Adam Jenča
Tercia A
SŠ Novohradská, Bratislava
Príklad 1

Zapíšme si zadanie ako rovnice:
Prvá:
$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}}{2}=\frac{a+b+c}{3}$$
Druhá:
$$\frac{a+c}{2}=2022$$
Začnime s prvou rovnicou. Najprv si zjednodušíme zložený zlomok na ľavej strane.
$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}}{2}=\frac{\frac{a+2b+c}{2}}{2}=\frac{a+2b+c}{4}$$
Teraz upravíme rovnicu už zo zjednodušeným zlomkom.
$$\frac{a+2b+c}{4}=\frac{a+b+c}{3}$$
Dáme si zlomky na spoločného menovateľa:
$$\frac{3a+6b+3c}{12}=\frac{4a+4b+4c}{12}$$
Vynásobíme obidve strany 12:
$$3a+6b+3c=4a+4b+4c$$
Odčítame od oboch strán $3a+4b+3c$
$$2b=a+c$$
Podelíme obe strany 2
$$b=\frac{a+c}{2}$$
Z druhej rovnice vieme, že
$$b=\frac{a+c}{2}=2022$$
Teda:
$$a+b+c=b+(a+c)=b+2b=3b=3\cdot 2022=6066$$

Adam Jenča
Tercia A
SŠ Novohradská, Bratislava
Príklad Z9-I-1

Každý člen prvej postupnosti a_n vyzerá takto:

$a_n = 2023 + nd$, kde d je diferencia prvej postupnosti.
V druhej je to podobne:

$b_n = 2023 + ne$, kde e je diferencia druhej postupnosti.
Teraz od oboch postupností odčítame 2023, aby sa začínali v nule, na výsledku to nič nezmení.

Označme si postupnosť spoločných čísel c. Pre každý člen postupnosti c_i platí že

$$c_i = kd = ne; \{k, n\} \subseteq \mathbb{N}$$

c je aritmetická postupnosť, pretože keď sa dostaneme k prvému členu, a_k a b_n sú rovnaké, a teda môžeme postupnosti upraviť odčítaním a_k zase na nuly.
Označme si jej diferenciu f
c má 26 členov medzi 0 a 1000.
Keď nerátame nulu, má 25 členov od 1 po 1000.
f bude teda $1000 : 25 = 40$. Označme si koeficient d pri prvom člene c k_0 a v tej istej situácii koeficient e n_0
Prvý prvok c okrem nuly bude

$$c_1 = 1f = d.k_0 = e.n_0 = 40$$

Vieme, že d a e sú v pomere $5 : 2$, teda $\frac{d}{e} = \frac{5}{2}$.
To si upravíme cez $5d = 2e$ na $e = \frac{5}{2}d$, Vieme preto, že

$$d.k_0 = \frac{5d}{2}n_0 = 40$$

. Vynásobíme si všetko dvomi.

$$2d.k_0 = 5d.n_0 = 80$$

Vyberieme si odtiaľ rovnicu $2d.k_0 = 5d.n_0$. Teraz podelíme obe strany d:

$$2k_0 = 5n_0$$

Keďže $k_0 \in \mathbb{N}$ aj $n_0 \in \mathbb{N}$, môžeme povedať, že

$$2k_0 = 5n_0 = 10x; x \in \mathbb{N}$$

Pretože 40 je najmenšie spoločné číslo, musia k_0 a n_0 byť najmenšie čísla spĺňajúce rovnicu vyššie.
Najmenšie možné $x = 1$. Teda $2k_0 = 5n_0 = 10$. Preto $k_0 = 5$ a $n_0 = 2$. Vieme, že

$$d.k_0 = 5d = 40$$

Preto

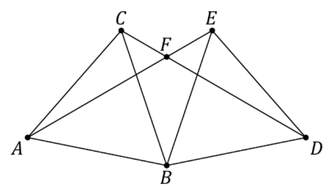
$$d = \frac{40}{5} = \mathbf{8}$$

a

$$e = \frac{5}{2}d = \frac{5}{2}.8 = \frac{40}{2} = \mathbf{20}$$

Rozdiel diferencií $\Delta_d = e - d = \mathbf{12}$.

