

PROPAGACIÓN LENTA DE DISCONTINUIDADES EN AMBIENTES DE HIDRODINÁMICA Y RADIACIÓN EN ESFERAS RELATIVISTAS

LUDWIN FABIÁN CASTAÑEDA GODOY

PROPUESTA PARA OPTAR EL TÍTULO DE MAGÍSTER EN FÍSICA

DIRECTOR

**LUIS ALBERTO NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO MARTÍNEZ
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

CODIRECTOR

**JUSTO HERNÁN OSPINO ZUÑIGA
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
INSTITUTO UNIVERSITARIO DE FÍSICA FUNDAMENTAL Y MATEMÁTICAS
SALAMANCA ESPAÑA
2020**

Resumen

La radiación emitida por los eventos explosivos estelares ha sido analizada desde hace décadas, con el fin de comprender el efecto que esta ejerce sobre la materia. Estos eventos explosivos pueden ser descritos mediante una superficie de discontinuidad que se propaga y a su vez separa dos regiones diferentes del espacio-tiempo. Si la distribución material donde ocurre la explosión se modela utilizando la relatividad general, se pueden producir cuatro diferentes superficies de discontinuidad. Estas superficies se clasifican como fronteras, ondas de choque, capas y choques impulsivos.

En este trabajo se propone identificar la influencia de la radiación en la dinámica de las superficies de discontinuidad: fronteras, ondas de choque, capas y choques impulsivos, para una esfera anisótropa en relatividad general. Además, cada región separada por la superficie de discontinuidad tendrá diferentes ecuaciones de estado y fases anisótropas. La evolución de la distribución material se supondrá dentro de la aproximación cuasiestática. Para modelar el esquema de transporte de la radiación se introduce el factor de flujo, el factor variable de Eddington y diferentes relaciones de clausura entre estos factores. De este modo, la radiación puede ser descrita en tres escenarios diferentes: escape libre, difusión y escenarios mas generales. Así, se espera hallar en este proyecto de investigación la influencia de los tres escenarios de radiación sobre la evolución de las fronteras, ondas de choque, capas y choques impulsivos para una esfera anisótropa en relatividad general.

Introducción

El análisis de las ondas de choque en fluidos radiantes para la descripción de escenarios astrofísicos ha sido de gran relevancia para la hidrodinámica radiante durante las últimas décadas. Esto es debido a que las ondas de choque describen algunos fenómenos explosivos estelares como los jets relativistas, las explosiones de supernovas y los choques de calentamiento en la atmósfera solar. Además de estos escenarios astrofísicos, los choques describen algunos fenómenos naturales: las explosiones de volcanes o los truenos generados durante una tormenta. Las ondas de choques también pueden ser originadas por escenarios artificiales, tales como explosiones de bombas nucleares o las ondas generadas por un avión supersónico. Una vez las ondas de choque son formadas, se propagan supersónicamente a través del fluido generando discontinuidades en las variables físicas del fluido.

Los fenómenos explosivos estelares deben ser modelados por fluidos radiantes, con el fin de describir algunos escenarios astrofísicos mucho mas realistas. Para describir el comportamiento de estos fluidos se necesita entender como la radiación transporta energía, momentum, presión y flujo de energía a través del medio. Por lo tanto, la solución de la ecuación de transferencia que determina como la radiación se propaga a través de la materia, dependerá de la comprensión de la microfísica del sistema. Los materiales opacos, como el interior de las estrellas¹, presentan una gran interacción con la radiación, es decir, los fotones se encuentran atrapados en esta región. Para estos materiales el camino libre medio del fotón es muy pequeño comparado con la longitud característica en el material y la radiación es casi isotrópica [1]. En los materiales opacos, la radiación puede ser aproximada como un proceso de difusión y el fluido se encuentra en un equilibrio térmico local.

En los materiales transparentes (e.g la atmósfera de una estrella²) la radiación no interactúa con la materia y los fotones escapan libremente al espacio. Para los materiales transparentes el camino libre medio del fotón es muy grande comparado la longitud característica de la distribución material y la radiación no esta determinada por las condiciones locales del material. En los materiales transparentes, la radiación puede ser aproximada como un proceso de escape libre y el fluido no se encuentra en un equilibrio térmico.

Los materiales intermedios son todos aquellos materiales que sus características se encuentran entre las de los materiales opacos y transparentes, es decir, que la radiación en estos materiales no se encuentra entre la aproximación de escape libre y difusión. Algunos escenarios astrofísicos pueden ser modelados mediante materiales intermedios³, ya que la radiación no está descrita ni como un proceso de difusión ni escape libre.

Las ondas de choque ocurridas en los fenómenos explosivos estelares radiantes pueden ser examinados bajo la relatividad especial, debido a que la velocidad de la onda es una fracción no despreciable de la velocidad de la luz. Estas ondas de choques han sido analizados por diversos autores, comenzando con *Zeldovich* en 1957 [2] y seguido por *Raizer* en ese mismo año [3]. Después

¹El interior de las estrellas puede ser considerado como un material opaco debido a la alta densidad que alcanza la materia, lo cual hace que la radiación permanezca atrapada en esta región.

²La atmósfera de una estrella puede ser considerada como un material transparente debido a que es una zona donde predomina la radiación, de este modo no hay materia con la cual interaccione la radiación.

³Un posible escenario donde la radiación no se encuentra bajo la aproximación entre difusión y escape libre es la región entre el núcleo y la atmósfera de una estrella.

de la investigación realizada por Zeldovich y Raizer, numerosos investigadores han investigado el efecto de la radiación sobre las ondas de choque [4–9].

Las ondas de choques pueden ser descritas como una superficie de discontinuidad que separa dos regiones distintas del espacio-tiempo. Para acoplar estas dos regiones a través de la superficie de acoplamiento, es necesario que se cumplan unas condiciones sobre las variables físicas. El propósito de estas condiciones es evitar la singularidad de las variables físicas a través de la superficie de acoplamiento [10]. La primera persona que halló las condiciones de acoplamiento para una onda de choque relativista fue A.H. Taub [11]. Taub propuso proyectar el tensor de energía-impulso⁴ sobre un vector normal a la superficie de acoplamiento, generalizando así las condiciones de Rankine-Hugoniot⁵ para las ondas de choque relativistas. Las condiciones de Rankine-Hugoniot relativistas han sido también aplicadas a algunos fenómenos astrofísicos violentos: explosiones de supernovas [12], discos de acreción en agujeros negros [13], implosión de estrellas masivas [14] y ondas de combustión relativistas [15].

Además de la radiación emitida por los fenómenos explosivos, la presencia de anisotropía en la presión parece jugar un rol muy importante en la evolución de dichos fenómenos. Recientemente se ha descubierto que para ciertas distribuciones de fluidos radiantes inicialmente isotrópicas, la configuración abandona tal condición generando una anisotropía en la presión [16]. Por lo tanto para modelar fenómenos explosivos estelares mas realistas se debe imponer la condición de anisotropía en la presión sobre los fluidos radiantes.

