Lista 7, zadanie 4

May 31, 2020

1 Treść zadania

Pokaż, że w drzewie binarnym liczba wierzchołków mających dwoje dzieci jest dokładnie o jeden mniejsza od liczby liści.

2 Rozwiązanie (sposób 1)

Wykorzystując indukcję matematyczną po ilości węzłów.
Oznaczenia:
i - ilość węzłów
d - ilość węzłów mających dwoje dzieci
l - ilość liści

1. Sprawdzenie dla drzewa z jednym węzłem $i = 1$

$$d = 0$$

$$l = 1$$

$$l = d + 1$$

2. Założenie indukcyjne

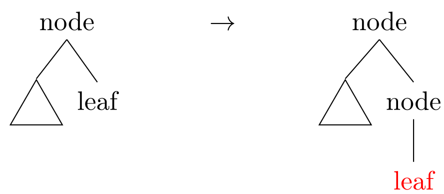
$$\text{Dla drzewa rozmiaru } i \text{ zachodzi } l_i = d_i + 1$$

3. Teza

$$\text{Dla drzewa rozmiaru } i + 1 \text{ też zachodzi } l_{i+1} = d_{i+1} + 1$$

4. Dowód
W danej chwili dla drzewa istnieją pewne wartości l, d, spełniające równość $l_i = d_i + 1$ (z założenia). W kolejnym kroku zwiększa się rozmiar drzewa o jeden węzeł. Dodanie tego węzła może się odbyć na dwa sposoby:

- Dopisanie nowego węzła jako dziecko do węzła bez dzieci (liścia):



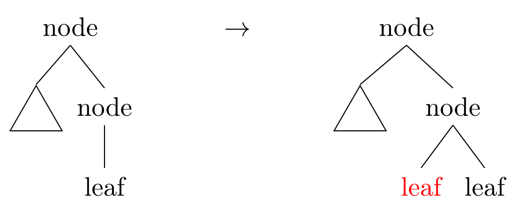
W tym wypadku nie zmieniła się ani ilość liści (jeden został usunięty - dostał dziecko, nowy został dołączony) ani ilość węzłów z dwoma dziećmi (węzeł bez dzieci został zamieniony na węzeł z jednym dzieckim).

$$d_{i+1} = d_i$$
$$l_{i+1} = l_i$$

Dalej pozostaje prawdziwa zależność:

$$l_{i+1} = d_{i+1} + 1$$

- Dopisanie nowego węzła jako dziecko do węzła z jednym dzieckim:



Dodając węzeł w ten sposób został on liściem, zatem:

$$l_{i+1} = l_i + 1$$

Węzeł który został jego rodzicem miał już jedno dziecko. W tej chwili ma dwa, zatem zwiększyła się ilość węzłów z dwoma dziećmi:

$$d_{i+1} = d_i + 1$$

Dalej pozostaje prawdziwa zależność:

$$l_{i+1} = d_{i+1} + 1$$

Podsumowując, dla każdego drzewa binarnego ilość liści jest o 1 większa niż ilość węzłów z dwoma dziećmi.

3 Rozwiązanie (sposób 2)

Drzewo można roumieć jako spójny graf niecykliczny.

$$T = (V, E)$$

$$|V| = n \qquad |E| = n - 1$$

Przyjmując poniższe oznaczenia:
 l - ilość liści
 d_1 - ilość węzłów z jednym dzieckiem
 d_2 - ilość węzłów z dwoma dziećmi

Każdy węzeł mający dwójkę dzieci jest stopina 3 (dwa połączenia do dzieci, jedno do rodzica), z wyjątkiem korzenia który jest stopnia 2. Każdy węzeł mający jedno dziecko jest stopina 2 (jedno do dziecka, jedno do rodzica), z wyjątkiem korzenia który jest stopnia 1. Każdy liść jest stopina 1 (jedno połączenie do rodzica), z wyjątkiem korzenia który jest stopnia 0. Zatem łączna suma stopni w drzewie wynosi:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 1 \cdot l + 2 \cdot d_1 + 3 \cdot d_2 - 1$$

Trzeba na końcu odjąć 1, ponieważ korzeń jako jedyny nie ma rodzica - ma jedno połączenie mniej.

$$|V| = l + d_1 + d_2$$

$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} deg(v)}{2}$$

Wiedząc, że w każdym drzewie liczba krawędzi jest o jeden mniejsza niż liczba wierzchołków:

$$|E| = |V| - 1$$

$$\frac{\sum_{v \in V} deg(v)}{2} = l + d_1 + d_2 - 1$$

$$\frac{1 \cdot l + 2 \cdot d_1 + 3 \cdot d_2 - 1}{2} = l + d_1 + d_2 - 1$$

$$1 \cdot l + 2 \cdot d_1 + 3 \cdot d_2 - 1 = 2 \cdot l + 2 \cdot d_1 + 2 \cdot d_2 - 2$$

$$l = d_2 + 1$$

Podsumowując, dla każdego drzewa binarnego ilość liści jest o 1 większa niż ilość węzłów z dwoma dziećmi.