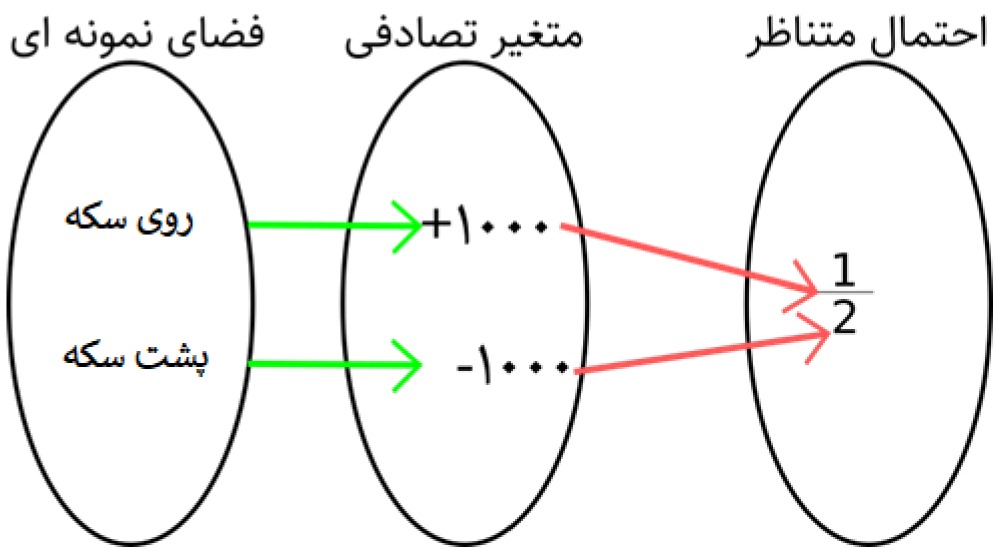
فصل اول
شناسایی الگو
متغیر تصادفی – تابع توزیع

محمدجواد فدائی‌اسلام

متغیر تصادفی

در انجام آزمایش‌ها علاقه‌مند هستیم تا خروجی تصادفی آزمایش را به صورت عددی بیان کنیم. متغیر تصادفی X تابعی است که یک عدد حقیقی را به یک خروجی نگاشت می‌کند.

این تابع به دو صورت گسسته و پیوسته در نظر گرفته می‌شود.



تابع توزیع تجمعی = تابع توزیع احتمال

- تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی، تابعی است که احتمال رخدادن پیشامدهای با مقدار عددی کمتر از آن را نمایش می‌دهد.
و به صورت دقیق به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = P[X \leq x]$$

- Cumulative Distribution Function (CDF)
- Probability Distribution Function (PDF)

تابع توزیع تجمعی

- تابع توزیع تجمعی متغیرهای تصادفی از نوع گسسته و پیوسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند.

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t)$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

خواص تابع توزیع تجمعی (گسسته یا پیوسته)

۱- $0 \le P(X \le x) \le 1$ یا $0 \le F(x) \le 1$

۲- $F(x)$ یک تابع غیر نزولی است.

۳- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$ و $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

۴- $F(x)$ در هر نقطه x از راست پیوسته است.

خواص تابع توزیع تجمعی (ادامه)

۵- $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

۶- الف: در متغیر پیوسته

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

ب: در متغیر گسسته

$$f(x) = F(x) - F(x^{-}) \qquad F(x) = \sum_{x \le t} f(t)$$

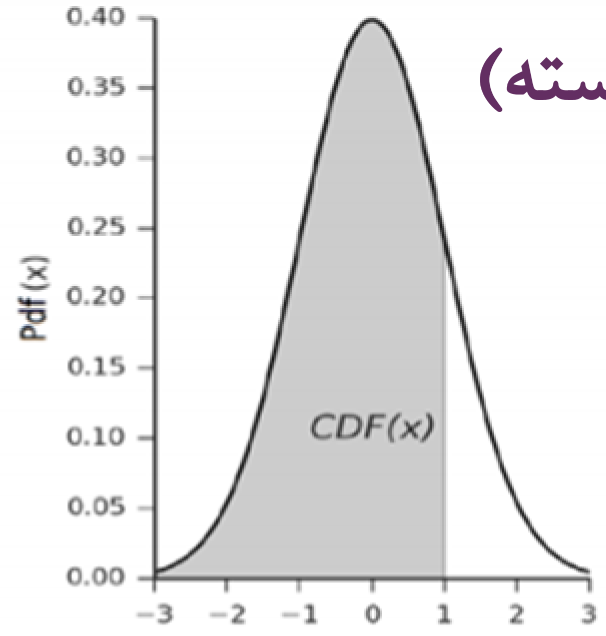
تابع چگالی احتمال پیوسته
Probability Density Function(PDF)

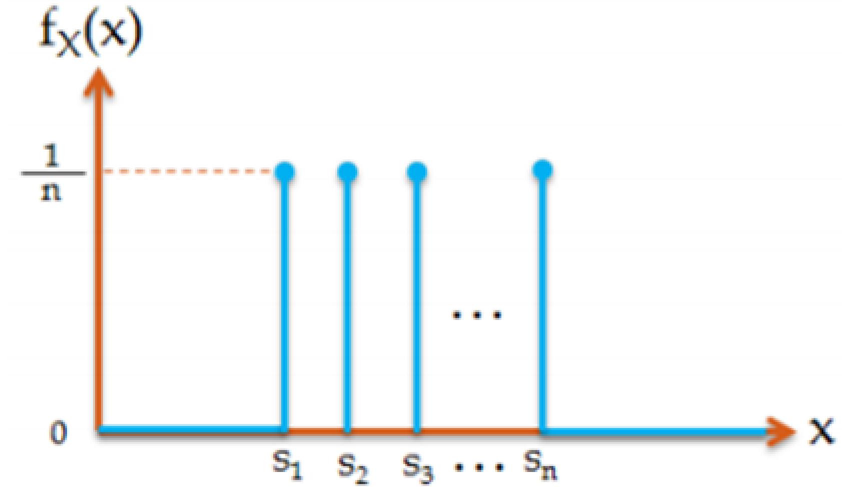
- مشتق تابع توزیع تجمعی، تابع چگالی احتمال نام دارد.

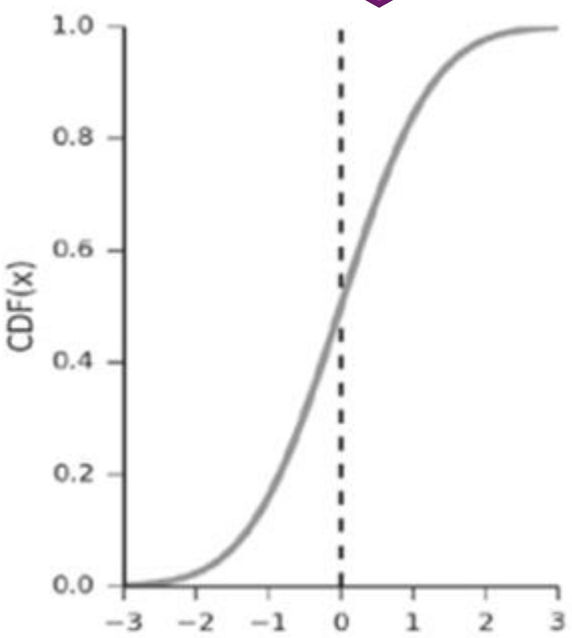
$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx}$$

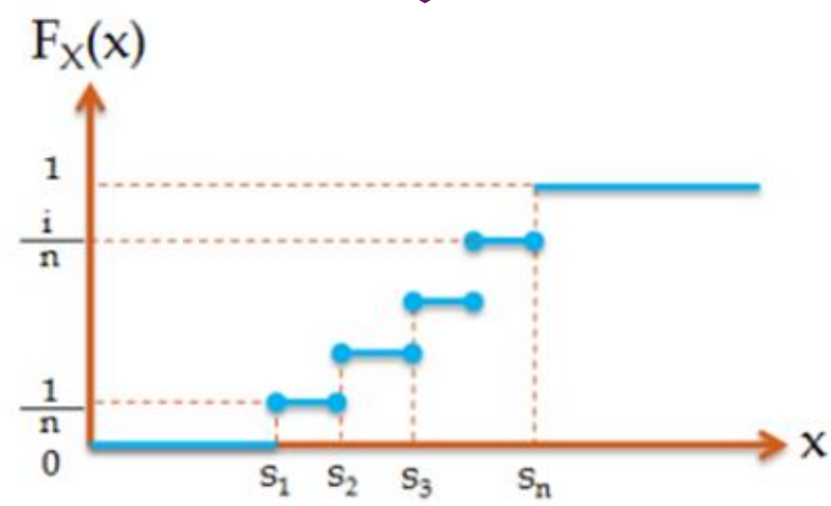
- تابع چگالی احتمال پیوسته، **احتمالی را نشان نمی‌دهد** و برای به دست آوردن احتمال باید از آن انتگرال گرفت.