Sin embargo, las ondas de choque en relatividad general son un caso particular de una superficie de discontinuidad mas general denominado *choque impulsivo*. La presencia de masa en los choques impulsivos propone un escenario mas general donde se pueden analizar algunos fenómenos estelares y cosmológicos. Así, las superficies de discontinuidad se pueden clasificar de dos maneras, dependiendo de si hay o no continuidad tanto en la masa como en la velocidad a través de la superficie de discontinuidad. Existen cuatro diferentes superficies de discontinuidad: choques impulsivos, capas, ondas de choque y fronteras. La capa es una superficie de discontinuidad que posee masa, donde la velocidad de esta superficie es igual a la velocidad del fluido en la región anterior y posterior de la capa. La frontera es un caso particular de las capas, debido a que esta superficie no posee masa.

Los choques impulsivos pueden modelar la aparición de burbujas y vacíos en modelos cosmológicos inflacionarios en el universo temprano [17]. Este modelo de inflación temprana del universo consiste en la nuclearización de unas burbujas en las perturbaciones inflacionarias primordiales. Las paredes de estas burbujas se expanden a una velocidad relativista, dividiendo el espacio-tiempo en dos regiones diferentes. El interior de la burbuja puede estar llena de un verdadero vacío mientras que la región exterior permanece aún en un falso vacío [18, 19]. El proceso inflacionario deberá ser seguido de una escenario de (pre)calentamiento donde la radiación llegue a ser dominante antes de iniciar la núcleo-síntesis del Big Bang. La mayoría de la energía emitida en el proceso de (pre)calentamiento es transferida en forma de fotones [20].

⁴El tensor de energía-impulso es un tensor que describe el flujo de energía, la densidad de momentum, el flujo de momentum, la presión, la cizalladura y/o estrés; así como la densidad, la presión y el flujo de radiación, en el espacio-tiempo.

⁵Las condiciones de Rankine-Hugoniot fueron propuestas por Rankine, W.J.M en 1870 y Hugoniot H. en 1887, para describir las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las variables físicas de dos fluidos Newtonianos que están separados por una onda de choque.

Los choques impulsivos también pueden modelar la evolución de estrellas solitónicas⁶ no topológicas [21] para fluidos radiantes. La región interior de la estrella está compuesta por un solitón escalar y la región exterior esta compuesta por un gas de Fermi altamente relativista [22]. La superficie de acoplamiento que separa la región interior y exterior pueden modelarse mediante un choque impulsivo⁷.

Las capas han sido propuestas para analizar superficies de discontinuidad que posean masa [23], donde la velocidad de propagación de estas superficies es igual a la velocidad del fluido. Al igual que los choques impulsivos, las capas también pueden modelar la aparición de burbujas en modelos cosmológicos que describan el universo temprano [24].

Algunos investigadores han propuesto métodos para examinar numéricamente las ondas de choque para ambientes de radiación entre escape libre y difusión en el caso relativista [25,26]. Incluso se han resuelto numéricamente la ecuación de transferencia radiante relativista completa [27,28].

Sin embargo la ecuación de transporte de radiación exacta para el régimen intermedio entre escape libre y difusión es muy difícil de resolver analíticamente. Esto es debido a la dificultad para entender los mecanismos complejos por los cuales se disipa la energía en la emisión de radiación y/o neutrinos. Además, también existe la dificultad de hallar una solución exacta a la ecuación de transporte de radiación para un medio intermedio.

Para sortear este problema de hallar una solución exacta a la ecuación de transporte, se han propuesto algunos métodos aproximados para describir la interacción de la radiación con la materia. Uno de estos métodos consiste en modelar la radiación utilizando los factores de Eddington y las relaciones de clausura entre ellos. Hay una gran cantidad de dichas relaciones de clausura reportadas en la literatura⁸, dando una amplia variedad de esquemas intermedios de radiación [31–33].

En este documento se expone el problema de establecer la influencia de la radiación sobre las superficies de discontinuidad: frontera, ondas de choque, capa y choque impulsivo en una esfera anisótropa en relatividad general. Además, se hace un breve resumen del estado del arte referente al problema abordado y se explica la metodología a seguir para lograr los objetivos propuestos. Por último se exponen los tiempos planteados para el cumplimiento de la investigación y los recursos humanos utilizados.

⁶Las estrellas solitónicas son un tipo de estrellas hipotéticas de gran masa, donde la materia en el núcleo se encuentra en un estado cuántico coherente de campos con espín 0 ó 1/2.

⁷En la superficie donde se delimita el solitón se crea una tensión superficial que genera una capa superficial. Esta capa puede modelarse mediante un choque impulsivo

⁸Algunas de estas relaciones de clausura son simplemente relaciones ad hoc que interpolan la radiación entre un proceso de difusión y escape libre. Otras han sido motivadas a partir de los cálculos de transporte directo. Esta discrepancia en la forma de proponer una relación de clausura única, genera una gran cantidad de estas relaciones reportadas en la literatura. Una discusión detallada sobre este problema de las diferentes relaciones de clausura puede ser encontrado en [29,30].

Pregunta de investigación

¿Cómo influyen las diferentes aproximaciones de la radiación sobre la dinámica de las superficies de discontinuidad: choque impulsivo, capa, onda de choque y frontera para una esfera anisótropa en relatividad general?

Planteamiento del problema

El objetivo de este trabajo es identificar la influencia que ejerce la radiación sobre la evolución de las fronteras, las ondas de choque, las capas y los choques impulsivos en relatividad general.

J. Fukue ha examinado los flujos de radiación emitidos por objetos con simetría esférica desde la relatividad especial aproximando la radiación mediante los factores de Eddington. Utilizando esta aproximación de factores de Eddington, Fukue analizó el efecto que tiene la radiación sobre la velocidad del fluido. Se demostró que los factores de Eddington no son constantes para flujos esféricos relativistas y dependen de la velocidad del fluido. En particular, cuando el fluido es acelerado a una velocidad relativista existe un gradiente de velocidad y la dependencia de los factores de Eddington llegan a ser importante [13]. Tiempo después, Fukue también analizó las ondas de choque cuando la radiación esta bajo la aproximación de difusión en el marco de la relatividad especial. Según Fukue, si la radiación esta bajo la aproximación de difusión en la región después del choque aparece una zona de relajación⁹. Además, el autor halló las condiciones de Rankine-Hugoniot relativistas que deben cumplir las ondas de choque bajo la aproximación de difusión [1].

J. Rueda y L.A. Núñez han analizado las ondas de choque para fluidos radiantes en relatividad general. En este trabajo se analiza una configuración material esférica anisótropa radiante que esta separada por una onda de choque en dos regiones diferentes (núcleo y manto). Rueda y Núñez modelan la radiación mediante los factores de Eddington, utilizando únicamente una relación de clausura entre estos factores. Los autores encuentran que el núcleo anisótropo obliga al flujo de radiación a decaer más lentamente que en el caso isótropo. Además, se encuentra que la velocidad del fluido es más lenta en el caso anisótropo que en el caso isótropo [14].

M. Esculpi y L. Herrera por su parte han analizado los choques impulsivos para estrellas solitónicas aproximando la radiación como un proceso de difusión. Los autores proponen una estrella solitónica evolucionando que se encuentra separada en dos regiones a través de un choque impulsivo. Para acoplar las dos regiones separadas por el choque impulsivo, Esculpi y Herrera utilizaron el método propuesto por [34]. Los investigadores hallaron que existen ciertos valores iniciales críticos para la masa en la estrella por debajo de la cual la estrella se extinguirá [22].

