Modelo matemático para el control químico con resistencia del Aedes aegypti

Ana Gabriela Pérez Tamez 1810227
Montserrat Moreno González 1859944
Jennifer Priscila de León Flores 1860533

El dengue es una enfermedad viral común en zonas tropicales y subtropicales transmitida por mosquitos del género *Aedes*. El virus es transmitido a los humanos por la picadura de un mosquito hembra infectado. Ya que no existen vacunas que protejan contra la infección, el control de la enfermedad se hace controlando la población adulta o inmadura del mosquito.

Se modela la dinámica de crecimiento del mosquito sometido a control adulticida y con resistencia al químico. Se hace el análisis del modelo mediante análisis clásico de estabilidad local de sistemas dinámicos, lo que permite determinar el umbral de crecimiento del mosquito y a partir de éste establecer una estrategia adecuada de control químico.

DENGUE

El mosquito presenta los siguientes estados de desarrollo: Huevos, larvas, pupas (fase acuática) y finalmente mosquitos maduros (fase aérea). Este proceso lo lleva a cabo en ambientes adecuados para su desarrollo y proliferación de la población.

Las entidades de salud pública del mundo se han puesto en la tarea de disminuir la incidencia del dengue, para ello recurren a varios tipos de controles, ya sea de manera manual o por la utilización de insecticidas. Mediante el primer método se pueden destruir los criaderos, método que depende de la participación de la población humana, mientras que el uso de los insecticidas ha tenido mayor éxito en controlar el vector.

MODELO

El dengue y el mosquito transmisor se encuentra trabajos sobre: La transmisión vertical en el mosquito, la dinámica de transmisión espacio-temporal. dinámica del transmisor, el clima, población,etc.
El modelado se ha hecho utilizando el efecto de adulticidas y larvas en las tasas de mortalidad constantes; mediante el control de los criaderos y aplicando el máximo de Pontryagin.

Mosquitos

La población de mosquitos se divide en dos estados:

- X(t) -> Mosquito adulto en cualquier tiempo t.
- Y(t) -> Mosquito inmaduro en cualquier tiempo t.

Variación en el tiempo de la población de mosquitos adultos

$$\frac{dx}{dt} = f\omega y - \varepsilon x - ux$$

ωy= Crecimiento de la población de mosquitos adultos.
f -> la fracción de mosquitos que no son resistentes al control del químico.
ε-> tasa de control de muerte por causas ajenas.
u-> tasa de control de muerte por efecto del químico.

Población de mosquitos inmaduros

$$\frac{dy}{dt} = g\varphi x\left(1 - \frac{y}{k}\right) - (\beta + \omega)y$$

φ-> Tasa de crecimiento.
k -> Capacidad de carga.
β -> Tasa de muerte natural.
ω -> tasa de maduración.
ωy -> Número promedio de individuos que pasa al estudio adulto.
g -> Fracción de mosquitos inmaduros que no tienen resistencia al químico.

MODELO

Entonces el sistema completo queda: $\begin{cases} \dot{x} - f\omega y - (\varepsilon + u)x \\ \dot{y} - g\varphi x\left(1 - \frac{y}{k}\right) - (\beta + \omega)y \end{cases}$

con f, ε, ω, g, φ, β, k > 0 ; f,g,u ∈ [0,1].

Umbral de crecimiento del mosquito

Para φ constante y el control u= 0, encontramos las soluciones estacionarias haciendo $\frac{dx}{dt} = 0\ y\ \frac{dy}{dt} = 0$ en el sistema, con lo que se tiene que el equilibrio trivial es, (x_0, y_0)=(0,0)

Este equilibrio corresponde a la ausencia de poblaciones en el medio. Por otro lado, el equilibrio no trivial está dado por:

$$(x^1, y^1) = \left(\frac{f\omega k}{(\varepsilon + u)\sigma}(\sigma - 1), \frac{k}{\sigma}(\sigma - 1)\right)$$

Donde $\sigma = \frac{gf\omega\varphi}{(\varepsilon+u)(\beta+\omega)}$ y corresponde al equilibrio en presencia de las poblaciones. La cantidad σ es el umbral de crecimiento del mosquito; en efecto, si σ ≤ 1, el único punto de equilibrio con sentido biológico es el trivial, lo que implica la extinción de la especie. La solución de coexistencia tiene sentido biológico si σ > 1.

MODELO

Dado el sistema [1], el control que garantiza que x(t) y y(t) tiendan a cero cuando t crece está dado por

$$\bar{u} > \frac{gf\omega\varphi}{\pi + \omega} - \varepsilon$$

La expresión permite determinar el valor adecuado para controlar la población de mosquitos no resistentes, siempre que se conozcan los valores de los parámetros y las fracciones de mosquitos adultos e inmaduros que no adquieren resistencia al químico.

