Lineaarialgebra ja matriisilaskenta, syksy 2020

Harjoitus 5

1. Lasketaan $\det A$ kehittämällä se matriisin rivin 1 suhteen:

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \sum_{i=1}^{3}(-1)^{1+i}\, a_{1i}\, \det A|_{1i} \\ &= 1(0\cdot 0-(-1)\cdot 1)-0(2\cdot 0-1\cdot 0)+2(2\cdot(-1)-0\cdot 0) \\ &= 1\cdot 1-0+2\cdot(-2) \\ &= -3\end{aligned}$$

Lasketaan $\det B$ kehittämällä se matriisin rivin 2 suhteen:

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\right) &= \sum_{i=1}^{3}(-1)^{2+i}\, a_{2i}\, \det B|_{2i} \\ &= -0(1\cdot(-3)-(-1)\cdot(-1))+2(4\cdot(-3)-2\cdot(-1))-0(4\cdot(-1)-2\cdot 1) \\ &= 0+2\cdot(-10)-0 \\ &= -20\end{aligned}$$

Lasketaan $\det C$ kehittämällä se matriisin sarakkeen 1 suhteen:

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\right) &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}\, a_{j1}\, \det C|_{j1} \\ &= 0(2\cdot(-3)-2\cdot(-1))-0(0\cdot(-3)-(-1)\cdot(-1))+2(0\cdot 2-(-1)\cdot 2) \\ &= 0-0+2\cdot 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

Saadaan $\det A = 0$, $\det B = -20$ ja $\det C = 4$.

2. Lauseen 5.8.1 mukaan matriisin A determinantti on 0, jos A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippuvia. Havaitaan, että matriisin A kolmas sarake on ensimmäisen ja toisen sarakkeen lineaarikombinaatio:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siten A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippuvia, ja lauseen 5.8.1 nojalla $\det A = 0$.

3. Matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $a_{ii} \neq 0$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lasketaan ensin tapaukset $n = 2$ ja $n = 3$, ja kehitetään determinantti molemmissa tapauksissa sarakkeen 1 suhteen.

Tapaus $n = 2$, missä $\det A'$ on

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - 0a_{12} = a_{11}a_{22}$$

Oletetaan siis, että matriisi A' on kääntyvä. Tällöin $\det A = a_{11}a_{22} \neq 0$. Tulon nollasäännön nojalla täytyy päteä sekä $a_{11} \neq 0$ että $a_{22} \neq 0$. Oletetaan sitten, että $a_{ii} \neq 0$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin $a_{11}, a_{22} \neq 0$, eli $\det A' \neq 0$ ja siis matriisi on kääntyvä. Väite siis pätee tapauksessa $n = 2$.

Tapaus $n = 3$, missä $\det A''$ on

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - 0a_{23}) - 0(a_{12}a_{23} - 0a_{13}) - 0(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \end{aligned}$$

Oletetaan taas ensin, että A'' on kääntyvä ja siis $\det A'' = a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$. Tulon nollasäännön nojalla täytyy päteä, että mikään tekijöistä ei ole nolla. Oletetaan sitten, että $a_{ii} \neq 0$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin $a_{11,}a_{22}, a_{33} \neq 0$, eli $\det A'' \neq 0$ ja siis matriisi on kääntyvä. Väite siis pätee myös tapauksessa $n = 3$.

Lasketaan sitten yleinen tapaus A. Kehittämällä determinantti aina sarakkeen 1 suhteen saadaan rekursiivinen kaava

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, a_{j1}\, \det A|_{j1} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det A|_{11} \\ &= a_{11} \left((-1)^{1+1} a_{22} \cdot \det(A|_{11})|_{11} \right) \\ &= a_{11}a_{22} \left((-1)^{1+1} a_{33} \cdot \det((A|_{11})|_{11})|_{11} \right) \\ &\vdots \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \dots \left((-1)^{1+1} a_{n-1n-1} \cdot \det[a_{nn}] \right) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{n-1n-1}a_{nn} \end{aligned}$$

Oletetaan ensin, että A on kääntyvä. Nyt lauseen 5.8.2 nojalla $0 = \det A = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{n-1n-1}a_{nn}$. Tulon nollasäännön nojalla tulo on nolla, jos yksikin tekijöistä on nolla. Koska oletuksen mukaan $\det A \neq 0$, yksikään termeistä $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ ei voi olla nolla.

Oletetaan sitten, että $a_{ii} \neq 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin $a_{11,}a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$, eli $\det A \neq 0$. Siis A on kääntyvä.

Väite on nyt osoitettu molempiin suuntiin.

4. Koska U on ortogonaalimatriisi, sille pätee $U^tU = I$. Kuten luentomonisteen esimerkissä 5.4.3 todetaan, $\det I = 1$, mistä seuraa, että $\det(U^tU) = 1$. Lauseen 5.6.1 mukaan kahden neliömatriisin determinanttien tulo on näiden matriisien tulomatriisin determinantti. U on ortogonaalimatriisi, eli se on myös neliömatriisi. Lauseen 5.6.1 nojalla siis $\det(U^tU) =(\det U^t)(\det U) = 1$.

