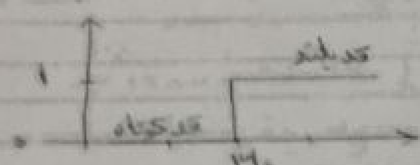
سیستم های فازی

★ سیستم های فازی توسط لطفی زاده تعریف گردیده است. در ابتدا گمان می شد که سیستم فازی همان نوعی احتمال است در صورتیکه چنین نیست.

به طور مثال فرض کنید بگوییم ۱۰٪ احتمال در این لیوان سم وجود دارد یعنی از هر ۱۰ تا لیوان یک لیوان سم دارد. این لیوان دو دفعه سم داشته می باشد ولی سیستم فازی می گوید به تابع عضویت سم در این لیوان ۱۰٪ است یعنی هر لیوان که بنوشیم داخلش ۱۰٪ سم وجود دارد. این تفاوت سیستم های فازی و احتمالات می باشد.

مثال: در سیستم های کلاسیک (منطق دو ارزشی) اگر بخواهیم نمودار قد بلند بودن را رسم کنیم به صورت زیر است.

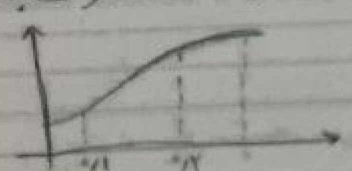


در این نمودار هر شخصی که قد آن کمتر از ۱۶۰cm باشد کوتاه قامت محسوب می گردد و هر کس بیشتر از ۱۶۰ باشد قد بلند در نظر گرفته می شود.

این در صورتی است که فرقی بین کسانی که قدشان متفاوت و بالای ۱۶۰ یا پایین ۱۶۰ می باشد، وجود ندارد.

★ در منطق فازی (System fuzzy) یک تابع عضویت (membership) تعریف می کنیم که هر مقداری بین صفر و یک را می تواند بگیرد.

به طور مثال (۰٫۸ ،علی) یعنی شخص علی دارای بلندی قد ۰٫۸ می باشد و نمودار آن به صورت زیر است.



در این نمودار اشخاص زیر ۱۶۰ و مساوی ۱۶۰ دارای مقدار عضویت صفر می باشند. یعنی اگر (۰ ،حسن) یعنی بلندی قد حسن دارای صفر است. یا قد بلند نمی باشد و قدش زیر ۱۶۰ است.

★ **مجموعه ی فازی:** به مجموعه ی $A = \{ x, \mu(x) \mid 0 \le \mu(x) \le 1 \}$ یک مجموعه ی فازی گویند. $\mu(x)$ یک تابع عضویت است که به آن مقدار عضویت متغیر x نیز می نامیم.

مثال:

$$A = \{ (x_1, 0.3), (x_2, 0.6), (x_3, 0.9) \}$$

مجموعه ی A می گوید که عضو x_1 به مقدار ۰٫۳ داخل مجموعه ی A می باشد. و همچنین عضوهای x_2 و x_3.

در این مثال عضوهایی که وجود ندارند تابع عضویت آن ها صفر هستند. مثلاً x_4 ،x_5

همین عضوها را در مجموعه‌های فازی ذکر نمی‌کنیم (هر عضو که در مجموعه نباشد، ارزش صفری شود)

* **مجموعه‌ی فازی نرمال:** یک مجموعه‌ی فازی را نرمال می‌گوییم اگر و تنها اگر دارای عضوی با درجه‌ی عضویت 1 باشد. به‌عنوان مثال مجموعه‌ی فازی A نرمال نمی‌باشد ولی مجموعه‌ی فازی A' نرمال است زیرا دارای عضو $(x_4, 1)$ می‌باشد.

$$A' = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.4), (x_3, 0.6), (x_4, 1)\}$$

تذکر: باید توجه داشت که کافی است فقط یک عضو دارای مقدار عضویت یک باشد تا نرمال شود. بنابراین مجموعه‌های کلاسیک، همواره نرمال هستند زیرا حتماً یک عضو یک دارند.

تذکر: برای نرمال‌سازی یک مجموعه‌ی فازی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

در داخل مجموعه‌ی فازی بزرگترین تابع عضویت (مقدار عضویت) را پیدا کرده، سپس تمام مقادیر عضویت‌ها را بر همان مقدار (ماکزیمم مقدار تابع عضویت) تقسیم می‌کنیم. مجموعه‌ی فازی حاصل نرمال است.

مثال: مجموعه‌ی فازی A نرمال نیست. برای نرمال‌سازی چون که ماکزیمم مقدار عضویت در مجموعه‌ی A مقدار 0.9 است. تمام مقادیر عضویت را بر 0.9 تقسیم می‌کنیم. یعنی

$$A = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.6), (x_3, 0.9)\}$$

$$A_N = \left\{\left(x_1, \frac{0.3}{0.9}\right), \left(x_2, \frac{0.6}{0.9}\right), \left(x_3, \overset{1}{\cancel{\frac{0.9}{0.9}}}\right)\right\}$$

چونکه در مجموعه‌ی A_N عضو $(x_3, 1)$ وجود دارد بنابراین نرمال است.

* **مجموعه‌ی فازی محدب:** مجموعه‌ی فازی را محدب گویند هرگاه برای هر دو عضو x_1 و x_2 داخل مجموعه داشته باشیم

$$\mu(x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}$$

به عبارت دیگر اگر x_1 و x_2 دو عضو دلخواه مجموعه‌ی فازی باشند و یک ترکیب خطی از این دو را بدست آوریم یعنی $x_3 = x_1 + (1-\lambda)x_2$ $(\lambda \in (0,1))$ و تابع عضویت آن x_3 را بدست آوریم اگر بزرگتر مساوی کمترین مقدار تابع‌های عضویت x_1 و x_2 بود به آن مجموعه محدب می‌گوییم

مثال: مجموعه‌ی فازی زیر محدب است

$$A = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.6), (x_3, 0.9)\}$$

که در آن $x_1 = 4$ ، $x_2 = 5$ و $x_3 = 8$ می‌باشد.

برای بررسی محدب بودن کافی است که ترکیب خطی بین دو عضو را بنویسیم. فرض کنید

x_1 و x_2 ($\mu(x_1)$ و $\mu(x_2)$) را در نظر می‌گیریم

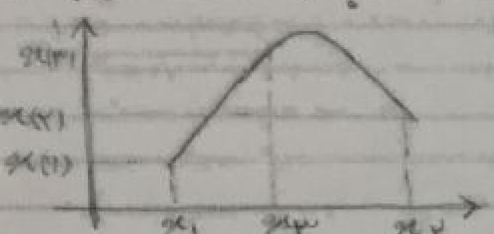
$x_4 = x_1 + (1-\lambda)x_2$ $\qquad \lambda = 0.5 \in (0,1)$

$x_4 = 4 + (1-0.5)8 = 4 + 4 = 8$

$\mu(8) = 0.9 \qquad \mu(x_1) = 0.3 \qquad \mu(x_3) = 0.9$

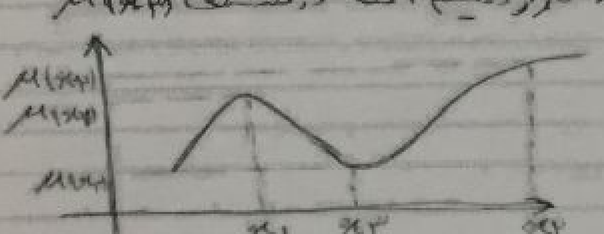
$\min(\mu(x_1), \mu(x_3)) = 0.4 \qquad 8 \geq 0.3$

مثال: در شکل مقابل هر ترکیب خطی از x_1 و x_2 بگیریم آنگاه این نقطه بین x_1 و x_2 می‌باشد که آن را x_3 می‌نامیم. مانند شکل مقابل تابع عضویت x_3 بزرگتر مساوی ترکیب هر عضو دیگر مانند x_1 و x_2 است. (تشکیل قله می‌دهد)



چون که هر ترکیب خطی از هر دو عضو دلخواه حتماً وسط آن دو عضو است یعنی بین دو عضو قرار دارد و دارای مجموعه مثال قبل اگر دوباره مثال x_3 را در نظر بگیریم به عنوان ترکیب خطی بین x_1 و x_2 آنگاه اگرچه $\mu(x_3)$ در شکل مقابل بیشتر از $\mu(x_1)$ ولی کمتر از $\mu(x_2)$ می‌باشد یعنی در هر حال این عضو ترکیب خطی، تابع عضویتش بزرگتر از مینیمم (min) دو عضو ترکیب خطی گرفته شده می‌باشد یعنی $\mu(x_4) \geq \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}$ است.

