Satisfacibilidad de Fórmulas en 2CNF

Blai Bonet

June 21, 2010

1 Forma Normal Conjuntiva (CNF)

Una fórmula proposicional está en CNF si es una conjunción de disjunciones; e.g. $\varphi = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)$. Cada disjunción de la fórmula se llama *cláusula*. Una fórmula en CNF se puede representar con un conjunto de subconjuntos de literales que denotan la cláusulas de la fórmula; e.g. la fórmula φ se denota por $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg p\}, \{p, r\}, \{\neg r, p\}\}$. Una fórmula está en kCNF si cada cláusula es de tamaño k; e.g., $var\phi$ está en 2CNF pero $\psi = \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, r\}, \{\neg r\}\}$ no esta en kCNF para ningún k porque tiene clásulas de distinto tamaño. Si todas las cláusulas de una fórmula son de tamaño a lo sumo k, diremos que la fórmula está en $\leq$-kCNF.

2 Satisfabilidad de Fórmulas en 2CNF

Uno puede chequear la satisfabilidad de una fórmula 2CNF de manera eficiente (al día de hoy no se conoce ninguún algoritmo eficiente para chequear la satisfabilidad de fórmulas en kCNF, $k > 2$, y se cree que no existe dicho algoritmo).

El algoritmo de satisfabilidad para 2CNF involucra el *grafo de implicaciones* de la fórmula que se define a continuación. Sea $\varphi = \{C_1, \ldots, C_n\}$ una fórmula en 2CNF con n cláusulas sobre los símbolos proposicionales $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ donde cada clásula C_i es de la forma $\{\ell, \ell'\}$ donde ℓ y ℓ' son dos literales sobre P. Se define el grafo de implicación $G(\varphi) = (V, E)$ de la siguiente forma: $V = P \cup \{\neg p : p \in P\}$, y existe una arista $(\ell, \ell') \in E$ si y sólo si existe una cláusula C_i de la forma $\{\neg\ell, \ell'\}$ (note que cada cláusula en φ define exactamente dos aristas en $G(\varphi)$).

Teorema 1 *Sea φ una fórmula en 2CNF. φ es satisfacible si y sólo si no existe una componente fuertemente conectada en $G(\varphi)$ que contenga dos literales complementarios.*[1].

Por ejemplo, el grafo de implicación para la fórmula φ es mostrado en la Fig. 1. Este grafo tiene una única componente fuertemente conectada con todos los vértices. Por lo tanto, la fórmula φ no es satisfacible.

3 De $\leq$-2CNF a 2CNF

El algoritmo sugerido por el Teorema 1 solo puede aplicarse a fórmulas en 2CNF. Si la fórmula está en $\leq$-2CNF, ella debe primero convertirse a un equivalente en 2CNF antes de aplicar el algoritmo.

Cosidere una fórmula en $\leq$-2CNF que no está en 2CNF; e.g., ψ. Dicha fórmula contiene cláusulas de tamaño 2 y tamaño 1 (cláusulas de tamaño 0 no se toman en cuenta ya que ellas representan la constante lógica $\mathbf{F}$). Para que la fórmula sea satisfacible, es necesario que todas las cláusulas de tamaño 1 (llamadas cláusulas unitarias) sean satisfechas lo que implica que ciertas variables deben tomar valor fijo. Por ejemplo, para que ψ sea satisfacible es necesario satisfacer la cláusula unitaria $\{\neg r\}$ lo que implica que $r = \mathbf{F}$.

Para convertir de $\leq$-2CNF a CNF, deben tomarse todas las clásulas unitarias, fijar los valores implicados por dichas clausulas, simplificar la fórmula con estos valores y repetir hasta que no hayan más cláusulas unitarias. Es necesario repetir, ya que la simplificación de la fórmula puede generar nuevas cláusulas unitarias.

[1]Dos literales ℓ y ℓ' son complementarios ssi ℓ es el complemento lógico (negación) de ℓ'.

$$
\begin{tikzcd}
r \arrow[r] & p \arrow[r] \arrow[dr] & q \arrow[dl] \\
\neg r \arrow[ur] & \neg p \arrow[l] \arrow[ul] & \neg q \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Figure 1: Grafo de implicación $G(\varphi)$.

Por ejemplo, ψ tiene una única cláusula unitaria $\{\neg r\}$. Al hacer la asignación $\{r = \mathbf{F}\}$ y simplicar, nos queda la fórmula $\psi' = \{\{\neg p, \neg q\}, \{p\}\}$. Esto porque la cláusula $\{\neg r\}$ es satisfecha por la asignación y por lo tanto se elimina, y la cláusula $\{p, r\}$ se simplifica en la cláusula $\{p\}$ bajo la asignación $\{r = \mathbf{F}\}$. Ahora se ha generado una nueva clásula unitaria que implica una nueva asignación $p = \mathbf{T}$. Entonces, extendemos la asignación a $\{r = \mathbf{F}, p = \mathbf{T}\}$ y simplificamos nuevamente para obtener $\psi'' = \{\{\neg q\}\}$. Al procesar la nueva cláusula unitaria $\{\{\neg q\}\}$, se obtiene la asignación $\{r = \mathbf{F}, p = \mathbf{T}, q = \mathbf{F}\}$ y la fómula $\psi''' = \emptyset$. En este momento, hemos obtenido una fórmula ψ''' en 2CNF (porque no tiene cláusulas) y una asignación $\{r = \mathbf{F}, p = \mathbf{T}, q = \mathbf{F}\}$. Si la asignación parcial resultante es contradictoria, la fórmula original no es satisfacible. Sino, debemos entonces construir el grafo de implicación y utilizar el Teorema 1 para chequear la satisfacibilidad de la fórmula.