Chapter–6(A)
যোগাশ্রয়ী রূপান্তর
LINEAR TRANSFORMATION

6.A.0. শিখনফল ঃ এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা

➤ যোগাশ্রয়ী রূপান্তর, যোগাশ্রয়ী অপারেটর, যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ইমেজ, যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্ণেল, র‍্যাঙ্ক ও নালিটি ব্যাখ্যা করিতে পারিবে।

➤ ম্যাট্রিক্স ও যোগাশ্রয়ী রূপান্তর এবং ম্যাট্রিক্সের শূন্য জগত বর্ণনা করিতে পারিবে।

➤ নিচে ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক ও নালিটির সম্পর্ক প্রতিপাদন ও প্রয়োগ করিতে পারিবে।

- র‍্যাঙ্ক (A) + শূন্যতা (A) = কলাম সংখ্যা
- র‍্যাঙ্ক (A) + শূন্যতা (A^T) = সারি সংখ্যা
- র‍্যাঙ্ক (A) = র‍্যাঙ্ক (A^T)

➤ নিচের উপপাদ্যগুলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করিতে পারিবে।

(i) শূন্য ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী রূপান্তর শূন্য ভেক্টর।

(ii) $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরটি এক-এক এবং অন-টু হইলে বিপরীত রূপান্তর $T^{-1} : U(F) \to V(F)$ যোগাশ্রয়ী হইবে।

(iii) $T : V(F) \to U(F)$ এবং $S : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তর হইলে $T + S$, λT এবং $T \circ S$ যোগাশ্রয়ী হইবে যেখানে $\lambda \in F$.

(iv) $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তর হইলে ImT, U(F) এর kerT, V(F) এর উপজগত এবং $\dim(\text{Im}T) + \dim(\ker T) = \dim V(F)$ হইবে।

(v) $T : V \to W$ এক-এক হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\ker T = \{0\}$ হয়।

6.A.1. যোগাশ্রয়ী রূপান্তর ও যোগাশ্রয়ী অপারেটর (Linear transforma-on and Linear operator) : **[NUH–99, 03, 08, 09, NU(Pre)–09]**

মনে করি V(F) এবং U(F) দু'টি ভেক্টর জগত। যদি $T : V(F) \to U(F)$ রূপান্তরটি -ম্নের নিয়ম দু'টি সিদ্ধ করে তবে T কে যোগাশ্রয়ী রূপান্তর বলা হয়।

(i) $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

(ii) $\forall \mathbf{u} \in V$ এবং $\forall\, \alpha \in F \Rightarrow T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha\, T(\mathbf{u})$

যদি U(F) = V(F) হয় অর্থাৎ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরটি $T : V(F) \to V(F)$ হয় ত T কে যোগাশ্রয়ী অপারেটর বলা হয়।

[Let V(F) and U(F) are two vector spaces. If the transformation $T : V(F) \to U(F)$ satisfies the following two rules, then T is called linear transformation.

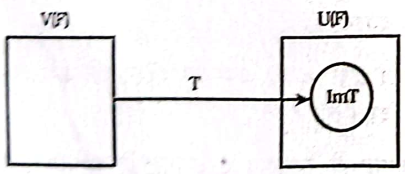
(i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

(ii) $\forall \mathbf{u} \in V$ এবং $\forall \alpha \in F \Rightarrow T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$

If U(F) = V(F) i.e. If the linear transformation $T : V(F) \to V(F)$ then T is called linear operator.]

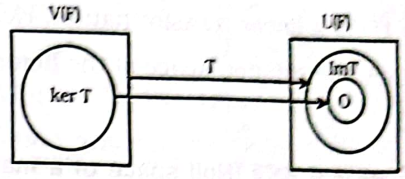
6.A.2. যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ইমেজ (Image of linear transformation or mapping) : [NUH–97, 99, 01, 02, 03, 08, 09, 10(Old), NU(Pre)–05, NUH(NM)–09, JUH–2009]

