Lineaarialgebra ja matriisilaskenta, syksy 2020

Harjoitus 4

1. a) Jono (v_1, v_2) on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ortonormaalikanta, jos v_1 ja v_2 ovat yksikkövektoreita ja kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lasketaan ensin vektorien pituudet:

$$|v_1| = \sqrt{v_1 \cdot v_1}^2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$|v_2| = \sqrt{v_2 \cdot v_2}^2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$$

Molempien vektorien pituus on 1, joten ne ovat yksikkövektoreita (määritelmä 4.2.5). Tarkistetaan vielä niiden kohtisuoruus laskemalla niiden pistetulo:

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 0$$

Vektoreiden pistetulo on 0, joten ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (määritelmä 4.2.13). Määritelmän 4.3.1 nojalla tällöin jono (v_1, v_2) on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ortonormaalikanta.

b) Vektorin v koordinaatit kannassa (v_1, v_2) voidaan laskea pistetulon avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} v &= (v_1 \cdot v)v_1 + (v_2 \cdot v)v_2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) v_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) v_2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{13}} \cdot 15\right) v_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{13}} \cdot 3\right) v_2 \\ &= \frac{15\sqrt{13}}{13} v_1 + \frac{3\sqrt{13}}{13} v_2 \end{aligned}$$

Vektorin v koordinaatit kannassa (v_1, v_2) ovat siis $(15\sqrt{13}/13, 3\sqrt{13}/13)$.

2. Vektorit

$$w = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$$

ovat kohtisuorassa vektoria $v \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ vastaan, jos vektoreiden välinen pistetulo $v \cdot w$ on 0. Muodostetaan ensin vektorin v transpoosi v^t:

$$v^t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pistetulo $v \cdot w = 0$, jos matriisitulo $v^t w = 0$. Muodostetaan siis matriisiyhtälö $[v^t|0]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Tämä vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 &= t+s-r \\ x_2 &= t \in \mathbb{R} \\ x_3 &= s \in \mathbb{R} \\ x_4 &= r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisujoukko parametrisoidussa muodossa on

$$w = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vastaukseksi saadaan avaruuden $\mathbb{R}^{4\times 1}$ aliavaruus, joka on näiden vektoreiden virittämä, eli

$$Sp\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

3. a) Olkoon

$$U = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

.

Jono (v_1, v_2, v_3) on avaruuden $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ortonormaalikanta, jos matriisi U on ortogonaalimatriisi. Määritelmän 4.5.1 mukaan matriisi $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on ortogonaalinen, jos $U^t U = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Muodostetaan matriisin U transpoosi ja lasketaan matriisitulo:

$$U^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$U^tU = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nähdään, että tulomatriisi U^tU on identiteettimatriisi avaruudessa $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Määritelmän 4.5.1 nojalla U on tällöin ortogonaalinen.

b) Vektorin v koordinaatit kannassa (v_1, v_2, v_3) voidaan kaavasta

$$v = (v_1 \cdot v)v_1 + (v_2 \cdot v)v_2 + (v_3 \cdot v)v_3,$$

missä $x_1 = v_1 \cdot v, x_2 = v_2 \cdot v$ ja $x_3 = v_3 \cdot v$.

$$x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\sqrt{2} + 0 + (-2\sqrt{2}) = 0$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + (-\frac{4\sqrt{3}}{3}) + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{4\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

Vektorin v koordinaateiksi kannassa (v_1, v_2, v_3) saadaan $\left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{8\sqrt{6}}{3}\right)$.

4. a) Tarkistetaan ensin, että jono (v_1, v_2, v_3) on avaruuden V kanta. Tiedetään, että kyseiset vektorit virittävät avaruuden V, eli riittää tarkistaa, että ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Lemman 3.6.3 nojalla vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, jos yhtälön $Ax = 0$, missä $A = [v_1\ v_2\ v_3]$, ainoa ratkaisu on

$x = 0$. Lasketaan siis ensin matriisiyhtälö $[A|0]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_1 - R_4, R_2 + R_4, R_3 + R_1 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_3 - R_2, \frac{1}{3}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_4 - R_2, R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] |R_2 \leftrightarrow R_4$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nähdään, että yhtälön ainoa ratkaisu on $x = 0$, joten vektorit v_1, v_2, v_3 ovat lineaarisesti riippumattomia. Siten määritelmän 3.7.1 nojalla jono (v_1, v_2, v_3) on avaruuden V kanta.

