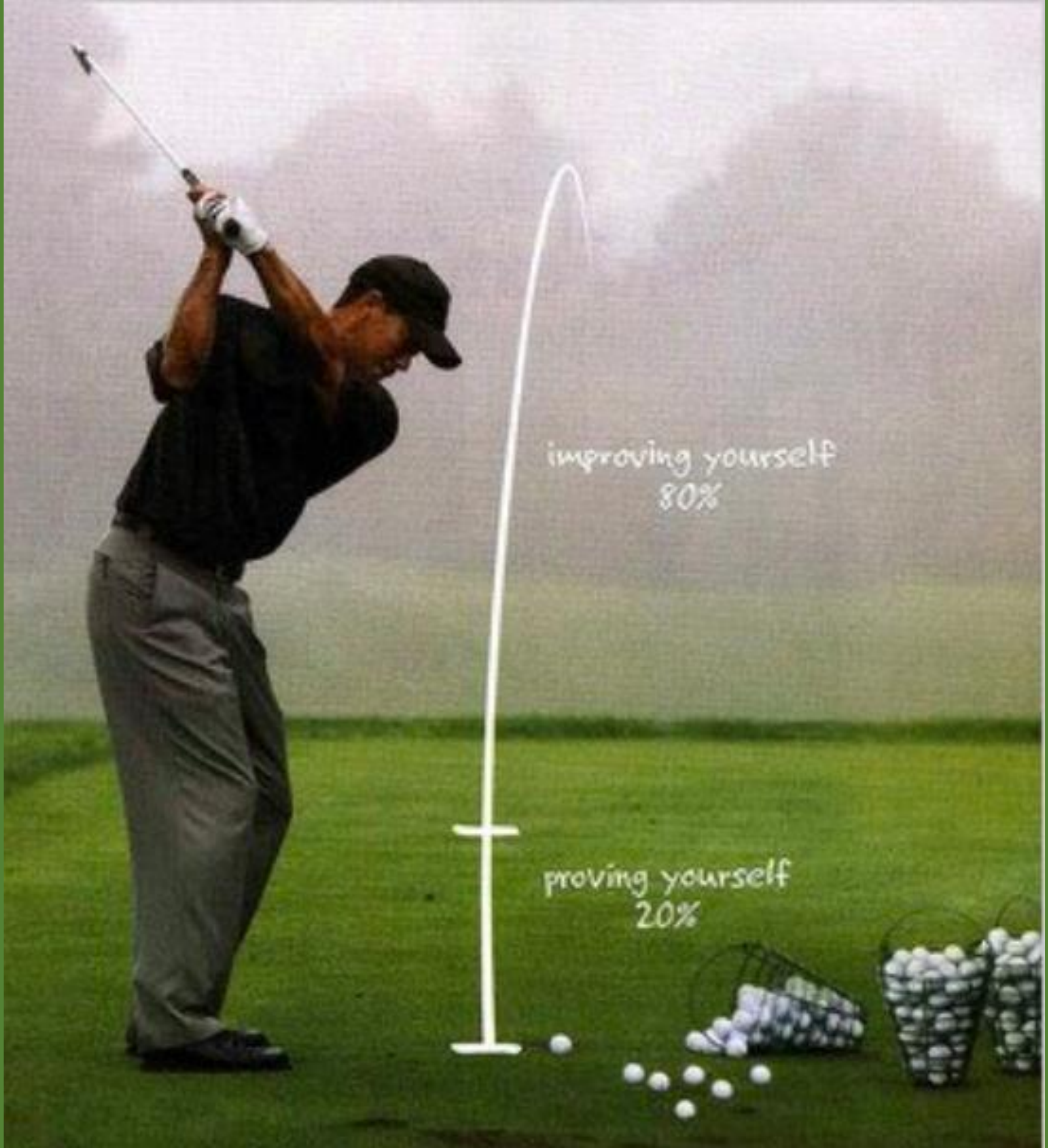
improving yourself
80%
proving yourself
20%

Ejemplo 1: PROTRAC, Inc. produce dos líneas de maquinaria pesada.

