Conceptos básicos de modelado matemático

Nacimiento de la Investigación de operaciones

- Surge durante la segunda guerra mundial, cuando había un gran necesidad de administrar los recursos escasos.
- La Fuerza Aérea Británica formó el primer grupo que desarrollaría métodos cuantitativos para resolver estos problemas operacionales y bautizó a sus esfuerzos como investigación operacional.
- Poco después de la guerra se utilizaron los procedimientos desarrollados para solucionar problemas que surgían en áreas tales como la programación de refinerías de petróleo, la distribución de productos, la planeación de la producción, el estudio de mercados y la planeación de inversiones.

Orígenes de OR

Raíces de IO

- Use un enfoque científico en la gestión de las organizaciones
- Servicios militares en la Segunda Guerra Mundial
  - Necesidad urgente de asignar recursos escasos
  - Los científicos fueron llamados a aplicar un enfoque científico a estos problemas
  - Los científicos hicieron *investigación sobre operaciones militares*
- Los resultados demostraron ser útiles para las organizaciones
  - Los científicos realizaron investigaciones en este campo
  - Resultados importantes obtenidos: Método Simplex por GB Dantzig
  - Programación lineal, programación dinámica, teoría de colas y teoría de inventario desarrollada por los años 50.
- La revolución de la computadora explotó IO
- Los paquetes de software también dieron un nuevo impulso a IO
- Las PC permitieron a muchas personas usar técnicas IO

Significado de IO

Investigación de operaciones

- Involucra investigación sobre operaciones: cómo llevar a cabo y coordinar el *operaciones* dentro de una organización
- Uso del *método científico*
  - Formule el problema y recopile todos los datos relevantes
  - Construir un modelo científico
  - Validar el modelo
  - Aplica el modelo
- IO adopta un punto de vista organizacional
- IO busca la solución óptima
- IO requiere un enfoque de equipo

Impacto de IO

Contribuciones de IO

Mejora la eficiencia de muchas organizaciones, por lo tanto, aumenta la economía de muchos países

Organización	**Área de aplicación**	**Sección**	**Ahorro anual**
Federal Express	planificación logística de envíos	1.3	no estimado
Air New Zealand	programación de la tripulación de la aerolínea	11.2	$ 6.7 millones
Sears	Enrutamiento y programación de vehículos	13.2	$ 42 millones
Merril Lynch	Gestionar liquidez	16,2	$ 4 mil millones más de liquidez
Time Inc.	Gestión de inventarios	18.5	$ 3.5 millones más de ganancias
AT & T	Diseño y operación de call centers	20.5	$ 750 millones más de ganancias
...	...	...	...

Componentes de un problema de LP (Programación Lineal)

Elementos en un problema de LP

Función objetivo: es la representación matemática de lo que queremos optimizar

Restricciones: expresiones matemáticas que representan las condiciones que deben cumplirse

Variables de decisión: variables que representan las decisiones a tomar y nos permiten formular matemáticamente tanto la función objetivo como las restricciones

Linealidad: se dice que una expresión matemática es lineal si tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son constantes y $x_1, x_2, \cdots x_n$ son las variables de decisión.

En otras palabras, no se permite ninguna potencia, pero la primera potencia, de cualquier variable, así como tampoco debe aparecer ningún producto ni cociente de ninguna variable en la expresión matemática.

Definición de Investigación de Operaciones (IO)

Definición de Investigación de Operaciones (IO)

Se puede describir como un enfoque científico de la toma de decisiones que la operación de sistemas organizacionales requiere, utilizando las matemáticas y computadoras en la resolución de problemas.

La IO como técnica de solución de problemas.

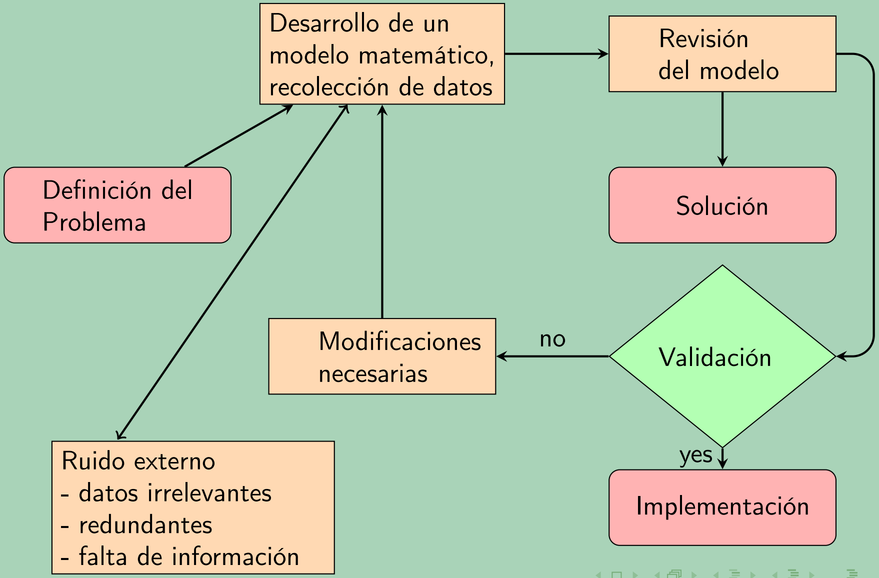
Ciencia

Ofrece técnicas y algoritmos matemáticos para resolver problemas de decisión.

Arte

Se necesita de la creatividad y habilidad personal del analista.

Esquema de solución



Algunas Técnicas y usos de la IO

Tecnicas	Usos
Análisis estadistico	Regresiones, Pronósticos, Muestreos, $\cdots$
Simulación	Análysis sin necesidad de implementación fisica
Programación Lineal	Optimización de recursos limitados
Teoría de Invetnarios	Puntos de reorden, tiempos de entrega, tiempo entre pedidos
Teoría de colas	Requerimentos de producción, necesidades de personal en actividades de producción o servicio,
Teoría de redes	Planeación, programación de entregas a maxima cobertura o mínimo costo

Formulación de modelos de Optimización de Recursos

Cada una de las técnicas que revisaremos, y en general las de Investigación de Operaciones, cuentan con procedimientos detallados de solución a los problemas, basados en:

- Variables de la decisión
- Alternativas de la solución
- Restricciones (limitantes) de la decisión para tomar en cuenta solo lo que es factible
- Criterios de evaluación de las alternativas

Formulación de modelos de Optimización de Recursos

- En general los modelos que analizaremos en el curso son de tipo matemático.
- Estos modelos se componen en una serie de elementos que se describen a continuación.

Formulación de modelos de Optimización de Recursos

Definición del objetivo del modelo.

- Se refiere a la identificación de que es *lo que se espera obtener* con el modelo matemático
  - maximizar utilidades
  - minimizar costos de producción
  - disminuir tiempos de ocio
  - maximizar rendimientos en la inversión

Formulación de modelos de Optimización de Recursos

Definición de las variables de decisión.

- Estas son las variables del problema que sea interesa saber su comportamiento
  - el número de productos a fabricar para maximizar mis ganancias
  - el número de empleados a tener disponibles en cierto tiempo, incluso si invertimos o no en algún proyecto

Determinar las limitantes del modelo.

- Son las restricciones del sistema que estamos modelando.
- Existen varios tipos, entre ellos están:

Física	:	Espacio
Capacidad	:	Máquinas, atención a clientes
Tiempo	:	Tiempos disponibles, turnos
Decisiones Gerenciales	:	Políticas, compromisos

Modelo LP general

Standard form

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

Z es la **funcion objetivo**, las x_i son las **variables de decision** y las desigualdades son las **restricciones**.

. . . General LP Model

Other legitimate forms

1. Minimize rather than maximize the objective function:
   Min $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
2. Greater-than-or-equal-to constraints:
   $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$
3. Equality constraints:
   $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$
4. Eliminating the nonnegativity constraints:
   x_i unrestricted in sign for some values of i.

