  = □.

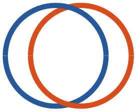
И если  делится пополам,
 ⊥  (пр. III.3).

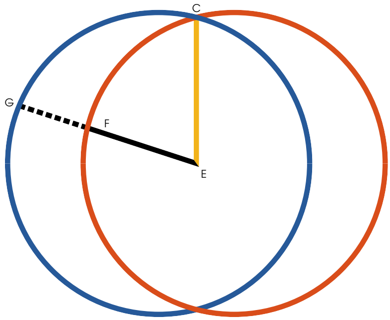
∴  = □.

И ∴  = ,
часть равна целому, что невозможно.

∴  и  не делят друг друга пополам.

ч. т. д.





Если *два круга секут друг друга их центры не совпадают.*

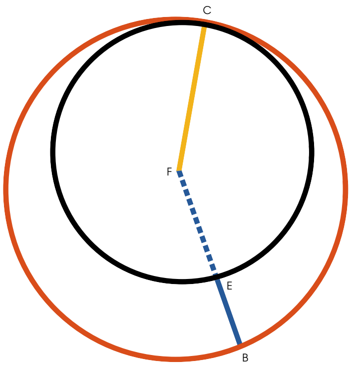
Допустим это возможно, и два пересекающихся круга имеют общий центр. Из предполагаемого центра проведем CE к точке пересечения и EG пересекающую окружности.

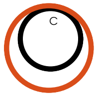
Тогда CE = EF (опр. 15)
и CE = EG (опр. 15).

∴ EF = EG
часть равна целому, что невозможно.

∴ круги, пересекающиеся в любой точке не могут иметь общего центра.

ч. т. д.



Если два круга  *касаются друг друга, то у них не один и тот же центр.*

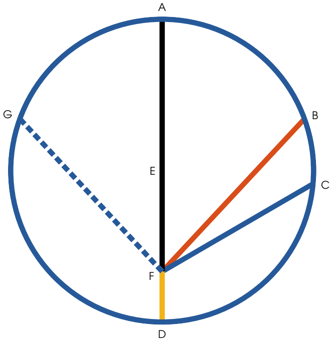
Действительно, пусть это возможно, и у кругов будет один центр. Из предполагаемого центра проведем FB и CF к точке касания.

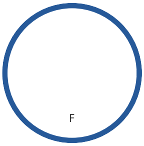
Тогда $CF = FE$ (опр. 15)
и $CF = FB$ (опр. 15).

$\therefore FE = FB$.

Часть равна целому, что невозможно. Следовательно, выбранная точка не является центром обоих кругов и таким же образом можно показать, что так же и никакая другая.

ч. т. д.

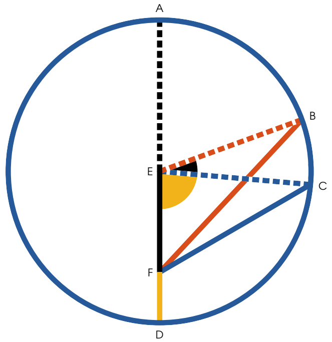


Если из точки в круге 

, не являющейся центром к окружности проведены прямые линии { FA, FB, FC, FD } *наибольшая из них та* FA*, что проходит через центр, а меньшая — та, что является оставшейся частью диаметра* FD.

Из остальных, та FB*, что ближе к проходящей через центр больше той* FC*, что проходит дальше.*

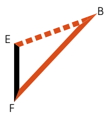
Линии FG *и* FB *под равными углами к линии, проходящей через центр и по разные стороны от нее равны между собой и из той же точки нельзя провести третью линию той же длины к окружности.*

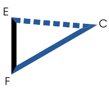


Часть I

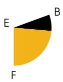
Из центра круга проведем EB и EC, тогда AE = EB (опр. 15) FA = EF + EB > FB (пр. I.20). Таким же образом можно показать, что FA больше FC, или любой другой линии, проведенной из той же точки к окружности.

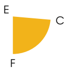
Теперь, согласно (пр. I.20) EF + FC > EC = FD + EF, вычтем EF из обеих. ∴ FC > FD (акс. III), и так же можно показать, что FD меньше любой другой линии, проведенной из той же точки к окружности.

Теперь, в 

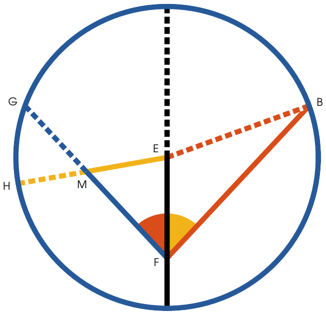
и 

, EF общая,



> 

, и EB > EC ∴ FB >



FC (пр. I.24) и так же можно показать, что FB больше любой другой линии, проведенной из той же точки к окружности и проходящей дальше FA.

Часть II

Если ∠GFE = ∠EFB, то FG = FB.

Если нет, возьмем FM = FB, проведем EH.

Тогда в △MEF и △EBF, EF общая, ∠GFE = ∠EFB и FB = FM.

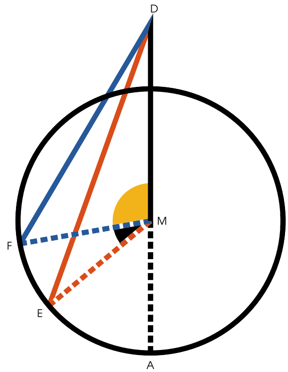
∴ EB = EM (пр. I.4).

∴ EB = EH = EM часть равна целому, что невозможно.

∴ FB = FG; и никакая другая линия равная FB, проведенная из той же точки к окружности, поскольку, будь она ближе к проходящей через центр, она была бы больше, а дальше — меньше.

ч. т. д.

Предложение *разделено на три части.*



I.

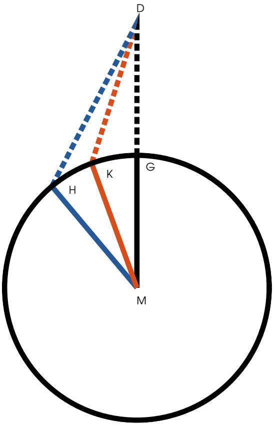
Если из точки вне круга провести прямые линии DA, DE и DF к окружности, из тех, что падают на вогнутую часть окружности, наибольшей будет та DA, что проходит через центр, а та, что ближе к ней DE будет длиннее той, что дальше DF.

Проведем MF и ME к центру.

Тогда DA проходящая через центр будет наибольшей, поскольку, раз MA = ME, если к обеим добавить DM, DA = DM + ME, но > DE (пр. I.20),
∴ DA больше любой другой линии, проведенной из той же точки к вогнутой части окружности.

Теперь в  и ,
MF = ME, и DM общая,
но  > , ∴ DE > DF (пр. I.24).

Так же можно показать, что DE > любой другой линии, более далекой от DA.



II.

Из линий, падающий на выпуклую часть окружности наименьшей DG является та, которая при продолжении проходит через центр, а линия, ближняя к наименьшей будет меньше дальней.

Действительно, поскольку

KM + DK > DM (пр. I.20)

и KM = GM,

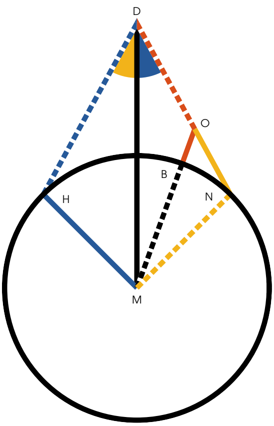
∴ DK > DG (акс. V).

Значит, поскольку

HM + DH > KM + DK (пр. I.21),

и HM = KM,

∴ DK < DH. Так же и для прочих.



III.

Кроме того, линии, образующие равные углы с проходящей через центр равны между собой, падают ли они на вогнутую или выпуклую часть окружности, и нельзя провести третьей линии из той же точки той же длины к окружности.

Действительно, пусть DN > DH.

Взяв HDM = MDN,

сделаем DO = DH и проведем MO.

Тогда в DOM и DHM получим DO = DH

и общую DM, а также MDN = HDM.

$\therefore MO = HM$ (пр. I.4).

Но $HM = BM$.

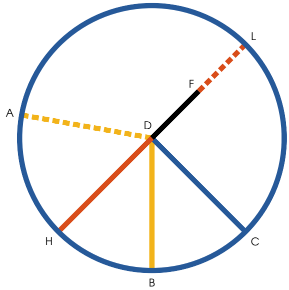
$\therefore BM = MO$, что невозможно.

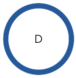
$\therefore DH \neq DO$, ни какой либо часть DN, $\therefore DN \not> DH$.

Так же и $DH \not> DN$, они $\therefore =$ друг другу.

Так же и любая другая линия, проведенная из той же точки к окружности, должна будет лежать по одну сторону с одной из этих линий и быть ближе или дальше, чем они от линии, проходящей через центр и не может, следовательно, быть равной им.

ч. т. д.



Если *внутри круга*  *взята точка, из которой к окружности может быть проведено больше двух равных прямых линии* , , , *эта точка является центром круга.*

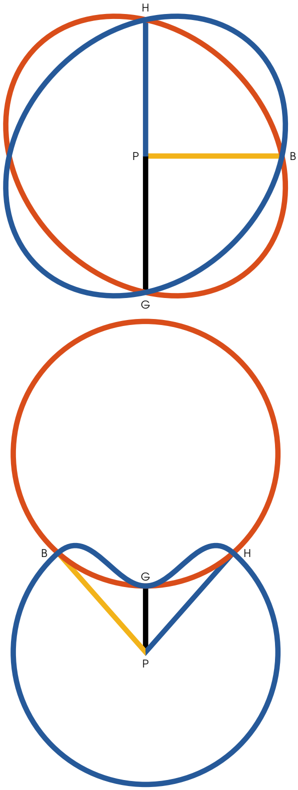
Действительно, если рассматриваемая точка , в которой встречается больше двух равных прямых линий, не центр, то какая-то другая  должна быть центром, проведем между этими двумя точками  и продлим в обе стороны до окружности.

Теперь, поскольку более чем две равных прямых линии проведено к окружности из точки, не являющейся центром, две из них должны лежать по одну сторону диаметра , и, поскольку из точки , не являющейся центром прямые линии проведены к окружности, наибольшая из них , та, что проходит через центр, а , которая ближе к , >  расположенной дальше (пр. III.8), но  =  (гип.), что невозможно.

То же можно показать для любой другой точки, кроме , которая, таким образом, должна быть центром круга.

ч. т. д.

Круг *не сечет круга* *более чем в двух точках.*



Действительно, будь такое возможно, пусть они пересекаются в трех точках.

Из центра P проведем PG, PB и PH к точкам пересечения.

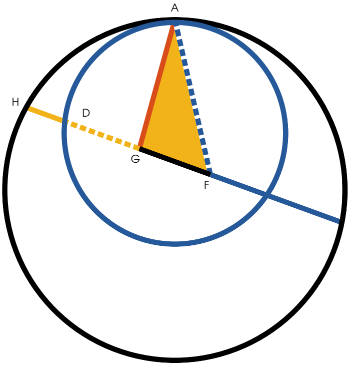
∴ PG = PB = PH (опр. 15), но, поскольку круги пересекаются, у них не один центр (пр. III.5).

∴ рассматриваемая точка не центр ,

и ∴, поскольку PG, PB и PH проведены не из центра, они не равны (пр. III.7, III.8).

Но выше было показано, что они равны, что невозможно, круги, стало быть, не пересекаются в трех точках.

ч. т. д.



Если *два круга* AG *и* AF *касаются между собой изнутри, прямая, соединяющая их центры, при продлении проходит через точку касания.*

Действительно, если такое возможно, соединим центры с помощью GF и продлим в обе стороны.

Из точки касания проведем AG к сентру AG, из той же точки касания проведем AF к центру AF.

В △ GF + AG > AF (пр. I.20),

а AF = HF, как радиусы AF.

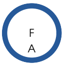
Но GF + AG > HF.

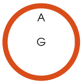
Вычтем GF общую обеим, получим AG > HG.

Но AG = DG, как радиусы AG, и ∴ DG > HG часть больше целого, что невозможно.

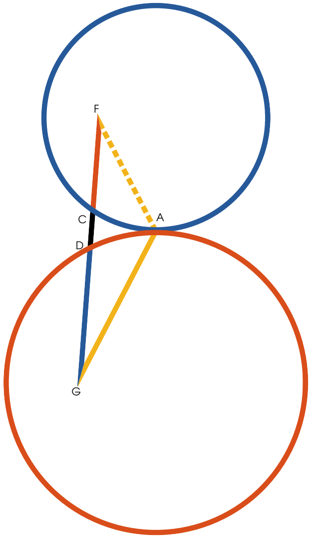
Центры, следовательно, расположены так, что линия, соединяющая их не может проходить через какую-либо точку, кроме точки касания.

ч. т. д.

Если *два круга* 

и 

касаются друг друга извне, прямая FG *соединяющая их центры проходит через точку касания.*



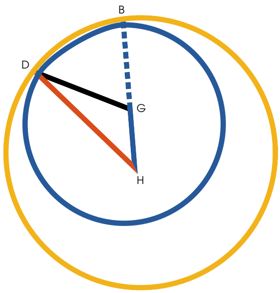
Действительно, если такое возможно, соединим центры с помощью FG, не проходящей через точку касания, из точки касания проведем AF и AG к центрам.

Поскольку AF + AG > FG (пр. I.20),
FC = AF (опр. 15)
и DG = AG (опр. 15),
∴ FC + DG > FG,
часть больше целого, что невозможно.

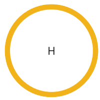
Центры, следовательно, расположены так, что линия, соединяющая их не может проходить через какую-либо точку, кроме точки касания.

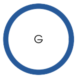
ч. т. д.

Круг *не касается круга более чем в одной точке, как внутри, так и снаружи.*



Случай I.

Действительно, если это возможно, пусть 

и 

касаются друг друга внутри в двух точках, проведем GH соединяющую их центры, и продлим до одной из точек касания (пр. III.11).

Проведем DH и DG.

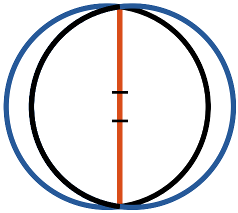
Но $BG = DG$ (опр. 15).

∴ если добавить к каждой GH,
$HB = GH + DG$.

Но $HB = DH$ (опр. 15)
и ∴ $GH + DG = DH$.

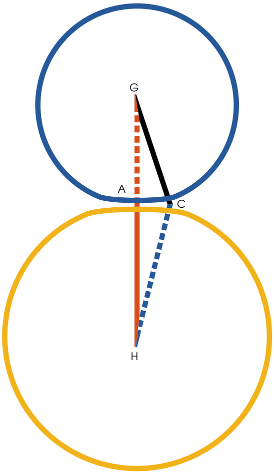
Но ∴ $GH + DG > DH$ (пр. I.20),
что невозможно.

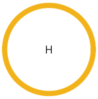
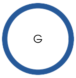
Случай II.



Если точки касания на концах прямой линии, соединяющей центры, такая прямая должна быть рассечена пополам в двух разных точках, соответствующих центрам, поскольку она является диаметром обоих кругов, что невозможно.

Случай III.



Теперь, если такое возможно, пусть круги  и  касаются друг друга снаружи в двух точках.

Проведем , соединяющую центры, и проходящую через одну из точек касания, проведем также  и .

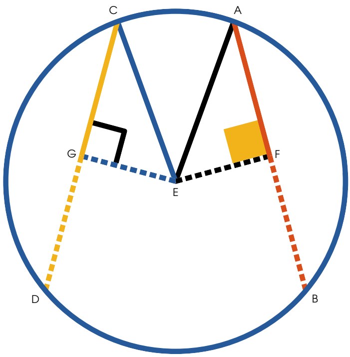
 =  (опр. 15)
и  =  (опр. 15).

∴  +  = .

Но  +  > 
(пр. I.20), что невозможно.

Следовательно, ни в каком случае круги не касаются друг друга в двух точках.

ч. т. д.



Равные *прямые* (AB, CD) *в круге равноотстоят от центра и равноотстоящие от центра прямые равны.*

Из центра E

проведем $EF \perp AB$ и $EG \perp CD$,
проведем EA и EC.

Тогда $CG = \frac{1}{2} CD$ (пр. III.3)
и $AF = \frac{1}{2} AB$ (пр. III.3).

Поскольку $CD = AB$ (гип.),
$\therefore CG = AF$ (акс. VII)
и $EA = EC$ (опр. 15),
$\therefore EA^2 = EC^2$.

Но поскольку EFA прямой (постр.),

$EA^2 = EF^2 + AF^2$ (пр. I.47)
и $EC^2 = EG^2 + CG^2$ по той же причине.

$\therefore EF^2 + AF^2 = EG^2 + CG^2$.

$\therefore EF^2 = EG^2$.

$\therefore EF = EG$.

Также, если прямые AB и CD равноудалены от центра, то есть перпендикуляры EF и EG равны, $AB = CD$.

Поскольку, как и в предыдущем случае,

$$EG^2 + CG^2 = AF^2 + EF^2,$$

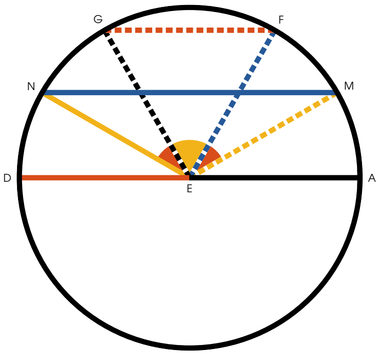
но $EG^2 = EF^2$.

$$\therefore\ CG = AF,$$

и удвоенные $AB = CD$ тоже равны.

ч. т. д.

В круге *наибольшая прямая — диаметр, а из других более близкая к центру больше более удаленной.*



Случай I.

Диаметр DA > любой прямой MN.

Действительно, проведем EN и EM.

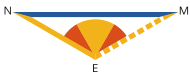
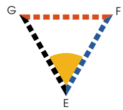
Тогда EM = EA
и EN = DE,
∴ EN + EM = DA,
но EN + EM > MN (пр. I.20).

∴ DA > MN.

Теперь покажем, что та прямая что ближе больше той, что дальше.

Пусть это будут MN и FG, расположенные по одну сторону от центра и не пересекающиеся.

Проведем EN, EM, EG и EF.

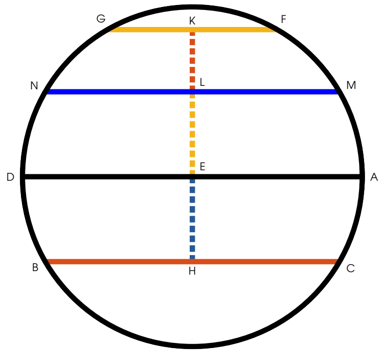
В  и 

EN и EM = EG и EF,

но  > .

∴ MN > EF (пр. I.24)

Случай II.



Теперь возьмем BC и GF расположенные по разные стороны от центра или пересекающиеся.

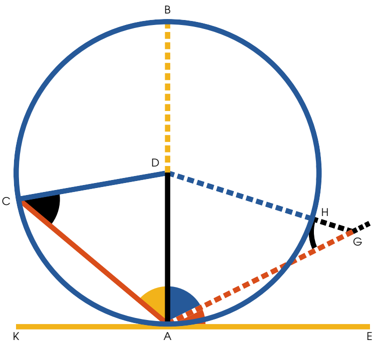
Проведем из центра
EK и EH ⊥ GF и BC.

Сделаем EH = EL,
и проведем NM ⊥ EK.

Поскольку BC и NM равноудалены от центра, BC = NM (пр. III.14),
но NM > GF (Случай I).

∴ BC > GF.

ч. т. д.



Прямая *, проведенная под прямым углом к диаметру круга проходит вне круга.*

И если любая прямая линия проведена из точки по ту же сторону от перпендикуляра к точке касания, она сечет круг.

Часть I.

Если это возможно, пусть , пересекающая окружность в еще одном месте будет ⊥ , и проведем .

Тогда, поскольку = ,

= (пр. I.5),

и ∴ оба угла острые (пр. I.17),

но = (гип.), что невозможно.

Следовательно проведенная ⊥ не пересекает окружность в другом месте.

Часть II.

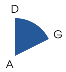
Пусть ⊥ и пусть проведена из точки между и кругом, и, если возможно, не сечет круг.

= , ∴ острый угол.

Допустим ⊥ ,

проведенной из центра круга, должна

падать на сторону острого угла .

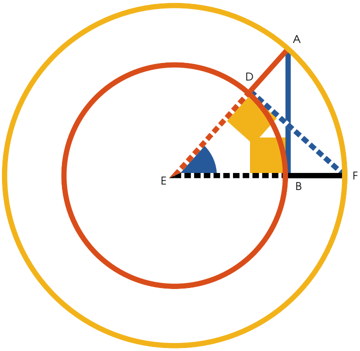
∴ , который должен быть прямым > .

∴  > .

Но  = .

И ∴  > , часть больше целого, что невозможно. Следовательно, точка не находится вовне круга и, следовательно, прямая  сечет круг.

ч. т. д.



Провести *касательную к данному кругу* *из данной точки.*

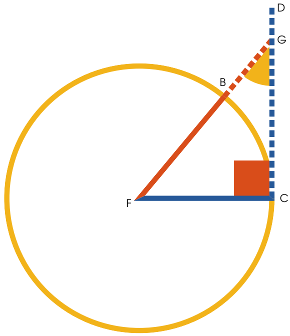
Если данная точка расположена на окружности, ясно, что прямая ⊥ радиусу и будет искомой касательной (пр. III.16).

Но если точка расположена вовне, проведем из нее к центру, секущую , и проведем ⊥ , опишем концентрический с с радиусом = , проведем к центру из точки, где падает на окружность , проведем ⊥ из точки, где та сечет .

Тогда и будет искомой касательной.

Поскольку в и = , общий, и = , ∴ (пр. I.4) = = , ∴ касательная к .

ч. т. д.



Если *прямая* CD *касается круга, прямая* FC*, проведенная из центра к точке касания перпендикулярна ей.*

Действительно, если возможно,
пусть FG будет ⊥ CD,

тогда, поскольку FCG = □, FCG острый (пр. I.17).

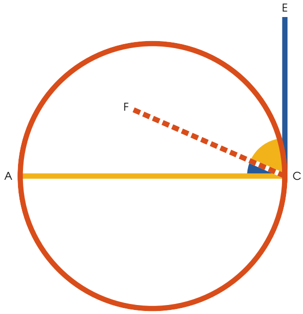
∴ FC > FG (пр. I.19).

Но FC = FB,
и ∴ FB > FG, часть
больше целого, что невозможно.

∴ FG не ⊥ CD.

И так же можно показать, что никакая другая прямая, кроме FC не перпендикулярна CD.

ч. т. д.



Если прямая CE *касается круга, прямая* AC*, перпендикулярная ей, проведенная из точки касания, проходит через центр круга.*

Действительно, если центр не находится на AC, проведем CF к предполагаемому центру из точки касания.

