

Modelado Matemático

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

RESPUESTAS DEL EXAMEN I

Tipo:1

1. Sunco fabrica tres tipos de gasolina (gas 1, gas 2 y gas 3). Cada tipo se produce mezclando tres tipos de petróleo crudo (crudo 1, crudo 2 y crudo 3). El precio de venta por barril de gasolina y el precio de compra por barril de petróleo crudo se dan en la siguiente tabla. Sunco puede comprar diariamente hasta 5000 barriles de crudo de cada tipo de crudo.

Precio de venta por barril		Precio de compra por barril	
Gas 1	\$70	Crudo 1	\$45
Gas 2	\$60	Crudo 2	\$35
Gas 3	\$50	Crudo 3	\$25

Los tres tipos de gasolina difieren en su octanaje y contenido de azufre. El petróleo crudo mezclado para formar el gas 1 debe tener un octanaje promedio de al menos 10 y contener como máximo un 1% de azufre. El petróleo crudo mezclado para formar el gas 2 debe tener un octanaje promedio de al menos 8 y contener como máximo un 2% de azufre. El petróleo crudo mezclado para formar el gas 3 debe tener un octanaje promedio de al menos 6 y contener como máximo un 1% de azufre. El índice de octano y el contenido de azufre de los tres tipos de crudos se dan en la siguiente tabla. Cuesta \$4 transformar un barril de petróleo en un barril de gasolina, y la refinería de Sunco puede producir hasta 14000 barriles de gasolina al día.

	Índice de octano	Azufre Contenido
Crudo 1	12	0.5%
Crudo 2	6	2.0%
Crudo 3	8	3.0%

Los clientes de Sunco requieren las siguientes cantidades de cada gasolina: gas 1 - 3000 barriles por día; gas 2 - 2000 barriles por día; gas 3 - 1000 barriles por día. La empresa considera una obligación cumplir con estas demandas. Sunco también tiene la opción de publicidad para estimular la demanda de sus productos. Cada dólar gastado diariamente en la publicidad de un tipo particular de gas aumenta la demanda diaria de ese tipo de gas en 10 barriles. Por ejemplo, si Sunco decide gastar \$20 diarios en publicidad de gas 2, la demanda diaria de gas 2 aumentará en $20 \times (10) = 200$ barriles. Formule un LP que le permita a Sunco maximizar las ganancias diarias (ganancias = ingresos-costos).

Solución:

What are the decisions variables?

- a_i = dollars spent daily on advertising gas i ($i = 1, 2, 3$)
- x_{ij} = barrels of crude oil i used daily to produce gas j ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)

Sunco Oil Problem. Information:

Maximum amount of each type of crude

- Crude 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5000$
- Crude 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5000$
- Crude 3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5000$

Demands for each type of gas

- Gas 1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3000 + 10a_1$

- Gas 2: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000 + 10a_2$
- Gas 3: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000 + 10a_3$

Constraints on average octane level

- Gas 1: $(12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31})/(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \geq 10$
- Gas 2: $(12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32})/(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \geq 8$
- Gas 3: $(12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33})/(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \geq 6$

Constraints on percentage of sulfur

- Gas 1: $(0.005x_{11} + 0.02x_{21} + 0.03x_{31})/(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq 0.01$
- Gas 2: $(0.005x_{12} + 0.02x_{22} + 0.03x_{32})/(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \leq 0.02$
- Gas 3: $(0.005x_{13} + 0.02x_{23} + 0.03x_{33})/(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \leq 0.01$

Refinery capacity allows a maximum of 14000 barrels of gasoline produced daily

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 14000$$

Sunco's profit

- Daily revenues from gas sales =
 $70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33})$
- Minus daily cost of purchasing crude oil =
 $45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 25(x_{31} + x_{32} + x_{33})$
- Minus daily advertising costs =
 $a_1 + a_2 + a_3$
- Minus daily production costs =
 $4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33})$

$$Z = 21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} + 41x_{31} + 31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3$$

FINAL FORMULATION:

$$\text{Función objetivo : Max } 21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} + 41x_{31} + 31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3$$

Sujeto a

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} - 10a_1 = 3000$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} - 10a_2 = 2000$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} - 10a_3 = 1000$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5000$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 14000$$

$$2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{31} \geq 0$$

$$4x_{12} - 2x_{22} \geq 0$$

$$6x_{13} + 2x_{33} \geq 0$$

$$-0.005x_{11} + 0.01x_{21} + 0.02x_{31} \leq 0$$

$$-0.015x_{12} + 0.01x_{32} \leq 0$$

$$-0.005x_{13} + 0.01x_{23} + 0.02x_{33} \leq 0$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

Solución:

$x_{11} = 222.22$, $x_{21} = 444.44$, $x_{31} = 333.33$
 $x_{12} = 2111.11$, $x_{22} = 4222.22$, $x_{32} = 3166.67$
 $x_{13} = 666.67$, $x_{23} = 333.34$, $x_{33} = 0$
 $a_1 = 0$, $a_2 = 750$, $a_3 = 0$
 $Z_{Max} = 287500$, that is, Sunco earnings will be \$287,500.

2. Union Airways está agregando vuelos y necesita contratar agentes adicionales de servicio al cliente. La tabla muestra el número mínimo de agentes necesarios para cada período de tiempo. Las cláusulas contractuales establecen que cada agente trabaja un turno de 8 horas 5 días a la semana. Los turnos autorizados son:

Turno 1: 6:00 a.m. hasta las 2:00 p.m.

