PRESENTACIÓN 2

Carlos de Jesús Morales Tovar	1857712
Saúl Andrés Rivera Castillo	1857810
Jesús Alejandro Espinosa Orrante	1941500

Problema de descubrir datos ocultos

Supongamos que el INEGI publica la siguiente tabla de datos con distintos gastos promedio de diversos colectivos de una región. Nótese que se dan tanto datos concretos como sumas marginales y totales. Sin embargo, algunos datos se consideran confidenciales, ya que su publicación revelaría información privada.

Por ejemplo, se considera que el dato referente al gasto medio en "vicios" de los "obispos" de una región es información confidencial, porque en dicha región sólo hay un obispo y, por ello, su publicación estaría revelando información de un individuo con nombre y apellidos conocidos. No ocurre igual con otros colectivos porque tienen más miembros. No obstante, algunos deben igualmente ser suprimidos para proteger el caso anterior. Los datos suprimidos son los que aparecen marcados con asterisco.

Si sólo sabemos que ninguno de los datos ocultos puede ser negativo, **¿cuál es el rango más estrecho de valores que esta tabla revelará sobre el gasto del obispo en vicios?**

	policía	profesor	maestro	vigilante	obispo	estudiante	TOTAL
lectura	5	345	130	15	212	105	812
vicios	52	*	212	234	*	234	953
gimnasia	432	*	45	*	7	32	726
ropa	34	90	85	*	*	52	271
TOTAL	523	576	472	447	321	423	2762

Modelo matemático

Consideremos una variable X_{ij} asociada a cada celda (es decir, a cada fila i y a cada columna j) representando el verdadero valor en la tabla.
Ahora el problema planteado consiste en resolver dos problemas lineales, **minimizando y maximizando** la variable x_{25}, respectivamente.

$$Min\, X_{25} \qquad\qquad Max\, X_{25}$$

Ambos valores óptimos definirán el rango dentro del cual debe estar el valor no publicado de la celda en fila 2 y columna 5.

Modelo matemático

Las variables están atadas por ecuaciones: una por cada fila y por cada columna.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} - X_{17} = 0$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} - X_{27} = 0$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{36} - X_{37} = 0$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} - X_{47} = 0$$

$$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} + X_{56} - X_{57} = 0$$

$$X_{11}, X_{12}, \ldots\ldots, X_{56}, X_{57} \geq 0$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} - X_{51} = 0$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} - X_{52} = 0$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} - X_{53} = 0$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} - X_{54} = 0$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} - X_{55} = 0$$

$$X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} - X_{56} = 0$$

$$X_{17} + X_{27} + X_{37} + X_{47} - X_{57} = 0$$

Modelo matemático

Sustituyendo los valores que sí nos proporciona la tabla y restándoselos a los valores totales (tanto de filas como de columnas) obtenemos las siguientes **restricciones:**

$$X_{22} + X_{25} = 221$$

$$X_{22} + X_{32} = 141$$

$$X_{32} + X_{34} = 210$$

$$X_{34} + X_{44} = 198$$

$$X_{44} + X_{45} = 10$$

$$X_{25} + X_{45} = 102$$

$$X_{22}, X_{25}, \ldots\ldots, X_{44}, X_{45} \geq 0$$

Este tipo de problemas son particularmente relevantes en el control de la privacidad durante la publicación de tablas estadísticas.

Problema de optimizar una inversión

Grupo México ha puesto sus acciones en bolsa y un inversor ha descubierto la clave para sacar el beneficio que en el terreno de juego el resto de los accionistas no han obtenido en toda la temporada. El funcionamiento es el siguiente: al inicio de la temporada se puede invertir en ella una cantidad cualquiera de x pesos, al comenzar la siguiente temporada se debe invertir adicionalmente $x/2$ pesos, y luego pasada otra temporada se obtienen $2x$ pesos.

Si en el momento actual el inversor dispone de 100000 pesos, **¿cuál debe ser su plan de inversión en tales acciones para disponer de un máximo capital dentro de 6 años?**

Modelo matemático

Consideremos la variable **Xi** asociada a la temporada i -ésima (i=1,...,6), representando el dinero invertido al inicio de dicha temporada.

