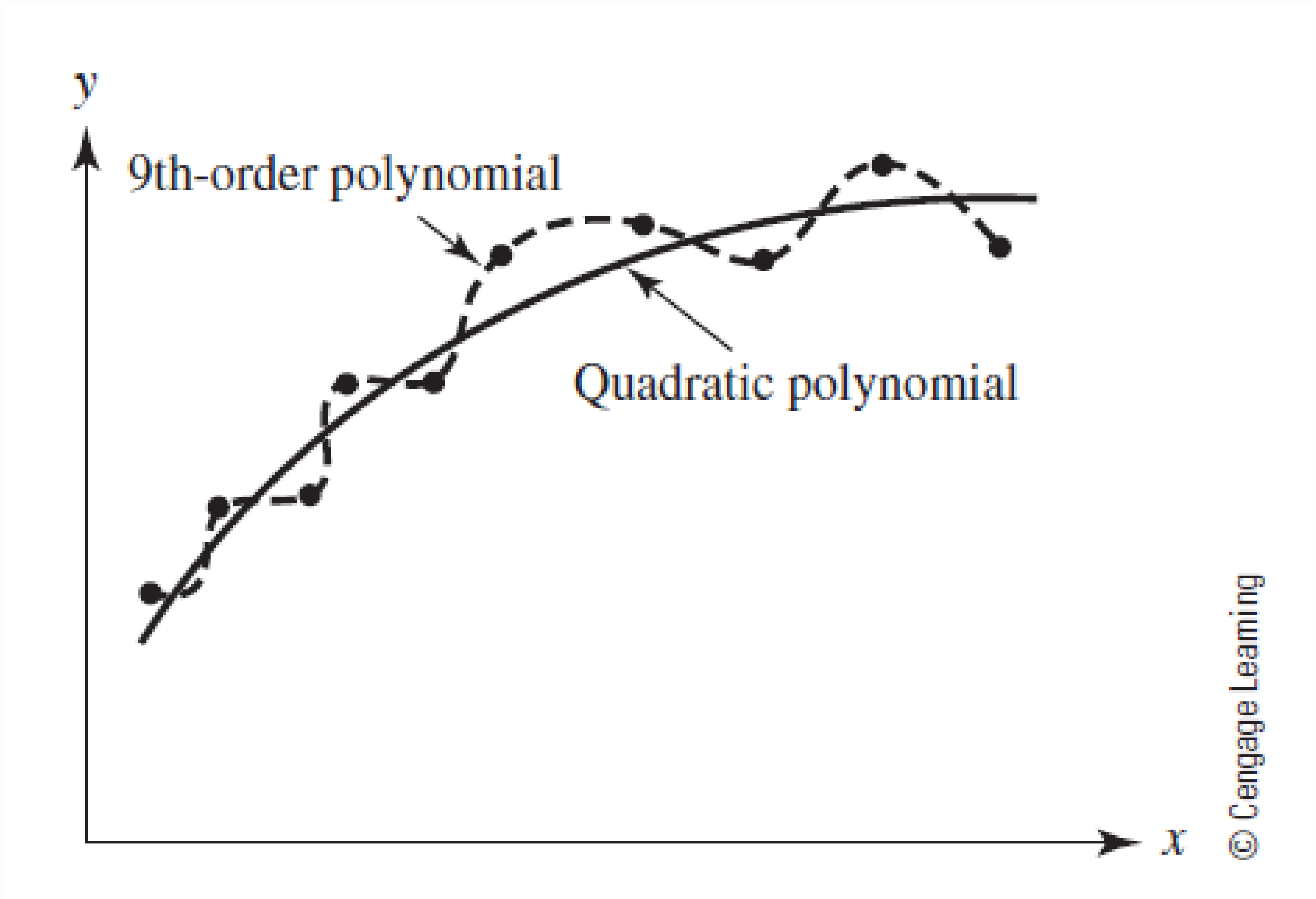
Modelos Polinomiales de Grado Menor

Dulce Ximena Cid Sanabria 1850231
Diego Alejandro Rincón Pacheco 1849687
José Alejandro Lagos Martínez 1941592
EQUIPO 8

INTRODUCCIÓN



El objetivo es ajustar un conjunto de datos a un polinomio de grado "bajo". Esto "suaviza" la función haciendo que no sea muy sensible a pequeños cambios.