مثال: در شکل روبه‌رو اگر ترکیب خطی x_1 و x_2 را x_3 قرار دهیم آنگاه در شکل $\mu(x_3)$ بزرگتر از مساوی $\mu(x_1)$ و $\mu(x_2)$ نمی‌باشد. در نتیجه این مجموعه فازی محدب نیست.



برش آلفا (α - cut): به وسیله برش‌ها می‌توانیم مجموعه‌های فازی را به مجموعه‌های کلاسیک تبدیل کنیم. $\mu_\alpha = \{x \mid \mu(x) \geq \alpha\}$ که در آن $\alpha \in [0,1]$

نمونه مثال اگر $A = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.4), (x_3, 0.7)\}$ آنگاه $\mu_{0.6}$ و $\mu_{0.1}$ و $\mu_{0.8}$

$\mu_{0.6} = \{x \mid \mu(x) \geq 0.6\} = \{x_3\}$

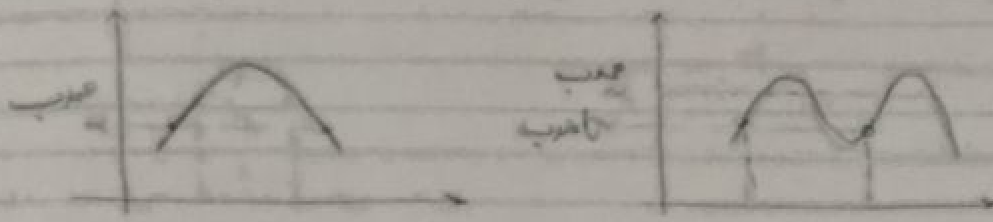
$\mu_{0.1} = \{x \mid \mu(x) \geq 0.1\} = \{x_1, x_2, x_3\}$

$\mu_{0.8} = \{x \mid \mu(x) \geq 0.8\} = \{\emptyset\}$

تذکر: هر مجموعه فازی محدب α-cut های آن نیز محدب است.

پس اگر مجموعه‌ای نامحدب باشد تمام α-cut های آن نامحدب نمی‌باشد مثلاً بعضی‌ها محدب باشند ولی اینجا رابطه را داریم که تمامی آلفا برش‌های یک مجموعه فازی

ناحدب، ناحدب نیست. یعنی در کل نمی‌توان گفت اگر مجموعه‌ی A ناحدب باشد آنگاه همه‌ی برش‌ها ناحدب است.



* زیرمجموعه در مجموعه‌های فازی

مجموعه‌ی فازی A را زیرمجموعه‌ی فازی B گوییم اگر و فقط اگر

مجموعه مرجع

$$\forall x \in U \qquad \mu_A(x) \le \mu_B(x) \iff A \subseteq B$$

مجموعه‌ی فازی A را مساوی مجموعه‌ی فازی B می‌گوییم اگر و فقط اگر

$$\forall x \in U \qquad A \subseteq B \quad \text{and} \quad B \subseteq A$$

اعمال بر مجموعه‌های فازی:

۱- اجتماع Union   ۲- اشتراک Template

مثال: اگر مجموعه‌های فازی A و B به صورت زیر باشند

$$A = \{(x_1, 0/2), (x_2, 0/3), (x_3, 0/5), (x_4, 0/7)\}$$

$$B = \{(x_1, 0/3), (x_2, 0/4), (x_5, 0/6), (x_6, 0/8)\}$$

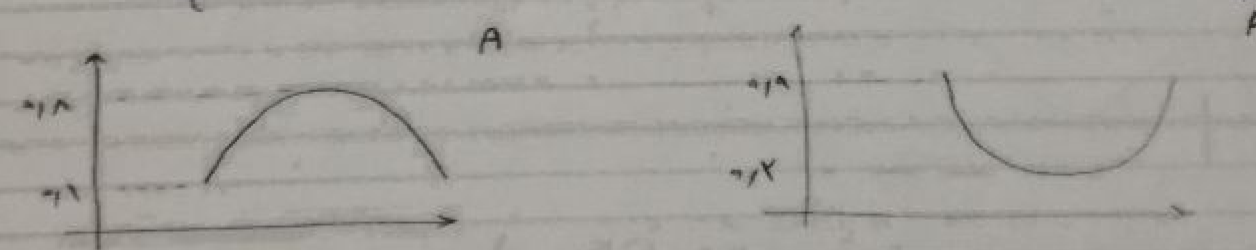
$$A \cap B = \{(x_1, 0/2), (x_2, 0/3)\}$$

از بین اشتراک‌ها، کم‌ترین انتخاب می‌شه

$$A \cup B = \{(x_1, 0/3), (x_2, 0/4), (x_3, 0/5) (x_4, 0/7) (x_5, 0/6) (x_6, 0/8)\}$$

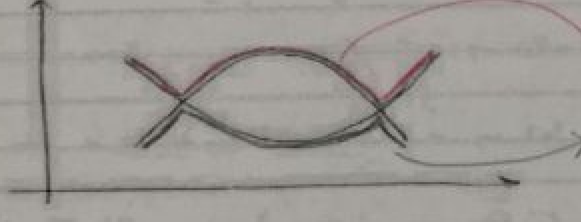
همه رو می‌نویسیم با بیش‌ترین مقدارها.

مثال:



$A \cup A'$

$A \cap A'$



اجتماع = max ∪

اشتراک = min ∩

بنابراین برخلاف مجموعه‌های کلاسیک که اجتماع هر مجموعه با متممش مجموعه‌ی مرجع می‌باشد و اشتراک هر مجموعه با متممش تهی می‌باشد. در مجموعه‌های فازی چنین نیست یعنی

$$A \cup A' \neq \phi \qquad A \cap A' \neq U$$

*

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

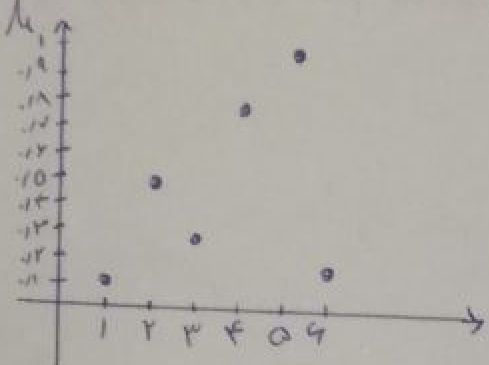
$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu(A(x))$$

: عناصری که درجه عضویت ۰ دارند را در مجموعه فازی وارد نمی کنیم.

مجموعه فازی singleton:

the fuzzy set $A=\{(x_1, \mu_A(x_1))\}$ where x_1 is the only value in $A \subset U$ and $\mu_A(x_1)\in[0,1]$ is called fuzzy singleton

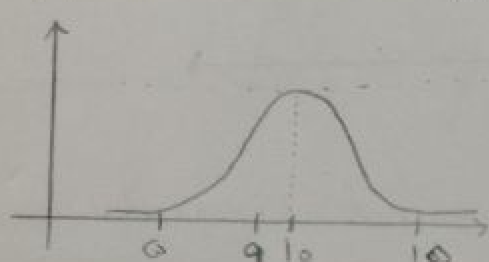
مثال) $A=\{(1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.3), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.2)\}$



مثال) مجموعه دوستان رامین: $A=\{(Ali, 0.1), (Hossein, 0.5), (iman, 0.3), (mahdi, 0.8), (Reza, 0.2)\}$

$$A=\left\{(x, \mu_{A_1}(x)) \mid x\in[0,15],\ \mu_{A_1}(x)=\frac{1}{1+(x-10)^2}\right\}$$

$\mu_{A_1}(x)$ یک تابع پیوسته است.



