FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

INFERENCIA ESTADISTICA

Tema 4

- ✓ Estimación por intervalo

4.1 Intervalo de confianza.

La estimación puntual trata el problema de estimar mediante un numero el valor de una característica poblacional o parámetro θ desconocido.

En muchos casos la estimación puntual no es suficiente en el sentido de que no nos indica el error que se comete en dicha estimación.

Lo razonable en la practica es adjuntar, junto a la estimación puntual del parámetro, un cierto intervalo numérico que mida el margen de error que, de acuerdo a las observaciones muestrales, pueda tener dicha estimación.

La idea de Intervalo de Confianza, es proponer un rango de valores entre los que posiblemente se encuentre el verdadero valor del parámetro θ.

4.1 Intervalo de confianza.

Sea $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una m.a. de distribución $f(x, \theta)$ y sea $\propto \in (0,1)$ un numero fijo dado.

Definición: Un **intervalo de confianza** para θ es un intervalo de la forma, $(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2})$, en donde $\widehat{\theta_1}$ y $\widehat{\theta_2}$ son dos estadísticas, que satisface

$$P\left(\widehat{\theta_1} < \theta < \widehat{\theta_2}\right) = 1 - \alpha$$

Nota:

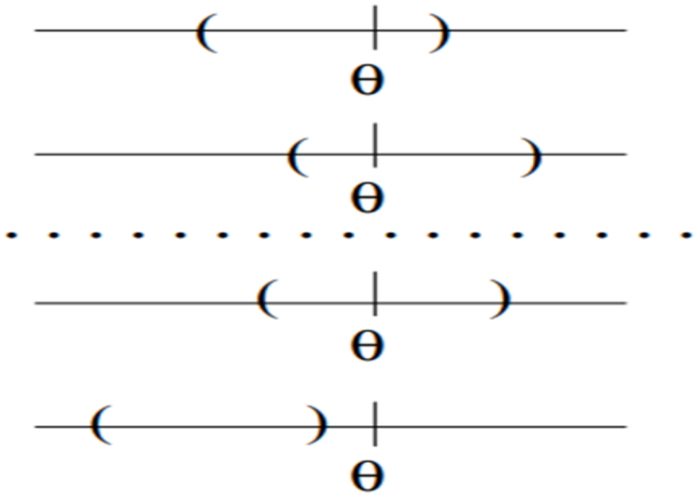
$\widehat{\theta_1}$ es el limite inferior del intervalo.

$\widehat{\theta_2}$ es el limite superior del intervalo.

$1 - \alpha$ es el grado o coeficiente de confianza.

4.1 Intervalo de confianza.

Nota: Si se toman infinitas muestras $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y construimos los correspondientes intervalos de confianza, el $100(1-\alpha)\%$ de ellos contendrán el verdadero valor del parámetro, mientras que $100\alpha\%$ no.



$Intervalo\ aleatorio$

$\theta\ fijo$

4.2 Método Pivotal.

Para construir un IC (Intervalo de Confianza) para un parámetro θ usaremos el llamado Método Pivotal.

Definición: Se denomina estadístico pivotal $T(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$ al estadístico cuya distribución en el muestreo no depende de θ.

Ejemplo: Estadístico Pivotal para la estimación de la media, dad una población normal, $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma)$ se verifica que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$Tipificado: \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

4.2 Método Pivotal.

1) Fijamos el Nivel de Confianza, $1-\alpha(0<\alpha<1)$.

2) Elección del estadístico pivotal. Se elige un estadístico que dependa solo del parámetro θ que se desea estimar y cuya distribución sea conocida y no dependa de θ (desconocido).

3) Planteamiento del enunciado probabilístico. Se plantea el enunciado probabilístico teniendo en cuenta la distribución de probabilidad del estadístico elegido, es decir se determinan constantes a y b tales que:

$$P(a<T(X_1,X_2,\dots,X_n,\theta)<\ b)=1-\alpha.$$

4.2 Método Pivotal.

4) Trasformación del enunciado probabilístico. Si es posible despejar θ de la expresión anterior, obtenemos dos variables aleatorias $T_1^{-1}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y $T_2^{-1}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$P\left(T_1^{-1}(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < T_2^{-1}(X_1, X_2, \dots, X_n)\right) = 1 - \alpha$$

5) Con cual,

$$(T_1^{-1}(X_1, X_2, \dots, X_n), \qquad T_2^{-1}(X_1, X_2, \dots, X_n))$$

es el IC para θ con nivel de confianza $1 - \alpha$.

4.2 Método Pivotal.

Ejemplo 1: Estadístico pivotal para la estimación de la media, Dada una población normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$.

1. Fijamos el nivel de confianza, $1 - \alpha (0 < \alpha < 1)$.
2. Elección del estadístico pivotal.

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

3. Planteamiento del enunciado probabilístico.

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

4.2 Método Pivotal.

Ejemplo 1: Estadístico pivotal para la estimación de la media, Dada una población normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$.

4. Elección del estadístico pivotal.

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

5. IC para μ con nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

4.2 Método Pivotal.

Ejemplo 2: Supongamos que la variable X representa el precio (en miles de euros) de la vivienda de alquiler en Madrid y que se distribuye según una normal de media desconocida y varianza conocida $\sigma^2 = 20^2$.