Debemos identificar de que grado es el polinomio que vamos a usar y luego encontrar los coeficientes.

Diferencias Divididas

Data		First divided difference	Second divided difference
x_1	y_1		
		$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	
			$\dfrac{\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$
x_2	y_2		
		$\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	
x_3	y_3		

© Cengage Learning

DIFERENCIAS DIVIDIDAS

x_i	0	2	4	6	8
y_i	0	4	16	36	64

© Cengage Learning

	Data		Divided differences		
	x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
	0	0			
			$4/2 = 2$		
	2	4		$4/4 = 1$	
			$12/2 = 6$		$0/6 = 0$
$\Delta x = 6$	4	16		$4/4 = 1$	
			$20/2 = 10$		$0/6 = 0$
	6	36		$4/4 = 1$	
			$28/2 = 14$		
	8	64			

© Cengage Learning

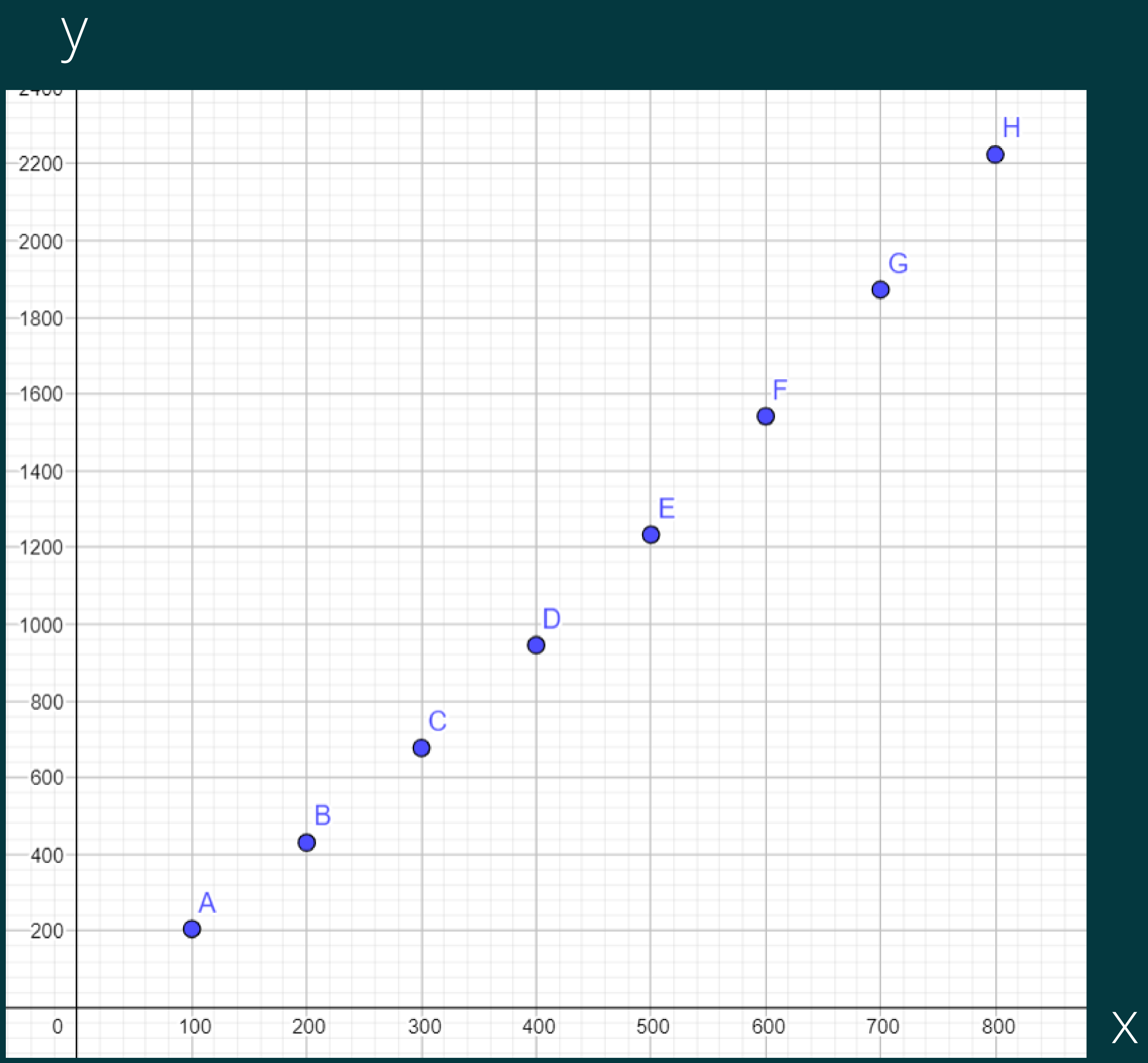
EJEMPLO 1

Se recopilaron datos que relacionan el contador de una grabadora (X) con el tiempo de reproducción transcurrido (Y).

X	c_i	100	200	300	400	500	600	700	800
Y	t_i (sec)	205	430	677	945	1233	1542	1872	2224

© Cengage Learning

Graficar


y
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
