MODELANDO CON ECUACIONES DIFERENCIALES

Equipo 11:

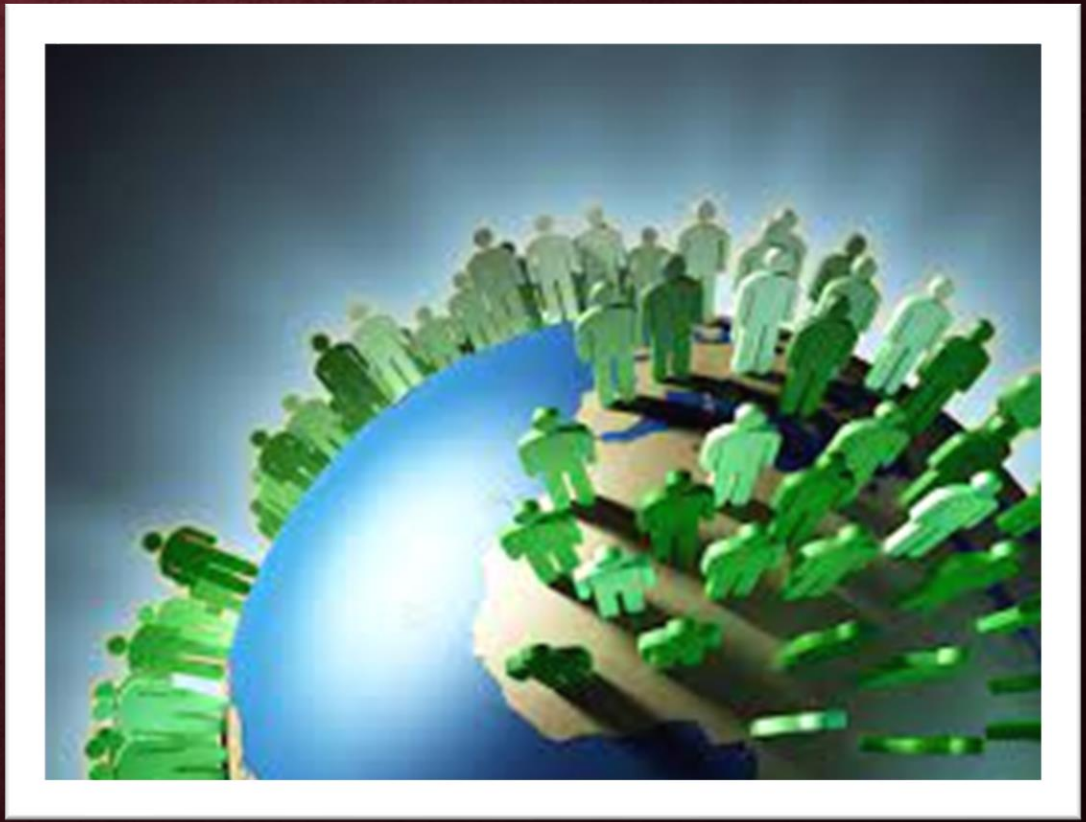
Brandon Daniel Alsina Rodríguez

Hector Cedillo Charles

Hector Yair Garza Amaya

CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN

- El interés en el crecimiento demográfico de la población es algo que ha estado presente desde muchos años atrás, por lo que muchos se dieron el tiempo para analizarlo. En el año de 1798, el economista inglés, Thomas Malthus propuso un modelo para resolver el problema, llegando a la conclusión de que a conforme el tiempo avance, llegaría un momento donde la población excedería la capacidad del suministro de alimentos disponibles.
- Es importante tener en cuenta que el modelo puede llegar a ser impreciso en algunos casos como ciudades avanzadas tecnológicamente, por lo que se espera que el modelo sea mejorado conforme avanza el tiempo.



CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN

Supuestos:

- Se toma en cuenta la tasa de nacimientos, y la tasa de fallecimiento, sin embargo no se consideran en este modelo los factores que afectan estas 2 tasas, como puede ser sanidad, guerras, etc.
- La población siempre tiende a crecer.
- Dicho crecimiento es proporcional a la población total en cualquier instante t.
- $P(t_0) = P_0$

CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN

$$P(t+\Delta t) = P_{(t)} + bP_{(t)}\Delta \mathrm{t} - \mathrm{d}P_{(t)}\Delta \mathrm{t}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = bP - \mathrm{d}P = kP$$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$ln(P) = kt + C$$

$$P_{(t)} = ce^{kt} \quad ; \quad P(t_0) = P_0$$

$$P_{(t)} = P_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$$

Modelo de crecimiento poblacional de Malthus

EJEMPLO 1

- Un biólogo se encuentra realizando un estudio acerca del crecimiento de una bacteria con ciertas condiciones ambientales. Tras esperar 4h, se dio cuenta que en ese momento la población inicial había sido duplicada. ¿Cuál será la población tras haber transcurrido 12h desde el inicio del experimento?

Modelo a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = kP_{(t)}$$

$$P_{(t)} = P_0 e^{kt}$$

Condiciones Iniciales:

$$P(t_0) = P_0$$

Datos del Problema

$t_0 = 0$

$P_{(4)} = 2P_0$

$P_{(12)} = ?$

Modelado y solución del problema:

$$P_{(4)} = 2P_0 = P_0 e^{4k}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{4}$$

$$P_{(12)} = 8P_0$$

EJEMPLO 2

- Un científico analiza el crecimiento de cierta clase de bacteria, siendo que tras llevar 8h observando, concluyó que había 400 de ellas, posteriormente llevo otro registro pasando 10h, teniendo 2000 bacterias en total. El científico desea saber cuál fue la población con la que comenzó el experimento.

Modelo a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = kP_{(t)}$$

$$P_{(t)} = P_0 e^{kt}$$

Condiciones Iniciales:

$$P(t_0) = P_0$$

Datos del Problema

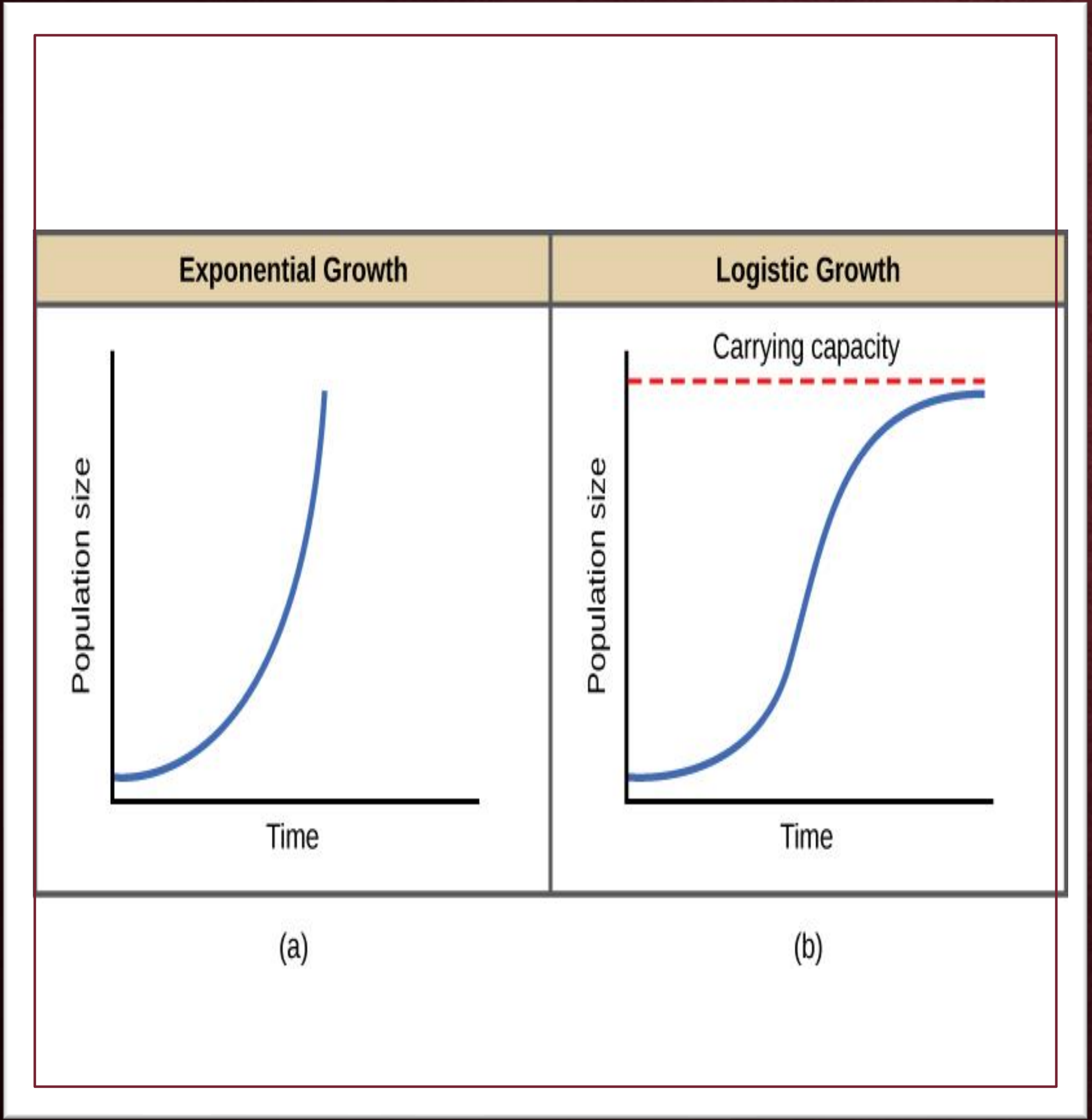
$$t_0 = 0$$
$$P_{(8)} = 400$$
$$P_{(10)} = 2000$$
$$P_0 = ?$$