- ✓ Para determinar el precio del alquiler medio en Madrid se toma uan muestra de 70 viviendas obteniéndose que $\bar{x} = 82.5$
- ✓ Se sabe que la variable

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- ✓ Sabemos que $z_{0.025} = 1.96$

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96\right) = 0.95$$

4.2 Método Pivotal.

- ✓ Si de esta expresión se despeja el valor μ, se obtiene el intervalo probabilístico

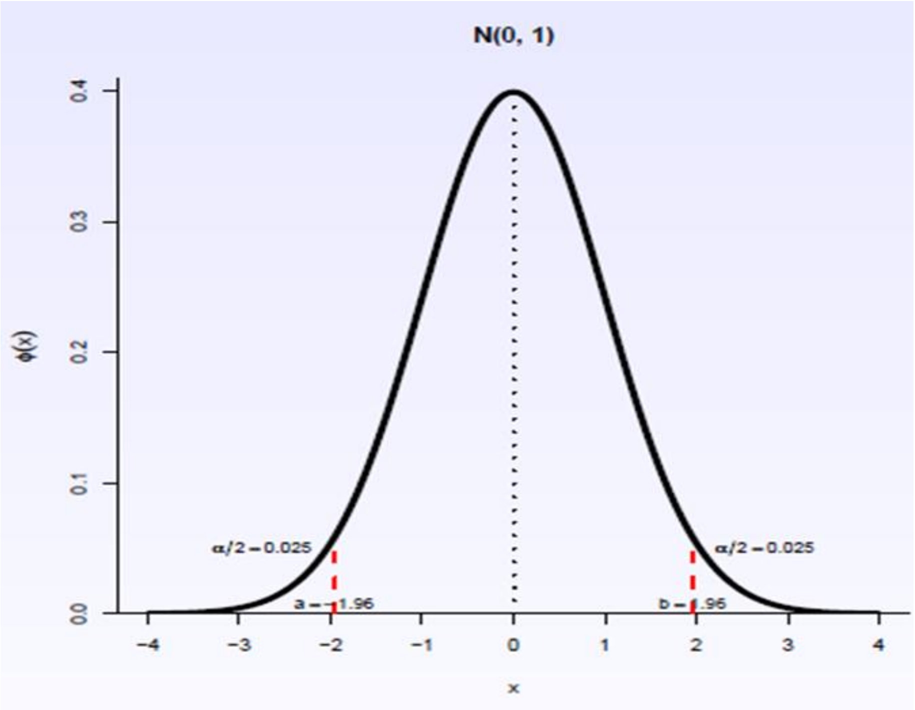
$$P\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

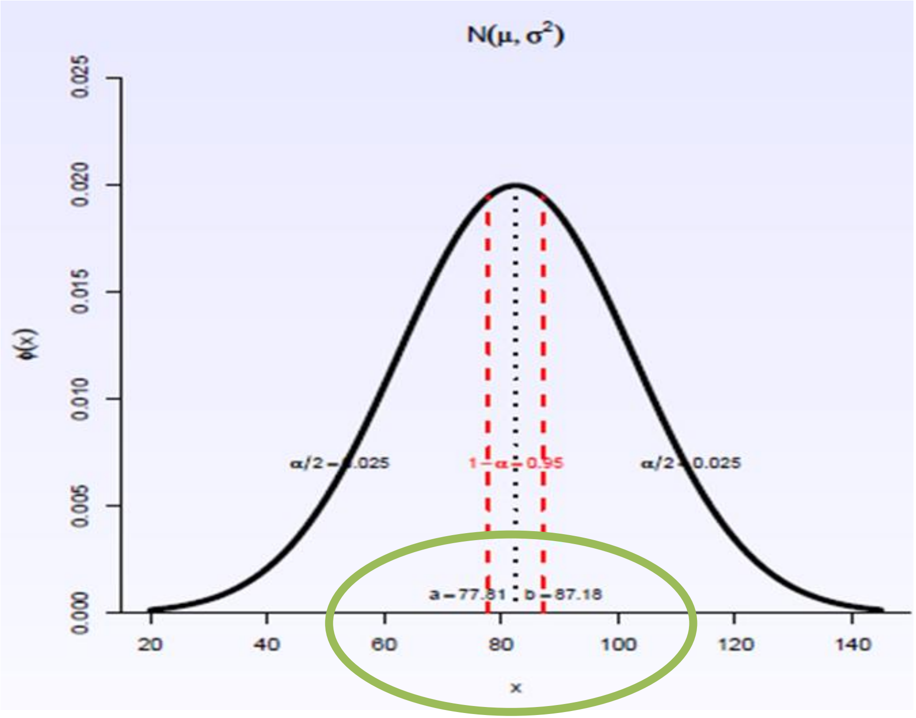
- ✓ Como $\bar{x} = 82.5$ es la realización particular de $\bar{X}$, para esta muestra dada el intervalo de confianza para μ es

$$\left(82.5 - 1.96\frac{20}{\sqrt{70}} < \mu < 82.5 + 1.96\frac{20}{\sqrt{70}}\right) = (77.81, 87.18)$$

Luego el precio del alquiler medio en Madrid se encuentra en el intervalo anterior con una confianza del 95%. Recordar que tenemos confiar al 95%, en que esete intervalo sea de los buenos.

4.2 Método Pivotal.





4.2 Método Pivotal.

¿Cómo elegir el estadístico pivote?