Etsitään sitten kantavektoreiden avulla avaruuden V ortonormaali kanta Gram–Schmidt-ortonormeerausprosessia käyttäen. Valitaan

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$

ja lasketaan sitä varten vektorin v_1 pituus:

$$|v_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Vektoriksi u_1 saadaan siten

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektori u_2 saadaan kaavasta

$$u_2 = \frac{v_2 - w_2}{|v_2 - w_2|},$$

missä

$$\begin{aligned}
w_2 &= (v_2 \cdot u_1)u_1 \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
v_2 - w_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\text{ja} \quad |v_2 - w_2| &= \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Vektoriksi u_2 saadaan siten

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektori u_3 saadaan kaavasta

$$u_3 = \frac{v_3 - w_3}{|v_3 - w_3|},$$

missä

$$
\begin{aligned}
w_3 &= (v_3 \cdot u_1)u_1 + (v_3 \cdot u_2)u_2 \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) u_1 + \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) u_2 \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
v_3 - w_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\text{ja} \quad |v_3 - w_3| &= \sqrt{\frac{3}{2}^2 + \frac{3}{2}^2 + \frac{3}{2}^2 + \frac{3}{2}^2} = 3.
\end{aligned}
$$

Vektoriksi u_3 saadaan

$$
u_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Gram–Schmidt-ortonormeerausprosessi antaa avaruuden V ortonormaaliksi kannaksi jonon

$$
(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
$$

b) Vektorit (u_1, u_2, u_3) on laskettu Gram-Schmidtin ortonormeerausprosessin avulla aliavaruuden V kannasta (v_1, v_2, v_3), joten ne ovat avaruuden V kanta. Lasketaan vektorien pituudet ja pistetulot:

$$|u_1| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}^2 + 0^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$|u_2| = \sqrt{0^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}^2 + 0^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$|u_3| = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0$$

$$u_1 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} + (-\frac{\sqrt{2}}{4}) = 0$$

$$u_2 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} + (-\frac{\sqrt{2}}{4}) = 0$$

Vaihdannaisuus on pistetulon perusominaisuus, joten kaikki vektorien (u_1, u_2, u_3) pistetulot ovat 0. Koska ne myös ovat yksikkövektoreita, niin ortonormaalikannan määritelmän nojalla jono (u_1, u_2, u_3) on avaruuden V ortonormaali kanta.

5. Lemma 4.6.3 sanoo, että jos $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $T \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ovat yläkolmiomatriiseja, niin RT on yläkolmiomatriisi. Merkitään matriisin R alkioita r_{ji}, matriisin T alkioita t_{ji} ja tulomatriisin RT alkioita rt_{ji}. Lemman mukaan siis $rt_{ji} = 0$ kaikilla $j > i$.

   Koska lemma ei sano mitään niistä matriisin RT alkioista rt_{ji}, joilla $j \leq i$, näitä tapauksia ei tarvitse tarkastella. Oletetaan siis, että $j > i$. Jokainen rt_{ji} lasketaan kaavasta $\sum_{l=1}^{n} r_{jl} t_{li}$. Jos $l < j$, niin $r_{jl} = 0$, koska R on yläkomiomatriisi. Tällöin myös tulo $r_{jl} t_{li} = 0$. Jos taas $l \geq j$, niin oletuksesta seuraa, että $l > i$. Koska T on yläkolmiomatriisi, niin tällöin $t_{li} = 0$ ja siis tulo $r_{jl} t_{li} = 0$. Nähdään, että kaikilla l:n arvoilla summa $\sum_{l=1}^{n} r_{jl} t_{li}$ on 0. Väite siis pätee, eli RT on yläkolmiomatriisi.

6. Matriisin A QR-hajotelma lasketaan R:n metodilla qr(). Alla metodin palauttama olio on otettu talteen muuttujaan qr, minkä jälkeen matriisit Q ja R saadaan poimittua siitä metodeilla qr.Q(qr) ja qr.R(qr). Metodi qr.X(qr, ncol=4) palauttaa alkuperäisen matriisin A.

```
> A <- matrix(c(2, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1), nrow=3, ncol=4, byrow=T)
> A
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    2    0    2    0
[2,]    1    1    1    1
[3,]    1   -1    1   -1
> qr <- qr(A)
> qr.Q(qr)
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,] -0.8164966  0.0000000 -0.5773503
[2,] -0.4082483 -0.7071068  0.5773503
[3,] -0.4082483  0.7071068  0.5773503
> qr.R(qr)
         [,1]      [,2]          [,3]          [,4]
[1,] -2.44949  0.000000 -2.449490e+00  0.000000e+00
[2,]  0.00000 -1.414214  0.000000e+00 -1.414214e+00
[3,]  0.00000  0.000000 -3.140185e-16 -2.220446e-16
> qr.X(qr, ncol=4)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    2    0    2    0
[2,]    1    1    1    1
[3,]    1   -1    1   -1
```