Adam Jenča
Tercia A
SŠ Novohradská, Bratislava
Príklad Z9-I-2



Keďže $\triangle ABC$ a $\triangle BDE$ sú zhodné rovnostranné trojuholníky, vieme, že $\triangle ABE$ a $\triangle CBD$ sú zhodné rovnoramenné trojuholníky, a preto aj ich niektoré uhly majú rovnakú veľkosť($|\angle ABE| = |\angle CBD|$, $|\angle BAE| = |\angle AEB| = |\angle BCD| = |\angle BDC|$)
Označme si uhol $\angle ABD$ α.
Vypočítajme si veľkosti uhlov $\angle ABE$ a $\angle CBD$.

$$\beta = |\angle ABE| = |\angle CBD| = \alpha - 60$$

Teraz si vypočítajme veľkosti uhlov pri základni $\triangle ABE$ a $\triangle CBD$

$$\gamma = |\angle BAE| = |\angle AEB| = |\angle BCD| = |\angle BDC| = \frac{180 - \beta}{2}$$

, pretože $\triangle ABE$ a $\triangle CBD$ sú rovnoramenné a súčet veľkostí uhlov v trojuholníku je 180°
Odvoďme si veľkosť uhla $\angle AFD$ zo súčtu uhlov $\diamond ABFD$, ktorý je pri štvoruholníkoch 360°.
$|\angle AFD| = 360 - \alpha - 2\gamma = 360 - \alpha - 2.\frac{180-\beta}{2} = 360 - \alpha(180 - \beta) = 360 - \alpha - [180 - (\alpha - 60)] = 360 - \alpha - 180 + \alpha - 60 = \mathbf{120}°$
Veľkosť uhla $\angle$AFD je 120°

Adam Jenča
Tercia A
SŠ Novohradská, Bratislava
Príklad Z9-I-3

Najprv skúsme prvý prípad, v ktorom chceme dostať päticu trojok.
Prvé číslo (3) nemusíme meniť.
Druhé (8) najprv podelíme 2 a potom odčítame 1. Kúzelníka 1 a 2 sme použili raz, takže nám pri oboch zostávajú ešte 4 použitia.
Od tretieho (9) najprv odčítame 1 a potom postupujeme rovnako ako pri osmičke. Kúzelníka 1 sme teraz použili celkom 3-krát (zostáva 2) a kúzelníka 2 2-krát(zostáva 3).
Štvrté (2) vynásobíme tromi a podelíme dvomi. Kúzelníka 1 sme použili spolu 3-krát (zost. 2), kúzelníka 2 rovnako, a kúzelníka 3 raz (zost. 4).
Od piateho (4) iba odčítame 1, na čo nám zvyšné použitia kúzelníka 1 bohate postačia.
Prvý prípad je teda možný
Pri druhom prípade máme dostať číslo 5. Toto číslo sa dá dostať dvomi spôsobmi: odčítaním 1 od 6 , a podelením 10 dvomi. Číslo desať ale nemáme ako dostať, pretože je najvyššie možné, a preto jediný spôsob je zväčšiť nejaké číslo. To sa ale nedá, pretože čísla môžeme zväčšovať iba ich vynásobením tromi, a 10 nie je deliteľné 3.
Zostáva nám už iba odčítanie 1 od 6, ktoré musíme vykonať pri každom čísle.
Keďže čísel, ktoré máme zmeniť, je 5, musíme odčítanie 1(kúz. č. 1) použiť 5-krát.
Z toho vyplýva, že ho pri žiadnej zmene čísla nemôžeme použiť viac než raz.
To ale nesedí, pretože pri čísle 9 musíme použiť odčítanie aspoň 2-krát – raz ako prvú operáciu, pretože nič iné nemôžeme na 9 použiť, a raz pri zmene 6 na 5.
Druhý prípad je z toho dôvodu nemožný

Adam Jenča
Tercia A
SŠ Novohradská, Bratislava
Príklad Z9-I-4

Aby sme dostali najmenší možný výsledok, musia a aj b byť v tvare $7^x.11^y$, pretože konštantné členy v rovnici sú iba 7 a 11, a treba upraviť ich exponenty na rovnaké. Skúsme zistiť, aké najmenšie môžu x a y byť pre a.

