Lineaarialgebra ja matriisilaskenta, syksy 2020

Harjoitus 6

1. Lauseen 6.2.3 mukaan luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on neliömatriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvo, jos ja vain jos $\det(A - \lambda I) = 0$. Muodostetaan ensin matriisi $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Ratkaistaan sitten yhtälö $0 = \det(A - \lambda I)$:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

Nyt voidaan ratkaista λ saadusta yhtälöstä:

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Matriisin A ominaisarvoksi saadaan $\lambda = 2$. Ominaisarvon avulla voidaan laskea A:n ominaisvektorit v, eli nollasta poikkeavat ratkaisut yhtälölle $(A-2I)v = 0$. Muodostetaan ensin matriisi $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nyt voidaan ratkaista vektorit v muodostamalla matriisiyhtälö $[A - 2I|0]$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

joka vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Matriisin A ominaisvektoreiksi saadaan $v = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tehdään samat laskutoimitukset matriisille B, ja aloitetaan muodostamalla matriisi $B - \lambda I$:

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Ratkaistaan sitten yhtälö 0 =det$(B - \lambda I)$:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Nyt voidaan ratkaista B:n ominaisarvot λ yhtälöstä:

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

Matriisin B ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. Lasketaan sitten kumpaakin ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit. Tapauksessa $\lambda_1 = 3$ saadaan matriisi

$$B - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

josta voidaan muodostaa matriisiyhtälö $[B - 3I|0]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] |R_2 + R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tämä vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 &= t \\ x_2 &= t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Matriisin B ominaisarvoa $\lambda_1 = 3$ vastaaviksi ominaisvektoreiksi saadaan $v = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lasketaan sitten tapaus $\lambda = 1$. Saadaan matriisi

$$B - 1I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

josta voidaan muodostaa matriisiyhtälö $[(B - 1I)|0]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_2 - R_1 \quad \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tämä vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 &= -t \\ x_2 &= t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Matriisin B ominaisarvoa $\lambda_2 = 1$ vastaaviksi ominaisvektoreiksi saadaan $v = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Osoitetaan esin, että jono (v_1, v_2, v_3) on avaruuden $\mathbb{R}^{3\times 1}$ kanta. Jono on kanta, jos se on vapaa ja jos se virittää avaruuden, eli jos kaikille $w \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ pätee $w = w_1v_1+w_2v_2+w_3v3$ joillakin $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$. Muodostetaan matriisiyhtälö $[v_1v_2v_3|w]$ ja ratkaistaan se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 1 & 0 & -1 & w_3 \end{array}\right] |R_3 - R_1 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & -2 & w_3 - w_1 \end{array}\right] (-\frac{1}{2}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_1 \end{array}\right] |R_1 - R_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_3 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_1 \end{array}\right]$$

Koska supistetussa porrasmuodossa ei näy epätosia yhtälöitä, matriisiyhtälölle on olemassa ratkaisu. Lisäksi koska kaikki muuttujat ovat sidottuja, ratkaisu on yksikäsitteinen. Siten jono (v_1, v_2, v_3) on avaruuden $\mathbb{R}^{3\times 1}$ kanta.

Supistetusta porrasmuodosta voidaan nyt poimia vektorin b koordinaatit tässä kannassa:

$$b = \left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_3\right) v_1 + 4v_2 + \left(-\frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_1\right) v_3 = 4v_1 + 4v_2 - v_3$$

Olkoon nyt $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Koska (v_1, v_2, v_3) on kanta, niin $x = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ joillain $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Ax voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} Ax &= A(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) \\ &= a_1Av_1 + a_2Av_2 + a_3Av_3 \\ &= a_1 1v_1 + a_2 1v_2 + a_3 2v_3 \end{aligned}$$

Käyttämällä tätä muotoa ja aiemmin laskettuja b:n kertoimia kannassa yhtälö $Ax = b$ saadaan nyt muotoon

$$a_1 1v_1 + a_2 1v_2 + a_3 2v_3 = 4v_1 + 4_v 2 + (-1)v_3$$

Nyt voidaan ratkaista luvut a_1, a_2, a_3:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1 = 4 &\Leftrightarrow a_1 = 4 \\ a_2 \cdot 1 = 4 &\Leftrightarrow a_2 = 4 \\ a_3 \cdot 2 = -1 &\Leftrightarrow a_3 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Yhtälön $Ax = b$ ratkaisut ovat siis täsmälleen muotoa

$$4v_1 + 4v_2 - \frac{1}{2}v_3 = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 4 \\ 17/4 \end{bmatrix}.$$