Definitions

Solución factible: conjunto de valores para las variables de decisión para las cuales **todas** las restricciones son **satisfechas**.

Solución inviable: conjunto de valores para las variables de decisión para las cuales **al menos** una restricción es **violada**.

Región factible: es la colección de todas las soluciones factibles, es decir, es el conjunto de puntos que satisfacen **todas** las restricciones.

Solución óptima: para un problema de maximización, es un punto en la región factible con el mayor valor de función objetivo.
para un problema de minimización, es un punto en la región factible con el valor de función objetivo más pequeño.

Ejemplo 1: Un agricultor se pregunta cuántas hectáreas de maíz y arroz debe plantar para este año.
Un acre de arroz produce 25 kilogramos de arroz y requiere 10 horas de trabajo por semana.
Un acre de maíz produce 10 kilogramos de maíz y requiere 4 horas de trabajo por semana.
El precio de venta es \$ 4 por kilo para el arroz y \$ 3 por kilo para el maíz.
Hay disponibles 7 acres para agricultura y 40 horas de trabajo por semana.
Al menos 30 kilos de maíz se deben producir este año. Modele este problema como un problema de programación lineal.

	producción (kg)	trabajo (horas)	venta \$
arroz	25	10	4
maiz	10	4	3
disponibilidad	7	40	

	producción (kg)	trabajo (horas)	venta $
arroz	25	10	4
maiz	10	4	3
disponibilidad	7	40	

Solución:

$x \rightarrow$ # de hectáreas de tierra usando arroz

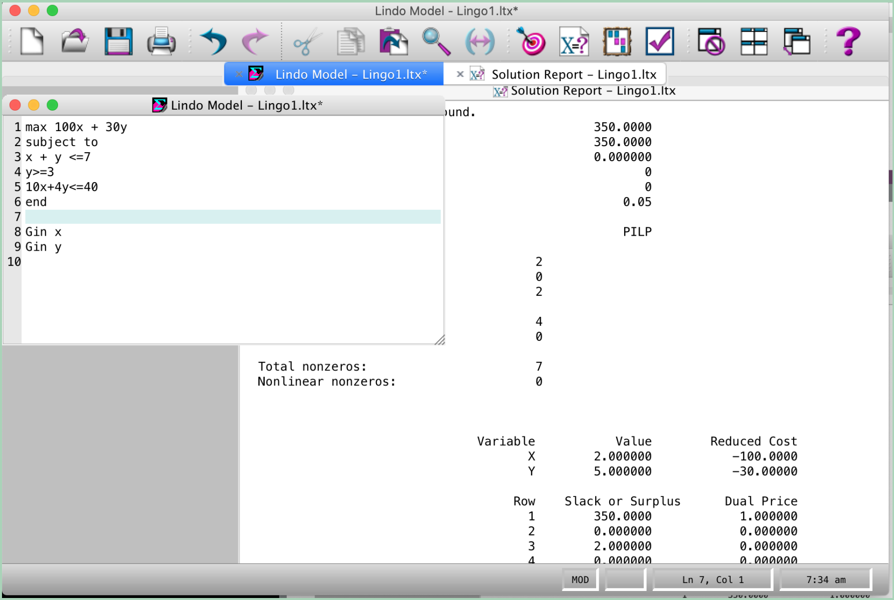
$y \rightarrow$ # de hectáreas de tierra usando maíz

$$\begin{aligned} x+y &\leq 7 \\ y &\geq 3 \\ 10x+4y &\leq 40 \end{aligned}$$

Objective Function :

$$\begin{aligned} max &= 25*4*x+10*3*y \\ max &= 100*x+30*y \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4									
5		x	y		total	sym	rhs		holgura
6		2	5						
7									
8		100	30		350				
9									
10									
11		1	1		7	<=	7		0
12		10	4		40	<=	40		0
13		0	1		5	>=	3		2
14									
15									
16									


Lindo Model - Lingo1.ltx*
Lindo Model – Lingo1.ltx*
Solution Report – Lingo1.ltx
Solution Report – Lingo1.ltx
Lindo Model – Lingo1.ltx*
1 max 100x + 30y
2 subject to
3 x + y <=7
4 y>=3
5 10x+4y<=40
6 end
7
8 Gin x
9 Gin y
10
und.
350.0000
350.0000
0.000000
0
0
0.05
PILP
2
0
2
4
0
Total nonzeros: 7
Nonlinear nonzeros: 0
Variable Value Reduced Cost
X 2.000000 -100.0000
Y 5.000000 -30.00000
Row Slack or Surplus Dual Price
1 350.0000 1.000000
2 0.000000 0.000000
3 2.000000 0.000000
4 0.000000 0.000000
MOD
Ln 7, Col 1
7:34 am

Ejemplo 2: Un fabricante de automóviles y furgonetas de lujo quiere embarcarse en una gran campaña publicitaria de televisión. La compañía decidió comprar comerciales de 1 minuto en 2 tipos de programas:

- Comedia: en promedio, 1 punto de comedia es visto por 7 millones de mujeres y 2 millones de hombres y cuesta $ 50,000;
- Juego de fútbol: en promedio, 1 punto del juego de fútbol es visto por 2 millones de mujeres y 12 millones de hombres y cuesta $ 100,000.

La compañía desea que el anuncio sea visto por al menos 28 millones de mujeres y 24 millones de hombres. Ayude a esta compañía a decidir cuántos puntos de cada tipo debe comprar para gastar la menor cantidad de dinero posible.

	mujeres (millones)	hombres (millones)	costo $
Comedia	7	2	50,000
Juego de fútbol	2	12	100,000
minimum	28	24	

<u>Solución:</u>

- $c \rightarrow$ # de puntos en programa comedia
- $f \rightarrow$ # de puntos en Juego de futbol

$$\begin{aligned} 7c + 2f &\geq 28 \\ 2c + 12f &\geq 24 \\ c, f &\geq 0 \end{aligned}$$

Función objetivo :

$$min\ costo = 50,000c + 100,000f$$

$\square$

Ejemplo 3: Un agricultor busca determinar la cantidad de alimento que se le debe dar a sus pollos a fin de satisfacer los estándares nutricionales minimos. La dieta debe contener 4 tipos de ingredientes:

- tipo A: al menos 0.4 kg;
- tipo B: al menos 0.6 kg;
- tipo C: al menos 2.0 kg;
- tipo D: al menos 1.7 kg.

Hay dos tipos de alimentos disponibles en el mercado, tipo M y N, con un costo respectivo de \$8/kg y \$4/kg. La composición de cada tipo de alimento se da en la siguiente tabla:

	A	B	C	D
M	100g	-	100g	200g
N	-	100g	200g	100g

Al agricultor le gustaria gastar la menor cantidad de dinero posible.

Datos:

$$a \geq 400g$$
$$b \geq 600g$$
$$c \geq 2000g$$
$$d \geq 1700g$$

Solución:
$m \rightarrow$ cantidad requerida del tipo de comida M
$n \rightarrow$ cantidad requerida del tipo de comida N
Función objetivo :

$$min\ costo = 8m + 4n$$

$$\begin{aligned} 100m \geq 400 &\implies m \geq 4 \\ 100n \geq 600 &\implies n \geq 6 \\ 100m + 200n \geq 2000 &\implies m + 2n \geq 20 \\ 200m + 100n \geq 1700 &\implies 2m + n \geq 17 \end{aligned}$$

Ejemplo 4: Una compañía de camiones ha asignado $ 800,000 para la compra de vehículos nuevos y está considerando tres tipos.

1. El vehículo A tiene una capacidad de carga de 10 toneladas y se espera que promedie 45 mph; cuesta$ 26,000.
2. El vehículo B tiene una carga útil de 20 toneladas capacidad y se espera que promedie 40 mph; cuesta $ 36,000.
3. El vehículo C es un vehículo modificado forma de B y lleva dormitorios para un conductor. Esta modificación reduce la capacidad para una carga útil de 18 toneladas y aumenta el costo a $ 42,000, pero su velocidad de operación es aún se espera que promedie 40 mph.