تابع چگالی و تابع توزیع (پیوسته و گسسته)









امید ریاضی

Expected Value

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(\mathrm{x})$ باشد. امید ریاضی در حالت گسسته و پیوسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می شود.

$$E[X] = \sum_{x} x \, . \, f(x)$$

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

در ادبیات آماری امید ریاضی را معمولاً با μ نمایش می دهند. امید ریاضی برابر است با مقداری که به طور متوسط از یک فرایند تصادفی با بی‌نهایت تکرار انتظار می‌رود.

ویژگی‌های امید ریاضی

$$E(X+c) = E(X) + c$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX) = a\,E(X)$$

$$E(aX+b) = a\,E(X) + b$$

$$E(aX+bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)$$

اگر X و Y مستقل از هم باشند.

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

تفاوت امید ریاضی و میانگین

- این دو عبارت گاهی به جای یکدیگر در آمار استفاده می‌شوند.
- زمانی که بخواهیم میانگین یک توزیع احتمال را محاسبه کنیم از مقدار عبارت امید ریاضی استفاده می‌شود. این نشان‌دهنده میانگین مقداری است که انتظار داریم قبل از جمع‌آوری داده‌ها رخ دهد.
- میانگین معمولاً زمانی استفاده می‌شود که بخواهیم مقدار متوسط تعدادی نمونه جمع‌آوری شده را محاسبه کنیم.

Goals (X)	Probability P(X)
0	0.18
1	0.34
2	0.35
3	0.11
4	0.02

تفاوت امید ریاضی و میانگین - مثال

- جدول روبرو، تابع توزیع احتمال تعداد گل‌هایی است که یک تیم معین در یک بازی به ثمر می‌رساند.

$$\mu = \sum xP(x) = 1.45$$

- تعداد گل‌هایی که یک تیم در ۱۵ بازی زده است به صورت زیر است

1, 1, 0, 2, 2, 1, 0, 3, 1, 1, 1, 2, 4, 3, 1

$$Mean = \sum \frac{x_i}{n} = 1.53$$

باز تعریف واریانس از روی تابع چگالی احتمال

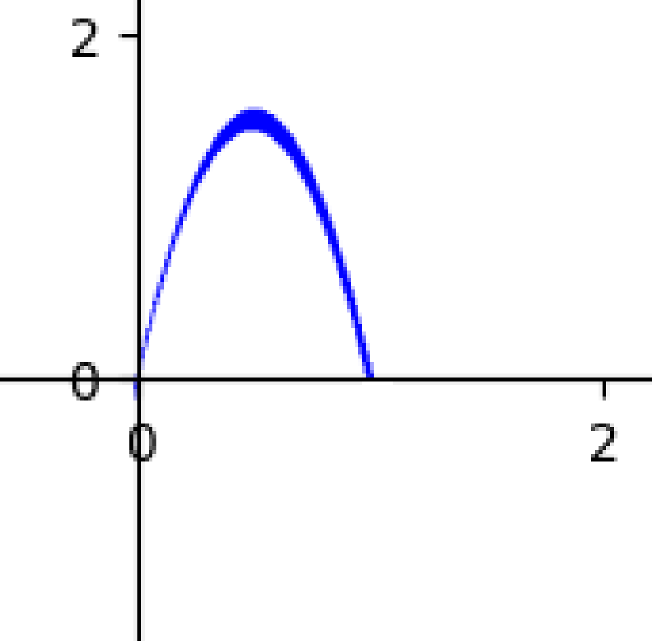
اگر تابع چگالی احتمال $f(x)$ در دامنه $[a,b]$ در دسترس باشد واریانس آن به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$V(x) = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx = \sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$$

باز تعریف واریانس از روی تابع چگالی احتمال

باتوجه به خواص عملگر E می توان واریانس X را به صورت زیر تعریف کرد.

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 + \mu^2 - 2\mu X]$$
$$= E(X^2) + \mu^2 - 2\mu E(X)$$
$$= E(X^2) + \mu^2 - 2\mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$



مثال

- واریانس تابع زیر را حساب کنید

- $f(x) = 6x - 6x^2, 0 \leq x \leq 1$

- $\mu = \int_0^1 x(6x - 6x^2)dx = \frac{1}{2}$
- $V(x) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (6x - 6x^2)dx = \frac{1}{20}$

ویژگی های واریانس

$$V(c) = 0$$

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

$$V(aX + c) = a^2 V(X) + 0$$

$$V(aX + c) = E[aX + c - E(aX + c)]^2$$
$$= E[aX + c - aE(X) - c]^2 = E[aX - aE(X)]^2$$
$$= E[a(X - E(X))]^2 = a^2\, E(X - \mu)^2 = a^2 V(X)$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی

اگر متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام $f(x,y)$ باشند کوواریانس آنها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$$

که μ_x و μ_y به ترتیب امید ریاضی X و Y هستند. رابطه بالا را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$Cov(X,Y) = E[XY] - \mu_x \mu_y$$

قضیه: اگر دو متغیر X و Y مستقل باشند آنگاه:

$$Cov(X,Y) = 0$$

کواریانس نمونه‌ها

- اگر N نمونه تصادفی در دست باشد که از هر نمونه دو ویژگی X و Y در دست باشد. ماتریس کواریانس این دو ویژگی یک ماتریس دو در دو به صورت زیر خواهد بود.

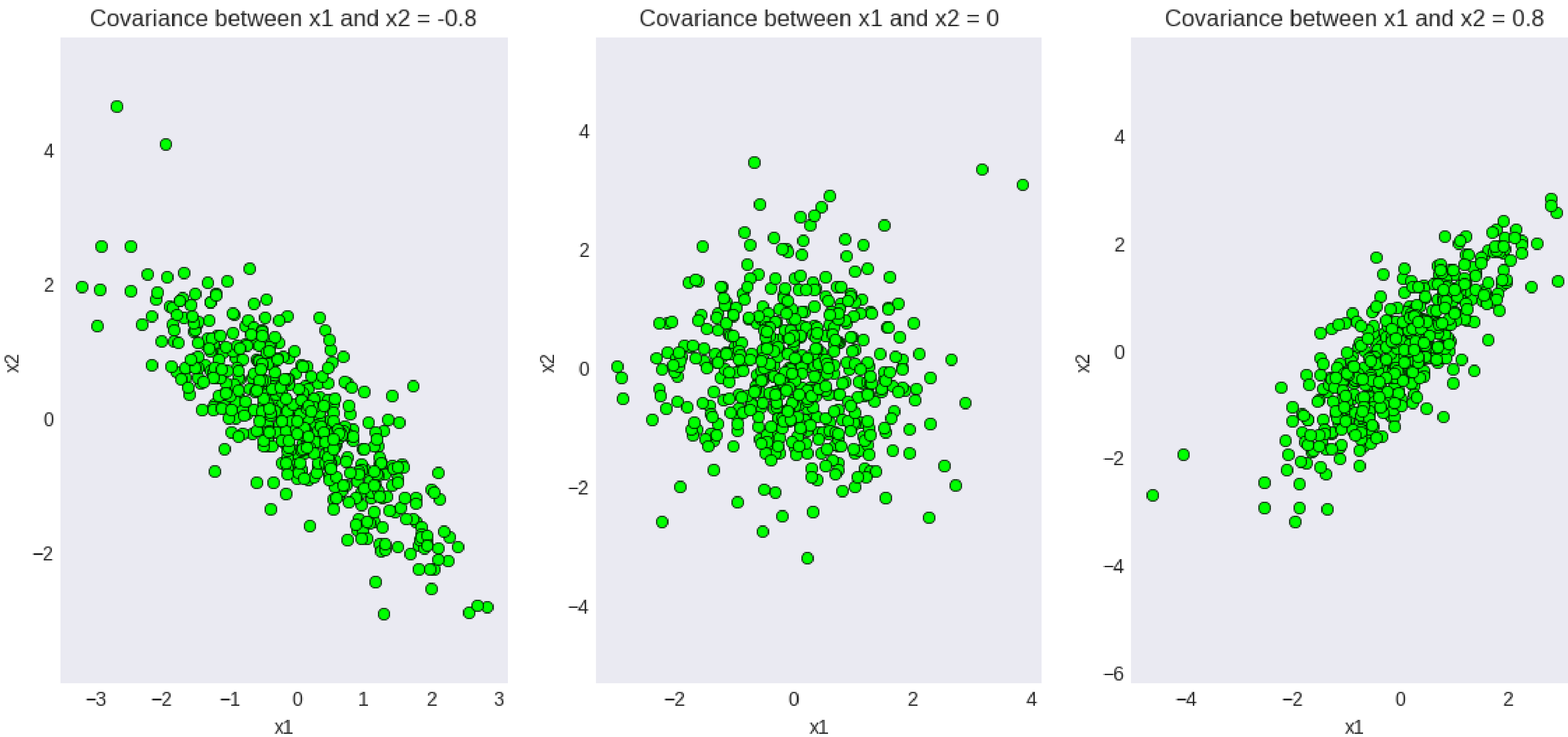
$$\begin{bmatrix} cov(X,X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & cov(Y,Y) \end{bmatrix}$$

$$cov(X,X) = var(X), cov(Y,Y) = var(Y)$$

$$cov(X,Y) = cov(Y,X) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

ویژگی کواریانس

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, a) &= 0 \\
\operatorname{cov}(X, X) &= \operatorname{var}(X) \\
\operatorname{cov}(X, Y) &= \operatorname{cov}(Y, X) \\
\operatorname{cov}(aX, bY) &= ab \operatorname{cov}(X, Y) \\
\operatorname{cov}(X + a, Y + b) &= \operatorname{cov}(X, Y)
\end{aligned}$$



$$cov = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix} \qquad cov = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad cov = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

توزیع یکنواخت، توزیع نرمال

محمدجواد فدائی‌اسلام

تابع احتمال یکنواخت گسسته

- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال یکنواخت با پارامتر k است اگر تابع احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{k} \qquad x = 1, 2, \ldots, k$$

- مثال: کیسه‌ای شامل k گوی یکسان است که بر روی هر کدام شماره‌ای از ۱ تا k وجود دارد. احتمال برداشتن گوی به شماره i چقدر است. i بین یک و k است.