Поскольку CF ⊥ CE (пр. III.18)

∴ FCE = □, прямому углу.

Но ACE = □ (гип.).

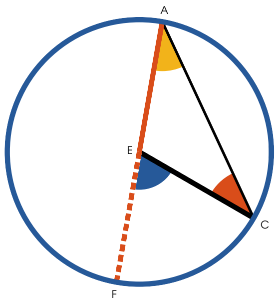
И ∴ FCE = ACE,
часть равна целому, что невозможно.

Следовательно, предполагаемая точка не центр, и то же можно показать для любой другой точки, не лежащей на AC.

ч. т. д.

Угол, *при центре круга вдвое больше угла при окружности, когда их основание лежит на одной дуге.*

Случай I.



Пусть центр круга будет на ,

стороне .

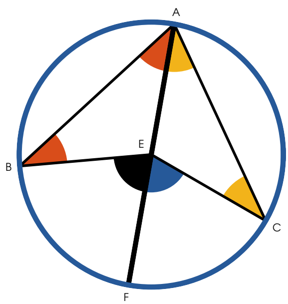
Поскольку = ,

= (пр. I.5).

Но = + ,

или = дважды (пр. I.32).

Случай II.



Пусть центр будет в , углу на окружности.

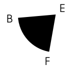
Проведем из угла через центр круга.

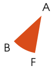
Тогда = , и = ,

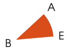
вследствие равенства сторон (пр. I.5).

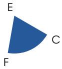
Значит

+ + + = дважды .

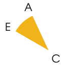
Но 

= 

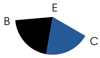
+ 

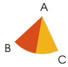
и 

= 

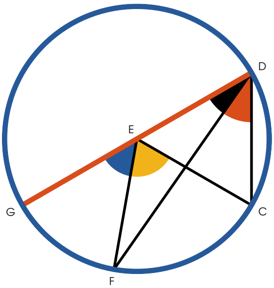
+ 

.

∴ 

= дважды 

.



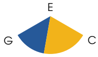
Случай III.

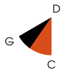
Пусть центр будет вовне 

.

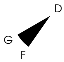
Проведем диаметр 

.

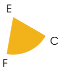
Поскольку 

= дважды 

и 

= дважды 

(случай I.),

∴ 

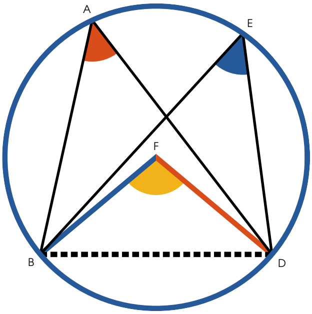
= дважды 

.

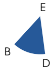
ч. т. д.

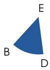
В круге *углы в одном сегменте равны между собой.*

Случай I.

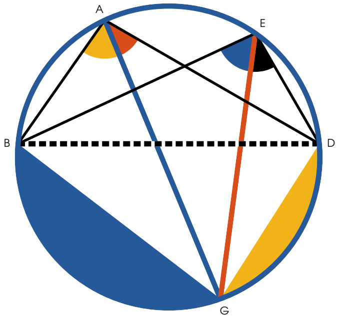


Пусть сегмент будет больше половины круга, проведем  и  к центру.

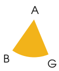
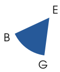
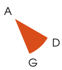
 = дважды  или дважды =  (пр. III.20).

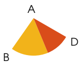
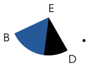
∴  = .

Случай II.

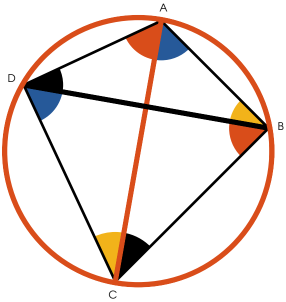


Пусть сегмент будет меньше или равен половине круга, проведем диаметр , также проведем .

 =  и  =  (случай I.).

∴  = .

ч. т. д.



Противоположные *углы* и *или* и *четырехугольника вписанного в круг, вместе равны двум прямым углам.*

Проведем диагонали и .

Поскольку углы в одной дуге равны,

=

и = .

Добавим к каждому ,

+ =

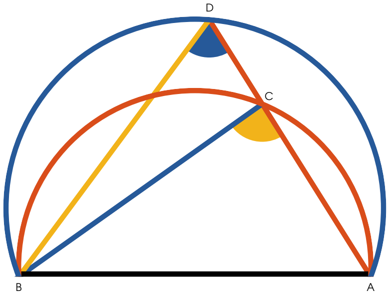
+ + = (пр. I.32).

Так же можно показать, что

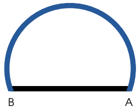
+ = .

ч. т. д.

На одной прямой и по одну ее сторону нельзя построить два подобных и неравных сегмента круга.



Действительно, если это возможно, построим два подобных сегмента



и


.

Проведем прямую

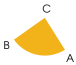

, секущую оба.

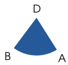
Проведем


и

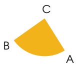

.

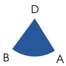
Поскольку сегменты подобны,



=


(опр. III.11).

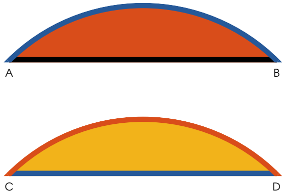
Но


>


(пр. I.16), что невозможно.

Следовательно, никакая точка одного сегмента не расположена вовне другого сегмента и значит сегменты совпадают.

ч. т. д.



Подобные *сегменты* AB *и* CD *кругов на равных прямых* AB *и* CD *равны между собой.*

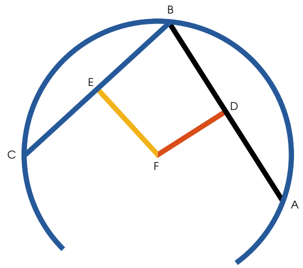
Поскольку, если CD наложить на AB,
так, что CD совпадет с AB,
концы CD будут на концах AB
и AB по одну сторону с CD.

Поскольку CD = AB,
CD будет полностью совпадать с AB.

Равные сегменты на одной прямой и по одну ее сторону также совпадают (пр. III.23), и, следовательно, равны.

ч. т. д.

К данному *сегменту круга пристроить круг, сегментом которого он является.*



Из любой точки сегмента проведем BC и AB.

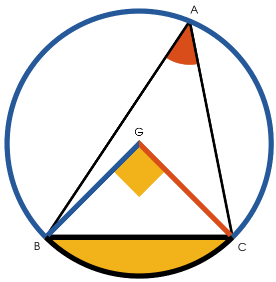
Рассечем обе пополам и из точек рассечения.

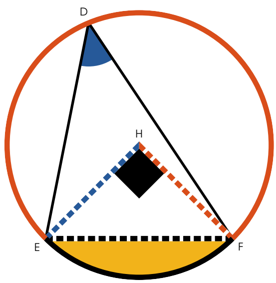
Проведем EF ⊥ BC и DF ⊥ AB.

Где они пересекаются, там и находится центр круга.

Поскольку BC кончающаяся на окружности рассекается перпендикуляром EF, который проходит через центр (пр. III.1), так же и DF проходит через центр, следовательно, их пересечение и есть центр.

ч. т. д.





В равных *кругах* G *и* H *дуги* B C *и* E F, *на которые опираются равные, что при центре, что при окружности, углы, равны.*

Поскольку, пусть G B C = H E F при центре, проведем B C и E F.

Тогда, поскольку G = H,

у G B C и H E F

B G = C G = E H = F H

и G B C = H E F.

∴ B C = E F (пр. I.4).

Но A B C = D E F (пр. III.20).

∴ B C и E F подобны (опр. III.11)

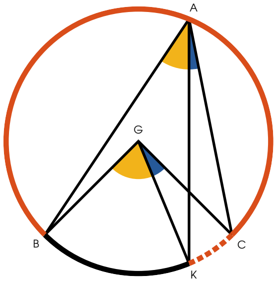
и равны (пр. III.24).

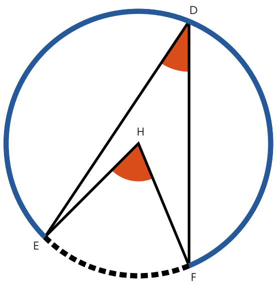
А если равные сегменты вычесть из равных кругов, оставшиеся сегменты будут равны, то есть B C = E F (акс. III).

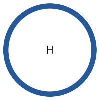
И ∴ B C = E F.

И если равные углы будут при окружности, очевидно, что углы в центре, будучи вдвое больше углов при окружности, также равны, и, следовательно, дуги, на которые они опираются, тоже равны.

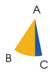
ч. т. д.





В равных *кругах*  *и*  , *углы*  *и*  , *опирающиеся на равные дуги, равны между собой, будь они при центрах или при окружностях.*

Поскольку, если такое возможно, пусть один из них  будет больше другого  .

Сделаем  =  .

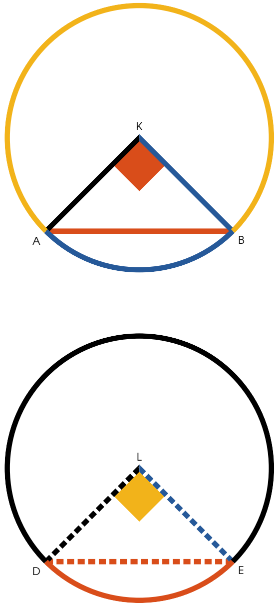
∴  =  (пр. III.26).

Но  =  (гип.)

∴  =  часть равны целому, что невозможно.

∴ ни один из углов не больше другого, и ∴ они равны.

ч. т. д.



В равных *кругах* K *и* L *равные хорды* AB *и* DE *отсекают равные дуги.*

Из центров равных кругов, проведем AK, BK и DL, EL.

Поскольку K = L

AK, BK = DL, EL,

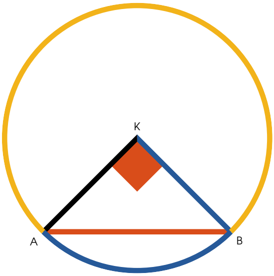
а также AB = DE (гип.).

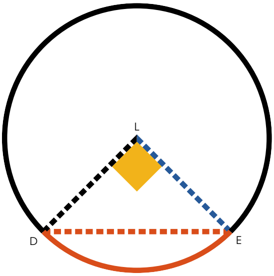
∴ KAB = LDE.

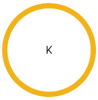
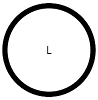
∴ AB = DE (пр. III.26).

И ∴ AB = DE (акс. III).

ч. т. д.

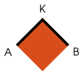
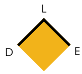




В равных *кругах*  *и* *, хорды*  *и* *, стягивающие равные дуги, равны.*

Если дуги равны половинам окружностей, то предложение очевидно, а если нет, пусть ,  и ,  проведены из центров.

Поскольку  =  (гип.),

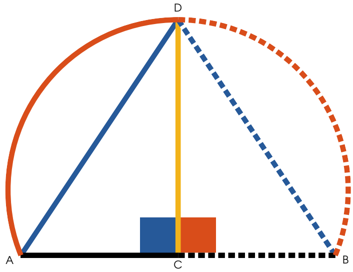
 =  (пр. III.27).

Но  и  =  и .

∴  =  (пр. I.4),
а это и есть хорды, стягивающие равные дуги.

ч. т. д.

Рассечь *данную дугу* A B *пополам.*



Проведем AB.

Сделаем AC = CB (пр. I.10).

Проведем DC ⊥ AB
(пр. I.11), она и будет рассекать дугу.

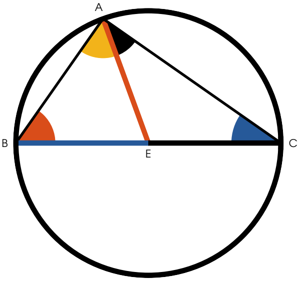
Проведем DA и DB.

Тогда у ADC и CDB
AC = CB (постр.)
DC общая,
и ADC = DCB (постр.).

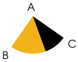
∴ DA = DB (пр. I.4)
и AD = DB (пр. III.28),
и значит данная дуга рассечена.

ч. т. д.

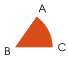
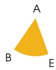
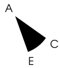
В круге *угол заключенный в полукруге прямой, в сегменте больше полукруга острый, в сегменте меньше полукруга тупой.*

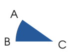
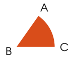
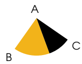


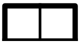
Случай I.

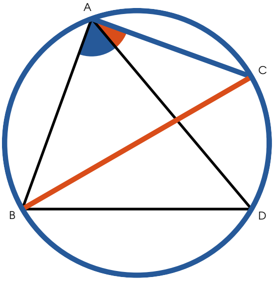
Угол  в полукруге прямой.

Проведем  и .

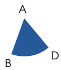
 =  и  =  (пр. I.5)

 +  =  =

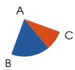
половина  =  (пр. I.32).

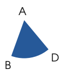


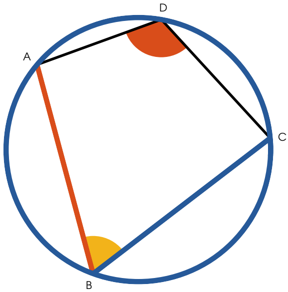
Случай II.

Угол  в сегменте больше полукруга острый.

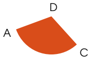
Проведем диаметр  и 

∴  = прямому углу.

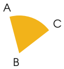
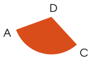
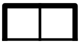
∴  острый.

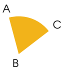


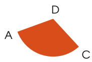
Случай III.

Угол  в сегменте меньше полукруга тупой.

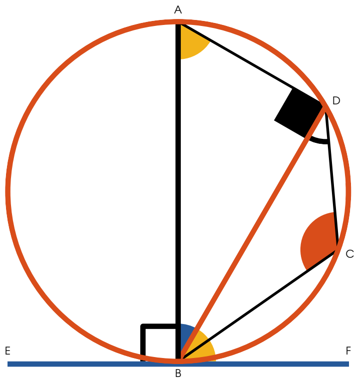
Возьмем на противоположной стороне окружности любую точку, к которой проведем  и .

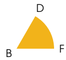
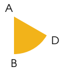
Поскольку  +  =  (пр. III.22).

Но  <  (случай II.),

∴  тупой.

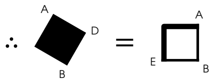
ч. т. д.

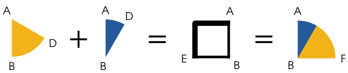


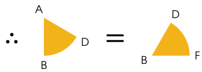
Если *прямая*  *касается круга, и из точки касания проведена прямая* *, секущая круг, угол*  *между этой прямой и касательной равен углу*  *в накрестлежащем сегменте круга.*

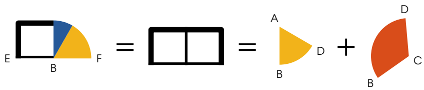
Если хорда проходит через центр, то очевидно, что углы равны, поскольку и тот и тот прямые. (пр. III.16, пр. III.31)

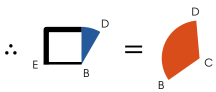
Если же нет, проведем  ⊥  из точки касания, которая будет проходить через центр (пр. III.19)

 (пр. III.31),

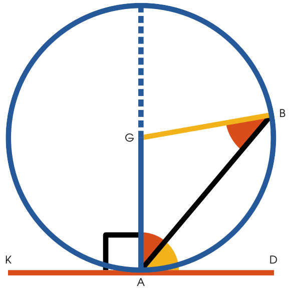
 (пр. I.32)

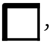
 (акс. III).

Теперь  (пр. III.22).

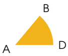
 (акс. III), который и будет углом в накрестлежащем сегменте.

ч. т. д.

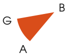


Н*а данной прямой*  *описать сегмент круга, вмещающий угол, равный данному* , , .

Если данный угол прямой, то рассечем отрезок и опишем на нем полукруг, который, очевидно, будет содержать прямой угол (пр. III.31).

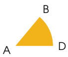
Если же данный угол острый или тупой, сделаем с данной прямой на одном из ее концов  = .

Проведем  ⊥ 

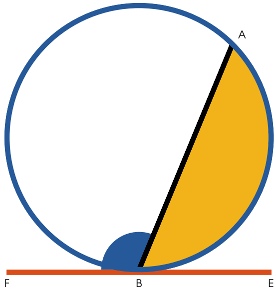
и сделаем  = .

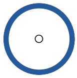
Опишем  с  или 
в качестве радиуса, ведь они равны.

 касается  (пр. III.16).

∴  делит круг на два сегмента,
вмещающие углы равные  и ,
соответственно равные  и  (пр. III.32).

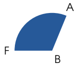
ч. т. д.



О*т данного круга*  *отсечь сегмент, вмещающий данный прямолинейный угол*  .

Проведем 

(пр. III.17), касательную к кругу в любой точке.

В точке касания сделаем


=  , данному углу.

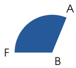
Тогда 

содержит угол = данному углу.

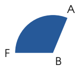
Поскольку 

касательная,
и 

сечет ее,
угол в 

= 

(пр. III.32).

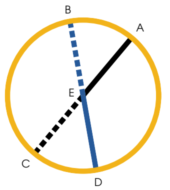
Но 

=  (постр.)

ч. т. д.

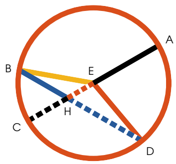
Е*сли в круге две хорды* $\left\{\begin{matrix} AC \\ DB \end{matrix}\right\}$ *секут друг друга, прямоугольник, заключенный между частями одной равен прямоугольнику, заключенному между частями другой.*

Случай I.



Если данные прямые проходят через центр, они секут друг друга посередине, следовательно прямоугольники заключенные между их частями являются квадратами, и значит, равны.

Случай II.

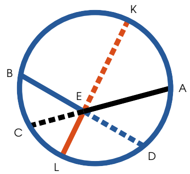


Пусть CA проходит через центр, а BD нет, проведем EB и DE.

Тогда $BH \times HD = EB^2 - EH^2$ (пр. II.6), или $BH \times HD = CE^2 - EH^2$.

$\therefore\ BH \times HD = HA \times AE$ (пр. II.5).

Случай III.

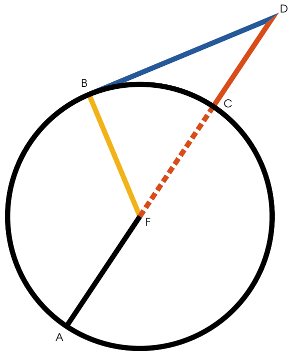


Пусть ни одна из прямых не проходит через центр, проведем через точку их пересечения диаметр KL и $KE \times EL = BE \times ED$ (случай II.), а также $KE \times EL = AE \times EC$ (случай II.).

$\therefore\ BE \times ED = AE \times EC$.

ч. т. д.

Если *из точки вне круга к кругу проведены две прямых, одна из которых* DB *касается круга, а другая* AD *сечет его; прямоугольник, заключенный между всей секущей* AD *и внешней частью* DC *равен квадрату касательной* DB.



Случай I.

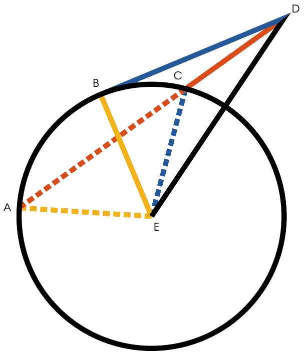
Пусть AD проходит через центр.

Проведем BF из центра к точке касания.

$DB^2 = FD^2 - BF^2$ (пр. I.47),

или $DB^2 = FD^2 - CF^2$.

$\therefore DB^2 = AD \times DC$ (пр. II.6).



Случай II.

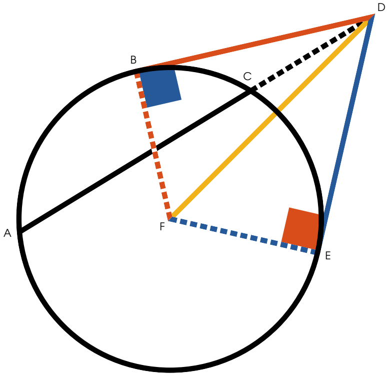
Если AD не проходит через центр,
проведем EA и EC.

Тогда $AD \times CA = DE^2 - EC^2$
(пр. II.6).

То есть $AD \times CA = DE^2 - EB^2$.

$\therefore AD \times CA = DB^2$ (пр. III.18).

ч. т. д.



Если *из точки вне круга проведены две прямых линии, одна из которых* AD *сечет круг, а другая* DB *лишь падает на него, и если прямоугольник заключенный между всей секущей линией* AD *и ее внешней частью* DC *равен квадрату линии падающей на круг, та* DB *является касательной к кругу.*

Проведем из данной точки касательную к кругу DE.

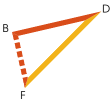
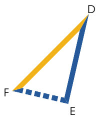
И проведем из центра DF, BF, и EF.

$DE^2 = AD \times DC$ (пр. III.36),

но $DB^2 = AD \times DC$ (гип.).

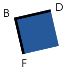
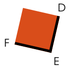
$\therefore DB^2 = DE^2$,

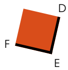
и $\therefore DB = DE$.

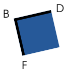
Тогда в  и 

BF и $DB = EF$ и DE,

и DF общая обоим,

$\therefore$  $=$  (пр. I.8),

но  $=$ , прямому углу (пр. III.18).

$\therefore$  $=$ , прямому углу

и $\therefore DB$ касается круга (пр. III.16).

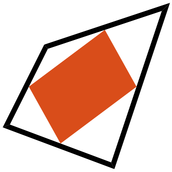
ч. т. д.

Книга IV

Определения

1

Говорят, что прямолинейная фигура *вписывается* в другую прямолинейную фигуру, если каждый из углов вписываемой фигуры касается всех сторон той, в которую она вписывается.



2

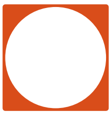
Про фигуру говорят, что она *описывается около* фигуры, если каждая сторона описываемой фигуры касается угла той, около которой она описывается.

3

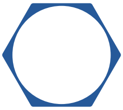
Про прямолинейную фигуру говорят, что она *вписывается* в круг, когда каждый угол вписываемой фигуры касается окружности.

4

Про фигуру говорят, что она *описывается* около круга, если каждая из ее сторон касается окружности.

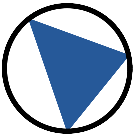


5



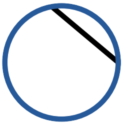
Про круг говорят, что он *вписывается* в фигуру, когда его окружность касается каждой из сторон фигуры.

6



Про круг говорят, что он *описывается* около прямолинейной фигуры, если его окружность проходит через все углы фигуры.

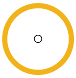
7



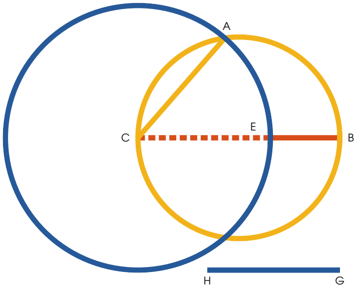
Говорят что прямая *вписывается* в круг, когда ее концы находятся на окружности.