মনে করি $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। এইক্ষেত্রে U(F) এর যে সকল উপাদান V(F) এর উপাদানের ইমেজ, U(F) এর ঐ সকল উপাদানের সেটকে যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ইমেজ বলা হয়। ইহাকে ImT দ্বারা সূচিত করা হয়। গাণিতিকভাবে $\text{Im}T = \{\mathbf{u} \in U(F) : T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V(F)\}$ [Let $T : V(F) \to U(F)$ be a linear transformation. In this case, the set of those elements of U(F) which are image of the elements of V(F) be called Image of linear transformation. It is denoted by ImT. Mathematically, $\text{Im}T = \{\mathbf{u} \in U(F) : T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V(F)\}$]



6.A.3. যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল (Kernel of a linear transformation or mapping) : [NUH–97, 99, 01, 02, 03, 04, 08, 09, 10(Old), NU(Pre)–05, 09, BSc(Pass)–07(Old), JUH–05, CUH–08]

মনে করি $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। এইক্ষেত্রে V(F) এর যে সকল উপাদানের ইমেজ শূন্য, V(F) এর ঐ সকল উপাদানের সেটকে যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের কার্নেল বলা হয়। ইহাকে KerT দ্বারা সূচিত করা হয়। গাণিতিকভাবে $\text{Ker}T = \{\mathbf{v} \in V(F) : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in U(F)\}$ [Let $T : V(F) \to U(F)$ be a linear transformation. In this case, the set of those elements of V(F) which map into zero in U(F) is called kernel of linear transformation. It is denoted by KerT. Mathematically, $\text{Ker}T = \{\mathbf{v} \in V(F) : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in U(F)\}$]



6.A.4. র‍্যাঙ্ক ও নালিটি (Rank and Nullity) : [NUH–2009, 2013, DUH–2006, CUH–2007]

ImT এর মাত্রাকে র‍্যাঙ্ক এবং KerT এর মাত্রাকে নালিটি বলা হয়। [Dimension of ImT is called rank and dimension of KerT is called nullity.]

6.A.5. ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী যোগাশ্রয়ী রূপান্তর (Singular and non-singular linear transformation) : যদি $T : V(F) \to U(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের ক্ষেত্রে V(F) এর কোনো অশূন্য উপাদানের ইমেজ শূন্য হয় অর্থাৎ $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} (\neq 0) \in V(F)$ হয় তবে T কে ব্যতিক্রমী যোগাশ্রয়ী রূপান্তর বলা হয়। আবার T যদি ব্যতিক্রমী যোগাশ্রয়ী রূপান্তর না হয় অর্থাৎ $\text{Ker}T = \{0\}$ হয় তবে T কে অব্যতিক্রমী যোগাশ্রয়ী রূপান্তর বলা হয়। [If the image of a non-zero element of V(F) is zero in the linear transformation $T : V(F) \to U(F)$ i.e. $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} (\neq 0) \in V(F)$. Then T is called singular linear transformation. Again if T is not singular i.e. $\text{Ker } T = \{0\}$ then T is called non-singular linear transformation.]

6.A.6. ম্যাট্রিক্স এবং যোগাশ্রয়ী রূপান্তর [Matrix and linear transformation] :

মনে করি F ফিল্ডে $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স। তাহলে $A : F^n \to F^m$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। এখানে A এর কলাম জগতকে ImA (প্রতিচ্ছবি জগত) এবং সুষম সমীকরণ জোট AX = 0 এর সমাধান জগতকে KerA (প্রতিশূন্য জগত) বলা হয়।

[Let $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ be a $m \times n$ matrix over a field

Then $A : F^n \to F^m$ is a linear transformation. Here column spa of A is called ImA and solution space of the homogeneous syste $AX = 0$ is KerA]

6.A.7. ম্যাট্রিক্সের শূন্য জগত (Null space of a matrix) : [DUH–0

যদি A একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয় তবে, সমমাত্রায় সমীকরণ জোট $AX =$ এর সমাধান জগতকে যাহা $\mathbb{R}^n$ এর উপজগত, A ম্যাট্রিক্সের শূন্য জগত বলে। (If A be matrix of order $m \times n$, then the solution space of th homogeneous system of equations $AX = 0$, which is a subspace $\mathbb{R}^n$ is called the nullspace of A.)

কোনো ম্যাট্রিক্সের শূন্য জগতের মাত্রাকে ঐ ম্যাট্রিক্সের নালিটি বলে। (Th dimension of nullspace of a matrix is called the nullity of th matrix.)