Modelado y solución del problema:

$$P_0 e^{8k} = 400$$
$$P_0 e^{10k} = 2000$$

$$k = \frac{\ln(5)}{2}$$

$$P_0 = \frac{16}{25}$$



MODELO PARA UN CRECIMIENTO LIMITADO

- Este modelo es una versión más precisa del modelo anterior, el cual será de mucha ayuda.
- El principio fundamental de este modelo, es que ahora nuestro factor de proporcionalidad k, deja de ser una constante para ser una función de la población. Por lo que conforme nuestra población se acerque al límite M permitido, el factor de proporcionalidad estará disminuyendo.

MODELO PARA UN CRECIMIENTO LIMITADO

$$k = r(M - P), \qquad r > 0$$

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P \qquad \text{o} \qquad \frac{dp}{P(M - P)} = r\,dt$$

$$\frac{1}{P(M - P)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}\right)$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dP}{M - P} = rM\,dt$$

$$\ln P - \ln|M - P| = rMt + C$$

$$P(t) = \frac{MP_0}{\left[P_0 + (M - P_0)e^{-rM(t - t_0)}\right]}$$ **Modelo de crecimiento limitado**

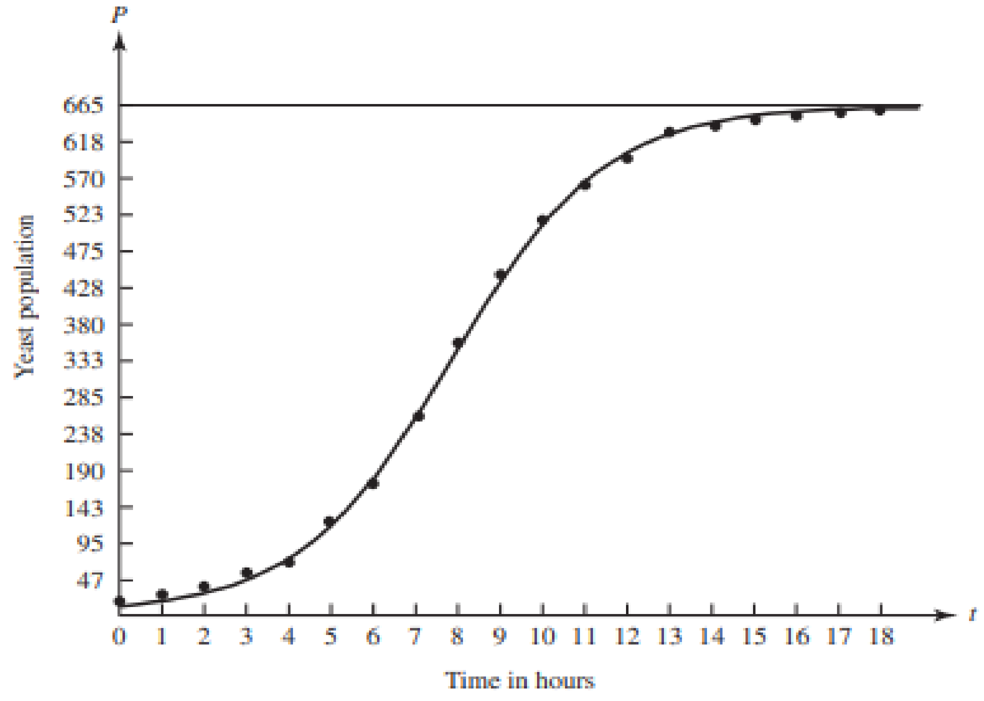
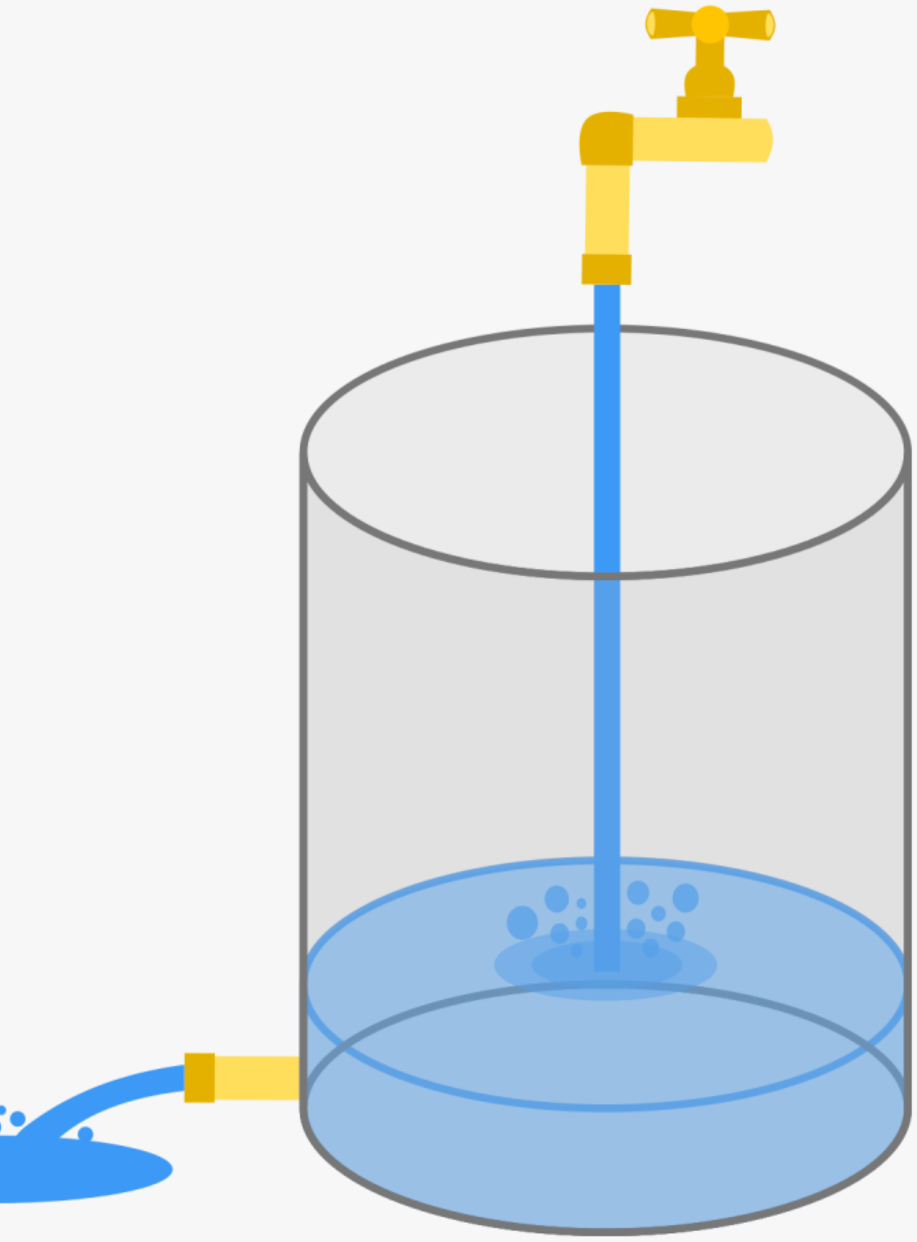