Четвертая книга посвящена решению задач, преимущественно касающихся вписыванию и описыванию правильных многоугольников.

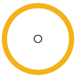
Правильным называют такой многоугольник стороны и углы которого равны.

В данный *круг*  *вписать прямую, равную данной* 

, не большей диаметра круга.



Проведем диаметр 

круга ;
и если 

= 

, задача решена.

Если же 

не равна 

,

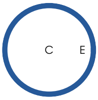

> 

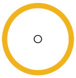
(гип.).

Сделаем 

= 

(пр. I.3)
взяв 

за радиус, построим


, секущий ,
и проведем 

, которая
и будет искомой прямой.

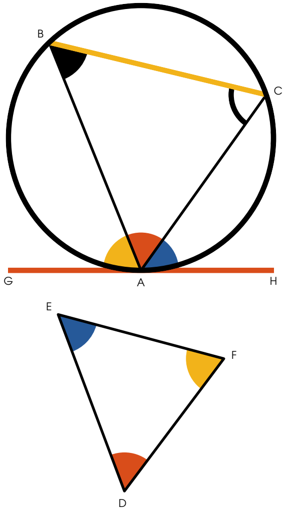
Поскольку 

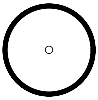
= 

= 

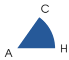
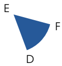
(опр. I.15, постр.).

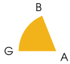
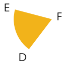
ч. т. д.

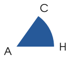
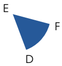
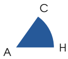
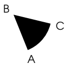


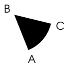
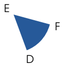
В данный *круг*  *вписать треугольник, равноугольный данному.*

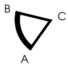
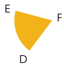
Проведем касательную ,
к любой точке круга (пр. III.17).

В точке касания сделаем  =  (пр. I.23).

Так же сделаем  = 
и проведем .

Поскольку  =  (постр.)
и  =  (пр. III.32).

∴  = .

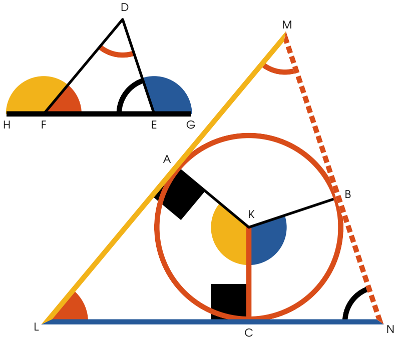
Также и  =  по той же причине.

∴  =  (пр. I.32).

И, следовательно, вписанный в круг треугольник равноуголен данному.

ч. т. д.

Около *данного круга* *описать треугольник, равноугольный данному.*



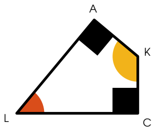
Продлим одну из сторон , данного треугольника в обе стороны.

Из центра данного круга проведем радиус .

Сделаем = (пр. I.23)

и = .

Через концы радиусов проведем , и , касательные к кругу. (пр. III.17)



Четыре угла , взятые вместе равны четырем прямым углам (пр. I.32).

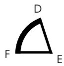
Но и прямые (постр.).

∴ + = , двум прямым углам.

Но = (пр. I.13)

и = (постр.) и ∴ = .

Таким же образом можно показать, что

=


.

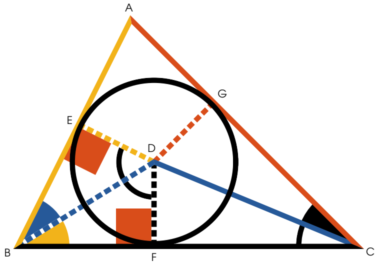
∴

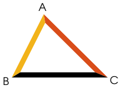

=

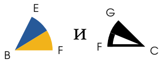

(пр. I.32)

и значит, описанный около круга треугольник равноуголен данному.

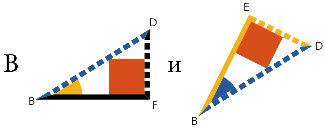
ч. т. д.

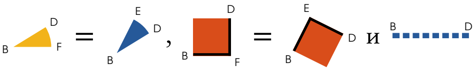


В данный *треугольник*  *вписать круг.*

Рассечем пополам  (пр. I.9) с помощью и .

Из точки, где они встречаются, проведем , и соответственно перпендикулярные , и .

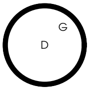


 общая.

∴ = (пр. I.4, пр. I.26).

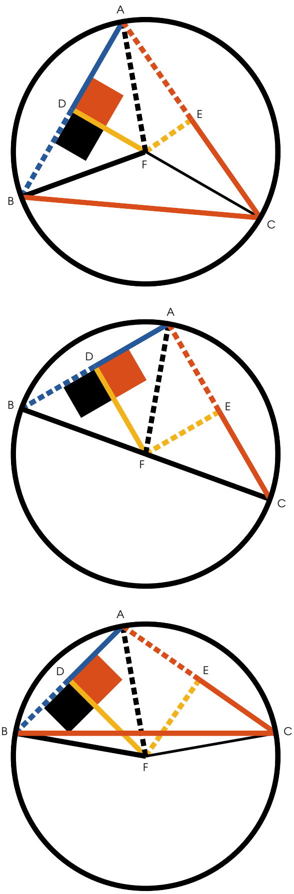
Так же можно показать, что = .

∴ = = .

Взяв любую из этих линий за радиус, опишем 

и его окружность будет проходить через концы других двух, а стороны данного треугольника, перпендикулярные к трем радиусам и проходящие через их концы, касаются круга (пр. III.16), который, таким образом, вписан в данный треугольник.

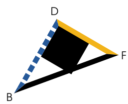
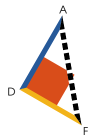
ч. т. д.

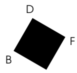
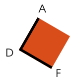


Около *данного треугольника описать круг.*

Сделаем AD = DB
и CE = EA (пр. I.10).

Из точек рассечения проведем
DF и EF ⊥ AD и CE (пр. I.11),
из точки из пересечения проведем
BF, AF и CF
и опишем круг с любой из них в качестве
радиуса, это и будет искомый круг.

В  и 

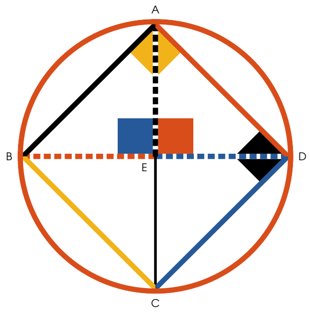
DB = AD (постр.),
DF общая,
 =  (постр.).

∴ AF = BF (пр. I.4).

Так же можно показать и что CF = AF.

∴ AF = BF = CF,
и, следовательно, круг с центром в точке
их пересечения и с любой из них в качестве
радиуса опишет данный треугольник.

ч. т. д.



В данный *круг* E *вписать квадрат.*

Проведем два диаметра круга ⊥ друг другу, проведем BC, AB, DA и CD,

тогда BADC квадрат.

Поскольку BAD и ACD каждый в полукруге, оба являются прямыми (пр. III.31).

∴ CD ∥ AB (пр. I.28).

так же и DA ∥ BC.

И, поскольку BAE = AED (постр.),

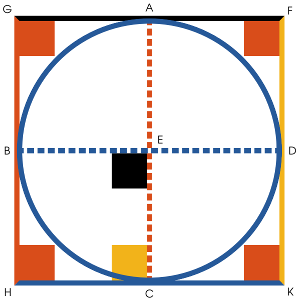
и BE = AE = DE

(опр. 15), ∴ AB = DA (пр. I.4).

Поскольку смежные углы и стороны параллелограмма BADC равны, все его стороны и углы равны (пр. I.34).

И ∴ BADC, вписанный в данный круг является квадратом.

ч. т. д.



Около *данного круга* E *описать квадрат.*

Проведем два перпендикулярных друг другу диаметра данного круга BD, AC, и через их концы проведем HK, GH, FG и KF касательные к кругу, тогда GFHK будет квадратом.

HEC = прямому углу, (пр. III.18)

так же и BEC = (постр.),

∴ HK ∥ BD.

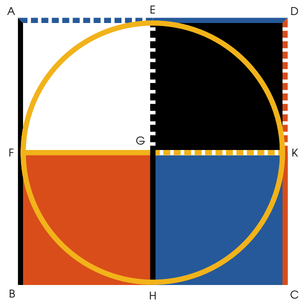
Таким же образом можно показать что FG ∥ BD, а также что GH и KF ∥ AC.

∴ GFHK параллелограмм, и поскольку GFH = GFK = FHK = GHK = HCE, все они прямые (пр. I.34).

Также очевидно, что HK, GH, FG и KF равны между собой.

∴ GFHK квадрат.

ч. т. д.



В данный *квадрат вписать круг.*

Сделаем ED = AE,
и KC = DK.

Проведем FK ∥ AD,
и EH ∥ DC (пр. I.31).

∴ EDGK параллелограмм.

И поскольку AD = DC (гип.),
ED = DK.

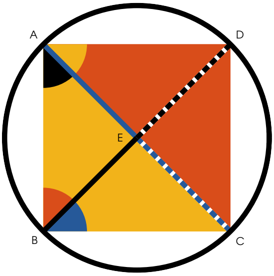
∴ EDGK равносторонний (пр. I.34).

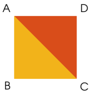
Таким же образом можно показать, что
GKHC = FGBH равносторонние параллелограммы.

∴ AE = GK = GH = FG.

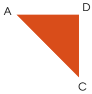
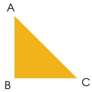
И значит если построить круг с центром в точке схождения этих линий с любой их них в качестве радиуса, он будет вписан в квадрат (пр. III.16).

ч. т. д.



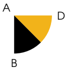
Около *данного квадрата*  *описать круг.*

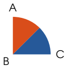
Проведем пересекающие друг друга диагонали  и .

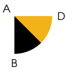
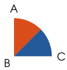
Тогда, ∵ стороны у  и  равны,

а основание  общее,

 =  (пр. I.8),

то есть  рассечена пополам.

Так же можно показать и что  рассечена пополам.

Но  = .

Значит и их половины  = .

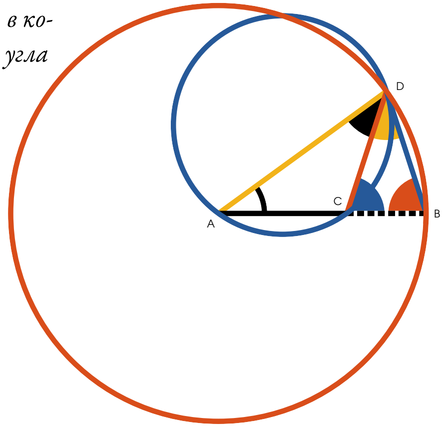
∴  =  (пр. I.6).

Так же можно показать, что  =  =  = .

И если в точке схождения этих линий с любой из них в качестве радиуса построить круг, он опишет данный квадрат.

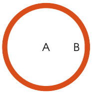
ч. т. д.

Построить *равнобедренный треугольник, в котором угол при основании вдвое больше угла в вершине.*



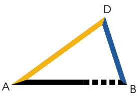
Возьмем любую прямую 
и разделим ее так, что
 ×  = ^{2} (пр. II.11).

С  в качестве радиуса опишем

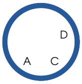
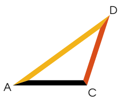
 и впишем в него от конца

радиуса  =  (пр. IV.1).

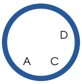
Проведем .

Тогда  и есть искомый треугольник.

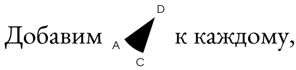
Действительно, проведем  и опишем

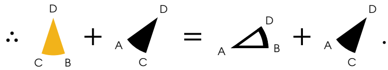
 около  (пр. IV.5).

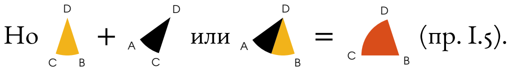
Поскольку
 ×  = ^{2} = ^{2},

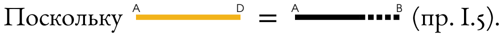
∴  касается  (пр. III.37)

∴  =  (пр. III.32).

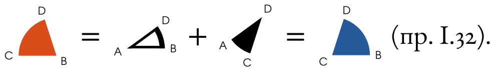


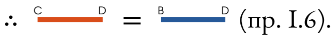


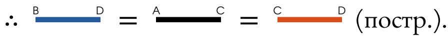


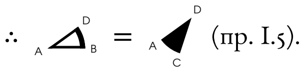


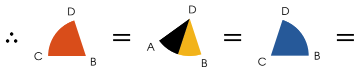
Следовательно

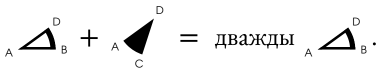






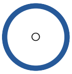


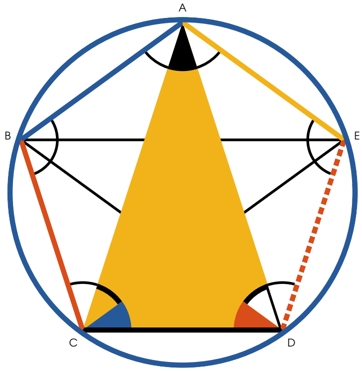




И, следовательно, каждый из углов при основании вдвое больше угла в вершине.

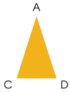
ч. т. д.

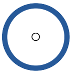
В данный *круг*  *вписать равносторонний и равноугольный пятиугольник.*

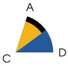


Построим равнобедренный треугольник, в котором каждый из углов при основании вдвое больше угла в вершине (пр. IV.10).

Впишем равноугольный ему

треугольник 

в данный круг  (пр. IV.2).

Рассечем 

и 

пополам (пр. I.9).

Проведем 

, 

, 

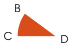
и 

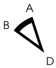
.

Поскольку углы 

, 

, 

, 

и 

равны между собой, дуги, на которых они стоят, тоже равны (пр. III.26).

И ∴ 

, 

, 

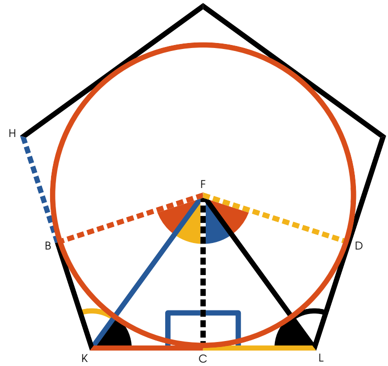
, 

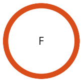
и 

стягивающие эти дуги также равны между собой (пр. III.29).

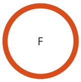
И ∴ пятиугольник является равносторонним, а также равноугольным, поскольку все его углы стоят на равных дугах (пр. III.27).

ч. т. д.

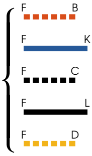


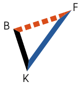
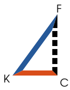
Около *данного круга*  *описать равносторонний и равноугольный пятиугольник.*

Проведем пять касательных через вершины любого правильного пятиугольника

вписанного в круг  (пр. III.17).

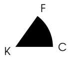
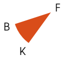
Эти пять касательных и будут образовывать искомый пятиугольник.

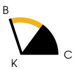
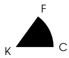
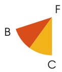
Проведем  .

В  и 

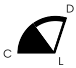
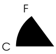
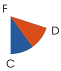
 =  (пр. I.47)

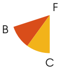
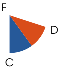
 = , и  общая.

∴  =  и ∴  =  (пр. I.8)

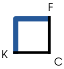
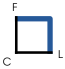
∴  = дважды , и  = дважды .

Таким же образом можно показать, что

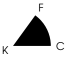
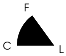
 = дважды , и  = дважды .

Но  =  (пр. III.27),

∴ и их половины  = ,

а также  = ,

и  общая.

∴  =  и  = ,

∴  = дважды .

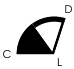
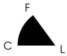
Таким же образом можно показать,

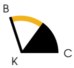
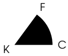
что  = дважды ,

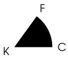
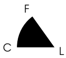
но  = .

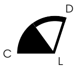
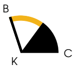
∴  = .

Так же можно показать, что остальные стороны равны и, следовательно, пятиугольник равносторонний, так же он и равноугольный, поскольку

 = дважды 

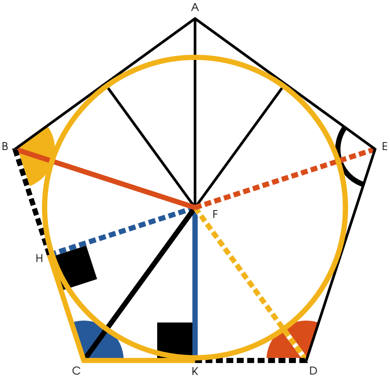
и  = дважды ,

и сделовательно  = ,

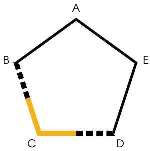
∴  = .

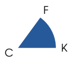
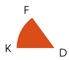
Так же можно показать, что и другие углы описанного пятиугольника равны.

ч. т. д.

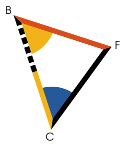
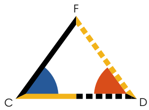


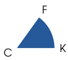
В данный *равноугольный и равносторонний пятиугольник вписать круг.*

Пусть  будет данным равноугольным и равносторонним пятиугольником, в который требуется вписать круг.

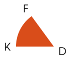
Сделаем  = , и  =  (пр. I.9)

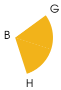
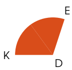
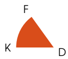
Проведем , , , , и т. д.

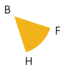
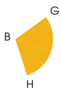
Поскольку в  и 

 = ,  = ,

и  общая обоим,

∴  =  и  =  (пр. I.4).

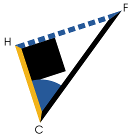
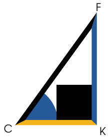
И поскольку  =  = дважды ,

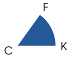
∴ дважды , а значит 

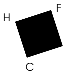
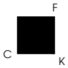
рассечен  пополам.

Так же можно показать, что  рассекается пополам , и оставшийся угол многоугольника рассекается таким же образом.

Проведем , , и т. д. перпендикулярные к сторонам пятиугольника.

Тогда в треугольниках  и 

получим  =  (постр.),  общая,

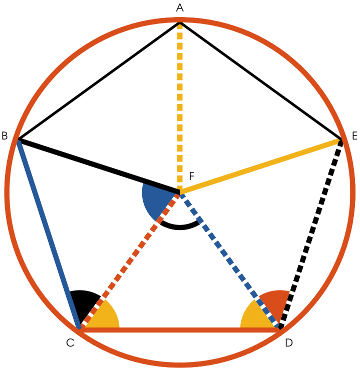
и  =  =  прямому углу .

∴  =  (пр. I.26)

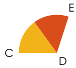
Так же можно показать, что пять перпендикуляров к сторонам пятиугольника равны между собой.

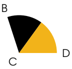
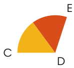
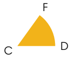
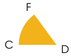
Опишем  с одним из перпендикуляров в качестве радиуса, это и будет искомый вписанный круг. Поскольку, если он не касается сторон пятиугольника, но сечет их, то прямая, проведенная через конец диаметра под прямым углом будет проходить внутри круга, что, как было показано (пр. III.16), невозможно.

ч. т. д.

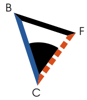
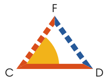


Около *данного равностороннего и равноугольного пятиугольника описать круг.*

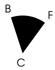
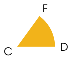
Рассечем пополам  и  с помощью  и , и из точки их пересечения проведем ,  и .

 = ,  = ,

∴  =  (пр. I.6).

И поскольку в  и ,

 = , и  общая,

а также  = .

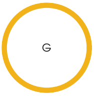
∴  =  (пр. I.4).

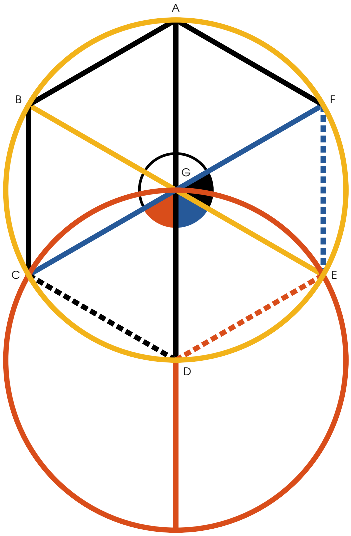
Так же можно показать, что  =  = .

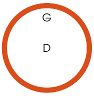
И, следовательно,  =  =  =  = .

Таким образом, круг с центром в месте пересечения этих пяти линий с любой из них в качестве радиуса будет описывать данный пятиугольник.

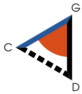
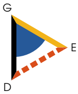
ч. т. д.

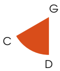
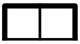
В данный *круг*  *вписать равносторонний и равноугольный шестиугольник.*

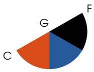
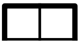


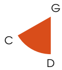
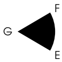
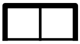
На любой точке окружности опишем  проходящий через центр и проведем диаметры ,  и .

Проведем , , , и т. д., так и получим искомый шестиугольник вписанный в круг.

Поскольку  проходит через центры кругов,  и  равносторонние,

так как  =  = $\frac{1}{3}$ 

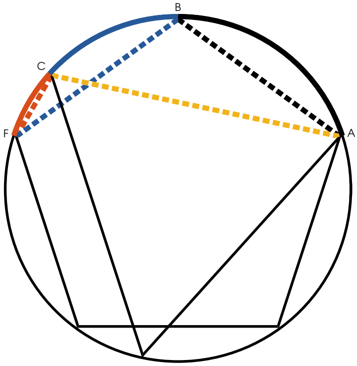
(пр. I.32), но  =  (пр. I.13).

∴  =  =  = $\frac{1}{3}$  (пр. I.32),

и вертикальные углы равны между собой (пр. I.15), и стоят на равных дугах (пр. III.26), которые стагивают равные хорды (пр. III.29).

И поскольку каждый из углов шестиугольника вдвое больше угла равностороннего треугольника, этот шестиугольник также равносторонний.

ч. т. д.



В данный *круг вписать равносторонний и равноугольный пятнадцатиугольник.*

Пусть AB и BF будут сторонами правильного пятиугольника, вписанного в данный круг, а AC стороной вписанного правильного треугольника.

$$\text{Дуга } CA = \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \bigcirc.$$

$$\text{Дуга } FA = \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \bigcirc.$$

$$\text{Их разность } FC = \frac{1}{15} \bigcirc$$

∴ дуга стягиваемая FC $= \frac{1}{15}$ всей окружности.

А значит, если прямые, равные FC, вписать в круг (пр. IV.1), получим равносторонний и равноугольный пятнадцатиугольник вписанный в круг.

ч. т. д.