- Se buscaran funciones sencillas de la muestra y del parámetro, cuya distribución no dependa del parámetro θ.
- En los casos más generales, el estadístico pivote surge de la forma más natural.
- En algunas situaciones la búsqueda es más complicada. En estos casos, si tenemos muestras grandes, podemos recurrir como estadístico pivotal al estimador por Máxima Verosimilitud:

$$\hat{\theta}_{MV} \text{ } es \text{ } asintóticamente \text{ } N(\theta, \sigma(\hat{\theta}))$$

Entonces, el estadístico pivotal T es

$$T = \frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{\sigma(\hat{\theta}_{MV})} \text{ } es \text{ } asintóticamente \text{ } N(0,1)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para una Muestra

$$Poblacion\ normal\ X \sim N(\mu,\sigma) \begin{cases} IC\ para\ la\ media\ \mu \begin{cases} \sigma^2\ conocida \\ \sigma^2\ desconocida \end{cases} \\ IC\ para\ la\ varinza\ \sigma^2 \end{cases}$$

$$Poblacion\ no\ Normal\ X \sim Ber(p)\ \Rightarrow IC\ para\ la\ proporción\ p$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para una Muestra Varianza Conocida

1. Fijamos el nivel de confianza, , $1-\alpha (0<\alpha<1)$.
2. Elección del estadístico pivotal

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

3. Planteamiento del enunciado probabilístico. Sea $z_{\alpha/2}$ el cuantil $\alpha/2$ de la distribución N(0,1), es decir $P(Z \le z_{\alpha/2}) = \alpha/2$. La probabilidad de cualquier variable aleatoria con distribución N(0,1) tome valores en el intervalo $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$ es $1-\alpha$ y, por tanto:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

4. Transformación del enunciado probabilístico. Si realizamos operaciones aritméticas: Multiplicar todos los ternamos por $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$P\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Restamos en los términos de $\bar{X}$ y multiplicamos los términos por -1 para cambiar los signos

$$P\left(\bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Se obtiene final mente:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

5. IC para μ con nivel de confianza $1-\alpha$. Intervalo probabilístico cuyos extremos son variables aleatorias, tales que la probabilidad de que tomen valores entre los que quede comprendido el verdadero valor de la media es $1-\alpha$.

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Observación: Longitud del intervalo: $L = b - a = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- Cuanto mayor es la desviación típica σ, mayor es la longitud del intervalo.
- Cuanto mayor es el tamaño de la muestra n, menor es la longitud del intervalo.
- Cuanto mayor es el nivel de confianza $1-\sigma$, mayor es la longitud del intervalo.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Margen de Error

Refleja el hecho de que la distribución del muestreo de la media muestral $\bar{x}$ es exactamente una distribución normal con media μ y desviación estándar ${}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}$, siempre y cuando la población tenga una distribución normal con media m y desviación estándar σ. Si la población no está distribuida normalmente, las muestras grandes producen medias muestrales con una distribución que se aproxima a la normal. Donde se requiere que de la desviación estándar poblacional σ, presentará un método para calcular el margen de error $\boldsymbol{E}$ cuando se conoce σ.

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Tamaño de muestra μ

Indica que el tamaño muestral no depende del tamaño de la población (N); el tamaño muestral depende del nivel de confianza deseado, del margen de error deseado y del valor de la desviación estándar poblacional σ. El tamaño muestral debe ser un número entero, ya que representa el número de valores muestrales que deben encontrarse. Suele dar un resultado que no es un número entero, de manera que utilizamos la siguiente regla de redondeo. (Esta regla se basa en el principio de que cuando es necesario redondear, el tamaño de muestra requerido debe redondearse hacia arriba para que sea al menos adecuadamente grande en oposición a un tamaño ligeramente más pequeño).

$$n = \left(\frac{z\alpha/_2\sigma}{E}\right)^2$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

1) Cálculo de un intervalo de confianza. En los siguientes ejercicios, utilice el intervalo de confianza y los datos muestrales indicados para calcular un intervalo de confianza para estimar la media poblacional μ.

a) Salarios de graduados universitarios que tomaron un curso de estadística en la universidad: confianza del 90%; n=41, $\bar{x} = \$67{,}200$, y se sabe que σ es \$18,277.

b) Las velocidades de conductores multados en una zona con límite de velocidad de 55*mi/h*: confianza del 98%; n=90, $\bar{x} = 66.2mi/h$, y se sabe que σ es 3.4*mi/h*.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

2) En los siguientes ejercicios, use el margen de error, el nivel de confianza y la desviación estándar poblacional σ indicados para calcular el tamaño de muestra:

a) Margen de error: 0.5 pulgadas, nivel de confianza: 95%, $\sigma = 2.5$pulgadas.

b) Margen de error: 0.25 segundos, nivel de confianza: 99%, $\sigma = 5.4$ segundos.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

3) Cuando 14 estudiantes de segundo año de medicina del Bellevue Hospital midieron la presión sanguínea de la misma persona, obtuvieron los resultados que se listan abajo. Suponiendo que se sabe que la desviación estándar poblacional es de 10 mmHg, construya un estimado de un intervalo de confianza del 95% de la media poblacional. De manera ideal, ¿cuál debe ser el intervalo de confianza en esta situación?

138, 130, 135, 140, 120, 125, 120, 130, 130, 144, 143, 140, 130 y 150

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para una Muestra Varianza Desconocida

En el caso de se deszocamos el valor de la s desviación típica, deberemos estimar dicho parámetro mediante el estimador (insesgado)

$$\hat{S}_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Eligiendo como estadístico pivotal,

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{S}_X/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

En general, se procede de forma análoga a la anterior para calcular el intervalo de probabilidad al $100(1-\alpha)\%$ para la media μ de una población normal con varianza s^2 desconocida.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para una Muestra Varianza Desconocida

1. Fijamos el nivel de confianza, , $1-\alpha (0<\alpha<1)$

2. Elección del estadístico pivotal

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{S}_X/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

3. Planteamiento del enunciado probabilístico.

$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{S}_X/\sqrt{n}} < t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

4. Planteamiento del enunciado probabilístico.

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{\hat{S}_X}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{\hat{S}_X}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

5. IC para α con nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left(\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{\hat{S}_X}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{\hat{S}_X}{\sqrt{n}}\right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Propiedades importantes de la distribución t de Student

1) La distribución t de Student es diferente para distintos tamaños de muestra.