W. Israel analizó las capas y halló las condiciones de acoplamiento que estas superficies de discontinuidad deben cumplir, en términos de las variables geométricas¹⁰ [23]. L.Herrera y J. Ibañez en 1989 hallaron las condiciones de acoplamiento que debe cumplir una capa, utilizando el esquema propuesto por L.Herrera y J.Jiménez [34] para acoplar dos espacio-tiempos diferentes. Herrera y

⁹La zona de radiación es una región donde el flujo radiante enfría el fluido en la región posterior al choque, equilibrándose con las condiciones del fluido que se encuentra lejano al choque.

¹⁰En otras palabras, W Israel halló las condiciones de acoplamiento para las capas en términos de la curvatura del espacio-tiempo que se produce.

Jiménez estudian la evolución de una distribución material esférica que emite radiación en forma de calor [24]. Israel también halló las condiciones de acoplamiento que deben cumplir las variables geométricas en las fronteras.

Sin embargo, los anteriores trabajos no examinan la radiación bajo la aproximación de los factores de Eddington para fronteras, ondas de choque, capas y choques impulsivos en relatividad general. Así, la motivación de este trabajo de investigación propuesto, es generar nuevo conocimiento al estudiar la influencia de la radiación sobre la evolución de las ondas de choque y choques impulsivos. Además, abrir el paso para el estudio de esferas radiantes anisótropas en relatividad general utilizando diferentes relaciones de clausura para modelar la radiación. Por otra parte, se pretende identificar la diferencia que cada una de estas relaciones influye sobre la dinámica de las fronteras, las ondas de choque, capas y choques impulsivos.

Estado del arte

Con el fin de estudiar las fronteras, las ondas de choque, las capas y los choques impulsivos en relatividad general se hizo una revisión en la literatura de las condiciones mínimas que un modelo plausible debe cumplir. Se encontró que para modelar la evolución de una superficie de discontinuidad en un fluido radiante en relatividad general se necesitan 3 “ingredientes” principales: las ecuaciones de Einstein, las condiciones de acoplamiento y el esquema de transporte de radiación. Además de estos “ingredientes”, es necesario tener en cuenta 2 aproximaciones: la aproximación cuasiestática y los factores de Eddington. Por último, se exponen los trabajos más recientes donde se explican los “ingredientes” necesarios para modelar la propagación de una frontera, una onda de choque, una capa y un choque impulsivo en relatividad general para un fluido radiante, comentándose los resultados obtenidos en ellos.

Ecuaciones de Einstein, condiciones de acoplamiento y aproximación cuasiestática

Ecuaciones de Einstein

La teoría de la relatividad general propuesta por A. Einstein en 1916, es una teoría de la gravitación que resuelve la incompatibilidad de la teoría newtoniana de la gravitación con los postulados de la relatividad especial. La Teoría General de la Relatividad por lo tanto generaliza la Teoría Especial de la Relatividad y redefine la teoría de gravedad newtoniana, proveyendo una descripción de la gravedad como una propiedad del espacio-tiempo. De este modo, la Teoría General de la Relatividad propone que la curvatura del espacio-tiempo está directamente relacionada con la energía y el momentum. La relación del espacio-tiempo y la materia, se encuentra descritas mediante las ecuaciones de Einstein, que son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas.

En este trabajo, se utilizará un espacio-tiempo con una simetría esférica en presencia de un fluido radiante. El elemento de línea que describe el espacio-tiempo esféricamente simétrico está dado como

$$ds^2 = e^{2\nu(r,t)} dt^2 - e^{2\lambda(r,t)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

por otro lado, el tensor de materia y radiación están descritos de la siguiente manera

$$T_{\mu\nu}^M = (\rho + P_{\perp})u_{\mu}u_{\nu} - P_{\perp}g_{\mu\nu} + (P - P_{\perp})v_{\mu}v_{\nu}, \quad (2)$$

y

$$T_{\mu\nu}^R = \frac{1}{2}(3\rho_R - \mathcal{P})u_{\mu}u_{\nu} - \frac{1}{2}(\rho_R - \mathcal{P})g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\rho_R - 3\mathcal{P})v_{\mu}v_{\nu} + F_{\mu}u_{\nu} + F_{\nu}u_{\mu}, \quad (3)$$

respectivamente. Donde los cuadvectores u_{μ} , v_{μ} y F_{μ} están definidos como

$$u_{\mu} = \gamma(e^{\nu}, -\omega e^{\lambda}, 0, 0), \quad v_{\mu} = \gamma(-\omega e^{\nu}, e^{\lambda}, 0, 0) \text{ y } F_{\mu} = \mathcal{F}v_{\mu}. \quad (4)$$

El factor de Lorentz es $\gamma = (1 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}}$ y la velocidad del fluido está definida como

$$\omega = \frac{dr}{dt}e^{\lambda-\nu}. \quad (5)$$

Las variables ρ, P, P_{\perp} representan la densidad, la presión radial y la presión tangencial hidrodinámica, respectivamente. Mientras que $\rho_R, \mathcal{P}, \mathcal{P}_{\perp}$ y \mathcal{F} son la densidad de radiación, la presión radial de radiación, la presión tangencial de radiación y el flujo de radiación.

Es importante señalar que las variables radiantes se expresan en términos de los momentos de la intensidad específica del campo de radiación, $\mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu)$ –medida en un punto r en un tiempo t , viajando en la dirección \vec{n} , con una frecuencia ν – y para el caso de simetría esférica pueden ser escritas como [5, 35]:

$$\rho_R = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\nu \int_1^{-1} d\mu \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu), \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\nu \int_1^{-1} d\mu \mu \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) \quad (6)$$

y

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\nu \int_1^{-1} d\mu \mu^2 \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu). \quad (7)$$

Para simplificar las variables físicas en una forma mas compacta, se escriben las ecuaciones (2) y (3) en términos de las variables intermedias como:

$$\bar{\rho} = \rho + \rho_R, \quad \bar{P} = P + \mathcal{P}, \quad \bar{P}_{\perp} = P_{\perp} + \mathcal{P}_{\perp} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_{\perp} = \frac{\rho_R - \mathcal{P}}{2}. \quad (8)$$

Si se utiliza el tensor de radiación (2) y de materia (3), las ecuaciones de campo de Einstein

$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}$ para la métrica (1) son

$$m' = 4\pi r^2 \tilde{\rho}, \quad (9)$$

$$\nu' = \frac{4\pi r^3 \tilde{P} + m}{r(r - 2m)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} 8\pi \bar{P}_\perp = & \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\nu'' + (\nu')^2 + \frac{\nu'}{r}\right) + \left(\frac{m}{r^2} - \frac{m'}{r}\right) \left(\nu' + \frac{1}{r}\right) \right\} \\ & + \frac{e^{-2\nu}}{4} \left\{ 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\ddot{m}}{r} + \frac{2\dot{m}^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\dot{m}}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\dot{m}}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \dot{\nu}\right) \right\} \text{ y} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{m} = -\frac{4\pi r^2 e^{\nu-\lambda}}{1 + \omega^2} \left(\omega(\tilde{\rho} + \tilde{P}) + (1 - \omega^2)\mathcal{F} \right); \quad (12)$$

con la función métrica $\lambda(r, t)$ expresada en términos de la “función masa” [36]

$$m(t, r) = \frac{r^2}{2} R_{232}^3 \Leftrightarrow m(r, t) = 4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr \Rightarrow e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r, t)}{r}. \quad (13)$$

