Lineaarialgebra ja matriisilaskenta, syksy 2020

Harjoitus 3

1. a) Jono (v_1, v_2, v_3) on vapaa, jos yhtälön $Ax = 0$, missä $A = [v_1 v_2 v_3]$, ainoa ratkaisu on $x = 0$. Muodostetaan yhtälö $[A|0]$ ja ratkaistaan se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_2 - R_1, R_3 - R_4 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_2 - R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tämä vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ainoa ratkaisu on siis nollavektori, joten jono on vapaa.

b) Vektori v voidaan kirjoittaa vektoreiden v_1, v_2, v_3 lineaarikombinaationa, jos on olemassa sellaiset luvut $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, että $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$. Muodostetaan matriisiyhtälö $[v_1 v_2 v_3 | v]$ ja ratkaistaan se samoilla operaatioilla kuin yllä:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] |R_2 - R_1, R_3 - R_4 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] |R_2 - R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] |R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] |R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$4\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

eli

$$x=\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}$$

Vektori v voidaan siis kirjoittaa vektoreiden v_1, v_2, v_3 avulla muodossa $v = 4v_1 + (-2)v_2 + 3v_3$.

2. Tapa 1: Osoitetaan, että jokainen $v \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden (v_1, v_2, v_3, v_4) lineaarikombinaationa. Valitaan

$$v=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$$

ja muodostetaan matriisiyhtälö $[v_1\ v_2\ v_3\ v_4 \mid v]$:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & a_1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & a_4
\end{array}\right] |R_2 - R_1
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & a_1 \\
0 & 1 & 0 & -2 & -a_1 + a_2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & a_4
\end{array}\right] |R_3 - R_2
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & a_1 \\
0 & 1 & 0 & -2 & -a_1 + a_2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & a_1 - a_2 + a_3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & a_4
\end{array}\right] |R_4 - R_3
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & a_1 \\
0 & 1 & 0 & -2 & -a_1 + a_2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & a_1 - a_2 + a_3 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 - a_3 + a_4
\end{array}\right] |(-1)R_4
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & a_1 \\
0 & 1 & 0 & -2 & -a_1 + a_2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & a_1 - a_2 + a_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & a_1 - a_2 + a_3 - a_4
\end{array}\right] |R_1 - 2R_4, R_2 + 2R_4, R_3 - 2R_4
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & a_1 - a_2 + 2a_3 - 2a_4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -a_1 + a_2 - a_3 + 2a_4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & a_1 - a_2 + a_3 - a_4
\end{array}\right]
$$

Koska supistetussa porrasmuodossa ei näy epätosia yhtälöitä, yhtälöryhmälle $[v_1\ v_2\ v_3\ v_4 \mid v]$ on olemassa ratkaisu. Lisäksi supistetussa porrasmuodossa ei ole yhtään vapaata muuttujaa, eli ratkaisu on yksikäsitteinen. Mikä tahansa $v \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ siis voidaan kirjoittaa vektoreiden (v_1, v_2, v_3, v_4) lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla, joten nämä vektorit muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^{4\times 1}$ kannan.

Tapa 2: Poimimalla kohdassa 1 viimeisen matriisiyhtälön oikean puolen kertoimet saadaan A:n käänteismatriisi B:

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 2 & -2 & 2 \\
1 & -1 & 2 & -2 \\
-1 & 1 & -1 & 2 \\
1 & -1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

Tarkastetaan, että $AB = I$ ja $BA = I$:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Molemmat matriisitulot ovat identiteettimatriiseja, joten B on A:n käänteismatriisi. Koska A:n käänteismatriisi on määritelty, A on kääntyvä. Lauseen 3.10.1 nojalla tällöin matriisin A sarakkeet v_1, v_2, v_3, v_4 muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^{4\times 1}$ kannan.

3. a) Etsitään kanta matriisin A sarakeavaruudelle muodostamalla ensin matriisin supistettu porrasmuoto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} |\frac{1}{2}R_1 \qquad \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} |R_2 - R_1$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} |R_3 - R_2 \qquad \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merkitään matriisin A supistettua porrasmuotoa $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Matriisin B sidotut muuttujat ovat sarakkeissa 1 ja 2, joten nämä kaksi vektoria virittävät matriisin B sarakeavaruuden. Lauseen 3.8.5 nojalla tällöin indekseiltään vastaavat matriisin A sarakkeet (merkitään niitä v_1 ja v_2) virittävät A:n sarakeavaruuden, eli

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Sp}(v_1, v_2) = \mathrm{Sp}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Tarkastetaan vielä, että vektorit v_1, v_2 ovat lineaarisesti riippumattomat, eli että yhtälön

