Lecture 2

Friday, January 5, 2024 15:11

VORIGE KEER

- LDE's, OVERDRACHTSFUNCTIE $H(\omega)$, IMPULSRESPONS FUNCTIE $h(t)$, STAPRESPONSFUNCTIE $s(t)$
- $H_{tot} = H_1 H_2$ ALLEEN ALS SYSTEMEN ELKAAR NIET "BELASTEN" (TEVEEL STROOM ⇒ LDE VERANDERT)

VANDAAG

READER: H2 GEHEEL

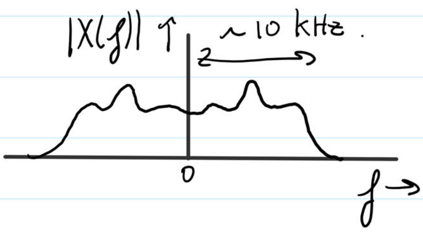
app.wooclap.com/PE2C2

- CONVOLUTIE
- CONVOLUTIE + FT's
- SAMPLING
  - ALIASING/NYQUIST
  - SPECTRAL LEAKAGE
  - A/D CONVERSIE → ZELFSTUDIE

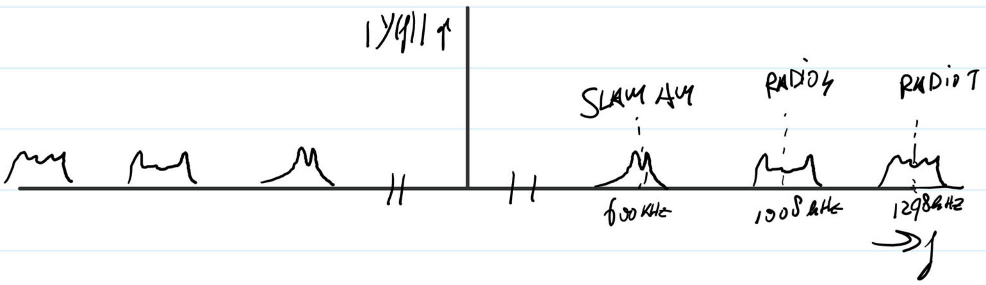
VOLGENDE KEER : LOCK-IN & 2D FFT's

AM-MODULATIE

AUDIOSIGNAAL



WE WILLEN MEERDERE RADIOSTATIONS IN DE LUCHT:
AM-MODULATIE: VERPLAATSEN IN FREQUENTIE DOMEIN.



VERMENIGVULDIGING MET DRAAGGOLVEN (cos(t))
IS VERPLAATSING in FREQ. HOE ZIT DAT?

VERMENIGVULDIGING MET DRAAGGOLVEN $(\cos(t))$
IS VERPLAATSING in FREQ: HOE ZIT DAT?

- ORIGINEEL SIGNAAL (E.G. AUDIO): $x_1(t)$
- DRAAGGOLF (eg. COSINUS, 1 MHz): $x_2(t)$
- RADIO: $y(t) = x_1(t)x_2(t)$

$\Rightarrow$ WAT is $\mathcal{F}(y(t)) = Y(\omega)$?

$\Rightarrow$ ANTWOORD: $Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)$

$$\overset{def}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(s)\, X_2(\omega - s)\, ds$$

$\Rightarrow$ PROOF:
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-ist}dt\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\hat{t})e^{-i(\omega-s)\hat{t}}d\hat{t}\right]ds$$
$$= \frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty} x_1(t)\, x_2(\hat{t})\, e^{-i\omega\hat{t}}\, e^{-is(t-\hat{t})}\, dt\, d\hat{t}\, ds$$

$\Rightarrow$ GEBRUIK: $\delta(a-b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(a-b)}dx$

$$Y(\omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2(\hat{t})\, e^{-i\omega\hat{t}}\, \delta(\hat{t}-t)\, dt\, d\hat{t}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\}$$

---

* CONVOLUTIE: Def: $v(x) \otimes u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(s)u(x-s)ds$

COMMUTATIEF, ASSOCIATIEF, DISTRIBUTIEF

$v \otimes u = u \otimes v$ $\quad u \otimes (v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$ $\quad v \otimes (u_1 + u_2) = v \otimes u_1 + v \otimes u_2$