Las variables $\tilde{\rho}$ y \tilde{P} son denominadas *variables efectivas* y están definidas siguiendo a la referencia [37] como

$$\tilde{\rho} = \frac{\bar{\rho} + \bar{P}\omega^2 + 2\mathcal{F}\omega}{1 - \omega^2} \quad \text{y} \quad \tilde{P} = \frac{\bar{\rho}\omega^2 + \bar{P} + 2\mathcal{F}\omega}{1 - \omega^2}. \quad (14)$$

Condiciones de acoplamiento

Las fronteras, las ondas de choque, las capas y los choques impulsivos pueden ser descritas como una superficie de discontinuidad que separa dos regiones diferentes del espacio-tiempo. Estas superficies de discontinuidad deben cumplir unas condiciones de acoplamiento sobre las variables geométricas para evitar la singularidad de estas variables a través de estas.

Las superficies de discontinuidad se pueden clasificar dependiendo entonces de la continuidad de la masa y de la velocidad relativa de la superficie con respecto a la velocidad en la región anterior y posterior del fluido:

- **Choque impulsivo:** Son capas permeables con masa donde la velocidad del choque difiere de la velocidad del fluido en la región antes y después del choque impulsivo, i.e.
 $[m(r, t)]_{C(t)} = m_{r=C_+} - m_{r=C_-} \neq 0$ y $\frac{dC(t)}{dt} e^{\lambda_C - \nu_C} \neq \omega_{C_-} \neq \omega_{C_+}$;
- **Capas:** Son capas impermeables con masa donde la velocidad de la capa es igual a la velocidad del fluido en la región antes y después de la capa, i.e.
 $[m(r, t)]_{C(t)} = m_{r=C_+} - m_{r=C_-} \neq 0$ y $\frac{dC(t)}{dt} e^{\lambda_C - \nu_C} = \omega_{C_-} = \omega_{C_+}$;

- **Ondas de choque:** Son capas permeables sin masa donde la velocidad del choque difiere de la velocidad del fluido en la región antes y después de la onda de choque, i.e.

$$[m(r, t)]_{C(t)} = m_{r=C_+} - m_{r=C_-} = 0 \text{ y } \frac{dC(t)}{dt} e^{\lambda_C - \nu_C} \neq \omega_{C_-} \neq \omega_{C_+} \text{ y}$$

- **Frontera:** Son capas impermeables sin masa donde la velocidad de la capa es igual a la velocidad del fluido en la región antes y después de la capa, i.e.

$$[m(r, t)]_{C(t)} = m_{r=C_+} - m_{r=C_-} = 0 \text{ y } \frac{dC(t)}{dt} e^{\lambda_C - \nu_C} = \omega_{C_-} = \omega_{C_+}.$$

De acuerdo con Darmois, para acoplar dos regiones del espacio-tiempo a través de una superficie de discontinuidad¹¹ (C), se requiere que tanto la métrica como la derivada covariante de un vector normal proyectado sobre dicha superficie, sean continuas través de la misma [38]. Años después, Lichnerowicz propuso unas condiciones de acoplamiento¹² que como demostraron Bonnor y Vickers [39] son equivalentes a las propuestas por Darmois [40].

En 1983, L.Herrera y J.Jiménez propusieron un conjunto alterno de condiciones equivalentes a las propuestas por Lichnerowicz y Darmois [34]. De acuerdo con Herrera y Jiménez se pueden acoplar dos espacio-tiempos a través de una hipersuperficie, estableciendo las condiciones de acoplamiento únicamente en términos de una tétrada nula de vectores y sus respectivos coeficientes de espín.

Las condiciones de acoplamiento para una onda de choque (las condiciones de Rankine-Hugoniot) requieren la continuidad de la primera y segunda forma fundamental, más la continuidad de $T_{\mu\nu}n^\nu$ a través del choque [41, 42]. Donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-impulso y n^ν es un vector normal a la superficie tipo tiempo $C(t)$.

Para el choque impulsivo, la primera forma fundamental es continua¹³ mientras que la segunda forma fundamental es discontinua¹⁴. Las condiciones de acoplamiento para los choques impulsivos han sido halladas para estrellas solitónicas asumiendo el transporte de radiación en la aproximación de difusión [22].

Para hallar las condiciones de acoplamiento sobre los choques impulsivos en el esquema propuesto por Herrera, es necesario primero definir (1) en términos de una tétrada nula de vectores. Luego se hallan las condiciones de Rankine-Hugoniot para los choques impulsivos, teniendo en cuenta la discontinuidad en la segunda forma fundamental. A partir de las condiciones de Rankine-Hugoniot para el choque impulsivo, se deducen las condiciones para una capa, una onda de choque y una frontera [43].

Cualquier métrica está descrita en términos de una tétrada nula compleja en el formalismo de Newman-Penrose como

$$g_{\mu\nu} = n_\mu l_\nu + l_\mu n_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu, \quad (15)$$

¹¹A estas superficies de acoplamiento también se les suele denominar como hipersuperficies nulas ($r = C(t)$).

¹²De acuerdo con Lichnerowicz, la condición suficiente para acoplar dos regiones sobre una superficie, es que exista un sistema de coordenadas tal que tanto el tensor métrico como todas sus primeras derivadas sean continuas a través de la superficie de acoplamiento.

¹³La primera forma fundamental permanece continua a través del choque impulsivo debido a que la métrica es continua a través del choque.

¹⁴La segunda forma fundamental en los choques impulsivos no es continua debido a que estas superficies poseen masa. Si se asume que la masa en los choques impulsivos es nula, se debe recobrar las condiciones de acoplamiento halladas para las ondas de choque. El esquema propuesto por Herrera puede ser extendido a superficies de acoplamiento que sean discontinuas en la segunda forma fundamental sin ningún problema, como es el caso de los choques impulsivos o las capas.

con los vectores de la tétrada nula satisfaciendo las condiciones $l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1$ y $l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = l_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0$, donde la barra indica el complejo conjugado de los vectores: $m^\mu \rightarrow \bar{m}^\mu$.