تابع احتمال یکنواخت گسسته

مثال: جعبه‌ای شامل کلیدها با شماره ۱ تا k است. اگر هم‌شانس بودن را برای همه شماره‌ها درنظر بگیریم و متغیر تصادفی X، شماره کلید خارج شده باشد، آنگاه X دارای تابع چگالی احتمال یکنواخت گسسته است.

$$E(X)=\sum_{x=1}^{k} xf(x)=\sum_{x=1}^{k} x.\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x=\frac{k+1}{2}$$

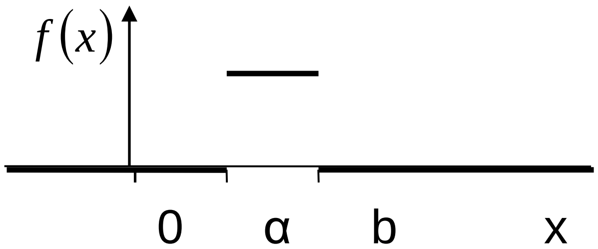
$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{k} x^2 f(x)=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x^2=\frac{1}{k}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{(k+1)^2}{4}=\frac{(k+1)(k-1)}{12}$$

تابع چگالی احتمال یکنواخت (مستطیلی)
UNIFORMLY PROBABILITY DENSITY FUNCTION

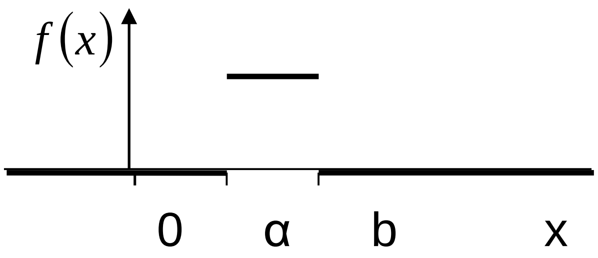
- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال یکنواخت با پارامترهای α و b است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b$$



ویژگی‌های تابع چگالی احتمال یکنواخت

- نمودار چگالی احتمال $f(\mathrm{x})$ برای $-\infty < a < b < \infty$ به صورت زیر است.



- تابع توزیع $\mathrm{F(x)}$ برابر است با:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

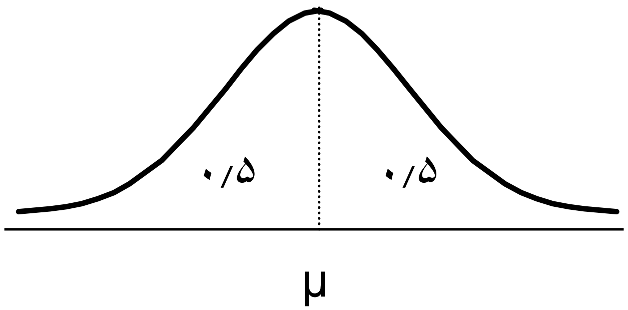
تابع چگالی احتمال نرمال
NORMAL (GAUSSIAN) PROBABILITY DENSITY FUNCTION

- متغیر تصادفی نرمال یکی از توزیع‌های مهم آماری در حالت پیوسته است. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

ویژگی‌های توزیع نرمال

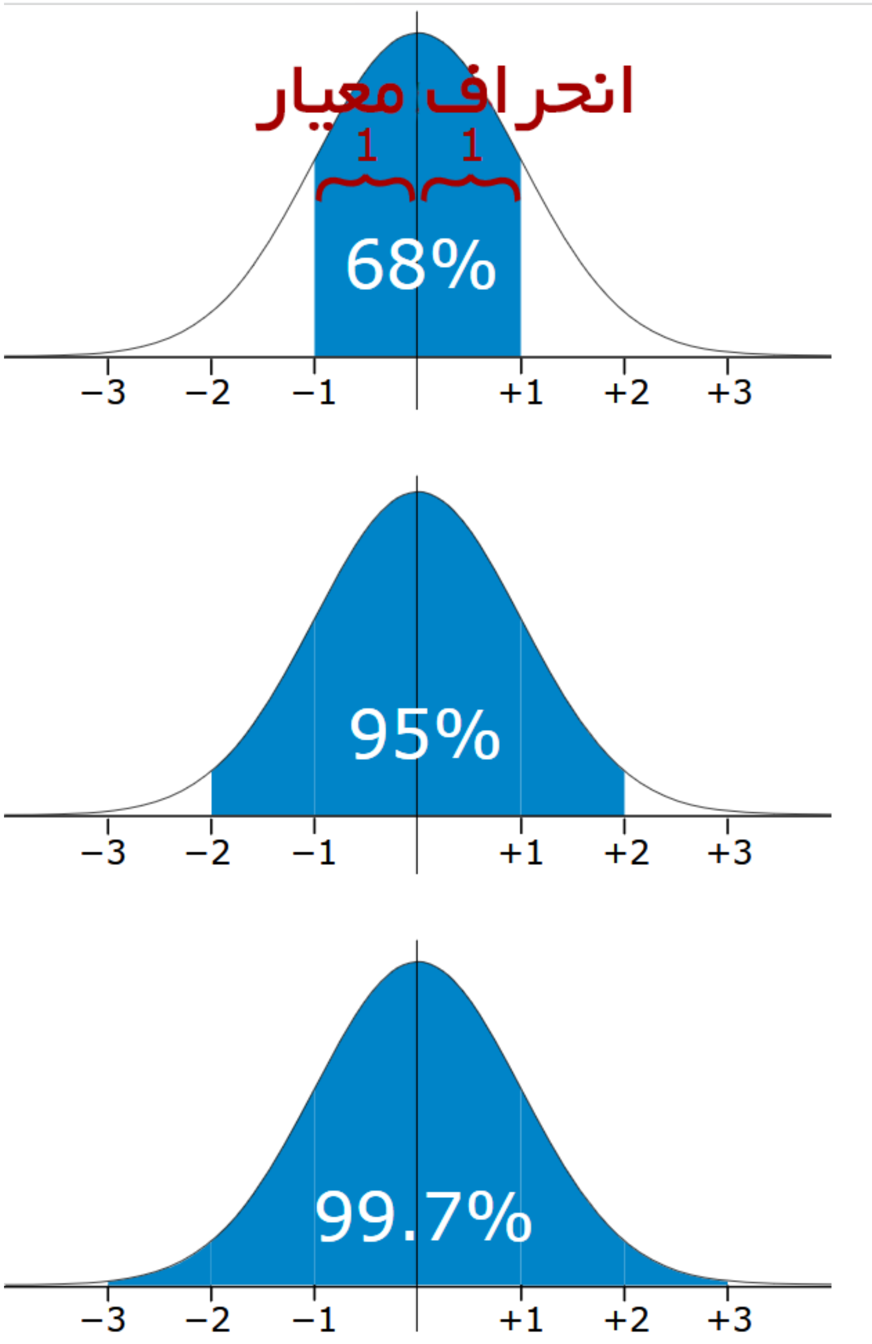
- ۱- این توزیع نسبت به محور y=μ دارای تقارن است.



- ۲- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

- ۳- $P[X \leq \mu] = P[X \geq \mu] = 0.5$

- ۴- برای μ=0 و $\sigma^2 = 1$، توزیع نرمال را توزیع نرمال استاندارد گویند.



توزیع نرمال (ویژگی)

- تصویر اول: ۶۸٪ از مقدارها در محدوده یک انحراف از میانگین
- تصویر دوم: ۹۵٪ مقدارها در محدوده دو برابر انحراف معیار از میانگین
- تصویر سوم: ۹۹.۷٪ از مقدارها در محدوده سه برابر انحراف معیار از میانگین.