مثال) مجموعه افراد قد بلند:

$$\mu_T(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-170)^2}{450} & \text{for } 170\leq x\leq 185\\[2mm] 1-\dfrac{(200-x)^2}{450} & \text{for } 185\leq x\leq 200\end{cases}$$

عملیات روی مجموعه‌های فازی

Equality (تساوی) $A=B$ if and only if for every $x\in U$ $\mu_A(x)=\mu_B(x)$

Inclusion (زیرمجموعه - شامل شدن) A is included in fuzzy set B ($A\subseteq B$) if for every $x\in U$ $\mu_A(x)\leq\mu_B(x)$

proper subset (زیرمجموعه سره) A is called a proper subset of B ($A\subset B$) when A is a subset of B and $A\neq B$

$$\begin{cases}\mu_A(x)\leq\mu_B(x) & \text{for every } x\in U\\ \mu_A(x)<\mu_B(x) & \text{for at least one } x\in U\end{cases}$$

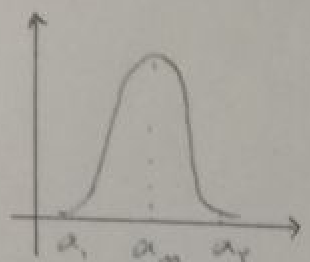
complementation (مکمل) A and A' are complement if $\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x)$

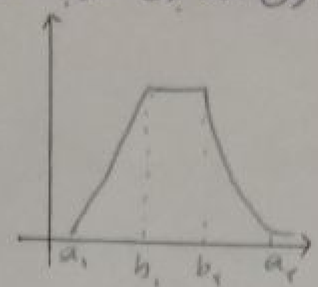
Intersection (اشتراک) $\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad , x \in U$

Union (اجتماع) $\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) , x \in U$

نکته: یک عدد فازی روی مجموعه اعداد R به عنوان یک مجموعه فازی convex , normalized تعریف می‌شود.

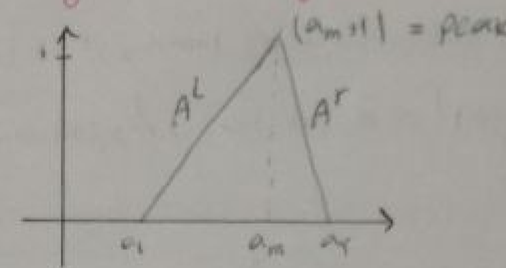
* مجموعه‌ها برای تصمیم گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند ولی اعداد برای کاربردهای مهندسی استفاده می‌شوند





عدد فازی مثلثی : triangular fuzzy numbers

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_m-a_1} & a_1 \le x \le a_m \\ \dfrac{x-a_2}{a_m-a_2} & a_m \le x \le a_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

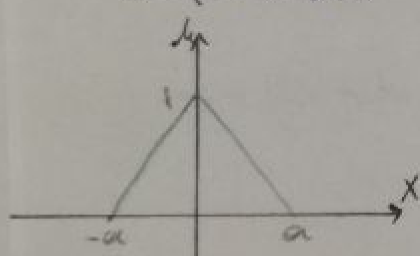


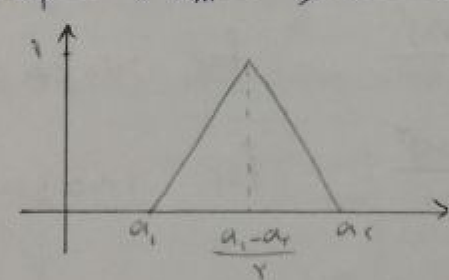
برای توصیف اعداد تقریبا به a_m : Central triangular fuzzy number

$$a_m = \frac{a_1+a_2}{2}$$

نکته: یک عدد فازی مرکزی نسبت به محور μ متقارن است اگر $a_m = 0$ و $a_2 = a$ و $a_1 = -a$:

$A = (-a, 0, a)$

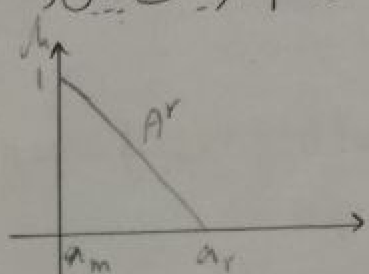




عدد فازی مرکزی (مثلثی)

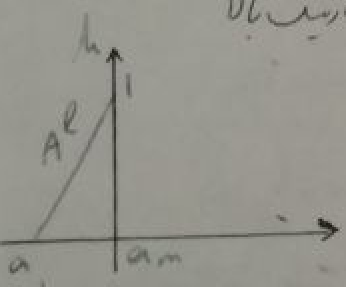
درصورتی که در مجموعه‌مان یک نقطه به عنوان محتمل ترین مقدار داشته باشیم (a_m) عدد فازی مثلثی داریم و به صورت $A = (a_1, a_m, a_2)$ نمایش می‌دهیم.

عدد مثلثی راست : برای توصیف "کوچک مثبت" (positive small) استفاده می‌شه ؛ سن کم ، سواد کم ، ریسک پایین و ....



$A^r = (a_m, a_m, a_2)$

عدد مثلثی چپ : برای توصیف "بزرگ مثبت" (positive large) استفاده می‌شود ؛ سن زیاد ، سود زیاد ، ریسک بالا



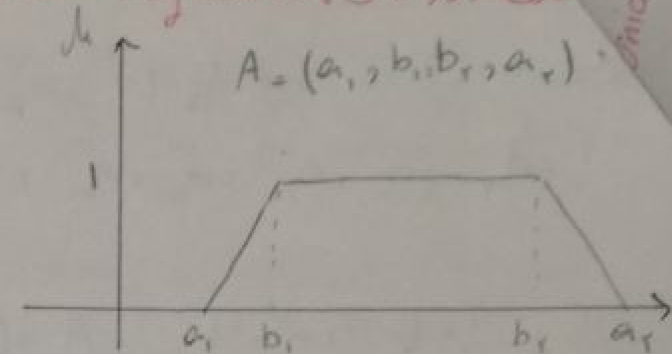
$A^l = (a_1, a_m, a_m)$

④

فازی ذوزنقه‌ای Trapezoidal fuzzy number: زمانی که محتمل ترین عدد، بین یک بازه باشه از این عدد استفاده می کنیم.

$A = (a_1, b_1, b_2, a_2)$

$$\tilde{A} \triangleq \mu_{A}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{b_1-a_1} & a_1 \leqslant x \leqslant b_1 \\ 1 & b_1 \leqslant x \leqslant b_2 \\ \dfrac{x-a_2}{b_2-a_2} & b_2 \leqslant x \leqslant a_2 \end{cases}$$

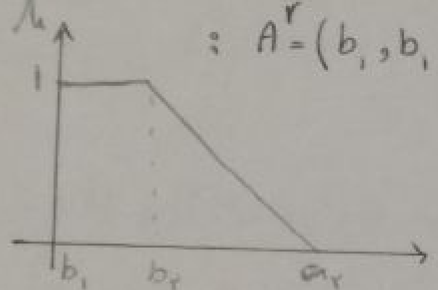


عدد فازی ذوزنقه‌ای مرکزی: مرکزش با فرمول $\frac{b_1+b_2}{2}$ مشخص می شه.

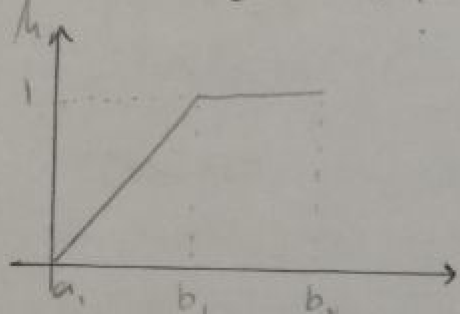
عدد فازی ذوزنقه‌ای راست: برای مفاهیم کوچک مثبت به کار می ره و فرمولش $A^r = (b_1, b_1, b_2, a_2)$:

مثلاً: افراد زیر ۲ سال (b_2) سنشان کم است

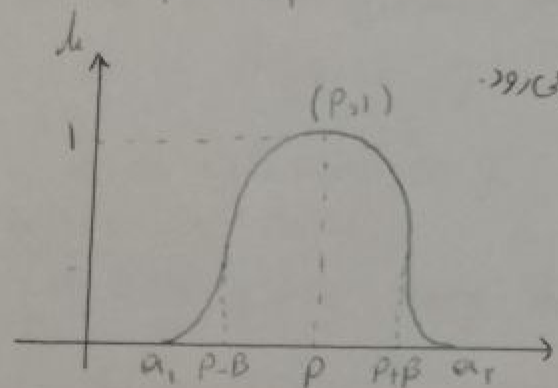
$\rightarrow (0, 0, b_2, a_2)$



عدد فازی ذوزنقه‌ای چپ: برای مفاهیم بزرگ مثبت به کار می ره و به صورت $A^l = (a_1, b_1, b_2, b_2)$ نمایش داده می شه:



