Tarea 4

Jennifer Priscila de León Flores

1. Dada una v.a. con la función de densidad continua

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad ; \quad x>0,\ \theta>0$$

Deducir el estimador Máximo Verosímil del parámetro θ

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = f(x_1,\theta)\, f(x_2,\theta),\ldots f(x_n,\theta)$$

$$= \frac{1}{\theta} e^{-x_1/\theta} \cdots \frac{1}{\theta} e^{-x_n/\theta}$$

$$= \frac{1}{\theta} e^{-\sum_i^n x_i \theta} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\theta n\bar{x}/\theta}$$

$$= \frac{1}{\theta^n} e^{-n\bar{x}}$$

Aplicamos ln

$$\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \ln \frac{1}{\theta^n} e^{-n\bar{x}}$$

$$= \ln \frac{1}{\theta^n} - \theta n\bar{x} = \ln \theta^{-n} - \theta n\bar{x}$$

$$= -n\ln\theta - \theta\bar{x}n$$

$$\frac{d}{d\theta} = \ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = -\frac{n}{\theta} - n\bar{x}$$

$$-\frac{n}{\theta} - n\bar{x} = 0$$

$$-\frac{n}{\theta} = n\bar{x}$$

$$\frac{-n}{n\bar{x}} = \theta$$

$$\theta = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \frac{n}{\theta^2} < 0$$

$$\therefore \hat{\theta} = -\frac{1}{x} \text{ estimación para } \theta$$

$$\therefore \hat{\theta} = -\frac{1}{x} \text{ estimador para } \theta$$

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución. Estimar por el Método de Momentos $\hat{\theta}$ y θ

a) $U(0,\theta)$ $U \sim (a,b)$

$\frac{\Sigma X_i}{n} = E(x)$ $\bar{X} = \mu$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

$\bar{X} = \frac{\theta}{2}$ Despejar θ

$\hat{\theta} = 2\bar{X}$ $\theta = 2\bar{X}$

b) $(-\theta, \theta)$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{-\theta+\theta}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$\bar{X} = 0$

$\Rightarrow$ No se puede resolver no hay θ

3. Se selecciona una muestra de 2 elementos de una población que se distribuye de forma normal y queremos estimar la media poblacional a partir del siguiente estimador.

$$\hat{\mu} = \frac{3}{8}X_1 + \frac{2}{8}X_2 \qquad N(\mu, \sigma^2)$$

Determine si dicho estimador es insesgado, en caso de no serlo indique cuál es su sesgo y el error cuadrático medio (ECM), sabiendo que su $\sigma = 8$

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{3}{8}X_1 + \frac{2}{8}X_2\right) = \frac{3}{8}E(X_1) + \frac{2}{8}E(X_2) = \frac{3\mu + 2\mu}{8}$$

$$= \frac{5\mu}{8}$$

Un estimador es insesgado si $E(\hat{\theta}) = \theta$ pero como

$E(\hat{\mu}) \neq \theta$ no es insesgado.

Para el sesgo

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = \frac{5}{8}\theta - \theta = \frac{5\theta}{8} - \frac{8\theta}{8}$$

$$B(\hat{\theta}) = -\frac{3}{8}\theta$$

Para el ECM

$$ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta}) = \frac{13}{8} + \left(\frac{-3}{8}\theta\right)^2$$

$$ECM(\hat{\theta}) = \frac{13}{8} + \frac{9}{64}\theta^2$$

Varianza

$$Var(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{3}{8}X_1 + \frac{2}{8}X_2\right)$$

$$= \frac{9}{64}Var X_1 + \frac{4}{64}Var X_2$$

$$= \frac{9}{64}(8) + \frac{4}{64}(8$$

$$= \frac{13}{8}$$

5. La v.a. poblacional "renta de las familias" del municipio de Mty se distribuye siguiendo un modelo $N(\mu, \sigma)$. Se extraen muestras aleatorias simples de tamaño 4. Como estimadores del parámetro μ, se proponen

$$\hat{\mu}_1 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{x_3 - 4x_2}{-3} \quad \hat{\mu}_3 = \bar{X}$$

¿Cuál es el más eficiente o el mejor estimador?

Para $\hat{\mu}_1$

$$E(\hat{\mu}_1) = E\frac{(x_1 + 2x_2 + 3x_3)}{6} = \frac{E(x_1) + 2E(x_2) + 3E(x_3)}{6} = \frac{\mu + 2\mu + 3\mu}{6}$$

$$= \frac{6\mu}{6} = \mu \quad \text{es insesgado}$$

Para $\hat{\mu}_2$

$$E(\hat{\mu}_2) = \frac{E(x_3 - 4x_2)}{-3} = \frac{\mu - 4\mu}{-3} = -\frac{3}{3}\mu$$

$$= -\mu \quad \text{es insesgado}$$

Para $\hat{\mu}_3$

$$E(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{n}\Sigma x_i = \mu \quad \text{es insesgado}$$

Calculo de varianzas

$$Var(\hat{\mu}_1) = \frac{Var(x_1 + 2x_2 + 3x_3)}{6} = \frac{Var(x_1) + 2var(x_2) + 3var(x_3)}{6}$$

$$= \frac{\sigma + 4\sigma + 9\sigma}{36} = \frac{14}{36}\sigma$$

$$Var(\hat{\mu}_2) = \frac{Var(x_3 - 4x_2)}{-3} = \frac{\sigma + 16\sigma}{9} = \frac{17}{9}\sigma$$

$n = 4$

$$Var(\hat{\mu}_3) = Var\left(\frac{1}{n}\Sigma x_i\right) = \frac{1}{n^2}(x_1 + x_2, \dots, x_4) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma = \frac{\sigma}{n}$$

$$= \frac{\sigma}{4}$$

$$Var(\hat{\mu}_1) \leq Var(\hat{\mu}_3) \quad Var(\hat{\mu}_3) \leq Var(\hat{\mu}_1)$$

∴ Me parece más eficiente es $\hat{\mu}_3$ tiene menor varianza