ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МОЛДОВЫ
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ
КАФЕДРА АВТОМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ОТЧЕТ

По лабораторной работе №1
по дисциплине «Исследование операций»
Тема: «Решение задач линейного программирования(ЛП) графическим методом»
Вариант 30

Выполнила: ст. гр. TI-155 Зверкова К.

Проверила: ст.преподаватель Скороходова Т.А.

Кишинев 2017

Цель работы:

- Изучить графический метод решения задач линейного программирования
- Реализовать графический метод решения задач линейного программирования на ЭВМ

Общая постановка задачи линейного программирования

В общем виде задача ЛП формируется следующим образом:

Найти решение $X=(x_1,x_2 \ldots,x_n)$, которое доставляет линейной функции цели экстремальное значение:

$$W=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \max (\min) \qquad (1)$$

при системе ограничений:

$$\begin{cases} \sum_i a_{ji} x_i = b_j, \text{ где } i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m1}, & (2) \\ \sum_i a_{ji} x_i \le b_j, \text{ где } i=\overline{1,n},\ j=\overline{m1+1,\ m2}, & (3) \\ \sum_i a_{ji} x_i \ge b_j, \text{ где } i=\overline{1,n},\ j=\overline{m2+1,\ m}, & (4) \end{cases}$$

и условиях:

$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,r},\ r \le n \qquad (5)$$

Опр. Если все ограничения задачи ЛП заданы в виде строгих равенств и на все переменные наложены условия не отрицательности, то данная форма называется **канонической**.

Опр. Вектор $X=(x_1,x_2 \ldots,x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2)÷(4) задачи ЛП, называется ее **решением** или планом.

Опр. Множество R(X) всех векторов X, для которых выполняются условия (2)÷(4), (5), называется допустимым множеством решений (в этом случае X называется **допустимым решением** или допустимым планом).

Опр. Решение X_0 называется **оптимальным**, если для него выполняется условие

$$W(X_0) \ge W(X),$$

т.е. для всех $X \in R(X)$;

или иначе: оптимальным называется то из допустимых решений, которое обращает в максимум целевую функцию W (в этом случае X_0 называется **оптимальным решением** или оптимальным планом).

Задача ЛП может быть записана в матричной или векторной форме. Пусть задача ЛП задана в виде:

$$W=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \max (\min) \qquad (6)$$

ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (7)$$

$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,n} \qquad (8)$$

В матричной форме задача (6)÷(8) запишется в следующей форме:

$W=C^T X \rightarrow \max (\min);$

$AX \le B;$

$X \ge 0,$

где C^T-вектор строка$=\{c_1,\ldots, c_n\}$-коэффициенты целевой функции W,

$$X=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix}$$ - вектор столбец переменных,

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ldots\ldots a_{mn} \end{vmatrix},$$

$$b=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{Bmatrix}$$ - вектор столбец свободных членов размерности m.

n

$$W=\sum_{i=1} c_i x_i \to \max(\min) \qquad (6)$$

$$W=C^T X=|c_1, \dots, c_n| \ * \ \begin{vmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$AX \le B \to \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{mn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ = \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} b_1 \\ . \\ b_m \end{vmatrix}$$

При векторной форме записи ограничение (7) запишется следующим образом:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n \le B,$$

где

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix}.$$

Графический метод решения задачи ЛП

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи ЛП и применяется для решения задач двумерного пространства. Задачи трехмерного пространства решаются очень редко, так как построение их решения неудобно и лишено наглядности. Рассмотрим метод на примере двумерной задачи.

Найти решение $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \le 10 \ (\mathbf{I}) \\ X_1 + X_2 \ge 1 \quad (\mathbf{II}) \\ -3X_1 + X_2 \le 3 \ (\mathbf{III}) \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

при котором, значение целевой функции:

$$W=7X_1-2X_2 \to MIN$$

Шаг №1. Построим область допустимых решений, т.е. решим графически систему неравенств (Рис. 1). Для этого построим каждую прямую и определим полуплоскости, заданные неравенствами (полуплоскости обозначены штрихом). Построим уравнение $5x_1-2x_2 = 10$ по двум точкам. Для нахождения первой точки приравниваем $x_1 = 0$. Находим $x_2 = -5$. Для нахождения второй точки приравниваем $x_2 = 0$. Находим $x_1 = 2$. Соединяем точку (0;-5) с (2;0) прямой линией. Определим полуплоскость, задаваемую неравенством. Выбрав точку (0; 0), определим знак неравенства в полуплоскости:$5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 10 \leq 0$, т.е. $5x_1-2x_2 - 10\leq 0$ в полуплоскости *ниже* прямой.