اعداد فازی زنگی شکل (bell shape): برای وقتی که افت عدد نمایی باشه به کار می رود.



$$P = \frac{a_1+a_2}{2}$$

$$B \in (0, a_2 - P)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{2(P-B-a_1)^2} & \text{for} \quad a_1 \leqslant x \leqslant P-B \\ 1 - \dfrac{(x-P)^2}{2B^2} & \text{for} \quad P-B \leqslant x \leqslant P+B \\ \dfrac{(x-a_2)^2}{2(P+B-a_2)^2} & \text{for} \quad P+B \leqslant x \leqslant a_2 \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

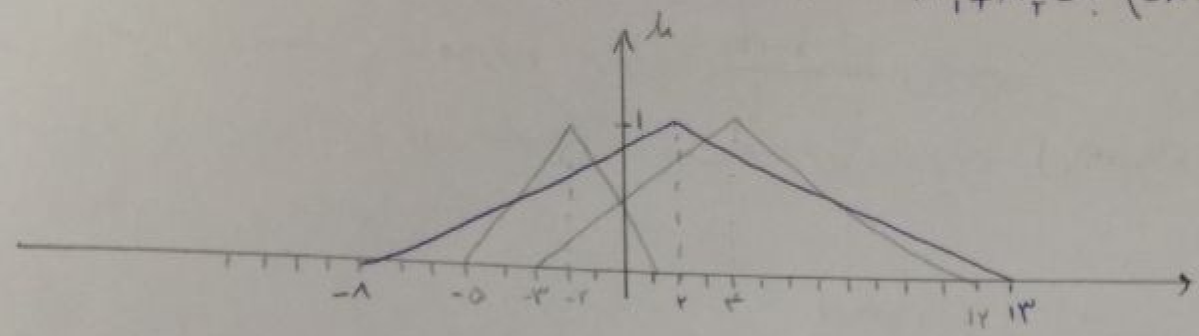
جمع اعداد فازی مثلثی

فرض کنید اعداد فازی مثلثی به صورت $A_1=(a_1^{(1)}, a_m^{(1)}, a_3^{(1)})$ و $A_2=(a_1^{(2)}, a_m^{(2)}, a_3^{(2)})$ تعریف شده باشند. جمع

برابر با : $A_1+A_2=(a_1^{(1)}+a_1^{(2)}, a_m^{(1)}+a_m^{(2)}, a_2^{(1)}+a_2^{(2)})$

* جمع دو عدد فازی مثلثی، یک عدد فازی مثلثی می شود.

(مثال) $A_1=(-5,-2,1)$ $A_2=(-3,4,12)$ $A_1+A_2=?\ (-8,2,13)$



میانگین اعداد فازی مثلثی

فرمول میانگین به صورت $\frac{a_1^{(1)}+a_1^{(2)}}{2}$ می شود و برای تمام درایه ها اعمال می شود.

ضرب اعداد فازی مثلثی در یک عدد حقیقی

به صورت ←

$$Ar=rA=(ra_1, ra_m, ra_2)$$

تقسیم اعداد فازی مثلثی بر یک عدد حقیقی

$$\frac{A}{r}=\left(\frac{a_1}{r}, \frac{a_m}{r}, \frac{a_2}{r}\right)$$

جمع اعداد فازی ذوزنقه‌ای

$$A_1+A_2=(a_1^{(1)}+a_1^{(2)}, b_1^{(1)}+b_1^{(2)}, b_2^{(1)}+b_2^{(2)}, a_2^{(1)}+a_2^{(2)})$$

تقسیم/ضرب اعداد فازی ذوزنقه‌ای در یک عدد حقیقی

$$Ar=(ra_1, rb_1, rb_2, ra_2) \qquad \frac{A}{r}=\left(\frac{a_1}{r}, \frac{b_1}{r}, \frac{b_2}{r}, \frac{a_2}{r}\right)$$

میانگین اعداد فازی مثلثی

$$A_i=(a_1^{(i)}, a_m^{(i)}, a_2^{(i)}) \quad i=1,2,\dots,n$$

$$A_{ave}=\frac{A_1+A_2+\dots+A_n}{n}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_m^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}\right)=(m_1, m_m, m_2)$$

میانگین اعداد فازی مثلثی وزن دار

$$A_{ave}^{w}=(m_1^w, m_m^w, m_2^w)=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} w_i a_m^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} w_i a_2^{(i)}\right)$$

⑤

...ن اعداد فازی ذوزنقه‌ای

$$A_i = (a_1^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, a_2^{(i)}) \qquad i = 1, \dots, n$$

$$A_{ave} = (m_1, m_{m_1}, m_{m_2}, m_2) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_1^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_2^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}\right)$$

میانگین فازی وزن‌دار در اعداد ذوزنقه‌ای

$$A^{w}_{ave} = (m_1^{w}, m_{m_1}^{w}, m_{m_2}^{w}, m_2^{w}) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} w_i b_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} w_i b_2^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} w_i a_2^{(i)}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

روابط فازی fuzzy Relations

در ضرب دکارتی $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ که A، B ، زیرمجموعه‌های از مجموعه‌های جهانی U_1 و U_2 هستند.
یک رابطه فازی روی $A \times B$ که با $R(x,y)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \{((x,y), \underbrace{\mu_R(x,y)}_{\downarrow}) \mid (x,y) \in A \times B, \mu_R(x,y) \in [0,1]\}$$

درجه‌ای که در آن x با y در ارتباط است

مثال) x is much greater than y
x is close to y
x is relevant to y
x and y are very far

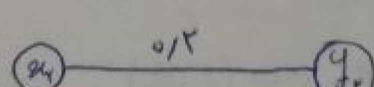
مثال عددی:

$R \triangleq$

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3
x_1	۰	۰/۱	۰/۲
x_2	۰/۷	۰/۲	۰/۳
x_3	۱	۰/۶	۰/۲

$\mu_A(x_2, y_3) = ۰/۳$

روش دیگر نمایش: نمایش گرافی:



عملیات بر روی روابط فازی

$$R_1 = \{(x,y), \mu_{R_1}(x,y)\}$$
$$R_2 = \{(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\}$$

Equality (تساوی) $R_1 = R_2$ if and only if for every pair $(x,y) \in A \times B$

$$\mu_{R_1}(x,y) = \mu_{R_2}(x,y)$$

if for every pair $(x,y) \in A \times B \rightarrow \mu_{R_1}(x,y) \leq \mu_{R_2}(x,y)$

then the Relation R_1 is included in R_2 $\quad R_1 \subseteq R_2$

(R_2 is larger than R_1) مثل اینکه رابطه‌ی خیلی بزرگتر، در برمی‌گیرد مساوی رابطه بزرگتر است

* if $R_1 \subseteq R_2$ and in addition if for at least on pair (x,y)

$$\mu_{R_1}(x,y) < \mu_{R_2}(x,y)$$

$$\forall (x,y) \in A \times B$$

Intersection (اشتراک) the intersection of R_1 and R_2 ($R_1 \cap R_2$) is defined by

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) = \min\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\}, \quad (x,y) \in A \times B$$

Union (اجتماع) the union of R_1 and R_2 ($R_1 \cup R_2$) is defined by

$$\mu_{R_1 \cup R_2} = \max\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R}(x,y)\}, \quad (x,y) \in A \times B$$

complementation (مکمل) the complement of a relation R denoted by $\overline{R}$

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y), \quad \forall (x,y) \in A \times B$$

مثال: نزدیکی و دوری مکمل یکدیگرند: عدد ۲۰ با درجه ۰/۸ نزدیک ۱۹ است و با درجه ۰/۲ از آن دور است.