(انحراف معیار در اشکال روبرو برابر یک در نظر گرفته شده است.)

tion

ابزار MATLAB در رسم نمودارها

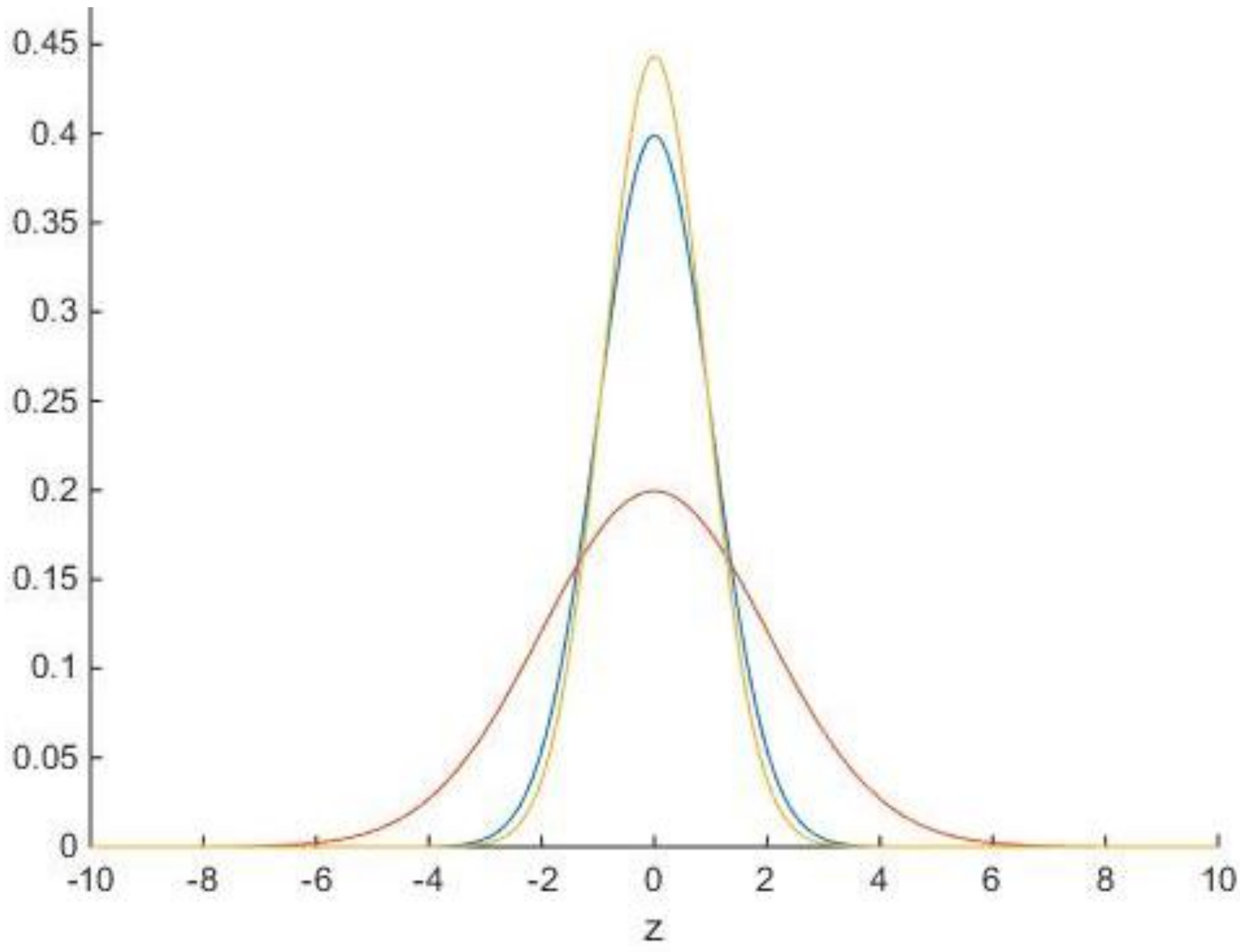
رسم تابع با استفاده از دستور EZPLOT
(رسم با معادله و سمبول)

```
% Easy-to-use function plotter
figure; hold on
ezplot('(2*pi)^-0.5 * exp(-1/2*(z^2))',[-10 10 0 0.5]);

ezplot('(2*pi*4)^-0.5 * exp(-1/2*(z/2)^2)',[-10 10 0 0.5]);

ezplot('(2*pi*0.81)^-0.5 * exp(-1/2*(z/.9)^2)',[-10 10 0 0.5]);
```