Keďže $7a^3 = 11b^5$, vieme, že $3x + 1$ musí byť deliteľné piatimi, pretože $7.(7^{3x})$ musí byť piata mocnina.
Toto platí pre najmenšie $x = 3$,kde $(3x + 1 = 10)$.
Vieme aj, že $3y - 1$ musí byť deliteľné piatimi, pretože $\frac{11^{3y}}{11}$ musí byť piata mocnina.
Najmenšie také y je 2,kde $(3y - 1 = 5)$.
a je teda rovné $\mathbf{7^3.11^2 = 41503}$.
Teraz zistíme to isté pre b. Vieme, že v tomto prípade musí byť $5x - 1$ deliteľné 3 , pretože $\frac{11^{5x}}{11}$ musí byť tretia mocnina.
Najmenšie také x je 2, kde $(5x - 1 = 9)$.
$5y + 1$ musí byť tiež deliteľné tromi, pretože 11.11^{5x} musí byť tretia mocnina.
Najmenšie také y je 1, kde $(5y + 1 = 6)$
b je teda rovné $\mathbf{7^2.11 = 539}$
Teraz si to overíme. Na ľavej strane máme $7a^3 = 7.(7^3.11^2)^3 = 7.7^9.11^6 = 7^{10}.11^6$
Na pravej strane je $11b^5 = 11.(11.7^2)^5 = 11.11^5.7^{10} = 7^{10}.11^6$
Ako vidno, obe strany sú rovnaké. Naše riešenie je najmenšie, pretože akékoľvek nižšie by nemohli zmeniť exponenty na rovnaké.

Adam Jenča
Tercia A
SŠ Novohradská, Bratislava
Príklad Z9-I-5

Označme si sny x,ilúzie y, šlofíky a a nočné mory b. Podľa prvého cestovateľa vieme určiť,že

$$4x = 7y + 2a + b$$

Keďže nás a ani b nezaujímajú, môžeme ich z tejto rovnice odstrániť tak, že si $2a + b$ označíme c, čo nám uľahčí ďalší postup. Rovnica teraz vyzerá takto:

$$4x = 7y + c$$

Teraz pripočítame k obom stranám $-c - 4x$, a dostaneme

$$-c = 7y - 4x$$

Po vynásobení oboch strán rovnice -1 nám vyjde

$$c = 4x - 7y$$

Vezmime si druhú rovnicu:

$$7x = 4y + 4a + 2b$$

Podobným trikom ako minule sa zbavíme a a b

$$7x = 4y + 2c$$

Teraz si za c dosadíme $4x - 7y$, a vyjde nám

$$7x = 4y + 8x - 14y$$

z čoho úpravou pravej strany dostaneme

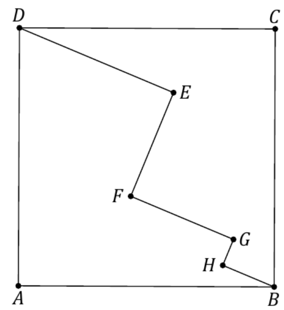
$$7x = 8x - 10y$$

Teraz k obom stranám pripočítame $10y - 7x$, a tu je výsledok:

$$10y = x$$

Za jeden sen možno teda kúpiť 10 ilúzií.

Adam Jenča
Tercia A
SŠ Novohradská, Bratislava
Príklad Z9-I-6



Keďže sú uhly DEF, EFG, FGH a GHB pravé, môžeme lomenú čiaru preusporiadať na odvesny(i, j) pravouhlého trojuholníka s preponou DB (k). Jednu z odvesien(i) budú tvoriť úsečky DE , FG, a HB , pričom druhú(j) budú tvoriť úsečky EF a GH. Vieme,že $i = |DE| + |FG| + |HB| = 6cm + 4cm + 2cm = 12cm$ a $j = |EF| + |GH| = 4 + 1 = 5cm$.
Teraz si zistíme štvorec uhlopriečky $DB(k)$:

$$k^2 = i^2 + j^2 = 12^2 + 5^2 = 169cm^2$$

Keďže $ABCD$ je štvorec, vieme že $k^2 = 2a^2$. Preto

$$S_{ABCD} = a^2 = \frac{k^2}{2} = \frac{169cm^2}{2} = 84,5cm^2$$

Obsah štvorca je teda $\mathbf{84,5cm^2}$