6.A.8. ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক ও নালিটির সম্পর্ক [Relation between ran and nullity of a matrix] : যদি A একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয় তবে

(i) র‍্যাঙ্ক (A) + শূন্যতা (A) = কলাম সংখ্যা [Rank(A) + Nullity(A) = n]

(ii) র‍্যাঙ্ক (A) + শূন্যতা (A^T) = সারি সংখ্যা [Rank(A) + Nullity (A^T) = m]

(iii) র‍্যাঙ্ক (A) = র‍্যাঙ্ক (A^T) [Rank (A) = Rank (A^T)]

6.A.9. যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের যৌগিক ফাংশন [Composition functio of linear transformation] : মনে করি V(F), U(F), W(F) তিনটি ভেক্টর জ যেখানে $T : V(F) \to U(F)$ এবং $S : U(F) \to W(F)$ যোগাশ্রয়ী রূপান্তর।

$$\begin{tikzcd} \boxed{V(F)} \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "ToS"'] & \boxed{U(F)} \arrow[r, "S"] & \boxed{W(F)} \end{tikzcd}$$

তাহা হইলে $ToS : V(F) \to W(F)$ কে যোগাশ্রয়ী রূপান্তরের যৌগিক ফাংশন বলা য যা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত : $ToS : (\mathbf{v}) = T(S(\mathbf{v})),\ \forall\ \mathbf{v} \in V$

উপপাদ্য-8. মনে করি $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহা হইলে দেখাও যে ImT একটি U(F) এর উপজগত। [Let $T : V(F) \to U(F)$ be a linear mapping. Then show that ImT is a subspace of U(F).]

[NUH-1999, 2002, 2010(Old), RUH-2007, JUH-2005]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। প্রমাণ করিতে হবে ImT একটি U(F) এর উপজগত।

এখানে $\exists\, \mathbf{0} \in V(F)$ এবং $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in ImT \Rightarrow ImT \neq \phi$

ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \in ImT$ তাহা হইলে ভেক্টরজগত V(F) এ দুইটি ভেক্টর $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$ এইরূপভাবে বিদ্যমান থাকিবে যে $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ এবং $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{u}_1$ হয়।

আবার ধরি $\alpha, \beta \in F \;\therefore \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}_1 \in V(F)$

এখন $T(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}_1) = T(\alpha\mathbf{v}) + T(\beta\mathbf{v}_1)$

$$= \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{v}_1) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}_1 \in ImT$$

সুতরাং উপজগতের মৌলিক উপপাদ্য অনুসারে ImT একটি U(F) এর উপজগত।

(প্রমাণিত)

উপপাদ্য-9. মনে করি $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহা হইলে দেখাও যে KerT একটি V(F) এর উপজগত। [Let $T : V(F) \to U(F)$ be a linear mapping. Then show that KerT is a subspace of V(F)]

[NUH-99, 02, 10, 10(Old), BSc(Pass)-07(Old), NUH(NM)-09, RUH-07, JUH-05]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে $T : V(F) \to U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। প্রমাণ করিতে হইবে KerT একটি V(F) এর উপজগত।

এখানে $\exists\, \mathbf{0} \in V(F)$ এবং $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \therefore \mathbf{0} \in Ker\,T \Rightarrow Ker\,T \neq \phi$

মনে করি $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \in KerT$ এবং $\alpha, \beta \in F$

$$\therefore T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$$

এখন $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}_1 \in V(F)$ এবং $T(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}_1) = T(\alpha\mathbf{v}) + T(\beta\mathbf{v}_1)$

$= \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{v}_1) = \alpha.\mathbf{0} + \beta.\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}_1 \in Ker\,T$

সুতরাং উপজগতের মৌলিক উপপাদ্য অনুসারে, KerT একটি V(F) এর উপজগত।

(প্রমাণিত)

উপপাদ্য-10. মনে করি V(F) একটি সসীম মাত্রার ভেক্টর জগত এবং $T : V(F) \rightarrow U(F)$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর। তাহা হইলে দেখাও যে $\dim(\text{Im}T) + \dim(\text{Ker}T) = \dim(V(F))$. [Let V(F) be a finite dimensional vector space and $T : V(F) \rightarrow U(F)$ be a linear mapping. Then show that $\dim(\text{Im}T) + \dim(\text{Ker}T) = \dim(V(F))$].