2) La distribución t de Student tiene la misma forma de campana simétrica que la distribución normal estándar, pero refleja una mayor variabilidad (con distribuciones más amplias) de lo que se espera con muestras pequeñas.

3) La distribución t de Student tiene una media de t=0 (así como la distribución normal estándar tiene una media de z=0).

4) La desviación estándar de la distribución t de Student varía con el tamaño muestral, pero es mayor que 1 (a diferencia de la distribución normal estándar, que tiene s 1).

5) Conforme el tamaño muestral n se hace más grande, la distribución t de Student se acerca más a la distribución normal estándar

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Grados de Libertad.

El número de grados de libertad para un conjunto de datos muestrales recolectados es el número de valores muestrales que pueden variar después de haber impuesto ciertas restricciones a todos los valores de los datos.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

1) En los siguientes ejercicios, realice una de las siguientes acciones, según sea apropiado: a) calcule el valor crítico $Z_{\alpha/2}$, b) calcule el valor crítico $t_{n-1,\alpha/2}$, c) determine que no se aplica ni la distribución normal ni la distribución t.

a) 99%; n=15; se desconoce s; la población parece estar distribuida normalmente.
b) 99%; n=4; se conoce σ; la población parece estar muy sesgada.
c) 95%; n=50; se conoce σ; la población parece estar muy sesgada.
d) 90%; n=200; se desconoce σ; la población parece estar distribuida normalmente.
e) 98%; n=16; $\sigma = 5.0$; la población parece estar muy sesgada.
f) 98%; n=18; $\sigma = 21.5$; la población parece estar distribuida normalmente.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

2) En los siguientes ejercicios, utilice el nivel de confianza y los datos muestrales indicados para calcular a) el margen de error y b) el intervalo de confianza para la media poblacional m. Suponga que la población tiene una distribución normal.

a) Peso perdido por una dieta de Weight Watchers: 95% de confianza; n=40, $\bar{x} = 3.0kg$, s=4.9kg.
b) Periodo de vida de una computadora de escritorio: 99% de confianza; n=21, $\bar{x} = 6.8años$, s=2.4$años$.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para la Varianza, con Media Desconocida

- ✓ Supongamos una población cuya característica en estudio puede describirse mediante una variable aleatoria X con distribución $N(\mu, \sigma)$.
- ✓ Sea $X_1, \dots, X_n$ una M.A.S de X.

Aplicando el Método Pivotal en este caso particular:

1. Fijamos el nivel de confianza, , $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$
2. Elección del estadístico pivotal, tomamos el estimador insesgado de σ^2: $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

   Se utiliza el siguiente estadístico pivotal

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

3. Planteamiento del enunciado probabilístico, Se produce como en los anteriores casos, teniendo en cuenta que la distribución de χ_n^2 no es simétrica $(\chi_{n-1,\alpha/2}^2 = \chi_D^2, \chi_{n-1,1-\alpha/2}^2 = \chi_I^2)$:

$$P\left(\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2 < \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} < \chi_{n-1,\alpha/2}^2\right) = 1-\alpha$$

4. Transformación del enunciado probabilístico. Despejando de esta expresión el valor σ^2 se obtiene

$$P\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2}\right) = 1-\alpha$$

FCFM
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

5. IC para σ^2 con el nivel de confianza $1-\alpha$. De esta forma hemos construido un intervalo probabilístico cuyos extremos son variables aleatorias

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}\right) = \left(\sqrt{\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_D}}, \sqrt{\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_I}}\right)$$

tales que la probabilidad de que tomen valores entre los que quede comprendido el verdadero valor de la varianza es $1-\alpha$.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

1) Determinación del tamaño muestral. En los siguientes ejercicios, suponga que cada muestra es aleatoria simple y que se obtuvo de una población distribuida normalmente.

a) Calcule el tamaño muestral mínimo que se necesita para tener una confianza del 95% de que la desviación estándar muestral s está dentro del 5% de σ.
b) Calcule el tamaño muestral mínimo que se necesita para tener una confianza del 95% de que la desviación estándar muestral s está dentro del 20% de σ.
c) Calcule el tamaño muestral mínimo que se necesita para tener una confianza del 95% de que la varianza muestral está dentro del 30% de la varianza poblacional.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

2) Cálculo de un intervalo de confianza. En los siguientes ejercicios, utilice el nivel de confianza y los datos muestrales indicados para calcular un intervalo de confianza para la desviación estándar poblacional s. En cada caso, suponga que se obtuvo una muestra aleatoria simple de una población que tiene una distribución normal.

a) Salarios de graduados universitarios que tomaron un curso de estadística en la universidad: confianza del 95%; n=41, $\bar{x} = \$67{,}00$, *s*=\$18,277.
b) Las velocidades de conductores multados en una zona con límite de velocidad de 55*mi/h*: confianza del 95%; n=90, $\bar{x} = 66.2 mi/h$, *s*=3.4*mi/h*.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