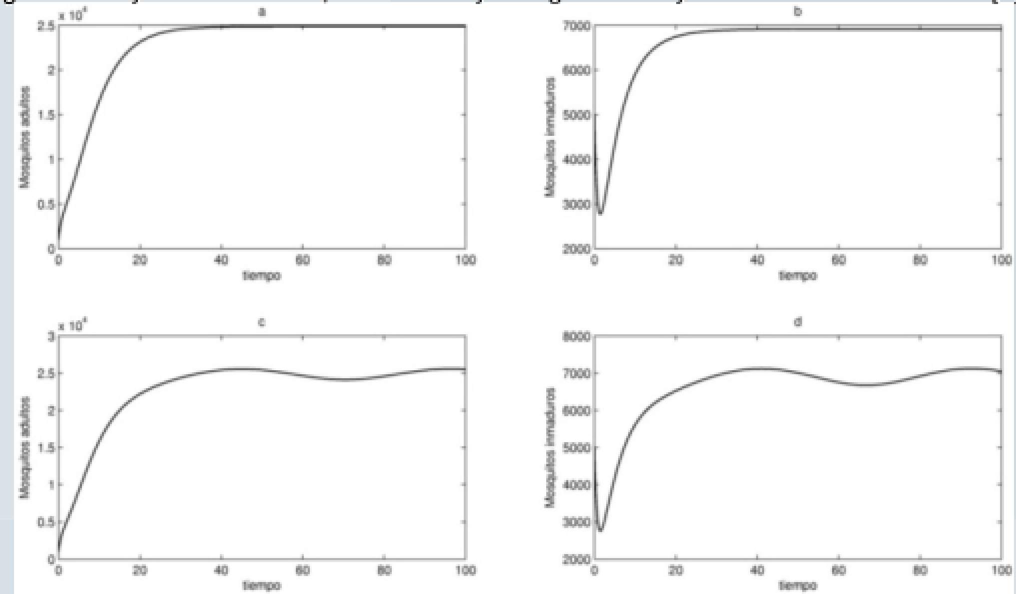
EJEMPLO:

El análisis numérico se hizo teniendo en cuenta el comportamiento de las poblaciones x(t) y y(t) en un periodo de dos años y siguiendo una tasa de ovoposición de los mosquitos maduros constante y con los parámetros usados por Caetano

Significado y valores asignados a las variables y a los parámetros		
Variables y parámetros		Valor
x	Número promedio de mosquitos adultos en un tiempo t	300
y	Número promedio de mosquitos inmaduros en un tiempo t	300
f	Fracción de mosquitos inmaduros que no desarrollan resistencia	1 y 0.7
g	Fracción de huevos sin resistencia al químico	1 y 0.7
ω	Tasa de desarrollo de los estados inmaduros	4
ε	Tasa de mortalidad de los mosquitos maduros	0.1
k	Capacidad de carga de los mosquitos inmaduros	1000
π	Tasa de mortalidad de los mosquitos inmaduros	0.1
φ	Ovoposición de los mosquitos maduros sin y con resistencia	0.9
u	Control químico	0; 0,56 y 0,2

EJEMPLO: Simulación numérica sin control

Figura 1. Gráfica de las funciones $x(t)$ y $y(t)$ sin incluir control ni resistencia. Las gráficas a y b consideran φ constante y las gráficas c y d consideran la función [2]



La Figura 1 muestra que cuando **no se aplica control**, la población de mosquitos crece hasta niveles altos.

En las gráficas a y b se muestra el comportamiento de las dos poblaciones si se considera que la tasa de crecimiento φ es constante. Por otro lado, en las gráficas c y d se muestra el comportamiento de las poblaciones cuando se asume una función periódica,

$$\varphi = \rho(1 - \delta \sin(\alpha t - \theta))$$

con $\delta = 0{,}08$, $\alpha = \frac{2\pi}{52}$, $\rho = 0{,}9$ y $\theta = 0$. Esta función fue propuesta por Caetano para describir el crecimiento de la población de mosquitos, considerando la influencia de los cambios estacionales.

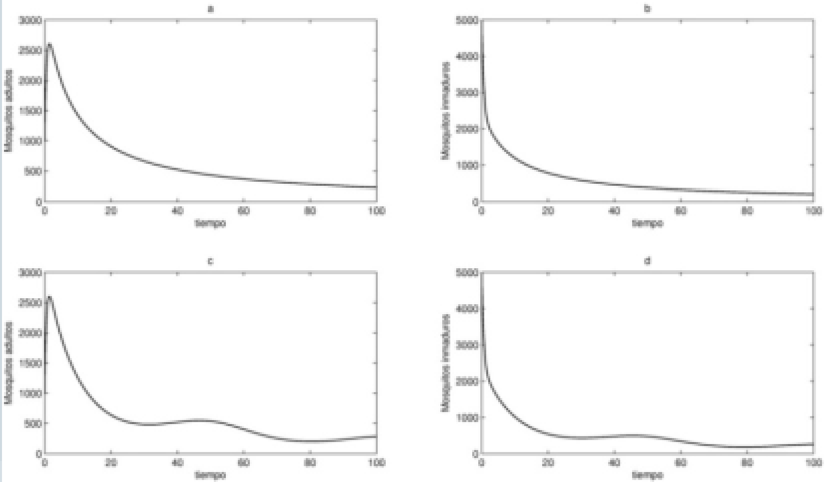
Es importante ver que las oscilaciones que se observan en las graficas c y d de la Figura 1, representan la respuesta de las poblaciones a la estacionalidad considerada en la función [3]; sin embargo, el comportamiento en ambos casos es cualitativamente equivalente.

EJEMPLO: Simulación con control

Si se considera que los mosquitos no adquieren resistencia al químico, es decir que f =1 y g = 1, se tiene que $\bar{u} \geq 0.56$. Con esta consideración se hace la simulación de la Figura 2, en la cual se observa como efectivamente, el control aplicado es efectivo en la reducción de la población de mosquitos.

Considerar que las poblaciones adquieren cierto grado de resistencia, de manera que $f = 0.7$ y $g = 0.7$, implica que la población de mosquitos no resistentes es menor. En este caso $\bar{u} \geq 0.1469$, da resultados muy semejantes a los que se muestran en la Figura 2. Sin embargo se aplicara un control un poco más alto.

Figura 2. Gráfica de las funciones $x(t)$ y $y(t)$ con control pero sin resistencia. Las graficas a y b consideran φ constante y las gráficas c y d consideran la función [2]. El valor del control es establecido con la condición [3]



REFERENCIAS.

https://www.scielosp.org/article/rsap/2010.v12n6/1033-1041/es/