Zadanie 7 Lista 2

Mamy dane $f(n) = O(g(n))$, co jest równoważne z:

$$(\exists c)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|f(n)| \leq c|g(n)|) \tag{1}$$

- $A \Leftrightarrow log_2 f(n) = O(log_2 g(n))$
  Weźmy $f(n) = 2^{-n}$ i $g(n) = n$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$, a $lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ łatwo zauważyć, że te funkcje spełniają założenie. Jednak $log_2 f(n) = -n$, a $log_2 g(n) = log_2 n$. A ponieważ $-n =\neq O(log_2 n)$, to A jest fałszywe $\square$

- $B \Leftrightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
  Weźmy $f(n) = -n$ i $g(n) = n$. Wtedy $(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|-n| \leq c|n|)$ jest spełnione dla $c > 1$.
  Jednak
  $lim_{n\to\infty} 2^{f(n)} = lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}^n = 0$, a
  $lim_{n\to\infty} 2^{g(n)} = lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$, z czego wynika, że B jest fałszywe $\square$

- $C \Leftrightarrow f(n)^2 = O(g(n)^2)$
  Z założenia wiemy, że istnieją $c > 0$ i n_0, takie że: $|f(n)| \leq c|g(n)|$.
  Po podniesieniu obustronnie do kwadratu, ponieważ mamy liczby dodatnie, otrzymujemy:
  $f(n)^2 \leq c^2 g(n)^2$.
  Po nałożeniu wartości bezwzględnej na obie strony, wyciągnięcie c^2 przed nią i podstawienie $d = c^2$ otrzymujemy:
  $|f(n)^2| \leq d|g(n)^2|$ dla pewnego d i $n_0 \Leftrightarrow C$ $\square$