Abstrakt:

Cieľom tohto projektu je štúdium dvoch kategórií ´relácií´, a to kategórie RelPosInv involutívnych posetov a monotónnych relácií a kategórie qRel, ktorá je podkategóriou kategórie von Neumannových algebier a Weaverových kvantových relácií. Obe kategórie sú príkladmi order-obohatených dagger-kompaktných kategórií s objektmi podobnými powersetom (táto druhá vlastnosť je dôvodom, prečo sa pracuje s podtriedou von Neumannových algebier namiesto všetkých von Neumannových algebier).

Plánujeme skúmať internalizáciu matematických štruktúr v týchto kategóriách (t. j. hľadať zovšeobecnenia obvyklých množinovo-teoretických štruktúr v rámci týchto kategórií). K internalizácii štruktúr v kategóriách qRel a RelPosInv nás motivuje skutočnosť, že internalizácia v kategórii qRel zodpovedá istej forme kvantizácie (t. j. hľadaniu nekomutatívnych zovšeobecnení matematických štruktúr s cieľom opísať javy v kvantovej fyzike), zatiaľ čo isté internalizované štruktúry v kategórii RelPosInv zodpovedajú štruktúram v kvantovej logike. Metódu kvantizácie internalizáciou v qRel nazývame diskrétnou kvantizáciou.

Metódy, ktoré mienime použiť, vychádzajú z kategoriálnej kvantovej mechaniky, ktorá popisuje kvantovú fyziku v termínoch dagger-kompaktných kategórií, a z teórie dvojrozmerných kategórií, čo je matematická teória o 2-kategóriách, bikategóriách a dvojitých kategóriách. Konkrétne, existujú 2-rozmerné kategoriálne zovšeobecnenia kategórie Rel množín a relácií, medzi ktoré patrí napríklad RelPosInv, ale nie qRel, takže jedným z našich cieľov je nájsť vhodný 2-rozmerný kategoriálny rámec na opis qRel. Okrem toho pomocou diskrétnej kvantizácie plánujeme kvantizovať špecifický pojem, a to pojem topologického priestoru. Tradičný prístup kvantovej topológie sa zaoberá C\*-algebrami, ktoré zovšeobecňujú lokálne kompaktné Hausdorffove priestory. My navrhujeme iný prístup, ktorý umožňuje kvantizáciu špecifických priestorov, ktoré nemusia byť nutne lokálne kompaktné alebo Hausdorffove.

Techniky vyvinuté v tomto návrhu budeme aplikovať na kvantovú teóriu informácie a na denotačnú sémantiku kvantových programovacích jazykov. V prvom prípade plánujeme opísať funkcie vyššieho rádu medzi kvantovými kanálmi v rámci diskrétnej kvantizácie. V prípade denotačnej sémantiky kvantových programovacích jazykov chceme ukázať, že qRel rovnako ako Rel je diferenciálna kategória, t. j. kategória, ktorú možno použiť ako denotačný model pre diferenciálne programovacie jazyky, ktoré sa v súčasnosti používajú na hlboké učenie. Ak je qRel skutočne diferenciálna kategória, otvorilo by to dvere k denotačnej sémantike kvantových diferenciálnych programovacích jazykov. Napokon dúfame, že sa nám podarí nájsť monádu pre pravdepodobnostné kvantové výpočty na kategórii qCPO, ktorá bola predtým skonštruovaná metódami diskrétnej kvantizácie ako kvantové zovšeobecnenie kategórie CPO úplných parciálnych usporiadaní, ktorá sa používa na konštrukciu denotačných modelov pre programovacie jazyky s rekurziou.

Abstract:

In this proposal, we aim to study two categories of `relations', namely the category RelPosInv of involutive posets and monotone relations, and the category qRel, which is a subcategory of the category of von Neumann algebras and Weaver's quantum relations. Both categories are examples of order-enriched dagger-compact categories with powerset-like objects (the latter property is the reason to work with a subclass of von Neumann algebras instead of all von Neumann algebras).   
   
We plan to investigate the internalization of mathematical structures in these categories (i.e., finding generalizations of ordinary, set-theoretic structures within these categories). We are motivated to internalize structures in the categories qRel and RelPosInv by the fact that internalization in qRel corresponds with a form of quantization (i.e., finding noncommutative generalizations of mathematical structures in order to describe phenomena in quantum physics), whereas certain internal structures in RelPosInv correspond with structures in quantum logic. We call the method of quantization by internalization in qRel *discrete quantization*.  
   
The methods we intend to use stem from Categorical Quantum Mechanics, the program of describing quantum physics in terms of dagger-compact categories, and from 2-dimensional category theory, the mathematical theory about 2-categories, bicategories and double categories. In particular, there are 2-dimensional categorical generalizations of the category Rel of sets and relations which include RelPosInv as an example, but not qRel, so one of our goals is to find the right 2-dimensional categorical framework to describe qRel. Furthermore, using discrete quantization, we plan to quantize a specific concept, namely that of a topological space. The traditional approach of quantum topology concerns C\*-algebras, which generalize locally compact Hausdorff spaces. We propose a different approach that allows for the quantization of specific spaces that are not necessarily locally compact or Hausdorff.

Finally, we aim to apply the techniques developed in this proposal to quantum information theory and to the denotational semantics of quantum programming languages. For the former, we plan to describe higher-order functions between quantum channels in the framework of discrete quantization. For the denotational semantics of quantum programming languages, we aim to show that qRel just like Rel is a *differential* category, i.e., a category that can be used as a denotational model for differential programming languages, which are currently used for deep learning. If qRel is indeed a differential category, that would open doors to the denotational semantics of quantum differential programming languages. Finally, we hope to find a monad for probabilistic quantum computation on the category qCPO, which previously was constructed using the methods of discrete quantization as a quantum generalization of the category CPO of complete partial orders, which is used for the construction of denotational models for programming languages with recursion.