100
200
300
400
500
600
700
800
x
A
B
C
D
E
F
G
H

Diferencias Divididas

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
100	205	2.25	0.0011	-1.667E-07
200	430	2.47	0.00105	-1.667E-07
300	677	2.68	0.001	1.667E-07
400	945	2.88	0.00105	0
500	1233	3.09	0.00105	1.667E-07
600	1542	3.3	0.0011	
700	1872	3.52		
800	2224			

Forma de la Función: $P_2(x) = a + bx + cx^2$

$$\text{Min} \quad S = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a + bx_i + cx_i^2) \right]^2$$

Minimizar el error

$$ma + \left(\sum x_i\right) b + \left(\sum x_i^2\right) c = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right) a + \left(\sum x_i^2\right) b + \left(\sum x_i^3\right) c = \sum x_i y_i$$

$$\left(\sum x_i^2\right) a + \left(\sum x_i^3\right) b + \left(\sum x_i^4\right) c = \sum x_i^2 y_i$$

Derivando parcialmente con respecto a cada variable obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

SOLUCIÓN

$$8a + 3600b + 2{,}040{,}000c = 9128$$

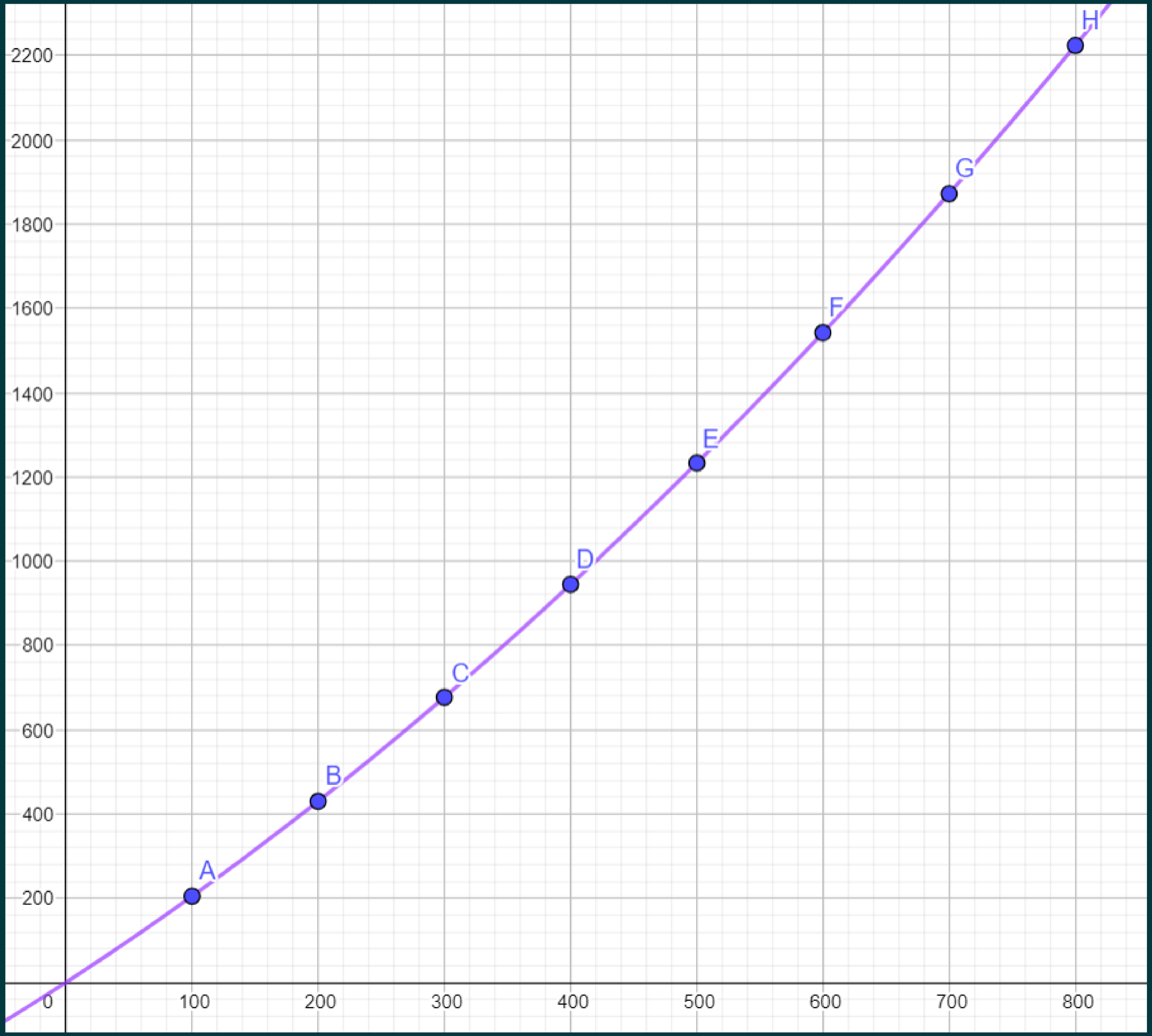
$$3600a + 2{,}040{,}000b + 1{,}296{,}000{,}000c = 5{,}318{,}900$$