* CONVOLUTIETHEOREMA: (niet afgeleid)

ALS $y(t) = x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{FT} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)$

EN ANDERSOM, ALS $y(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) \xrightarrow{FT} Y(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)$

$\Rightarrow$ LTI SYSTEEM $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \Rightarrow \boxed{y(t) = h(t) \otimes x(t)}$

---

* V.B. AM MOD: $x_2(t) = A_R\cos(\omega_R t) \xrightarrow{FT} X_2(\omega) = \pi A_R\left(\delta(\omega - \omega_R) + \delta(\omega + \omega_R)\right)$

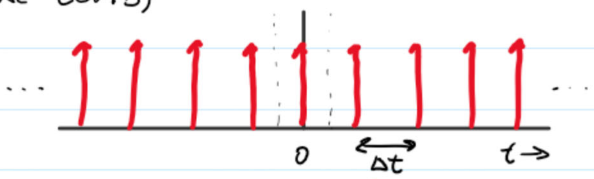
$$f(x) \otimes \delta(x-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \delta(x-a-s)\, ds = f(x-a)!$$
$\Rightarrow$ CONVOLUTIE MET δ FUNCTIE IS TRANSLATIE!

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1 \otimes X_c = \frac{A_R}{2} X_1(\omega-\omega_R) + \frac{A_R}{2} X_1(\omega+\omega_R)$$

$\Rightarrow$ RADIO SIGNAAL is FT VAN GELUIDSSIGNAAL VERPLAATST IN FREQUENTIE

---

* FT VAN KAM VAN DELTAFUNCTIES (DIRAC COMB)



$$III_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad = \underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta t} e^{in2\pi\frac{1}{\Delta t}t}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-in\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{\Delta t} e^0 = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\mathcal{F}\{III_{\Delta t}(t)\} = \sum_{k=-\infty} \mathcal{F}\{\delta(t-k\Delta t)\} \quad \text{(FT is LINEAIR)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega\Delta t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik2\pi\Delta t f} = \frac{1}{\Delta t}\underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta t\, e^{ik2\pi\Delta t f}} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{\Delta t}\right)$$

CONCLUSIE: DE FT VAN EEN DIRAC COMB MET PERIODE Δt IS WEER EEN DIRAC COMB MET FREQUENTIE-SPACING $\frac{1}{\Delta t}$

---

* Nyquist / Sampling THEOREMA

- Bij EEN SAMPLING FREQ VAN $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ GEEN INFORMATIEVERLIES <u>ALS</u> MAX FREQ. IN SIGNAAL $|f_{max}| \leq f_s$

  ↳ Nyquist FREQ $:= \frac{f_s}{2}$
- INFORMATIE VERLIES UIT ZICH ALS:
  - NIET ZICHTBARE HOGE FREQ.
  - "TEVEEL" ZICHTBARE LAGE FREQ.

    ↳ "ALIASING"

---

* Spectral LEAKAGE

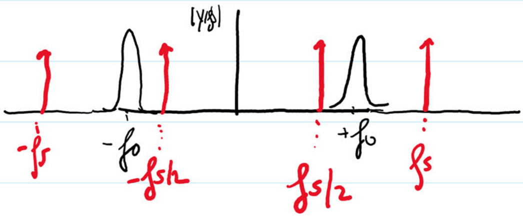
- DOOR EINDIGE INTEGRATIETIJD 2 EFFECTEN:
  - "SIDE LOBES" IN FREQ. DOMEIN

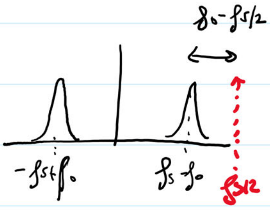
(~ SINC FUNCTIE I.P.V. PERFECTE δ VOOR SINUS INPUT

- DISCRETE FREQUENTIES MET SPACING $\frac{1}{T}$ ("FREQUENTIE RESOLUTIE")

- OPLOSSING AFHANKELIJK VAN MEET-CONTEXT, BIJV:
  - GEBRUIK WINDOWING/AFKAP VENSTER
  - MAAK EEN FIT IN HET FREQ. DOMEIN
  - LANGERE INTEGRATIETIJD

* ALIASING VOORBEELDEN





$$f_s/2 - (f_0 - f_s/2) = f_s - f_0$$