1. Una de sus líneas de productos, llamada equipo de excavación (la E), se utiliza de manera primordial en aplicaciones de construcción.
2. La otra línea, denominada equipo para la silvicultura (la S), está destinada a la industria maderera.

Ambas maquinarias son fabricadas en los mismos departamentos y con el mismo equipo.

Las proyecciones económicas correspondientes al siguiente mes, el gerente de mercadotecnia de PROTRAC ha considerado que durante ese periodo será posible vender todas las E y S que la compañía sea capaz de producir.

La gerencia de Planificación tiene que recomendar cual será la meta de producción para el mes próximo.

Es decir, La cantidad de E y S que se deberán fabricar a fin de maximizar la contribución del mes entrante a las ganancias (es decir, el margen de contribución, definido como los ingresos menos los costos variables)

Los datos de PROTRAC La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores :

- El margen de contribución unitaria de PROTRAC es:
  de $5000 por cada E vendida y de $4000 por cada S.

- Cada producto pasa por las operaciones de maquinado, tanto en el departamento A como en el B.

Los datos de PROTRAC La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores :

- Para la producción correspondiente al mes próximo, estos dos departamentos tienen tiempos disponibles de 150 y 160 horas, respectivamente. La fabricación de cada E requiere 10 horas de maquinado en el departamento A y 20 horas en el departamento B, mientras que la de cada S requiere 15 horas en el departamento A y 10 en el B.

Maquinas	Horas de Procesamiento	
	Dept A	Dept B
E	10	20
S	15	10
Horas Disponibles	150	160

- Las horas totales de trabajo invertidas en la prueba de productos terminados han de ser mayor o igual a 135 horas. Estas pruebas se llevan a cabo en un tercer departamento y no tienen nada que ver con las actividades de los departamentos A y B. Cada E es sometida a pruebas durante 30 horas y cada S durante 10.

Los datos de PROTRAC La toma de esta decisión requiere la consideración de los siguientes factores importantes:

- Con el fin de mantener su posición actual en el mercado, la alta gerencia ha decretado como política operativa que:
  deberá construirse cuyo menos una S por cada tres E que sean fabricadas.

- Uno de los principales distribuidores ha ordenado un total de cuyo menos cinco E y S (en cualquier combinación) para el próximo mes, por lo cual tendrá que producirse por lo menos esa cantidad.

¿Que Decisión tenemos que tomar?

Determinar las cantidades de maquinas E y S a fabricar en el mes

Las variables de decisión del modelo son:

E : cantidad de E a Fabricar

S : cantidad de S a Fabricar

El margen de contribución unitaria de PROTRAC es de $5000 por cada E vendida y de $4000 por cada S .

Se quiere maximizar la contribución total a las ganancias :

$$\textbf{Max } 5000\,E + 4000\,S$$

- Para la producción correspondiente al mes próximo, El departamento A tiene una disponibilidad de 150 horas y mientras que el departamento B 160 horas. La fabricación de cada E requiere 10 horas de maquinado en el departamento A y 20 horas en el departamento B, mientras que cada S requiere de 15 horas en el departamento A y 10 horas en el B.

Maquinas	Horas de Procesamiento	
	Dept A	Dept B
E	10	20
S	15	10
Horas Disponibles	150	160

$10\,E + 15\,S$: Total de horas empleadas en el departamento A.

$20\,E + 10\,S$: Total de horas empleadas en el departamento B.

Hay un máximo de 150 y 160 horas disponibles en los departamentos A y B respectivamente, tendrá que satisfacer la restricciones:

$$10\,E + 15\,S \le 150$$

$$20\,E + 10\,S \le 160$$

- Las horas totales de trabajo invertidas en la prueba de productos terminados han de ser mayor o igual a 135 horas.