Книга V

Определения

1

Меньшая величина называется аликвотой большей, если меньшая измеряет большую, то есть вмещается в нее целое число раз.

2

Большая величина называется кратной меньшей, если большая измеряется меньшей, то есть содержит в себе меньшую целое число раз.

3

Отношением называют зависимость однородных величин по количеству.

4

Про две величины говорят, что они имеют отношение между собой, когда они однородны и меньшая из них может, взятая кратно, превзойти другую.

Прочие определения будут даны по ходу изложения там, где в них возникнет необходимость.

Аксиомы

I

Равнократные или равных величин равны между собой.

$$\text{Если } A = B\text{, то}$$

$$\text{дважды } A = \text{дважды } B,$$

$$\text{то есть, } 2A = 2B;$$

$$3A = 3B;$$

$$4A = 4B;$$

и т. д. и т. д.

$$\text{и } \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B;$$

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3}B;$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{4}B;$$

и т. д. и т. д.

II

Кратное большей величины больше такого же кратного меньшей.

$$\text{Пусть } A > B,$$

$$\text{Тогда } 2A > 2B;$$

$$3A > 3B;$$

$$4A > 4B;$$

и т. д. и т. д.

III

Величина, кратное которой больше такого же кратного другой величины, сама больше другой величины.

Пусть $2A > 2B$,

тогда $A > B$;

или пусть $3A > 3B$,

тогда $A > B$;

или пусть $mA > mB$,

тогда $A > B$.

Если *будет несколько величин равнократных каждая каждой такому же количеству других величин, то сколько раз одна из первых будет кратна одной из вторых, столько же раз все первые будут кратны всем вторым.*

Пусть  будет столько же раз кратна , сколько и  кратна , сколько и  кратна .

Тогда очевидно, что

 столько же раз кратна 

сколько и  кратна .

Так как в  =  столько же величин, сколько в  = .

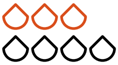
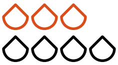
То же верно для любого числа величин, что было показано для трех.

∴ Если будет несколько величин... и т. д.

Если *первая величина столько же раз кратна второй, сколько третья четвертой, а пятая столько же раз кратна второй, сколько шестая четвертой, то первая вместе с пятой будут столько же раз кратны третьей, сколько третья вместе с шестой — четвертой.*

Пусть первая величина  будет столько же раз кратна второй , сколько третья  четвертой .

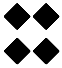
И пусть пятая  будет столько же раз кратна второй , сколько шестая  четвертой .

Тогда очевидно что первая и пятая вместе , столько же раз кратны второй , сколько третья и шестая вместе , кратны четвертой , поскольку в  =  столько же величин, сколько в  = .

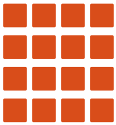
∴ Если первая величина… и т. д.

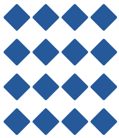
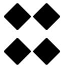
Если *первая величина имеет такое же отношение ко второй, какое третья имеет к четвертой, то и равнократные к первой и третьей к равнократным второй и четвертой, взятые в соответствующем порядке будут иметь то же отношение.*

Пусть у  будет то же отношение к ,

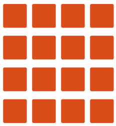
что и у  к .

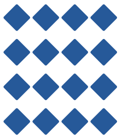
Возьмем

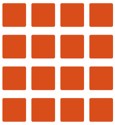
 столько же раз кратную ,

сколько  кратную .

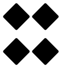
Тогда очевидно, что

 столько же раз кратна ,

сколько  кратна .

∵  содержит  содержит 

столько же раз, сколько

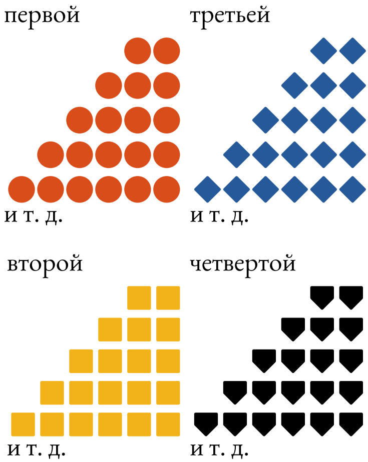
 содержит  содержит .

Те же соображения применимы во всех случаях.

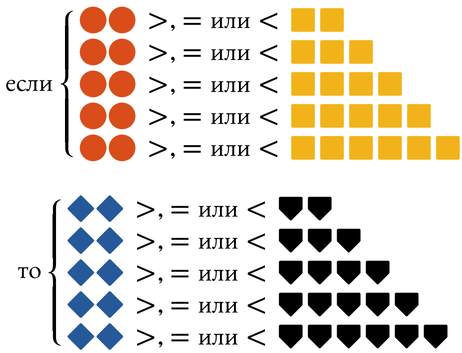
∴ Если первая величина… и т. д.

Определение V.

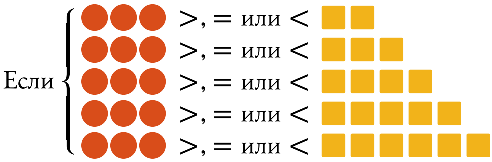
Четыре величины, , , , , называются пропорциональными, если любые равнократные первой и третьей, а также любые равнократные второй и четвертой в виде

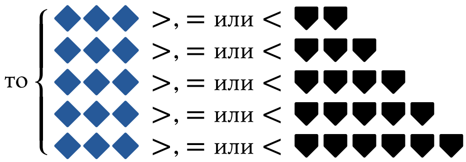


Тогда, взяв любую пару равнократных первой и третьей и любую пару равнократных второй и четвертой,

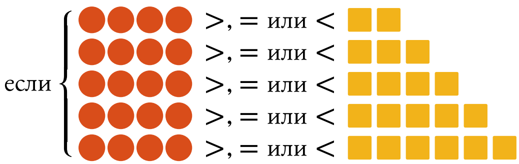


Другими словами, если дважды первая величина больше, равна или меньше дважды второй, то дважды третья будет больше равна или меньше дважды четвертой. Или, если дважды первая будет больше равна или меньше трижды второй, дважды третья будет больше, равна или меньше трижды четвертой и так далее, как обозначено выше.





Или же если трижды первая больше, равна или меньше дважды второй, то трижды третья больше, равна или меньше дважды четвертой. Или если трижды первая больше, равна или меньше трижды второй трижды второй, то трижды третья будет больше, равна или меньше трижды четвертой. Или если трижды первая больше, равна или меньше четырежды второй, то трижды третья будет больше, равна или меньше четырежды четвертой и так далее. Также



то {
◆◆◆◆ >, = или < ⬟⬟
◆◆◆◆ >, = или < ⬟⬟⬟
◆◆◆◆ >, = или < ⬟⬟⬟⬟
◆◆◆◆ >, = или < ⬟⬟⬟⬟⬟
◆◆◆◆ >, = или < ⬟⬟⬟⬟⬟⬟

И так далее, для любых равнократных четырех величин взятых таким образом.

Евклид излагает это определение следующим образом:

Говорят, что величины находятся в том же отношении: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке.

В дальнейшем будем выражать это определение в общем виде так:

если M● >, = или < m■,
когда M◆ >, = или < m⬟.

То мы заключаем, что первая величина ●, так же относится ко второй ■, как третья ◆ к четвертой ⬟. Что будет далее записываться так:

● : ■ :: ◆ : ⬟;
или так: ● : ■ = ◆ : ⬟;
или так: ●/■ = ◆/⬟:

и читается как,
«● относится к ■, как ◆ к ⬟.»

И если ● : ■ :: ◆ : ⛊ мы можем заключить, что

если M● $>, =$ или $<$ m■,

то M◆ $>, =$ или $<$ m⛊.

То есть, если первая относится ко второй, как третья к четвертой, то если M раз первая больше, равна или меньше m раз второй, то M раз третья будет больше, равна или меньше m раз четвертой, где M и m не представляют каких либо конкретных величин, но любую пару величин, также как обозначения, наподобие ●, ⛊, ■, и т. п. не более чем представления геометрических величин.

Учащийся должен крепко понять это определение, прежде чем двигаться далее.

Если *первая величина имеет такое же отношение ко второй, какое третья имеет к четвертой, то и равнократные первой и третьей будут иметь то же отношение к равнократным второй и четвертой.*

Пусть ● : ■ :: ◆ : ⬟,
тогда 3● : 2■ :: 3◆ : 2⬟,
всякое равнократное 3● и 3◆
будет равнократным ● и ◆,
и всякое равнократное 2■ и 2⬟ будет
равнократным ■ и ⬟ (пр. V.3).

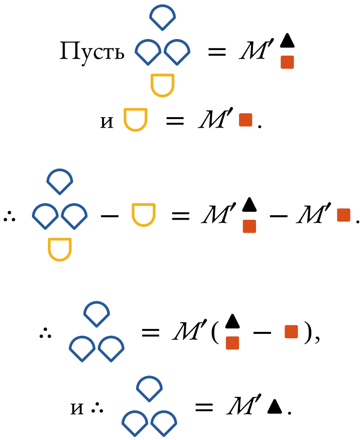
То есть, M раз 3● и M раз 3◆
равнократны ● и ◆,
и m раз 2■ и m раз 2⬟
равнократны 2■ и 2⬟.

Но ● : ■ :: ◆ : ⬟ (гип.)
∴ если M3● $<, =,$ или $>$ m2■,
то M3◆ $<, =,$ или $>$ m2⬟ (опр. V.5)
и значит 3● : 2■ :: 3◆ : 2⬟ (опр. V.5).

Те же соображения работают для любых равнократных первой и третьей величин и любых равнократных второй и четвертой.

∴ Если первая величина… и т. д.

Если *одна величина столько же раз кратна другой, сколько и величина отнимаемая от первой кратна к величине отнимаемой от второй, то остаток будет столько же раз кратен остатку, как целое целому.*



∴ Если одна величина... и т. д.

Если *две величины равнократны двум другим, и если равнократные последним отняты от первых двух, то остатки будут либо равны вторым, либо будут им равнократны.*

Пусть  $= M'\blacksquare$

и  $= M'\blacktriangle$.

Тогда  $- m'\blacksquare = M'\blacksquare - m'\blacksquare = (M' - m')\blacksquare$

и  $- m'\blacktriangle = M'\blacktriangle - m'\blacktriangle = (M' - m')\blacktriangle$.

Значит, $(M' - m')\blacksquare$ и $(M' - m')\blacktriangle$ равнократны $\blacksquare$ и $\blacktriangle$ и равны $\blacksquare$ и $\blacktriangle$, когда $M' - m' = 1$.

∴ Если две величины… и т. д.

Если *первая величина относится ко второй так же, как третья к четвертой, то если первая больше второй, то третья также больше четвертой, если равна, равна, а если меньше, то меньше.*

Пусть ● : ■ :: ⬟ : ◆.

Следовательно (опр. V.5), если
●● > ■■, то ⬟⬟ > ◆◆.

Но если ● > ■,
то ●● > ■■ и ⬟⬟ > ◆◆,
и ∴ ⬟ > ◆.

Точно так же, если ● =, или < ■,
то ⬟ =, или < ◆.

∴ Если первая величина... и т. д.

Определение XIV

В геометрии используется понятие «перевернутое отношение», когда есть четыре пропорциональных величины, утверждается, что вторая к первой относится так же, как четвертая к третьей.

Пусть $A : B :: C : D$, тогда, «перевернув» отношение можно заключить, что $B : A :: D : C$

Если *четыре величины пропорциональны, они будут пропорциональны и если их перевернуть.*

Пусть : :: : ,
тогда, перевернув, получим : :: : .

Если M < m , то M < m (опр. V.5).

Пусть M < m , то есть, m > M ,
∴ M < m , или, m > M .

∴ если m > M , то m > M .

Так же можно показать, что,
если m = или < M ,
то m =, или < M .

И, следовательно (опр. V.5), мы заключаем,
что : :: : .

∴ Если четыре величины пропорциональны… и т. д.

Если *первая величина столько же раз кратна второй, или составляет такую же ее часть, как и третья — четвертой, то первая относится ко второй, как третья к четвертой.*

Пусть первая величина будет
столько же раз кратна второй ,
сколько третья четвертой .

Тогда : :: : .

Возьмем *M* , *m* , *M* , *m* .

Поскольку столько же раз кратна
сколько кратна (гип.),
и *M* столько же раз кратна
столько *M* кратна .

∴ (предл.),
M столько же раз кратна
сколько *M* кратна .

Следовательно, если M

больше раз кратна , чем m ,

то M больше раз кратна , чем m .

То есть, если M больше

m , то M больше m .

Так же можно показать, что если M

равна m , то M равна m .

И, в общем виде, если M $>, =$ или $<$ m

то и M $>, =$ или $<$ m .

$\therefore$ (опр. V.5),

$: \; :: \; : \;.$

Теперь, пусть будет такой же частью от

какая от .

В этом случай так же $: \; :: \; :$.

Поскольку такая же часть

от что и от .

Следовательно  столько же раз кратна ●,

сколько  кратна .

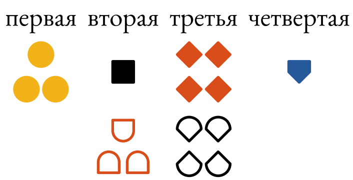
Следовательно, как и в предыдущем случае,

 : ● ::  : .

И ∴ ● :  ::  :  (пр. V.B).

∴ Если первая величина… и т. д.

Если *первая величина относится ко второй так, как третья к четвертой, и если первая кратна второй или составляет ее часть, то и третья к четвертой столько же раз кратна или составляет такую же ее часть.*



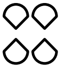
Пусть  :  ::  : ,

и если  будет кратна ,

то  будет столько же раз кратна .

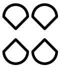
Возьмем  = .

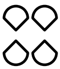
Сколько раз  кратна 

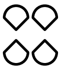
возьмем  столько же раз кратную ,

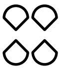
тогда, поскольку  :  ::  : 

и мы взяли равнократные второй и четвертой,

 и , следовательно (пр. V.4)

 :  ::  : , но (постр.),

 =  ∴ (пр. V.A)  = 

и  столько же раз кратна 

сколько  кратна .

Теперь, пусть : :: : ,

а также составляет часть ;

тогда будет составлять такую же часть .

Если перевернуть, : :: : (пр. V.B),

но составляет часть ,

то есть, кратна .

∴ как было показано в пердыдущем случае,

столько же раз кратна , то есть,

составляет такую же часть от

какую от .

∴ Если первая величина относится ко второй… и т. д.

Равные *величины имеют одно отношение к какой-либо величине, и эта величина имеет такое же отношение к равным величинам.*

Пусть ● = ◆
и ■ будет какой-либо другой величиной.

Тогда ● : ■ = ◆ : ■ и ■ : ● = ■ : ◆.

Поскольку ● = ◆,
∴ M● = M◆;

∴ Если M● >, = или < m■,
то M◆ >, = или < m■,
и ∴ ● : ■ = ◆ : ■ (опр. V.5).

Из вышеизложенного очевидно, что
если m■ >, = или < M●,
то m■ >, = или < M◆.

∴ ■ : ● = ■ : ◆ (опр. V.5).

∴ Равные величины... и т. д.

Определение VII.

Когда из равнократных четырех величин (взятых как в пятом определении), кратное первой больше кратного второй, а кратное третьей не больше кратного четвертой, то говорят, что первая имеет большее отношение ко второй, чем третья к четвертой, и наоборот, говорят что третья имеет к четвертой меньшее отношение, чем первая ко второй.

Если из равнократных четырех величин, наподобие тех, что сравнивались в пятом определении, мы найдем, что ●●●●● $>$ ■■■■, но ◆◆◆◆◆ $=$ или $>$ ⬟⬟⬟⬟, или же мы найдем, некоторая определенная кратность M' первой и третьей, и другая кратность m' второй и четвертой, такие, что M' раз первая величина $>$ m' раз вторая, но M' раз третья $\not>$ m' раз четвертой, т. е. $=$ или $<$ m' раз четвертой, то про первую говоря, что ее отношение к третьей больше, чем у третьей к четвертой, или что третья к четвертой в таких обстоятельствах имеет меньшее отношение, чем первая ко второй, однако некоторые другие равнократные могут показать, что четыре величины пропорциональны.

В дальнейшем это определение будет иметь следующий вид:

Если M' ⬟ $>$ m' ⛉, но M' ■ $=$ или $<$ m' ◆,
то ⬟ : ⛉ $>$ ■ : ◆.

В приведенном выражении M' и m' представляют собой определенные кратности, в отличие от M и m в пятом определении, которые могут быть любыми кратностями. Также нужно иметь в виду, что ⬟, ⛉, ■, и подобные обозначения, всего лишь представляют геометрические величины.

Арифметически это можно представить так:

Возьмем четыре числа 8, 7, 10, и 9.

первое	второе	третье	четвертое
8	7	10	9
16	14	20	18
24	21	30	27
32	28	40	36
40	35	50	45
48	42	60	54
56	49	70	63
64	56	80	72
72	63	90	81
80	70	100	90
88	77	110	99
96	84	120	108
104	91	130	117
112	98	140	126
и т. д.	и т. д.	и т. д.	и т. д.

Среди приведенных кратностей мы найдем что 16 > 14 и 20 > 18. То есть дважды первое больше дважды второго и дважды третье больше дважды четвертого. И 16 < 21 и 20 < 27. То есть дважды первое меньше трижды второго и дважды третье меньше трижды четвертого. И среди тех же кратностей мы найдем что 72 > 56 и 90 > 72. То есть 9 раз первое больше 8 раз второго и 9 раз третье больше 8 раз четвертого. Можно выбрать много других равнократных, которые будут показывать, что 8, 7, 10, и 9 пропорциональны, тогда как они таковыми не являются, поскольку мы можем найти кратное первого > кратного второго, но столько же раз кратное, сколько первого, третьего $\ngtr$ столько же раз кратного, сколько второго, четвертого. Например, 9 раз первое > 10 раз второго, но 9 раз третье $\ngtr$ 10 раз четвертого, то есть 72 > 70, но 90 $\ngtr$ 90, или 8 раз первое > 9 раз второго, но 8 раз третье $\ngtr$ 9 раз четвертого, то есть $64 > 63$, но $80 \not> 81$. Когда можно найти такие кратные, говорят, что первое (8) имеет ко второму (7) большее отношение, чем третье (10) к четвертому (9), и наоборот, третье (10) имеет к четвертому (9) меньшее отношение, чем первое (8) ко второму (7).

Из неравных величин к одной и той же величине большая имеет большее отношение, чем меньшая, и эта величина имеет большее отношение к меньшей, чем к большей.

Возьмем две неравных величины ▲🟥 и 🟨, и какую-либо другую 🔵.

Докажем, что ▲🟥, большая из двух неравных величин, имеет большее отношение к 🔵, чем меньшая 🟨, то есть, ▲🟥 : 🔵 > 🟨 : 🔵.

Возьмем M' ▲🟥, m' 🔵, M' 🟨, m' 🔵;
такие, что M' ▲ и M' 🟥 обе > 🔵;
также возьмем m' 🔵 наименьшее кратное 🔵,
при котором m' 🔵 > M' 🟨 = M' 🟥.

∴ M' 🟨 ≯ m' 🔵,

но M' ▲🟥 > m' 🔵,
поскольку m' 🔵, первое кратное, которое
> M' 🟥, в то время как $(m' - 1)$ 🔵 или
m' 🔵 − 🔵 ≯ M' ▲, и 🔵 ≯ M' ▲.

∴ m' 🔵 − 🔵 + 🔵 должна быть < M' 🟥 + M' ▲,

то есть, m' 🔵 должна быть < M' ▲🟥.

∴ M' ▲🟥 > m' 🔵, но, как было показано выше,

M' 🟨 ≯ m' 🔵, следовательно (опр. V.7) ▲🟥 имеет к 🔵 большее отношение, чем 🟨 : 🔵.

Теперь докажем, что у 🔵 большее отношение

к меньшей величине 🟨, чем к большей ▲🟥,

или, 🔵 : 🟨 > 🔵 : ▲🟥.

Возьмем m'🔵, M'🟨, m'🔵 и M'▲🟥,
как и в первом случае такие, что
M'▲ и M'🟥 будут обе > 🔵, и m'🔵
будет наименьшим кратным 🔵, которое
становится больше M'🟥 = M'🟨.

∴ m'🔵 − 🔵 ≯ M'🟥,
и 🔵 ≯ M'▲, следовательно
m'🔵 − 🔵 + 🔵 < M'🟥 + M'▲.

∴ m'🔵 < M'▲🟥, и ∴ (опр. V.7), 🔵 имеет

к 🟨 большее отношение, чем 🔵 к ▲🟥.

∴ Из неравных величин… и т. д.

Инструмент, использованный в этом предложении для нахождения среди кратностей величин, взятых как в пятом определении, таких, при которых певая больше кратной второй, но такая же кратная третьей, как была взята первой, не больше такой же кратной четвертой, какая была взята второй, может быть проиллюстрирована численно так:

Число 9 имеет большее отношение к 7, чем 8 к 7, то есть 9 : 7 > 8 : 7, или 8 + 1 : 7 > 8 : 7.

Кратное 1, которое первым становится больше 7 это 8 раз, следовательно, мы можем умножить первое и третье на 8, 9, 10 или любое другое число, в данном случае умножим первое и третье на 8 и получим 64 + 8 и 64, теперь первое кратное 7, которое больше 64 это 10 раз, теперь, умножая второе и четвертое на 10 получим 70 и 70, теперь, расположив эти кратные получим

8 раз	10 раз	8 раз	10 раз
первое	второе	третье	четвертое
$64 + 8$	70	64	70

Следовательно $64 + 8$, или 72 больше чем 70, но 64 не больше чем 70, ∴ (опр. V.7) 9 имеет большее отношение к 7, чем 8 к 7.

Приведенное выше — всего лишь иллюстрация к дальнейшему доказательству, так как это свойство можно легко показать как для этих, так и для других чисел следующим образом: поскольку, если предыдущее содержит последующее большее число раз, чем другое предыдущее содержит свое последующее, или составленная дробь с предыдущим в качестве числителя и последующим в качестве знаменателя больше другой дроби, составленной из другого предыдущего в качестве числителя и его последующего в качестве знаменателя, отношение первого предыдущего к его последующему больше, чем отношение второго предыдущего к его последующему.

Так, отношение числа 9 к числу 7 больше отношения числа 8 к числу 7, поскольку $\frac{9}{7}$ больше чем $\frac{8}{7}$.

Теперь, $17 : 19$ большее отношение, чем $13 : 15$, поскольку $\frac{17}{19} = \frac{17\times15}{19\times15} = \frac{255}{185}$, и $\frac{13}{15} = \frac{13\times19}{15\times19} = \frac{247}{185}$, отсюда очевидно, что $\frac{255}{185}$ больше чем $\frac{247}{185}$, ∴ $\frac{17}{19}$ больше чем $\frac{13}{15}$, и, согласно показанному выше, 17 имеет к 19 большее отношение, чем 13 к 15.