Turno 4: 4:00 P.M. hasta la medianoche

Turno 2: 8:00 a.m. a las 4:00 p.m.

Turno 3: del mediodía a las 8:00 p.m.

Turno 5: 10:00 P.M. hasta las 6:00 a.m.

La tabla también indica los períodos de tiempo cubiertos por cada turno.

	Time Periods Covered					
Time Period	Shift					Minimum Number of Agents Needed
	1	2	3	4	5	
6:00 A.M. to 8:00 A.M.	✓					48
8:00 A.M. to 10:00 A.M.	✓	✓				79
10:00 A.M. to Noon	✓	✓				65
Noon to 2:00 P.M.	✓	✓	✓			87
2:00 P.M. to 4:00 P.M.		✓	✓			64
4:00 P.M. to 6:00 P.M.			✓	✓		73
6:00 P.M. to 8:00 P.M.			✓	✓		82
8:00 P.M. to 10:00 P.M.				✓		43
10:00 P.M. to Midnight				✓	✓	52
Midnight to 6:00 A.M.					✓	15
Daily cost per agent	\$170	\$160	\$175	\$180	\$195	

Formule un LP que Union Airways pueda usar para cumplir con los requisitos a un costo mínimo.

Solución:

What are the decision variables?

x_i = number of employees assigned to shift i , for $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

UNION AIRWAYS. LP Model:

$$\text{Min } Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$$

subject to

$$x_1 \geq 48$$

6–8 A.M. constraint

$$x_1 + x_2 \geq 79$$

8–10 A.M. constraint

$$x_1 + x_2 \geq 65$$

10 A.M.–Noon constraint

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 87$$

Noon–2 P.M. constraint

$$x_2 + x_3 \geq 64$$

2–4 P.M. constraint

$$x_3 + x_4 \geq 73$$

4–6 P.M. constraint

$$x_3 + x_4 \geq 82$$

6–8 P.M. constraint

$$x_4 \geq 43$$

8–10 P.M. constraint

$$x_4 + x_5 \geq 52$$

10 P.M.–Midnight constraint

$$x_5 \geq 15$$

Midnight–6 A.M. constraint

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Nonnegativity constraints

LP Model in which redundant constraints are emphasized in **red**

$$\begin{array}{llll}
 \text{Min } Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5 & & & \\
 \text{subject to} & x_1 \geq 48 & & 6\text{--}8 \text{ A.M. constraint} \\
 & x_1 + x_2 \geq 79 & & 8\text{--}10 \text{ A.M. constraint} \\
 & \textcolor{red}{x_1 + x_2 \geq 65} & & \textcolor{red}{10 \text{ A.M.} \text{--} \text{Noon constraint}} \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 87 & & \text{Noon--}2 \text{ P.M. constraint} \\
 & x_2 + x_3 \geq 64 & & 2\text{--}4 \text{ P.M. constraint} \\
 & \textcolor{red}{x_3 + x_4 \geq 73} & & \textcolor{red}{4\text{--}6 \text{ P.M. constraint}} \\
 & x_3 + x_4 \geq 82 & & 6\text{--}8 \text{ P.M. constraint} \\
 & x_4 \geq 43 & & 8\text{--}10 \text{ P.M. constraint} \\
 & x_4 + x_5 \geq 52 & & 10 \text{ P.M.} \text{--} \text{Midnight constraint} \\
 & x_5 \geq 15 & & \text{Midnight--}6 \text{ A.M. constraint} \\
 \textcolor{red}{x_1}, x_2, x_3, \textcolor{red}{x_4}, \textcolor{red}{x_5} \geq 0 & & & \text{Nonnegativity constraints}
 \end{array}$$

Optimal Solution:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (48, 31, 39, 43, 15), \quad Z = 30,610$$

3. Kiriakis Electronics produce tres productos. Cada producto debe procesarse en cada uno de los tres tipos de máquinas. Cuando una máquina está en uso, debe ser operada por un trabajador. El tiempo (en horas) requerido para procesar cada producto en cada máquina y el beneficio asociado con cada producto se muestran en la tabla a continuación. Actualmente, hay disponibles cinco máquinas tipo 1, tres máquinas tipo 2 y cuatro máquinas tipo 3. La compañía tiene 10 trabajadores disponibles y debe determinar cuántos trabajadores asignar a cada máquina. La planta está abierta 40 horas por semana, y cada trabajador trabaja 35 horas por semana. Formule un LP que permita a Kiriakis asignar trabajadores a las máquinas de una manera que maximice las ganancias semanales.

	Product 1	Product 2	Product 3
Machine 1	2	3	4
Machine 2	3	5	6
Machine 3	4	7	9
Profit (\$)	6	8	10

Nota: un trabajador no necesita pasar toda la semana de trabajo operando una sola máquina.

Solución: What are the decision variables?

x_i = number of employees assigned to machine i each week, for $i = 1, 2, 3$.

y_j = units of product j produced each week, for $j = 1, 2, 3$.

Kiriakis Electronics. LP Model:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max } Z = 6y_1 + 8y_2 + 10y_3 & \\
 \text{subject to} & 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 35x_1 \\
 & 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 200 \\
 & 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \leq 35x_2 \\
 & 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \leq 120 \\
 & 4y_1 + 7y_2 + 9y_3 \leq 35x_3 \\
 & 4y_1 + 7y_2 + 9y_3 \leq 160 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\
 & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{array}$$

Optimal Solution:

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (2.22, 3.33, 4.45, 38.89, 0, 0), \quad Z = \$233.33$$