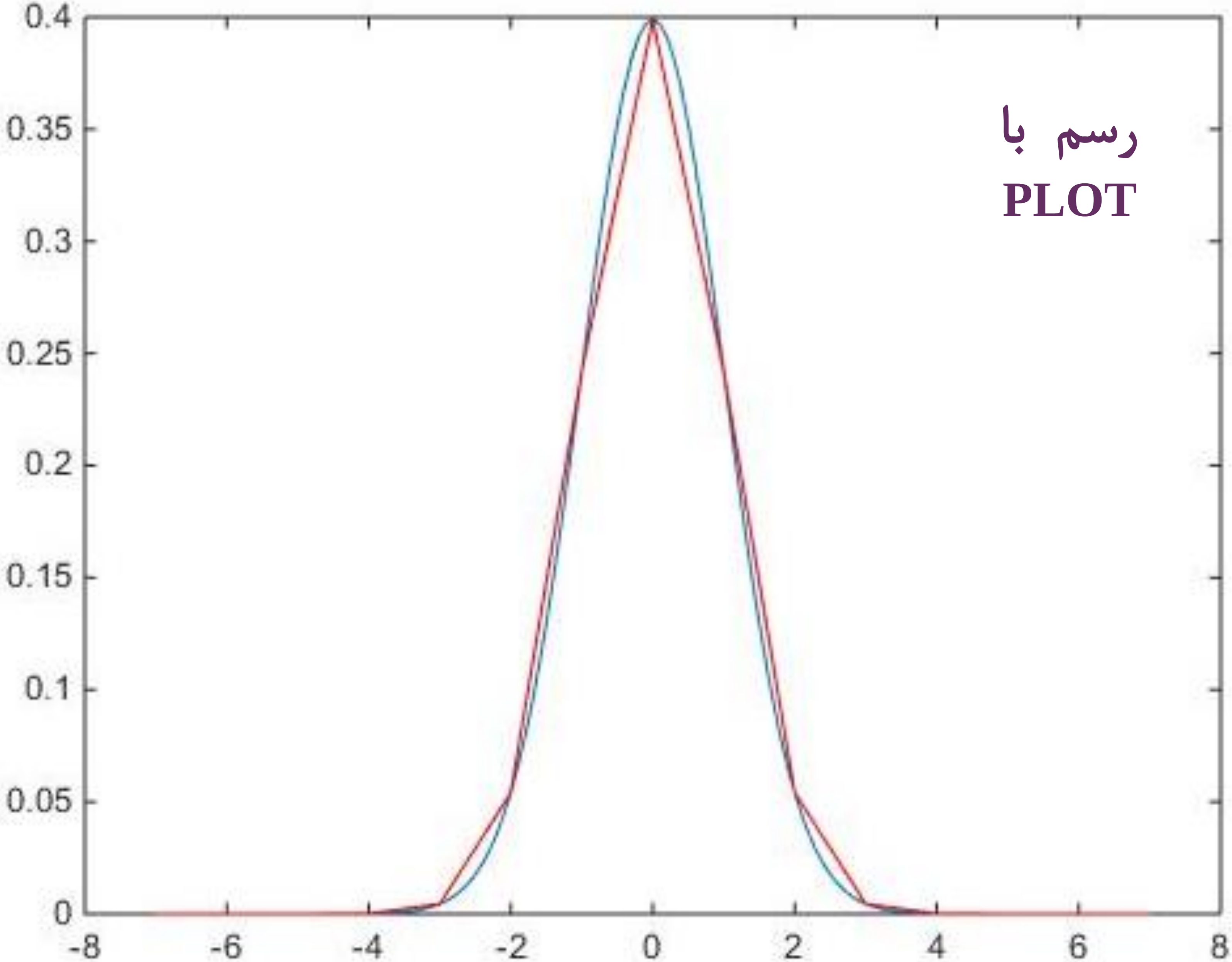
رسم با EZPLOT



رسم تابع با استفاده از نقطه‌یابی و دستور PLOT

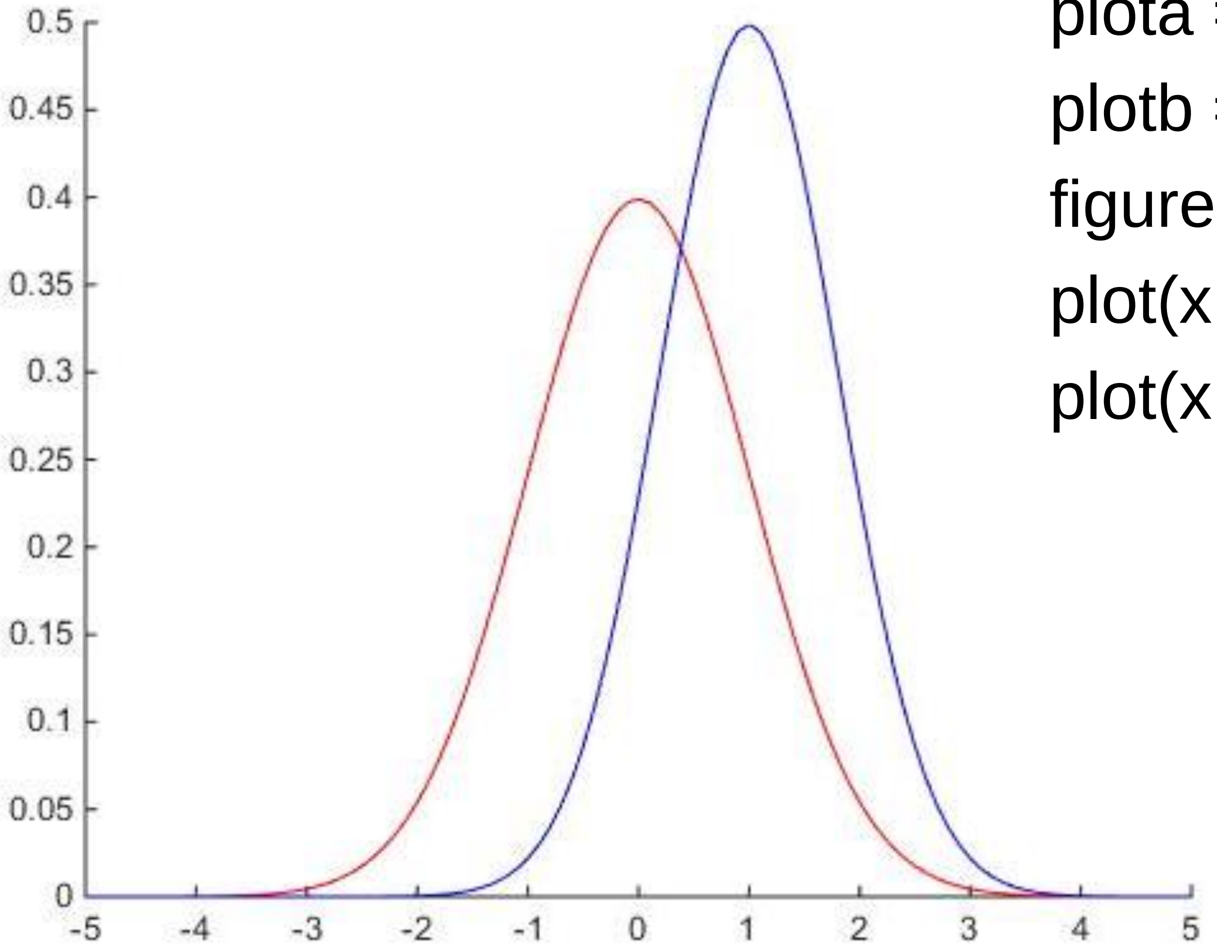
```
% plot
X = [-7:.1:7];
Y = (2*pi)^-0.5 .* exp(-1/2.*(X.^2));
figure; plot(X,Y);
XX = [-7:1:7];
YY = (2*pi)^-0.5 .* exp(-1/2.*(XX.^2));
hold on; plot(XX,YY,'r');
```

رسم با
PLOT



محاسبه تابع چگالی نرمال با NRMPDF و رسم با PLOT

```
x = [-5:.1:5];
plota = normpdf(x,0,1);
plotb = normpdf(x,1,0.8);
figure; hold on;
plot(x,plota,'r');
plot(x,plotb,'b');
```

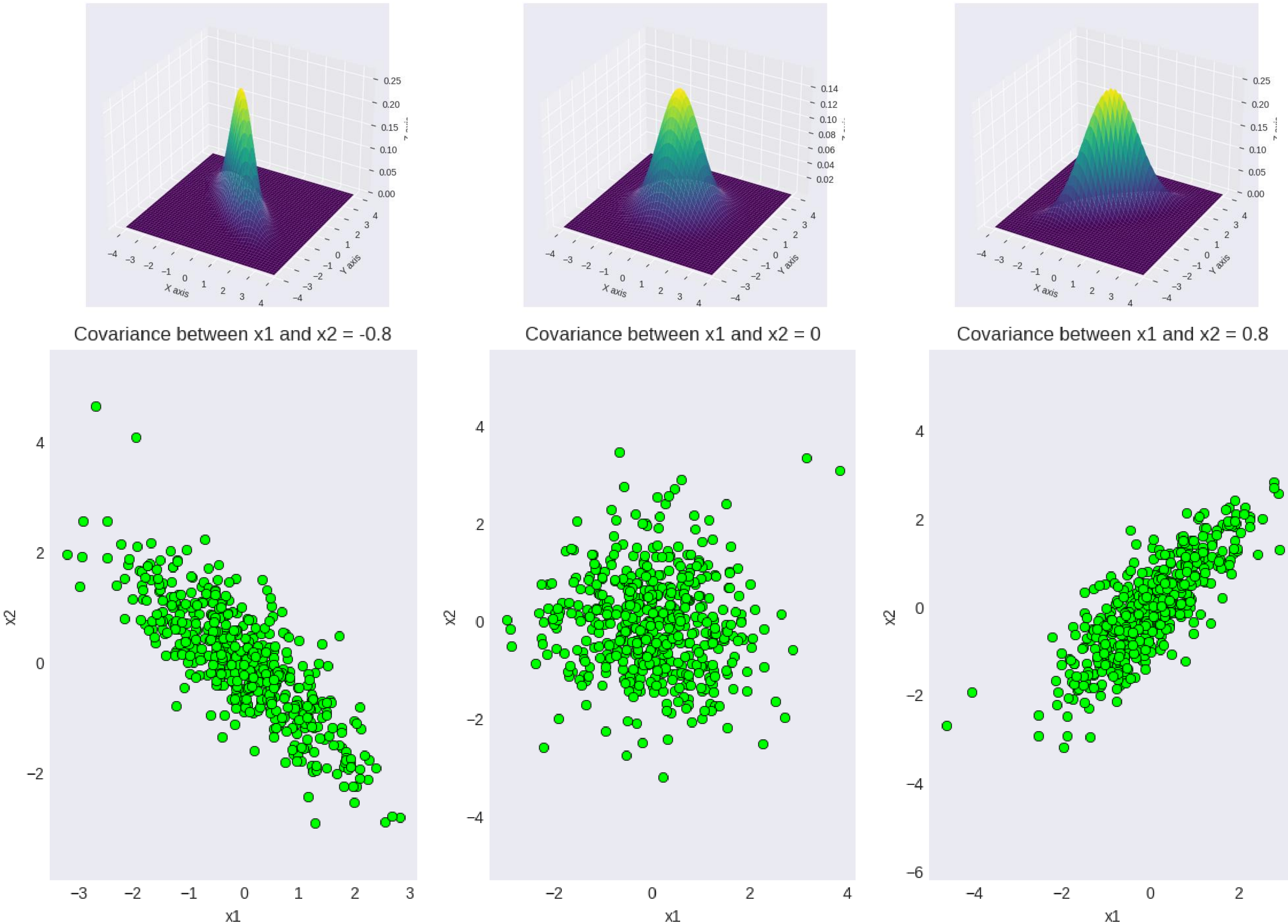


تابع چگالی احتمال گوسی چند متغیره

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\ell}{2}} \left|\Sigma\right|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) \right)$$

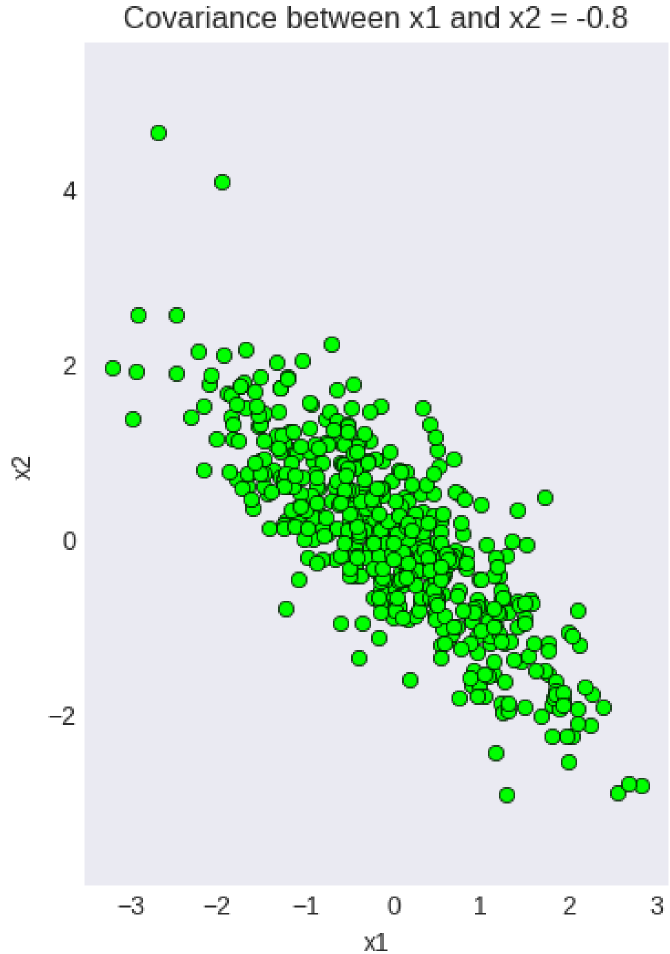
خط زیر به معنای بردار است.