Такую же операцию проделываем для двух других уравнений. Получаем следующие результаты:

Для уравнения $x_1+x_2 = 1$ находим точки (0;1) и (1;0), соединяем их прямой линией. Определяем полуплоскость, задаваемую неравенством: $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \leq 0$, т.е. $x_1+x_2 - 1\geq 0$ в полуплоскости *выше* прямой.

Для уравнения $-3x_1+x_2 = 3$ находим точки (0;3) и (-1;0), соединяем их прямой линией. Определяем полуплоскость, задаваемую неравенством:$-3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 3 \leq 0$, т.е. $-3x_1+x_2 - 3\leq 0$ в полуплоскости *ниже* прямой.

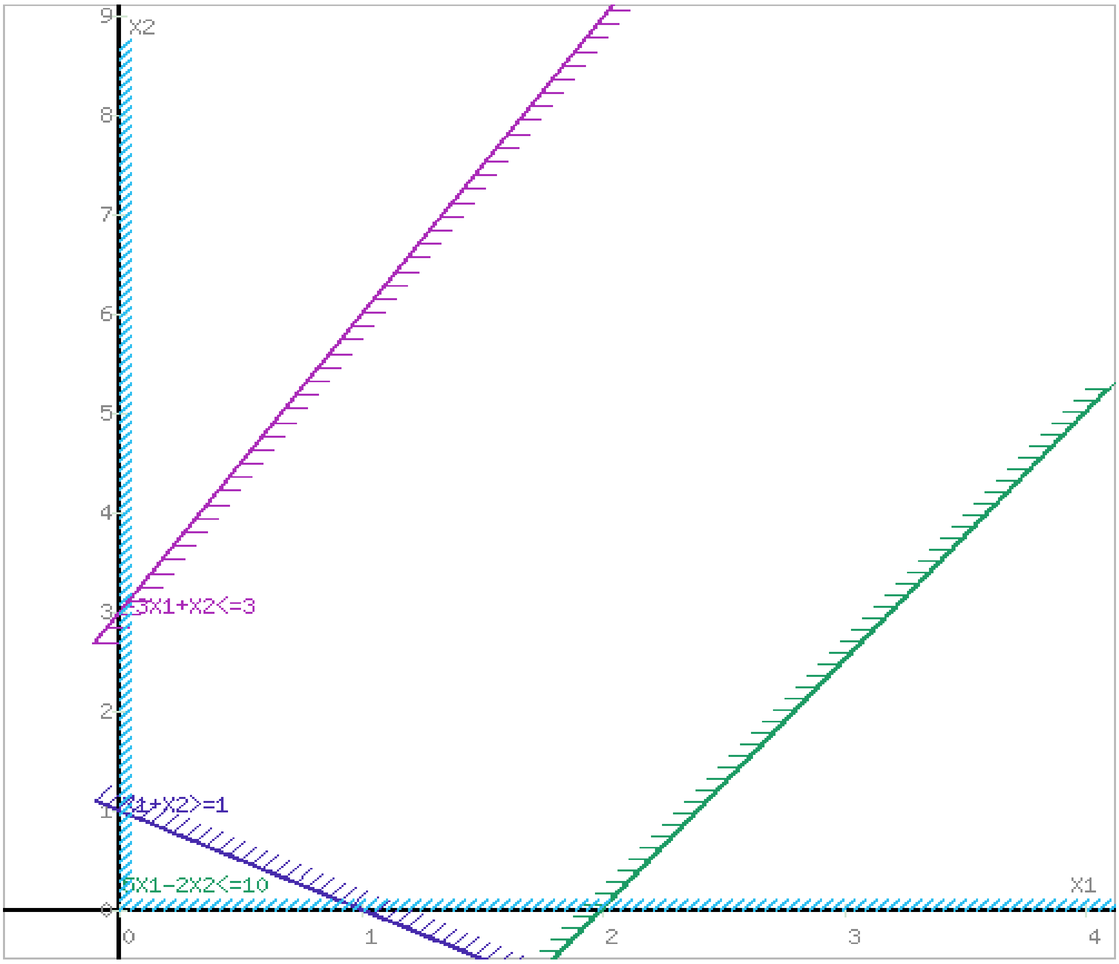

Рис.1 – Область допустимых решений

Шаг №2. Границы области допустимых решений (Рис. 2). Пересечением полуплоскостей будет являться область, координаты точек которого удовлетворяют условию неравенствам системы ограничений задачи. Обозначим границы области многоугольника решений.

