# Zadanie 6 z Listy 7

Algorytmy i Struktury Danych

25 maja 2020

# 1 Treść zadania

Czy prawdziwe jest następujące stwierdzenie? Pokaż kontrprzykład lub udowodnij: Niech $G$ będzie grafem o $n$ wierzchołkach, gdzie $n$ jest parzyste. Jeśli każdy wierzchołek ma stopień conajmniej $n/2$, to graf jest spójny.

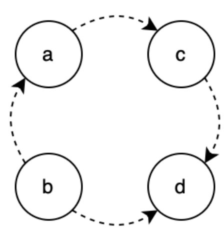
# 2 Rozwiązanie

## 2.1 Graf dowolny

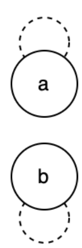
Jeżeli rozpatrywany graf jest zupełnie dowolny to stwierdzenie jest nieprawdziwe.

### 2.1.1 Kontrprzykłady

Graf prosty, ale nie podstawowy ($n = 4$):




Graf podstawowy, ale nie prosty ($n = 2$):



## 2.2 Graf prosty podstawowy

Jeżeli rozpatrujemy tylko proste grafy podstawowe to stwierdzenie jest prawdziwe.

### 2.2.1 Dowód

Weźmy dowolny graf $G$. $G$ jest grafem prostym, więc nie ma żadnych pętli własnych oraz krawędzi wielokrotnych. Oznacza to, że liczba sąsiadów każdego wierzchołka jest równa jego stopniowi. Weźmy teraz dowolny wierzchołek $v \in G$. Będzie on tworzył wraz ze swoimi sąsiadami podgraf spójny $G_v$ , gdzie $|G_v| \geqslant \frac{n}{2}+1$. Weźmy teraz dowolny inny wierzchołek $u \in G$. On również będzie tworzył wraz ze swoimi sąsiadami podgraf spójny $G_u$ , gdzie $|G_u| \geqslant \frac{n}{2}+1$. Jako, że oba te podgrafy mają conajmniej $\frac{n}{2}+1$ wierzchołków to:

$$\exists y \in G : y \in G_v \wedge y \in G_u$$

Stąd mamy, że nasze $v$ oraz $u$ mają zawsze przynajmniej jednego wspólnego sąsiada. Nasze $v$ i $u$ są zupełnie dowolne, więc w związku z tym, że $G$ jest grafem podstawowym (czyli takim, że jego krawędzie nie mają kierunku i prowadzą w obie strony) mamy, że dla każdych dwóch wierzchołków istnieje ścieżka je łącząca. $\square$