   Oletetaan, että $\det U = 1$. Lauseen 5.7.1 nojalla tällöin myös $\det U^t = 1$. Nähdään, että $(\det U^t)(\det U) = 1 \cdot 1 = 1$, eli $\det U = 1$ toteuttaa väitteen.

   Oletetaan sitten, että $\det U = -1$. Tällöin $\det U^t = -1$, ja $(\det U^t)(\det U) = -1 \cdot (-1) = 1$. Myös $\det U = -1$ toteuttaa väitteen.

   Koska matriisin ja sen transpoosin determinantti on aina sama, tulomatriisin U^tU determinantti on 1 täsmälleen silloin, kun $\det U = 1$ tai $\det U = -1$.

5. Määritelmän 5.2.2 mukaan funktio $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}} : \mathbb{R}^{2\times1} \times \mathbb{R}^{2\times1} \to \mathbb{R}$,

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right) \mapsto ad - bc,$$

   on alternoiva bilineaarimuoto, jos

   a) se on bilineaarinen, eli kaikilla $w, v, v' \in \mathbb{R}^{2\times1}$ ja kaikilla $a \in \mathbb{R}$

      i. $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(v + v', w) = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(v, w) + \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(v', w)$ ja
      $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(w, v + v') = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(w, v) + \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(w, v')$

      ii. $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(av, w) = a\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(v, w)$ ja
      $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(w, av) = a\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(w, v)$

   b) se on alternoiva, eli kaikilla $v \in \mathbb{R}^{2\times1}$ $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}}(v, v) = 0$

   Osoitetaan ensin bilineaarisuus. Lasketaan ehdon a) kohta i. ensimmäisen argumentin suhteen, eli pitäisi osoittaa, että

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}} \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right) = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}} \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right) + \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times1}} \left(\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right)$$

Lasketaan yhtälön molemmat puolet tehtävänannossa olevan kuvauksen määritelmän mukaan.

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right) &= \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a+a'\\b+b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right)\\ &= (a+a')d-(b+b')c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right)+\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right) &= ad-bc+a'd-b'c\\ &= d(a+a')-c(b+b')\\ &= (a+a')d-(b+b')c\end{aligned}$$

Päädytään samaan sievennettyyn yhtälöön, joten ehdon a) kohta i. pätee ensimmäisen argumentin suhteen. Lasketaan sama toisen argumentin suhteen:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}c'\\d'\end{bmatrix} &= \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c+c'\\d+d'\end{bmatrix}\right)\\ &= a(d+d')-b(c+c')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right)+\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c'\\d'\end{bmatrix}\right) &= ad-bc+ad'+cd'\\ &= a(d+d')-b(c+c')\end{aligned}$$

Päädytään jälleen samaan sievennettyyn yhtälöön, joten ehdon a) kohta i. pätee myös toisen argumentin suhteen.

Lasketaan sitten ehdon a) kohta ii. ensimmäisen argumentin suhteen. Pitäisi siis osoittaa, että

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(t\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right)=t\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right)$$

Lasketaan yhtälön molemmat puolet erikseen.

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(t\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right) &= \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}ta\\tb\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right)\\ &= (ta)d-(tb)c\\ &= t(ad)-t(bc)\\ &= t(ad-bc)\end{aligned}$$

$$t\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\right)=t(ad-bc)$$

Molemmissa tapauksissa päädytään samaan yhtälöön, joten ehdon a) kohta ii. pätee ensimmäisen argumentin suhteen. Lasketaan sama nyt toisen argumentin suhteen.

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, t\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) &= \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} tc \\ td \end{bmatrix}\right) \\ &= a(td) - b(tc) \\ &= t(ad) - t(bc) \\ &= t(ad - bc)\end{aligned}$$

$$t\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = t(ad - bc)$$

Myös tässä päädytään samaan yhtälöön, joten kohta ii. pätee myös toisen argumentin suhteen. Määritelmän 5.2.2 ensimmäinen ehto siis pätee, eli funktio on bilineaarinen.

Tarkastellaan sitten ehtoa b):

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = ab - ba = 0$$

Myös ehto b) pätee. Määritelmän 5.2.2 nojalla funktio on alternoiva bilineaarimuoto.

Tarkistetaan lopuksi, että funktiolle pätee $_{\mathbb{R}^{2\times 1}}(e_1, e_2) = 1$:

$$\mathrm{vol}\mathbb{R}^{2\times 1}(e_1, e_2) = \mathrm{vol}\mathbb{R}^{2\times 1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Myös viimeinen ehto pätee. Näin väite on todistettu.

6. Muodostetaan matriisi A ja lasketaan sen determinantti komennolla det(A):

A | exercise3.R | Linis.R

Source on Save

```r
determinantti <- function() {
  A <- matrix(rep(0, 100), nrow=10, ncol=10)
  for (row in 1:10) {
    for (col in 1:10) {
      if ((row+col)%%2==0) {
        A[row,col] <- 1
      } else {
        A[row,col] <- -1
      }
    }
  }
  return(det(A))
}

determinantti()

```

20:1 (Top Level)

Console | Terminal | Jobs

~/

```
> source('~/Documents/Linis/Linis.R')
> determinantti()
[1] 0
```