Algorytmy i struktury danych

Semestr letni 2019/2020

Lista zadań nr 2

Zadanie 10. Używając algorytmu "divide-and-conquer" do mnożenia liczb wykonaj mnożenie dwóch liczb binarnych 1001, 1011.

Rozwiązanie. Obie podane liczby są mają równą, parzystą liczbę bitów. Wobec tego można postępować identycznie dla każdej z nich. Zamiast mnożyć całe podane, wielobitowe liczby, podzielić można je połowicznie na coraz mniejsze czynniki.

n dla podanych liczb wynosi 4 i oznacza ich liczbę bitów(długość). Na początek podzielmy na pół bazowe liczby:

$1001 = X = X_1 * 2^{\frac{n}{2}} + X_2$

$1011 = Y = Y_1 * 2^{\frac{n}{2}} + Y_2$

Otrzymujemy następującą postać mnożenia:

$X * Y = (X_1 * 2^{\frac{n}{2}} + X_2)(Y_1 * 2^{\frac{n}{2}} + Y_2) = X_1Y_1 * 2^n + 2^{\frac{n}{2}}(X_1Y_2 + X_2Y_1) + X_2Y_2$

Środkowy wyraz można przekształcić za pomocą poniższego wzoru, który będzie jeszcze użyty w dalszych obliczeniach:

$A * C + B * D = (A + B)(C + D) - A * D - B * C$

Otrzymujemy zatem:

$X_1Y_2 + X_2Y_1 = (X_1 + X_2)(Y_1 + Y_2) - X_1Y_1 - X_2Y_2$

Końcowa postać całego wyrażenia wygląda więc następująco:

$X * Y = X_1Y_1 * 2^n + 2^{\frac{n}{2}}((X_1 + X_2)(Y_1 + Y_2) - X_1Y_1 - X_2Y_2) + X_2Y_2$

Dokonany wyżej podział sprawił, że operujemy obecnie na liczbach dwubitowych. Można więc je jeszcze raz podzielić na pół. Otrzymujemy wówczas:

$10 = X_1 = X_{1_1} * 2^{\frac{n}{4}} + X_{1_2}$

$01 = X_2 = X_{2_1} * 2^{\frac{n}{4}} + X_{2_2}$

$10 = Y_1 = Y_{1_1} * 2^{\frac{n}{4}} + Y_{1_2}$

$11 = Y_2 = Y_{2_1} * 2^{\frac{n}{4}} + Y_{2_2}$

$X_1 + X_2 = 10 + 01 = 11 = X_3 = X_{3_1} * 2^{\frac{n}{4}} + X_{3_2}$

$Y_1 + Y_2 = 10 + 11 = 101 = Y_3 = Y_{3_1} * 2^{\frac{n}{4}} + Y_{3_2}$

Ostatni podział jest nieregularny - wyraz podzielono na 2 mocniejsze oraz jeden najsłabszy bit. Wymaga to dalzego podziału:

$10 = Y_{3_1} = Y_{3_{1_1}} * 2^{\frac{n}{4}} + Y_{3_{1_2}}$

$101 = Y_3 = (Y_{3_{1_1}} * 2^{\frac{n}{4}} + Y_{3_{1_2}}) * 2^{\frac{n}{4}} + Y_{3_2}$

Powyższe podziały oraz opisany wcześniej wzór zostaną użyte do obliczenia wartości poniższych mnożeń składowych. W razie potrzeby kolejne podziały, wynikające z sumowania, będą wykonywane na bieżąco:

$X_1 * Y_1 = (X_{1_1} * 2^{\frac{n}{4}} + X_{1_2})(Y_{1_1} * 2^{\frac{n}{4}} + Y_{1_2}) = X_{1_1}Y_{1_1} * 2^{\frac{n}{2}} + 2^{\frac{n}{4}}(X_{1_1}Y_{1_2} + X_{1_2}Y_{1_1}) + X_{1_2}Y_{1_2} =$

$= X_{1_1}Y_{1_1} * 2^{\frac{n}{2}} + 2^{\frac{n}{4}}((X_{1_1} + X_{1_2})(Y_{1_1} + Y_{1_2}) - X_{1_1}Y_{1_1} - X_{1_2}Y_{1_2}) + X_{1_2}Y_{1_2} = 1 * 1 * 2^{\frac{4}{2}} + 2^{\frac{4}{4}}((1 + 0)(1 + 0) -$