- Estas pruebas se llevan a cabo en un tercer departamento y no tienen nada que ver con las actividades de los departamentos A y B. Cada E es sometida a pruebas durante 30 horas y cada S durante 10.

$$30E + 10S \geq 135$$

- Con el fin de mantener su posición actual en el mercado, la alta gerencia ha decretado como política operativa que: deberá construirse al menos una S por cada tres E que sean fabricadas.

S	E
1	3
2	6
3	9

$$E <= 3S \quad \text{(sub. S=1, E=1 para averiguar)}$$

$$E - 3S <= 0$$

$$\frac{E}{3} <= S$$

- Uno de los principales distribuidores ha ordenado un total de cuyo menos cinco E y S (en cualquier combinación) para el próximo mes, por lo cual tendrá que producirse por lo menos esa cantidad.

$$E + S >= 5$$

Maximizar $z = 5000\,E + 4000\,S$

Sujeto a

$$10\,E + 15\,S \leq 150$$
$$20\,E + 10\,S \leq 160$$
$$30\,E + 10\,S \geq 135$$
$$E + S \geq 5$$
$$E - 3\,S \leq 0$$

$$E\,,\,F \geq 0$$

Ejemplo 2: Granja *Regia* consume diariamente un mínimo de 80 lbs de un alimento especial, el cual es una mezcla de maíz y soja con las siguientes composiciones:

	lb por lb de forraje		
Forraje	Proteína	Fibra	Costo ($/lb)
Maíz	0.09	0.02	3
Soja	0.60	0.06	9

Las necesidades dietéticas del alimento especial son un mínimo de 30% de proteína y un máximo de 5% de fibra.

El objetivo es determinar la mezcla diaria de alimento a un costo mínimo.

¿Que Decisión tenemos que tomar?

Determinar las cantidades de libras de Maíz y Soja a incluir en la mezcla

Las variables de decisión del modelo son:

x_1 : libras de maíz en la mezcla diaria

x_2 : libras de soja en la mezcla diaria

Forraje	Costo ($/lb)
Maíz	3
Soja	9

El objetivo es minimizar el costo diario total (en Pesos) de la mezcla de alimento:

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 9x_2$$

Las variables de decisión del modelo son:

x_1 : libras de maíz en la mezcla diaria

x_2 : libras de soja en la mezcla diaria

Granja Regia requiere un mínimo de 80 lb de alimento al día.

$$x_1 + x_2 >= 80$$

	lb por lb de forraje
Forraje	Proteína
Maíz	0.09
Soja	0.60

La cantidad de libras de proteína contenida en la mezcla viene dada por:

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \text{ lbs de Proteína}$$

0.09 lbs de Proteína/lbs de Maíz * x_1 lbs de Maíz = 0.09 x_1 lbs de Proteína

La cantidad de lbs de proteína debe ser mayor o igual al 30% de la mezcla total del alimento

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3\,(x_1 + x_2)$$

Agrupando las variables, tenemos:

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3\,(x_1 + x_2)$$
$$0.09x_1 + 0.6x_2 - 0.3\,x_1 - 0.3\,x_2 \geq 0$$
$$-0.21x_1 + 0.3x_2 \geq 0$$

	lb por lb de forraje
Forraje	Fibra
Maíz	0.02
Soja	0.06

La cantidad libras de Fibra contenida en x_1 libras de Maíz y en x_2 libras de Soya es :

$$0.02x_1 + 0.06x_2$$

Esta cantidad debe ser como máximo un 5% de la mezcla total de alimentos :

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \ <= 0.05(x_1 + x_2)$$

Agrupando las variables:

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05 (x_1 + x_2)$$

$$0.02x_1 + 0.06x_2 - 0.05 x_1 - 0.05 x_2 \leq 0$$

$$-0.03 x_1 + 0.01x_2 \leq 0$$

Minimizar $z = 3x_1 + 9X_2$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{rcrl}
x_1 & + & x_2 & \geq 80 \\
-0.21x_1 & + & 0.3x_2 & \geq 0 \\
-0.03x_1 & + & 0.01x_2 & \leq 0 \\
x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Microsoft Excel Worksheet

Microsoft Excel Worksheet

Ejemplo 3: La compañía TUK TUK MTY, necesita determinar cuantos vehículos construir para los tres cuatrimestres del año (un cuatrimestre equivale a un periodo de cuatro meses)

- TUK TUK MTY ha cumplir con las demandas a tiempo, por lo que no se consideran faltantes o reposiciones.

