Lineaarialgebra ja matriisilaskenta, syksy 2020

Harjoitus 1

1. Tulomatriisi MN voidaan laskea, jos matriisissa M on yhtä monta saraketta kuin matriisissa N on rivejä. Siten matriiseista A, B ja C voidaan laskea tulomatriisit AA, AC, BA, BC ja CB:

MN	A	B	C
A	x		x
B	x		x
C		x	

   Lasketaan nämä matriisitulot:

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Muodostetaan yhtälöryhmä $[A \mid b\,]$ ja ratkaistaan se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] |R_1 - 2R_2$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

   Tämä vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & = 5t + 6 \\ x_2 & = -3t - 2 \\ x_3 & = t \end{cases}$$

   missä $t \in \mathbb{R}$. Ratkaisujoukko on siis
   $R = \{x \in \mathbb{R}^{3x1} \mid x = (6, -2, 0) + t(5, -3, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$.

3. a) M on alkeismatriisi, joka on saatu yksikkömatriisista $I \in \mathbb{R}^{4x4}$ vaihtamalla rivien 2 ja 3 paikkaa, eli se on alkeismatriisi S^{23}. N on alkeismatriisi, joka on saatu yksikkömatriisista $I \in \mathbb{R}^{4x4}$ vähentämällä rivistä neljä kahdesti rivi 3, eli se on alkeismatriisien tulo $D_{3,-1/2}(I + E^{43})D_{3,-2}$.

b) Lasketaan matriisitulo NA:

$$NA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Havaitaan, että samaan lopputulokseen päästään tekemällä matriisille A yksi alkeisrivitoimitus:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} |R_4 - 2R_3 \quad \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lasketaan sitten matriisitulo MNA:

$$MNA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Havaitaan, että samaan lopputulokseen päästään tekemällä matriisille A kaksi alkeisrivitoimitusta: yllä esitetty rivin kolme kertominen vakiolla -2 ja lisääminen riviin 4 (tai lyhyemmin $R4 - 3R2$), sekä rivien 2 ja 3 vaihtaminen päittäin.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} |R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriisin A kertominen annetuilla alkeismatriiseilla tuottaa siis saman matriisin kuin alkeismatriiseja vastaavien alkeisrivitoimitusten tekeminen.

4. Muodostetaan yhtälöryhmä $[A \mid I\,]$ ja ratkaistaan se:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] |R_1 - 2R_3 \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] |R_2 - 5R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -5 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] |\frac{1}{7} \cdot R_2 \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{10}{7} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] |R_1 + R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{10}{7} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] |R_3 - R_2 \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{10}{7} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right] |R_3 \leftrightarrow R_2, R_2 \leftrightarrow R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{10}{7} \end{array}\right]$$

Matriisin A käänteismatriisiksi saadaan siis

$$B = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

Varmistetaan vielä, että $B = A^{-1}$ laskemalla tulo AB, jonka pitäisi olla yksikkömatriisi $I \in \mathbb{R}^{3x3}$:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{10}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriisitulo AB on yksikkömatriisi, joten $B = A^{-1}$.

5. Kääntyvyyslauseen kaikki neljä ehtoa ovat joko tosia yhtä aikaa tai epätosia yhtä aikaa. Tarkastellaan esimerkiksi ehtoa 3: jos osoittautuu, että yhtälöryhmän $[A \mid 0]$ supistettu porrasmuoto on $[I \mid 0]$, niin A on kääntyvä. Muodostetaan siis yhtälöryhmän

$[A \mid 0]$ supistettu porrasmuoto:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] |\frac{1}{2}R_1, \frac{1}{2}R_3 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_2 - R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_4 - R_1 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] |R_1 - \frac{3}{2}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] |R_2 + \frac{5}{2}R_3 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] |R_4 + \frac{3}{2}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Havaitaan, että matriisin A supistettu porrasmuoto ei ole muotoa $[I \mid 0]$, koska siinä on nollarivi eikä neljännessä sarakkeessa ole johtavaa alkiota. Kääntyvyyslauseen nojalla tällöin matriisi A ei ole kääntyvä.

6. a) R-ohjelmistolla saadaan tulomatriisit

$$AB = \begin{bmatrix} -8 & 15 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad BA = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 5 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

b) R:n funktiolla solve() saa laskettua käänteismatriisin, jos sellainen on olemassa. Tämän funktion perusteella sekä AB että BA ovat kääntyviä.