3. Etsitään matriisin A ominaisarvot ratkaisemalla determinanttiyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned}
0 = \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}\\
&= (-1)^{1+1}(1-\lambda)\det\begin{bmatrix}2-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}\\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Tulon nollasäännön nojalla determinanttiyhtälön nollakohdiksi ja siten matriisin A ominaisarvoiksi saadaan siis $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Lasketaan sitten näihin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit:

$$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 1-0 & 0-0 & 0\\ 0-0 & 2-1 & 0-0 & 0\\ 0-0 & 1-0 & 1-1 & 0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Vektorin v_1 koordinaateiksi x_1, x_2, x_3 saadaan $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = s$, missä $t, s \in \mathbb{R}$, eli

$$v_1 = t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, v_1 \in \operatorname{Sp}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = E(1, A)$$

Tämä ominaisavaruus on siis 2-ulotteinen.

Lasketaan sitten ominaisarvoon $\lambda_2 = 2$ liittyvät ominaisvektorit:

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 1-0 & 0-0 & 0\\ 0-0 & 2-2 & 0-0 & 0\\ 0-0 & 1-0 & 1-2 & 0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]$$

Vektorin v_2 koordinaateiksi saadaan nyt $x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = t$, missä $t \in \mathbb{R}$, eli

$$v_2 = t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, v_2 \in \operatorname{Sp}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = E(2, A)$$

Tämä ominaisavaruus on 1-ulotteinen.

4. Muodostetaan vihjeen mukaan ensin matriisit B ja C. Olkoon

$$B = \begin{bmatrix}b_1 & b_3\\ b_2 & b_4\end{bmatrix}.$$

Nyt halutaan siis sellaiset kertoimet b_i, että $\det(B-\lambda I)=0$ jollain yksikäsitteisellä luvulla λ. B:n determinantti saadaan kaavasta $b_1b_4-b_2b_3$, joten haluttuun tulokseen päästään valitsemalla esimerkiksi $b_1=2, b_2=0, b_3=1, b_4=2$. Matriisiksi B saadaan tämän perusteella

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Varmistetaan vielä, että matriisin B ominaisarvoa 2 vastaava ominaisavaruus on 1-ulotteinen:

$$(B-2I)v_b=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2-2 & 1-0 & 0\\ 0-0 & 2-2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Tästä saadaan muuttujien arvot $x_1\in\mathbb{R}, x_2=0$, eli ominaisvektori

$$v_b=t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in \mathrm{Sp}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=E(2,B).$$

Ominaisarvoa vastaa vain yksi ominaisvektori, joten ominaisavaruuden dimensio on 1.

Olkoon sitten

$$C=\begin{bmatrix}c_1 & c_3\\ c_2 & c_4\end{bmatrix}.$$

Samalla päättelyllä kuin matriisin B tapauksessa voidaan valita $c_1=4, c_2=0, c_3=1, c_4=4$, eli matriisiksi C saadaan

$$C=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Varmistetaan taas, että ominaisarvoa 4 vastaava avaruus on 1-ulotteinen:

$$(C-4I)v_c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4-4 & 1-0 & 0\\ 0-0 & 4-4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Tästä saadaan muuttujien arvot $x_1\in\mathbb{R}, x_2=0$, eli ominaisvektori

$$v_c=s\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in \mathrm{Sp}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=E(4,C).$$

Ominaisarvoa vastaa vain yksi ominaisvektori, joten ominaisavaruuden dimensio on 1.

Nyt voidaan muodostaa haluttu matriisi A löydettyjen matriisien B ja C avulla:

$$A=\begin{bmatrix}b_1 & b_3 & 0 & 0\\ b_2 & b_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_1 & c_3\\ 0 & 0 & c_2 & c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Osoitetaan, että matriisin A ominaisarvot ovat 2 ja 4:

$$
\begin{aligned}
0 = \det(A-\lambda I) = \det &\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (2-\lambda)(-1)^{1+1}(2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
&= (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda)
\end{aligned}
$$

Nähdään, että $\det(A-\lambda I) = 0$ täsmälleen silloin, kun $\lambda = 2$ tai $\lambda = 4$. Matriisin A ominaisarvot ovat siis 2 ja 4, kuten haluttiin. Lasketaan sitten näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet:

$$
(A-2I)v = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2-2 & 1-0 & 0-0 & 0-0 & 0 \\ 0-0 & 2-2 & 0-0 & 0-0 & 0 \\ 0-0 & 0-0 & 4-2 & 1-0 & 0 \\ 0-0 & 0-0 & 4-2 & 0-0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$