3) Un fabricante de detergente líquido está interesado en la uniformidad de la máquina utilizada para llenar las botellas. De manera específica, es deseable que la desviación estándar del proceso de llenado sea menor que 0.15 onzas de líquido; de otro modo, existe un porcentaje mayor del deseable de botellas con un contenido menor de detergente. Supongamos que la distribución del volumen de llenado es aproximadamente normal. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas, se obtiene una varianza muestral S2 = 0.0153. Hallar un intervalo de confianza de nivel 0.95 para la verdadera varianza del volumen de llenado

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para la Proporción

- El objetivo es construir un IC para la proporción de elementos p de una población que poseen determinada característica de interés, a partir de una M.A.S. de elementos de la población.
- Para cada elemento de la población:

$$X = \begin{cases} 1\ (tiene\ la\ caracteristica)\ con\ probabilidad\ p \\ 0\ (no\ la\ tiene)\ con\ probabilidad\ 1-p \end{cases}$$

- M.A.S. $X_1, X_2, \dots, X_n$, copias de una variable $X \in Ber(p)$.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para la Proporción

1. Fijamos el nivel de confianza, , $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$
2. Elección del estadístico pivotal, Dado que para *n* grande el estimador de p:

$$\hat{p}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

Tiene distribución aproximadamente $N\left(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, utilizaremos el estadístico pivote

$$T=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\sim N(0,1)\;\;(n>30)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

3. Planteamiento del enunciado probabilístico y transformación del enunciado probabilístico. Teniendo en cuenta esta aproximación se obtienen el IC para la media.
4. IC para p con nivel de confianza $1-\alpha$. El Intervalo de Confianza a nivel $1-\alpha$ viene dado por

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Observaciones.

El intervalo anterior no es calculable (depende de valor desconocido p). Para resolver dicho en la práctica:

a) Sustituir p por su estimador $\hat{p}$. El intervalo resultante es

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

b) Considerar la situación más desfavorable, es decir tomar $p = 1/2$ y reemplazar $p = (1 - p)$ por su valor máximo, $1/4$. El intervalo que se obtiene es

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Tamaño de Muestra

Al igual que en el caso de la media, se obtiene el valor de *n:*

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1-\hat{p})}{E^2}$$

El problema del desconocimiento de p se sigue mantenimiento, por lo que las dos soluciones apuntadas anteriormente sigue siendo válidas. Tomando la segunda solución por esta: tomar $p = 1/2$ y reemplazar $p(1-p)$ por su valor máximo, $1/4$.

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 (1/4)}{E^2}$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Margen de error

Cuando se utilizan los datos de una muestra aleatoria simple para estimar una proporción poblacional p, el **margen de error**, denotado por $\boldsymbol{E}$, es la diferencia máxima probable (con probabilidad $1-\alpha$) entre la proporción muestral observada y el valor real de la proporción poblacional p. El margen de error $\boldsymbol{E}$ también se llama error máximo del estimado y se calcula multiplicando el valor crítico por la desviación estándar de las proporciones muestrales:

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

1) Construcción de intervalos de confianza. En los siguientes ejercicios, use los datos muestrales y el nivel de confianza para construir el intervalo de confianza estimado de la proporción poblacional p.

a) n = 500, x=200, 95% de confianza
b) n=1200, x=800, 99% de confianza

2) Determinación del tamaño muestral. En los siguientes ejercicios, utilice los datos para calcular el tamaño muestral mínimo requerido para estimar una proporción o porcentaje de una población.

a) Margen de error: tres puntos porcentuales; nivel de confianza: 95%; de un estudio previo, $\hat{p}$ se estima por el equivalente decimal del 27%.
b) Margen de error: 0.020; nivel de confianza: 95%; $\hat{p}$ y $\hat{q}$ desconocidas

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios:

3) Cuando Mendel realizó sus famosos experimentos genéticos con guisantes, una muestra de vástagos consistió en 428 plantas de guisantes verdes y 152 de guisantes amarillos.

a. Calcule un estimado del intervalo de confianza del 95% del porcentaje de plantas de guisantes amarillos.

b. Con base en su teoría genética, Mendel esperaba que el 25% de los vástagos dieran guisantes amarillos. Dado que el porcentaje de vástagos de guisantes amarillos no es el 25%, ¿contradicen los resultados la teoría de Mendel? ¿Por qué?

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para la diferencia de medias de poblaciones normales independientes

Sea $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ dos muestras aleatorias recogidas independientemente de dos poblaciones normales $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Se desea construir intervalos de confianza para diferencia de medias $\mu_X - \mu_Y$.

Caso 1: Varianzas Conocidas

Suponiendo que $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ son independientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X} \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X}{n}\right) \\ \bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y}{m}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Por tanto

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

Puede ser utilizado como estadístico pivote puesto que tiene una distribución independiente de μ_X y μ_Y.