El vehículo A requiere una tripulación de un conductor y, si se conduce en tres turnos por día, podría ser operado por un promedio de 18 horas por día. Los vehículos B y C deben tener equipos de dos conductores para cumplir con los requisitos legales locales. El vehículo B podría ser conducido un promedio de 18 horas por día con tres turnos, y el vehículo C podría promediar 21 horas por día con tres turnos.

La compañía tiene 150 conductores disponibles cada día para formar equipos y no podrá contratar equipos adiestrados adicionales en el futuro cercano. El sindicato local prohíbe cualquier el conductor trabaja más de un turno por día. Además, las instalaciones de mantenimiento son tales que el número total de vehículo no debe exceder 30.
Formular un modelo matemático para ayudar a determinar el número de cada tipo de vehículo que la compañía debería comprar para que maximice su capacidad de envío en toneladas-millas por día.
La siguiente tabla muestra la información ya antes mencionada

tipo de camioneta	Capacidad tonelada	mph	Precio	trabajadores
A	10	45	26,000	1
B	20	40	36,000	2
C	18	40	42,000	2
disponible			800,000	150

Solución:

- Declaramos las variables

A $\rightarrow$ # unidad de camionetas tipo A
B $\rightarrow$ # unidad de camionetas tipo B
C $\rightarrow$ # unidad de camionetas tipo C

- Función objetivo z

Como nuestro objetivo es maximizar las toneladas de envio , tendremos que ver cuanto puede cargar las diferentes camionetas y su cantidad de unidades .

$$max\ z = 10A + 20B + 18C$$

- restriccioneses

$$26,000A + 36,000B + 42,000C \leq 800,000 \quad (1)$$
$$3A + 6B + 6C \leq 150 \quad (2)$$
$$A + B + C \leq 30 \quad (3)$$
$$A \geq 0 \quad (4)$$
$$B \geq 0 \quad (5)$$
$$C \geq 0 \quad (6)$$

1. La restricciones (7) representa la cantidad de dinero disponible que tiene la compañia
2. la restricion (9) representa la cantidad de vehiculos que se puede comprar en total
3. la restricciones (8) habla sobre la cantidad d empleados que cuenta la empresa
4. las restriciones de la (10) a la (12) son las restriciones de la naturalezade la variables lo cual tambien todas deben ser numeros enteros

- Procedimiento de la solución.

Dado que hay tres variables, podemos usar el método Símplex para obtener la solución entre las demás.

□

Ejemplo 5:

Gaermont Candies fabrica tres productos que han causado revuelo entre los niños de México, a los cuales el departamento de mercadotecnia ha denominado Picolín, Picolón y Picolico. Estos tres productos se fabrican a partir de tres ingredientes (cuyos nombres en código son Alfa, Beta y Gamma. Las cantidades en gramos de cada ingrediente que se requieren para fabricar una unidad de estos productos .se muestran en la tabla :

producto	*Ingrediente*			utilidad $
	Astro	*Bolko*	*Callie*	
Pincolin	4	7	8	1.8
Pincolon	3	9	7	1
Picolico	2	2	12	1.2
limite	400	800	1000	

La empresa cuenta respectivamente con 400, 800 y 1000 kilogramos de los ingredientes Astro, Bolko y Callie. Bajo las condiciones actuales del mercado, las contribuciones a las utilidades para los productos son $1.80 para Picolín, $1.00 para Picolón y $1.20 para Picolico.

Plantee un problema de PL para determinar la cantidad de cada uno de los productos que deben fabricarse.

Solución:

- x_1 cantidad (números) de Pincolin a fabricar
- x_2 cantidad (números) de Pincolon a fabricar
- x_2 cantidad (números) de Picolico a fabricar

Función objetivo : Max $1.8x_1 + 1x_2 + 1.2x_3$
Sujeto a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 400 \\ 7x_1 & + & 9x_2 & + & 2x_3 & \leq & 800 \\ 8x_1 & + & 7x_2 & + & 12x_3 & \leq & 1000 \\ x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$\square$

Ejemplo 6:

Gaermont Sounds fabrica partes electrónicas para aparatos de sonido. La compañía ha decidido fabricar y vender bocinas y audífonos. Ha construido una planta que puede operar 48,000 horas semanales.
La producción de una bocina requiere 2 horas de mano de obra y la producción de los audífonos requiere 3 horas de mano de obra. Cada bocina contribuye con $20 a las utilidades y cada audífono con $25. El departamento de mercadotecnia ha determinado que lo máximo que puede venderse por semana son 15,000 bocinas 7 10,000 audífonos. Plantee un problema de PL para determinar la mezcla óptima de producción que maximice la contribución a las utilidades.

producto	*mano de obra*	*lmite*	*beneficio*
bocinas	2	15,000	20
audifonos	3	10,000	25
	48,000		

Solución:

x_1 cantidad (números) de bocinas a fabricar

x_2 cantidad (números) de audifonos a fabricar

Función objetivo : Max $20x_1 + 25x_2$
Sujeto a:

$$\begin{array}{lcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 48,000 \\ x_1 & + & 0x_2 & \leq & 15,000 \\ 0x_1 & + & x_2 & \leq & 10,000 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

□

Ejemplo 7:

Gaermont Sports fabrica y vende tres líneas de raquetas de tenis: A, B y C. A es una raqueta 'estándar', B y C son raquetas 'profesionales'. El proceso de manufactura de las raquetas hace que se requieran dos operaciones producción; todas las raquetas pasan a través de ambas operaciones. Cada raqueta requiere 2 horas de tiempo de producción en la operación 1.

En la operación 2 la raqueta A requiere 3 horas de tiempo de producción; la raqueta B de 4 horas y la C, 5. La operación 1 tiene 200 horas de tiempo semanal de producción y la operación 2 tiene suficiente mano de obra para operar 500 horas a la semana.

El grupo de mercadotecnia ha proyectado que la demanda de la raqueta estándar no será de más de 100 por semana. Debido a que las raquetas B y C son de calidad similar, se ha pronosticado que la demanda combinada para éstas será un máximo de 120 por semana. La venta de la raqueta A da como resultado \$7 de utilidades, en tanto que las raquetas B y C proporcionan utilidades de \$8.00 y \$8.50, respectivamente. ¿Cuántas raquetas de cada tipo deben fabricarse por semana, si la compañía busca maximizar sus utilidades? Formule este problema como un problema de PL.

Datos :

$producto$	$operacion1$	$operacion2$	$demanda$	$utilidad\$$
A	2	3	100	7
B	2	4	120	8
C	2	5		8.5
	200	500		

Solución:

x_1 cantidad (números) de A a fabricar

x_2 cantidad (números) de B a fabricar

x_2 cantidad (números) de C a fabricar

Función objetivo : Max $7x_1 + 8x_2 + 8.5x_3$
Sujeto a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 200 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & \leq & 500 \\ x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & \leq & 100 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 120 \\ x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$\square$

Ejemplo 8:

Un gerente de operaciones está tratando de determinar un plan de producción para la próxima semana. Hay tres productos (digamos P, Q y R) para producir usando cuatro máquinas (digamos A, B, C y D). Cada una de las cuatro máquinas realiza un proceso único. Hay una máquina de cada tipo, y cada máquina está disponible por 2400 minutos por semana. La unidad de tiempos de procesamiento para cada máquina se da en la siguiente tabla:

UNIT PROCESSING TIME (min)				
Machine	product P	product Q	product R	Availability (min)
A	20	10	10	2400
B	12	28	16	2400
C	15	6	16	2400
D	10	15	0	2400
Total Time	57	59	42	9600

Los ingresos por unidad y las ventas máximas para la semana están en la tabla a continuación. El almacenamiento de una semana a la siguiente no está permitido. Los gastos operativos fijos asociados con la planta son $6000 por semana, independientemente de cuántos componentes y productos se fabriquen. El $6000 incluye todos los gastos excepto los costos de material.