El esquema de inversión sería de la siguiente forma:

Temporadas	Nueva Inversión	Inversión adicional	Beneficios
0	x_0	——	——
1	x_1	$x_0/2$	——
2	x_2	$x_1/2$	$2x_0$
3	x_3	$x_2/2$	$2x_1$
4	x_4	$x_3/2$	$2x_2$
5	——	$x_4/2$	$2x_3$
6	——	——	$2x_4$

Modelo matemático

Por tanto, la **función objetivo** del problema sería:

$$\text{Max: } 2X_0 + 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4$$

Por su parte, las **restricciones** estarían definidas de la siguiente forma:

Inversión ≤ Capital disponible

Modelo matemático

El problema estaría sujeto a las siguientes **restricciones**:

$$\textbf{1er año: } X_1 + \frac{X_0}{2} \leq (100000 - X_0)$$

$$\textbf{2do año: } X_2 + \frac{X_1}{2} \leq \left(100000 + \frac{X_0}{2} - X_1\right)$$

$$\textbf{3er año: } X_3 + \frac{X_2}{2} \leq \left(100000 + \frac{X_0}{2} + \frac{X_1}{2} - X_2\right)$$

$$\textbf{4to año: } X_4 + \frac{X_3}{2} \leq \left(100000 + \frac{X_0}{2} + \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2} - X_3\right)$$

$$\textbf{5to año: } \frac{X_4}{2} \leq \left(100000 + \frac{X_0}{2} + \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{2} - X_4\right)$$

$$X_0, X_1, X_{2,} X_3, X_4 \geq 0$$

Problema de optimizar un divisor de tensión

Consideremos el divisor de tensión de la figura 2. En él se asumen dos generadores de tensión, cada uno de los cuales produce una fuerza electromotriz de E_1 y E_2 voltios, respectivamente. Asumiremos que $E_1 > E_2$ para que el trozo de circuito representado en la figura mueva corriente en el sentido indicado por las flechas. También se asumen conocidas las tolerancias asociadas a dichos potenciales, es decir, se asumen dados valores mínimos E_1^-, E_2^- y máximos E_1^+, E_2^+ para E_1, E_2, respectivamente. Se desea determinar los valores centrados de las resistencias R_1 y R_2 de manera que la impedancia resistiva del divisor de tensión sea mínima y el potencial de salida V_0 se mantenga siempre dentro de un intervalo predeterminado $\left[V_0^{\min}, V_0^{\max}\right]$ cuando la corriente I_0 que se desea sacar del divisor (al conectar algún componente adicional) está entre un mínimo igual a $I_0^{\min}$ y un máximo igual a $I_0^{\max}$. Se asumen conocidas las tolerancias que tendrán las resistencias y que $E_1^- \geq V_0^{\max} \geq V_0^{\min} \geq E_2^+$.

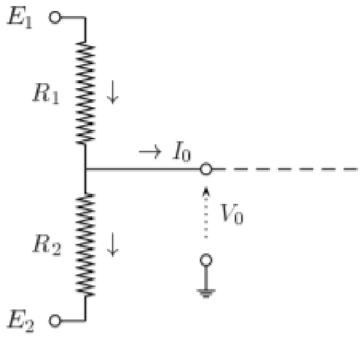

Figura 2. Divisor de tensión.

Modelo matemático

La impedancia resistiva total del divisor viene dada por el valor:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

ya que las dos resistencias están colocadas en paralelo. A fin de obtener un modelo lineal en las variables (las resistencias), conviene trabajar con las admitancias asociadas, es decir, con los valores

$$G_i = \frac{1}{R_i}, \forall i \in \{0,1,2\}$$

Con esta notación la admitancia total del divisor es $G_0 = G_1 + G_2$. Representemos con $+$ y $-$ el mayor y menor valor, respectivamente, del valor de cada característica del circuito al considerar su tolerancia.

