Aproximación de Cambios con Ecuaciones Diferenciales

Leonardo Daniel Castillo Rodriguez	1844452
Orlando García Salazar	1811901
Gerardo Mora Martinez	1849522

Ejemplo

Los datos de la tabla 1.1 se obtuvieron de un experimento que midió el crecimiento de una levadura.

El gráfico 1.2 representa el supuesto de que el cambio en la población es proporcional a el tamaño actual de la población. Es decir,

$$\Delta p_n = (p_{n+1} - p_n) = k p_n$$

; Pn=tamaño de la población después de n hora.
k=constante de proporcionalidad

Time in hours n	Observed yeast biomass p_n	Change in biomass $p_{n+1} - p_n$
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7
7	257.3	

Tabla 1.1

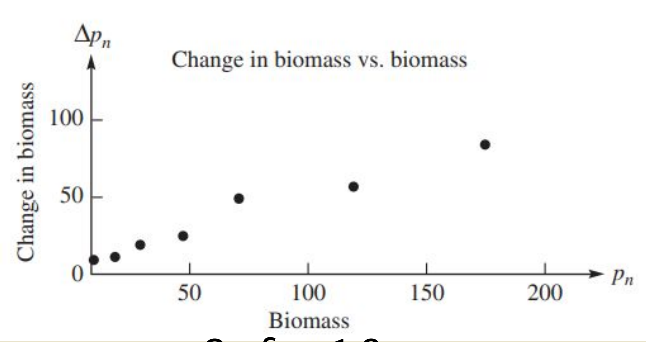


Grafico 1.2

Aunque el gráfico de los datos no se encuentra precisamente a lo largo de una línea recta que pasa exactamente a través del origen, se puede aproximar mediante una línea recta. Colocando una recta sobre los datos para aproximar una línea recta a través del origen, estimamos la pendiente del línea para ser aproximadamente de 0,5. Usando la estimación k=.5 para la pendiente de la línea, hipotetizamos el modelo de proporcionalidad.

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = 0.5 p_n$$

Suponiendo que

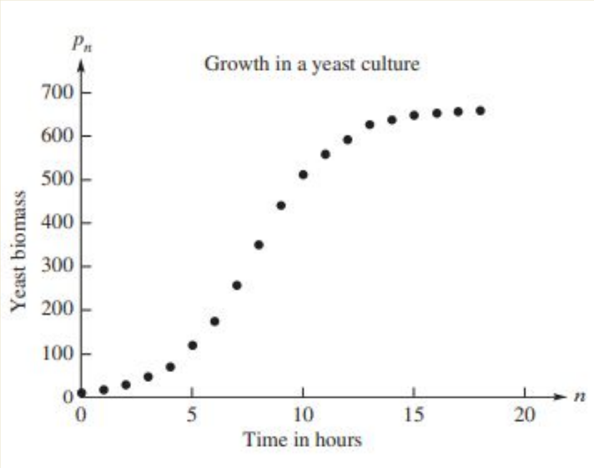
$$p_{n+1} = 1.5 p_n$$

Este modelo predice una población que aumenta para siempre, lo cual es cuestionable.

Modelo de aproximacion

Los datos de la Tabla 1.3 muestran lo que realmente le sucede al cultivo de levadura, los cuales crecen dentro de un área restringida a medida que aumenta el tiempo más allá de las ocho observaciones dadas en la Tabla 1.1.

De la gráfica 1.4 de población versus tiempo, la población parece acercarse a un valor límite o capacidad de carga. Según nuestro gráfico, estimamos que la capacidad de carga es 665.



Grafica 1.4

Time in hours n	Yeast biomass p_n	Change/hour $p_{n+1} - p_n$
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7
7	257.3	93.4
8	350.7	90.3
9	441.0	72.3
10	513.3	46.4
11	559.7	35.1
12	594.8	34.6
13	629.4	11.4
14	640.8	10.3
15	651.1	4.8
16	655.9	3.7
17	659.6	2.2
18	661.8	

Tabla 1.3

proponemos el modelo

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k(665 - p_n)p_n$$

Obteniendo datos correspondientes al modelo

Time in hours n	Yeast biomass p_n	Change/ hour $p_{n+1} - p_n$
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7
7	257.3	93.4
8	350.7	90.3
9	441.0	72.3
10	513.3	46.4
11	559.7	35.1
12	594.8	34.6
13	629.4	11.4
14	640.8	10.3
15	651.1	4.8
16	655.9	3.7
17	659.6	2.2
18	661.8	