- La demanda para tres cuatrimestres del año se tiene una de manda de 200, 350 y 290 vehiculos respectivamente. Al comienzo del primer cautrimestre hay 10 vehicuos en inventario, y para el final del tercer cuatriestre se quieren dejar 15 vehiculos en inventario.

- Durante cada cuatrimestre, TUK TUK MTY puede producir hasta 300 vehiculos con mano de obra en horario regular con un costo total de $6000 por unidad

- Con personal en tiempo extra durante cualquier cuatrimestre, TUK TUK MTY puede fabricar vehiculos adicionales con un costo adicional de mano de obra en tiempo extra resultando en $6950 por vehiculo.

- Los vehículos en inventario al final de cada cuatrimestre, luego de cumplir con la demanda, generan un costo de almacenamiento de $ 100 por vehiculo.

- Usando programación lineal, formula y resulve via solver, un esquema de producción que minimice la suma del costo de producción y de inventario durante los siguientes cuatrimestres.

Variables de Decisión

TRi = la cantidad de autos producidos en el horario estándar en el cuatrimestre i
TEi = la cantidad de autos producidos en tiempo extra en el cuatritrimestre i
IVi = la cantidad de autos en el inventario al final del cuatrimestre i

- Los vehículos construidos en horario tiempo regular con un costo total de $6000 por unidad.
- Los vehículos construidos en tiempo tiempo extra tienen un costo $6950 por vehiculo.
- Los vehículos en inventario al final de cada cuatrimestre, luego de cumplir con la demanda, generan un costo de almacenamiento de $ 100 por vehiculo.

Función Objetivo:

Minimizar z= 6000 (TR1+TR2+TR3) + 6950 (TE1+TE2+TE3) + 100(IV1 +IV2 +IV3)

Durante cada cuatrimestre, TUK TUK MTY puede producir hasta 300 vehículos con mano de obra en horario regular

$$TR_i \leq 300 \quad i=1,2,3$$

- Al comienzo del primer cautrimestre hay 10 vehículos en inventario

$$IV_0 = 10$$

- Para el final del tercer cuatrimestre se quieren dejar 15 vehículos en inventario

$$IV_3 = 15$$

TRi = la cantidad de autos producidos en el <u>horario estándar</u> en el cuatrimestre i
TEi = la cantidad de autos producidos en <u>tiempo extra</u> en el cuatritrimestre i
IVi = la cantidad de autos <u>en el inventario</u> al final del cuatrimestre i

- La demanda para tres cuatrimestres del año se tiene una demanda de 200 , 350, 290 vehículos respectivamente

Demanda en el cuatrimestre 1 : IV0 + TR1 + TE1 - IV1 = 200

Demanda en el cuatrimestre 2 : IV1 + TR2 + TE2 - IV2 = 350

Demanda en el cuatrimestre 3 : IV2 + TR3 + TE3 - IV3 = 290

$$\text{Minimizar } z = 6000\,(TR1+TR2+TR3) + 6950\,(TE1+TE2+TE3) + 100(IV1 + IV2 + IV3)$$

Sujeto a:

$$TRi \leq 300 \qquad i=1,2,3$$

$$IV0 = 10$$

$$IV3 = 15$$

$$IV0 + TR1 + TE1 - IV1 = 200$$

$$IV1 + TR2 + TE2 - IV2 = 350$$

$$IV2 + TR3 + TE3 - IV3 = 290$$

$$IVi,\ TRi,\ TEi \geq 0$$

Microsoft Excel Worksheet

Ejemplo 4: Programación de las fuerzas de seguridad (un problema de programación) :