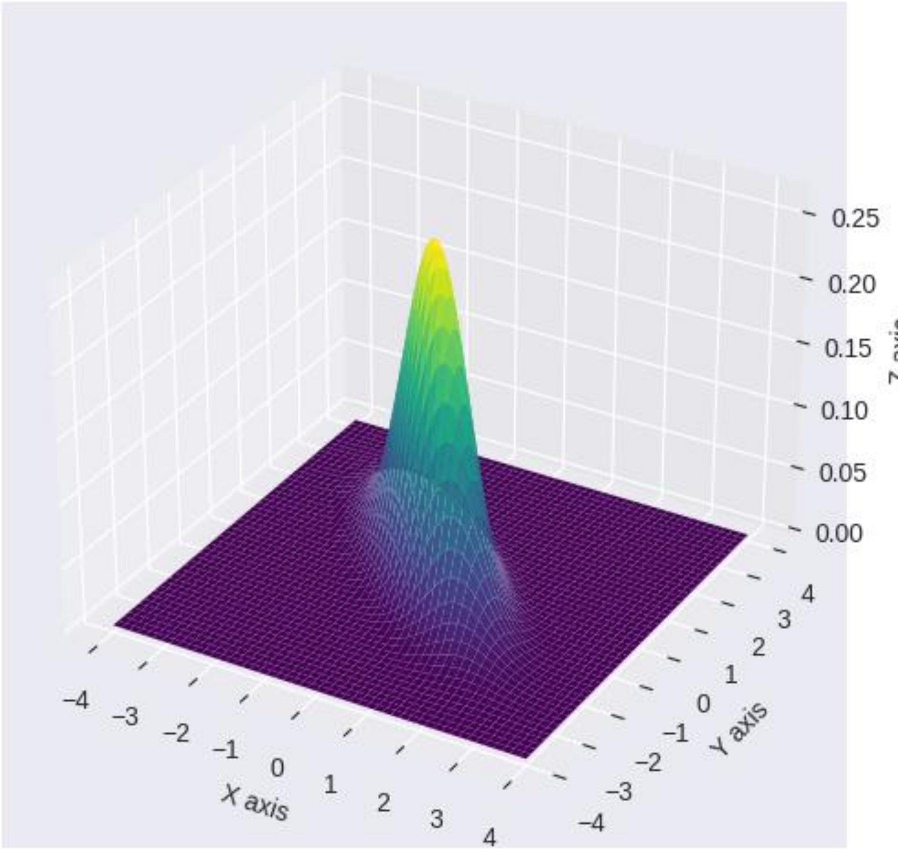
$\Sigma = covariance\ matrix$
$\mu = mean\ vector$
$|.| = determinant$
$l = number\ of\ features\ (variables)$



$$cov = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix} \qquad cov = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad cov = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

داده و تابع چگالی توزیع متناظر آن



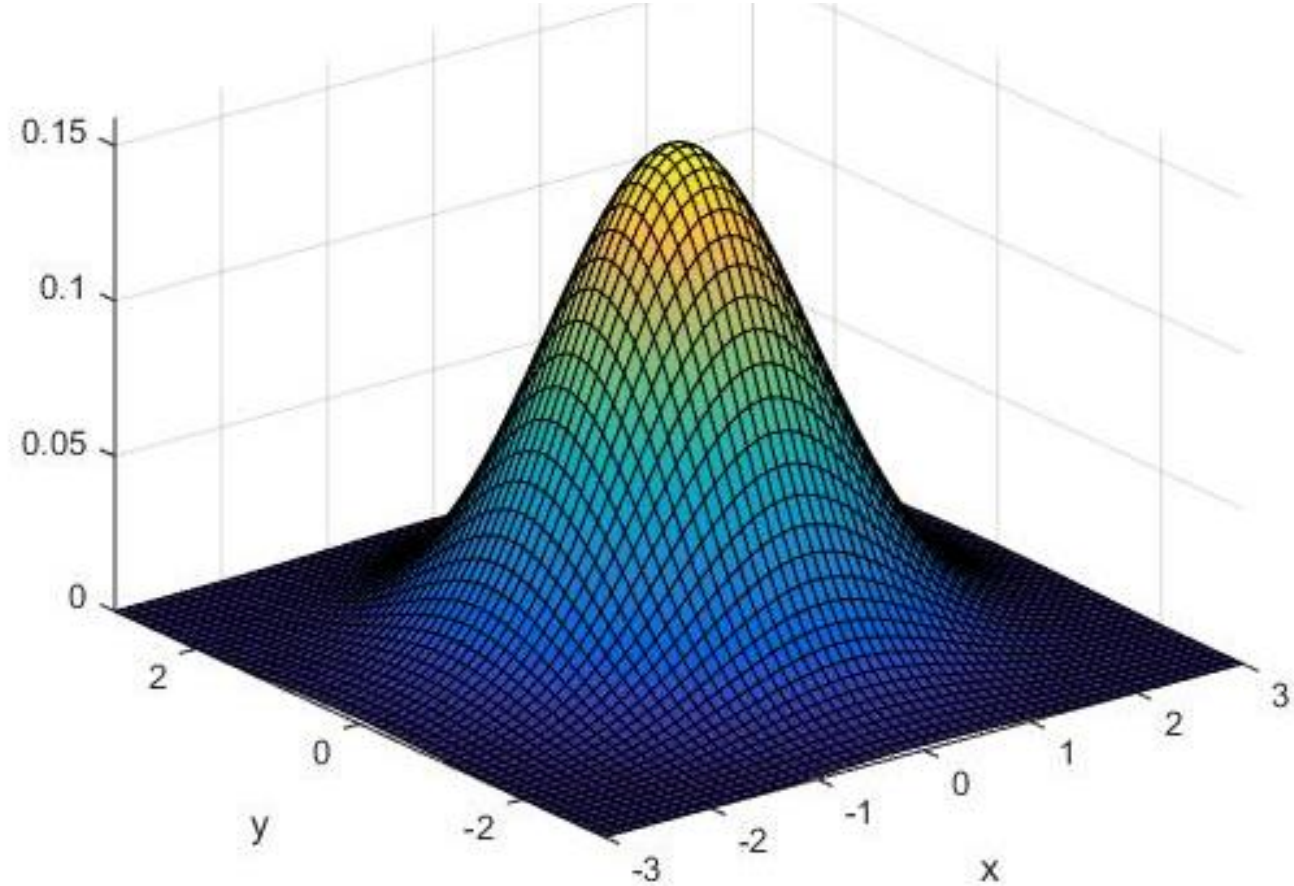


$$cov = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

رسم رویه با استفاده از دستور EZSURF

```
ezsurf('(2*pi)^(-1)*exp((-1/2)*(x^2+y^2))',[-3,3 -3,3])
```

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

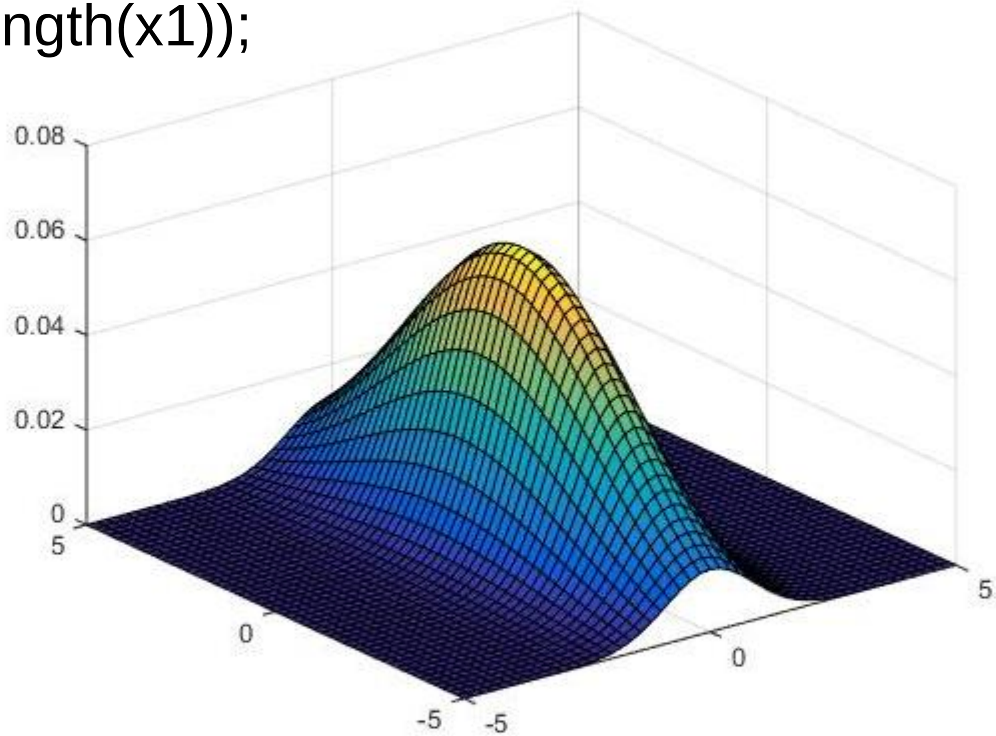


دستور MESHGRID

```
[X,Y] = meshgrid(1:3,10:14)
X =
     1     2     3
     1     2     3
     1     2     3
     1     2     3
     1     2     3
Y =
    10    10    10
    11    11    11
    12    12    12
    13    13    13
    14    14    14
```