منطق کلاسیک

یا همان منطق دو ارزشی است که با گزاره های درست و غلط مشخص می‌شود. صحیح با True و غلط با False ($T=1$, $F=0$) ارزش‌گذاری می‌شود.

$$p \vee q = \max(p,q) \qquad p \wedge q = \min(p,q) \qquad p \rightarrow q = \min(1, 1+q-p)$$

tatology: گزاره همیشه درست : $T = p \vee \overline{p}$: گزاره مرکبی که به ازای تمام مقادیر، همیشه درست است.

contradiction: گزاره همیشه غلط : $F = p \wedge \overline{p}$: گزاره مرکبی که به ازای تمام مقادیر، همیشه غلط است.

منطق چندارزشی: در برخی مواقع، می‌توانیم به جز ارزش های درست و غلط، ارزش های دیگری برای گزاره هایمان در نظر بگیریم

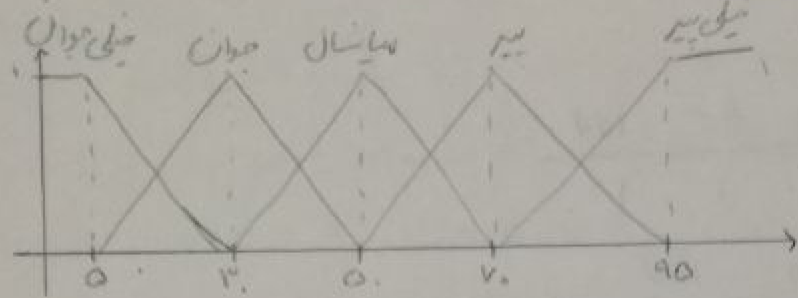
مثال: $T = (0, \frac{1}{2}, 1)$

غلط ، فازی ، درست

متغیرهای زبانی (Linguistic Variables) :

متغیرهایی که مقادیر آن‌ها کلمات یا جملاتی در زبان طبیعی هستند مانند: سن ← خیلی جوان - جوان - میانسال - پیر - خیلی پیر و ....
برچسب‌ها یا ترم‌های متغیر زبانی سن که به وسیله مجموعه فازی روی مجموعه مرجع $U \in R_+$ که دامنه عملیاتی است، نشان داده می‌شوند.

نکته: هر ترم به وسیله‌ی یک تابع عضویت مناسب تعریف می‌شود.



$$\mu_{\text{very young}}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{30 - x}{25} & 5 \le x \le 30 \end{cases}$$

منطق فازی

منطق فازی، مجموعه‌های فازی را با منطق بی‌نهایت ارزشی ترکیب می‌کند. به عبارت دیگر، با ترکیب مجموعه‌های فازی و رابطه‌های فازی درون سیستم منطق بی‌نهایت ارزشی، منطق فازی حاصل می‌شود. منطق فازی برای کمک به گزاره‌های مبهمی که در زبان طبیعی وجود دارند به کار می‌رود و پایه‌ای برای تحلیل‌های تصمیم‌گیری یا کنترلی می‌باشد.

$\mu_A(x) \rightarrow$ the truth value of the proposition $p \rightarrow (x \text{ is } A)$

$A = \{(x, \mu_A(x))\}$ $\quad B = \{(y, \mu_B(y))\}$

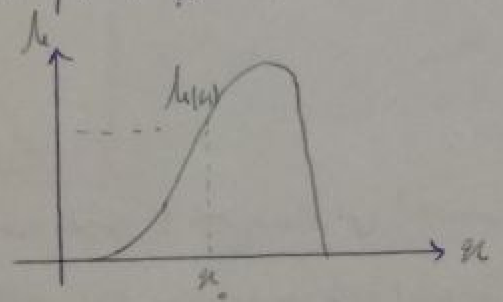
x is A → proposition in canonical form

x is mA → modified proposition → درواقع "خیلی" رو نشون می‌ده

if x is A then y is B → conditional proposition

(مثال) $p \triangleq (x \text{ is } \overset{\text{جوان}}{A})$ $\quad q \triangleq (y \text{ is } \overset{\text{قدبلند}}{B})$

$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in A \subset U_1\}$ $\quad B = \{(y, \mu_y(y)) \mid y \in B \subset U_2\}$



truth value: مقداری که $\mu_A(x)$ در آن نقطه دارد و بین $[0,1]$ است.

conjunction $p \wedge q$ → truth value (tr) of p, q is defined by

$$tr(p \wedge q) = \mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \quad (x, y) \in A \times B$$

disjunction $p \vee q$ → $tr(p \vee q) = \mu_{A \times B}(x, y) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y)), \quad (x, y) \in A \times B$

mion p→q → $tr(p \to q) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) , (x,y) \in A \times B$

مثال

مجموعه فازی برای امتیاز وام بالا

x (امتیاز وام)	0	20	40	60	80	100
$\mu(x)$ high	0	.12	.15	.18	.19	1

مجموعه فازی برای اعتبار خوب

x	0	20	40	60	80	100
$\mu(x)$ good	0	.12	.14	.17	1	1

x \ y	0 (0)	20 (.12)	40 (.14)	60 (.17)	80 (1)	100 (1) → good
0 (0)	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1
20 (.12)	0 .18	.12 1	.12 1	.12 1	.12 1	.12 1
40 (.15)	0 .15	.12 .17	.14 .19	.15 1	.15 1	.15 1
60 (.18)	0 .2	.12 .14	.14 .16	.17 .19	.18 1	.18 1
80 (.19)	0 .1	.12 .13	.14 .15	.17 .18	.19 1	.19 1
100 (1)	0 0	.12 .12	.14 .14	.17 .17	1 1	1 1

high

→ and

→ p → q

اصلاح کننده های زبانی (linguistic modifiers):

مثلاً اگر $\mu_A(x)$ را داشته باشیم، برای اندازه‌گیری very، not، fairy، very very از فرمول‌های پایین استفاده می‌کنیم:

$$\mu_{not\,A}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \mu_{fairy\,A}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$$

$$\mu_{very\,A}(x) = [\mu_A(x)]^2 \qquad \mu_{very\,very\,A}(x) = [\mu_A(x)]^4$$

تصمیم‌گیری گروهی

چند خبره نظرشون را راجع به مسئله ای [انتخاب بین گزینه ها] بیان می کنند. معمولاً هم نظرات متفاوتی دارند و وزن هرکدام از آن ها با هم متفاوت است. ما باید برای انتخاب یک گزینه از بین چندین گزینه، نظرات خبرگان را جمع کنیم. ما گزینه ها را براساس معیارهای مختلف می سنجیم.

تاپسیس کلاسیک

بیایید با یک مثال شروع کنیم!

۷

سه گزینه‌ی A_1 ، A_2 و A_3 داریم و براساس ۵ معیار، می‌خواهیم یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline A_1 & 3 & 5 & 9 & 24000 & 1 \\ A_2 & 1.2 & 7 & 5 & 25000 & 3 \\ A_3 & 1.5 & 9 & 3 & 32000 & 7 \end{array}$$

* یک سازمان می‌خواهد روی یک رودخانه، سدی بسازد، مناقصه‌ای برگزار شده و سه گزینه اعلام آمادگی کرده‌اند. A_1 تیمی از متخصصین خود وزارت خانه است. A_2 یک پیمان‌کار و یک شرکت داخلی است. A_3 یک پیمان‌کار شرکت خارجی است. هرکدام ۵ ویژگی دارند. x_1 هزینه اجرای طرح است [هرچه کم‌تر باشد بهتر است]. x_2 استحکام است [هرچه بیش‌تر باشد بهتر است]. x_3 وجهه ملی است. x_4 ظرفیت سد است. x_5 سختی اجرا است.

- در مرحله‌ی اول، باید مقدار‌ها را هم مقیاس کنیم. برای این کار، در هر ستون، اعداد را به توان ۲ می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم، سپس هرکدام از درایه‌ها را به این عدد √ تقسیم می‌کنیم:

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_i r_{ij}^2}}$$

$$n_{11} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1.2^2 + 1.5^2}} = 0.842$$

- در مرحله‌ی بعدی، اگر ارزش معیار‌ها یکسان نباشد، باید ماتریس نرمال شده را وزن‌دار کنیم. برای این کار، تمام اعداد ستون ۱ را در وزن معیار اول ضرب می‌کنیم. ستون‌های بعدی را به همین صورت ضرب می‌کنیم تا اثر وزن در ماتریس اعمال شود.