Un administrador de personal debe programar el personal de seguridad, de manera que se satisfagan los requisitos de personal de guardia indicados en la siguiente tabla:

Horario	Mínima Cantidad de Oficiales Requeridos
Medianoche - 4 a.m.	5
4 a.m. - 8 a.m.	7
8 a.m. - Mediodía	15
Mediodía - 4 p.m.	7
4 p.m. - 8 p.m.	12
8 p.m. - Medianoche	9

- Los Oficiales trabajan por turnos de ocho (8) horas (Inicio al Fin).
- Cada día hay seis (6) de esos turnos (1 – 6).
- La hora de inicio y fin de cada turno aparece en la siguiente tabla:

Turno	Inicio	Fin
1	Medianoche	8:00 a.m.
2	4 a.m.	Mediodía
3	8:00 a.m.	4:00 p.m.
4	Mediodía	8:00 p.m.
5	4:00 p.m.	Medianoche
6	8:00 p.m.	4:00 a.m.

El gerente de personal quiere determinar la cantidad de Oficiales que deberán trabajar en cada turno, de manera que se logre minimizar el total de Oficiales empleados, pero sin dejar de satisfacer los requerimientos correspondientes a los turnos de guardia.

Podemos definir las **Variables de Decisión** como:

X_i cantidad de Oficiales que estarán en servicio durante el turno i

Se requiere minimizar la cantidad de Oficiales por turno (Función Objetivo):

$$\text{Minimizar } z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

Hay que asegurar que la cantidad de vigilantes en servicio por cada turno de 8 horas, sea suficiente para satisfacer la cantidad mínima requerida cada 4 horas!!

Turno	Inicio	Fin
1	Medianoche	8:00 a.m.
2	4 a.m.	Mediodía
3	8:00 a.m.	4:00 p.m.
4	Mediodía	8:00 p.m.
5	4:00 p.m.	Medianoche
6	8:00 p.m.	4:00 a.m.

+

Horario	Mínima Cantidad de Oficiales Requeridos
Medianoche - 4 a.m.	5
4 a.m. - 8 a.m.	7
8 a.m. - Mediodía	15
Mediodía - 4 p.m.	7
4 p.m. - 8 p.m.	12
8 p.m. - Medianoche	9

Combinando estas Restricciones

Obtenemos :

Turno	Medianoche 4:00 a.m.	4:00 a.m. 8 :00a.m.	8:00 a.m. Mediodía	Mediodía 4:00 p.m.	4:00 p.m. 8:00p.m.	8:00 p.m. Medianoche
1	X_1	X_1				
2		X_2	X_2			
3			X_3	X_3		
4				X_4	X_4	
5					X_5	X_5
6	X_6					X_6

Requerimientos	5	7	15	7	12	9

Hay que asegurar que la cantidad de vigilantes en servicio por cada turno de 8 horas, sea suficiente para satisfacer la cantidad mínima requerida cada 4 horas!!

Turno	Medianoche 4:00 a.m.	4:00 a.m. 8 :00 a.m.	8:00 a.m. Mediodía	Mediodía 4:00 p.m.	4:00 p.m. 8:00 p.m.	8:00 p.m. Medianoche
1	X_1	X_1				
2		X_2	X_2			
3			X_3	X_3		
4				X_4	X_4	
5					X_5	X_5
6	X_6					X_6

Requerimientos	5	7	15	7	12	9

Minimizar $z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

Sujeto a :

$$
\begin{array}{llllllll}
X_1 & & & & & + X_6 & \geq 5 \\
X_1 & + X_2 & & & & & \geq 7 \\
& X_2 & + X_3 & & & & \geq 15 \\
& & X_3 & + X_4 & & & \geq 7 \\
& & & X_4 & + X_5 & & \geq 12 \\
& & & & X_5 & + X_6 & \geq 9
\end{array}
$$

$$X_{1, \ldots,} X_6 \geq 0$$

Microsoft Excel Worksheet

Ejemplo 5: Modelos de Procesos de Producción : Tres productos

Una compañía produce tres productos A, B y C y puede venderlos en cantidades ilimitadas en los siguientes precios unitarios: A, $10; B, $56; C, $100.

