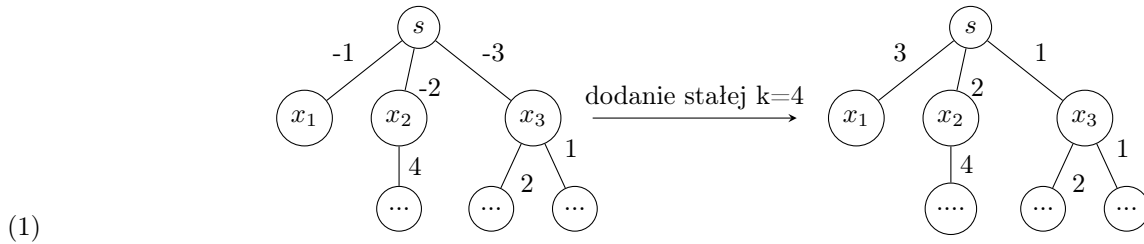


1 Treść zadania

Rozważ graf skierowany w którym krawędzie wychodzące z wierzchołka s mają ujemne wagi, natomiast wszystkie inne krawędzie mają dodatnie wagi. Czy algorytm Dijkstry zaczynający od s będzie działał poprawnie dla takiego grafu? Udowodnij swoją odpowiedź.

2 Rozwiązanie

Wiemy, że jeśli w grafie występuje ujemny cykl, to nie istnieje najkrótsza ścieżka, zatem algorytm Dijkstry tym bardziej nie będzie działał. Założmy jednak, że nie ma ujemnych cykli. Postulujemy, że wtedy algorytm Dijkstry zaczynający od s będzie działał poprawnie dla tego grafu. Aby to pokazać, oznaczmy przez G' graf powstały z G , taki, że do każdej wagi krawędzi z s dodajemy taką stałą k , aby wszystkie wagi w powstałym grafie G' były dodatnie. Weźmy $k = \max_{e \in E, s \in e} |weight[e]| + 1$. Otrzymany graf G' ma dodatnie wagi, zatem algorytm Dijkstry działa dla niego poprawnie. Przykładowe utworzenie grafu G' z grafu G :



Chcemy pokazać, że algorytm Dijkstry dla grafu G' działa tak samo, jak dla grafu G . Zauważamy następujące fakty:

- każda najkrótsza ścieżka z s do v nie zawiera krawędzi powrotnych do s , więc każda ścieżka należy do zbioru P ścieżek, które mają co najwyżej jedną krawędź wspólną z s (wynika to z założenia, że nie istnieją ujemne cykle)
- każda ścieżka z P używa dokładnie jednej krawędzi wspólnej z s (możemy założyć, że $s \neq v$)

Dlatego dodając stałą k do wagi każdej krawędzi wychodzącej od s , tak aby wszystkie były dodatnie, wszystkie ścieżki w P zwiększą swoją długość o k . Jeżeli przez P oznaczmy ten zbiór zmodyfikowanych ścieżek, możemy stwierdzić, że:

$$\begin{aligned}
 & \min\{\text{length}(p) : p \in P\} \\
 &= \min\{\text{length}(p) + k - k : p \in P\} \\
 &= \min\{\text{length}(p) + k : p \in P\} - k \\
 &= \min\{\text{length}(p') : p' \in P'\} - k
 \end{aligned}$$

Długość każdej najkrótszej ścieżki ulegnie zatem przesunięciu o k . Wystarczy teraz tylko pokazać, że algorytm Dijkstry dla grafu G wygeneruje te same ścieżki, co dla grafu G' . W tym celu wystarczy zauważyć, że dla grafu G wierzchołki w kolejce będą miały wagi takie jak w kolejce dla grafu G' , przesunięte tylko o stałą k . Zatem algorytm dla grafu G również zadziała poprawnie.