В общем виде это можно выразить так:

Если $\frac{A}{B}$ больше $\frac{C}{D}$, говорят, что A имеет к B большее отношение, чем C к D. Если $\frac{A}{B}$ равно $\frac{C}{D}$, то A имеет к B такое же отношение, как C к D. И если $\frac{A}{B}$ меньше чем

$\frac{C}{D}$, говорят, что A имеет к B меньшее отношение, чем C к D.

Учащийся должен в совершенстве освоить все, до этого предложения, прежде чем двигаться дальше, чтобы хорошо понять последующие предложения этой книги. Так что мы советуем учащемуся медленно перечитать все снова, тщательно осмыслить каждый шаг в процессе, и особо предостерегаем от порочной практики полагаться исключительно на память. Следуя этим указаниям, он найдет части, обычно представляющие значительные трудности, совсем несложными, продолжая изучение этой книги.

Величины, *имеющие одинаковое отношение к одному и тому же, равны между собой, и те, к которым одно и то же имеет равные отношения, также равны.*

Пусть ◆ : ■ :: ● : ■, тогда ◆ = ●.

Поскольку, если нет, пусть ◆ > ●,
тогда ◆ : ■ > ● : ■ (пр. V.8), что
невозможно, поскольку противоречит гипотезе.
∴ ◆ ≯ ●.

Таким же образом можно показать, что
● ≯ ◆,
∴ ◆ = ●.

Теперь, пусть ■ : ◆ :: ■ : ●,
тогда ◆ = ●.

Поскольку (перевернув) ◆ : ■ :: ● : ■,
следовательно, как и впервом случае, ◆ = ●.

∴ Величины, имеющие одинаковое отношение… и т. д.

Иначе это можно показать так:

Пусть $A : B = A : C$, тогда $B = C$, поскольку, в виде дробей $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$, и числитель одного равен числителю другого, следовательно, знаменатели этих дробей равны, то есть $B = C$.

Теперь, если $B : A = C : A$, $B = C$. Поскольку $\frac{B}{A} = \frac{C}{A}$, B должна быть $= C$.

Из величин, имеющих отношение к одному и тому же, больше та, которая имеет большее отношение, а та, к которой одно и то же имеет большее отношение, является меньшей из двух.

Пусть : > : , тогда > .

Поскольку, если нет, пусть = или < ,
тогда : = : (пр. V.7)
или : < : (пр. V.8)
и (перевернув), что противоречит гипотезе.

∴ ≠ или < ,
и ∴ должна быть > .

Теперь, пусть : > : ,
тогда < .

Поскольку, если нет, должна быть > или = ,
тогда : < : (пр. V.8) и (перевернув),
или : = : (пр. V.7),
что противоречит гипотезе.

∴ ≯ или = ,
и ∴ должна быть < .

∴ Из величин, имеющих... и т. д.

Отношения, *тождественные одному и тому же, тождественны и друг другу.*

Пусть ◆ : ■ = ● : ⬟ и ● : ⬟ = ▲ : ●,
тогда ◆ : ■ = ▲ : ●.

Поскольку если M◆ >, = или < m■,
то M● >, = или < m⬟,
и если M● >, = или < m⬟,
то M▲ >, = или < m● (опр. V.5).

∴ if M◆ >, = или < m■,
M▲ >, = или < m●,
и ∴ (опр. V.5) ◆ : ■ = ▲ : ●.

∴ Отношения, тождественные между собой… и т. д.

Если *несколько величин пропорциональны, то как одна из предыдущих будет относиться к последующей, так и все вместе предыдущие будут относиться ко всем вместе последующим.*

Пусть
■ : ⬤ = ⛉ : ◯ = ◆ : ⛊ = • : ▼ = ▲ : ●,
тогда ■ : ⬤ = ■ + ⛉ + ◆ + • + ▲ :
⬤ + ◯ + ⛊ + ▼ + ●.

Поскольку если *M*■ > *m*⬤, то *M*⛉ > *m*◯,
и *M*◆ > *m*⛊, *M*• > *m*▼,
а также *M*▲ > *m*● (опр. V.5).

Следовательно, если *M*■ > *m*⬤,
то *M*■ + *M*⛉ + *M*◆ + *M*• + *M*▲, или
M(■ + ⛉ + ◆ + • + ▲) будет больше,
чем *m*⬤ + *m*◯ + *m*⛊ + *m*▼ + *m*●,
или *m*(⬤ + ◯ + ⛊ + ▼ + ●).

Так же можно показать, что если *M* раз одно из предыдущих равно или меньше чем *m* раз одно из последующих, *M* раз все предыдущие будут равны или меньше, чем *m* раз все последующие вместе. Следовательно (опр. V.5), как одно из предыдущих к последующему, так и все предыдущие ко всем последующим вместе.

∴ Если несколько величин... и т. д.

Если *первая величина ко второй имеет такое же отношение, как третья к четвертой, а третья к четвертой имеет большее отношение, чем пятая к шестой, то и первая ко второй будет иметь большее отношение, чем пятая к шестой.*

Пусть ⬟ : ⊔ = ■ : ◆,
но ■ : ◆ > ⬡ : ●,
тогда ⬟ : ⊔ > ⬡ : ●.

Поскольку ■ : ◆ > ⬡ : ●, есть такие кратные
($\mathcal{M}'$ и m') величин ■ и ⬡, и величин ◆ и ●,
что $\mathcal{M}'$ ■ > m' ◆,
но $\mathcal{M}'$ ⬡ $\not>$ m' ● (опр. V.7).

Возьмем эти кратные и возьмем
такие же кратные ⬟ и ⊔.

∴ (опр. V.5) если $\mathcal{M}'$ ⬟ >, =, или < m' ⊔,
то $\mathcal{M}'$ ■ >, =, и < m' ◆,
но $\mathcal{M}'$ ■ > m' ◆ (постр.);

∴ $\mathcal{M}'$ ⬟ > m' ⊔,
но $\mathcal{M}'$ ⬡ $\not>$ m' ● (постр.)

И, следовательно, (опр. V.7),
⬟ : ⊔ > ⬡ : ●.

∴ Если первая величина ко второй… и т. д.

Если *первая величина имеет ко второй такое же отношение, какое третья к четвертой, то если первая больше третьей, то и вторая будет больше четвертой, а если равна, равна, а если меньше, то меньше.*

Пусть $\blacktriangledown : \triangledown :: \blacksquare : \blacklozenge$,
и предположим, что $\blacktriangledown > \blacksquare$, тогда $\triangledown > \blacklozenge$.

Поскольку $\blacktriangledown : \triangledown > \blacksquare : \triangledown$ (пр. V.8), и,
согласно гипотезе, $\blacktriangledown : \triangledown = \blacksquare : \blacklozenge$.

$\therefore \blacksquare : \blacklozenge > \blacksquare : \triangledown$ (пр. V.13).

$\therefore \blacklozenge < \triangledown$ (пр. V.10), или $\triangledown > \blacklozenge$.

Теперь, пусть $\blacktriangledown = \blacksquare$, тогда $\triangledown = \blacklozenge$.

Поскольку $\blacktriangledown : \triangledown = \blacksquare : \triangledown$ (пр. V.7),
и $\blacktriangledown : \triangledown = \blacksquare : \blacklozenge$ (гип.);
$\therefore \blacksquare : \triangledown = \blacksquare : \blacklozenge$ (пр. V.11),
и $\therefore \triangledown = \blacklozenge$ (пр. V.9).

Теперь же, если $\blacktriangledown < \blacksquare$, то $\triangledown < \blacklozenge$,
поскольку $\blacksquare > \blacktriangledown$ и $\blacksquare : \blacklozenge = \blacktriangledown : \triangledown$.

$\therefore \blacklozenge > \triangledown$, как и в предыдущем случае,
то есть $\triangledown < \blacklozenge$.

$\therefore$ Если первая величина имеет ко второй... и т. д.

Величины *относятся друг к другу так же, как и их равнократные.*

Пусть будут две величины ● и ■,
тогда ● : ■ :: M'● : M'■.

Поскольку ● : ■ = ● : ■
= ● : ■
= ● : ■

∴ ● : ■ :: 4● : 4■. (пр. V.12).

И, поскольку те же рассуждения
применимы в общем, получим:
● : ■ :: M'● : M'■.

∴ Величины относятся друг к другу… и т. д.

Определение XIII

Отношение называют переставленным, когда есть четыре пропорциональных величины, и утверждается, что первая относится к третьей так же, как вторая к четвертой, как показано в следующем предложении:

Пусть  :  ::  : ,
тогда «переставив» отношение можем заключить,
что  :  ::  : .

Здесь важно отметить, что величины , , ,  должны быть однородными, то есть в таком случае мы должны сравнивать линии с линиями, поверхности с поверхностями, тела с телам и т. п. Так, учащийся должен хорошо усвоить, что линия с поверхностью, поверхность с телом и другие разнородные величины не могут находиться в положении предыдущего и последующего.

Если *четыре величины пропорциональны, то они останутся пропорциональными в переставленном порядке.*

Пусть ⬟ : ◻ :: ■ : ◆,
тогда ⬟ : ■ :: ◻ : ◆.

Поскольку M⬟ : M◻ :: ⬟ : ◻ (пр. V.15),
и M⬟ : M◻ :: ■ : ◆ (гип.и пр. V.11),
а также m■ : m◆ :: ■ : ◆ (пр. V.15).

∴ M⬟ : M◻ :: m■ : m◆ (пр. V.14),
и ∴ если M⬟ $>, =$ или $<$ m■,
то M◻ $>, =,$ или $<$ m◆ (пр. V.14).

следовательно (опр. V.5),
⬟ : ■ :: ◻ : ◆.

∴ Если четыре величины... и т. д.

Определение XVI

Выделением отношения называют, когда есть четыре пропорциональных величины, и утверждается, что избыток первой над второй относится ко второй как избыток третьей над четвертой к четвертой.

Пусть $A : B :: C : D$,
«выделив» заключим,
что $A - B : B :: C - D : D$.

Согласно описанному выше, предполагается, что A больше B и C больше D, если бы это было не так и B была бы больше A, и D больше C, B и D можно было бы взять как предыдущие, а A и C как последующие, «перевернув» отношение.

$B : A :: D : C$;
тогда «выделив,» заключим,
что $B - A : A :: D - C : C$.

Если *величины пропорциональны присоединенные, то они останутся пропорциональны взятые раздельно, то есть, если две величины взятые вместе относятся к одной из них также, как две другие взятые вместе к одной из тех, оставшаяся величина из первых двух будет иметь такое же отношение к другой такое же отношение, как оставшаяся из вторых к другой из них.*

Пусть ⛊ + ⛉ : ⛉ :: ■ + ◆ : ◆,
тогда ⛊ : ⛉ :: ■ : ◆.

Возьмем ⛊ $>$ m⛉ к каждой добавим M⛉,
тогда получим M⛊ + M⛉ $>$ m⛉ + M⛉,
или M(⛊ + ⛉) $>$ $(m + M)$⛉,
но, поскольку ⛊ + ⛉ : ⛉ :: ■ + ◆ : ◆ (гип.),
и M(⛊ + ⛉) $>$ $(m + M)$⛉.

∴ M(■ + ◆) $>$ $(m + M)$◆ (опр. V.5).

∴ M■ + M◆ $>$ m◆ + M◆.

∴ M■ $>$ m◆, вычтя M◆ из обеих сторон,
то есть когда M⛊ $>$ m⛉, тогда M■ $>$ m◆.

Так же можно доказать, что если
M⛊ $=$ или $<$ m⛉, то M■ $=$ или $<$ m◆,
и ∴ ⛊ : ⛉ :: ■ : ◆ (опр. V.5).

∴ Если величины пропорциональны
составленные… и т. д.

Определение XV

О присоединении говорят, когда есть четыре пропорциональных величины и утверждается, что первая вместе со второй относится ко второй, как третья вместе с четвертой к четвертой.

Пусть $A : B :: C : D$

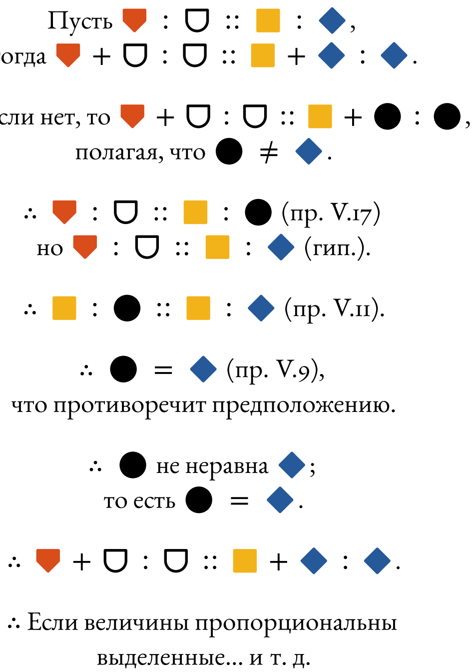
Тогда используя «присоединение», заключим, что $A + B : B :: C + D : D$.

«Перевернув» отношение, можем сделать B и D первой и третьей, а A и C которой и четвертой.

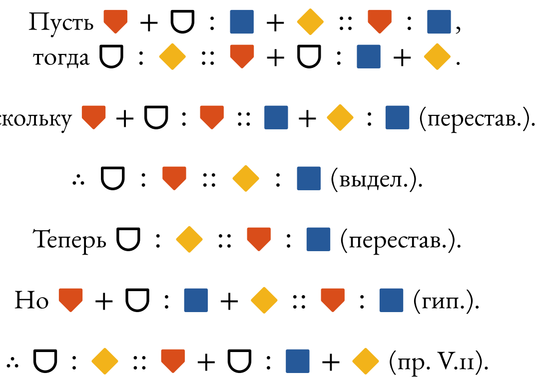
$$B : A :: D : C.$$

Тогда, совершив «присоединение», заключим что $B + A : A :: D + C : C$.

Если *величины пропорциональны выделенные, то они будут пропорциональны и составленные. То есть, если первая относится ко второй, как третья к четвертой, то первая и вторая вместе будут ко второй, как третья и четвертая вместе к четвертой.*



Если *целая величина относится к целой так же, как вычтенная из первой к вычтенной из второй, то и остаток будет относиться как остатку как целая к целой.*

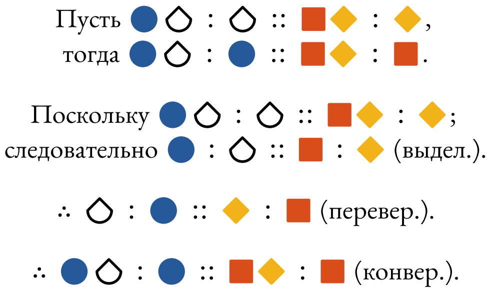


∴ Если целая величина относится к целой… и т. д.

Определение XVII

О «конверсии», говорят, когда есть четыре пропорциональных величины и утверждается, что первая к избытку первой над второй относится также, как третья к избытку третьей над четвертой. См. следующее предложение.

Если *четыре величины пропорциональны, они также пропорциональны если совершить конверсию, то есть первая к избытку над второй относится также как третья к ее избытку над четвертой.*



∴ Если четыре величины... и т. д.

Определение XVIII

Говорят, «По равенству», когда есть более двух величин и столько же других величин таких, что они пропорциональны, есть брать по две из каждого ряда, и утверждается, что первая к последней из первого ряда величин относится так же, как первая к последней из второго ряда.

Определение XIX

Термин «по равенству» используется сам по себе, когда первая величина относится ко второй из первого ряда как первая ко второй из второго ряда и когда вторая к третьей из первого относится как вторая к третьей из второго и так далее, и делается утверждение, такое, как упомянуто в предыдущем определении.

Таким образом, если есть два ряда величин,
A, B, C, D, E, F, первый,
и L, M, N, O, P, Q, второй,
таких, что $A : B :: L : M$, $B : C :: M : B$,
$C : D :: N : O$, $D : E :: O : P$, $E : F :: P : Q$.

Мы используем понятие «по равенству»,
чтобы заключить, что $A : F :: L : Q$.

Определение XX

«По равенству в перемешанной пропорции» говорят, когда первая величина ко второй в первом ряду относится как последняя к предпоследней во втором ряду, вторая к третьей в первом ряду как пред-предпоследняя к предпоследней во втором, третья к четвертой в первом как четвертая с конца к пред-предпоследней во втором и так далее, и утверждается то же, что и в опр. V.18. Это иллюстрируется в пр. V.23.

Так, если есть два ряда величин,
A, B, C, D, E, F, первый,
и L, M, N, O, P, Q, второй,
таких, что $A : B :: P : Q$, $B : C :: O : P$,
$C : D :: N : O$, $D : E :: M : N$, $E : F :: L : M$.

Используя понятие «по равенству в перемешанной пропорции» мы утверждаем, что $A : F :: L : Q$

Если *есть три величины и другие три, которые, взятые попарно, будут иметь те же отношения, то если первая больше третьей, то и четвертая будет больше шестой, если равны, то равны, а если меньше, то меньше.*

Пусть , , , будут первыми тремя величинами,
а , , , другими тремя,
такими, что : :: : ,
и : :: : .

Тогда если >, =, или < ,
то >, =, или < .

Исходя из гипотезы и переставив получим
: :: : ,
и : :: : .

∴ : :: : (пр. V.11).

∴ если >, =, или < ,
тогда >, =, или < (пр. V.14).

∴ Если есть три величины… и т. д.

Если *есть три величины и другие три, с одинаковыми отношениями, если брать по две из каждого ряда, но в противоположном порядке, тогда, если первая величина больше третьей, четвертая будет больше шестой, если равны, то равны, а если меньше, то меньше.*

Пусть , , , будут первыми тремя величинами,
а , , , другими тремя,
такими, что : :: : ,
и : :: : .

Тогда, если >, =, или < ,
то >, =, или < .

Допустим > ,
тогда, поскольку любая другая величина,
: > : (пр. V.8).

Но : :: : (гип.).

∴ : > : (пр. V.13),
и, поскольку : :: : (гип.).

∴ : :: : (перев.),
и было показано, что : > : ,
∴ : > : (пр. V.13).

∴ < ,
то есть > .

Теперь, пусть = ; тогда = .
Поскольку = ,
: = : (пр. V.7).

Но : = : (гип.),
и : = : (гип.и перев.).

∴ ⬠ : ● = ⬠ : ◆ (пр. V.11).

∴ ◆ = ● (пр. V.9).

И теперь, пусть ▼ < ■, тогда ◆ < ●;
поскольку ■ > ▼,
и было показано, что ■ : ▲ = ⬠ : ◆,
и ▲ : ▼ = ● : ⬠.

∴ как в первом случае ● > ◆,
то есть ◆ < ●.

∴ Если есть три величины... и т. д.

Если *есть любое количество величин и столько же других величин, которые взятые по две из каждого ряда по порядку имеют равные отношения, то первые, первая будут иметь к последней среди первых величин такое же отношение, как первая к последней среди вторых.*
Это обычно обозначается словами «по равенству».

Пусть будут величины 🔻, 🔷, 🟨,
и столько же других величин 🔶, 💧, 🟡,
таких, что
🔻 : 🔷 :: 🔶 : 💧,
и 🔷 : 🟨 :: 💧 : 🟡,
тогда 🔻 : 🟨 :: 🔶 : 🟡.

Пусть эти величины и их равнократные, предыдущих или последующих в отношениях, расположены так:

🔻, 🔷, 🟨, 🔶, 💧, 🟡,
и
M🔻, *m*🔷, *N*🟨, *M*🔶, *m*💧, *N*🟡,
поскольку 🔻 : 🔷 :: 🔶 : 💧,
∴ *M*🔻 : *m*🔷 :: *M*🔶 : *m*💧 (пр. V.4).

По той же причине
m🔷 : *N*🟨 :: *m*💧 : *N*🟡;
и поскольку есть три величины
M🔻, *m*🔷, *N*🟨,
и другие три, *M*🔶, *m*💧, *N*🟡,
которые взятые по две из каждого
ряда имеют равные отношения.

∴ если *M*🔻 >, = или < *N*🟨
то *M*🔶 >, = или < *N*🟡 (пр. V.20),
и ∴ 🔻 : 🟨 :: 🔶 : 🟡 (опр. V.5).

Теперь, допустим, есть четыре
величины , , , ,
и другие четыре , , , ,
которые взятые по две из каждого
ряда имеют равные отношения
то есть : :: : ,
: :: : ,
и : :: : ,
тогда : :: : ,
поскольку , , это три величины,
и , , другие три,
которые взятые по две из каждого
ряда имеют равные отношения,
следовательно, как и в предыдущем
случае : :: : ,
но : :: : .

Значит опять, как в предыдущем
случае : :: : ,
и так далее, сколько есть величин.

∴ Если есть любое количество величин… и т. д.

Если *есть любое число величин и столько же других, которые взятые по две в противоположном порядке имеют равные отношения, первая к последней из первого ряда будет иметь то же отношение, что и первая к последней из второго.*

Это обычно обозначается словами «по равенству в перемешанной пропорции».

Пусть будут величины , , ,
и другие три, , , ,
которые, взятые по две в противоположном
порядке имеют равные отношения.

То есть : :: : ,
и : :: : ,
тогда : :: : .

Пусть эти величины и их соответствующие равнократные будут расположены так:

, , , , , ,
M , M , m , M , m , m ,
тогда : :: M : M (пр. V.15);
и по той же причине
: :: m : m ;
но : :: : (гип.),
∴ M : M :: : (пр. V.11).

И поскольку : :: : (гип.),
∴ M : m :: M : m (пр. V.4).

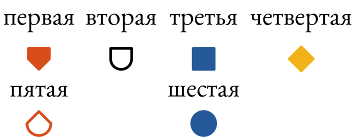
Тогда, поскольку есть три величины
M , M , m ,
и другие три M , m , m ,
которые, взятые по две в противоположном

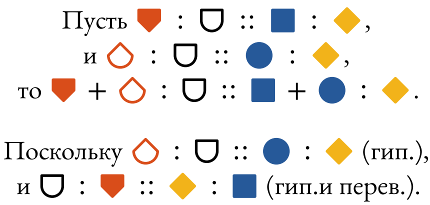
порядке имеют равные отношения,
значит, если M⬟ $>, =,$ или $<$ m■,
то M◆ $>, =,$ или $<$ m● (пр. V.21),
и ∴ ⬟ : ■ :: ◆ : ◆ (опр. V.5).

Теперь, пусть будет четыре величины,
⬟, ⊔, ■, ◆,
и другие четыре,
◊, ●, ▬, ▲,
которые, взятые по две в противоположном
порядке, имеют равные отношения,
а именно, ⬟ : ⊔ :: ▬ : ▲,
⊔ : ■ :: ● : ▬,
и ■ : ◆ :: ◊ : ●,
получим ■ : ◆ :: ◊ : ●.
Поскольку ⬟, ⊔, ■ три величины,
и ●, ▬, ▲, другие три,
которые взятые по две в противоположном
порядке имеют равные отношения,
значит, как в первом случае, ⬟ : ■ :: ● : ▲,
но ■ : ◆ :: ◊ : ●,
значит, опять как в первом слчае,
■ : ◆ :: ◊ : ●;
и так далее для любого количества величин.