$$2{,}040{,}000a + 1{,}296{,}000{,}000b + 8.772 \times 10^{11}\ c = 3{,}435{,}390{,}000$$

a= 0.142857143
b= 1.942261905
c= 0.001046429

$$P_2(x) = 0.1428 + 1.9422x\ + 0.0010x^2$$

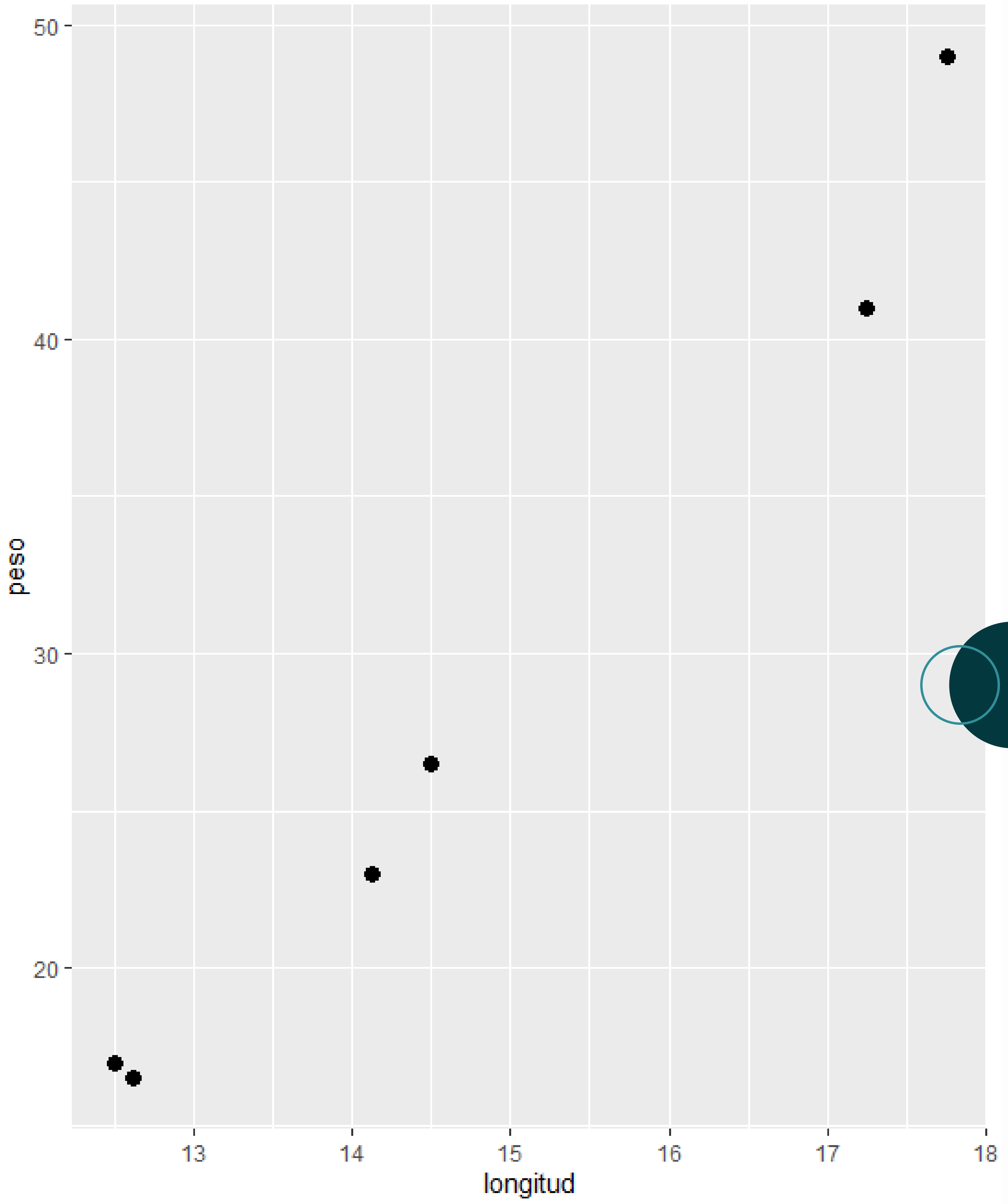
SOLUCIÓN


2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
100
200
300
400
500
600
700
800
A
B
C
D
E
F
G
H

EJEMPLO 2

En la siguiente tabla **X** representa la longitud (pulgadas) y **Y** el peso (onzas) de cierto tipo de pescado.

X	12.5	12.625	14.125	14.5	17.25	17.75
Y	17	16.5	23	26.5	41	49



GRAFICAR LOS DATOS.

Tabla de diferencias divididas

Longitud	Peso	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
12.5	17	-4	5.1282	-1.2308	0.0785	0.0641
12.625	16.5	4.3333	2.6667	-0.8575	0.4149	
14.125	23	9.3333	-1.2994	1.2690		
14.5	26.5	5.2727	3.3007			
17.25	41	16				
17.75	49					

Función del modelo

Forma de la función: P(x)= a + bx+cx^2 +dx^3

$$Minimizar\ S = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - (ai + bx_i + cx_i{}^2 + dx_i{}^3)\right)^2$$

Con las siguientes condiciones

$$ma + b\sum x_i + c\sum x_i^2 + d\sum x_i^3 = \sum y_i$$

$$a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3 + d\sum x_i^4 = \sum x_i y_i$$

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4 + d\sum x_i^5 = \sum x_i^2 y_i$$

$$a\sum x_i^3 + b\sum x_i^4 + c\sum x_i^5 + d\sum x_i^6 = \sum x_i^3 y_i$$

6a+88.75b+1338.03c+20557.53d=173

88.75a+1338.03b+20557.53c+321638.8d=2706.938

1338.03a+20557.53b+321638.8c+5118476d=43084.8

20557.53a+321638.8b+5118476c+82721896d=696489.1

Solución

Despues de resolver el sistema de ecuaciones, se obtuvieron los siguientes valores.

