1、 $N(t) = N(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)}$

$$\frac{d}{dt}N(t) = N(t_0) \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{-k(t-t_0)}\right)$$

$$= N(t_0) \cdot \frac{d\, e^{-k(t-t_0)}}{d[-k(t-t_0)]} \cdot \frac{d[-k(t-t_0)]}{dt}$$

$$= N(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)} \cdot (-k)$$

$$= -k \cdot N(t)$$

$$\therefore \frac{dN(t)}{dt} = -k \cdot N(t)$$

2、 $N(t) = N(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)}$ $k = \frac{2}{5700}$

$0.75 = 1 \cdot e^{-2/5700 \cdot \Delta t_1} \rightarrow \Delta t_1 = 820\ yr$

$0.77 = 1 \cdot e^{-2/5700 \cdot \Delta t_2} \rightarrow \Delta t_2 = 745\ yr$

$\rightarrow$ Ans: AD 1174 - 1249

3、① $N(t) = N(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)}$

$N(t) = 1 \cdot e^{-2/5700\,(2018-500)}$

$N(t) = 0.587$ $\longrightarrow$ Ans: 58.7 %

② $0.916 = 1 \cdot e^{-2/5700\,(1976-t_0)}$

$t_0 = 1726$ $\longrightarrow$ Ans: AD 1726

4、 $N(t) = N(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)}$

$0.855 = 1 \cdot e^{-2/5700 \cdot (2018-t_0)}$

$t_0 = 1572$ $\longrightarrow$ Ans: AD 1572

5. Accuracy of the Radiocarbon dating

碳十四定年法的原理是：生物體在活著的時候會因呼吸、進食等不斷的從外界攝入^{14}C，最終體內^{14}C與^{12}C的比值會達到與環境一致，當生物體死亡時，^{14}C的攝入停止，之後因遺體中^{14}C的衰變而使遺體中的^{14}C與^{12}C的比值發生變化，通過測定^{14}C與^{12}C的比值就可以測定該生物的死亡年代。

碳定年法為由 Willard Frank Libby 帶領的隊伍發展的。原本人們用的^{14}C半衰期是5568±30年，為 Libby half-life。其後量度出一個更準確的 Cambridge half-life 為5730±40年。

不過因為碳十四的半衰期比較短，碳十四定年法的應用局限於5到6萬年。若是大於這個時間以上的生物體，則可能會造成很大的誤差，與現實不符。

放射性碳實驗報告所得出之年代並無法直接反映樣本的生成年代。由於現實環境中宇宙射線的通量並不是一個恆定的值，因此每一個時期內大氣中的^{14}C含量並不固定。因此要讓測定年代能準確的對應到樣本的可能生成年代，必須對測定年代使用校準曲線進行校準，以推測其可能形成之時間。^{14}C校準曲線是由已知年代之樣本與測定年代相對應而建立的。對於陸地樣本而言，目前所通用的校準年代係透過現生與化石樹木之樹輪測定而校準的。對於海洋樣本而言，由於洋流作用之關係，^{14}C的含量平衡速率較慢，因此校準年代遠較陸地樣本困難。現今海洋樣本的校正曲線係透過已知年代的現生與化石珊瑚測定而成，另外在不同的地方另需要考慮洋流作用與區域環境的額外影響。

另外當過去的年代發生較嚴重的氣候異常，抑或是較大的地質變動，都可能會對我們的 input，也就是我們所測量的^{14}C所佔的比例造成影響，可能在過去的歷史中^{14}C並不如我們預測的，因此計算出的年代可能會與實際值不同。

參考資料：維基百科

6、 $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$
(yr)

$\frac{3.3 \text{ hr}}{365 \times 24} = \frac{\ln 2}{k} \rightarrow k = \ln 2 \times \frac{365 \times 24}{3.3}$
days hr

