Lista 8, zadanie 5

Rozważ graf skierowany w którym krawędzie wychodzące z wierzchołka s mają ujemne wagi, natomiast wszystkie inne krawędzie mają dodatnie wagi. Czy algorytm Dijkstry zaczynający od s będzie działał poprawnie dla takiego grafu? Udowodnij swoją odpowiedź.

Algorytm Dijkstry nie zawsze działa dla grafów z ujemnymi wagami krawędzi, ponieważ zakłada, że już znalezione ścieżki są najkrótszymi możliwymi. Nie bierze pod uwagę, że mogą się one skrócić, co jest możliwe przy występowaniu wag ujemnych.
Algorytm zadziała jednak, jeśli tylko krawędzie wychodzące z wierzchołka początkowego są ujemne. Przedstawię dowód poprawności algorytmu Dijkstry i jego brak sprzeczności z warunkami podanymi w zadaniu.

Algorytm wykorzystuje kolejkę priorytetową. Oznaczmy przez S zbiór wierzchołków, które zostały już zdjęte z kolejki. Dowód opiera się na następujących dwóch faktach (niezmiennikach), prawdziwych przez cały czas trwania algorytmu:

1. Dla każdego wierzchołka $v \in S$ liczba $d(v)$ jest długością najkrótszej ścieżki od s do v.
2. Dla każdego wierzchołka $v \notin S$ $d(v)$ jest długością najkrótszej ścieżki do v prowadzącej tylko przez wierzchołki z S.

Na początku oba fakty są oczywiste (S jest zbiorem pustym). Przy zdejmowaniu wierzchołka u z kolejki wiemy, na podstawie faktu 2, że nie da się do niego dojść żadną krótszą drogą przez wierzchołki z S. Z drugiej strony, ponieważ u ma najniższy priorytet, przejście przez jakikolwiek inny wierzchołek spoza S dałoby od razu co najmniej tak samo długą ścieżkę. A zatem dołączając wierzchołek u do S, zachowujemy prawdziwość faktu 1. Następnie musimy uwzględnić fakt, że najkrótsza ścieżka do jakiegoś wierzchołka v po wierzchołkach z nowego zbioru S może teraz zawierać wierzchołek u. Ale wtedy musi on być ostatnim na niej wierzchołkiem (do każdego innego dałoby się dojść krócej, nie używając u), a zatem jej długość równa jest $d(u) + w(u, v)$ i zostanie prawidłowo obliczona w następnym kroku algorytmu.

Dowód opiera się na 2 niezmiennikach. Na samym początku przy $S = \emptyset$ są prawdziwe. Przy pierwszym kroku przeniesiemy s do S i ustawimy priorytety sąsiadów s na równe wagom krawędzi do nich prowadzących.
Pierwszy warunek jest spełniony bo $S = \{s\}$, a $d(s) = 0$ jest najkrótszą ścieżką z s do s.
Drugi warunek również jest prawdziwy, ponieważ dla wierzchołków $v \notin S$ przypisane im drogi są na pewno najkrótszymi drogami do nich i przechodzącymi tylko przez s, nawet jeśli są ujemne. Dla wierzchołków jeszcze nieosiągalnych warunek również jest spełniony.
Jeśli oba niezmienniki są prawdziwe, a dalej krawędzie będą dodatnie, to możemy przeprowadzić całe rozumowanie jak pokazane powyżej. Wynika z tego, że algorytm Dijkstry będzie działał przy parametrach podanych w zadaniu.