[NUH–1997, 2005, 2007, NUH(NM)–20

DUH–2006, 2007, JUH–2006, CUH–20

অথবা ঃ প্রমাণ কর যে, র‍্যাংক (T) + শূন্যত্ব (T) = n, যেখানে n হইলো ভেক্টর জগত V এর মাত্রা। [Prove that, rank (T) + nullity (T) = n, where n is the dinension of the vector space V.] **[NUH–201**

প্রমাণ ঃ মনে করি $\dim(\text{Ker } T) = r$ এবং $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ একটি KerT এর ভিত্তি। যেহেতু V(F) এর উপজগত KerT, সুতরাং V(F) এর একটি ভিত্তির উপসেট KerT এর ভিত্তি হইবে।

ধরি $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$, $n > r$ একটি V(F) এর ভিত্তি। $\therefore \dim(V(F)) = n$

এখন $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n \in V(F)$, $\alpha_i \in F$

$\Rightarrow T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) \in \text{Im}T$

$\Rightarrow \alpha_1T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_rT(\mathbf{v}_r) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n) \in \text{Im}T$

$\Rightarrow \alpha_{r+1} T(\mathbf{v}_{r+1}) + \alpha_{r+2} T(\mathbf{v}_{r+2}) + \cdots + \alpha_nT(\mathbf{v}_n) \in \text{Im}T$

$[\because \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r \in \text{Ker}T$

$\therefore \alpha_{r+1} T(\mathbf{v}_{r+1}) + \alpha_{r+2} T(\mathbf{v}_{r+2}) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{u},\ \forall\ \mathbf{u} \in \text{Im}T$

$\Rightarrow \text{Im}T = L\{T(\mathbf{v}_{r+1}), T(\mathbf{v}_{r+2}), \cdots, T(\mathbf{v}_n)\}$

ধরি $\beta_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \beta_{r+2} T(\mathbf{v}_{r+2}) + \cdots + \beta_n T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ …… (1)

$\Rightarrow T(\beta_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \beta_{r+2} \mathbf{v}_{r+2} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \beta_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \beta_{r+2} \mathbf{v}_{r+2} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n \in \text{Ker}T$

$\Rightarrow \beta_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \beta_{r+2} \mathbf{v}_{r+2} + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \gamma_r \mathbf{v}_r$

$[\because \text{Ker}T = L\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}]$

$\Rightarrow \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \gamma_r\mathbf{v}_r - \beta_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} - \cdots - \beta_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$

যেহেতু $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r, \cdots \mathbf{v}_n\}$ একটি V(F) এর ভিত্তি সুতরাং ভেক্টরগুলো যোগাশ্রয়ী ...র্ভরশীল।

$\therefore \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \cdots, \gamma_r = 0, \beta_{r+1} = 0, \cdots, \beta_n = 0$

$(1) \Rightarrow T(\mathbf{v}_{r+1}), T(\mathbf{v}_{r+2}), \cdots, T(\mathbf{v}_n)$ যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল।

$\therefore \{T(\mathbf{v}_{r+1}), T(\mathbf{v}_{r+2}), \cdots, T(\mathbf{v}_n)\}$ একটি ImT এর ভিত্তি।

$\Rightarrow \dim(\text{Im}T) = n - r = \dim(V(F)) - \dim(\text{Ker}T)$

$\Rightarrow \dim(\text{Im}T) + \dim(\text{Ker}T) = \dim(V(F))$

ইহা নির্দেশ করে, র‍্যাংক (T) + শূন্যত্ব (T) = n.

