Lista V Z: 1

1 Treść:

Wykaż, że najdłuższa prosta ścieżka z węzła x do liścia w drzewie czerwono-czarnym jest co najwyżej dwa razy dłuższa niż najkrótsza ścieżka z węzła x do pewnego liścia.

2 Rozwiązanie:

Zacznijmy od przypomnienia podstawowych własności drzewa czerwono-czarnego:

1: Każdy węzeł jest albo czerwony, albo czarny.
2: Korzeń jest czarny.
3: Każdy liść (NIL) jest czarny
4: Jeśli węzeł jest czerwony, to obaj jego synowie są czarni.
5: Każda ścieżka prosta z ustalonego węzła do liścia ma tyle samo czarnych węzłów.

Możemy przejść teraz do właściwego rozwiązania - rozważmy ścieżki d_0, d_1, będące odpowiednio d_0 najkrótszą ścieżką i d_1 najdłuższą. Spróbujmy pokazać odrobinę mocniejszą wersję polecenia, pokażmy że na ścieżce d_1 może być maksymalnie dwa razy tyle węzłów ile jest czarnych węzłów na ścieżce d_0. Z własności 5 wiemy, że na obu ścieżkach jest tyle samo czarnych węzłów. Dodatkowo z własności 4 wiemy, że liczba czerwonych węzłów na ścieżce d_1 jest nie-większa niż liczba czarnych węzłów (bo potomek czerwonego węzła musi być czarny a ostatni węzeł ścieżki, tzn. liść musi być czarny). Na koniec liczba węzłów w ścieżce d_1 jest nie-większa niż $2 \cdot$ liczba węzłów czarnych na ścieżce d_0.

Podsumujmy to rozwiązanie.
Oznaczmy długości rozważanych ścieżek przez len(d0) oraz len(d1).
Istotnie, na ścieżce d0 i d1 mamy bh(x) czarnych węzłów (bh(x) - "black height" dla węzła x),
a zatem len(d0) >= bh(x). Z własności 4 otrzymujemy natomiast, że len(d1) <= 2 bh(x).
Stąd wnioskujemy, że len(d1) <= 2 bh(x) <= len(d0).