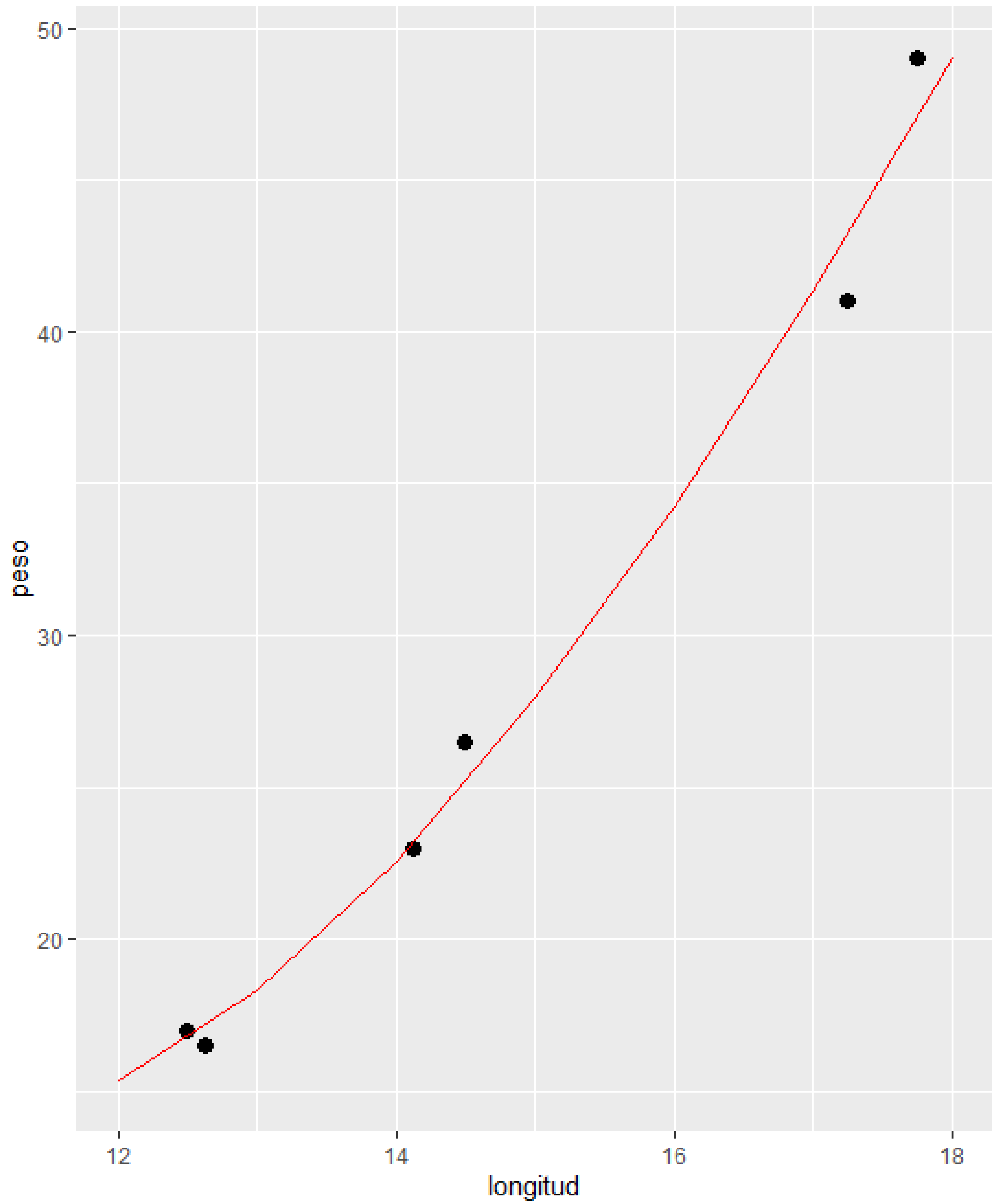
a=133.6

b=-25.717

c=1.6303

d=-0.0257

P(x)=133.6-25.717x+1.6303x^2 -0.0257x^3

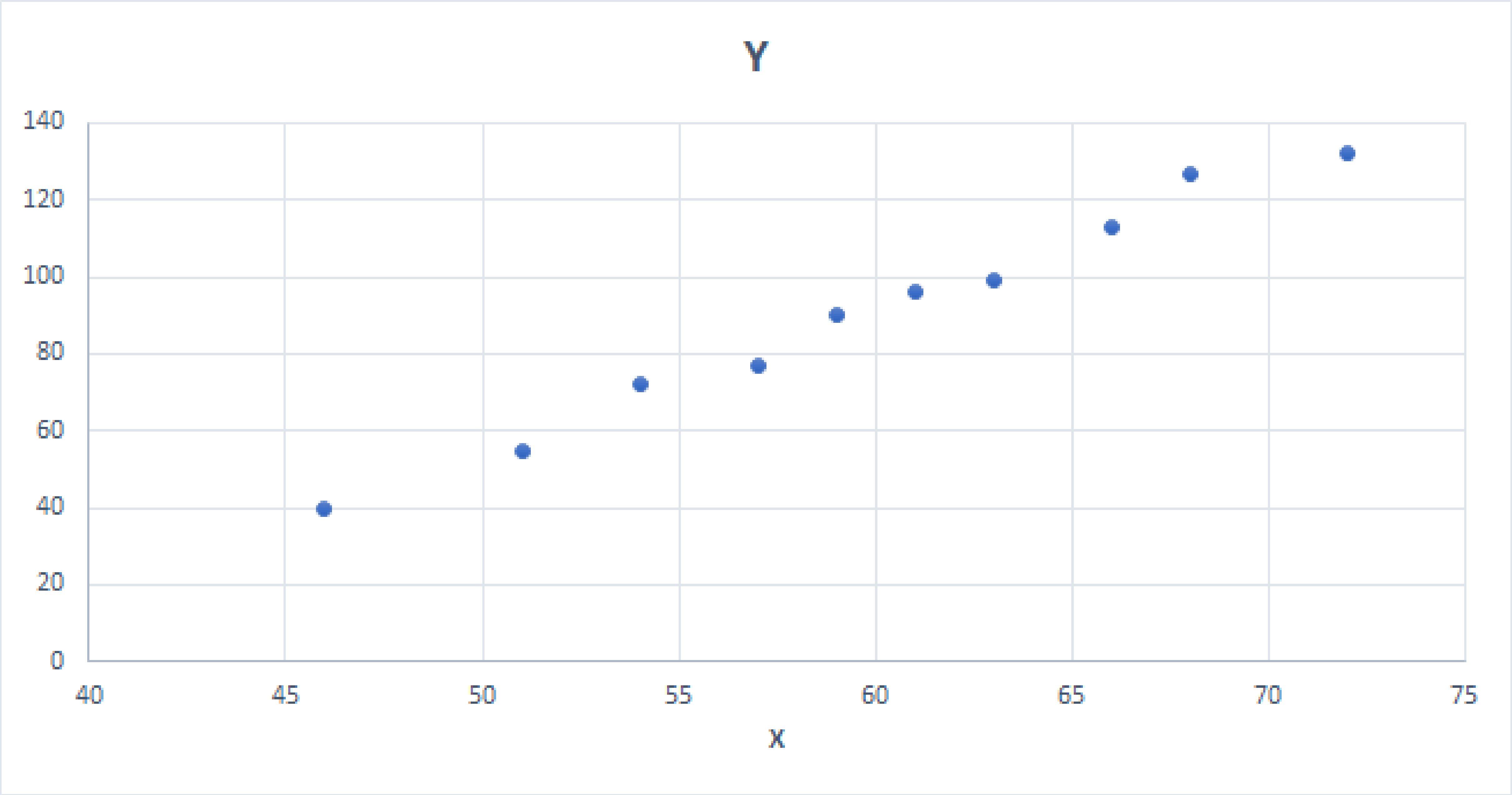


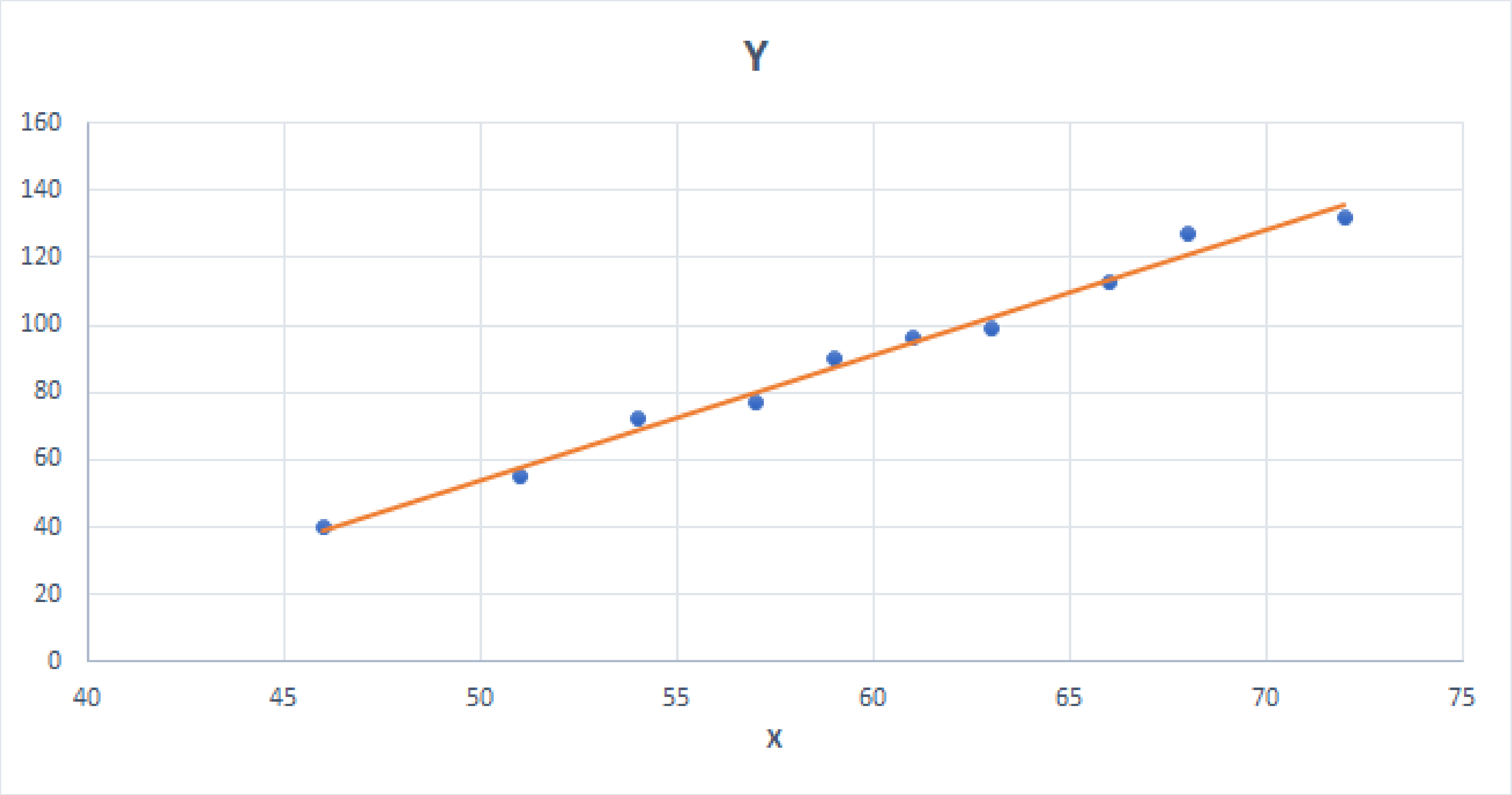
EJEMPLO 3

En los siguientes datos, X es la temperatura Fahrenheit y Y es el número de chirridos que un grillo produce en un minuto.

X	46	51	54	57	59	61	63	66	68	72
Y	40	55	72	77	90	96	99	113	127	132

1-.Graficar los datos




Y
160
140
120
100
80
60
40
20
0
40
45
50