উপপাদ্য-11 প্রমাণ কর যে, $T : V \rightarrow W$ এক-এক হইবে যদি এবং কেবল যদি ...T = {0} হয়। [Prove that $T : V \rightarrow W$ is injective if and only if ...T = {0}] **[NUH-2002, 2004, 2008, NU(Pre)-2009, RUH-2006]**

প্রমাণ ঃ ধরি $T : V \rightarrow W$ এক-এক

সুতরাং T এর সাপেক্ষে কেবলমাত্র $\mathbf{0} \in V$ এর প্রতিচ্ছবি $\mathbf{0} \in W$ ই হইবে। অর্থাৎ ...বলমাত্র $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ হইবে [Only image of $\mathbf{0} \in V$ be $\mathbf{0} \in W$ with respect ...o T]

$\therefore$ Ker T = {0} হইবে। বিপরীতক্রমে ধরি Ker T = {0}

এখন $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ হইলে

$\Rightarrow T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ [$\because$ T যোগাশ্রয়ী]

$\Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ [$\because \text{Ker}\, T = \{\mathbf{0}\}$]

$\Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ [$\because \text{Ker}\, T = \{\mathbf{0}\}$]

$\Rightarrow$ T এক-এক

সুতরাং $T : V \rightarrow W$ এক এক হইবে যদি এবং কেবল যদি Ker T = {0} হয়। [So T : V → W is injective if and only if Ker T = {0}]

সমাধানকৃত উদাহরণমালা [Solved Examples]
Short Question (Part–B) & Broad Question (Part–C)

উদাহরণ–1. দেখাও যে নিম্নের চিত্রণগুলো যোগাশ্রয়ী [Show that following mappings are linear]

(i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ দ্বারা

(ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ বর্ণিত চিত্রন $T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$ দ্বারা

[NUH–19

(iii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$ দ্বারা

(iv) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y) = (x + 2y, - 2x + y, x + 3y)$ দ্বারা

(v) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$ দ্বারা

S (vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = (2x + y + z, 3x + 2y + 4z)$

[NUH–2008, 20

সমাধান ঃ **(i)** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ যেখানে $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\therefore \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

এখন $T(\mathbf{u}) = T(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, 0)$

$T(\mathbf{v}) = T(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, 0)$

$\therefore T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0) \cdots\cdots (1)$

আবার $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0) \cdots\cdots (2)$

(1) ও (2) হইতে পাই $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

আবার α স্কেলার হইলে $\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$\therefore T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) = (\alpha u_1, \alpha u_2, 0) = \alpha(u_1, u_2, 0) = \alpha T(\mathbf{u})$

সুতরাং T যোগাশ্রয়ী রূপান্তর।

(ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$

ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ যেখানে $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\therefore \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

এখন $T(\mathbf{u}) = T(u_1, u_2, u_3) = (u_1 + 2u_2, u_2 - u_3, u_1 + 2u_3)$

$T(\mathbf{v}) = T(v_1, v_2, v_3) = (v_1 + 2v_2, v_2 - v_3, v_1 + 2v_3)$

$\therefore T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_2, u_2 + v_2 - u_3 - v_3,$

$u_1 + v_1 + 2u_3 + 2v_3) \;\cdots\cdots\; (1)$

আবার $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$= (u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_2, u_2 + v_2 - u_3 - v_3, u_1 + v_1 + 2u_3 + 2v_3) \;\cdots\cdots\; (2)$

(1) ও (2) হইতে পাই $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ধরি α স্কেলার $\therefore \alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$= (\alpha u_1 + 2\alpha u_2, \alpha u_2 - \alpha u_3, \alpha u_1 + 2\alpha u_3)$

$= \alpha(u_1 + 2u_2, u_2 - u_3, u_1 + 2u_2) = \alpha T(\mathbf{u})$

যেহেতু $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ এবং $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$. সুতরাং T যোগাশ্রয়ী।

(iii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ বর্ণিত চিত্রন $T(x, y, z) = (x - y, x - z)$

ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ যেখানে $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\therefore \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

এখন $T(\mathbf{u}) = T(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2, u_1 - u_3)$

$T(\mathbf{v}) = T(v_1, v_2, v_3) = (v_1 - v_2, v_1 - v_3)$

$\therefore T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (u_1 - u_2 + v_1 - v_2, u_1 - u_3 + v_1 - v_3) \;\cdots\cdots\; (1)$