Table 11.1 Growth of yeast in a culture

Time (hr)	Observed yeast biomass	Biomass calculated from logistic equation (11.13)	Percent error
0	9.6	8.9	−7.3
1	18.3	15.3	−16.4
2	29.0	26.0	−10.3
3	47.2	43.8	−7.2
4	71.1	72.5	2.0
5	119.1	116.3	−2.4
6	174.6	178.7	2.3
7	257.3	258.7	0.5
8	350.7	348.9	−0.5
9	441.0	436.7	−1.0
10	513.3	510.9	−4.7
11	559.7	566.4	1.2
12	594.8	604.3	1.6
13	629.4	628.6	−0.1
14	640.8	643.5	0.4
15	651.1	652.4	0.2
16	655.9	657.7	0.3
17	659.6	660.8	0.2
18	661.8	662.5	0.1

APLICACIÓN DEL MODELO DE CRECIMIENTO LIMITADO



MEZCLAS

- Otro tema importante que se pude modelar a través del uso de ecuaciones diferenciales, es el de mezclas.
- En este modelo contempla la cantidad de concentración de una sustancia a lo largo del tiempo, tomando en cuenta ciertos factores que veremos a continuación.
- Tenemos un tanque con agua, que en cualquier momento del tiempo t tiene un volumen V(t)
- Entra más agua al tanque que contiene alguna partícula, y la única forma de que esta se elimine del tanque es por medio del flujo de salida del mismo.
- Denotemos como P(t) a la cantidad de dicha partícula en cualquier momento t

MEZCLAS

$$P(t) = \text{Cantidad de entrada} - \text{Cantidad de salida}$$

$$P(t) = r_{in}c_{in} - r_{out}c_{out}$$

$$\Delta P = r_{in}c_{in} - r_{out}\frac{P}{V}$$

$$\frac{dP}{dt} = r_{in}c_{in} - \frac{Pr_{out}}{Vo+(r_{in}-r_{out})t}$$

$$\frac{dP}{dt} + r_{out}\frac{P(t)}{Vo+(r_{in}-r_{out})t} = r_{in}c_{in}$$

EDL orden 1

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Modelo para la cantidad p en un tiempo t para mezclas

EJEMPLO 3

Suponga que un lago grande que se formó al represar un río contiene inicialmente 100 millones de galones de agua. Debido a que un campo agrícola cercano fue rociado con un pesticida, el agua se ha contaminado. La concentración del plaguicida ha sido medido y es igual a 35 ppm. El río continúa para fluir hacia el lago a una velocidad de 300 gal / min. El río está ligeramente contaminado con pesticida y tiene una concentración de 5 ppm. El flujo de agua sobre la presa se puede controlar y se fija a 400 gal / min. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el agua alcance un nivel aceptable de concentración igual a 15 ppm?

Modelo a seguir:

$$\frac{dP}{dt} + r_{out}\frac{P(t)}{Vo+(r_{in}-r_{out})t} = r_{in}c_{in}$$

Datos del Problema

Vo=100,000,000

r_{in}=300

r_{out}=400

c_{in}=0.00005

Modelado y solución del problema:

$$\frac{dP}{dt} + \frac{400P(t)}{100{,}000{,}000-100t} = 0.00015$$

t=306,650min=7 meses

EJEMPLO 4

Se suministran bacterias como alimento a una población de protozoarios (animales microscópicos unicelulares) a una razón constante μ^2. Se ha observado que las bacterias que las bacterias son devoradas de manera proporcional al cuadrado de su cantidad. Modele el fenómeno por medio de una ecuación diferecial.

Condición Inicial:

$$C(t_0) = C_0$$

Dato del Problema

$C_{(t)}$=Cantidad de bacterias al tiempo t

Modelado del problema:

$$\frac{dC}{dt} = \mu^2 - k^2C^2$$