Zadanie 2.6

Treść

Wyznacz asymptotyczne oszacowanie górne dla następujących rekurencji:

- $T(n) = T(n/2) + 1$
- $T(n) = T(n/3) + n$
- $T(n) = 5T(n/2) + n$
- $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

Rozwiązanie

Ograniczenia asymptotyczne zostaną we wszystkich przypadkach znalezione przy pomocy twierdzenia o rekurencji uniwersalnej (Master theorem).

- $T(n) = T(n/2) + 1$

  Zgodnie z twierdzeniem, jeśli $T(n) = aT(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + O(n^d)$ dla pewnych stałych $a > 0$, $b > 0$ oraz $d \geqslant 0$, to:

  $$T(n) = \begin{cases} O(n^d), & \text{gdy } d > \log_b a \\ O(n^d \log n), & \text{gdy } d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}), & \text{gdy } d < \log_b a \end{cases}$$

  Dla tego podpunktu stałe przyjmują wartości odpowiednio $a = 1$, $b = 2$ oraz $d = 0$. Wtedy $\log_b a = \log_2 1 = 0 = d$, a więc:

  $$T(n) = O(n^d \log n) = O(n^0 \log n) = O(\log n)$$

- $T(n) = T(n/3) + n$

  Podobnie do przykładu poprzedniego znajdujemy wartości stałych równe tym razem $a = 1$, $b = 3$ oraz $d = 1$. Wtedy $\log_b a = \log_3 1 = 0 < d$, a więc:

  $$T(n) = O(n^d) = O(n^1) = O(n)$$

- $T(n) = 5T(n/2) + n$

  W tym przypadku stałe wynoszą $a = 5$, $b = 2$ oraz $d = 1$. Wtedy $\log_b a = \log_2 5 \approx 2.32 > d$, a więc:

  $$T(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_5 2})$$

- $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

  Ten przykład nie pozwala na początkowe skorzystanie z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej, gdyż kolejne jej kroki nie opierają się na ułamkach liczby n, dlatego należy wprowadzić rekurencję pomocniczą $F(x) = T(\exp x)$, gdzie $x = \log n$. Wtedy dla rekurencji $F(x)$ można już bezproblemowo obliczyć jej ograniczenie górne przy pomocy twierdzenia.

  $$F(x) = T(\exp \log n) = T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1 = 2T(\exp(\frac{1}{2} \log n)) + 1 = 2F(x/2) + 1$$

Wartości stałych dla rekurencji $F(x)$ to odpowiednio $a = 2$, $b = 2$ oraz $d = 0$. Wtedy $\log_b a = \log_2 2 = 1 > d$, a więc:

$$F(x) = O(x^{\log_b a}) = O(x^1) = O(x)$$

$$T(n) = F(\log n) = O(\log n)$$