Tabla 1.3

$p_{n+1} - p_n$	$p_n(665 - p_n)$
8.7	6291.84
10.7	11,834.61
18.2	18,444.00
23.9	29,160.16
48.0	42,226.29
55.5	65,016.69
82.7	85,623.84
93.4	104,901.21
90.3	110,225.01
72.3	98,784.00
46.4	77,867.61
35.1	58,936.41
34.6	41,754.96
11.4	22,406.64
10.3	15,507.36
4.8	9050.29
3.7	5968.69
2.2	3561.84

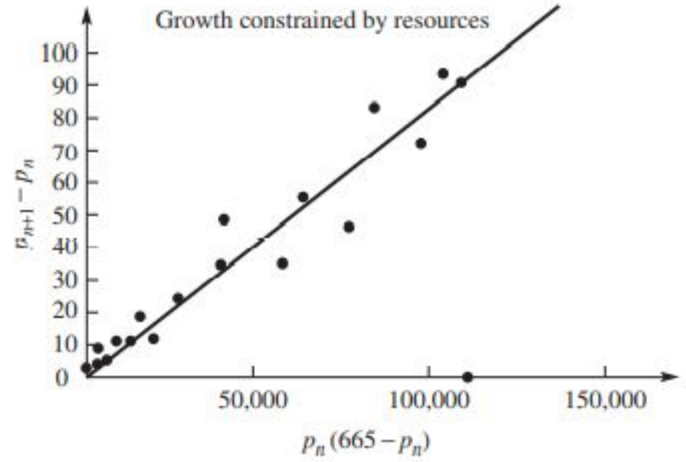


Tabla 1.5

Después de obtener lo datos anteriores, procederemos a estimar la pendiente de la línea recta que pasa por el origen y es proporcional a los datos

$$slope = \frac{\Delta(p_{n+1} - p_n)}{\Delta(p_n(665 - p_n))} = (90.3 - 0)/(110225.01 - 0) = 0.00082$$

Por lo tanto, k=0.00082. Sustituyendo *k* en el modelo nos da:

$$p_{n+1} - p_n = 0.00082(665 - p_n)p_n$$

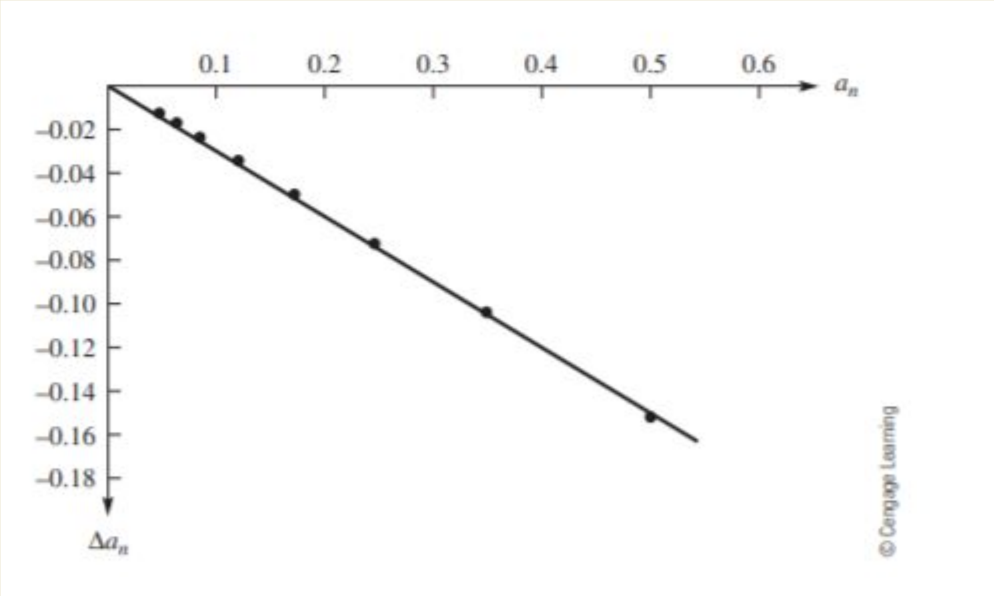
Ejemplo 2

La digoxina es usada en el tratamiento de problemas del corazón. Los doctores deben prescribir cantidad suficiente para mantener la concentración de digoxina por encima de un nivel efectivo sin sobrepasar un nivel seguro para el paciente. Para una dosis inicial de .5 mg en la sangre, la Tabla 1.2 muestra la cantidad de digoxina restante en un paciente particular después de n días, junto con el cambio de cada dia.

