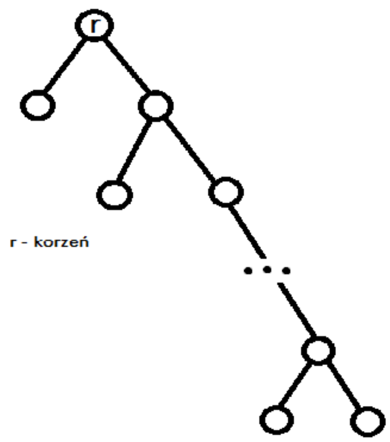
1. *Każdy węzeł ma dwóch synów lub jest liściem.*

Z 1. nie wynika, że drzewo jest zbalansowane. Za kontrprzykład można podać rodzinę drzew rozmiaru 2k-1, takich że każdy węzeł ma za lewego syna liść, a za prawego liść lub węzeł.



k = h + 1

Wtedy mamy n = 2k – 1 = 2(h + 1) – 1 = 2h + 1

h = $\frac{1}{2}n$ - $\frac{1}{2}$ = O(n),

ponieważ $0 \leq \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \leq c^*n$ // $* \frac{2}{n}$

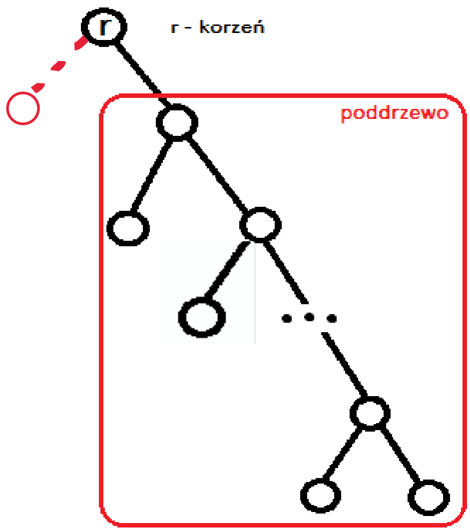
$0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 2c$,

co jest prawdziwe dla c = $\frac{1}{2}$

2. *Rozmiar każdego poddrzewa można zapisać jako 2k - 1, gdzie k jest liczbą naturalną.*

Z 2. również nie wynika, że drzewo jest zbalansowane. Kontrprzykład jest podobny do tego z przykładu 1. Skoro każde poddrzewo ma rozmiar 2k-1, to możemy pomyśleć o rodzinie drzew takich, że prawy syn korzenia drzewa, jest korzeniem poddrzewa. Nasze poddrzewo będzie się składać z liścia jako lewy syn oraz z liścia lub węzła jako prawy.

Jeśli przyjmiemy konwencję, że całe drzewo też jest swoim poddrzewem, to wtedy całe drzewo powinno mieć nieparzystą liczbę węzłów (wówczas mielibyśmy n = 2k+1)



Całe drzewo ma rozmiar

n = 2k – 1 + 1 = 2k, gdzie k = h

Wtedy h = $\frac{1}{2}n$ = O(n),

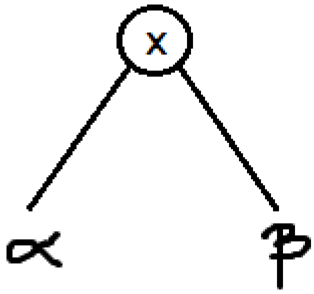
ponieważ $0 \leq \frac{1}{2}n \leq c^*n$ // $* \frac{2}{n}$

$0 \leq 1 \leq 2c$,

co jest prawdziwe dla c = $\frac{1}{2}$

W tym przypadku każde poddrzewo ma nieparzystą liczbę wierzchołków - 1, 3, 5, ..., n = 2k-1 dla pewnego k>0.

3. *Istnieje C > 0 takie, ze dla każdego wierzchołka x, jego większe poddrzewo ma co najwyżej C razy więcej wierzchołków od jego mniejszego poddrzewa.*



α oraz β są poddrzewami

Założmy, że wysokość poddrzew α i β jest równa $O(\log_2 n)$, czyli $h_1 \le d * \log_2 n_1$ oraz $h_2 \le d * \log_2 n_2$ dla pewnej stałej d. Należy udowodnić indukcyjnie, że $h \le d * \log_2 n$.

Załóżmy bez utraty ogólności, że $n_1 \ge n_2$. Wtedy przez założenie z zadania mamy $C * n_2 \ge n_1$. Następnie mamy:

$$n = n_1 + n_2 + 1 \ge n_1 + \frac{n_1}{C} + 1 \ge (1 + \frac{1}{C}) * n_1 + 1 \ge (1 + \frac{1}{C}) * n_1$$

A zatem

$$h = d * \log_2 n_1 + 1 \le d * \log_2 \left(\frac{n}{1+\frac{1}{c}}\right) + 1 \le d * \log_2 n - d * \log_2 \left(1 + \frac{1}{c}\right) + 1 \le d * \log_2 n$$

Ostatni krok jest prawdziwy, jeśli $d * \log_2(1 + \frac{1}{c}) \ge 1$, a dla odpowiednio dużego d to zawsze jest spełnione.

Ostatecznie wykazaliśmy, że $h = O(\log_2 n)$, dlatego z twierdzenia 3. wynika, że drzewo jest zbalansowane.

4. *Istnieje c > 0 takie, że dla każdego wierzchołka x wysokość jego poddrzew różni się najwyżej o c.*

Niech n(h) będzie minimalną liczbą wierzchołków drzewa o wysokości h, taką która spełnia założenie z zadania. Wtedy należy wykazać indukcyjnie, że $n(h) \ge (1+\alpha)^h - 1$, dla pewniej stałej $0 < \alpha \le 1$.

Po wykonaniu tego kroku można dojść do wniosku, że po dodaniu obustronnie jedynki do nierówności i nałożeniu logarytmu o podstawie (1+α) to otrzymamy

$$h \le \log_{1+\alpha}(n + 1) = O(\lg n)$$

Należy zatem jedynie udowodnić indukcyjnie, że $n(h) \ge (1+\alpha)^h - 1$ jest prawdziwe.

Poddrzewo o wysokości równej 0 ma jeden wierzchołek, a wtedy $(1 + \alpha)^0 - 1 = 0 \le 1$

W kroku indukcyjnym należy założyć, że każde poddrzewo jest wysokości $k < h$, w taki sposób, że $n(k) \ge (1+\alpha)^k - 1$. Jedna gałąź drzewa będzie miała wysokość n(h-1), a druga, wedle założenia z zadania, n(h-1-c). Wtedy:

$$n(h) = n(h-1) + n(h-1-c) + 1 \ge (1+\alpha)^{h-1} - 1 + (1+\alpha)^{h-1-c} - 1 + 1 \ge 2*(1+\alpha)^{h-1-c} - 1 \ge (1+\alpha)^h - 1$$

Aby ukończyć dowód, należy wykazać, że $2*(1+\alpha)^{h-1-c} \ge (1+\alpha)^h$. Podzielmy tę równość obustronnie przez $(1+\alpha)^h$, które jest dodatnie. Mamy zatem $2*(1+\alpha)^{-(1+c)} \ge 1$, czyli $\frac{1}{(1+\alpha)^{(1+c)}} \ge \frac{1}{2}$, a następnie $2 \ge (1+\alpha)^{(1+c)}$, co jest prawdziwe dla bardzo małych wartości α.

Ostatecznie wykazaliśmy, że $h = O(\log_2 n)$, dlatego z twierdzenia 4. wynika, że drzewo jest zbalansowane.