Lista 4

Zadanie 4.

Niech $X[1 \dots n]$ i $Y[1 \dots n]$ będą dwiema posortowanymi tablicami. Podaj algorytm, który w czasie $O(\lg n)$ wyznacza medianę wszystkich 2n elementów z obu tablic.

1. **Rozwiązanie problemu i opis algorytmu.**
   Rozwiązanie:
   Należy wyliczyć mediany obu posortowanych tablic X oraz Y, a następnie porównać ich wyniki i postępować według instrukcji.
   Poniższy algorytm opiera się o *„Divide and Conquer"*.

   Opis algorytmu:
   1. Jeżeli $n = 1$, użyj formuły do wyliczenia mediany i zakończ:
      $$M = \frac{X[0] + Y[0]}{2}$$
   2. Oblicz mediany M_X oraz M_Y dla odpowiednio dla tablic: X i Y. Ponieważ tablice X i Y są posortowane, to mediany M_X i M_Y, są na pozycji $\frac{n}{2}$ w tablicy, dzięki czemu wyznaczenie ich kosztuje $\Theta(1)$.
   3. Jeżeli $M_X = M_Y$ to wtedy zwróć M_X. Ponieważ zachodzi zjawisko, kiedy łącznie n elementów $\leq M_X = M_Y$ oraz n elementów $\geq M_X = M_Y$.
   4. Jeżeli $M_X > M_Y$ wówczas mediana obu tablic znajduje się w jednej z poniższych podtablic:
      a. Od pierwszego elementu tablicy X do M_X, $X\left[0 \dots \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right]$
      Podstaw podtablicę pod X. Poprzez operacje na indeksach tablicy, koszt operacji wynosi $\Theta(1)$. Jeżeli nie zachowalibyśmy tej zasady, to nasz algorytm nie będzie miał kosztu $O(\log n)$.
      b. Od M_Y do ostatniego elementu tablicy Y, $Y[\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \dots n-1]$
      Podstaw podtablicę pod Y. Poprzez operacje na indeksach tablicy, koszt operacji wynosi $\Theta(1)$. Jeżeli nie zachowalibyśmy tej zasady, to nasz algorytm nie będzie miał kosztu $O(\log n)$.
   5. Jeżeli $M_X < M_Y$ wówczas mediana obu tablic znajduje się w jednej z poniższych podtablic:
      a. Od M_X do ostatniego elementu tablicy X, $X\left[\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \dots n-1\right]$
      Podstaw podtablicę pod X.
      b. Od pierwszego elementu tablicy Y do M_Y, $Y\left[0 \dots \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right]$
      Podstaw podtablicę pod Y.
   6. Wróć do instrukcji nr 2, dopóki rozmiar obu podtablic nie będzie równy 2.
   7. Jeżeli wielkość tablic X i Y jest równy 2, wtedy użyj formuły do wyliczenia mediany i zakończ:
      $$M = \frac{(\max(X[0], Y[0]) + \min(X[1], Y[1]))}{2}$$

Wykonując rekurencyjnie opisany algorytm, można zauważyć, że w każdym kolejnym kroku zmniejszamy rozmiar każdej z tablic o połowę, zaś wykonując operacje na indeksach tablic, otrzymujemy taki wzór na rekurencję

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(1)$$
$$z\ Master\ Theorem\ O(\log n)$$

2. Przykładowe działanie algorytmu:

$$X = [1, 10, 13, 20, 29]$$
$$Y = [3, 12, 17, 30, 42]$$

$$Wyznaczamy\ mediany\ tablic:$$
$$M_X = 13, \qquad M_Y = 17$$

$$Sprawdzamy\ mediany$$
$$M_X < M_Y$$

$$więc\ wykonujemy\ krok\ 4.$$
$$X = [13, 20, 29]$$
$$Y = [3, 12, 17]$$

$$Wyznaczamy\ mediany\ otrzymanych\ tablic:$$
$$M_X = 20, \qquad M_Y = 12$$

$$Sprawdzamy\ mediany$$
$$M_X > M_Y$$

$$więc\ wykonujemy\ krok\ 5.$$
$$X = [13, 20]$$
$$Y = [12, 17]$$

$$Długości\ tablic\ są\ równe\ 2. Więc\ przechodzimy\ do\ kroku\ 6.$$
$$M = \frac{(\max(X[0], Y[0]) + \min(X[1], Y[1]))}{2}$$
$$M = \frac{(\max(13, 12) + \min(20,17))}{2}$$
$$M = \frac{(13 + 17)}{2}$$
$$M = 15$$