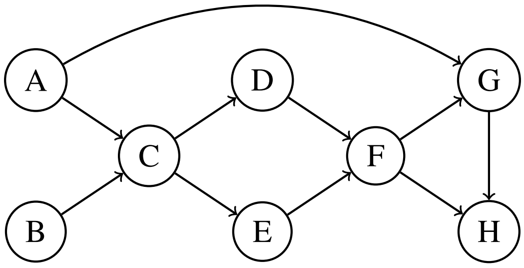
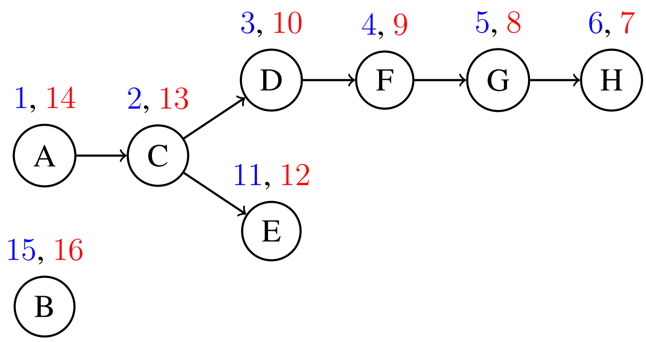
Zadanie 2 (25%)
Wykonaj algorytm wyznaczający porządek topologiczny na następującym grafie.



1. Wypisz wartości PRE i POST dla każdego wierzchołka.
2. Wypisz znaleziony przez algorytm porządek.
3. Ile różnych porządków topologicznych może zostać wyznaczonych dla tego grafu?

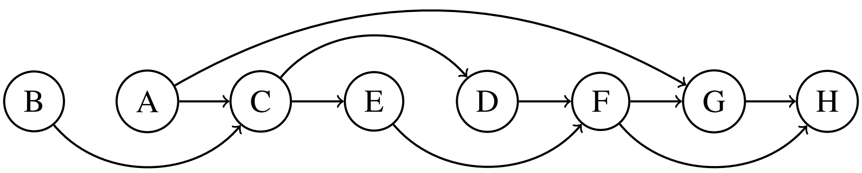
Rozwiązanie: Omówiony na wykładzie algorytm wyznaczania porządku topologicznego dla zadanego skierowanego grafu acyklicznego (DAGa) G, znany także jako algorytm linearyzacji DAGa, składa się z dwóch głównych etapów. W pierwszej fazie wykonywana jest procedura `DFS` dla grafu G, w trakcie której wyznaczane zostają wartości `pre` oraz `post` w podprocedurach `previsit` oraz `postvisit`. Następnie jako wynik sortowania topologicznego zwracane są wierzchołki grafu G w kolejności od największej wartości `post` do najmniejszej.

Ad 1. Poniższy rysunek przedstawia rezultat wykonania algorytmu `DFS` wraz z wyznaczonymi wartościami `pre` (kolor niebieski) oraz `post` (kolor czerwony) dla każdego wierzchołka grafu G. W trakcie wykonywania algorytmu `DFS` wierzchołki przetwarzane były w porządku leksykograficznym, a eksploracja rozpoczęła się w wierzchołku A.



Ad 2. Po posortowaniu wierzchołków według malejących wartości `post` otrzymujemy następujący porządek topologiczny na zadanym grafie G (czerwona liczba w nawiasie oznacza wartość post dla danego wierzchołka): B(16), A(14), C(13), E(12), D(10), F(9), G(8), H(7).

Wyznaczony porządek topologiczny na grafie G ilustruje poniższy rysunek.



Ad 3. Dla tego grafu mogą zostać wyznaczone 4 różne porządki topologiczne.

Zauważmy, że wierzchołek A może zostać zamieniony kolejnością z B (taka sytuacja będzie miała miejsce, jeśli w trakcie wykonywania algorytmu `DFS` wierzchołek B zostałby odwiedzony przed wierzchołkiem A). Istotnie, oba wierzchołki nie posiadają żadnych krawędzi „wchodzących”, tj. nie mają żadnego poprzednika, a zatem w szczególności nie istnieje między nimi żadna skierowana ścieżka w grafie G.

Podobnie możemy zamienić kolejność wierzchołków D oraz E. Jedyne krawędzie wchodzące do wierzchołków D i E w grafie G wychodzą z wierzchołka C, a ponieważ G jest grafem acyklicznym, zatem nie istnieje skierowana ścieżka między wierzchołkami D i E.

To daje nam łącznie $2 \cdot 2 = 4$ różne porządki. Zauważmy, że są to jedyne możliwości – dla każdej innej pary wierzchołków istnieje między nimi skierowana ścieżka, która jednoznacznie określa ich względny porządek topologiczny.