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ainoa ratkaisu on $x = 0$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} |R_2 - R_3 \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} |R_1 - 2R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} |R_1 \leftrightarrow R_2, R_2 \leftrightarrow R_3 \qquad \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nähdään, että yhtälön ainoa ratkaisu on $x = 0$, eli vektorit v_1, v_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Lopuksi tarkastetaan, että alkuperäisen matriisin A kaksi muuta vektoria v_3, v_4 ovat vektoreiden v_1, v_2 lineaarikombinaatioita:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] |\text{samat operaatiot kuin yllä} \qquad \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] |\text{samat operaatiot kuin yllä} \qquad \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Molemmat vektorit voidaan kirjoittaa virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa. Vektorit (v_1, v_2) siis ovat matriisin A sarakeavaruuden kanta.

b) Etsitään kanta matriisin A nolla-avaruudelle. Yllä ratkaistiin A:n supistettu porrasmuoto B, jossa oli kaksi vapaata ja kaksi sidottua muuttujaa. Annetaan vapaille muuttujille arvot $t, s \in \mathbb{R}$ ja muodostetaan B:n ratkaisujoukko x parametrisoidussa muodossa:

$$x = (w_1, w_2) = t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nämä vektorit virittävät B:n nolla-avaruuden. Lisäksi ne ovat lineaarisesti riippumattomia: ei ole olemassa nollasta poikkeavaa kerrointa, jolla vektorin w_1 voisi ilmaista vektorin w_2 avulla, koska vektorin w_1 neljäs komponentti on nolla, mutta vektorin w_1 vastaava komponentti on erisuuri kuin nolla. Vastaavasti vektoria w_2 ei voi ilmaista vektorin w_1 avulla, koska sen kolmas komponentti on nolla, mutta vastaava komponentti w_1:ssä on erisuuri kuin nolla. Koska (w_1, w_2) on vapaa virittäjäjono, se on kanta.

Lauseen 3.9.1 nojalla $\text{Null}(B) = \text{Null}(A)$, joten samat vektorit muodostavat matriisin A nolla-avaruuden kannan.

4. Osoitetaan, että yhtälön $Ax = b$ ratkaisujoukko

$$R = \{x \in \mathbb{R}^{n \times 1} = Ax = b\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^{n\times 1}$ aliavaruus, jos ja vain jos $b = 0$.

"jos": Oletetaan ensin, että $R \subset \mathbb{R}^{n\times 1}$ on aliavaruus. Määritelmän 3.2.1 nojalla tällöin $x = 0 \in R$. Nyt $Ax = A0 = b$, eli $b = 0$.

"vain jos": Oletetaan sitten, että $b = 0$. Tällöin saadaan yhtälö $Ax = 0$, joka on yhtälöä $Ax = b$ vastaava homogeeninen yhtälöryhmä. Lemman 3.1.2 nojalla mille tahansa $y, y' \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, joilla $Ay = 0$ ja $Ay' = 0$ (eli $y, y' \in R$), pätee, että kaikilla $a, c \in \mathbb{R}$, $ay + cy' \in R$. Lisäksi oletuksen mukaan $b = 0$, eli myös $x = 0 \in R$. Siis R on avaruuden $\mathbb{R}^{n\times 1}$ aliavaruus.

5. Olkoot siis $v = \{v_1, \dots, v_k\} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ avaruuden $\mathbb{R}^{n\times 1}$ vektoreita ja $w = \{w_1, \dots, w_k\} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ niiden lineaarikombinaatioita. Vektorit w voidaan siis kirjoittaa muodossa $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$ joillakin $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Valitaan sitten jotkin reaaliluvut $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ ja tarkastellaan vektoreiden w lineaarikombinaatioita:

$$\begin{aligned} b_1w_1 + \dots b_kw_k &= b_1(a_1v_1) + \dots b_k(a_kv_k) \\ &= (b_1a_1)v_1 + \cdots + (b_ka_k)v_k \end{aligned}$$

Nähdään, että myös nämä vektorit ovat vektoreiden v lineaarikombinaatioita.

6. Lause 3.10.1 sanoo, että jos matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on kääntyvä, A:n sarakkeet muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^{n\times 1}$ kannan. Muodostetaan annetuista vektoreista matriisi A:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

Lasketaan sitten R:n funktiolla solve(), onko A kääntyvä.

```
> A
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    2   -2    1    0   -5    0
[2,]    0    9   -3   -1    7    4
[3,]    0    3    5    0    5   -7
[4,]   -2    6    0   -7   -1    0
[5,]   -1    8    0   -5    1   -3
[6,]   -4    4   -2    0   10    0
> solve(A)
Error in solve.default(A) :
  Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[6,6] = 0
```

Osoittautuu, että A ei ole kääntyvä, joten lauseen 3.10.1 nojalla vektorijono $(v_1, \dots, v_6)$ ei muodosta avaruuden $\mathbb{R}^{6\times 1}$ kantaa.