Zadania AISD

LISTA 2 zadanie 5

a)

1) $P(i, j) = \Theta(1)$

Tutaj mamy sytuację, w której wewnętrzna pętla wykona się n-i razy

$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(n - i) = \Theta(\sum_{i=1}^{n} (n - i)) = \Theta(\frac{(n-1)n}{2}) = \Theta(n^2)$

2) $P(i, j) = \Theta(j)$

$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n-1} \Theta(j) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(\sum_{j=i}^{n-1} j)$

Z n-tej sumy ciągu arytmetycznego:

$= \sum_{i=1}^{n} \Theta(\frac{(n-i)(i+n-1)}{2}) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(\frac{1}{2}(n^2 - n - i^2 + i)) = \Theta(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} n^2 - n - i^2 + i))$

$= \Theta(\frac{1}{2}(n^3 - n^2 + \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2)) = \Theta(\frac{1}{2}(n^3 - n^2 + \frac{(1+n)n}{2} - \sum_{i=1}^{n} i^2))$

Wiemy że:

$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \sum_{i=1}^{n} i^2$

Co po uproszczeniu T(n) daje:

$T(n) = \Theta(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) = \Theta(n^3)$

b)

1) $P(i,j) = \Theta(1)$

Zauważmy, że w pętli while kolejne j to:
$j = i$, $j = 2i$, $j = 4i$, $j = 8i$, $j = 16i$, ...

Więc $j = i2^p$, czyli szukamy: $i2^p = n \Rightarrow 2^p = \frac{n}{i} \Rightarrow p = \log_2(\frac{n}{i})$

$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{p=0}^{\log_2(\frac{n}{i})} \Theta(1) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(\log_2(\frac{n}{i}) + 1) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(\log_2(\frac{n}{i}))$

$= \Theta(\sum_{i=1}^{n} \log_2 n - \log_2 i) = \Theta(n \log_2 n - \sum_{i=1}^{n} \log_2 i) = \Theta(n \log_2 n - \log_2 n!)$

Zauważmy, że można ograniczyć $\log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$ przez całki:

$$\int_1^n \log_2 (x) dx \leq \sum_{i=1}^{n} \log_2 i \leq \int_0^n \log_2 (x+1) dx$$

$$n \log_2 n - \frac{n(\log n - 1) + 1}{\log 2} \geq n \log_2 n - \sum_{i=1}^{n} \log_2 i \geq n \log_2 n - \frac{(n+1)\log(n+1) - n}{\log 2}$$

$$n(\frac{\log n}{\log 2} - \frac{\log n - 1}{\log 2}) - \frac{1}{\log 2} \geq n \log_2 n - \sum_{i=1}^{n} \log_2 i \geq \frac{n \log n - n \log(n+1) - \log(n+1) + n}{\log 2}$$

Znamy ograniczenie górne, teraz sprawdźmy czy ta nierówność jest prawdziwa:

$$n \log n - n \log(n+1) - \log(n+1) + n \geq kn$$

$$n \log n - n \log(n+1) - \log(n+1) \geq (k-1)n$$

Wiemy, że dla pewnego $k > 0$ oraz pewnego n ta nierówność będzie prawdziwa. Sprawdźmy, czy zachowamy tą nierówność od pewnego punktu dla każdego n.
Obliczmy pochodną lewej strony:

$$\frac{d}{dn}(n \log n - n \log(n+1) - \log(n+1)) = \log(\frac{n}{n+1})$$

Obliczmy pochodną prawej strony:

$$\frac{d}{dn}((k-1)n)) = (k-1)$$

Wiemy, że dla $n \geq 1$:

$$-0.7 < \log\left(\frac{n}{n+1}\right) < 0$$

Stąd wiemy, że dla pewnego k, np. $k = 0.2$, tempo malenia funkcji $(k-1)n$ będzie większe, bo:

$$-0.8 < -0.7 < \log\left(\frac{n}{n+1}\right) < 0$$

Jeszcze tylko zostało znaleźć przynajmniej jedno takie n, że:

$$n \log n - n \log(n+1) - \log(n+1) \geq -0.8n$$

Dla $n = 15$ otrzymujemy:

$$-3.74 \geq -12$$

Co daje:

$$T(n) = \Theta(n)$$

2) $P(i, j) = \Theta(j)$

Jak wyżej:

$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{p=0}^{\log_2(\frac{n}{i})} \Theta(i2^p) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(i(\sum_{p=0}^{\log_2(\frac{n}{i})} 2^p))$

Z n-tej sumy ciągu geometrycznego:

$= \sum_{i=1}^{n} \Theta(i(\frac{1-2^{\log_2(\frac{n}{i})}}{1-2})) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(i(\frac{1-\frac{n}{i}}{-1})) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(n-i) = \Theta(n^2)$