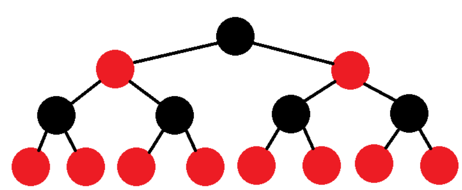
Zadanie 4.

Każde drzewo czerwono-czarne ma następujące własności:

1. Jest drzewem binarnym,
2. Każdy z węzłów jest czerwony albo czarny,
3. Korzeń drzewa oraz wszystkie "dzieci liści" (zaimplementowane w `C` byłyby to wskaźniki o wartości `NULL`) zawsze są czarne,
4. Jeśli węzeł jest czerwony, to jego dzieci są czarne.
5. Każda ścieżka od korzenia do dowolnego liścia typu `NULL` musi przechodzić przez jednakową liczbę czarnych węzłów.

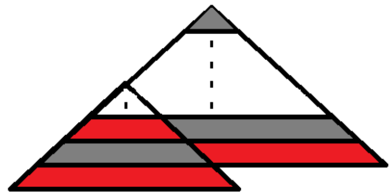
Mając na uwadze te zasady, rozważmy drzewo czerwono-czarne o n kluczach. Niech r oznacza liczbę czerwonych węzłów, a b - liczbę węzłów czarnych. Szukamy takich drzew, dla których $k = \frac{r}{b}$ jest odpowiednio największy albo najmniejszy.

Największe k: niech $n = 2^a - 1$, gdzie $2|a \wedge a > 0$. Weźmy zbalansowane drzewo czerwono-czarne z n kluczami, w którym każdy czarny węzeł będzie mieć dwójkę czerwonych dzieci. Przykładowa struktura (z pominięciem `NULL`-węzłów) czyniąca zadość tym warunkom wygląda następująco:

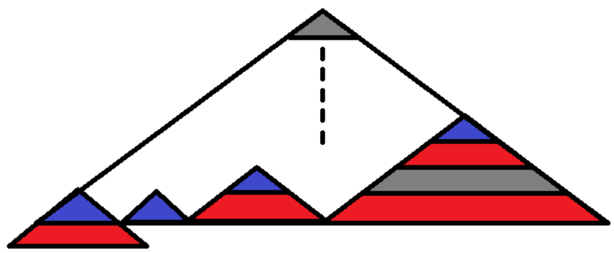


W takiej strukturze nie może być już więcej czerwonych węzłów, ponieważ naruszyłoby to zasadę (4). Węzłów czerwonych jest dwa razy więcej, niż czarnych, zatem $k_{max} = 2$.

W drzewie niezbalansowanym: Możemy zauważyć, że w takim drzewie można wyodrębnić mniejsze, pełne (lub prawie pełne, bez jednego klucza), które sięga do najniższego poziomu w drzewie, oraz pozostałą część drzewa. Staramy się, żeby klucze-liscie miały zawsze kolor czerwony. W tym celu jeśli wysokość całego drzewa jest parzysta, jak w przykładzie powyżej, to należy każdy poziom malować na kolor przeciwny od poprzedniego. Jeśli wysokość jest nieparzysta, należy pomalować dzieci korzenia na czarno i od nich zacząć malowanie naprzemiennymi kolorami. Na obrazku zaznaczono schematycznie kolory na kolejnych głębokościach.

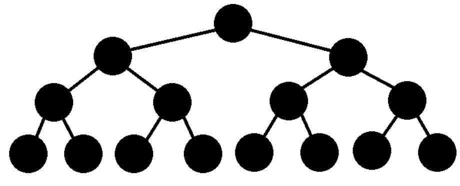


Można powiedzieć, że warstwy w wyróżnionym poddrzewie zostają "przesunięte" o 1 poziom głębiej, a korzeń poddrzewa staje się innego koloru, niż pozostałe węzły na jego głębokości. Sprawi to, że ścieżka od korzenia całego drzewa do liści poddrzewa będzie przechodzić przez o jeden czarny węzeł więcej, niż do pozostałych liści. Dlatego w celu zachowania zasady (5) należy obciążyć pozostałe ścieżki. Aby k_{max} było jak najwyższe, należy robić to na najwyższej możliwej głębokości. Innymi słowy należy przemalować korzenie odpowiednych poddrzew na czarno. Poniższy obrazek przedstawia odpowiednie wycinki warstw (każdy złożony z jednego węzła-korzenia) przemalowane na niebiesko.



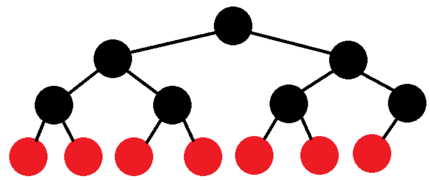
Okazuje się, że w co drugiej warstwie przemalowanie nic nie zmienia, ponieważ wierzchołek był już koloru czarnego. Zatem z oryginalnego stosunku węzłów czerwonych do czarnych równego $2:1$ należy zabrać część węzłów czerwonych i dodać je do czarnych. Ta "część" jest zależna od wysokości, a dokładnie jest to jej połowa, ponieważ faktyczna zmiana kolory węzła następuje na co drugim poziomie. Zatem jeśli wysokość drzewa oznaczymy jako $h = \lceil log_2(n+1) \rceil$, to $k_{max} = \frac{\frac{2}{3} \cdot n - \frac{h}{2}}{\frac{1}{3} \cdot n + \frac{h}{2}} \xrightarrow{n \to \infty} 2$, ponieważ h rośnie logarytmicznie, a n liniowo.

Najmniejsze k: dla dodatniego $n = 2^a - 1$ można utworzyć drzewo składające się wyłącznie z czarnych węzłów, chociażby usuwając czerwone węzły z większego drzewa. Taka struktura wyglądałaby wtedy następująco:

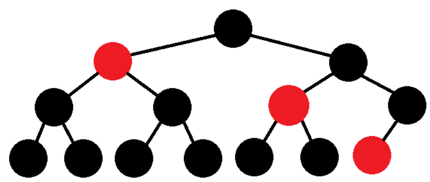


Jak bez trudu można zauważyć, $k_{min} = 0$.

W drzewie niezbalansowanym: Niech wszystkie węzły poza tymi położonymi najgłębiej będą w nim czarne, a pozostałe - czerwone (aby nie złamać reguły (5)). Wtedy $n = (2^a - 1) + m$, gdzie m to liczba węzłów na najniższym poziomie drzewa. Na przykład dla $a = 3$ i $m = 7$:



Powyższe drzewo jest poprawne, ale można zmniejszyć liczbę jego czerwonych węzłów. Dla każdego czarnego wierzchołka posiadającego dwójkę czerwonych dzieci można "przesunąć" czerwony kolor do tego wierzchołka, a dzieci pomalować na czarno. Nadal będzie to drzewo czerwono-czarne (w szczególności z poszanowaniem zasady (5)). Działanie to należy powtarzać do skutku. Efekt końcowy wygląda następująco:



Strategia minimalizacji k polega na dodawaniu do zbalansowanego drzewa liści tak, aby działanie opisane w akapicie wyżej wykonywać jak najwięcej razy. Wówczas w najgorszym przypadku na każdej głębokości drzewa (poza korzeniem) będzie znajdować się dokładnie jeden czerwony węzeł. Wysokość drzewa o n węzłach można wyrazić jako $h = \lceil log_2(n+1) \rceil$. Dlatego $0 \leqslant r_{min} \leqslant h - 1$, a tym samym $0 \leqslant k_{min} \leqslant \frac{h-1}{n-(h-1)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.