- Una unidad de A requiere una hora de mano de Obra.
- Una unidad de B, requiere dos (2) horas de mano de obra, de dos (2) unidades de A.
- C requiere tres (3) horas de mano de obra y de una (1) unidad de B.

Se tienen 80 horas disponibles de mano de obra.

Producto	precio de venta	Horas de Mano de Obra
A	10	1
B	56	2
C	100	3
Disponibilidad		80

Variables de Decision:

X_A : Unidades de A a ser producidas
X_{AV} : Unidades de A a ser vendidas
X_B : Unidades de B a ser producidas
X_{BV} : Unidades de B a ser vendidas
X_C : Unidades de C a ser producidas y vendidas

Objetivo: Maximizar $z= 10\ X_{AV} + 56\ X_{BV} + 100\ X_C$

Restricciones:

- Disponibilidad de Mano de Obra
- Relación entre los productos

Modelo de Producción: Tres Productos

Restricciones:

- Horas de Mano de Obra

Producto	Horas de Mano de Obra
A	1
B	2
C	3
Disponibilidad	80

$$X_A + 2X_B + 3X_C \leq 80$$

Relaciones entre Productos

Por cada Unidad de B se requiren dos unidades de A

Las cantidades a producir de A han de ser igual a la cantidad de unidades para vender de A mas 2 veces las unidades a producir de B. $X_A = X_{AV} + 2X_B$

$$X_A - X_{AV} - 2X_B = 0$$

Por cada unidad de C a producir se requiere una unidad de B

Las cantidades a producir de B han de ser igual a la cantidad a vender de B mas las cantidades a producir de C. $X_B = X_{BV} + X_C$

$$X_B - X_{BV} - X_C = 0$$

Maximizar $z = 10\,X_{Av} + 56\,X_{Bv} + 100\,X_{C}$

Subject to:

$$X_A + 2X_B + 3X_C \leq 80$$

$$X_A - X_{Av} - 2X_B = 0$$

$$X_B - X_{Bv} - X_C = 0$$

$$X_A, X_{Av}, X_B, X_{Bv}, X_C \geq 0$$

Microsoft Excel Worksheet

<u>Ejemplo 6:</u> Problema de presupuesto de capital (Bazaraa)

Un proyecto de construcción municipal tiene requisitos de financiación en los próximos cuatro años de \$2, \$4, \$8 y \$5 millones, respectivamente. Suponga que se requiere todo el dinero para un año determinado al comienzo del año.

La ciudad tiene la intención de vender bonos a largo plazo para cubrir los requisitos de financiación del proyecto. Se prevé que las tasas de interés del mercado de bonos a largo plazo (es decir, los costos de venta de bonos) para los próximos cuatro años sean del 7%, 6%, 6.5% y 7.5%, respectivamente.

El interés pagado de los bonos comenzará un año después de que se complete el proyecto y continuará por 20 años, luego de lo cual los bonos serán pagados. Se omite considerar el valor del dinero en el tiempo, por lo que el costo de vender bonos es 20 veces la tasa de interés vigente al momento de su venta.

Con la venta de los bonos, una parte del dinero se utilizará inmediatamente para la construcción y se depositará algo de dinero en los depósitos a corto plazo que se utilizarán en años posteriores.

Las tasas de interés a corto plazo sobre los depósitos a plazo (es decir, lo que la ciudad puede ganar con los depósitos) se proyectan en 6%, 5.5%y 4.5%, respectivamente (la ciudad claramente no invertirá dinero en depósitos a corto plazo el cuarto año).

¿Cuál es la estrategia óptima de la ciudad para vender bonos y depositar fondos en cuentas a plazo para completar el proyecto de construcción?