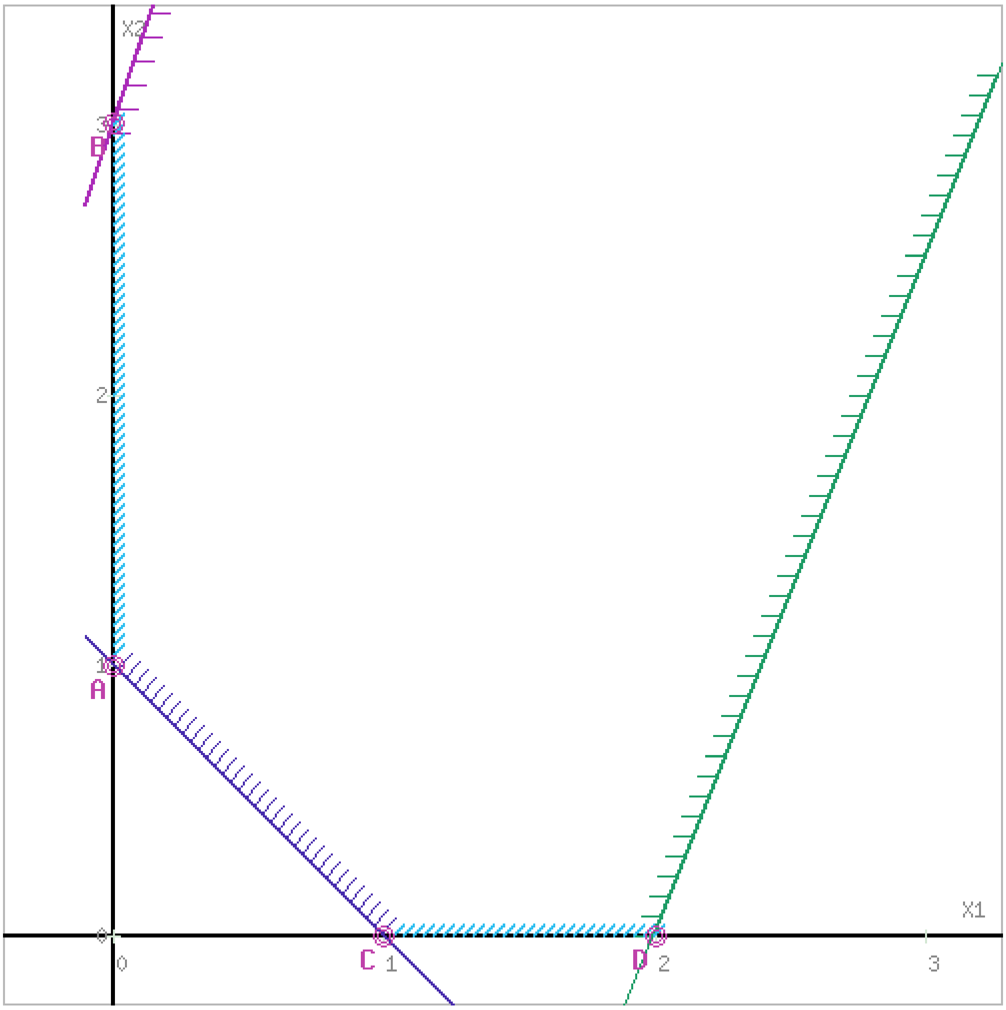

Рис.2 - Границы области допустимых решений

Шаг №3. Рассмотрим целевую функцию задачи W = $7x_1$-$2x_2 \rightarrow$ min. Построим прямую, отвечающую значению функции W = 0: W = $7x_1$-$2x_2$ = 0. Вектор N, составленный из коэффициентов целевой функции, указывает направление минимизации W(X). Начало вектора – точка (0; 0), конец – точка (7; -2). Будем двигать эту прямую параллельным образом. Поскольку нас интересует минимальное решение, поэтому двигаем прямую до первого касания обозначенной области.(на графике эта прямая обозначена пунктирной линией)(Рис. 3).