Los coeficientes de espín están definidos como las derivadas direccionales a lo largo de la tétrada nula como [34, 44]:

$$\begin{aligned} D n^\mu - \Delta l^\mu &= -(\gamma - \bar{\gamma})l^\mu + (\pi + \bar{\tau})m^\mu + (\bar{\pi} + \tau)\bar{m}^\mu - (\epsilon + \bar{\epsilon})n^\mu, \\ \delta l^\mu - D m^\mu &= (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})l^\mu - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})m^\mu - \sigma \bar{m}^\mu + \kappa n^\mu, \\ \delta n^\mu - \Delta m^\mu &= -\bar{\nu}l^\mu + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})m^\mu + \lambda \bar{m}^\mu + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)n^\mu \text{ y} \\ \delta \bar{m}^\mu - \bar{\delta} m^\mu &= (\mu - \bar{\mu})l^\mu + (\bar{\beta} - \alpha)m^\mu + (\beta - \bar{\alpha})\bar{m}^\mu + (\rho - \bar{\rho})n^\mu; \end{aligned}$$

con la derivada direccional definida como

$$D = l^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \Delta = n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \delta = m^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \text{y} \quad \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Para la métrica (1), la tétrada nula en el formalismo de Newman-Penrose puede ser escrita como

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu}\delta_0^\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda}\delta_1^\mu, \quad n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu}\delta_0^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda}\delta_1^\mu, \quad \text{y} \quad (16)$$

$$m^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\delta_2^\mu - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{r\sin\theta}\delta_3^\mu; \quad (17)$$

los únicos coeficientes de espín que no se anulan para (1) son:

$$\begin{aligned} \mu = \rho &= \frac{1}{r\sqrt{2}}e^{-\lambda}, \quad \alpha = -\beta = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{r\sin\theta}, \quad \gamma = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dot{\lambda}e^{-\nu} + \nu'e^{-\lambda}\right) \\ \text{y} \quad \epsilon &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dot{\lambda}e^{-\nu} - \nu'e^{-\lambda}\right). \end{aligned}$$

Los coeficientes de espín se pueden escribir en términos de las variables efectivas utilizando las ecuaciones de Einstein (9), (10), (12) y (13) como

$$\mu = \rho = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}, \quad (18)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{m}}{r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}e^{-\nu} + \frac{4\pi r^3\tilde{P} + m}{r(r-2m)}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}\right) \text{ y} \quad (19)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{m}}{r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}e^{-\nu} - \frac{4\pi r^3\tilde{P} + m}{r(r-2m)}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}\right). \quad (20)$$

En el choque impulsivo la continuidad de la primera forma fundamental implica la continuidad del elemento de línea a través de $C(t)$. Para la métrica (1) se cumple entonces que

$$e^{2\nu_+}dt_+^2 - e^{2\lambda_+}dr_+^2 = e^{2\nu_-}dt_-^2 - e^{2\lambda_-}dr_-^2, \quad \Rightarrow \quad \left[e^{2\nu} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]_C = 0, \quad (21)$$

con

$$[f]_C = f_+ - f_-.$$

La segunda forma fundamental no es continua para los choques impulsivos debido a que estas discontinuidades poseen masa. Además de la discontinuidad en la masa, la velocidad del fluido radiante también es discontinua a través del choque impulsivo y es diferente de la velocidad de este.

La discontinuidad de la segunda forma fundamental en el formalismo de Newman-Penrose es equivalente a la discontinuidad de los escalares (18), (19) y (20) [34]. Al evaluar los coeficientes de espín (19) y (20) antes y después del choque junto con (9), (10) y (12) se obtiene la siguiente condición [43]

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{4\pi r^2}{1+\omega^2} \left(\omega (\tilde{\rho} + \tilde{P}) + (1-\omega^2) \mathcal{F} \right) \dot{C} e^{-\nu} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} + \frac{4\pi r^3 \tilde{P} + m}{(r-2m)} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_C = \\ & -\sqrt{2}C \left(\left[\gamma \dot{C} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} e^{-\nu} \right] - \left[\epsilon \dot{C} e^{-\nu} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} \right] \right) - \sqrt{2}C ([\gamma] + [\epsilon]) . \end{aligned} \quad (22)$$

La anterior ecuación es una condición de Rankine-Hugoniot generalizada para un choque impulsivo en relatividad general para una esfera anisótropa radiante¹⁵. La discontinuidad en la segunda forma fundamental implica una discontinuidad de la masa a través del choque impulsivo. A diferencia de los choques impulsivos, las ondas de choque presentan una continuidad en el flujo de masa lo cual implica una continuidad en la segunda forma fundamental.

Expandiendo la función masa en una serie de Taylor sobre el choque impulsivo, se obtiene la relación entre las derivadas temporales y radiales. Además, se obtiene la discontinuidad de la masa a través del choque impulsivo, es decir

$$\left[\dot{m}(r, t) + \dot{C} m'(r, t) \right]_C - \{[m(r, t)]_C\}' = 0. \quad (23)$$

Al utilizar las ecuaciones (9), (10) y (12), se puede obtener una relación entre las derivadas temporales y radiales, la cual implica la discontinuidad en la derivada temporal de la masa a través del choque impulsivo

$$\dot{m}(t, r)|_C = \dot{m}(t, C) - \dot{C} m'(t, r)|_C \implies 4\pi C(t)^2 \left[\dot{C} \tilde{\rho} - \frac{e^{\nu-\lambda}}{1+\omega^2} \left(\omega (\tilde{\rho} + \tilde{P}) + (1-\omega^2) \mathcal{F} \right) \right]_C = \{[m]_C\}' . \quad (24)$$

Las ecuaciones (22) y (24) son las condiciones de Rankine-Hugoniot generalizadas para un choque impulsivo en una esfera anisótropa radiante en relatividad general. Las condiciones de Rankine-Hugoniot para las ondas de choque surgen de manera natural si se supone que $[\gamma] = [\epsilon] =$

¹⁵Las condiciones de Rankine-Hugoniot generalizadas para los choques impulsivos fueron halladas por Herrera e Ibañez en 1989 [24].

$$[m] = 0 \text{ [14].}$$

$$\left[\frac{\dot{C} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} e^{-\nu}}{1 + \omega^2} \left(\omega (\tilde{\rho} + \tilde{P}) + (1 - \omega^2) \mathcal{F} \right) - \tilde{P} \right]_C = 0, \quad (25)$$

$$\left[\dot{C} \tilde{\rho} - \frac{e^{\nu-\lambda}}{1 + \omega^2} \left(\omega (\tilde{\rho} + \tilde{P}) + (1 - \omega^2) \mathcal{F} \right) \right]_C = 0. \quad (26)$$

A partir de las condiciones de acoplamiento para el choque impulsivo, se pueden obtener las condiciones que deben cumplir las capas imponiendo que la velocidad del fluido sea continua a través de $C(t)$. Las condiciones de acoplamiento para las capas están dadas como [43]

$$4\pi C^2 \left[(\bar{P} + \mathcal{F}\omega) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \right]_c + \left[\frac{m}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \right]_c = -\sqrt{2}C ([\gamma] (\omega - 1) - [\epsilon] (\omega + 1)), \quad (27)$$

$$-4\pi C^2 \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} e^{\nu} (\bar{P}\omega + \mathcal{F}) \right]_c = \{[m]_c\}. \quad (28)$$

De la misma manera, las condiciones de acoplamiento para la frontera se pueden deducir a partir de la capa, imponiendo que la masa sea continua a través de esta. Las condiciones de acoplamiento para las fronteras son

$$-\omega [\mathcal{F}] = [\bar{P}]_c, \quad (29)$$

$$-[\mathcal{F}]_c = \omega [\bar{P}]_c. \quad (30)$$

Aproximación cuasiestática

La situación mas sencilla de analizar un fluido es cuando este se encuentra en equilibrio (caso hidrostático). Sin embargo, si el fluido evoluciona en el tiempo (como es el caso de interés en este trabajo) no se puede aplicar la condición de equilibrio hidrostático. El siguiente paso fuera del equilibrio hidrostático para un fluido es el régimen cuasiestático. En este régimen el fluido evoluciona lentamente en una escala de tiempo que es muy grande comparada con el tiempo típico en el que la esfera reacciona a una ligera perturbación del equilibrio hidrostático.