Entonces llegamos a que un intervalos de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ con un nivel de confianza $1 - \alpha$ es

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Caso 2: Varianzas Desconocidas pero iguales

Ahora supongamos que las varianzas σ_X y σ_Y son desconocidas pero iguales a σ^2:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{m}}\right) \Leftrightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}\right)$$

Y por lo tanto $T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$

Como en la expresión anterior no se conoce el valor de σ^2, éste se puede sustituir por el valor

$$\hat{S}^2 = \frac{(n-1)\hat{S}_X^2 + (m-1)\hat{S}_Y^2}{n+m-2}$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Que es una ponderación de las dos cuasivarianzas muestrales $\hat{S}_X^2$ y $\hat{S}_Y^2$. Se puede desmotar que $T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$

Luego, un intervalo de confianza $\mu_X - \mu_Y$ a un nivel de confianza de $1-\alpha$ es el siguiente

$$\left((\bar{X}-\bar{Y}) - t_{n+m-2,\alpha/2}\hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}, (\bar{X}-\bar{Y}) + t_{n+m-2,\alpha/2}\hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)$$

Nota: Puesto que la construcción de este intervalo requiere suponer que las varianzas, aunque desconocidas, son iguales, es necesario realizar previamente un **contraste de hipótesis** para generalizar dicha suposición n.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Caso 3: Varianzas Desconocidas y Distintas

Si las varianzas no se pueden suponer iguales, el estadístico anterior no se puede utilizar. En el caso de que las varianzas fuesen conocidas, el estadístico a utilizar era

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

a) Tamaños muestrales grandes $(n, m \geq 30)$

En este caso se utiliza el estadístico pivote anterior estimando σ_X por $\hat{S}_X$ y σ_Y por $\hat{S}_Y$, es decir:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n} + \frac{\hat{S}_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

Que tiene una distribución aproximadamente normal $N(0,1)$.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Luego, un intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ a un nivel de confianza $1-\alpha$ es el siguiente

$$\left((\bar{X}-\bar{Y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n}+\frac{\hat{S}_Y^2}{m}}, (\bar{X}-\bar{Y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n}+\frac{\hat{S}_Y^2}{m}}\right)$$

b) Tamaños muestrales grandes $(n, m < 30)$

En este caso la aproximación normal no es nada precisa. La solución más usada habitualmente es la aproximación debida a Welch, según la cual el estadístico anterior sigue una distribución t de Student con $g = n + m - 2$ grados de libertad en:

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

$$\Delta = \frac{\left((m-1)\frac{\hat{S}_X^2}{n} - (n-1)\frac{\hat{S}_Y^2}{m}\right)^2}{(m-1)\left(\frac{\hat{S}_X^2}{n}\right)^2 + (n-1)\left(\frac{\hat{S}_Y^2}{m}\right)^2}$$

Se comprueba que $0 \leq \delta \leq max(n-1, m-1)$.

Luego, un intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ a un nivel de confianza $1-\alpha$ es el siguiente

$$\left((\bar{X}-\bar{Y}) - t_{g,\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n} + \frac{\hat{S}_Y^2}{m}}, (\bar{X}-\bar{Y}) + t_{g,\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n} + \frac{\hat{S}_Y^2}{m}}\right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Tamaño de Muestra

Caso 1: Si las Varianzas Poblacionales son Conocidas, despejando *n* en la longitud del intervalo:

$$L = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{n}} \Rightarrow n = \frac{4z_{\alpha/2}^2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}{L^2}$$

Caso 2: Si las Varianzas Poblacionales son Desconocidas pero pueden suponerse iguales, dada una estimación preliminar de la varianza común $\hat{S}^2$ y supuesto *n* es suficientemente grande para aproximar la distribución de *t* por la normal estándar, despejando *n* en la longitud del intervalo

$$L = 2z_{\alpha/2}\hat{S}^2\sqrt{\frac{2}{n}} \Rightarrow n = \frac{8z_{\alpha/2}^2\hat{S}^2}{L^2}$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Caso 3: Si las Varianzas Poblacionales son Desconocidas y Distintas, suponiendo que *n* es suficientemente grande para aproximar la distribución de *t* por lo normal estándar, el valor de *n* que se obtiene al despejar en la longitud del intervalo

$$L = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2 + \hat{S}_Y^2}{n}} \Rightarrow n = \frac{4z_{\alpha/2}^2\left(\hat{S}_X^2 + \hat{S}_Y^2\right)}{L^2}$$

Donde $\hat{S}_X^2$ y $\hat{S}_Y^2$ son estimaciones preliminares de las varianzas poblacionales.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicio:

1) Una muestra aleatoria de tamaño $n_1 = 25$ que se toma de una población normal con una desviación estándar $\sigma_1 = 5$ tiene una media $\bar{x}_1 = 80$. Una segunda muestra aleatoria de tamaño $n_2 = 36$, tomada de una población normal diferente con una desviación estándar $\sigma_1 = 3$, tiene una media $\bar{x}_2 = 75$. Encuentre un intervalo de confianza del 94% para $\mu_1 - \mu_2$.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicio:

2) De una muestra de 150 lámparas del fabricante A se obtuvo una vida media de 1400 horas y una desviación típica de 120 horas. Mientras que de una muestra de 100 lámparas del fabricante B se obtuvo una vida media de 1200 horas. y una desviación típica de 80 horas. Halla los límites de confianza del 95% para la diferencia las vidas medias de las poblaciones A y B.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para la diferencia de medias con datos apareados.

Muestreo Apareado: La principal característica del muestreo apareado es que ambas muestras son claramente dependientes, de modo que los estadísticos pivote usados en caso de independencia no se puede emplear en este caso, puesto que los intervalos de confianza pueden salir excesivamente grandes o pequeños.