محاسبه تابع چگالی نرمال چند متغیره با MVNPDF و رسم رویه با PLOT

```
x1 = -5:.2:5; x2 = -5:.2:5;
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
mu1 = [0 0];
Sigma1 = [.8 0; 0 8];
F1 = mvnpdf([X1(:) X2(:)],mu1,Sigma1);
F1 = reshape(F1,length(x2),length(x1));
%c = F1;
%c(:) = 255;
% surf(x1,x2,F1,c);
surf(x1,x2,F1);
```



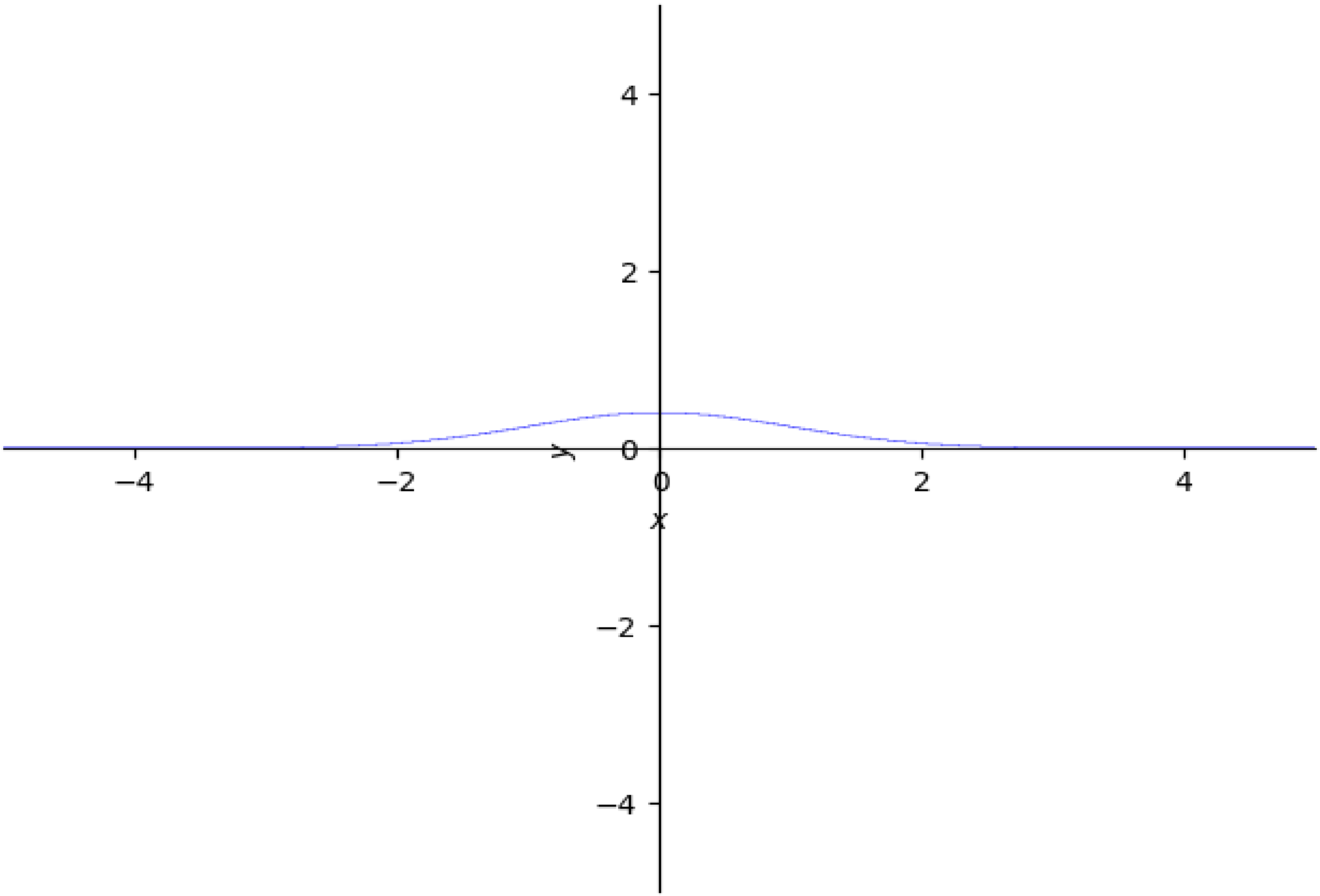
ابزار PYTHON در رسم نمودارها

رسم تابع با استفاده از SYMPY
(رسم با استفاده از معادله و سمبول)

```
#Python library for symbolic mathematics
from sympy.plotting import plot_implicit
from sympy.parsing.sympy_parser import parse_expr

s = 'y - (2 * 3.14)**(-0.5)*exp((-1/2)*(x**2))'
eqn = parse_expr(s)
plot_implicit(eqn)
```