Esta suposición de evolución lenta no es tan restrictiva como parece, ya que el tiempo hidrostático (τ_h) es pequeño en la evolución estelar. Así τ_h para el sol es de alrededor de 27 minutos, para una enana blanca 4,5 segundos y 10^{-4} segundos para una estrella de neutrones de 1 masa solar y 10 Km de radio [10].

La evolución de la distribución se puede ver entonces como una secuencia de modelos en equilibrio hidrostático ligados. Matemáticamente, esta puede ser escrita como [37]

$$\omega^2 \approx \ddot{\lambda} \approx \dot{\lambda}^2 \approx \dot{\lambda}\dot{\nu} \approx \ddot{\nu} \approx 0. \quad (31)$$

Herrera *et al.* [37] definen el régimen cuasiestático como el correspondiente a un sistema fuera del equilibrio (o cuasi equilibrio) pero cuyas variables efectivas comparten la misma dependencia radial que las variables físicas en estado de equilibrio (o cuasi equilibrio), es decir, es la situación más cercana posible a una estado de equilibrio hidrostático. Herrera y colaboradores estudiaron la evolución de una esfera autogravitante en relatividad general bajo la aproximación cuasiestática, modelando el esquema de radiación bajo la aproximación de difusión.

Factores de Eddington

El esquema de transporte de radiación es un tema clave para comprender la evolución de las superficies de discontinuidad en esferas anisótropas radiantes en relatividad general. Esta importancia de la radiación se debe a que la gran mayoría de eventos explosivos estelares disipan una gran cantidad de energía en forma de radiación. Sin embargo, la ecuación de transporte de radiación es complicada de resolver analíticamente salvo por contadas excepciones [31].

Para sortear esta dificultad se pueden hacer ciertas aproximaciones sobre la radiación y así considerar de algún modo la interacción que realiza la radiación sobre la materia. Si la radiación interactúa débilmente con la materia se dice que se encuentra en el límite de *escape libre*. En la aproximación de escape libre el camino libre medio de los fotones y/o neutrinos es muy grande comparado con la longitud característica de la distribución material. Bajo esta aproximación la densidad de radiación es igual al flujo de radiación, a la presión de radiación y al flujo de energía ($\rho_R = \mathcal{F} = \mathcal{P} = \dot{\epsilon}$).

La radiación también puede encontrarse bajo el límite de *difusión*, donde se cumple que ($\rho_R = 3\mathcal{P}$) y ($\mathcal{F} = \dot{q}$). En esta aproximación la radiación se encuentra confinada dentro de la distribución material, es decir que los fotones se encuentran atrapados en la distribución material y la radiación es isotrópica. Para la aproximación de difusión el camino libre medio de los fotones y/o neutrinos es muy pequeño comparado con la longitud característica de la distribución material [45].

Sin embargo, si se quiere modelar escenarios generales de radiación, es necesario resolver la ecuación de transporte de la radiación. Debido a la falta de información sobre la microfísica cuando se considera la interacción entre materia ultradensa y radiación, se ha propuesto un método aproximado que modele escenarios generales de radiación. El método consiste en introducir una relación entre la densidad de flujo de radiación y la densidad de energía de radiación “factor de flujo (f)”, así como una relación entre la presión de radiación y la densidad de energía de radiación “factor variable de Eddington (χ)”. Para el caso unidimensional esférico estos factores están descritos como

$$f = \frac{\mathcal{F}}{\rho_R} \quad \text{y} \quad \chi = \frac{\mathcal{P}}{\rho_R}. \quad (32)$$

Además del factor de flujo y del factor variable de Eddington, es necesaria una relación de clausura $\chi = \chi(f)$ entre estos factores para determinar completamente el sistema. Hay varias de estas relaciones de clausura reportadas en la literatura [32, 33, 46, 47] (ver tabla 1 donde se muestran algunas relaciones de clausura que son utilizadas a menudo). Algunas de estas relaciones son derivadas de principios de máxima entropía [48]. Mientras que otras son simplemente relaciones ad-hoc que interpolan suavemente la radiación entre la aproximación de escape libre y difusión.

Cuadro 1: Relaciones de clausura y algunas de sus condiciones de aceptabilidad física

Relación de clausura	$\chi(f)$
<i>Kershaw</i> (Ke) [49]	$\frac{1+2f^2}{3}$
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{4-3f^2}$
<i>Bowers-Wilson</i> (BW) [50]	$\frac{1}{3}(1-f+3f^2)$
<i>Levermore-Lorentz</i> (LL) [51]	$\frac{3+4f^2}{5+2\sqrt{4-3f^2}}$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	$\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}f^{1,31}+\frac{3}{2}f^{4,13})$
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\frac{1}{3}(1-2f+4f^2)$
<i>Minerbo</i> (Mi) [52]	$1-2\frac{f}{\kappa}$ donde $f = \coth \kappa - \frac{1}{\kappa}$
<i>Levermore-Pomraning</i>	$f \coth \beta$ donde $f = \coth \beta - \frac{1}{\beta}$

Objetivos

Objetivo Principal

Identificar el efecto de las diferentes esquemas de transporte radiación –escape libre, difusión y factores de Eddington & relaciones de clausura– sobre la evolución de una superficie de discontinuidad en una esfera relativista, radiante, en evolución lenta.

Objetivos específicos

1. Construir modelos de evolución lenta (uno por cada tipo de discontinuidad, con y sin anisotropía en las presiones materiales) que puedan representar situaciones físicamente plausibles.
2. Hallar la dinámica de las superficies de discontinuidad para cada uno de esos modelos, variando las relaciones de clausura.
3. Comparar la evolución de las fronteras, las ondas de choque, las capas y los choques impulsivos para los casos donde la superficie es radiante, $[\mathcal{F}]_c > 0$, transparente, $[\mathcal{F}]_c = 0$, y opaco $[\mathcal{F}]_c < 0$.

Metodología

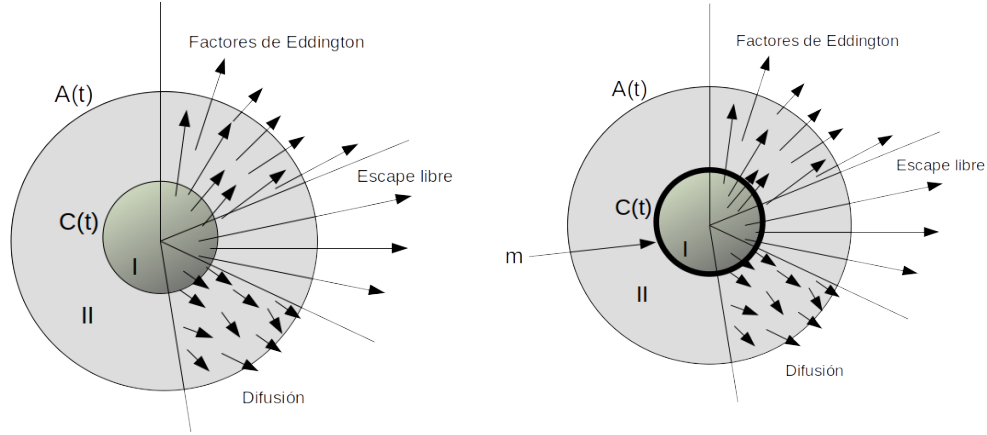
1. Para analizar la dinámica de la superficie de acoplamiento utilizaremos una esfera de radio exterior $r = a(t)$ acoplada con la solución exterior de Vaidya [53]. La esfera se contrae cuasiestáticamente emitiendo radiación como en el caso descrito en [54]. Internamente la supondremos dividida en dos regiones separadas mediante una hipersuperficie $r = c(t)$ cuya evolución será la que vamos a estudiar (ver figura (1)).