El motivo es que las Variables X e Y son dependientes

$$Var(\bar{X}-\bar{Y}) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) - 2Cov(\bar{X},\bar{Y})$$

Con lo que el denominador de los estadísticos pivote puede ser equivocadamente grande o pequeño, según sea la dependencia entre X e Y , es decir según sea $Cov(\bar{X},\bar{Y})$.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

La Solución:

Considerar una nueva variable aleatoria $D = X - Y$,

$$\left\{\begin{matrix} X \sim N(\mu_X, \sigma_X) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow D = X - Y \sim N(\mu_D, \sigma_D)$$

Donde $\mu_D = \mu_X$- μ_Y,$\sigma_D^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}$

Tipificado:

$$\frac{D - \mu_D}{\sigma_D} \sim N(0,1)$$

Puesto que σ_D es desconocido, si estimamos su valor por la cuasivarianza muestral $\hat{S}_D$, el estadístico pivote en este caso es

$$\frac{D - \mu_D}{\hat{S}_D} \sim t_{n-1}$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

El IC para $\mu_X - \mu_Y$ equivale al intervalo para μ_D. Para ello disponemos de una muestra aleatoria de la viable D sin más que considerar los valores $D_i = X_i - Y_i$, obtenidos a partir de las muestras apareadas $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^{n}$.

Recordando la construcción de IC para la media de una población normal, se obtiene que el intervalo de probabilidad con nivel $1 - \alpha$ para $\mu_X - \mu_Y$ es

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) - t_{n-1, \alpha/2} \frac{\hat{S}_D}{\sqrt{n}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{n-1, \alpha/2} \frac{\hat{S}_D}{\sqrt{n}} \right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicio:

1) Un analista financiero desea saber si ha habido o no cambio significativo en las utilidades por acción entre 2004 - 2005 de las empresas más grandes del país. Para tal efecto tomó una muestra de 10 empresas y obtuvo los siguientes resultados:

Año	Empresas									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2005	4.12	2.85	2.81	3.39	2.03	4.91	2.28	4.10	6.30	0.52
2006	4.79	3.20	3.34	1.94	2.00	3.69	2.50	4.30	7.16	1.78
Di	**-0.67**	**-0.35**	**-0.53**	**1.45**	**0.03**	**1.22**	**-0.22**	**-0.20**	**-0.86**	**-1.26**

¿Con 98% de confianza, se puede afirmar que existe diferencia significativa en las utilidades entre estos dos años observados?

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Respuesta: $D_i = X_i - Y_i$

	Media	-0.139
	S_d^2	0.741
	S_d	0.861
t	98%	2.821

$$(-0.83987, 0.56187)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicio:

2) Un conjunto de pacientes en qué se mide una variable en el momento basal del estudio y en una visita posterior. En este caso, tenemos las 2 muestras (basal y visita posterior) emparejadas por cada paciente. Las 2 intervenciones anteriores, A y B, se han probado en los 6 mismos pacientes y los tiempos hasta la desaparición del síntoma han sido:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5	Pac. 6
YiA	23.05	39.06	21.72	24.47	28.56	27.58
YiB	20.91	37.21	19.29	19.95	25.32	24.07

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para el Cociente de Varianzas.

Teniendo en cuenta la normalidad e independencia de ambas poblaciones, se verifica que:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{(n-1)\hat{S}_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi_{n-1}^2 \\ \frac{(n-1)\hat{S}_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi_{m-1}^2 \end{array}\right\} = \frac{\frac{\hat{S}_X^2}{\sigma_X^2}}{\frac{\hat{S}_Y^2}{\sigma_Y^2}} = \frac{\hat{S}_X^2 \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 \hat{S}_Y^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

Por tanto, un IC a nivel $1-\alpha$ se obtiene de la siguiente manera:

$$1-\alpha = P\left(F_{n-1,m-1,\alpha/2} < \frac{\hat{S}_X^2 \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 \hat{S}_Y^2} < F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}\right)$$

$$1-\alpha = P\left(F_{n-1,m-1,\alpha/2} \frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2} < \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} < F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2}\right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para el Cociente de Varianzas.

Por tanto, un IC a nivel $1-\alpha$ se obtiene de la siguiente manera:

$$1-\alpha = P\left(\frac{\frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2}}{F_{n-1,m-1,\alpha/2}} < \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} < \frac{\frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2}}{F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}}\right)$$

IC al nivel $1-\alpha$

$$P\left(\frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2}F_{n-1,m-1,\alpha/2}, \frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2}F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}\right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios1: Una de las maneras de medir el grado de satisfacción de los empleados de una misma categoría en cuanto a la política salarial, es a través de las desviaciones estándar de sus salarios. La fábrica A afirma ser más homogénea en su política salarial que la fábrica B. Para verificar esa afirmación se escoge una muestra aleatoria de 10 empleados no especializados de A y 13 de B, obteniendo las dispersiones $S_A = 50$ y $S_B = 30$ de salario como mínimo. ¿Cuál sería su conclusión si utiliza un intervalo del 95% para el cociente de varianzas?. Suponga distribuciones normales.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Respuesta: Una de las

Datos de la fábrica A: $n_A = 10$; $S_A = 50$

Datos de la fábrica B: $n_B = 13$; $S_B = 30$

Puesto que el problema consiste en obtener el intervalo de confianza del para la razón de varianzas, usaremos la distribución F.

$$P\left(\frac{\frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2}}{F_{n-1,m-1,\alpha/2}}, \frac{\frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2}}{F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}}\right) = \left(\frac{2{,}500}{900}(0.29105), \frac{2{,}500}{900}(3.86822)\right)$$

$$= (0.80846, 10.7412)$$

Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.95$; $F_{\alpha/2}(12,9) = 0.29105$ $F_{1-\alpha/2}(12,9) = 3.86822$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios2: Se sospecha que un laboratorio de medidas de viscosidad obtenidas en la mañana eran menores que en la tarde. Para confirmar esta sospecha, se toman dos muestras, una por la mañana y otra por la tarde, obteniéndose los siguientes resultados:

Viscosidad		
	Mañana	Tarde
N	10	9
Medias	56.8	58
Varianzas	1,273.6	284

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Respuesta:

Calculemos las varianzas muestrales de ambos turnos

$S_M^2 = 1273.6/9 = 141.51111$ $S_T^2 = 284/8 = 35.5.$

El intervalo del 95% para la razón de varianzas será

(0.91485, 16.35133)

Podemos afirmar que no hay suficiente evidencia para afirmar que la variabilidad de la viscosidad difiere.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para para la Diferencia de dos Proporciones.