$- 1 * 1 - 0 * 0) + 0 * 0 = 2^2 = 100$

$(X_1+X_2)(Y_1+Y_2) = X_3*Y_3 = (X_{3_1}*2^{\frac{n}{4}}+X_{3_2})(Y_{3_1}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_2}) = X_{3_1}Y_{3_1}*2^{\frac{n}{2}}+2^{\frac{n}{4}}(X_{3_1}Y_{3_2}+X_{3_2}Y_{3_1})+X_{3_2}Y_{3_2} =$
$= X_{3_1}Y_{3_1}*2^{\frac{n}{2}}+2^{\frac{n}{4}}((X_{3_1}+X_{3_2})(Y_{3_1}+Y_{3_2})-X_{3_1}Y_{3_1}-X_{3_2}Y_{3_2})+X_{3_2}Y_{3_2} = X_{3_1}(Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_{1_2}})*2^{\frac{n}{2}}+$
$+2^{\frac{n}{4}}((X_{3_1}+X_{3_2})((Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_{1_2}})+Y_{3_2})-X_{3_1}(Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_{1_2}})-X_{3_2}Y_{3_2})+X_{3_2}Y_{3_2}$
Dla ułatwienia i większej czytelności obecną postać policzono częściami:
$X_{3_1}(Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_{1_2}}) = X_{3_1}Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+X_{3_1}Y_{3_{1_2}} = 1*1*2^{\frac{4}{4}}+1*0 = 2 = 10$

$((X_{3_1}+X_{3_2})((Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_{1_2}})+Y_{3_2}) = (1+1)(1*2^{\frac{n}{4}}+0+1) = (10)(11) = (1*2^{\frac{n}{4}}+0)(1*2^{\frac{n}{4}}+1) =$
$= 1*1*2^{\frac{4}{2}}+2^{\frac{4}{4}}(1*1+0*1)+0*1 = 2^2+2 = 100+10 = 110$

$X_{3_2}Y_{3_2} = 1*1 = 1$

Końcowa postać oraz wynik tego wyrażenia wyglądają więc następująco:
$X_{3_1}(Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_{1_2}})*2^{\frac{n}{2}}+2^{\frac{n}{4}}((X_{3_1}+X_{3_2})((Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_{1_2}})+Y_{3_2})-X_{3_1}(Y_{3_{1_1}}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{3_{1_2}})-X_{3_2}Y_{3_2})+X_{3_2}Y_{3_2} =$
$= 10*2^{\frac{4}{2}}+2^{\frac{4}{4}}(110-10-1)+1 = 10*2^2+2*11+1 = 10*100+10*11+1 = 1000+110+1 = 1111$

$X_2*Y_2 = (X_{2_1}*2^{\frac{n}{4}}+X_{2_2})(Y_{2_1}*2^{\frac{n}{4}}+Y_{2_2}) = X_{2_1}Y_{2_1}*2^{\frac{n}{2}}+2^{\frac{n}{4}}(X_{2_1}Y_{2_2}+X_{2_2}Y_{2_1})+X_{2_2}Y_{2_2} =$
$= X_{2_1}Y_{2_1}*2^{\frac{n}{2}}+2^{\frac{n}{4}}((X_{2_1}+X_{2_2})(Y_{2_1}+Y_{2_2})-X_{2_1}Y_{2_1}-X_{2_2}Y_{2_2})+X_{2_2}Y_{2_2} = 0*1*2^{\frac{n}{2}}+2^{\frac{n}{4}}((0+1)(1+1)-$
$-0*1-1*1)+1*1 = 2^{\frac{4}{4}}(1*10-1)+1 = 2*(1(1*2+0)-1)+1 = 2*(2-1)+1 = 2*(10-1)+1 = 2+1 = 10+1 = 11$

Podstawiając otrzymane cząstkowe wartości do poprzedniej postaci głównego równania otrzymujemy:
$X*Y = X_1Y_1*2^n+2^{\frac{n}{2}}((X_1+X_2)(Y_1+Y_2)-X_1Y_1-X_2Y_2)+X_2Y_2 = 100*2^4+2^{\frac{4}{2}}(1111-100-11)+11 =$
$= 100*10000+1000*2^2+11 = 1000000+10000+11 = \mathbf{1100011}$