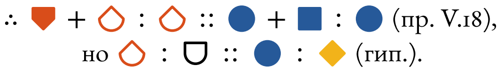
∴ Если есть любое количество величин... и т. д.

Если *первая величина ко второй имеет такое же отношение, как третья к четвертой, а пятая ко второй, такое же как шестая к четвертой, то первая и пятая вместе ко второй будут иметь такое же отношение, как третья с шестой вместе к четвертой.*





и, поскольку величины пропорциональны, они будут пропорциональны и если их присоединить.



∴ Если первая величина ко второй… и т. д.

Если *четыре величины пропорциональны, то наибольшая и наименьшая из них вместе больше других двух.*

Пусть четыре величины ⬟ + ⊔, ■ + ◆, ⊔, и ◆, будут пропорциональными.

⬟ + ⊔ : ■ + ◆ :: ⊔ : ◆,
и пусть ⬟ + ⊔ будет наибольшей
из четырех, следовательно, согласно
пр. V.A и пр. V.14, ◆ наименьшей.

Тогда ⬟ + ⊔ + ◆ > ■ + ◆ + ⊔,
поскольку ⬟ + ⊔ : ■ + ◆ :: ⊔ : ◆.

∴ ⬟ : ■ :: ⬟ + ⊔ : ■ + ◆ (пр. V.19),
но ⬟ + ⊔ > ■ + ◆ (гип.).

∴ ⬟ > ■ (пр. V.A).

К каждой добавим ⊔ + ◆,
∴ ⬟ + ⊔ + ◆ > ■ + ⊔ + ◆.

∴ Если четыре величины… и т. д.

Определение X

Когда три величины пропорциональны, говорят, что первая имеет к третьей двойное отношение первой ко второй.

Например, если A, B, C пропорциональны, то есть $A : B :: B : C$, то говорят, что A, к C имеет двойное отношение $A : B$.

$$\text{Или } \frac{A}{C} = \text{ квадрату } \frac{A}{B}.$$

Это яснее видно на таких количествах, как ar^2, ar, a, поскольку $ar^2 : ar :: ar : a$.

$$\text{И } \frac{ar^2}{a} = r^2 = \text{ квадрату } \frac{ar^2}{ar} = r,$$

или a, ar, ar^2.

$$\text{Поскольку } \frac{a}{ar^2} = \frac{1}{r^2} = \text{ квадрату } \frac{a}{ar} = \frac{1}{r}.$$

Определение XI

Когда четыре величины пропорциональны, говорят, что первая к четвертой имеет тройное отношение первой ко второй. Таким же образом можно получить четверное отношение и т. д.

Например, пусть A, B, C, D, будут пропорциональны, то есть $A : B :: B : C :: C : D$, тогда говорят, что A имеет к D тройное отношение A к B.

$$\text{Или } \frac{A}{D} = \text{ кубу } \frac{A}{B}.$$

Это определение будет более понятным и приложимым к более чем четырем пропорциональным величинам так:

Пусть ar^3, ar^2, ar, a будут четырьмя пропорциональными величинами, то

$$\text{есть } ar^3 : ar^2 :: ar^2 : ar :: ar : a,$$
$$\text{тогда } \frac{ar^3}{a} = r^3 = \text{ кубу } \frac{ar^3}{ar^2} = r.$$

Или пусть ar^5, ar^4, ar^3, ar^2, ar, a будут шестью пропорциональными величинами, то есть:

$$ar^5 : ar^4 :: ar^4 : ar^3 :: ar^3 : ar^2 :: ar^2 : ar :: ar : a,$$
$$\text{тогда отношение } \frac{ar^5}{a} = r^5 = \text{ пятой степени } \frac{ar^5}{ar^4} = r.$$

Или пусть a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, будут пятью пропорциональными величинами $\frac{a}{ar^4} = \frac{1}{r^4} =$ четвертой степени $\frac{a}{ar} = \frac{1}{r}$.

$A\ B\ C\ D$
$E\ F\ G\ H\ K\ L$
$M\ N$

Определение А

Чтобы понять составное отношение:

Когда есть любое количество однородных величин, говорят, что первая имеет к последней составное отношение из отношения первой ко второй, второй к третьей, третьей к четвертой и так далее до последней величины. Например, если A, B, C, D будут четырьмя однородными величинами, можно сказать, что первая A имеет к последней D отношение, составленное из отношений A к B, B к C, и C к D.

И если A к B относится так же, как E к F, и B к C как G к H, и C к D, в то же время, как K к L, то, по данному определению, можно сказать, что A имеет к D составное отношение из отношений таких же, как E к F, G к H, и K к L.

Таким же образом, с теми же предпосылками, если M к N имеет такое же отношение, как A к D, то для краткости можно сказать, что M имеет к N составное отношение из отношений E к F, G к H, и K к L.

Это определение может быть легче понять воспользовавшись арифметической или алгебраической иллюстрацией, поскольку, в сущности, отношение, составленное из нескольких отношений, это не более чем отношение, в котором предыдущее представляет собой произведение предыдущих отношений, из которых составлено составное отношение, а последующее — произведение последующих.

Так, отношение, составленное из отношений
$2 : 3$, $4 : 7$, $6 : 11$, $2 : 5$,
будет отношением $2 \times 4 \times 6 \times 2 : 3 \times 7 \times 11 \times 5$,
или отношением $96 : 1155$ или $32 : 385$.

А среди отношений однородных величин A, B, C, D, E, F, отношение $A : F$ это отношение, составленное из отношений

$$A : B, B : C, C : D, D : E, E : F;$$

поскольку $A \times B \times C \times D \times E : B \times C \times D \times E \times F$,

или $\dfrac{A \times B \times C \times D \times E}{B \times C \times D \times E \times F} = \dfrac{A}{F}$, или отношение $A : F$.

Отношения, *составленные из одних и тех же отношений одинаковы.*

$A\ B\ C\ D\ E$
$F\ G\ H\ K\ L$

Пусть $A : B :: F : G$, $B : C :: G : H$,
$C : D :: H : K$ и $D : E :: K : L$.

Тогда отношение составленное из $A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$, или отношение $A : E$, будет таким же, как составленное из $F : G$, $G : H$, $H : K$, $K : L$, или отношение $F : L$.

Поскольку $\frac{A}{B} = \frac{F}{G}$, $\frac{B}{C} = \frac{G}{H}$, $\frac{C}{D} = \frac{H}{K}$, и $\frac{D}{E} = \frac{K}{L}$.

$$\therefore \frac{A \times B \times C \times D}{B \times C \times D \times E} = \frac{F \times G \times H \times K}{G \times H \times K \times L},$$

$$\text{и} \therefore \frac{A}{E} = \frac{F}{L},$$

или отношение $A : E$ такое же как $F : L$.

То же можно показать для любого числа отношений расположенных таким образом.

Теперь, пусть $A : B :: K : L$, $B : C :: H : K$,
$C : D :: G : H$ и $D : E :: F : G$.

Тогда отношение, составленное из отношений $A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$, или отношение $A : E$, будет таким же, как отношение составленное из отношений $K : L$, $H : K$, $G : H$, $F : G$, или отношение $F : L$.

Поскольку $\frac{A}{B} = \frac{K}{L}$, $\frac{B}{C} = \frac{H}{K}$, $\frac{C}{D} = \frac{G}{H}$ и $\frac{D}{E} = \frac{F}{G}$.

$$\therefore \frac{A \times B \times C \times D}{B \times C \times D \times E} = \frac{K \times H \times G \times F}{L \times K \times H \times G} \text{ и } \therefore \frac{A}{E} = \frac{F}{L},$$

или отношение $A : E$ такое же как отношение $F : L$.

∴ Отношения, составленные… и т. д.

Если *несколько отношений такие же, как несколько других отношений, каждое к каждому, то отношение, составленное из отношений, таких же, как первые, каждое к каждому, будет таким же, как отношение, составленное из отношений, таких же как вторые, каждое к каждому.*

A	B	C	D	E	F	G	H	P	Q	R	S	T
a	b	c	d	e	f	g	h	V	W	X	Y	Z

Если $A : B :: a : b$ и $A : B :: P : Q$ и $a : b :: V : W$

$C : D :: c : d$ $\quad C : D :: Q : R$ $\quad c : d :: W : X$

$E : F :: e : f$ $\quad E : F :: R : S$ $\quad e : f :: X : Y$

и $G : H :: g : h$ $\quad G : H :: S : T$ $\quad f : h :: Y : Z$

Тогда $P : T = V : Z$.

Поскольку $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} = \frac{a}{b} = \frac{V}{W}$

$$\frac{Q}{R} = \frac{C}{D} = \frac{c}{d} = \frac{W}{X}$$

$$\frac{R}{S} = \frac{E}{F} = \frac{e}{f} = \frac{X}{Y}$$

$$\frac{S}{T} = \frac{G}{H} = \frac{g}{h} = \frac{Y}{Z}$$

И $\therefore \frac{P \times Q \times R \times S}{Q \times R \times S \times T} = \frac{V \times W \times X \times Y}{W \times X \times Y \times Z}$.

И $\therefore \frac{P}{T} = \frac{V}{Z}$, или $P : T = V : Z$.

$\therefore$ Если несколько отношений… и т. д.

Если *отношение, составленное из нескольких отношений будет таким же, как составленное из нескольких других отношений, и если одно из первых отношений или отношение, составленное из нескольких из них, такое же, как одно из вторых или составленное из вторых, тогда составное отношение оставшихся из первых, будет таким же, как отношение составленное из оставшихся вторых.*

$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H$
$P\ Q\ R\ S\ T\ X$

Пусть $A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$, $E : F$, $F : G$, $G : H$, будут первыми отношениями и $P : Q$, $Q : R$, $R : S$, $S : T$, $T : X$ вторыми отношениями; также пусть $A : H$, составленное из первых отношений будет таким же, как $P : X$, составленное вторых отношений, и пусть отношение $A : E$, составленное из отношений $A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$ будет таким же, как $P : R$, составленное из отношений $P : Q$, $Q : R$.

Тогда отношение, составленное из оставшихся отношений, то есть отношение, составленное из отношений $E : F$, $F : G$, $G : H$, то есть отношение $E : H$, будет таким же, как отношение $R : X$, составленное из оставшихся отношений $R : S$, $S : T$, $T : X$.

Поскольку

$$\frac{A \times B \times C \times D \times E \times F \times G}{B \times C \times D \times E \times F \times G \times H} = \frac{P \times Q \times R \times S \times T}{Q \times R \times S \times T \times X}.$$

Или

$$\frac{A \times B \times C \times D}{B \times C \times D \times E} \times \frac{E \times F \times G}{F \times G \times H} = \frac{P \times Q}{Q \times R} \times \frac{R \times S \times T}{S \times T \times X}.$$

И

$$\frac{A \times B \times C \times D}{B \times C \times D \times E} = \frac{P \times Q}{Q \times R}.$$

$$\therefore \frac{E \times F \times G}{F \times G \times H} = \frac{R \times S \times T}{S \times T \times X}.$$

$$\therefore \frac{E}{H} = \frac{R}{X}.$$

$$\therefore E : H = R : X.$$

$\therefore$ Если отношение... и т. д.

Если *есть любое количество отношений и любое количество других отношений, такие, что отношение составленное из отношений, таких же, как первые отношения, каждое к каждому, такое же, как отношение, составленное из отношений, таких же, как вторые, каждое к каждому, и если есть отношение, или отношение, составленное из отношений, таких же, как несколько из первых отношений, каждое к каждому, такое же, как одно из вторых, или отношение, составленное из отношений таких же, каждое к каждому, как несколько из вторых, то отношение, составленное отношений, таких же, как оставшиеся первые, каждое к каждому, будет таким же, как отношение, составленное из таких же, как оставшиеся вторые, каждое к каждому.*

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad h \quad k \;\; m \;\; n \quad s \\
A\,B,\ C\,D,\ E\,F,\ G\,H,\ K\,L,\ M\,N \quad a\,b\,c\,d\,e\,f\,g \\
O\,P,\ Q\,R,\ S\,T,\ V\,W,\ X\,Y \qquad\qquad h\,k\,l\,m\,n\,p \\
\qquad a \;\; b \quad k \;\; m \quad e \quad f \;\; g
\end{array}
$$

Пусть $A : B$, $C : D$, $E : F$, $G : H$, $K : L$, $M : N$, будут первыми отношениями, а $O : P$, $Q : R$, $S : T$, $V : W$, $X : Y$, вторыми.

$$
\begin{aligned}
\text{И пусть } A : B &= a : b,\\
C : D &= b : c,\\
E : F &= c : f,\\
G : H &= d : e,\\
K : L &= e : f,\\
M : N &= f : g.
\end{aligned}
$$

Тогда, согласно определению составного отношения, отношение $a : g$ будет составлено из отношений

$a : b, b : c, c : d, d : e, e : f, f : g$, таких же, как отношения $A : B, C : D, E : F, G : H, K : L, M : N$, каждое к каждому.

$$\text{Также, } O : P = h : k,$$
$$Q : R = k : l,$$
$$S : T = l : m,$$
$$V : W = m : n,$$
$$X : Y = n : p.$$

Тогда отношение $h : p$ будет составлено из отношений $h : k, k : l, l : m, m : n, n : p$, таких же, как $O : P$, $Q : R, S : T, V : W, X : Y$, каждое к каждому.

$$\therefore \text{ согласно гипотезе,}$$
$$a : g = h : p.$$

Теперь, пусть отношение, составленное из отношений $A : B$, $C : D$, двух первых отношения (или отношения $a : c$, поскольку $A : B = a : b$, и $C : D = b : c$), будет таким же, как отношение $a : d$, состаавленное из отношений $a : b, b : c, c : d$, таких же, как отношения $O : P, Q : R, S : T$, три из вторых.

И пусть будут отношения $h : s$, составленное из отношений $h : k, k : m, m : n, n : s$, таких же, как оставшиеся из первых, а именно $E : F, G : H, K : L$, $M : N$, и отношение $e : g$, составленное из отношения $e : f, f : g$, таких же, как оставшиеся из вторых, а именно $V : W, X : Y$. Тогда отношение $h : s$ будет таким же, как отношение $e : g$, или $h : s = e : g$.

$$\text{Поскольку}$$
$$\frac{A \times C \times E \times G \times K \times M}{B \times D \times F \times H \times L \times N} = \frac{a \times b \times c \times d \times e \times f}{b \times c \times d \times e \times f \times g}.$$

И, составлением отношений, $\frac{O \times Q \times S \times V \times X}{P \times R \times T \times W \times Y} = \frac{h \times k \times l \times m \times n}{k \times l \times m \times n \times p}$.

$$\therefore \frac{a \times b \times c \times d \times e \times f}{b \times c \times d \times e \times f \times g} = \frac{h \times k \times l \times m \times n}{k \times l \times m \times n \times p} \text{ (гип.).}$$

Или $\frac{a \times b}{b \times c} \times \frac{c \times d \times e \times f}{d \times e \times f \times g} = \frac{h \times k \times l}{k \times l \times m} \times \frac{m \times n}{n \times p}$.

Но $\frac{a \times b}{b \times c} = \frac{A \times C}{B \times D} = \frac{O \times Q \times S}{P \times R \times T} = \frac{a \times b \times c}{b \times c \times d} = \frac{h \times k \times l}{k \times l \times m}$.

$$\therefore \frac{c \times d \times e \times f}{d \times e \times f \times g} = \frac{m \times n}{n \times p}.$$

И $\frac{c \times d \times e \times f}{d \times e \times f \times g} = \frac{h \times k \times l \times m \times n}{k \times l \times m \times n \times p}$ (гип.).

И $\frac{m \times n}{n \times p} = \frac{e \times f}{f \times g}$ (гип.),

$$\therefore \frac{h \times k \times l \times m \times n}{k \times l \times m \times n \times p} = \frac{ef}{fg}.$$

$$\therefore \frac{h}{s} = \frac{e}{g}.$$

$$\therefore h : s = e : g.$$

∴ Если есть любое количество отношений… и т. д.

Книга VI

Определения

1

Про прямолинейные фигуры говорят, что они подобны, когда их углы равны в одном порядке и стороны при равных углах пропорциональны.

2

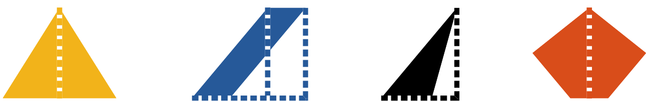
Говорят, что две стороны одной фигуры взаимно пропорциональны двум сторонам другой, когда одна из сторон первой фигуры относится к другой, как одна из сторон второй к другой.

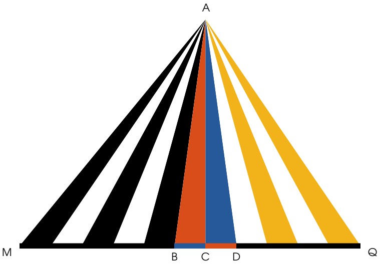
3

Говорится, что прямая делится в крайнем и среднем отношении, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему.

4

Высотой фигуры называют перпендикуляр, проведенный от вершины к основанию или его продолжению.

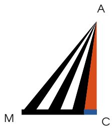


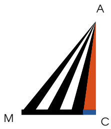


Треугольники *и параллелограммы, имеющие одну и ту же высоту относятся друг к другу как их основания.*

Пусть у треугольников  и  общая вершина, а их основания  и  лежат на одной прямой.

Продлим  в обе стороны, возьмем на продолжении со стороны  линии равные ей, а со стороны  линии равные ей, и проведем линии от вершины к их концам.

Треугольники  образованные таким образом равны между собой, поскольку равны их основания (пр. I.38).

∴  и его основание соответственно равнократны  и его основанию .

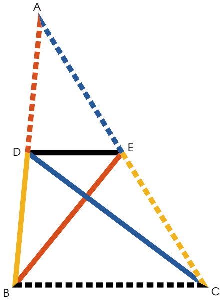
Таким же образом  и его основание соответственно равнократны  и его основанию .

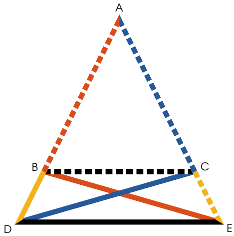
∴ если m или 6 раз  $>, =$ или $<$ n или 5 раз  то m или 6 раз  $>, =$ или $<$ n или 5 раз , m и n обозначают любые кратные, взятые как в опр. V.5. Хотя мы показали только, что это свойство проявляется, когда $m = 6$ и $n = 5$, но очевидно, что это свойство работает для любых кратных значений, которые можно придать m и n.

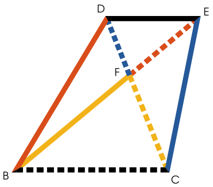
∴  :  ::  :  (опр. V.5)

Параллелограммы с той же высотой вдвое больше треугольников, на тех же основаниях, и пропорциональны им (часть I), и, поскольку они вдвое больше, такие параллелограммы относятся как их основания (пр. V.15).

ч. т. д.







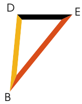
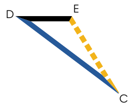
Если в треугольнике параллельно одной из сторон BC *проведена прямая* DE*, то она рассекает две другие стороны на пропорциональные отрезки.*
И если прямая DE *делит две стороны треугольника на пропорциональные сегменты, то она параллельна оставшейся стороне* BC.

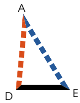
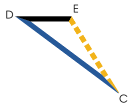
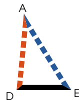
Часть I.

Пусть DE ∥ BC,

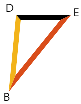
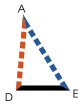
тогда DB : AD :: EC : AE.

Проведем BE и CD,

и  =  (пр. I.37).

∴  :  ::  : 

(пр. V.7).

Но  :  :: DB : AD

(пр. VI.1),

∴ DB : AD :: EC : AE (пр. V.11).

Часть II.

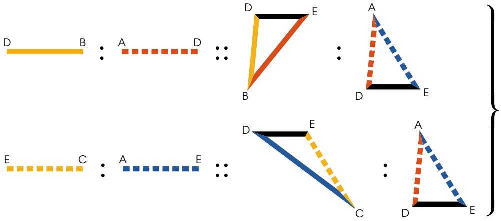
Пусть 

.

тогда 

.

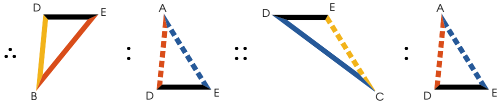
Оставим то же построение,

поскольку и 

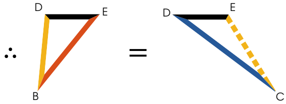
(пр. VI.1) .

Но 

(гип.)



(пр. V.11).



(пр. V.9).

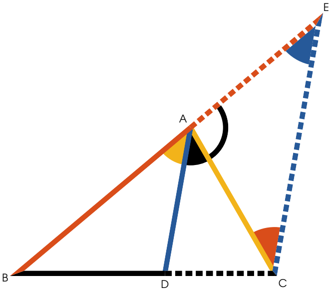
Но они на одном основании


, и по одну его сторону

и ∴ 

(пр. I.39).

ч. т. д.



Прямая AD, *рассекающая угол треугольника пополам делит противоположную сторону на части* BD *и* DC *пропорциональные смежным им сторонам* AB *и* CA.

И если прямая AD, *проведенная из любого угла треугольника делит противоположную сторону* BC *на части* BD *и* DC, *пропорциональные смежным им сторонам* AB *и* CA, *то она делит угол пополам.*

Часть I.

Проведем $CE \parallel AD$, до AE,

тогда, $\angle BAD = \angle AEC$ (пр. I.29).

$\therefore \angle DAC = \angle AEC$; но $\angle DAC = \angle ACE$.

$\therefore \angle ACE = \angle AEC$.

$\therefore AE = CA$ (пр. I.6),

и поскольку $AD \parallel CE$,

$AE : AB :: DC : BD$ (пр. VI.2).

Но $AE = CA$;

$\therefore CA : AB :: DC : BD$ (пр. V.7).

Часть II.

Оставим то же построение,

и $AB : AE :: BD : DC$ (пр. VI.2).

Но $BD : DC :: AB : CA$ (гип.).

$\therefore AB : AE :: AB : CA$ (пр. V.11).

И $\therefore AE = CA$ (пр. V.9),

и $\therefore \angle ACE = \angle AEC$ (пр. I.5).

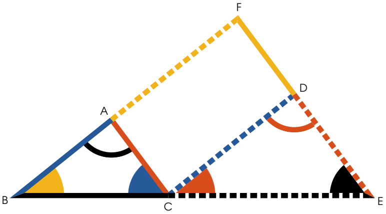
Но поскольку $AD \parallel CE$, $\angle DAC = \angle AEC$,

и $\angle BAD = \angle ACE$ (пр. I.29).