$k = 1839.99$

$N(t) = N(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)}$

$0.90 = 1 \cdot e^{-1839.99(\Delta t)}$

$\Delta t = 0.00005726 \text{ yr}$

$= 0.5 \text{ hr}$ $\longrightarrow$ Ans: 0.5 hr

7. Doctrine of Malthus

Malthus 早期的著作是解決他那個時代經濟和政治問題的小冊子。他反對18世紀的歐洲社會人口不斷增加、環境不斷改善的觀點，他認為如此會有人口過度增長的危險性。

Malthus 在 1798 年的著作《An Essay on the Principle of Population》中，研究了人口增長與資源之間的關係。他在人口增長理論中寫到，人口增長將呈幾何級數增長，然而另一方面，糧食產量在僅以算術級數增加，若不加以控制，人口可能會超過他們的資源。

根據 Malthus 的說法，有兩類檢查方法可以降低人口的增長率。第一種為 Preventive checks，讓人們採取自願行動，以避免總人口數過度增加，例如人們應在有足夠能力支撐一個家庭時，再結婚生子。第二種為 Positive checks，這種方法可能會縮短平均壽命，例如疾病，戰爭，飢荒以及貧困的生活和工作環境，這些終將導致 Malthusian catastrophe (Malthusian crisis)，這是人口被迫回歸基本生存的過程。19世紀的愛爾蘭馬鈴薯飢荒被認為是 Malthusian catastrophe 的典型例子，除了處理與英格蘭的政治和經濟關係以及土地分割之外，快速增長的愛爾蘭人口也耗盡了他們的食物。

Doctrine of Malthus 後來也被應用於生態中各種族群增長的模型。Darwin 這段文字中，他提出生物為了讓族群生存，無可避免地會持續增加數量。然而，在生物族群增長的過程中，一定要遇到一些困境，否則物種數量隨幾何級數增長，很快就會達到非常巨大的數字，導致環境無法負荷，就如同 Malthus 當初在描述 18 世紀的人口增長一般。若物種數量超越環境負荷，則該生物則可能會出現種內或種間競爭。而食物資源往往就是生物是否可以生存的最大限制，除此之外，是否為他種動物的獵物也是決定物種數量的關鍵。

回頭看目前的人類社會，雖然 Malthus 當時曾預期因人口呈幾何級數增加，而糧食則為算數級數增加，所以將會發生飢饉、貧窮、疾病、死亡與社會的解體。但事實上，目前人類透過兩大方向正在努力嘗試避免此悲劇發生。第一部分，關於人口數，有些國家透過倡導節育的方式，希望可降低過高的人口增長率。第二部分，關於生存資源，我認為可以再分為食物資源及生存空間。經生物學及育種學家等的努力，人類嘗試生產出最大的食物資源，且在太空科技的發展下，也積極探索其他星球，嘗試開發更多生存空間。現代科技的進步，似乎幫助了我們避免了 Malthus 當初預測生存資源僅能以算術級數增加的問題，不過究竟現在人類為創造的這些資源所造成的污染等問題，是否會在未來造成其他問題也是我們應持續關注的。

參考資料：

Cheyenne, O. (2016). Malthusian Theory of Population Growth: Definition & Overview. [online] Available at: https://study.com/academy/lesson/malthusian-theory-of-population-growth-definition-lesson-quiz.html [Accessed 23 Sep. 2018].

α 族群繁殖速度

8、 $\frac{dP}{dt} = \alpha P\left(1-\frac{P}{C}\right)$ ← C 環境最大負荷，即 Darwin 所說，當環境無法負荷時，將會有機制使族群數量減緩增加

(令 $\frac{P}{C} = x \xrightarrow{\text{stable}} 1 \to \therefore P = C$

$\alpha \cdot dt = d\tau$)

$$\frac{dP/C}{dt} = \alpha \frac{P}{C}\left(1-\frac{P}{C}\right)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x) = x - x^2$$ logistic equation