Item	product P	product Q	product R
Revenue per unit	$90	$100	$70
Material cost per unit	$45	$40	$20
Profit per unit	$45	$60	$50
Maximum sales	100	40	60

Tarea: Formule un problema de LP cuya solución nos dará la combinación de productos 'óptima', es decir, la cantidad de cada producto que debe fabricarse durante la semana actual para maximizar las ganancias.

Solución:
Sea $x_1 =$ número de unidades de producto P para producir.
Sea $x_2 =$ número de unidades de producto Q para producir.
Sea $x_3 =$ número de unidades de producto R para producir.
El objetivo es maximizar las ganancias:

$$\text{Utilidad} = 45x_1 + 60x_2 + 50x_3 - 6000$$

Sin embargo, los costos operativos no son una función de las variables en el problema. En otras palabras, si elimináramos el término \$ 6000 de la función de ganancias, obtendríamos la misma combinación óptima de productos. Por lo tanto, la función objetivo es:

$$Z = 45x_1 + 60x_2 + 50x_3$$

Mathematical model:

$$\text{Función objetivo : Max } 45x_1 + 60x_2 + 50x_3 \qquad \text{Profit}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
20x_1 + 10x_2 + 10x_3 &\leq 2400 \quad \text{Machine A} \\
12x_1 + 28x_2 + 16x_3 &\leq 2400 \quad \text{Machine B} \\
15x_1 + 6x_2 + 16x_3 &\leq 2400 \quad \text{Machine C} \\
10x_1 + 15x_2 + 0x_3 &\leq 2400 \quad \text{Machine D} \\
x_1 &\leq 100 \quad \text{Sales of product P} \\
x_2 &\leq 40 \quad \text{Sales of product Q} \\
x_3 &\leq 60 \quad \text{Sales of product R} \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Non-integer solution:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 81.82\\
x_2 &= 16.36\\
x_3 &= 60\\
Z_{\text{Max}} &= 7663.64\\
\text{Profit} &= \$1663.64
\end{aligned}
$$

Integer solution:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 82\\
x_2 &= 16\\
x_3 &= 60\\
Z_{\text{Max}} &= 7650\\
\text{Profit} &= \$1650
\end{aligned}
$$

Importante: En este ejemplo, la solución entera óptima se obtiene al redondear la solución no entera óptima. Sin embargo, esto no siempre es así.

$\square$

Ejemplo 9:

La planificación agrícola es realizada por la Confederación del Sur de Kibbutzim es:

- La tierra y agua de riego disponibles para riego están limitadas como se indica en esta tabla:

Kibbutz	Tierra utilizable (Acres)	Asignación de agua (Acre Feet)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

  Acre Feet: volumen de un acre de superficie a una profundidad de un pie.

- Los cultivos que se consideran son: remolacha, algodón y sorgo.
- Cuota máxima que se puede dedicar a cada cultivo:

Cultivo	Máximo Cuota (Acres)	Consumo de agua (Acre Feet / Acre)	Retorno neto ($ / Acre)
Remolacha azucarera	600	3	1,000
Algodón	500	2	750
Sorgo	325	1	250

- Para garantizar la equidad, cada kibutz plantará la misma proporción de su tierra de riego disponible.
  - Por ejemplo, si el kibutz 1 planta 200 de sus 400 acres disponibles, entonces el kibutz 2 debe plantar 300 de sus 600 acres, mientras que el kibutz 3 planta 150 acres de sus 300 acres. (50% de tierra utilizable)
- Formule un modelo LP que permita a la Confederación maximizar el rendimiento neto

Solución: Decision variables:

Crop	Allocation (Acres) Kibbutz 1	2	3
Sugar beets	x_1	x_2	x_3
Cotton	x_4	x_5	x_6
Sorghum	x_7	x_8	x_9

Kibbutz	Usable Land (Acres)	Water Allocation (Acre Feet)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Crop	Maximum Quota (Acres)	Water Consumption (Acre Feet/Acre)	Net Return $/Acre)
Sugar beets	600	3	1,000
Cotton	500	2	750
Sorghum	325	1	250

Objective function:
Maximize $Z = 1000(x_1 + x_2 + x_3) + 750(x_4 + x_5 + x_6) + 250(x_7 + x_8 + x_9)$
subject to the following constraints:

- Usable land for each kibbutz:

$$x_1 + x_4 + x_7 \leq 400$$
$$x_2 + x_5 + x_8 \leq 600$$
$$x_3 + x_6 + x_9 \leq 300$$

- Water allocation for each kibbutz:

$$3x_1 + 2x_4 + x_7 \leq 600$$
$$3x_2 + 2x_5 + x_8 \leq 800$$
$$3x_3 + 2x_6 + x_9 \leq 375$$

- Total acreage for each crop:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$$
$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 500$$
$$x_7 + x_8 + x_9 \leq 325$$

- Equal proportion of land planted:

$$\frac{x_1+x_4+x_7}{400} = \frac{x_2+x_5+x_8}{600}$$
$$\frac{x_2+x_5+x_8}{600} = \frac{x_3+x_6+x_9}{300}$$
$$\frac{x_3+x_6+x_9}{300} = \frac{x_1+x_4+x_7}{400}$$

Or written in standard form:

$$600(x_1+x_4+x_7) - 400(x_2+x_5+x_8) = 0$$
$$300(x_2+x_5+x_8) - 600(x_3+x_6+x_9) = 0$$
$$400(x_3+x_6+x_9) - 300(x_1+x_4+x_7) = 0$$

- Nonnegativity constraints:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

Solution: $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9) = (133.33, 100, 25, 100, 250, 150, 0, 0, 0)$ and $Z = 633,333.33$, that is, a total net return of \$633,333.33. □

Ejemplo 10: Una compañía de camiones ha asignado \$ 800,000 para la compra de vehículos nuevos y está considerando tres tipos.

1. El vehículo A tiene una capacidad de carga de 10 toneladas y se espera que promedie 45 mph; cuesta\$ 26,000.
2. El vehículo B tiene una carga útil de 20 toneladas capacidad y se espera que promedie 40 mph; cuesta \$ 36,000.
3. El vehículo C es un vehículo modificado forma de B y lleva dormitorios para un conductor. Esta modificación reduce la capacidad para una carga útil de 18 toneladas y aumenta el costo a \$ 42,000, pero su velocidad de operación es aún se espera que promedie 40 mph.

El vehículo A requiere una tripulación de un conductor y, si se conduce en tres turnos por día, podría ser operado por un promedio de 18 horas por día. Los vehículos B y C deben tener equipos de dos conductores para cumplir con los requisitos legales locales. El vehículo B podría ser conducido un promedio de 18 horas por día con tres turnos, y el vehículo C podría promediar 21 horas por día con tres turnos.

La compañía tiene 150 conductores disponibles cada día para formar equipos y no podrá contratar equipos adiestrados adicionales en el futuro cercano. El sindicato local prohíbe cualquier el conductor trabaja más de un turno por día. Además, las instalaciones de mantenimiento son tales que el número total de vehículo no debe exceder 30.
Formular un modelo matemático para ayudar a determinar el número de cada tipo de vehículo que la compañía debería comprar para que maximice su capacidad de envío en toneladas-millas por día.
La siguiente tabla muestra la información ya antes mencionada

tipo de camioneta	Capacidad tonelada	mph	Precio	trabajadores
A	10	45	26,000	1
B	20	40	36,000	2
C	18	40	42,000	2
disponible			800,000	150

Solución:

- Declaramos las variables

A $\rightarrow$ # unidad de camionetas tipo A
B $\rightarrow$ # unidad de camionetas tipo B
C $\rightarrow$ # unidad de camionetas tipo C

- Función objetivo z

Como nuestro objetivo es maximizar las toneladas de envio , tendremos que ver cuanto puede cargar las diferentes camionetas y su cantidad de unidades .

$$max\ z = 10A + 20B + 18C$$

- restriccioneses

$$26,000A + 36,000B + 42,000C \leq 800,000 \tag{7}$$
$$3A + 6B + 6C \leq 150 \tag{8}$$
$$A + B + C \leq 30 \tag{9}$$
$$A \geq 0 \tag{10}$$
$$B \geq 0 \tag{11}$$
$$C \geq 0 \tag{12}$$

1. La restricciones (7) representa la cantidad de dinero disponible que tiene la compañia
2. la restricion (9) representa la cantidad de vehiculos que se puede comprar en total
3. la restricciones (8) habla sobre la cantidad d empleados que cuenta la empresa
4. las restriciones de la (10) a la (12) son las restriciones de la naturalezade la variables lo cual tambien todas deben ser numeros enteros

- Procedimiento de la solución.