ماتریس نرمال شده:

$$\begin{bmatrix} 0.842 & 0.401 & 0.839 & 0.509 & 0.13 \\ 0.337 & 0.56 & 0.466 & 0.53 & 0.39 \\ 0.421 & 0.723 & 0.279 & 0.678 & 0.911 \end{bmatrix}$$

$$w = [\,0.179 \quad 0.062 \quad 0.211 \quad 0.017 \quad 0.531\,]$$

جمع وزن‌ها ۱ می‌شود.

ماتریس حاصل W:

$$\begin{bmatrix} 0.179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.062 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.211 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.531 \end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب W در ماتریس نرمال شده:

$$V = \begin{bmatrix} 0.151 & 0.025 & 0.177 & 0.009 & 0.069 \\ 0.06 & 0.035 & 0.098 & 0.009 & 0.207 \\ 0.075 & 0.045 & 0.059 & 0.011 & 0.484 \end{bmatrix} \rightarrow$$

ماتریس وزن‌دار نرمالایز شده

* تاپسیس مجموعه‌ای از بهترین مقادیر را تشکیل می‌دهد که اسمش ایده‌آل مثبت است و مجموعه دیگری از بدترین مقادیر مشاهده‌شده که توجه

ایده آل منفی نام دارد. گزینه ای برای ما بهتر است که از ایده آل مثبت کم‌ترین فاصله را داشته باشد و با ایده آل منفی بیش‌ترین فاصله را.

$A^+ = [\,۰/۰۶ \quad ۰/۰۴۵ \quad ۰/۱۷۷ \quad ۰/۰۱۱ \quad ۰/۴۸۴\,]$

هر چه کم‌تر باشه بهتره

$A^- = [\,۰/۱۵۱ \quad ۰/۰۲۵ \quad ۰/۰۵۹ \quad ۰/۰۰۹ \quad ۰/۰۶۹\,]$

- در مرحله‌ی بعد، باید فاصله هر کدام از گزینه‌ها را با ایده آل مثبت و ایده آل منفی اندازه بگیریم. برای این کار، [تا ایده آل مثبت] درایه‌های هر سطر را از ایده آل مثبت کم می‌کنیم و به توان ۲ می‌رسانیم، در نهایت تمام درایه‌ها را با هم جمع کرده و زیر رادیکال می‌بریم:

$$d_i^+ = \sqrt{(0.151-0.06)^2+(0.025-0.045)^2+(0.177-0.177)^2+(0.009-0.011)^2+(0.069-0.484)^2}$$

d_i^+	d_i^-
$d_1^+ = 0.425$	$d_1^- = 0.118$
$d_2^+ = 0.288$	$d_2^- = 0.17$
$d_3^+ = 0.12$	$d_3^- = 0.422$

- پس از محاسبه فاصله اقلیدسی، باید cl را برای همه گزینه‌ها حساب کنیم:

$$cl_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$$

هر چه مقدار cl بیشتر باشد، گزینه مورد نظر مناسب‌تر است.

$cl_1 = \dfrac{0.118}{0.118+0.425} = 0.217 \longrightarrow$ رتبه ۳

$cl_2 = \dfrac{0.17}{0.17+0.288} = 0.371 \longrightarrow$ رتبه ۲

$cl_3 = \dfrac{0.422}{0.422+0.12} = 0.778 \longrightarrow$ رتبه ۱

تاپسیس فازی

تاپسیس فازی با تاپسیس کلاسیک کمی تفاوت دارد. اولین تفاوت این است که ارزش گزاره‌ها قطعی نیست. با یک مثال شروع می‌کنیم:

۴ شرکت هواپیمایی داریم: Emirates، TG، Qatar و Bahrain. می‌خواهیم از بین این ۴ شرکت، بهترین را انتخاب کنیم. ۵ معیار داریم: ایمنی پرواز - رفتار خدمه - زمان‌بندی پرواز - امکانات رفاهی - سرعت. همه‌ی این‌ها معیار مثبت هستند.

در این مسئله عدم قطعیت داریم.

- اعداد نرمالیزه شده هستند.

	ایمنی پرواز	رفتار خدمه	زمانبندی پرواز	امکانات رفاهی	سرعت
Emirates	(۰/۶ ، ۰/۸۵ ، ۱)	(۰/۶ ، ۰/۸۵ ، ۱)	(۰/۳ ، ۰/۷۱ ، ۱)	(۰/۶ ، ۰/۹۲ ، ۱)	(۰/۶ ، ۰/۸۵ ، ۱)
TG	(۰/۳ ، ۰/۷۱ ، ۱)	(۰/۱ ، ۰/۴۵ ، ۰/۸)	(۰/۳ ، ۰/۷۱ ، ۱)	(۰/۳ ، ۰/۷۱ ، ۱)	(۰/۳ ، ۰/۵۱ ، ۰/۸)
Qatar	(۰/۳ ، ۰/۶۵ ، ۱)	(۰/۶ ، ۰/۸۵ ، ۱)	(۰/۳ ، ۰/۷۲ ، ۱)	(۰/۳ ، ۰/۷۹ ، ۱)	(۰/۳ ، ۰/۷۱ ، ۱)
Bahrain	(۰ ، ۰/۲۷۵ ، ۰/۶)	(۰/۱ ، ۰/۴۵ ، ۰/۸)	(۰/۱ ، ۰/۴۵ ، ۰/۸)	(۰ ، ۰/۲۷ ، ۰/۶)	(۰ ، ۰/۲۱ ، ۰/۶)

[illegible] هم قطعی [illegible]

۸

وزن	معیارها
$(0.3, 0.76, 1)$	ایمنی پرواز
$(0.1, 0.66, 1)$	رفتار خدمه
$(0.3, 0.81, 1)$	زمان بندی پرواز
$(0.1, 0.57, 1)$	امکانات رفاهی
$(0.3, 0.63, 1)$	سرعت

- در این مثال ماتریس ها نرمال هستند ولی اگر نبودند، همه درایه ها را باید بر حداکثر مقدار آن ستون تقسیم کنیم تا نرمالایز شوند.
- در مرحله بعد، درایه ها را در وزن ها ضرب می کنیم تا وزن دار شوند.

ماتریس نرمالایز شده‌ی وزن دار

سرعت	امکانات رفاهی	زمان بندی پرواز	رفتار خدمه	ایمنی پرواز	
$(0.18, 0.54, 1)$	$(0.06, 0.53, 1)$	$(0.09, 0.57, 1)$	$(0.06, 0.56, 1)$	$(0.18, 0.45, 1)$	Emirates
$(0.09, 0.32, 0.8)$	$(0.03, 0.41, 1)$	$(0.09, 0.57, 1)$	$(0.01, 0.30, 0.8)$	$(0.1, 0.54, 1)$	Tg
$(0.09, 0.45, 1)$	$(0.03, 0.45, 1)$	$(0.09, 0.58, 1)$	$(0.06, 0.56, 1)$	$(0.09, 0.5, 1)$	Qatar
$(0, 0.3, 0.6)$	$(0, 0.14, 0.6)$	$(0.03, 0.36, 0.8)$	$(0.01, 0.30, 0.8)$	$(0, 0.21, 0.6)$	bahrain

- در مرحله‌ی بعد، ایده آل مثبت و ایده آل منفی را بدست می آوریم. در هر ستون، بهترین (A و B و C) هر ستون را بدست می آوریم

$$A^+ = [(0.18, 0.45, 1), (0.06, 0.56, 1), (0.09, 0.58, 1), (1, 0.53, 0.06), (1, 0.54, 0.18)]$$

$$A^- = [(0, 0.21, 0.6), (0.01, 0.3, 0.8), (0.03, 0.36, 0.8), (0, 0.14, 0.6), (0, 0.13, 0.6)]$$

- در مرحله بعد، فاصله از ایده آل مثبت و فاصله از ایده آل منفی را بدست می آوریم. فاصله اقلیدسی در اعداد فازی مثلثی، با فرمول زیر محاسبه می شود:

$$d(m_1, m_2) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)\left[(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2\right]} \qquad \begin{cases} m_1=(a_1, b_1, c_1) \\ m_2=(a_2, b_2, c_2) \end{cases}$$

برای تک تک درایه ها، فاصله از ایده آل مثبت را حساب می کنیم (و ایده آل منفی)