La manera de proceder es idéntica a la del caso de una sola proporción, se recogen sendas muestrales aleatorias simples $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_n$ de las variables X e Y donde

$$X_i = \begin{cases} 1 & con\ probabilidad\ px \\ 0 & con\ probabilidad\ 1 - px \end{cases} \quad Y_i = \begin{cases} 1 & con\ probabilidad\ py \\ 0 & con\ probabilidad\ 1 - py \end{cases}$$

Supuesto aceptable la aproximación normal, se tiene que:

$$\left\{ \begin{matrix} \dfrac{\hat{p}x - px}{\sqrt{\dfrac{px(1-px)}{n}}} \sim N(0,1) \\ \dfrac{\hat{p}y - py}{\sqrt{\dfrac{py(1-py)}{m}}} \sim N(0,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{p}x - \hat{p}y \sim N\left(px - py, \sqrt{\frac{px(1-px)}{n} + \frac{py(1-py)}{m}} \right)$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

IC para para la Diferencia de dos Proporciones.

Mediante razonamiento que hemos seguido a lo largo del tema, se llega a que el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones $px - py$ con un nivel de confianza de $1-\alpha$ es

$$\left(\hat{p}x - \hat{p}y \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{px(1-px)}{n} + \frac{py(1-py)}{m}}\right)$$

De nuevo, se ha de sustituir px y py por sus estimaciones $\hat{p}x$ y $\hat{p}y$ respectivamente.

O bien, considerar la situación más desfavorable $px = py = {}^{1}/_{2}$.

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Tamaño de Muestra

Supuesto que el tamaño muestral a elegir es grande ($n > 30$), despejando n en la expresión para la longitud del intervalo de confianza para la diferencia de proporciones

$$L = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{px(1-px)}{n}+\frac{py(1-py)}{m}}$$

Se obtiene

$$n = \frac{4z_{\alpha/2}^{2}\big(px(1-px)+py(1-py)\big)}{L^2}$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios1: MillWard Brown, empresa investigadora de mercado es requerida para hacer un estudio sobre la preferencia de un producto. Se le pide que estime la proporción de hombres y mujeres que conocen el producto que está siendo promocionado en toda la ciudad. En una muestra aleatoria de 100 hombres y 200 mujeres se determina que 20 hombres y 60 mujeres están familiarizados con el producto indicado. Construya un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de proporciones de hombres y mujeres que conocen el producto. En base a estos resultados, ¿se estaría inclinado a concluir que existe una diferencia significativa entre las dos proporciones?

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Respuesta: $n_1=200$, $n_2=100$, $p_1=60/200=.3$, $p_2=20/100=.2$, 95% $Z=1.96$

$$\left(\hat{p}x-\hat{p}y \pm z_{1-{}^{\alpha}/_{2}}\sqrt{\frac{px(1-px)}{n}+\frac{py(1-py)}{m}}\right)$$

$$=(-0.0009, 0.2009)$$

$$\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2}=\sqrt{\frac{.3(1-.3)}{200}+\frac{.2(1-.2)}{100}}=0.5147815$$

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Ejercicios2: El gerente de control interno de una empresa le encarga a dos de sus técnicos, la verificación de la validez de un conjunto de certificados de ventas. Para ello se toma una muestra de 120 y se le distribuye 60 a cada uno de ellos. Después de presentar su informe, se encuentra que el primer técnico examina a 40 y encuentra 10 falsos, mientras que el segundo técnico examina 50 y encuentra 15 falsos. Debido a la diferencia de entre estos porcentajes el gerente solicitó un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de verdadera. ¿Este intervalo de confianza justificará la creencia del gerente de que los dos técnicos emplean métodos diferentes?

4.3 Métodos para construir un intervalo de confianza.

Respuesta:

Según los datos, los tamaños de muestra reales son:

Primer técnico: n1 = 40; número de certificados falsos = 10

Segundo técnico: n2 = 50; número de certificados falsos = 15

p_1=10/40=.25, p_2=15/20=.75

Luego el intervalo de confianza del 95% para la diferencia de proporciones será

(-0.2348, 0.1348)

Bibliografía.

- ✓ Canavos, G. C. Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos. México. McGraw-Hill. 1987.
- ✓ Casella, G. and Berger, R. L. Statistical Inference. California. Wadsworth. 1990.
- ✓ Ipiña, S. L. (2008). Inferencia Estadística y Análisis de Datos. Madrid: PEARSON Prentice-Hall.
- ✓ Larsen, R. J. and Marx, M. L. An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications. USA. Englewood Cliffs-Prentice-Hall. 1986.
- ✓ Lindgren, B. W. Statistical Theory. New York. Macmillan Publishing. 1976.
- ✓ Mood, A. M. et al. Introduction to the Theory of Statistics. New York. McGraw-Hill. 1974.
- ✓ Vazquez, J. (2017). Estimación Puntual. México: Proyecto PAIME UNAM.