আবার $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, v_3 + v_3)$

$= (u_1 + v_1 - u_2 - v_2, u_1 + v_1 - u_3 - v_3)$

$= (u_1 - u_2 + v_1 - v_2, u_1 - u_3 + v_1 - v_3) \;\cdots\cdots\; (2)$

(1) ও (2) হইতে পাই $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ধরি α স্কেলার $\therefore \alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) = (\alpha u_1 - \alpha u_2, \alpha u_1 - \alpha u_3)$

$= \alpha(u_1 - u_2, u_1 - u_3) = \alpha T(\mathbf{u})$

যেহেতু $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ এবং $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$. সুতরাং T যোগাশ্রয়ী।

(iv) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y) = (x + 2y, -2x + y, x + 3y)$

ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ যেখানে $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$\therefore \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

এখন $T(\mathbf{u}) = T(u_1, u_2) = (u_1 + 2u_2, -2u_1 + u_2, u_1 + 3u_2)$

$T(\mathbf{v}) = (v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, -2v_1 + v_2, v_1 + 3v_2)$

$\therefore T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (u_1 + 2u_2 + v_1 + 2v_2, -2u_1 + u_2 - 2v_1 + v_2, u_1 + 3u_2 + v_1 + 3v_2)$ ……(1)

আবার $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$= (u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_2, -2u_1 - 2v_1 + u_2 + v_2, u_1 + v_1 + 3u_2 + 3v_2)$

$= (u_1 + 2u_2 + v_1 + 2v_2, -2u_1 + u_2 - 2v_1 + v_2, u_1 + 3u_2 + v_1 + 3v_2)$ ……(2)

(1) ও (2) হইতে পাই $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ধরি α স্কেলার $\therefore \alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

$\therefore T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha u_1, \alpha u_2) = (\alpha u_1 + 2\alpha u_2, -2\alpha u_1 + \alpha u_2, \alpha u_1 + 3\alpha u_2)$

$= \alpha(u_1 + 2u_2, -2u_1 + u_2, u_1 + 3u_2) = \alpha T(\mathbf{u})$

যেহেতু $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ এবং $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$. সুতরাং T যোগাশ্রয়ী।

(v) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ বর্ণিত চিত্রণ, $T(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$

ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ যেখানে $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\therefore \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

এখন $T(\mathbf{u}) = T(u_1, u_2, u_3) = 2u_1 - 3u_2 + 4u_3$

$T(\mathbf{v}) = T(v_1, v_2, v_3) = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3$

$\therefore T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = 2u_1 - 3u_2 + 4u_3 + 2v_1 - 3v_2 + 4v_3$ …… (1)

আবার $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$= 2(u_1 + v_1) - 3(u_2 + v_2) + 4(u_3 + v_3)$

$= 2u_1 + 2v_1 - 3u_2 - 3v_2 + 4u_3 + 4v_3$

$= 2u_1 - 3u_2 + 4u_3 + 2v_1 - 3v_2 + 4v_3$ …… (2)

(1) ও (2) হইতে পাই $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

আবার α স্কেলার হইলে $\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$\therefore T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) = 2\alpha u_1 - 3\alpha u_2 + 4\alpha u_3$

$$= \alpha(2u_1 - 3u_2 + 4u_3) = \alpha T(\mathbf{u})$$

যেহেতু $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ এবং $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$. সুতরাং T যোগাশ্রয়ী।

(vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = (2x + y + z, 3x + 2y + 4z)$

ধরি $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ যেখানে $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ এবং $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\therefore \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

এখন $T(\mathbf{u}) = (2u_1 + u_2 + u_3, 3u_1 + 2u_2 + 4u_3)$

$T(\mathbf{v}) = (2v_1 + v_2 + v_3, 3v_1 + 2v_2 + 4v_3)$

$\therefore T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (2u_1 + u_2 + u_3 + 2v_1 + v_2 + v_3, 3u_1 + 2u_2 + 4u_3$
$+ 3v_1 + 2v_2 + 4v_3) \cdots\cdots (1)$

আবার, $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (2u_1 + 2v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3, 3u_1 + 3v_1 + 2u_2$
$+ 2v_2 + 4u_3 + 4v_3)$

$= (2u_1 + u_2 + u_3 + 2v_1 + v_2 + v_3, 3u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 3v_1$
$+ 2v_2 + 4v_3) \cdots\cdots (2)$