Dado que hay tres variables, podemos usar el método Símplex para obtener la solución entre las demás.

□

Ejemplo 11: Giapetto Woodcarving, Inc., fabrica dos tipos de juguetes de madera: soldados y trenes. Un soldado se vende por \$ 27 y usa \$ 10 en materias primas. Cada soldado que se fabrica aumenta la mano de obra variable y los gastos generales de Giapetto en \$ 14. Un tren se vende por \$ 21 y usa \$ 9 en materias primas. Cada tren construido aumenta la mano de obra variable y el costo general de Giapetto en \$ 10. La fabricación de soldados y trenes de madera requiere dos tipos de mano de obra calificada: carpintería y acabado. Un soldado requiere 2 horas de trabajo de acabado y 1 hora de trabajo de carpintería. Un tren requiere 1 hora de trabajo de acabado y 1 hora de trabajo de carpintería. Cada semana, Giapetto puede obtener todo el material necesario, pero solo 100 horas de acabado y 80 horas de carpintería. La demanda de trenes es ilimitada, pero se compran como máximo 40 soldados cada semana. Giapetto desea maximizar el beneficio semanal (ingresos - costos). Formule un modelo matemático de la situación de Giapetto que pueda usarse para maximizar el beneficio semanal de Giapetto.

Solución: El modelo de solución Giapetto incorpora las características compartidas por todos los problemas de programación lineal.

- Variables de decisión

  x_1 = número de soldados producidos cada semana
  x_2 = número de trenes producidos cada semana

- Función objetiva
  - En cualquier modelo de programación lineal, el tomador de decisiones desea maximizar (generalmente ingresos o ganancias) o minimizar (generalmente costos) alguna función de las variables de decisión
  - Esta función maximizada o minimizada se llama función objetivo
  - Para el problema de Giapetto, los costos fijos no dependen de los valores de x_1 o x_2.

El beneficio semanal de Giapetto se puede expresar en términos de las variables de decisión x_1 y x_2: Beneficio semanal = ingresos semanales - costos semanales de materia prima - los costos variables semanales

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Ingresos semanales} & = & 27x_1 + 21x_2 \\
\text{Costos semanales de materia prima} & = & 10x_1 + 9x_2 \\
\text{Costos semanales variables} & = & 14x_1 + 10x_2 \\
\text{Beneficio semanal} & = & (27x_1 + 21x_2)(10x_1 + 9x_2)\ (14x_1 + 10x_2\ ) \\
 & = & 3x_1 + 2x_2
\end{array}
$$

Por lo tanto, el objetivo de Giapetto es elegir x_1 y x_2 para maximizar $3\ x_1 + 2\ x_2$. Usamos la variable z para denotar el valor de la función objetivo de cualquier LP.

La función objetivo de Giapetto es: Maximizar $z = 3\ x_1 + 2\ x_2$

Maximizar se abreviará como max y minimizará como min. El coeficiente de una variable de función objetivo se llama coeficiente de función objetivo.

Restricciones A medida que aumentan x_1 y x_2, la función objetivo de Giapetto crece. Para Giapetto, los valores de x_1 y x_2 están limitados por las siguientes tres restricciones (a menudo llamadas restricciones):

Restricción 1 Cada semana, no se pueden usar más de 100 horas de tiempo de acabado.

Restricción 2 Cada semana, no se pueden usar más de 80 horas de carpintería.

Restricción 3 Debido a la demanda limitada, se deben producir como máximo 40 soldados.

Estas tres restricciones se pueden expresar matemáticamente mediante las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 100 \\
x_1 + x_2 &\leq 80 \\
x_1 &\leq 40
\end{aligned}
$$

- Los coeficientes de las restricciones a menudo se denominan *coeficientes tecnológicos*.
- El número en el lado derecho de la restricción se llama *restricción lado derecho* (o *rhs*).

Restricciones de signos

- Para completar la formulación de un problema de programación lineal, se debe responder la siguiente pregunta para cada variable de decisión:
  - La variable de decisión debe asignar valores no negativos; de lo contrario, la variable de decisión debe asumir valores positivos y negativos.
  - Si la variable de decisión puede asumir solo valores no negativos, se agrega la restricción de signo $x_i \geq 0$.
  - Si la variable puede asumir valores positivos y negativos, la variable de decisión x_i es *sin restricción de signo* (a menudo abreviada *urs*).

Para el modelo de problemas de Giapetto, la combinación de las restricciones de signos $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ con la función objetivo y las restricciones genera el siguiente modelo de optimización:

$$\text{Función objetivo : Max } 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 100 && \text{(Restricción de acabado)} && (13)\\
x_1 + x_2 &\leq 80 && \text{(Restricción de carpintería)} && (14)\\
x_1 &\leq 40 && \text{(restricción a demanda de soldados)} && (15)\\
x_1, x_2 &\geq 0 && \text{(restricción de signo)} && (16)
\end{aligned}
$$

Región factible y solución óptimal

La región factible de un LP es el conjunto de todos los puntos que satisfacen todas las restricciones de LP y restricciones de signos.

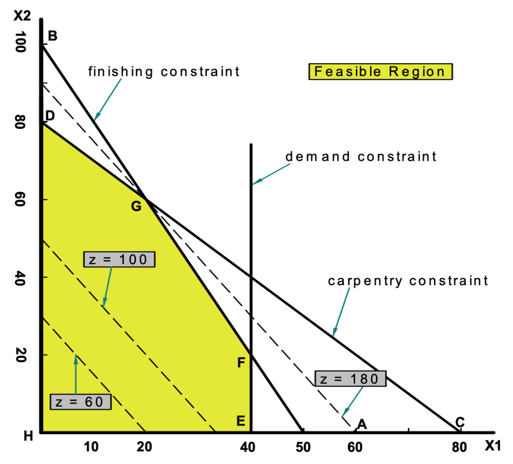
- $x_1 = 40$ y $x_2 = 20$ están en la región factible ya que satisfacen todas las restricciones de Giapetto.
- $x_1 = 15$, $x_2 = 70$ no está en la región factible porque este punto no satisface la restricción de carpintería [$15 + 70$ es > 80].

Restricciones de Giapetto:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 100 \\
x_1 + x_2 &\leq 80 \\
x_1 &\leq 40 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Para un problema de maximización, una solución óptima para un LP es un punto en la región factible con el mayor valor de función objetivo.
- Para un problema de minimización, una solución óptima es un punto en la región factible con el valor de función objetivo más pequeño.
- La mayoría de los LP tienen solo una solución óptima.
- Algunos LP no tienen una solución óptima, y algunos LP tienen un número infinito de soluciones.
- Cualquier LP con solo dos variables se puede resolver gráficamente.
  - Se recomienda etiquetar las variables x_1 y x_2 y los ejes de coordenadas como los ejes x_1 y x_2

Como el LP Giapetto tiene dos variables, puede resolverse gráficamente. La región factible es el conjunto de todos los puntos que satisfacen las restricciones:



De la figura, vemos que el conjunto de puntos que satisface el Giapetto LP está delimitado por el polígono de cinco lados DGFEH. Cualquier punto en o dentro del interior de este polígono (el área de sombra) está en la región factible.

Una vez identificada la región factible para el Giapetto LP, puede comenzar una búsqueda de la solución óptima que será el punto en la región factible con el mayor valor z.