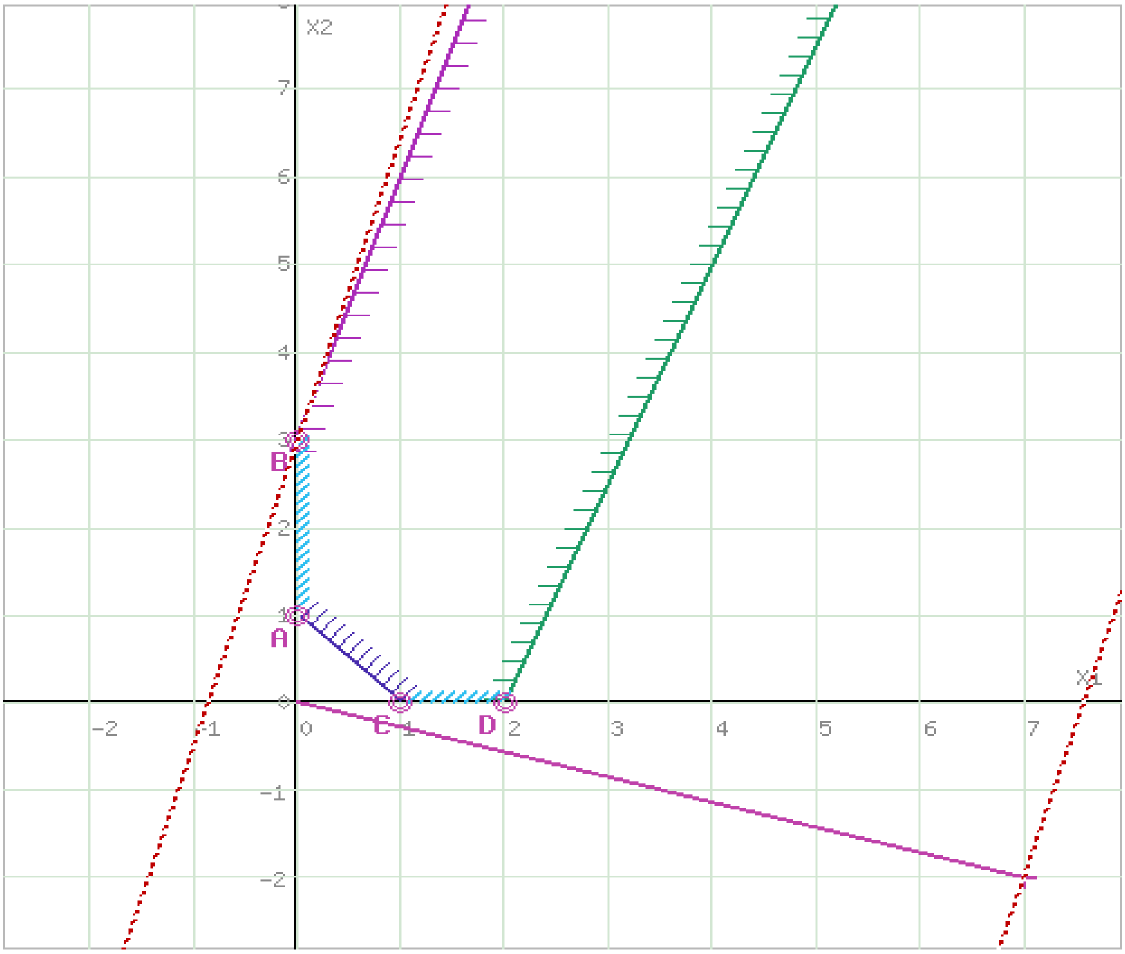

Рис.3 – Представление вектора N и перпендикуляра к нему

Прямая **W(x)** пересекает область в точке B (0, 3).
Решив систему уравнений, получим: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$
Откуда найдем минимальное значение целевой функции:
W(X) = 7*0 - 2*3 = -6
Следовательно, $X_{опт} = (0, 3)$, $W_{min} = -6$

Вывод: В ходе лабораторной работы был изучен графический метод решения задач линейного программирования. На основе полученных навыков и знаний было выполнено задание путем построения графика на компьютере. В процессе выполнения было видно, что данный способ является достаточно удобным и легкореализуемым, при рассмотрении задач с небольшим числом функций эффективен и понятен. Графики лабораторной работы были выполнены в среде Mathematica.