

Zadanie 8.

Zaprojektuj algorytm, który sortuje  $n$  liczb całkowitych z przedziału od 1 do  $n^2$  w czasie  $O(n)$

Algorytmem, który proponuję użyć pochodzi z książki Wstęp do Algorytmów autorstwa Cormena. Jest to mianowicie Radix-Sort, poniżej umieszczony został pseudokod tego algorytmu.

W następującej procedurze przyjmujemy, że każdy element w  $n$ -elementowej tablicy  $A$  ma  $d$  cyfr, gdzie cyfra na pozycji 1 jest najmniej znacząca, a cyfra na pozycji  $d$  jest najbardziej znacząca.

```
RADIX-SORT( $A, d$ )  
1 for  $i \leftarrow 1$  to  $d$   
2   do posortuj stabilnie tablicę  $A$  według cyfry  $i$ 
```

Do sortowania opisanego w tym algorytmie, można posłużyć się Counting-Sort, którego złożoność obliczeniowa wynosi  $\Theta(n+k)$ , gdzie  $n$  to ilość kluczy do posortowania, a  $k$  to zakres kluczy, z którego sortujemy.

Jednak nie możemy zastosować tego algorytmu bezpośrednio na kluczach z zakresu od 1 do  $n^2$  i zostać przy złożoności  $O(n)$  co wynika właśnie z zakresu  $k = n^2$ .

Pojawia się pytanie jak temu zaradzić, otóż możemy posłużyć się Radix-Sortem, ale korzystając z systemu pozycyjnego liczb o podstawie  $n$ . W zakresie 1 do  $n^2$  mamy  $n^2 - 1$  różnych liczb, możemy to "przeskalować" na przedział od 0 do  $n^2 - 1$ .

Dowolną liczbę  $M$  z tego zakresu jesteśmy w stanie zakodować jako parę liczb  $(k_1, k_2)$  w systemie pozycyjnym o podstawie  $n$ . To znaczy każda z liczb  $k_1, k_2 < n$  oraz  $M = (n * k_1 + k_2)$

Używamy 2 razy Counting-Sort na tych "cyfrach" - uwaga - "cyfra" oznacza tu liczbę z zakresu 0 do  $n - 1$ . A Counting Sort dla kluczy z tego zakresu działa w czasie  $2 * \Theta(n)$ . A to implikuje, że Radix-Sort działa w czasie  $O(n)$ . Ponadto każdą z liczb jesteśmy w stanie zapisać w systemie o podstawie  $n$  w czasie stałym (możemy założyć, że pojedyncza operacja dzielenia i odejmowanie zajmują stały czas