Rozwiązanie zadania 5. z listy 7.

25 maja 2020

1 Treść zadania

Mamy dany spójny graf G oraz wyróżniony wierzchołek v. Wykonujemy procedury DFS i BFS, zaczynając w v i okazuje się, że obie tworzą to samo drzewo przejścia T. Pokaż, że $G = T$.

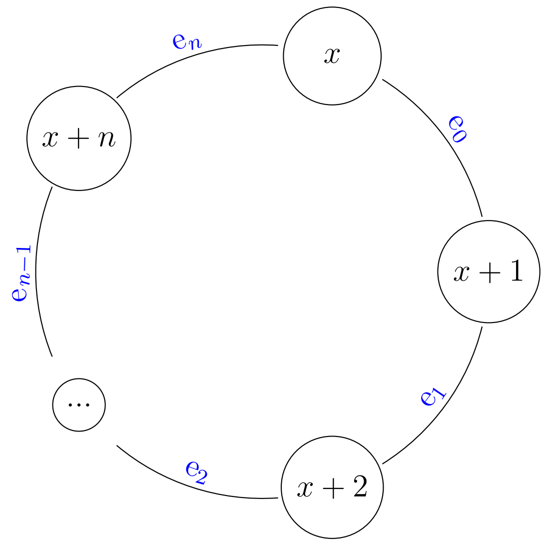
2 Rozwiązanie

Oznaczmy przez T_{BFS} i T_{DFS} odpowiednio drzewa przejścia generowane przez algorytm BFS oraz DFS. Oba te drzewa są drzewami rozpinającymi grafu $G = (V, E)$ i dodatkowo z założenia są one tożsame, więc oznaczymy je literą T. Graf G jest spójny, więc obie procedury przechodzenia grafu odwiedzą każdy jego wierzchołek. Gdyby więc $G \neq T$, to oznaczałoby, że istnieje taka krawędź $e \in E(G)$, że $e \notin E(T)$.

Zauważmy, że jeśli G byłby grafem acyklicznym (czyli, przy naszych założeniach o spójności, po prostu drzewem), wówczas procedury DFS i BFS zwrócą nam G jako drzewo przejścia. Ma to związek z tym, iż w przypadku grafów bez cykli do każdego wierzchołka x z wierzchołka v prowadzi tylko jedna ścieżka (mamy brak alternatywnych połączeń). Jako, że zarówno BFS i DFS dotrą do każdego wierzchołka z V, muszą zatem przemierzyć w tym wypadku każdą krawędź z E. Kolejność przechodzenia jest nieważna - istotne jest to, że zwracane drzewa T_{BFS} i T_{DFS} są sobie równe i tożsame z grafem G.

Jeśli zatem pokażemy, że założenie $T_{BFS} = T_{DFS}$ implikuje, że G jest grafem acyklicznym, to udowodnimy naszą tezę.

Zastosujemy dowód nie wprost. Przeanalizujemy zatem procedurę przechodzenia grafu G, o którym wiemy, że posiada cykle. W pewnym momencie przechodzenia grafu, natrafimy na wierzchołek x należący do cyklu.



Z punktu widzenia procedury BFS, najpierw przechodzimy przez krawędzie e_0 oraz e_n i wpisujemy do kolejki wierzchołki $x+1, x+n$. Później eksplorujemy po kolei każdy z tych wierzchołków: dla $x+n$ przechodzimy dalej przez krawędź e_{n-1}, a dla $x+1$ przez krawędź o indeksie e_1. Procedurę tą powtarzamy, aż do momentu "spotkania" w połowie rozważanego cyklu - będzie to krok, w którym trafimy na krawędź o indeksie $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ lub $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ (zależnie od obranej kolejności ekploracji sąsiednich wierzchołków). Wówczas algorytm trafi na wierzchołek już zbadany i nie doda tej krawędzi do drzewa T_{BFS}.

Natomiast przechodząc ten cykl za pomocą procedury DFS, algorytm przejdzie do jednego z wierzchołków: $x+n$ lub $x+1$ i będzie kontynuował podróż po tym cyklu odpowiednio w kierunku przeciwnym lub zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Zakończy on eksplorację cyklu w momencie napotkania z powrotem wierzchołka startowego x. Wygeneruje nam to drzewo T_{DFS}, w którym nie znajdzie się jedynie krawędź e_0 lub e_n, zależnie od obranego kierunku przejścia cyklu.

Widzimy, że w momencie napotkania dowolnego cyklu, drzewa T_{BFS} i T_{DFS} zaczynają się różnić: w pierwszym brakuje krawędzi "środkowej" cyklu, a w drugim krawędzi łączącej x z jednym z jego sąsiadów.

Zatem, aby spełnione było założenie $T_{BFS} = T_{DFS}$, graf G musi być grafem acyklicznym, co z kolei, jak pokazaliśmy wcześniej, implikuje fakt, iż $T = G$.