Para modelar la componente material de las regiones utilizaremos algunos de los perfiles de la densidad discutidos en las referencias [55, 56]. Las variables de radiación serán modeladas a partir de los factores de Eddington, y las relaciones de clausura (mas simples) expresadas en el cuadro 1 [57].

Figura 1: La distribución material esférica esta dividida en dos regiones diferentes, que se encuentran separadas por una hipersuperficie $c(t)$. La superficie de discontinuidad que separa la esfera puede o no poseer masa.

(a) Esfera dividida a través de una superficie de discontinuidad $c(t)$ sin masa.
(onda de choque)

(b) Esfera dividida a través de una superficie de discontinuidad $c(t)$ con masa.
(capa o choque impulsivo)



- a) Primero supondremos la esfera isótropa para las variables materiales. Esto es la igualdad de las presiones hidrodinámicas y la anisotropía solo generada por las variables de radiación.
- b) En segundo lugar se supondrá una esfera anisótropa descrita con los mismos perfiles de densidad y variables de radiación.

La construcción de estos modelos se basa en utilizar los mismos perfiles de densidad tanto para el caso isótropo como en anisótropo. Estos modelos con perfiles físicamente plausibles serán el banco de pruebas para realizar las simulaciones de la evolución de la superficie.

2. En estos modelos –suponiendo algunos escenarios para las discontinuidades de las variables de radiación– se analizará la evolución de la superficie $c(t)$ para los cuatro ambientes antes mencionados:
 - a) Choque impulsivos en evolución lenta, tomando las discontinuidades de los coeficientes de espín a partir de las referencias [17, 22]. Este caso es el mas general e involucra una superficie de discontinuidad radiante, permeable, y con masa.
 - b) Capas en evolución lenta, otra vez modelando las discontinuidades a partir de las referencias [17, 22]. Este caso involucra una superficie impermeable con masa.
 - c) Ondas de choque en evolución lenta y se compararán los resultados con la referencia [14]. Este caso es una superficie de discontinuidad es permeable pero sin masas

- d)* finalmente el caso de las fronteras en evolución lenta. Estas son superficies impermeables y sin masa.
3. Se comparará la evolución de las distintas superficies en los casos radiante, $[\mathcal{F}]_c > 0$, transparente, $[\mathcal{F}]_c = 0$, y opaco $[\mathcal{F}]_c < 0$.

Cronograma

Actividad	Tiempo / Meses						
Revisión de bibliografía	x	x	x	x	x	x	x
Modelamiento de la configuración material a estudiar	x	x					
Solución del sistema de ecuaciones que describe la configuración material para cada superficie de discontinuidad		x	x	x			
Gráficas de la velocidad de cada superficie con su respectiva EoS y relación de clausura					x		
Análisis de la dinámica de las superficies de discontinuidad obtenidas y comparación de resultados						x	x
Escritura y sustentación final del informe						x	x

Recursos humanos

Persona 1

Entidad	Universidad Industrial de Santander
Grupo de investigación	Grupo de investigación en relatividad y gravitación
Rol del trabajo	Investigador principal
Primer apellido	Castañeda
Segundo apellido	Godoy
Nombre	Ludwin Fabián
Género	Masculino
Fecha de nacimiento	06/09/1994
Ciudad/ País	Bucaramanga/ Colombia
correo electrónico	fabian2121015@gmail.com
Responsabilidades	Desarrollo del proyecto, análisis y síntesis de resultados, escritura del proyecto
Dedicación (Horas semanales)	24
Número de meses	7

Persona 2

Entidad	Universidad Industrial de Santander
Grupo de investigación	Grupo de investigación en relatividad y gravitación
Rol del trabajo	Director del proyecto
Primer apellido	Núñez de Villavicencio
Segundo apellido	Martínez
Nombre	Luis Alberto
Género	Masculino
Ciudad/ País	Bucaramanga/ Colombia
correo electrónico	lnunez@uis.edu.co
Responsabilidades	Director del proyecto de tesis. Proporcionar una guía principal al desarrollo del proyecto
Dedicación (Horas semanales)	4
Número de meses	7

persona 3

Entidad	Universidad de Salamanca
Grupo de investigación	Departamento de Matemática Aplicada e Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas
Rol del trabajo	Co-director del proyecto
Primer apellido	Ospino
Segundo apellido	Zúñiga
Nombre	Justo Hernán
Género	Masculino
Ciudad/ País	Salamanca/ España
correo electrónico	j.ospino@usal.es
Responsabilidades	Co-director del proyecto de tesis. Proporcionar una guía al desarrollo del proyecto
Dedicación (Horas semanales)	4
Número de meses	7

Bibliografía

- [1] J. Fukue. Relativistic radiative shocks revisited. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 483(2):2538–2546, 2019.
- [2] Y.B. Zeldovich. The magnetic field in the two-dimensional motion of a conducting turbulent fluid. *Sov. Phys. JETP*, 4:460–462, 1957.
- [3] I. P. Raizer. On the structure of the front of strong shock waves in gases. *Soviet Phys. JETP*, 5, 1957.
- [4] Y.B. Zeldovich and Y. P. Raizer. Elements of gas dynamics and the classical theory of shock waves. *New York: Academic Press, 1966*, 1966.
- [5] B.W. Mihalas and D. Mihalas. *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Courier Dover Publications, 1999.
- [6] C. G. Lacey. The structure of shocks with thermal conduction and radiative cooling. *The Astrophysical Journal*, 326:769–778, 1988.
- [7] R.B. Lowrie, J.E. Morel, and J.A. Hittinger. The coupling of radiation and hydrodynamics. *The astrophysical journal*, 521(1):432, 1999.
- [8] R.B. Lowrie and J.D. Edwards. Radiative shock solutions with grey nonequilibrium diffusion. *Shock Waves*, 18(2):129–143, 2008.
- [9] J.M. Ferguson, J.E. Morel, and R. Lowrie. The equilibrium-diffusion limit for radiation hydrodynamics. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 202:176–186, 2017.
- [10] L. Herrera. Campos gravitacionales en la materia: La otra cara de la moneda. *Escuela Venezolana de relatividad, campos y Astrofísica*, 1996.
- [11] A.H. Taub. Relativistic rankine-hugoniot equations. *Physical Review*, 74(3):328, 1948.
- [12] S.A. Colgate and R.H White. The hydrodynamic behavior of supernovae explosions. *The astrophysical journal*, 143:626, 1966.
- [13] C. Akizuki and J. Fukue. Spherical relativistic radiation flows with variable eddington factor. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 60(2):337–343, 2008.

