Jennifer Priscila de león Flores Fecha: 23-marzo-2021
Matricula: 1860533

Problema 1

$n=10$

$\{1,1,1,2,2,3,5,7,8,10\}$

¿α y β? Gama (α,β)

$X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$

Obtenemos α y β

$$\frac{\Sigma x_i}{n} = \alpha\beta \rightarrow \beta = \bar{x}/\alpha$$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2$$
$$= \alpha\frac{\bar{x}}{\alpha^2} + \alpha^2\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$
$$= \frac{\bar{x}^2}{\alpha} + \beta^2$$

Despejar para α

$$\alpha = \frac{n\bar{x}^2}{\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2 n}$$

Ahora sust. los valores dados

$$\alpha = \frac{10(4)^2}{258-(4)^2(10)}$$
$$\alpha = \frac{(10)(16)}{258-160} = \frac{160}{98} = \underline{1.63}$$

$$\bar{x} = \frac{1+1+1+2+2+3+5+7+8+10}{10}$$
$$\underline{\bar{x} = 4}$$

$$\beta = \frac{\bar{x}}{\alpha}$$
$$= \frac{\bar{x}}{\frac{n\bar{x}^2}{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$ Ley del sandwich

$$\beta = \frac{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2}{n\bar{x}}$$

$$\beta = \frac{258-10(16)}{10(4)}$$
$$= \frac{98}{40} = \underline{2.45}$$

$$\therefore X \sim \text{Gamma}\left(\frac{160}{98}, \frac{98}{40}\right)$$

Problema 2

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{(-\theta x^2)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{ecop} \end{cases}$$

Obtener el estimador de máxima verosimilitud

$L(x_1, x_2, \ldots x_n) = 2\theta x_1 e^{(-\theta x_1^2)} \ldots 2\theta x_n e^{(-\theta x_n^2)}$ Solo hay 1 parámetro

$= 2^n \theta^n x_1 x_2 \ldots x_n e^{-\theta \Sigma x^2}$

$\frac{d}{d\theta} = 2^n n \theta^{n-1} x_1 \ldots x_n e^{-\theta \Sigma x_i^2} - \Sigma x_i^2 2^n \theta^n x_1 \ldots$

Despejamos para θ

$\hat{\theta} = \frac{n}{\Sigma x_i^2}$ estimador para θ.

Problema 3

Sea X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 una v.a. X con media $\mu - 5$ y σ^2

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{5} X_i \qquad \mu_2 = 8X_2 - X_5$$

Para μ_1

$$E(\hat{\mu}_1) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$$

$$= \underbrace{\mu-5}_{1} + \underbrace{\mu-5}_{2} + \underbrace{\mu-5}_{3} + \underbrace{\mu-5}_{4} + \underbrace{\mu-5}_{5} = \sum_{1}^{5} \mu - 5$$

$$= 5\mu - 25$$

$E(\mu_1) = 5\mu - 25 \neq 0$ entonces es insesgado

Para μ_2

$$E(\mu_2) = E(8X_2 - X_5)$$

$$= 8\mu - \mu$$

$$= 7\mu$$

$E(\mu_2) = 7\mu \neq 0$ entonces es insesgado

Varianzas

$$Var(\mu_1) = Var(\Sigma X_i) = Var(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2$$

$$= 5\sigma^2$$

$$Var(\mu_2) = Var(8X_2 - X_5)$$

$$= 64\sigma - \sigma$$

$$= 63\sigma$$

$var(\mu_1) < Var(\mu_2)$

$\therefore$ Me parece más eficiente el $\hat{\mu}_1$ por tener menor varianza

Problema 4

Sabemos que

$$\frac{e^{-\theta}\theta}{x!}$$

Aplicamos ln

$\theta \ln e + x\ln\theta - \ln(x!)$

Obtenemos derivada

$$\frac{d}{d\theta} = \theta + x\ln\theta - \ln x! \quad = \frac{x}{\theta} - 1$$

$$E(x) = e\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^2 - \frac{2x}{\theta} + 1\right) = E(x^2) - {}^2/_\theta E(x) + 1$$

$$= \frac{1}{\theta} - 1 + 1$$

$$= \frac{1}{\theta} - 1$$

Para el CICR

$$\frac{[Z(\theta)]^2}{nE\left(\frac{d}{d\theta}\ln f(x,\theta)\right)} = \frac{1^2}{n\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{n - n\theta}{\theta}}$$

$$=$$

$$= \frac{\theta}{n(1-\theta)}$$

//

Problema 5

Creo que la màs conveniente es el estimador θ_2, es el menor que podemos observar por lo tanto resulta el màs eficiente