Tästä saadaan vektorin v kertoimiksi $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$, missä $t \in \mathbb{R}$. Siten

$$
v = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \in \operatorname{Sp}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = E(2, A).
$$

Ominaisarvoa 2 vastaava avaruus on siis 1-ulotteinen.

$$
(A-4I)v = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2-4 & 1-0 & 0-0 & 0-0 & 0 \\ 0-0 & 2-4 & 0-0 & 0-0 & 0 \\ 0-0 & 0-0 & 4-4 & 1-0 & 0 \\ 0-0 & 0-0 & 4-4 & 0-0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

Tästä saadaan vektorin v kertoimiksi $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = s, x_4 = 0$, missä $s \in \mathbb{R}$. Siten

$$v = s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \in \mathrm{Sp}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = E(4, A).$$

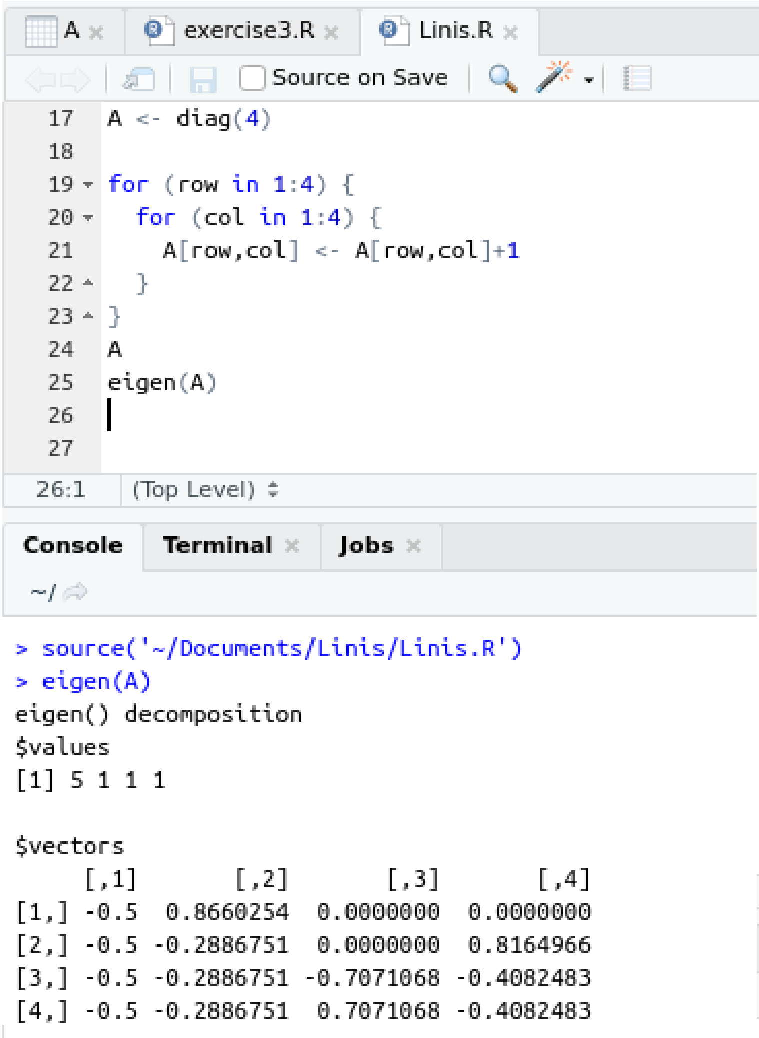
Myös ominaisarvoa 4 vastaava avaruus on 1-ulotteinen. Siis matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

täyttää annetut ehdot.

5. Nyt ei irtoa enää todistusta! Paukut on käytetty.

6. Muodostetaan matriisi A R-ohjelmistolla ja lasketaan sen ominaisarvot ja -vektorit komennolla eigen(A):



Funktio palauttaa ominaisarvot vektorina järjestyksessä suurimmasta pienimpään ja ominaisvektorit matriisin sarakkeina. Ominaisvektorit on normeerattu yksikkövektoreiksi, ja ne vastaavat indeksiltään samaa ominaisarvoa ominaisarvovektorissa. Tässä esimerkissä matriisin A ominaisarvoa 5 vastaa ensimmäinen sarakevektori, ja ominaisarvoa 1 vastaavat toinen, kolmas ja neljäs sarakevektori.