ΣS^+	سرعت	امکانات رفاهی	زمان بندی پرواز	رفتار خدمه	ایمنی پرواز	
0.0058	0	0	0.0058	0	0	Emirates
0.5287	0.1765	0.0726	0.0058	0.1928	0.0799	Tg
0.2234	0.0722	0.0488	0	0	0.1024	Qatar
1.3897	0.3437	0.3179	0.1758	0.1938	0.3584	bahrain

ΣS^-	سرعت	امکانات رفاهی	زمان بندی پرواز	رفتار خدمه	ایمنی پرواز	
1.3856	0.3437	0.3179	0.1716	0.1938	0.3584	Emirates
0.9178	0.1673	0.2734	0.1716	0	0.3054	Tg
1.2446	0.2987	0.2874	0.17584	0.1938	0.2888	Qatar
0	0	0	0	0	0	bahrain

- در مرحله‌ی بعدی، باید cl را محاسبه کنیم؛

$$cl_E = \frac{1.3856}{1.3856 + 0.0058} = 0.9958 \qquad cl_Q = \frac{1.2446}{1.2446 + 0.2234} = 0.8478$$

$$cl_T = \frac{0.9178}{0.9178 + 0.5287} = 0.6345 \qquad cl_B = 0$$

- Emirates بیشترین امتیاز را دارد پس این شرکت انتخاب می‌شود.

روش AHP:

مبنای تصمیم‌گیری در این روش، بر پایه ماتریس مقایسات زوجی است. به عبارت دیگر، در این روش می‌گوییم این معیار نسبت به معیار دیگر چقدر مهم است؟ خبره گزینه‌ها را دو به دو مقایسه می‌کند و نمره‌ای می‌دهد. با یک مثال شروع می‌کنیم:

یک کمپانی مالی داریم که می‌خواهد سیستم تجارت الکترونیک را توسعه بدهد و به ۳ کمپانی که در فراخوان شرکت کردن، شانس برنده شدن بدهد.

معیارهایی که برای تصمیم‌گیری درباره انتخاب کمپانی برتر داریم عبارتند از: هزینه (C) - امنیت (S) - زمان انجام پروژه (P) - نگهداری (M)

برای مشخص کردن نسبت‌ها، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

	عدد
اگر معیار نسبت به معیار دیگر برتری نداشته باشد (یکسان)	۱
کمی برتر باشد	۳
خیلی برتر باشد	۵
خیلی زیاد برتر	۷
برتری کامل	۹

$$\begin{array}{c|cccc} & C & S & P & M \\ \hline C & 1 & C/S & C/P & C/M \\ S & S/C & 1 & S/P & S/M \\ P & P/C & P/S & 1 & P/M \\ M & M/C & M/S & M/P & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 1/5 & 1 & 1/5 & 2 \\ 1/3 & 5 & 1 & 7 \\ 1/9 & 1/2 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{ماتریس مقایسات زوجی}$$

- در مرحله‌ی بعد، گزینه‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

For C

$$\begin{array}{c|ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_1 & 1 & 1/7 & 3 \\ A_2 & 7 & 1 & 2 \\ A_3 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{array}$$

For S

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

For P

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

For M

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 2 \\ 5 & 1 & 1/5 \\ 1/2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(۹)

در مرحله بعدی، باید از روی ماتریس مقایسات زوجی، وزن معیارها را بدست آورید. برای این کار، تمام عناصر هر سطر را در همدیگر ضرب کرده و از حاصلشان ریشه چهارم می‌گیریم (یا به توان $\frac{1}{4}$) می‌رسانیم. برای نرمال کردن وزن‌ها، همه وزن را تقسیم بر مجموع می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} (1\times5\times3\times9)^{\frac14} = 3.41 \\ (1/5\times1/5\times2)^{\frac14} = 0.53 \\ (1/3\times5\times7)^{\frac14} = 1.85 \\ (1/9\times1/2\times1/7)^{\frac14} = 0.30 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.09 \\ 0.28 \\ 0.05 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} w_c \\ w_s \\ w_p \\ w_m \end{array}$$

$+ = 6.09$

همین کار را برای ماتریس های مقایسه گزینه‌ها انجام می‌دهیم و نتیجه ضرب ها را به صورت ستونی، در ماتریس K قرار می‌دهیم:
(چون ۳ تا هستند، ریشه سوم می‌گیریم)

$$C = \begin{cases} K_{11} = \sqrt[3]{1\times\frac17\times3} = 0.754 \\ K_{21} = \sqrt[3]{7\times1\times2} = 2.41 \\ K_{31} = \sqrt[3]{\frac13\times\frac12\times1} = 0.55 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} K_{12} = \sqrt[3]{1\times5\times\frac13} = 1.186 \\ K_{22} = \sqrt[3]{\frac15\times1\times\frac15} = 0.342 \\ K_{32} = \sqrt[3]{3\times5\times1} = 2.466 \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} K_{13} = \sqrt[3]{1\times3\times5} = 2.466 \\ K_{23} = \sqrt[3]{\frac13\times1\times7} = 1.326 \\ K_{33} = \sqrt[3]{\frac15\times\frac17\times1} = 0.306 \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} K_{14} = \sqrt[3]{1\times\frac15\times2} = 0.737 \\ K_{24} = \sqrt[3]{5\times1\times\frac15} = 1 \\ K_{34} = \sqrt[3]{\frac12\times5\times1} = 1.357 \end{cases}$$

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C & S & P & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.754 & 1.186 & 2.466 & 0.737 \\ 2.41 & 0.342 & 1.326 & 1 \\ \underbrace{0.55}_{+=3.714} & \underbrace{2.466}_{3.9} & 0.306 & 1.357 \end{bmatrix} \end{array}$$

- پس از بدست آوردن ماتریس K، آن را نرمالایز می‌کنیم؛ هر کدام از درایه‌ها را تقسیم بر جمع ستون اش می‌کنیم.

$$V = \begin{array}{c|cccc} & C & S & P & M \\ A_1 & 0.2 & 0.3 & 0.6 & 0.24 \\ A_2 & 0.65 & 0.09 & 0.32 & 0.32 \\ A_3 & 0.15 & 0.61 & 0.08 & 0.44 \end{array}$$

- حالا باید ماتریس V را در وزن نرمال شده ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.58\times0.2)+(0.09\times0.3)+(0.28\times0.6)+(0.05\times0.24) \\ (0.58\times0.65)+(0.09\times0.09)+(0.28\times0.32)+(0.05\times0.32) \\ (0.58\times0.15)+(0.09\times0.61)+(0.28\times0.08)+(0.05\times0.44) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3248 \\ 0.4908 \\ 0.1844 \end{bmatrix}$$

نمره بیشتر

روش AHP فازی

در این روش، ماتریس مقایسات زوجی، از اعداد فازی مثلثی پر شده است.

نکته: دو عدد فازی مثلثی $M_1=(l_1, m_1, u_1)$ و $M_2(l_2, m_2, u_2)$ را در نظر بگیرید. جمع، ضرب و معکوسشان به صورت است:

$M_1+M_2=(l_1+l_2, m_1+m_2, u_1+u_2)$ $\quad M_1^{-1}=\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{l_1}\right)$

$M_1\times M_2=(l_1l_2, m_1m_2, u_1u_2)$ $\quad M_2^{-1}=\left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{l_2}\right)$

تفسیر اعداد فازی مثلثی:

بسیار موافق	۵	(۴، ۵، ۶)
موافق - زیاد - برتری زیاد	۴	(۳، ۴، ۵)
متوسط	۳	(۲، ۳، ۴)
مخالف - کم ترجیح	۲	(۱، ۲، ۳)
بسیار مخالف - بسیار کم - هیچ ترجیحی ندارند	۱	(۱، ۱، ۱)

۰٫۲	(۰٫۱۶۶، ۰٫۲، ۰٫۲۵)
۰٫۲۵	(۰٫۲، ۰٫۲۵، ۰٫۳۳)
۰٫۳۳	(۰٫۲۵، ۰٫۳۳، ۰٫۵)
۰٫۵	(۰٫۳۳، ۰٫۵، ۱)
۱	(۱، ۱، ۱)

ماتریس اعداد فازی مثلثی (مقایسات زوجی)