Modelo matemático

El objetivo del problema propuesto equivale a minimizar el mayor valor R_0^+ que puede alcanzar la impedancia, o alternativamente a maximizar el menor valor que puede alcanzar su admitancia $G_0^- = G_1^- + G_2^-$. Si denotamos por $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ los valores centrados de las admitancias G_1 y G_2, respectivamente, es decir, valores tales que $G_1^- = (1-\varepsilon_1)\overline{G_1}$ y $G_2^- = (1-\varepsilon_2)\overline{G_2}$ para ε_1 y ε_2 dos tolerancias conocidas, entonces el objetivo es:

$$\max[(1-\varepsilon_1)\overline{G_1} + (1-\varepsilon_2)\overline{G_2}] \quad (1)$$

Modelo matemático

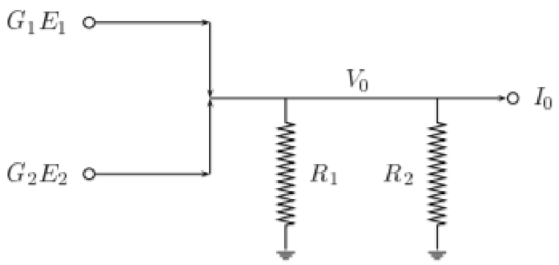

Figura 3. Circuito equivalente con fuentes de intensidad.

Para expresar las restricciones sobre las variables $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$, observemos que

$$V_0 = \frac{E_1G_1 + E_2G_2 - I_0}{G_1 + G_2}$$

Esto es fácilmente deducible mediante la figura 3, donde se representa el mismo circuito con fuentes de intensidad (la figura 2 dio una representación del circuito con fuentes de voltaje).

Nótese que de esta representación alternativa se deduce que, si mantenemos fija R_2 , V_0 aumenta cuando R_1 disminuye, es decir, cuando G_1 aumenta. En efecto, analíticamente también se deduce esta misma conclusión observando que la derivada parcial de V_0 respecto de G_1 es:

$$\frac{\partial V_0}{\partial G_1} = \frac{G_2(E_1 - E_2) + I_0}{(G_1 + G_2)^2} > 0$$

Modelo matemático

De igual forma, V_0 aumenta cuando G_1 se mantiene y G_2 disminuye. Consecuentemente, V_0 asumirá su menor valor posible (que se desea sea no inferior a $V_0^{\min}$) cuando G_1 asuma su menor valor G_1^-, G_2 asuma su mayor valor ${G_2}^+$, y la corriente que se extraiga I_0 sea $I_0^{\min}$.

De este modo la restricción $V_0 \geq V_0^{\min}$ equivale a imponer

$$\frac{E_1^- G_1^- + E_2^- G_2^+ - I_0^{\max}}{G_1^- + G_2^+} \geq V_0^{\min}$$

o, alternativamente,

$$(1-\varepsilon_1)\left(E_1^- - V_0^{\min}\right)\overline{G_1} + (1+\varepsilon_2)\left(E_2^- - V_0^{\min}\right)\overline{G_2} \geq I_0^{\max} . \qquad (2)$$

Análogamente la restricción $V_0 \leq V_0^{\max}$ equivale a imponer

$$(1+\varepsilon_1)(E_1^+ - V_0^{\max})\overline{G_1} + (1-\varepsilon_2)(E_2^+ - V_0^{\max})\overline{G_2} \leq I_0^{\min} . \qquad (3)$$

Modelo matemático

La unión de las expresiones (1), (2) y (3), junto con la no negatividad de las variables $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$, configuran un modelo matemático de Programación Lineal.

Función objetivo

$$\max[(1-\varepsilon_1)\overline{G_1}+(1-\varepsilon_2)\overline{G_2}]$$

Restricciones

$$(1-\varepsilon_1)\left(E_1^- - V_0^{\min}\right)\overline{G_1}+(1+\varepsilon_2)\left(E_2^- - V_0^{\min}\right)\overline{G_2}\geq I_0^{\max}$$

$$(1+\varepsilon_1)(E_1^+ - V_0^{\max})\overline{G_1}+(1-\varepsilon_2)(E_2^+ - V_0^{\max})\overline{G_2}\leq I_0^{\min}$$

$$\overline{G_1}\geq 0$$

$$\overline{G_2}\geq 0$$