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$, и $\angle BAD = \angle DAC$,

и $\therefore AD$ делит $\angle BAC$ пополам.

ч. т. д.



В равноугольных *треугольниках* ABC *и* CDE, *стороны при равных углах пропорциональны, а стороны противолежащие равным углам соответственны.*

Пусть два треугольника будут расположены так, что стороны BC и EC против равных углов CDE и BAC будут смежными и на одной прямой и сами треугольники лежат по одну сторону этой прямой, а равные углы, напротив, не будут смежными, т. е. DCE напротив ABC, и ACB напротив DEC.

Проведем AF и DF.

Тогда, поскольку ACB = DEC,
CA ∥ FE (пр. I.28).

И по той же причине CD ∥ BF.

∴ AFDC параллелограмм.

Но BC : EC :: DF : DE
(пр. VI.2),
и поскольку DF = CA (пр. I.34),
BC : EC :: CA : DE.

И, переставлением,
BC : CA :: EC : DE (пр. V.16).

Так же можно показать, что
AB : CD :: BC : EC,
и переставлением, что

$$AB : BC :: CD : EC,$$

но уже было доказано, что

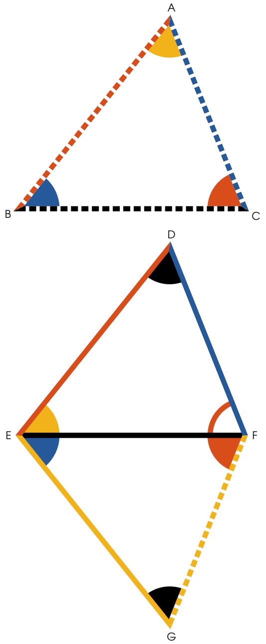
$$BC : CA :: EC : DE$$

и значит, по равенству

$$AB : CA :: CD : DE \text{ (пр. V.22).}$$

Следовательно, стороны при равных углах пропорциональны, а противолежащие им соответственны.

ч. т. д.



Если у двух треугольников стороны пропорциональны CA : BC :: FD : EF *и* BC : AB :: EF : DE *то они равноугольны, а равные углы стягиваются соответственными сторонами.*

Из концов EF, проведем FG и GE,

делая EFG = ABC, EFG = ABC (пр. I.23),

получим EFG = ABC (пр. I.32).

И поскольку треугольники равноугольные, AB : BC :: GE : EF (пр. VI.4).

Но AB : BC :: DE : EF (гип.).

∴ DE : EF :: GE : EF,

и значит DE = GE (пр. V.9).

Так же можно показать, что FD = FG.

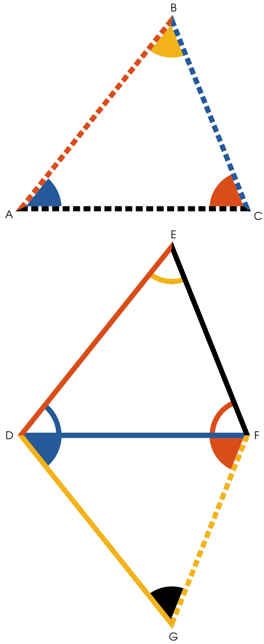
∴ у двух треугольников с общим основанием EF и равными сторонами, углы против равных сторон равны, т. е. DEF = EFG и DEF = EFG (пр. I.8).

Но EFG = ABC (постр.) и ∴ DEF = ABC.

По той же причине DEF = ABC, и значит DEF = ABC (пр. I.32), т. е. треугольники равноугольны и очевидно, что соответственные стороны располагаются между равными углами.

ч. т. д.

Если у двух треугольников и один угол одного равен одному углу другого , и стороны, при равных углах пропорциональны, то треугольники равноугольны, и углы против соответственных сторон у них равны.



Из концов , одной из сторон при , проведем и ,

делая = и = ,

тогда = (пр. I.32).

И поскольку два треугольника равноугольны,

: :: : (пр. VI.4),

но : :: : (гип.),

∴ : :: : (пр. V.11),

и следовательно = (пр. V.9),

∴ = во всех отношениях (пр. I.4),

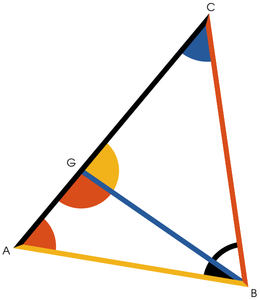
но = (постр.) и ∴ = ,

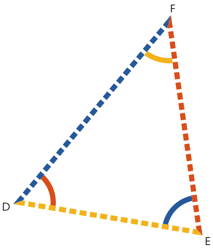
и поскольку также = ,

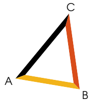
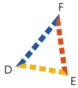
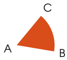
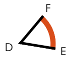
= (пр. I.32).

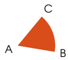
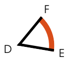
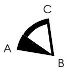
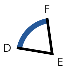
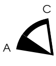
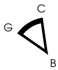
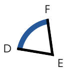
И ∴ и равноугольны с равными углами против соответственных сторон.

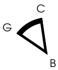
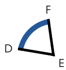
ч. т. д.

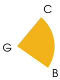
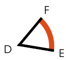




Если у двух треугольников  *и*  *один угол одного*  *равен одному другого* *, а стороны при других пропорциональны*  :  ::  : *, причем оставшиеся углы*  *и*  *либо меньше, либо не меньше прямого угла, то треугольники равноугольны, а углы между пропорциональными сторонами равны.*

Для начала допустим, что углы  и  оба меньше прямого угла, тогда, если предположить, что  и  между пропорциональными сторонами не равны, пусть  будет больше и сделаем  = .

Поскольку  =  (гип.). и  =  (постр.)

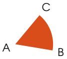
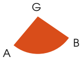
∴  =  (пр. I.32).

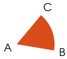
∴  :  ::  :  (пр. VI.4),

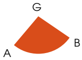
но  :  ::  :  (гип.).

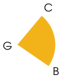
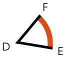
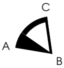
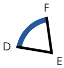
∴  :  ::  : .

∴  =  (пр. V.9),

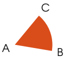
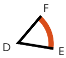
и ∴  =  (пр. I.5).

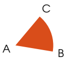
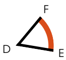
Но  меньше прямого угла (гип.)

∴  меньше прямого угла,

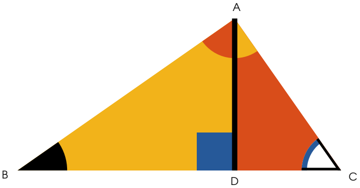
и ∴  должен быть больше прямого угла (пр. I.13), но он, как было показано =  и значит меньше прямого угла, что невозможно. ∴  и  не неравны.

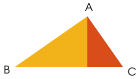
∴ они равны, и поскольку  =  (гип.).

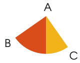
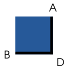
∴  =  (пр. I.32), и следовательно треугольники равноугольны.

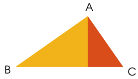
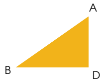
А если предположить, что  и  оба не меньше прямого угла, то можно доказать, как и ранее, что треугольники равноугольны и стороны при равных углах пропорциональны (пр. VI.4).

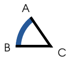
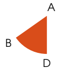
ч. т. д.

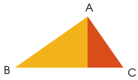
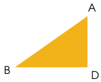


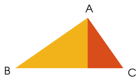
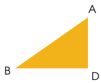
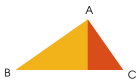
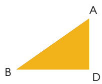
Если *из прямого угла в прямоугольном треугольнике*  *проведен к противоположной стороне перпендикуляр* , *треугольники*  *и* , *по сторонам перпендикуляра подобны целому треугольнику и друг другу.*

Поскольку  =  (акс. XI),

и  общий  и ,

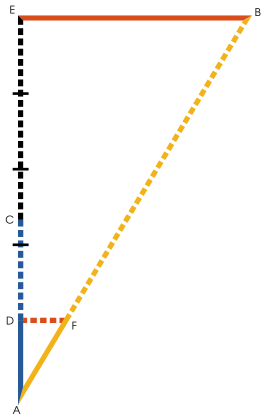
 =  (пр. I.32).

∴  и  равноугольны и значит стороны при равных углах пропорциональны (пр. VI.4), и, следовательно, подобны (опр. VI.1).

Так же можно доказать, что  подобен , но , как было показано, тоже подобен , ∴  и  подобны и всему треугольнику и друг другу.

ч. т. д.

От *данной прямой* AB *отнять требуемую часть.*



Из любого конца данной прямой проведем AC под любым углом к AB.

Продлим AC, пока вся продленная линия AE не будет содержать AD столько раз, какую часть требуется отнять от AB.

Проведем BE, и проведем DF ∥ BE.

AF и есть требуемая часть AB.

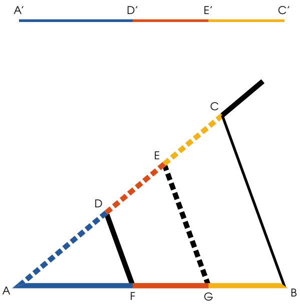
Поскольку DF ∥ BE, AF : FB :: AD : DE (пр. VI.2).

И, присоединив (пр. V.18), AB : AF :: AE : AD.

То есть AE содержит AD столько раз, сколько AB содержит требуемую часть (постр.).

∴ AF и есть требуемая часть.

ч. т. д.



Данную *прямую* AB *рассечь подобно данной рассеченной* A′C′.

Из любого конца AB проведем AC под любым углом.

Возьмем AD, DE и EC равные A′D′, D′E′ и E′C′ соответственно (пр. I.2).

Проведем CB, и проведем EG и DF ∥ ей.

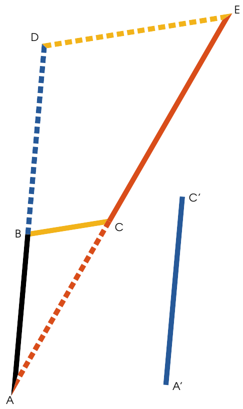
Поскольку { CB, EG, DF } все ∥,

GB : FG :: EC : DE (пр. VI.2),
или GB : FG :: E′C′ : D′E′ (постр.),
и FG : AF :: DE : AD (пр. VI.2),
FG : AF :: D′E′ : A′D′ (постр.).

И ∴ данная линия AB разделена подобно A′C′.

ч. т. д.

Найти *третью пропорциональную для двух данных прямых* $A'C'$ *и* AB.



От любого конца данной линии AB проведем AE под углом.

Сделаем $AC = A'C'$, и проведем BC.

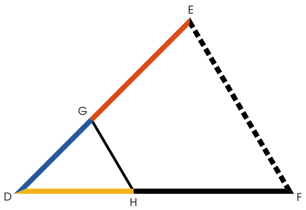
Сделаем $BD = A'C'$, и проведем $DE \parallel BC$ (пр. I.31).

CE и есть третья пропорциональная к AB и $A'C'$.

Поскольку $BC \parallel DE$, $\therefore AB : BD :: AC : CE$ (пр. VI.2).

Но $BD = AC = A'C'$ (постр.); $\therefore AB : A'C' :: A'C' : CE$ (пр. V.7).

ч. т. д.



Для *трех данных прямых* $\left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \right\}$ *найти четвертую пропорциональную.*

Проведем DE и DF под углом.

Возьмем $DG = A$,
возьмем $GE = B$,
возьмем $DH = C$,
проведем GH,
и $EF \parallel GH$ (пр. I.31).

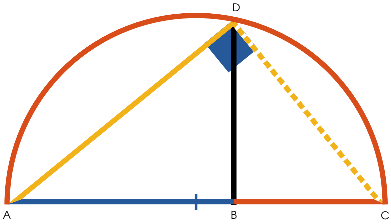
HF и есть четвертая пропорциональная.

Ведь, учитывая параллельные,
$DG : GE :: DH : HF$ (пр. VI.2).

Но $\left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} DG \\ GE \\ DH \end{array} \right\}$ (постр.).

$\therefore A : B :: C : HF$ (пр. V.7).

ч. т. д.



Найти *третью пропорциональную между двумя данными прямыми линиями* {A, B}.

Проведем любую прямую AC.

Сделаем AB = A и BC = B.

Рассечем AC пополам, и взяв середину за центр и половину за радиус

опишем полукруг AC,
проведем BD ⊥ AB:
BD и есть искомая средняя пропорциональная.

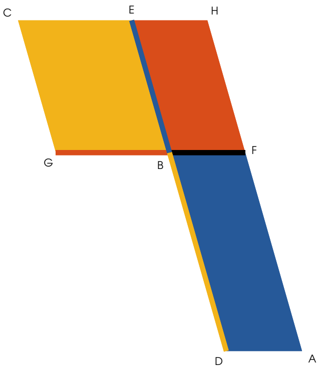
Проведем AD и CD.

Поскольку ADC прямой угол (пр. III.31),

и BD это ⊥ к нему с противной стороны.

∴ BD и есть средняя пропорциональная
между AB и BC (пр. VI.8),
и ∴ между A и B (постр.).

ч. т. д.



Вравных *и равноугольных параллелограммах* BF DA *и* CE GB, *стороны при равных углах взаимно пропорциональны* (BG : BF :: BD : BE). *И равноугольные параллелограммы, у которых стороны взаимно пропорциональны, равны.*

Пусть BG, BF, BD и BE, будут так расположены, что GF и DE составят прямые линии. Что они могут занять такое положение — очевидно (пр. I.13, пр. I.14, пр. I.15).

Достроим EH BF. Поскольку CE GB = BF DA,

∴ CE GB : EH BF :: BF DA : EH BF (пр. V.7)

∴ BG : BF :: BD : BE (пр. VI.1).

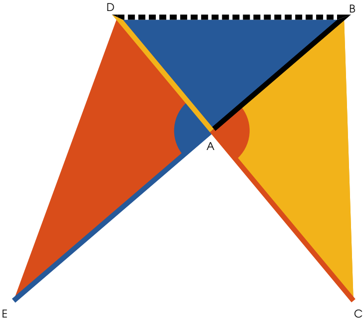
При том же построении:

BG : BF :: { CE GB : EH BF (пр. VI.1); BD : BE (гип.); BF DA : EH BF (пр. VI.1) }

∴ CE GB : EH BF :: BF DA : EH BF (пр. V.11),

и ∴ CE GB = BF DA (пр. V.9).

ч. т. д.



В равных *треугольниках, имеющих по одному равному углу*  = *, стороны при равных углах взаимно пропорциональны*

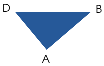
A E : B A :: A C : D A.

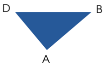
И треугольники, имеющие по одному равному углу и взаимно пропорциональные стороны при равных углах, равны.

Часть I.

Пусть треугольники будут расположены так, что равные углы  и  будут вертикальны, то есть так, что A E и B A будут на одной прямой. Таким образом и A C с D A будут на одной прямой (пр. I.14).

Проведем B D, тогда

D A : B A ::  :  (пр. VI.1)

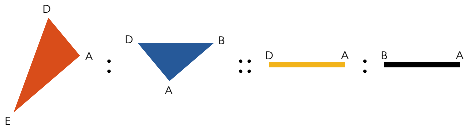
::  :  (пр. V.7)

:: A C : D A (пр. VI.1)

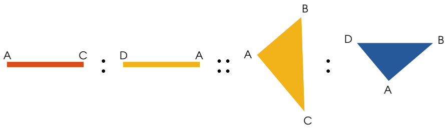
∴ A E : B A :: A C : D A (пр. V.11).

Часть II.

При том же построении.



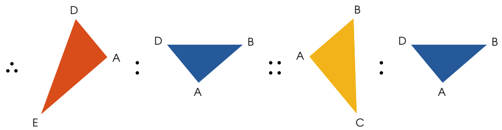
(пр. VI.1)

и 

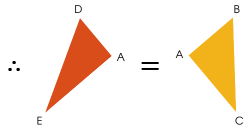
(пр. VI.1).

Но 

, (гип.).

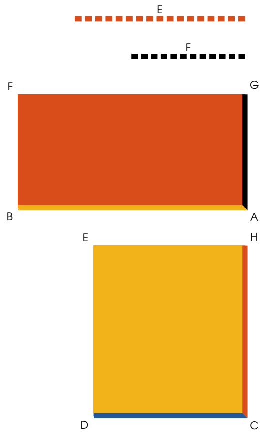


(пр. V.11).



(пр. V.9).

ч. т. д.



Если *четыре прямые пропорциональны* AB : CD :: E : F, *прямоугольник* AB × F, *заключенный между крайними равен прямоугольнику* CD × E, *заключенному между средними. И если прямоугольник заключенный между крайними равен прямоугольнику, заключенному между средними, четыре прямых пропорциональны.*

Часть I.

Из концов AB и CD
проведем AG и CH ⊥ им
и = F и E соответственно.

Достроим параллелограммы FGBA и EHDC.

И поскольку
AB : CD :: E : F (гип.)
∴ AB : CD :: CH : AG (постр.).

∴ FGBA = EHDC (пр. VI.14),

то есть, прямоугольник, заключенный
между крайними равен прямоугольнику,
заключенному между средними.

Часть II.

Оставим то же построение.

Поскольку $F = AG$, $FGBA = EHDC$

и $CH = E$,

$\therefore AB : CD :: CH : AG$

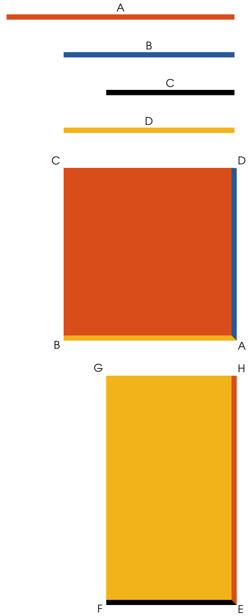
(пр. VI.14)ю

Но $CH = E$,

и $AG = F$ (постр.).

$\therefore AB : CD :: E : F$ (пр. V.7).

ч. т. д.



Если *три прямые пропорциональны* $A : B :: B : C$, *прямоугольник заключенный между крайними равен квадрату средней.*

И есть прямоугольник заключенный между крайними равен квадрату на средней, то три прямые пропорциональны.

Часть I.

Предположим $D = B$,

и поскольку $A : B :: B : C$,

то $A : B :: D : C$,

$\therefore A \times C = B \times D$

(пр. VI.16).

Но $D = B$,

$\therefore B \times D =$

$B \times B$ или $= B^2$,

следовательно, если три прямых пропорциональны, прямоугольник, заключенный между крайними равен квадрату средней.

Часть II.

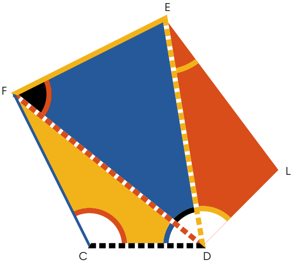
Допустим $D = B$,

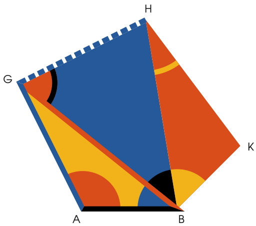
тогда $A \times C = D \times B$.

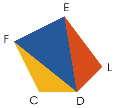
$\therefore A : B :: D : C$ (пр. VI.16),

и $A : B :: B : C$.

ч. т. д.

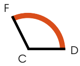




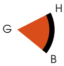
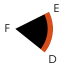
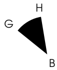
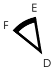
*Н**а данной прямой*  *построить подобную данной*  *прямолинейную фигуру и так же расположенную.*

Разобьем фигуру на треугольники прямыми  и .

На концах 

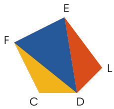
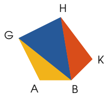
сделаем  =  и  = ;

теперь на концах 

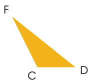
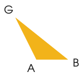
сделаем  =  и  = ;

и таким же образом

 =  и  = .

Тогда  = .

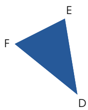
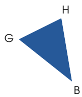
Из построения и пр. I.32 очевидно, что фигуры равноугольны, а поскольку

треугольники  и  равноугольны,

то, согласно пр. VI.4,

 :  ::  : 

и  :  ::  : .

И поскольку  и  равноугольны,

 :  ::  : 

∴ по равенству,

: 

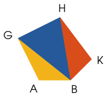
:: 

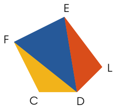
: 

(пр. VI.22).

Тем же способом можно показать, что оставшиеся стороны фигуры пропорциональны.

∴ (пр. VI.1)



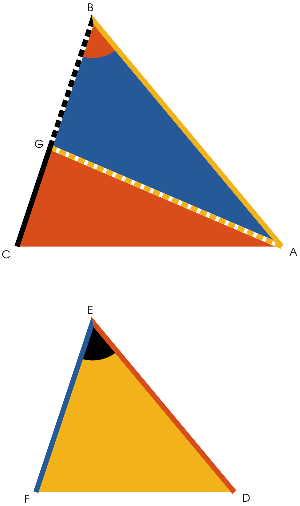
подобна


и расположена

и на данной прямой 

.

ч. т. д.



Подобные *треугольники* *и* *находятся друг к другу в двойном отношении соответственных сторон.*

Пусть и будут равными углами, и и соответственными сторонами подобных треугольников и и на стороне большего из них возьмем третью пропорциональную такую, что

: :: : .

Проведем .

: :: : (пр. VI.4).

∴ : :: : (пр. V.16).

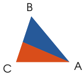
Но : :: : (постр.),

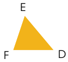
∴ : :: : .

Следовательно = , поскольку у них стороны при равных углах и взаимно пропорциональны (пр. VI.15).

∴ : :: : (пр. V.7).

Но : :: : (пр. VI.1).

∴ 

: 

:: 

: 

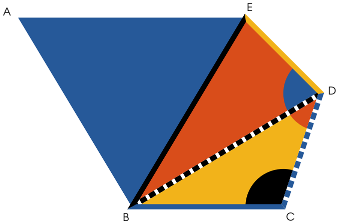
.

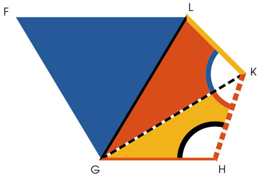
То есть, эти треугольники относятся друг к другу в двойном отношении соответственных сторон 

и 

(опр. V.11).

ч. т. д.





Подобные *многоугольники разделяются на равное количество подобных треугольников, каждая пара которых пропорциональна многоугольникам, а многоугольники находятся друг к другу в двойном отношении соответственных сторон.*

Проведя BE, BD, GL и GK, разделим многоугольники на треугольники. Поскольку многоугольники подобны, BCD = GHK, и BC : CD :: GH : HK.

∴ BCD и GHK подобны

и BCD = GHK (пр. VI.6),

но ECD = LHK, поскольку они являются углами подобных многоугольников.

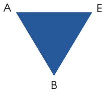
Следовательно остатки EDB и LKG равны.

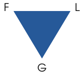
А значит BD : CD :: GK : HK, учитывая подобие треугольников,

и CD : DE :: HK : KL, учитывая подобие многоугольников.