	ایمنی پرواز C_1	رفتار خدمه C_2	زمان بندی پرواز C_3	امکانات رفاهی C_4	
C_1 ایمنی پرواز	(۱، ۱، ۱)	(۰٫۳۳، ۰٫۵، ۱)	(۱، ۲، ۳)	(۲، ۳، ۴)	(۴٫۳۳، ۶٫۵، ۹) Σ_1
C_2 رفتار خدمه	(۱، ۲، ۳)	(۱، ۱، ۱)	(۳، ۴، ۵)	(۱، ۲، ۳)	(۶، ۹، ۱۲) Σ_2
C_3 زمان بندی پرواز	(۰٫۳۳، ۰٫۵، ۱)	(۰٫۲، ۰٫۲۵، ۰٫۳۳)	(۱، ۱، ۱)	(۰٫۳۳، ۰٫۵، ۱)	(۱٫۸۷، ۳٫۲۵، ۲٫۳۳) Σ_3
C_4 امکانات رفاهی	(۰٫۲۵، ۰٫۳۳، ۰٫۵)	(۰٫۳۳، ۰٫۵، ۱)	(۱، ۲، ۳)	(۱، ۱، ۱)	(۲٫۵۸، ۳٫۸۳، ۵٫۵) Σ_4

- در مرحله‌ی بعد همه‌ی Σ ها را باهم جمع می‌کنیم:

$$\Sigma_{\text{کل}} = (14.78, 21.58, 29.83) \xrightarrow{\text{معکوس}} \Sigma^{-1} = \frac{(0.335, 0.463, 0.677)}{10}$$

- برای هر سطر یک s تعریف می‌کنیم. هرکدام از s ها از فرمول $s_i = \Sigma_i \times \Sigma^{-1}$ بدست می‌آیند.

$s_1 = (0.14, 0.3, 0.061)$ $\quad$ $s_2 = (0.2, 0.42, 0.81)$

$s_3 = (0.06, 0.1, 0.23)$ $\quad$ $s_4 = (0.09, 0.18, 0.31)$

s همان نمره‌ای است که هرکدام از معیارها گرفته‌اند. در مرحله بعد، وزن را براساس این نمره محاسبه می‌کنیم. برای این کار، متغیر V را تعریف می‌کنیم.

$$V(s_1 > s_2) = \frac{u_1 - l_2}{(u_1 - l_2) + (m_2 - m_1)}$$

نکته: $s_1 = (l_1, m_1, u_1)$ ، $s_2 = (l_2, m_2, u_2)$

* اگر زیر صفر شد، به صفر و اگر بالای یک شد به یک تبدیل می‌کنیم

$V(s_1 > s_2)$	$V(s_1 > s_3)$	$V(s_1 > s_4)$
۰٫۷۷۹	۱	۱

$V(s_2 > s_1)$	$V(s_2 > s_3)$	$V(s_2 > s_4)$
۱	۱	۱

رفتار خدمه مهم‌ترین عامل در برتری است.

$V(s_3 > s_1)$	$V(s_3 > s_2)$	$V(s_3 > s_4)$
۰٫۲۸۹	۰٫۰۷۲	۰٫۶۵۴

$V(s_4 > s_1)$	$V(s_4 > s_2)$	$V(s_4 > s_3)$
۰٫۶۴۷	۰٫۴۱۷	۱

... بین سه مولفه‌ی S ها min می‌گیریم تا وزن نرمال نشده بدست بیاید.

	ایمنی پرواز	رفتار خدمه	زمان بندی پرواز	امکانات رفاهی
وزن نرمال نشده	0.779	1	0.072	0.417
وزن نرمال شده	0.343	0.441	0.032	0.184

$\Sigma = 2.268$

حال نوبت ساختن مقایسات زوجی گزینه ها نسبت به معیار ایمنی پرواز است. [برای معیارهای دیگر را هم به همین صورت محاسبه می‌کنیم.

ایمنی پرواز	Emirates	TG	Qatar	Σ	
Emirates	(1,1,1)	(1,2,3)	(1,1,1)	(3,4,5)	$\to \Sigma_1$
TG	(0.33,0.5,1)	(1,1,1)	(0.33,0.5,1)	(1.67,2,3)	$\to \Sigma_2$
Qatar	(1,1,1)	(1,2,3)	(1,1,1)	(3,4,5)	$\to \Sigma_3$

$\Sigma_{کل} = (7.67, 10, 13) \longrightarrow \Sigma^{-1} = (\frac{0.77}{10}, \frac{0.1}{10}, \frac{0.13}{10})$

S_1	(0.23, 0.4, 0.65)
S_2	(0.13, 0.2, 0.39)
S_3	(0.23, 0.4, 0.65)

$V(S_1>S_2)$	$V(S_1>S_3)$	$V(S_2>S_1)$	$V(S_2>S_3)$	$V(S_3>S_1)$	$V(S_3>S_2)$
1	1	0.445269	0.44526902	1	1

ایمنی پرواز	Emirates	Tg	Qatar
وزن نرمال نشده	1	0.445	1
وزن نرمال شده	0.409	0.182	0.409

$\Sigma = 2.445$

رفتار خدمه	Emirates	Tg	Qatar	Σ
Emirates	(1,1,1)	(2,3,4)	(0.33,0.5,1)	(3.33, 4.5, 6)
Tg	(0.25,0.33,0.5)	(1,1,1)	(0.2,0.25,0.33)	(1.45, 1.58, 1.83)
Qatar	(1,2,3)	(3,4,5)	(1,1,1)	(5,7,9)

$\Sigma_{کل} = (7.92, 11.33, 15.5)$

$\Sigma^{-1} = (0.06, 0.09, 0.13)$

S_1	(0.26, 0.53, 1.01)
S_2	(0.15, 0.31, 0.63)
S_3	(0.10, 0.16, 0.32)

$V(S_1>S_2)$	$V(S_1>S_3)$	$V(S_2>S_1)$	$V(S_2>S_3)$	$V(S_3>S_1)$	$V(S_3>S_2)$
1	1	0.629	1	0.136	0.529

زمان بندی پرواز	Emirates	Tg	Qatar
وزن نرمال نشده	1	0.629	0.136
وزن نرمال شده	0.567	0.356	0.0769

امکانات رفاهی	Emirates	Tg	Qatar	Σ
Emirates	(۱, ۱, ۱)	(۱, ۱, ۱)	(۱, ۲, ۳)	(۳, ۴, ۵)
Tg	(۱, ۱, ۱)	(۱, ۱, ۱)	(۱, ۲, ۳)	(۳, ۴, ۵)
Qatar	(۰٫۳۳, ۰٫۵, ۱)	(۰٫۳۳, ۰٫۵, ۱)	(۱, ۱, ۱)	(۱٫۶۷, ۲, ۳)

$\Sigma = (7.67, 10, 13)$

$\Sigma^{-1} = (0.08, 0.1, 0.13)$

S_1	(۰٫۲۳, ۰٫۴, ۰٫۶۵)
S_2	(۰٫۲۳, ۰٫۴, ۰٫۶۵)
S_3	(۰٫۱۳, ۰٫۲, ۰٫۳۹)

$V(S_1>S_2)$	$V(S_1>S_3)$	$V(S_2>S_1)$	$V(S_2>S_3)$	$V(S_3>S_1)$	$V(S_3>S_2)$
۱	۱	۱	۱	۰٫۴۴۵	۰٫۴۴۵

امکانات رفاهی	Emirates	Tg	Qatar
وزن نرمال نشده	۱	۱	۰٫۴۴۵
وزن نرمال شده	۰٫۴۰۹	۰٫۴۰۹	۰٫۱۸۲
	w_E, c_4	w_T, c_4	w_Q, c_4

- در نهایت، جمع وزن دار نمرات را بدست می آوریم:

$$w_E = w_1 = (0.343 \times 0.409) + (0.441 \times 0.384) + (0.032 \times 0.567) + (0.184 \times 0.409) = 0.403$$

$$w_T = w_2 = (0.343 \times 0.182) + (0.441 \times 0) + (0.032 \times 0.356) + (0.184 \times 0.409) = 0.149$$

$$w_Q = w_3 = (0.343 \times 0.409) + (0.441 \times 0.616) + (0.032 \times 0.769) + (0.184 \times 0.182) = 0.448$$