55
60
65
70
75
X

2-. Hacemos la tabla de diferencias divididas para más apoyo

Diferencias Divididas

X	Y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
46	40	3.0000			
51	55	5.6667	0.3333		
54	72	1.6667	-0.6667	-0.0909	
57	77	6.5000	0.9667	0.2042	0.0227
59	90	3.0000	-0.8750	-0.2631	-0.0467
61	96	1.5000	-0.3750	0.0833	0.0385
63	99	4.6667	0.6333	0.1440	0.0067
66	113	7.0000	0.4667	-0.0238	-0.0187
68	127	1.2500	-0.9583	-0.1583	-0.0122
72	132				

3-.Se procede a definir la función del modelo

Forma de la función: P(x)= a + bx

$$Minimizar\ S = \sum_{i=1}^{m}(y_i - (a + bx_i))^2$$

Y las condiciones necesarias para que se de el minimo son:

$$ma + \left(\sum x_i\right)b = \sum y_i \longrightarrow 10a + 597b = 901$$

$$\left(\sum x_i\right)a + \left(\sum x_i^{\,2}\right)b = \sum x_i y_i \longrightarrow 597a + 36217b = 55923$$

Después de resolver las ecuaciones los valores quedan: **a = -130.9693, b= 3.7030**

P(x)= -130.9693 + 3.7030x