- Para encontrar la solución óptima, grafica una línea en la que los puntos tienen el mismo valor z.
- En un problema máximo, dicha línea se llama línea isoprofit mientras que en un problema mínimo, se llama línea isocost.

La figura muestra las líneas de isoprofit para z = 60, z = 100 y z = 180

- El último isoprofit que se cruza (toca) con la región factible indica la solución óptima para el LP.
- Para el problema de Giapetto, esto ocurre en el punto G $(x_1 = 20, x_2 = 60, z = 180)$.
- La región factible para el Giapetto LP será un conjunto convexo.

□

Ejemplo 12:

Gaermont Distilleries destila y distribuye whisky fino. La compañía fabrica tres whiskys distintos. Prairie High, Lone Wolf y Wild West. Las mezclas se producen combinando diferentes grados de whisky base. Los requerimientos de las mezclas, la disponibilidad (dadas en quintos de galón) y el costo por quinto de galón de whisky base y los precios de venta de los diferentes productos son los siguientes:

Acciones	Costo por quinto de galón	Disponibilidad
Grado I	\$9.00	1800
Grado II	\$7.00	2000
Grado III	\$4.00	1200

Marca	Requerimientos	Precio de venta
Prairie	No más del 12% de grado III Cuando menos el 50% de grado I	\$15
Lane Wolf	No más del 40% de grado III Cuando menos 25% de grado I	\$13
Wild West	No más del 50% de grado III Cuando menos 10% de grado II	\$12

Formule un problema de P.L. que le permita a Gaermont maximizar sus utilidades.

Solución:

x_{ij} la cantidad whisky Grado I , II, II a agregar al los Whiskys Prairie High, Lone Wolf y Wild West respectivamente.

Requerimientos:

- Disponibilidad Grado I

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1800$$

- Disponibilidad Grado II

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2000$$

- Disponibilidad Grado III

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1200$$

Whisky Praire:

1. No más del 12% de grado III :

$$x_{31} \leq 0.12(\ x_{11} + x_{21} + x_{31}\ )$$

2. Cuando menos el 50% de grado I:

$$x_{11} \geq 0.5(\ x_{11} + x_{21} + x_{31}\ )$$

Whisky Lane Wolf:

1. No más del 40% de grado III

$$x_{32} \leq 0.4(x_{12} + x_{22} + x_{32})$$

2. Cuando menos 25% de grado I

$$x_{11} \geq 0.25(x_{12} + x_{22} + x_{32})$$

Whisky Wild West:

1. No más del 50% de grado III

$$x_{33} \leq 0.5(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

2. Cuando menos 10% de grado II

$$x_{23} \geq 0.1(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Ingresos:

$$\begin{array}{l} 15\ (\ x_{11} + x_{12} + x_{13}\ ) + \\ 13\ (\ x_{12} + x_{22} + x_{32}\ ) + \\ 12\ (\ x_{13} + x_{23} + x_{33}\ ) \end{array}$$

Costo total :

$$\begin{array}{l} 9\ (\ x_{11} + x_{12} + x_{13}\ ) + \\ 7\ (\ x_{21} + x_{22} + x_{23}\ ) + \\ 4\ (\ x_{31} + x_{32} + x_{33}\ ) \end{array}$$

Objetivo: Maximizar la ganancia Neta Total
Función Objetivo.: Ganancia = Ingresos - Costos

$$\begin{array}{rl} Max & 15\ (\ x_{11} + x_{12} + x_{13}\ ) + \\ & 13\ (\ x_{12} + x_{22} + x_{32}\ ) + \\ & 12\ (\ x_{13} + x_{23} + x_{33}\ ) - \\ & 9\ (\ x_{11} + x_{12} + x_{13}\ ) - \\ & 7\ (\ x_{21} + x_{22} + x_{23}\ ) - \\ & 4\ (\ x_{31} + x_{32} + x_{33}\ ) \end{array}$$

variable	value
x_{11}	1538.461548
x_{21}	1169.230713
x_{31}	369.230774
x_{12}	261.538452
x_{22}	523.076904
x_{32}	523.076904
x_{13}	0.000000
x_{23}	307.692322
x_{33}	307.692322

$\square$

Ejemplo 13: Mi dieta requiere que todos los alimentos que como provienen de uno de los cuatro 'grupos de alimentos básicos' (pastel de chocolate, helado, refresco y pastel de queso). En la actualidad, los siguientes cuatro alimentos están disponibles para el consumo: brownies, helado de chocolate, cola y tarta de queso de piña. Cada brownie cuesta 50 centavos, cada bola de helado de chocolate cuesta 20 centavos, cada botella de cola cuesta 30 centavos y cada trozo de tarta de queso de piña cuesta 80 centavos. Cada día, debo ingerir al menos 500 calorías, 6 onzas de chocolate, 10 onzas de azúcar y 8 onzas de grasa. El contenido nutricional por unidad de cada alimento se muestra en la tabla a continuación. Formular un modelo de programación lineal que pueda usarse para satisfacer mis requerimientos nutricionales diarios a un costo mínimo.

Type of Food	**Calories**	**Chocolate (ounces)**	**Sugar (ounces)**	**Fat (ounces)**
Brownie	400	3	2	2
Chocolate ice cream (1 scoop)	200	2	2	4
Cola (1 bottle)	150	0	4	1
Pineapple cheesecake (1 piece)	500	0	4	5

Solución:

Let X_1 be the number of brownies.
Let X_2 be the number of scoops of chocolate ice cream.
Let X_3 be the number of bottles of cola soft drink.
Let X_4 be the number of pieces of pineapple cheesecake.

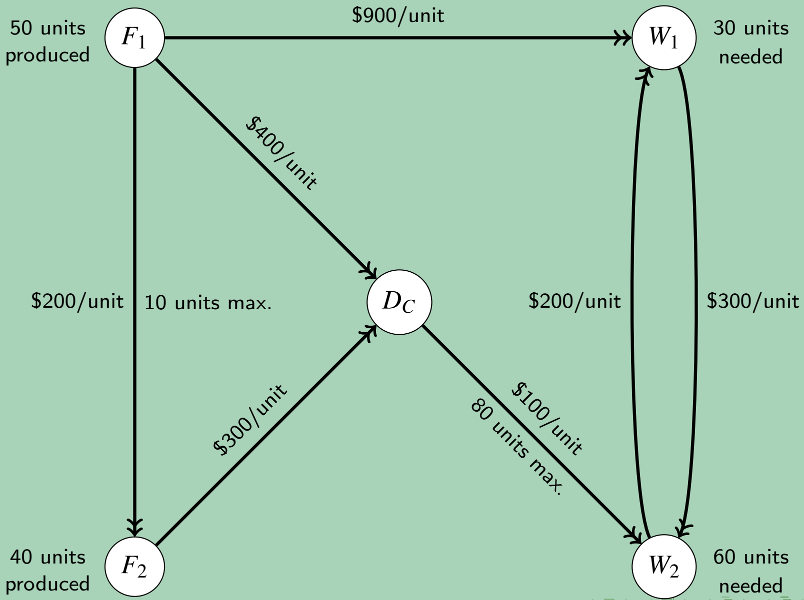
$$\text{Minimize } Z = 50X_1 + 20X_2 + 30X_3 + 80X_4$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \qquad 400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4 &\geq 500 \\ 3X_1 + 2X_2 &\geq 6 \\ 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 &\geq 10 \\ 2X_1 + 4X_2 + X_3 + 5X_4 &\geq 8 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 14: El DISTRIBUTION UNLIMITED CO. producirá el mismo producto nuevo en dos fábricas diferentes, y luego el producto debe enviarse a dos almacenes, donde cualquiera de las fábricas puede suministrar a cualquier almacén. La red de distribución disponible para enviar este producto se muestra en la figura siguiente diapositiva, donde F_1 y F_2 son las dos fábricas, W_1 y W_2 son los dos almacenes, y D_C es un centro de distribución. Las cantidades que se enviarán desde F_1 y F_2 se muestran a su izquierda, y las cantidades que se recibirán en W_1 y W_2 se muestran a su derecha. Cada flecha representa un carril de envío factible. Por lo tanto, F_1 puede enviar directamente a W_1 y tiene tres rutas posibles $(F_1 \to D_C \to W_2,$ $F_1 \to F_2 \to D_C \to W_2$, y $F_1 \to W_1 \to W_2)$ para enviar a W_2. Fábrica F_2 tiene solo una ruta a $W_2(F_2 \to D_C \to W_2)$ y una a $W_1(F_2 \to D_C \to W_2 \to W_1)$. El costo por unidad enviada a través de cada línea de envío se muestra junto a la flecha. También se muestran junto a $F_1 \to F_2$ y $D_C \to W_2$ las cantidades máximas que se pueden enviar a través de estos carriles. Los otros carriles tienen capacidad de envío suficiente para manejar todo lo que estas fábricas pueden enviar.