∴ BD : DE :: GK : KL, по равенству (пр. V.22), и поскольку пропорциональные стороны заключают равные углы,

треугольники EDB и LKG подобны (пр. VI.6).

Так же можно показать, что и треугольники 

и 

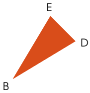
подобны.

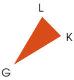
Но 

имеет к 

двойное отношение 

к 

(пр. VI.19), и 

к 

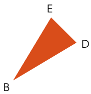
точно так же имеет двойное отношение 

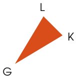
к 

.

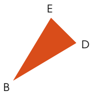
∴ 

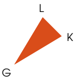
: 

:: 

: 

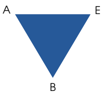
(пр. V.11).

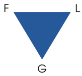
Теперь 

к 

имеет двойное отношение 

к 

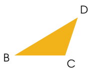
, и 

к 

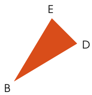
двойное отношение 

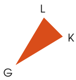
к 

.

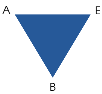


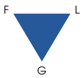
: 

:: 

: 

.

:: 

: 

И поскольку как относится одно из предыдущих к одному из последующих, так и все предыдущие вместе ко всем последующим вместе, подобные треугольники относятся друг к другу как многоугольники целиком (пр. V.12).

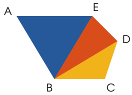
Но 

к 

имеет двойное отношение 

к 

.

∴ 

к 

имеет двойное отношение 

к 

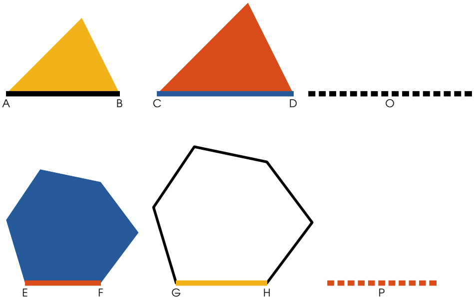
.

ч. т. д.

Фигуры  *и*  *подобные одной фигуре*  *подобны друг другу.*

Поскольку  и  подобны, они равноугольны, и стороны при равных углах у них пропорциональны (опр. VI.1). И поскольку  и  также подобны, и стороны при равных углах у них пропорциональны,  и  тоже равноугольны и у них тоже стороны при равных углах пропорциональны (пр. V.11), и значит они тоже подобны.

ч. т. д.



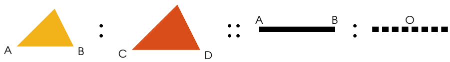
Если *четыре прямых пропорциональны* AB : CD :: EF : GH, *подобные прямолинейные фигуры подобным образом расположенные на них также пропорциональны.*
И если четыре подобных прямолинейных фигуры подобно расположены на четырех прямых линиях, то и линии пропорциональны.

Часть I.

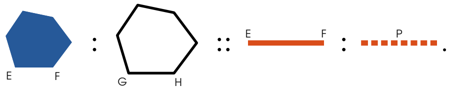
Возьмем O, третью пропорциональную к AB и CD, и P, третью пропорциональную к EF и GH (пр. VI.11).

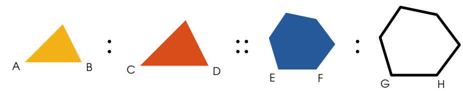
Поскольку
AB : CD :: EF : GH (гип.)
CD : O :: GH : P (постр.).

∴ по равенству,
AB : O :: EF : P,

но 

(пр. VI.20),

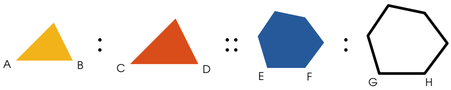
и 

∴ 

(пр. V.11).

Часть II.

Оставим то же построение.



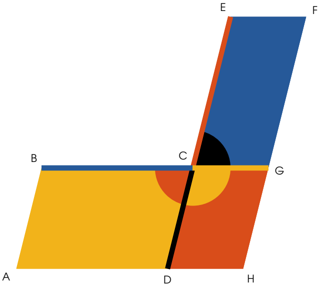
(гип.).

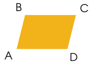
(постр.).

И 

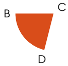
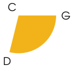
(пр. V.11).

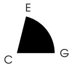
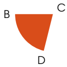
ч. т. д.

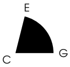
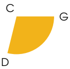
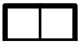


Равноугольные *параллелограммы*  *и*  *имеют друг к другу составное отношение их сторон.*

Пусть две стороны при равных углах  и  будут расположены так, что образуют одну прямую.

Поскольку  +  = ,

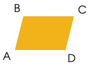
и  =  (гип.),

 +  = ,

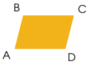
и ∴  и  образуют одну прямую (пр. I.14).

Достроим .

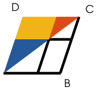
Поскольку

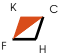
 :  ::  :  (пр. VI.1),

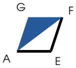
и  :  ::  :  (пр. VI.1),

 имеет к  отношение, составленное из отношений  к , и  к .

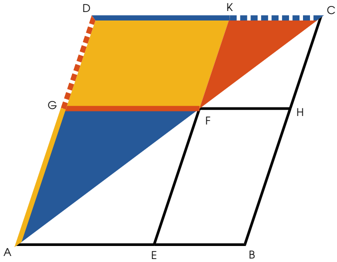
ч. т. д.

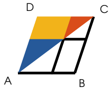
Во всяком параллелограмме 

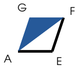
параллелограммы 

и 

на диагонали подобны целому и между собой.



Поскольку у 

и 

есть общий угол, они равноугольны.

Но поскольку 

‖ 

и 

подобны (пр. VI.4),

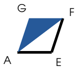
∴ 

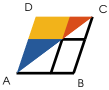
: 

:: 

: 

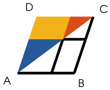
, а оставшиеся противоположные стороны равны им.

∴ у 

и 

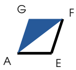
стороны при равных углах пропорциональны и значит, они подобны.

Так же можно показать, что параллелограммы



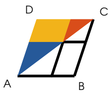
и 

подобны.

И так как оба 

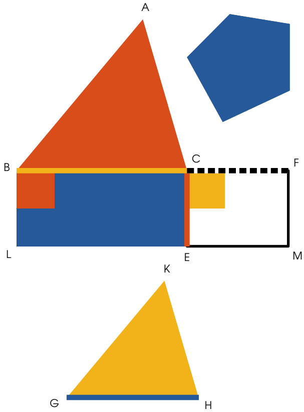
и 

подобны



, они подобны и друг другу.

ч. т. д.



Построить *прямолинейную фигуру подобную данной* и *равную другой данной* .

На BC опишем BLEC = ABC ,

и на CE опишем CEMF = ,

с BLC = CEF (пр. I.45),

и тогда BC и CF будут лежать на одной прямой (пр. I.29, пр. I.14).

Найдем между BC и CF среднюю пропорциональную GH (пр. VI.13),

и на GH опишем GKH , подобный ABC , и подобно расположенный.

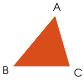
Тогда GKH = .

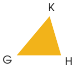
Поскольку ABC и GKH подобны

и BC : GH :: GH : CF (постр.),

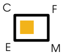
ABC : GKH :: BC : CF (пр. VI.20).

Но BLEC : CEMF :: BC : CF (пр. VI.1).

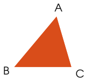
∴ 

: 

:: 

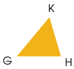
: 

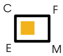
(пр. V.11).

Но 

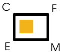
= 

(постр.),

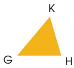
и ∴ 

= 

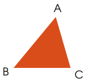
(пр. V.14);

и 

=  (постр.).

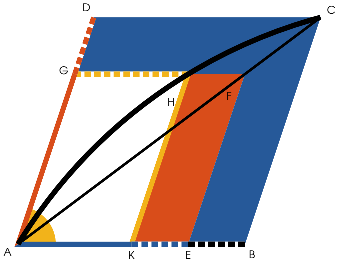
И, следовательно, 

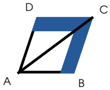
подобный

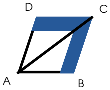


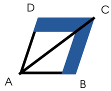
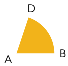
вместе с тем =  .

ч. т. д.



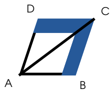
Если у подобных и подобно расположенных параллелограммов  *и*  *есть общий угол, они расположены на одной диагонали.*

Действительно, если возможно, пусть AHC будет диагональю 
и проведем KH ∥ AG (пр. I.31).

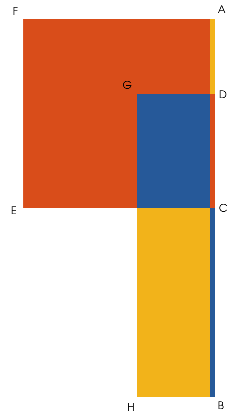
Поскольку  и  на одной диагонали AHC, и  у них общий, они подобны (пр. VI.24).

∴ AG : AK :: AD : AB;
но AG : AE :: AD : AB (гип.).

∴ AG : AK :: AG : AE,
и ∴ AK = AE (пр. V.9), что невозможно.

∴ AHC не является диагональю 
и таким же образом можно показать, что диагональю не является никакая другая прямая, кроме AC.

ч. т. д.



Из всех прямоугольников, заключенных между частями данной прямой линии, наибольшим является квадрат, описанный на половине линии.

Пусть 

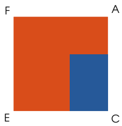
будет данной прямой линией,


и 

неравными частями,
а 

и 

равными частями.

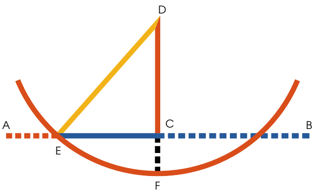
Тогда 

> 

.

Поскольку, как уже было показано (пр. II.5), квадрат половины линии равен прямоугольнику, заключенному между неравными частями вместе с квадратом на части между серединой и точкой неравного рассечения. Квадрат описанный на половине линии превосходит, таким образом, прямоугольник, заключенный между неравными частями линии.

ч. т. д.



Разделить *данную прямую* AB *так, чтобы прямоугольник, заключенный между частями был равен данной площади, не превосходящей квадрат половины данной прямой.*

Пусть данная площадь будет $= G^2$.
Рассечем пополам AB,
или сделаем $AC = CB$,
и если $AC^2 = G^2$, то задача решена.

Но если $AC^2 \neq G^2$,
тогда $AC > G$ (гип.).

Проведем $DC \perp AC = G$,
сделаем $DF = AC$ или CB,
с DF в качестве радиуса опишем круг,
секущий данную прямую, проведем DE.

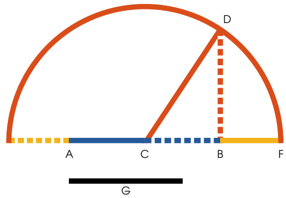
Тогда $AE \times EB + EC^2 = AC^2$
(пр. II.5) $= DE^2$.

Но $DE^2 = DC^2 + EC^2$ (пр. I.47);

$\therefore AE \times EB + EC^2 = DC^2 + EC^2$,
из обеих вычтем EC^2,
и $AE \times EB = DC^2$.

Но $DC = G$ (постр.),
и $\therefore AB$ рассечена так, что
$AE \times EB = G^2$.

ч. т. д.



Продлить *данную прямую* AB *так, чтобы прямоугольник, заключенный между прямыми между концами данной линии и точкой, до которой она продлена, был равен данной площади, то есть квадрату на* G.

Сделаем $AC = CB$,
и проведем $BD \perp CB = G$,
проведем CD,
и с CD в качестве радиуса, опишем круг,
пересекающий продленную AB.

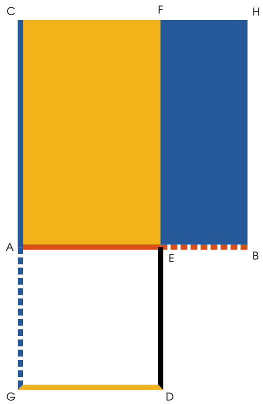
Тогда
$AF \times BF + CB^2 = AB^2$
(пр. II.6) $= CD^2$.

Но $CD^2 = BD^2 + CB^2$ (пр. I.47).

$\therefore\ AF \times BF + CB^2 =$
$BD^2 + CB^2$,
из обеих вычтем CB^2,
и $\therefore\ AF \times BF = BD^2$
но $BD = G$.

$\therefore\ BD^2 =$ данной площади.

ч. т. д.



Рассечь *данную прямую* AB *в крайнем и среднем отношении.*

На AB опишем квадрат CH AB (пр. I.46).

И продлим CA, так, что
CG × AG = AB^2 (пр. VI.29).

Возьмем AE = AG,
и проведем DE ∥ CG,
встречающуюся с GD ∥ AB (пр. I.31).

Тогда CF GD = CG × AG, и ∴ = CH AB.

И если из обеих частей вычесть общую CF AE,

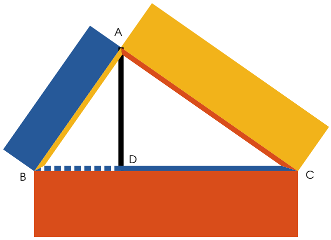
AE GD, являющаяся квадратом AE,

будет = FH EB, которая = AB × EB.

То есть AE^2 = AB × EB.

∴ AB : AE :: AE : EB,
и AB разделена в крайнем
и среднем отношении (опр. VI.3).

ч. т. д.



Если *подобные и подобным образом описанные прямолинейные фигуры построены на сторонах прямоугольного треугольника* ABC, *фигура на стороне* BC *против прямого угла равна сумме фигур на двух других сторонах.*

Из прямого угла проведем
перпендикуляр AD к BC.

Тогда BC : CA :: CA : DC
(пр. VI.8).

∴ BC : AC :: BC : DC
(пр. VI.20).

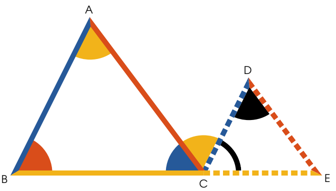
Но BC : BA :: BC : BD
(пр. VI.20).

Значит DC + BD : BC ::
BA + AC : BC.

Но DC + BD = BC.

И ∴ BA + AC = BC.

ч. т. д.



Если у треугольников BAC *и* CDE, *две стороны пропорциональны* AB : CA :: DC : ED *и расположены они так, что касаются углом и соответственные стороны параллельны, то оставшиеся стороны* BC *и* CE *лежат на одной прямой.*

Поскольку AB ∥ DC,

BAC = ADC (пр. I.29).

И поскольку CA ∥ ED,

ACD = CDE (пр. I.29).

∴ BAC = CDE;

и поскольку

AB : CA :: DC : ED (гип.),

треугольники равноугольны (пр. VI.6).

∴ ABC = DEC.

Но BAC = ADC.

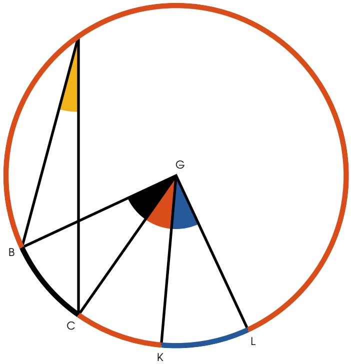
∴ ABC + ACD + DCE =

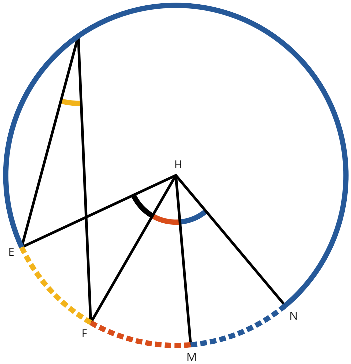
ABC + BAC + BCA = ⎕⎕ (пр. I.32),

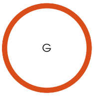
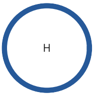
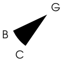
и ∴ BC и CE лежат

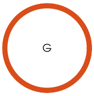
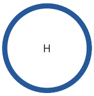
на одной прямой (пр. I.14).

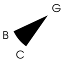
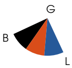
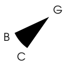
ч. т. д.



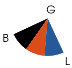
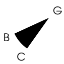


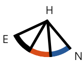
В равных *кругах*  *и*  *углы, что в центре, что на окружности, относятся друг к другу как дуги, на которых они стоят*  :  ::  : , *как и секторы.*

Возьмем на окружности  любое количество дуг , , и т. д. каждая = , и также на окружности  возьмем любое количество дуг , , и т. д. каждая = , проведем радиусы к концам равных дуг.

Поскольку дуги , , , и т. д. равны, углы , , , и т. д. также равны (пр. III.27). ∴  столько же раз кратен , сколько  кратна . Точно так же  столько же раз кратен , сколько дуга  кратна дуге .

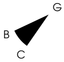
Тогда очевидно (пр. III.27),

что если  (или если m раз )

$>, =, <$  (или n раз )

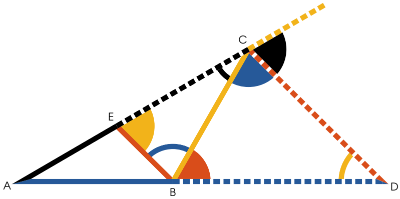
то  (или m раз )

$>, =, <$  (или n раз ).

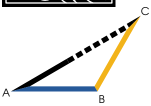
$\therefore$  :  ::  :  (опр. V.5), или углы в центре относятся так же, как дуги, на которых они стоят, но углы на окружности вдвое меньше углов в центре (пр. III.20) и относятся так же (пр. V.15), и следовательно так же, как дуги, на которых они стоят.

Очевидно, что секторы в равных кругах и на равных дугах равны (пр. I.4, III.24, III.27, и опр. III.9). Значит, если выше углы заменить на секторы, получим доказательство второй части, то есть, что в равных кругах секторы относятся друг к другу как дуги, на которых они стоят.

ч. т. д.



Если *прямая линия* DC *рассекая пополам внешний угол* CBF *треугольника*



встречается в продолжением стороны треугольника AB, *то вся сторона с продолжением* AD *и ее внешняя часть* BD *будут пропорциональны сторонам* AC *и* BC, *между которыми заключен угол, смежный с рассекаемым внешним.*

Действительно, если провести $BE \parallel DC$,

то CBD = ECB, (пр. I.29);

= CFD, (гип.),

= ECB, (пр. I.29).

И ∴ EC = BC, (пр. I.6),

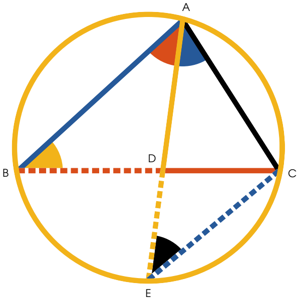
и AC : BC :: AC : EC (пр. V.7).

Но также AD : BD :: AC : EC (пр. VI.2).

И следовательно

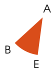
AD : BD :: AC : BC (пр. V.11).

ч. т. д.



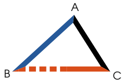
Если *угол треугольника рассекается пополам прямой линией, которая также сечет его основания, прямоугольник заключенный между сторонами треугольника равен прямоугольнику, заключенному между частями основания, вместе с квадратом прямой, рассекающей угол.*

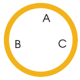
Проведем AD, делая 

= 

,

тогда $AB \times CA = BD \times DC + AD^2$.

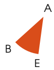
Около 

опишем 

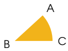
(пр. IV.5),

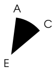
продлим AD до окружности и проведем CE.

Поскольку 

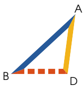
= 

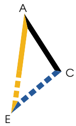
(гип.),

и 

= 

(пр. III.21).

∴ 

и 

равноугольны (пр. I.32).

∴ $AB : AD :: AE : CA$ (пр. VI.4).

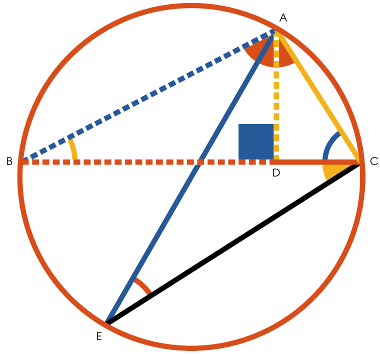
∴ $AB \times CA = AD \times AE$ (пр. VI.16)

$= DE \times AD + AD^2$ (пр. II.3).

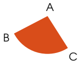
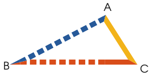
Но $DE \times AD = BD \times DC$ (пр. III.35).

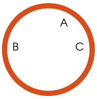
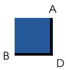
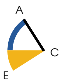
∴ $AB \times CA = BD \times DC + AD^2$.

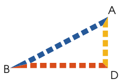
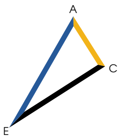
ч. т. д.



Если *из любого угла треугольника провести прямую перпендикулярную основанию, прямоугольник, заключенный между сторонами треугольника будет равен прямоугольнику, заключенному между перпендикуляром и диаметром круга, описанного около треугольника.*

Из угла  треугольника 
проведем  ⊥ ;
тогда  ×  =  ×
диаметр описанного круга.

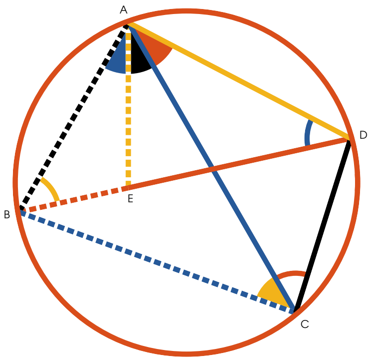
Опишем  (пр. IV.5), проведем
диаметр , и проведем ,
тогда, поскольку  = 
(постр.и пр. III.31), и  =  (пр. III.21).

∴  равноуголен с  (пр. VI.4).

∴  :  ::  : .

И ∴  ×  =  × 
(пр. VI.16).

ч. т. д.



Прямоугольник, *заключенный между диагоналями четырехугольника, вписанного в круг равен прямоугольникам, заключенным между противоположными сторонами вместе взятым.*

Пусть $ABCD$ будет любым четырехугольником, вписанным в ABC.

Проведем BD и AC,
тогда $BD \times AC = AB \times CD + DA \times BC$.

Сделаем $\angle BAE = \angle CAD$ (пр. I.23),

$\therefore\ \angle BAC = \angle EAD$, и $\angle ACB = \angle ADB$ (пр. III.21).

$\therefore\ DA : ED :: AC : BC$ (пр. VI.4),
и $\therefore\ ED \times AC = DA \times BC$ (пр. VI.16).

Теперь, поскольку
$\angle BAE = \angle CAD$ (постр.) и $\angle ABD = \angle ACD$ (пр. III.21),
$\therefore\ AB : BE :: AC : CD$
(пр. VI.4),
и $\therefore\ BE \times AC = AB \times CD$ (пр. VI.16).

Но, как написано выше,
$ED \times AC = DA \times BC$.

$\therefore\ BD \times AC =$
$AB \times CD + DA \times BC$ (пр. II.1).

ч. т. д.