Zadanie 9, lista 3

- $A(n) = 5A(\frac{n}{2}) + O(n \log n)$
  $A_1(n) = 5A_1(\frac{n}{2}) + O(n)$, $A_2(n) = 5A_2(\frac{n}{2}) + O(n^2)$
  $A_1(n) \leqslant A(n) \leqslant A_2(n)$

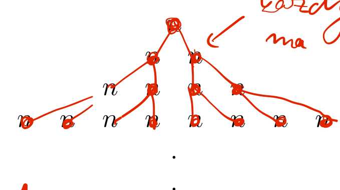
  - $A_1(n) = 5A_1(\frac{n}{2}) + O(n)$
    $a = 5, \quad b = 2, \quad \alpha = 1, \quad \log_2 5 \approx 2,32 > \alpha$
    Więc z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej $A_1(n) = O(n^{\log_2 5})$
  - $A_2(n) = 5A_2(\frac{n}{2}) + O(n^2)$
    $a = 5, \quad b = 2, \quad \alpha = 2, \quad \log_2 5 \approx 2,32 > \alpha$
    Więc z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej $A_2(n) = O(n^{\log_2 5})$

  Zatem $A_1(n) = O(n^{\log_2 5}) \wedge A_2(n) = O(n^{\log_2 5}) \wedge A_1(n) \leqslant A(n) \leqslant A_2(n)$
  Więc $A(n) = O(n^{\log_2 5})$

czas stały to $O(1)$, ale dla uproszczenia przyjmijmy 1

- $B(n) = 2B(n-1) + 1$, załóżmy że $B(1)=1$
  Zbudujmy drzewo rekursji

Koszt		Rozmiar
$1 = 2^0$		n
$2 = 2^1$		$2n-2$
$4 = 2^2$		$4n-8$
$8 = 2^3$		$8n-24$

  każdy węzeł ma koszt 1

  $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$ ← tutaj już widać że $= O(2^n)$ i nie ma co dowodzić, bo w indukcji od razu widać jakie c_1 i c_2 należy wybrać.

  Wysokość = n
  $B(n) \leqslant \sum_n^{k=0} 2^k = 2^{n-1} - 1$
  Zatem $B(n) = O(2^n)$

  Nie potrzebne

  Zał. indukcyjne $\forall k > n \quad B(n) \leqslant c_1 * 2^n + c_2$
  Krok indukcyjny
  $B(n) = 2B(n-1) + 1 \leqslant 2(c_1 2^{n-1} + c_2) + 1 = 2c_1 * 2^{-1} * 2^n + 2c_2 + 1 = c_1 2^n + 2c_2 + 1$

  $$c_1 2^n + 2c_2 + 1 \leqslant c_1 * 2^n + c_2$$
  $$2c_2 + 1 \leqslant +c_2$$
  $$c_2 \leqslant -1$$
  $$c_1 = 1, \quad c_2 = -2, \quad n = 1$$

  Wiec $B(n) = O(2^n)$

- $C(n) = 9T(\frac{n}{3}) + O(n^2)$
  $a = 9, \quad b = 3, \quad \alpha = 2, \quad \log_3 9 = \alpha$
  Więc z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej $C(n) = O(n^2 \log n)$

Zatem mamy $A(n) = O(n^{\log_2 5})$, $B(n) = O(2^n)$, $C(n) = O(n^2 \log n)$

- $n^2 \log n = o(n^{\log_2 5})$

$$\lim_{n\to\inf} \frac{n^2 \log n}{n^{\log_2 5}} = \lim_{n\to\inf} \frac{\log n}{n^{\log_2 5 - 2}} \stackrel{H}{=} \lim_{n\to\inf} \frac{\frac{1}{n}}{(\log_2 5 - 2)n^{\log_2 5 - 3}} =$$

$$= \lim_{n\to\inf} \frac{n^{3-\log_2 5}}{(\log_2 5 - 2)n} = \lim_{n\to\inf} \frac{1}{(\log_2 5 - 2)n^{\log_2 5 - 2}} = 0$$

- $n^{\log_2 5} = o(2^n)$
  $n^{\log_2 5} = O(n^3)$, ponieważ $\log_2 5 < 3$

$$\lim_{n\to\inf} \frac{n^3}{2^n} \stackrel{H}{=} \lim_{n\to\inf} \frac{3n^2}{2^n * (\ln 2)} \stackrel{H}{=} \lim_{n\to\inf} \frac{6n}{2^n * (\ln 2)^2} \stackrel{H}{=}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{n\to\inf} \frac{6}{2^n * (\ln 2)^3} = 0$$

  Zatem $n^{\log_2 5} = o(2^n)$

Mając do wyboru te trzy algorytmy, wybrałbym algorytm C, z uwagi na najlepszą asymptotyczną złożoność obliczeniową.