Red de distribución para Distribution Unlimited Co.



Solución:

- $x_{F_1-F_2}, x_{F_1-D_C}, x_{F_1-W_1}, x_{F_2-D_C}, x_{D_C-W_2}, x_{W_1-W_2}$ y $x_{W_2-W_1}$ son las variables de decisión.
  - Representan la cantidad enviada a través de los carriles respectivos.
- Las restricciones representan el flujo para cada ubicación, así como las cantidades máximas que se pueden enviar a través de algunos carriles.

LP Problem:

Min $Z = 2x_{F_1-F_2} + 4x_{F_1-D_C} + 9x_{F_1-W_1} + 3x_{F_2-D_C} + x_{D_C-W_2} + 3x_{W_1-W_2} + 2x_{W_2-W_1}$

$$
\begin{aligned}
\text{subject to} \quad & x_{F_1-F_2} + x_{F_1-D_C} + x_{F_1-W_1} = 50 && F_1 \text{ constraint} \\
& x_{F_2-D_C} = x_{F_1-F_2} + 40 && F_2 \text{ constraint} \\
& x_{F_1-D_C} + x_{F_2-D_C} - x_{D_C-W_2} = 0 && D_C \text{ constraint} \\
& x_{F_1-W_1} + x_{W_2-W_1} - x_{W_1-W_2} = 30 && W_1 \text{ constraint} \\
& x_{D_C-W_2} + x_{W_1-W_2} - x_{W_2-W_1} = 60 && W_2 \text{ constraint} \\
& x_{F_1-F_2} \leq 10 && \text{Maximum constraint} \\
& x_{D_C-W_2} \leq 80 && \text{Maximum constraint}
\end{aligned}
$$

$$x_{F_1-F_2}, x_{F_1-D_C}, x_{F_1-W_1}, x_{F_2-D_C}, x_{D_C-W_2}, x_{W_1-W_2}, x_{W_2-W_1} \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
x_{F_1-F_2} &= 0 & \qquad x_{D_C-W_2} &= 80 \\
x_{F_1-D_C} &= 40 & \qquad x_{W_1-W_2} &= 0 \\
x_{F_1-W_1} &= 10 & \qquad x_{W_2-W_1} &= 20 \text{ and} \\
x_{F_2-D_C} &= 40 & \qquad Z &= 490
\end{aligned}
$$

The minimum shipping cost is \$49,000.

□

Problemas de mezcla

Ejemplos de problemas de mezcla

Las situaciones en las que se deben mezclar varios insumos en alguna proporción deseada para producir bienes con ciertas características a menudo son susceptibles de programación lineal.

- Mezcla varios tipos de petróleo crudo para producir diferentes tipos de gasolina.
- Mezclando varios químicos para producir otros químicos.
- Mezclando varios tipos de aleaciones de metal para producir varios tipos de acero.
- Mezclar varios tipos de papeles para producir papel reciclado de diversa calidad.
- ...

Ejemplo 15: Gaermont Seeds fabrica tres tipos de combinaciones energéticas de semillas que se venden a mayoristas, los cuales a su vez los venden a expendios al menudeo.
Los tres tipos son normal, especial y extra y se venden en \$1.5, \$2.2 y \$3.50 por libra, respectivamente. Cada mezcla requiere los mismos ingredientes: maní, pasas y nueces. Los costos de estos ingredientes son: \$1.5 por libra de maní, \$1.60 por libra de pasas y \$2.10 por libra de nueces.
Los requerimientos de las mezclas son:

Normal: cuando menos 5% de cada ingrediente

Especial: al menos 20% de cada ingrediente y no más de 50% de cualquiera de ellos

Extra: al menos 25% de pasas y no más de 25% de maní

Las instalaciones de producción hacen que haya disponibles por semana como máximo 1000 libras de maní, 2000 de pasas y 3000 de nueces.
Por razones de mercado, la mezcla normal debe limitarse al 20% de la producción total. Plantee un problema PL para maximizar utilidades.

Solución:

x_{1n} Maní empleado en la mezcla...

x_{11} Maní empleado en la mezcla Normal
x_{12} Maní empleado en la Especial
x_{13} Maní empleado en la Extra

x_{2n} Pasas empleado en la mezcla...

x_{21} Pasas empleado en la mezcla Normal
x_{22} Pasas empleado en la Especial
x_{23} Pasas empleado en la Extra

x_{3n} nueces empleado en la mezcla...

x_{31} nueces empleado en la mezcla Normal
x_{32} nueces empleado en la Especial
x_{33} nueces empleado en la Extra

- Al menos 5% de cada ingrediente

x_{11} Maní empleado en la mezcla Normal
x_{12} Maní empleado en la Especial
x_{13} Maní empleado en la Extra
x_{21} Pasas empleado en la mezcla Normal
x_{22} Pasas empleado en la Especial
x_{23} Pasas empleado en la Extra
x_{31} nueces empleado en la mezcla Normal
x_{32} nueces empleado en la Especial
x_{33} nueces empleado en la Extra

Mezcla normal :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31}$$

Mezcla normal :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31}$$

La mezcla normal debe contener al menos 5% de cada ingrediente

$$\begin{aligned} x_{11} &\geq 0.05(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \\ x_{21} &\geq 0.05(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \\ x_{31} &\geq 0.05(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \end{aligned}$$

x_{11} Maní empleado en la mezcla Normal

x_{12} Maní empleado en la Especial

x_{13} Maní empleado en la Extra

x_{21} Pasas empleado en la mezcla Normal

x_{22} Pasas empleado en la Especial

x_{23} Pasas empleado en la Extra

x_{31} nueces empleado en la mezcla Normal

x_{32} nueces empleado en la Especial

x_{33} nueces empleado en la Extra

Mezcla especial :

$$x_{12} + x_{22} + x_{32}$$

Mezcla especial :

$$x_{12} + x_{22} + x_{32}$$

La mezcla especial debe contener al menos 20% de cada ingrediente, pero no mas de 50% de cualquiera de ellos

$$\begin{aligned} x_{12} &\geq 0.20(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ x_{22} &\geq 0.20(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ x_{32} &\geq 0.20(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \end{aligned}$$

pero no mas de 50% de cualquiera de ellos

$$\begin{aligned} x_{12} &\leq 0.50(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ x_{22} &\leq 0.50(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ x_{32} &\leq 0.50(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \end{aligned}$$

x_{11} Maní empleado en la mezcla Normal

x_{12} Maní empleado en la Especial

x_{13} Maní empleado en la Extra

x_{21} Pasas empleado en la mezcla Normal

x_{22} Pasas empleado en la Especial

x_{23} Pasas empleado en la Extra

x_{31} nueces empleado en la mezcla Normal

x_{32} nueces empleado en la Especial

x_{33} nueces empleado en la Extra

Mezcla Extra :

$$x_{13} + x_{23} + x_{33}$$

Mezcla Extra :

$$x_{13} + x_{23} + x_{33}$$

La mezcla Extra debe contener al menos 25% de pasas, pero no mas de 25% de mani

$$\begin{aligned} x_{23} &\geq 0.25(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \\ x_{13} &\leq 0.25(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \end{aligned}$$