- [14] J.A Rueda and L.A. Núñez. General relativistic radiant shock waves in the post-quasistatic approximation. *Journal of Physics: Conference Series*, 66:012042, may 2007.
- [15] Y. Gao and C.K Law. Rankine-hugoniot relations in relativistic combustion waves. *The Astrophysical Journal*, 760(2):122, 2012.
- [16] L. Herrera. Stability of the isotropic pressure condition. *Physical Review D*, 101(10):104024, 2020.
- [17] M. Esculpi and L. Herrera. Radiating soliton stars in the thin-wall approximation. *Physical Review D*, 45(10):3341, 1992.
- [18] H. Firouzjahi, S. Jazayeri, A. Karami, and T. Rostami. Bubble nucleation and inflationary perturbations. *arXiv preprint arXiv:1707.07550*, 2017.
- [19] H. Firouzjahi, A. Karami, and T. Rostami. Vacuum decay in the presence of a cosmic string. *arXiv preprint arXiv:2002.04856*, 2020.
- [20] S. Antusch, D.G. Figueroa, K. Marschall, and F. Torrenti. Energy distribution and equation of state of the early universe: matching the end of inflation and the onset of radiation domination. *arXiv preprint arXiv:2005.07563*, 2020.
- [21] H.Y. Chiu. Massive soliton stars. *The Astrophysical Journal*, 354:302–309, 1990.
- [22] M. Esculpi and L. Herrera. Radiating scalar soliton-like stars in a pressurized environment. *The Astrophysical Journal*, 437:317–331, 1994.
- [23] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 44(1):1–14, 1966.
- [24] L. Herrera and J. Ibáñez. Junction conditions on surface layers for radiating fluid spheres with heat flow. *Physics Letters A*, 138(1-2):1–4, 1989.
- [25] A. Skadowski, R. Narayan, A. Tchekhovskoy, and Y. Zhu. Semi-implicit scheme for treating radiation under m1 closure in general relativistic conservative fluid dynamics codes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429(4):3533–3550, 2013.
- [26] H.R. Takahashi, K. Ohsuga, Y. Sekiguchi, T. Inoue, and K. Tomida. Explicit-implicit scheme for relativistic radiation hydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 764(2):122, 2013.
- [27] R. Budnik, B. Katz, A. Sagiv, and E. Waxman. Relativistic radiation mediated shocks. *The Astrophysical Journal*, 725(1):63, 2010.
- [28] A. Tolstov, S. Blinnikov, S. Nagataki, and K. Nomoto. Shock wave structure in astrophysical flows with an account of photon transfer. *The Astrophysical Journal*, 811(1):47, 2015.
- [29] J.A. Pons, J.M. Ibáñez, and J.A. Miralles. Hyperbolic character of the angular moment equations of radiative transfer and numerical methods. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 317(3):550–562, 2000.

- [30] J.M. Smit, L.J. Van den Horn, and S.A. Bludman. Closure in flux-limited neutrino diffusion and two-moment transport. *Astronomy and Astrophysics*, 356:559–569, 2000.
- [31] CD Levermore. Relating eddington factors to flux limiters. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 31(2):149–160, 1984.
- [32] G.C. Pomraning. An extension of the eddington approximation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 9(3):407–422, 1969.
- [33] E.M. Murchikova, E. Abdikamalov, and T. Urbatsch. Analytic closures for m1 neutrino transport. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 469(2):1725–1737, 2017.
- [34] L. Herrera and J. Jiménez. Junction conditions and the propagation of isometries in general relativity. *Physical Review D*, 28(12):2987, 1983.
- [35] R.W. Lindquist. Relativistic transport theory. *Annals of Physics*, 37(3):487–518, 1966.
- [36] W.C. Hernandez Jr and C.W. Misner. Observer time as a coordinate in relativistic spherical hydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 143:452, 1966.
- [37] L. Herrera, W. Barreto, A. Di Prisco, and N.O. Santos. Relativistic gravitational collapse in noncomoving coordinates: The post-quasistatic approximation. *Physical Review D*, 65(10):104004, 2002.
- [38] G. Darmois. Memorial des sciences mathematiques, fascicule 25 (1927) 1. *For a source in English, see eg WB Bonnor and PA Vickers: Junction Conditions in General Relativity, General Relativity and Gravitation*, 13:28, 1966.
- [39] W.B. Bonnor and P.A. Vickers. Junction conditions in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 13(1):29–36, 1981.
- [40] A. Lichnerowicz and T. Teichmann. Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. *Physics Today*, 8:24, 1955.
- [41] L. Herrera and L.A. Núñez. Luminosity profiles and the evolution of shock waves in general relativistic radiating spheres. Technical report, International Centre for Theoretical Physics, 1989.
- [42] L. Herrera and L.A. Núñez. Evolution of radiating spheres in general relativity: a seminumerical approach. *Fundamentals of Cosmic Physics*, 14:235–319, 1990.
- [43] L.F. Godoy-Castañeda and Nuñez L.A. Condiciones de acoplamiento en hidrodinamica y radiacion en relatividad general. 2018.
- [44] E. Newman and R. Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, 3(3):566–578, 1962.

- [45] M. Cissoko. Relativistic radiation hydrodynamics: Shock and deflagration waves. *Physical Review D*, 55(8):4555, 1997.
- [46] G.C. Pomraning. Flux-limited diffusion with relativistic corrections. *The Astrophysical Journal*, 266:841–847, 1983.
- [47] S.K. Maurya and S.D. Maharaj. New anisotropic fluid spheres from embedding. *The European Physical Journal A*, 54:1–11, 2018.
- [48] R. Domínguez-Cascante. Information theory in the study of anisotropic radiation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(22):7707, 1997.
- [49] D.S. Kershaw. Flux limiting nature’s own way. *Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-78378*, 1976.
- [50] J.R. Wilson, R. Couch, S. Cochran, J. Le Blanc, and Z. Barkat. Neutrino flow and the collapse of stellar cores. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 262(1):54–64, 1975.
- [51] C.D. Levermore. Relating eddington factors to flux limiters. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 31:149–160, 1984.
- [52] G. N. Minerbo. Maximum entropy eddington factors. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 20(6):541–545, 1978.
- [53] P C. Vaidya. The gravitational field of a radiating star. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A*, 33(5):264, 1951.
- [54] L. Becerra, H. Hernández, and L.A. Núñez. Quasi-static thermal evolution of compact objects. *Canadian Journal of Physics*, 93(8):920–934, 2015.
- [55] H. Hernández and L. A. Núñez. Nonlocal equation of state in anisotropic static fluid spheres in general relativity. *Can. J. Phys.*, 82:29 – 51, 2004.
- [56] H. Hernández and L. A. Núñez. Plausible families of compact objects with a nonlocal equation of state. *Can. J. Phys.*, 91:328–336, April 2013.
- [57] F. Aguirre, L.A. Núñez, and T. Soldovieri. Variable eddington factor and radiating slowly rotating bodies in general relativity. *arXiv preprint gr-qc/0503085*, 2005.