(1) ও (2) হইতে পাই, $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

α স্কেলার হইলে $\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$\therefore T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$$= (2\alpha u_1 + \alpha u_2 + \alpha u_3, 3\alpha u_1 + 2\alpha u_2 + 4\alpha u_3)$$

$$= \alpha(2u_1 + u_2 + u_3, 3u_1 + 2u_2 + 4u_3)$$

$$= \alpha T(\mathbf{u})$$

যেহেতু $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ এবং $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$

সুতরাং T লিনিয়ার রূপান্তর।

উদাহরণ-2. দেখাও যে নিম্নের চিত্রণগুলো যোগাশ্রয়ী নয় [Show that the following mappings are not linear]

(i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y) = (x, y + 1)$

(ii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y) = (x^2, y^2)$

(iii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ বর্ণিত চিত্রণ $T(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

সমাধান ঃ ধরি $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 0 & 1\\-1 & -1 & 2 & -3 & 1\\1 & 1 & -2 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+0+x_5=0\\-x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5=0\\x_1+x_2-2x_3+0-x_5=0\\0+0+x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+0-x_5=0\\0+0+0-3x_4+0=0\\0+0+3x_3+0+3x_5=0\\0+0+x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+0-x_5=0\\x_3+x_4+x_5=0\\x_4+0=0\end{cases}$$

এখানে যেহেতু পাঁচটি চলকের তিনটি সমীকরণ বিদ্যমান।

সুতরাং স্বাধীন চলক সংখ্যা = 2.

ধরি, x_2, x_5 স্বাধীন চলক যেখানে $x_2 = a$ এবং $x_5 = b$; $a, b \in \mathbb{R}$

$\therefore x_4 = 0, x_3 = -b, x_1 = -a-b$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-a-b, a, -b, 0, b)$

$= a(-1, 0, 1, 0, 0, 0) + b(-1, 0, -1, 0, 1)$

$\therefore$ Ker T এর একটি ভিত্তি $= \{(-1, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, -1, 0, 1)\}$.

উদাহরণ–11. ধরি $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ একটি যোগাশ্রয়ী রূপান্তর; যেখানে $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$; ImT এবং Ker T নির্ণয় কর। [Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be the linear transformation defined by $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$. Find ImT and Ker T.]

[NUH–2003, 2012, NUH(NM)–2010, RUH–2007, KUH–2005]

সমাধান ঃ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ যোগাশ্রয়ী অপারেটরটি

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

ধরি $\mathbb{R}^3$ এর একটি আদর্শ ভিত্তি

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

$\therefore T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 1), \qquad T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (2, 1, 1)$

$T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (-1, 1, -2)$

এখন $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$, $T(\mathbf{e}_3)$ কে সারি বিবেচনা করে ম্যাট্রিক্স নিয়ে, [Considering $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$, $T(\mathbf{e}_3)$ as rows of a matrix we get]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2' = r_2 - 2r_1 \\ \\ r_3' = r_3 + r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r_3' = r_3 - r_2.$$

ইহা সারি ইচালন ম্যাট্রিক্স যেখানে দু'টি অশূন্য সারি বিদ্যমান। [It is row eche[lon] matrix where two non-zero rows exist]

সুতরাং $\text{Im}T = L\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$

আবার মনে করি $(x, y, z) \in \text{Ker } T$

$\therefore T(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ \quad\quad y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2' = L_2 - L_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \quad\quad y + z = 0 \\ \quad\quad y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \quad\quad y + z = 0 \end{cases}$$

ইহা সমীকরণ জোটের ইচালন আকার। এখানে তিনটি চলকের দুইটি সমীক[রণ] বিদ্যমান। [It is echelon form of the system of equations. Here t[wo] equations in three variables exist.]

$\therefore$ স্বাধীন চলক সংখ্যা [Number of free variable] $= 3 - 2 = 1$

ধরি z স্বাধীন চলক এবং $z = a$, $a \in \mathbb{R}$ [Let z be free variable a[nd] $z = a$, $a \in \mathbb{R}$]

$\therefore y = -a, x = 3a$

এখন, $(x, y, z) = (3a, -a, a) = a(3, -1, 1)$

$\therefore \text{Ker } T = L\{3, -1, 1)\}.$