Un maximo de 1,000 libras de mani, 2,000 de pasas, y 3,000 de nueces

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1,000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 2,000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 3,000 \end{aligned}$$

La cantidad de mezcla normal no debe exceder del 20% de la producción total

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 0.20(& x_{11} + x_{12} + x_{13} + \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33}) \end{aligned}$$

Costo total :

$$\begin{array}{lllllll} 2,000 & + & & & & & \\ 1.5 & (& x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} &) & + \\ 1.6 & (& x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} &) & + \\ 1.5 & (& x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} &) & \end{array}$$

Ingresos:

$$\begin{array}{l} 1.5\ (\ x_{11}\ +\ x_{21}\ +\ x_{31}\ )\ + \\ 2.2\ (\ x_{12}\ +\ x_{22}\ +\ x_{32}\ )\ + \\ 3.5\ (\ x_{13}\ +\ x_{23}\ +\ x_{33}\ ) \end{array}$$

Función Objetivo. Ganancia = Ingresos - Costos

$$\begin{array}{l} 1.5\ (\ x_{11}\ +\ x_{21}\ +\ x_{31}\ )\ +\ 2.2\ (\ x_{12}\ +\ x_{22}\ +\ x_{32}\ )\ + \\ 3.5\ (\ x_{13}\ +\ x_{23}\ +\ x_{33}\ )\ -\ 1.5\ (\ x_{11}\ +\ x_{12}\ +\ x_{13}\ )\ - \\ 1.6\ (\ x_{21}\ +\ x_{22}\ +\ x_{23}\ )\ -\ 1.5\ (\ x_{31}\ +\ x_{32}\ +\ x_{33}\ )\ -\ 2,000 \end{array}$$

$\square$

Ejemplo 16:

Gaermont Oils debe programar dos procesos de mezclado.
Cuando se realiza el proceso 1 durante una hora se consumen 130 barriles de petróleo nacional y 260 barriles de petróleo importado.
De manera similar, cuando se efectúa el proceso de 2 durante una hora, se consumen 170 barriles de petróleo nacional y 220 barriles de petróleo importado.
Con respecto a la producción, el proceso 1 genera, 4000 galones de gasolina y 1750 galones de diesel por hora de operación.
El proceso 2 genera 3500 galones de gasolina y 2250 galones de diesel por hora.
Para la siguiente corrida de producción, existen disponibles 12000 barriles de petróleo nacional y 18000 barriles de petróleo importado. Los contratos de ventas exigen que se fabriquen 280 000 galones de gasolina y 120 000 galones de petróleo para consumo doméstico.
Las contribuciones a las utilidades por hora de operación son \$900 y \$1100 para los procesos 1 y 2, respectivamente.
Plantee un modelo de programación lineal para determinar el programa de producción que maximice la contribución total.

Datos del problema :

		Proceso1	Proceso2	Disponibilidad	Demanda
$Contribucion(\$/hr)$		900	1100		
Entrada (barriles)	*PetNac*	130	170	12000	
	PetImp	260	220	18000	
Salida (galones)	*Gasolina*	4000	3500		28000
	Diesel	1750	2250		12000

Cant Diesel $\leq$ 0.5 Cant Gasolina

Solución:

p_1 las horas de mezclado del proceso 1

p_2 las horas de mezclado del proceso 2

Función objetivo : Max $900p_1 + 1100p_2$
Sujeto a:

$$
\begin{array}{rcrcl}
130p_1 & + & 170p_2 & \leq & 12000 \\
260p_1 & + & 220p_2 & \leq & 18000 \\
4000p_1 & + & 3500p_2 & \geq & 28000 \\
1750p_2 & + & 2250p_2 & \geq & 12000 \\
1750p_2 & + & 2250p_2 & \geq & 0.5 \times (\ 4000p_2 \ + \ 3500p_2) \\
p_1, & & p_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Contribuciion total :70540.54
Proceso p_1, 8.65 horas y
Proceso p_2 , 24.32 horas

□

Toma de decisiones de múltiples períodos

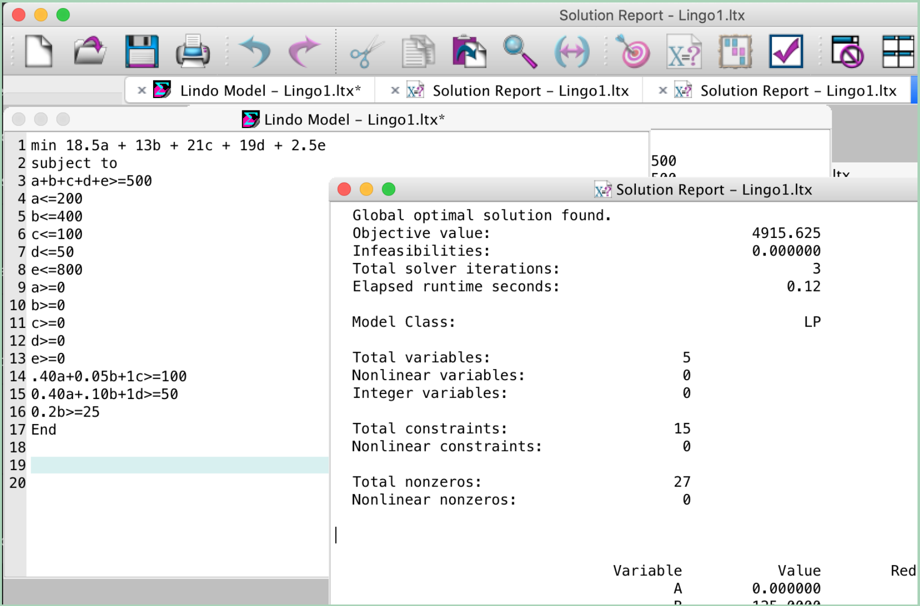
- Hasta ahora, todos los ejemplos de LP han sido modelos estáticos o de un período.
- La programación lineal también se puede utilizar para determinar decisiones óptimas en modelos de períodos múltiples o dinámicos.
- Los modelos dinámicos surgen cuando el tomador de decisiones toma decisiones en más de un punto en el tiempo.
- En un modelo dinámico, las decisiones tomadas durante el período actual influyen en las decisiones tomadas durante períodos futuros.
- Este tipo de problemas aparecen en la planificación de la producción y la gestión del inventario.

Ejemplo 17:

GEM Juices debe preparar con las existencias de su bodega un pedido de 500 litros de ponche dietético, el cual debe contener por lo menos 20% de jugo de naranja, 15% de jugo de toronja y 5% de jugo de betabel. La siguiente tabla muestra información de 5 bebidas existentes con su contenido de jugos y el costo de las mismas. GEM debe determinar la cantidad de cada bebida que deberá emplear para cumplir el pedido a un costo mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo que GEM puede alcanzar?

BEBIDA	NARANJA	TORONJA	BETABEL	EXISTENCIA	COSTO ($/litro)
A	40	40	0	200	18.50
B	5	10	20	400	13.00
C	100	0	0	100	21.00
D	0	100	0	50	19.00
E	0	0	0	800	2.50

Solución:



Solution Report - Lingo1.ltx
Lindo Model – Lingo1.ltx*
Solution Report – Lingo1.ltx
Solution Report – Lingo1.ltx
Lindo Model – Lingo1.ltx*
min 18.5a + 13b + 21c + 19d + 2.5e
subject to
a+b+c+d+e>=500
a<=200
b<=400
c<=100
d<=50
e<=800
a>=0
b>=0
c>=0
d>=0
e>=0
.40a+0.05b+1c>=100
0.40a+.10b+1d>=50
0.2b>=25
End
500
Solution Report – Lingo1.ltx
Global optimal solution found.
Objective value: 4915.625
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 3
Elapsed runtime seconds: 0.12
Model Class: LP
Total variables: 5
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0
Total constraints: 15
Nonlinear constraints: 0
Total nonzeros: 27
Nonlinear nonzeros: 0
Variable Value Red
A 0.000000