Johdatus yliopistomatematiikkaan, syksy 2019

Harjoitus 8

1. Merkitään $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Määrittelevätkö seuraavat säännöt kuvauksia? Miksi?
   a) $f\colon X \to X, f(n) = n^2 + n \cdot (-1)^{n+1}$: sääntö ei määrittele kuvausta, koska se liittää joihinkin lähtöjoukon alkioihin alkioita, jotka eivät ole maalijoukossa (esim. $n = 3, f(n) = 3^2 + 3 \cdot (-1)^{3+1} = 9 + 3 = 12 \notin X$).
   b) $g\colon X \to X, g(x) = 3$: sääntö määrittelee kuvausta, koska se liittää jokaiseen lähtöjoukon alkioon täsmälleen yhden maalijoukon alkion.
   c) $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma(x) = \sqrt{x-3}$: sääntö ei määrittele kuvausta, koska se ei liitä maalijoukon alkioita yhteenkään lähtöjoukon alkioon (koska neliöjuuri on määritelty vain positiivisille reaaliluvuille). ??
   d) $\tau\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \tau(x) = \frac{2a-b}{a^2+2b^2}$, kun rationaaliluku x kirjoitetaan muodossa $x = \frac{a}{b}$, missä $a, b \in \mathbb{Z}$: sääntö ei määrittele kuvausta, koska se ei liitä kaikkiin lähtöjoukon alkioihin yhtään maalijoukon alkiota (esim. $x = 2 = \frac{2}{1}, \tau(x) = \frac{2\cdot 2-1}{2^2+2\cdot 1^2} = \frac{3}{6}$).

2. Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota, jonka kateettien pituudet ovat a ja b ja hypotenuusan pituus c. Tarkoitus on osoittaa, että $a + b > c$.
   a) Vastaoletus: on olemassa suorakulmainen kolmio, jolla on kateetit a ja b niin että $a + b \leq$ hypotenuusa c. Korotetaan yhtälön molemmat puolet toiseen potenssiin, jolloin saadaan yhtälö
   b) Näytetään toiseen potenssiin korottamalla, että vastaoletus johtaa ristiriitaan Pythagoraan lauseen kanssa. Kun epäyhtälön molemmat puolet korotetaan toiseen potenssiin, saadaan yhtälö $(a + b)^2 \leq c^2$, joka voidaan sieventää muotoon $a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$. Pythagoraan lauseen nojalla kuitenkin tiedetään, että suorakulmaisen kolmion tapauksessa $a^2 + b^2 = c^2$. Saatu yhtälö on siis ristiriidassa lauseen kanssa.
   c) <u>Ristiriitatodistus.</u> Tehdään vastaoletus, eli oletetaan, että on olemassa suorakulmainen kolmio, jolla on kateetit a ja b niin että $a+b \leq$ hypotenuusa c. Korotetaan tämä yhtälö toiseen potenssiin, jolloin saadaan $(a+b)^2 \leq c^2$, joka voidaan vielä sieventää muotoon $a^2+2ab+b^2 \leq c^2$ ja edelleen $a^2+b^2 \leq c^2-2ab$. Toisaalta Pythagoraan lauseen nojalla tiedetään, että suorakulmaisille kolmioille, joiden kateetit ovat a ja b ja hypotenuusa c pätee, että $a^2 + b^2 = c^2$. Vastaoletus johtaa siis ristiriitaan, joten alkuperäinen väite on tosi. Siis $a + b > c$.

3. a) Olkoon $X = \{1, 2\}$. Muodosta kaikki mahdolliset kuvaukset $X \to X$.

$$
\begin{aligned}
1 &\mapsto 1 \\
1 &\mapsto 2 \\
2 &\mapsto 1 \\
2 &\mapsto 2
\end{aligned}
$$

b) Olkoon $Y = \{1, 2, 3\}$. Kuinka monta kuvausta $Y \to Y$ on olemassa?

$$
\begin{array}{ccc}
1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 1 \\
1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 2 \\
1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 3
\end{array}
$$

Kuvauksia on $3^2 = 9$.

c) Olkoon $Z = \{1, 2, \ldots, n\}$. Kuinka monta kuvausta $Z \to Z$ on olemassa? Kuvauksia on n^2.