Sea

X_j , j = 1,..,4, be la cantidad de dinero obtenida por al venta de bonos al comienzo del año i

Y_j , j = 1,..,4, la cantidad de dinero colocada en depósitos a plazo fijo anual al comienzo de año j

	Año 1	Añor 2	Añor 3	Año 4
Requisitos de financiamiento para proyectos de construcción (MMUS$)	2	4	8	5
Tasas de interes de los Bonos	7	6	6.5	7.5
Tasas de Interes de Depositos a corto plazo	6	5.5	4.5	

El costo unitario de venta de bonos es 20 veces la tasa de interés de mercado en el año correspondiente, por lo que necesitamos minimizar:

Minimizar $z = 20\,(0.07)\,X_1 + 20\,(0.06)\,X_2 + 20\,(0.065)\,X_3 + 20\,(0.075)\,X_4$

Sea

X_j , j = 1,..,4, be la cantidad de *dinero obtenida por al venta de bonos* al comienzo del año i

Y_j , j = 1,..,4, la cantidad de *dinero colocada en depósitos* a plazo fijo anual al comienzo de año j

	Año 1	**Añor 2**	**Añor 3**	**Año 4**
Requisitos de financiamiento para proyectos de construcción (MMUS$)	**2**	4	8	5
Tasas de interes de los Bonos	7	6	6.5	7.5
Tasas de Interes de Depositos a corto plazo	6	5.5	4.5	

Minimizar $z = 20\,(0.07)\,X_1 + 20\,(0.06)\,X_2 + 20\,(0.065)\,X_3 + 20\,(0.075)\,X_4$

En el primer año, la cantidad de bonos vendidos menos la cantidad de depósitos a plazo se utilizará para el requisito de financiación.

$$X_1 - Y_1 = 2$$

Sea

X_j , j = 1,..,4, be la cantidad de *dinero obtenida por al venta de bonos* al comienzo del año i

Y_j , j = 1,.., la cantidad *de dinero colocada en depósitos a plazo* fijo anual al comienzo de año j

	Año 1	Añor 2	Añor 3	Año 4
Requisitos de financiamiento para proyectos de construcción (MMUS$)	2	**4**	8	5
Tasas de interes de los Bonos	7	6	6.5	7.5
Tasas de Interes de Depositos a corto plazo	6	5.5	4.5	

Minimizar $z= 20\ (0.07)\ X_1 + 20\ (0.06)\ X_2 + 20\ (0.065)\ X_3 + 20\ (0.075)\ X$

Sujeto a:

$$X_1 - Y_1 = 2$$

A partir del segundo año debemos tener en cuenta:

- Los intereses disponibles desde el año anterior
- Los bonos vendidos
- Los depósitos a plazo realizados
- El requisito de financiación

$$\mathbf{1.06\ Y_1 + X_2 - Y_2 = 4}$$

Sea

X_j , j = 1,..,4, be la cantidad de *dinero obtenida por al venta de bonos* al comienzo del año i

Y_j , j = 1,.., la cantidad *de dinero colocada en depósitos a plazo* fijo anual al comienzo de año j

	Año 1	**Añor 2**	**Añor 3**	**Año 4**
Requisitos de financiamiento para proyectos de construcción (MMUS$)	2	4	8	5
Tasas de interes de los Bonos	7	6	6.5	7.5
Tasas de Interes de Depositos a corto plazo	6	5.5	4.5	

Microsoft Excel Worksheet

Minimizar $z= 20\ (0.07)\ X_1 + 20\ (0.06)\ X_2 + 20\ (0.065)\ X_3 + 20\ (0.075)\ X_4$

Sujeto a:

$$X_1 - Y_1 = 2$$

$$1.06\ Y_1 + X_2 - Y_2 = 4$$

$$1.055\ Y_2 + X_3 - Y_3 = 8$$

$$1.045\ Y_3 + X_4 = 5$$

$$X_j >= 0 \ , \ j = 1,..,4$$

$$Y_j >= 0 \ , \ j = 1,..,4$$