Table 1.2 The change a_n in digoxin in a patient's bloodstream

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0.500	0.345	0.238	0.164	0.113	0.078	0.054	0.037	0.026
Δa_n	−0.155	−0.107	−0.074	−0.051	−0.035	−0.024	−0.017	−0.011	

La gráfica muestra que el cambio durante el intervalo de tiempo es aproximadamente proporcional a la cantidad de digoxina presente en la sangre al principio del tiempo.



La pendiente de la línea de proporcionalidad desde el origen es aproximadamente:

$$k \approx -0.107/0.345 \approx -0.310.$$

Como la grafica muestra al cambio an como una función linear de an con pendiente -0.31, tenemos que: $\Delta a_n = -0.31a_n.$

Modelo

$$\Delta a_n = -0.31a_n$$
$$a_{n+1} - a_n = -0.31a_n$$
$$a_{n+1} = 0.69a_n$$

Un modelo de ecuaciones diferenciales para el decrecimiento de la digoxina en la sangre, dada una dosis inicial de 0.5 mg es:

$$a_{n+1} = a_n - 0.31a_n = 0.69a_n,$$
$$a_0 = 0.5$$

Ejemplo 3

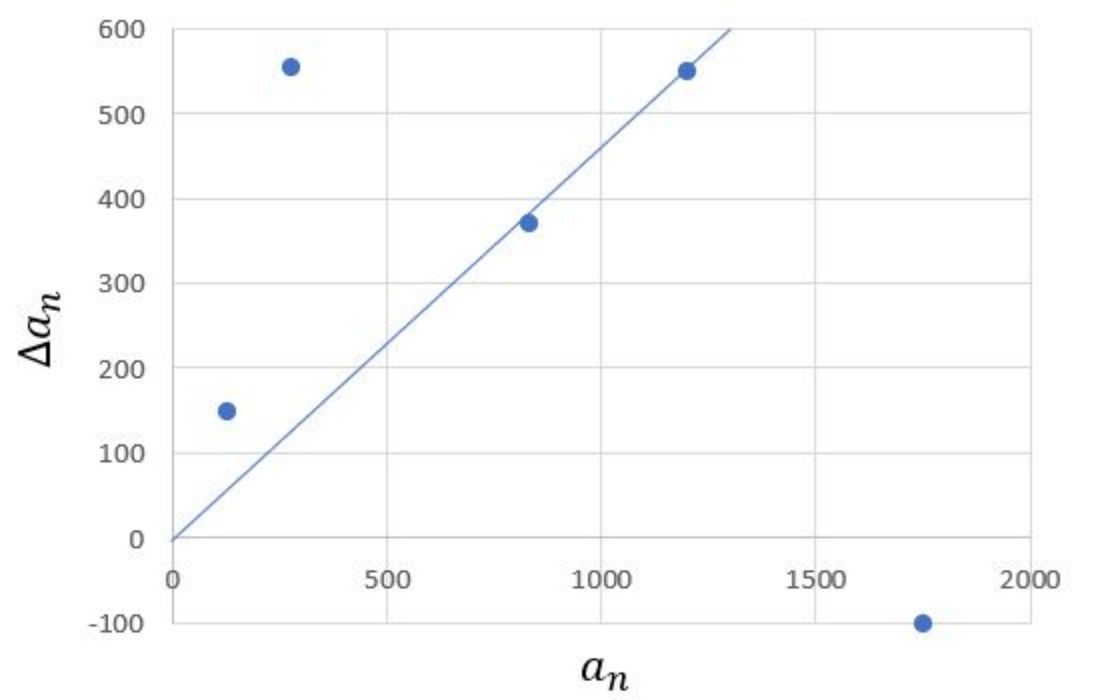
1. The following data were obtained for the growth of a sheep population introduced into a new environment on the island of Tasmania.[1]

Year	1814	1824	1834	1844	1854	1864
Population	125	275	830	1200	1750	1650

Plot the data. Is there a trend? Plot the change in population versus years elapsed after 1814. Formulate a discrete dynamical system that reasonably approximates the change you have observed.

En este ejercicio se pide que con los datos de una población de ovejas que cambia cada década, saber si hay una tendencia y hacer un sistema dinámico discreto que aproxime el cambio que se observe mediante el mismo.

Año	1814	1824	1834	1844	1854	1864
Década (n)	0	1	2	3	4	5
Población (a_n)	125	275	830	1200	1750	1650
Δa_n	150	555	370	550	-100	



De la gráfica anterior, el sistema de aproximación no es proporcional, por lo que no hay forma de obtener un modelo de aproximación de cambios y no existe una tendencia.