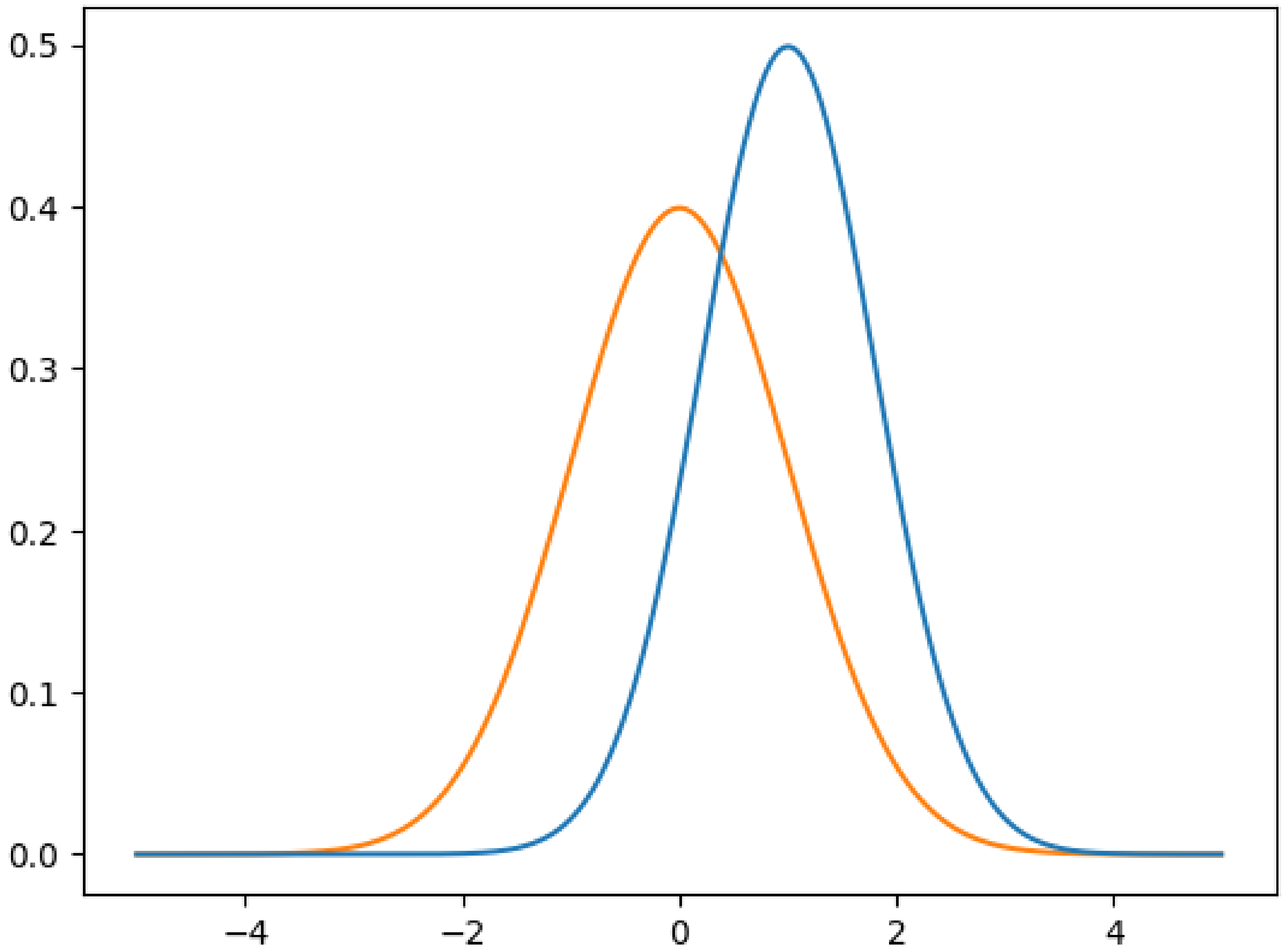
رسم تابع با استفاده از SYMPY



محاسبه تابع چگالی نرمال با NORM و رسم با PYPLOT

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
# Plot between -5 and 5 with .001 steps.
x_axis = np.arange(-5, 5, 0.01)
mean = 0
sd = 1
plt.plot(x_axis, norm.pdf(x_axis, mean, sd), 'C1')
mean = 1
sd = 0.8
plt.plot(x_axis, norm.pdf(x_axis, mean, sd))
plt.show()
```

محاسبه تابع چگالی نرمال با NORM و رسم با PYPLOT



تابع چگالی احتمال گوسی چند متغیره

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\ell}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) \right)$$

خط زیر به معنای بردار است.

$\Sigma = covariance\ matrix$

$\mu = mean\ vector$

$|.| = determinant$

$l = number\ of\ features\ (variables)$

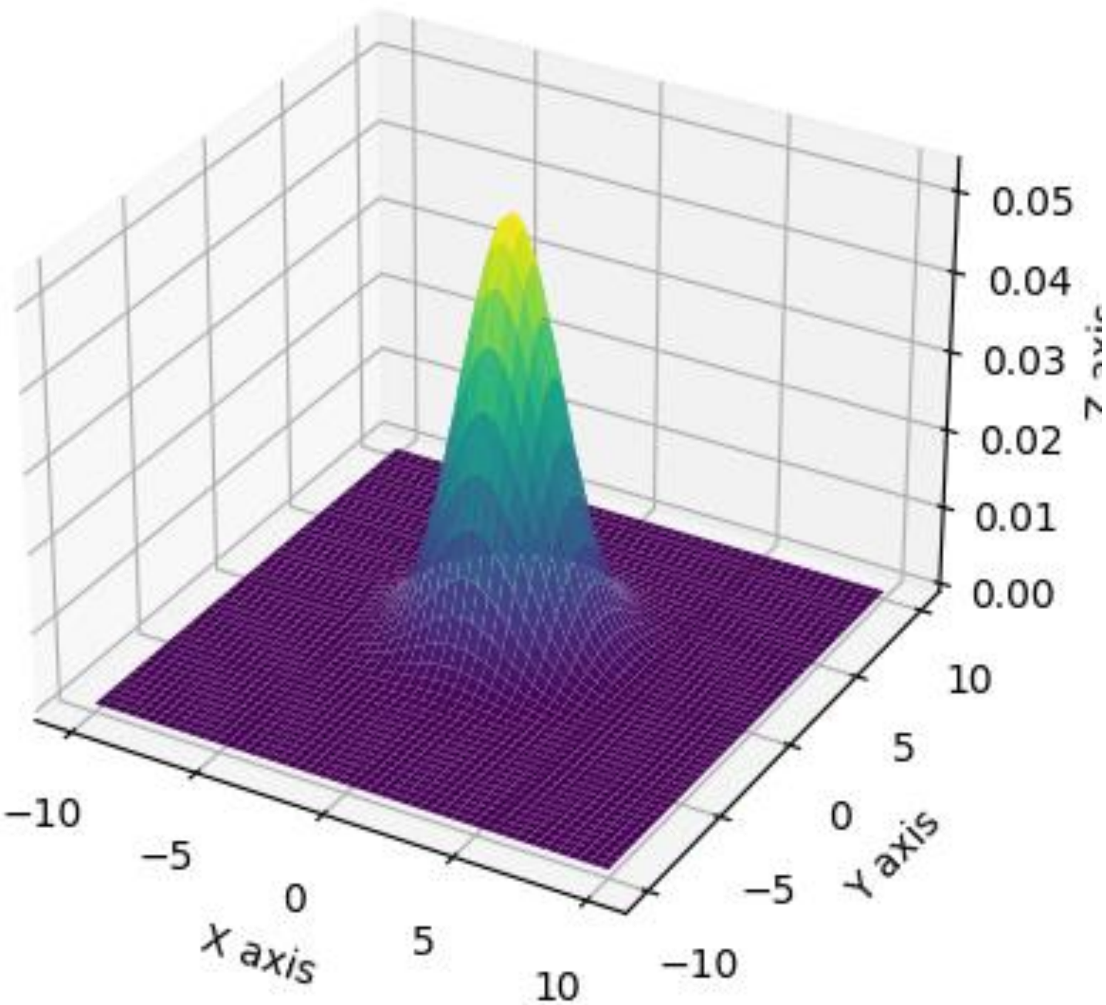
محاسبه تابع چگالی نرمال چند متغیره و رسم رویه

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import multivariate_normal
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
mu_x = 0  # mean of x # define parameters for x and y distributions
variance_x = 3  # variance of x
mu_y = 1  # mean of y
variance_y = 3  # variance of y
# define a grid for x and y values
x = np.linspace(-10, 10, 500)  # generate 500 points between -10 and 10 for x
y = np.linspace(-10, 10, 500)  # generate 500 points between -10 and 10 for y
X, Y = np.meshgrid(x, y)  # create a grid for (x,y) pairs
# create an empty array of the same shape as X to hold the (x, y) coordinates
pos = np.empty(X.shape + (2,))
# fill the pos array with the x and y coordinates
pos[:, :, 0] = X
pos[:, :, 1] = Y
# create a multivariate normal distribution using the defined parameters
rv = multivariate_normal([mu_x, mu_y], [[variance_x, 0], [0, variance_y]])
# create a new figure for 3D plot
# …
```

محاسبه تابع چگالی نرمال چند متغیره …

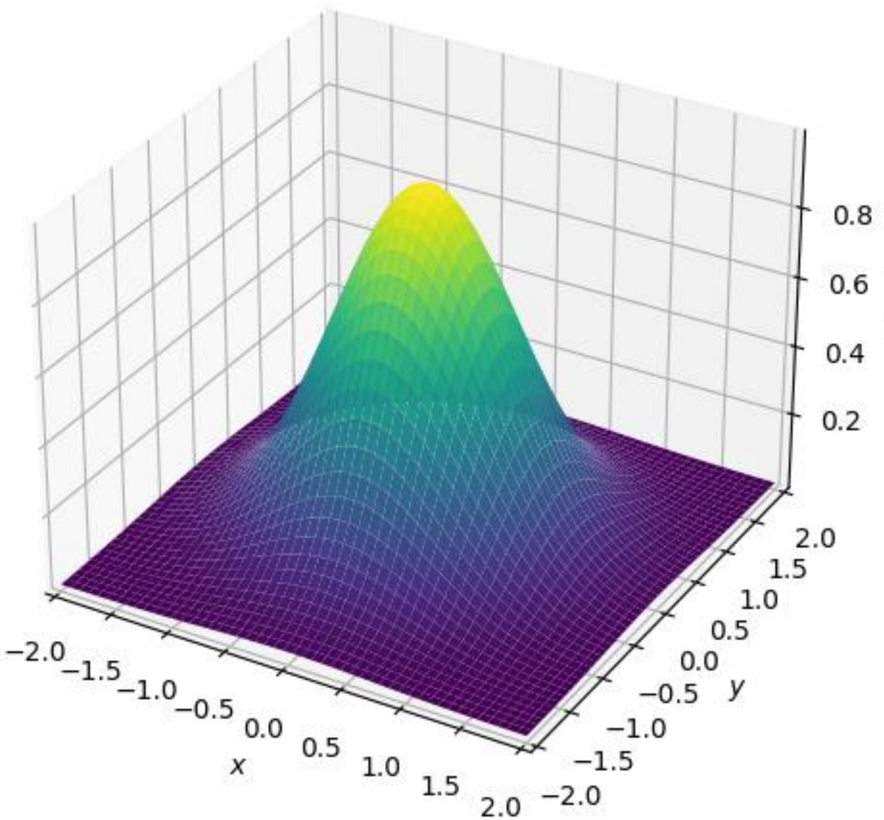
```
# …
# create a new figure for 3D plot
fig = plt.figure()
# add a 3D subplot to the figure
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
# create a 3D surface plot of the multivariate normal distribution
ax.plot_surface(X, Y, rv.pdf(pos), cmap='viridis', linewidth=0)
# set labels for the axes
ax.set_xlabel('X axis')
ax.set_ylabel('Y axis')
ax.set_zlabel('Z axis')
# display the 3D plot
plt.show()
```

محاسبه تابع چگالی نرمال چند متغیره ...



رسم تابع سه‌بعدی با استفاده از SYMPY (رسم با استفاده از معادله و سمبول)

```
from sympy.plotting import plot3d
plot3d(exp(-(x**2+y**2)), ('x', -2,2), ('y', -2,2))
```



ition