

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURA DE LA MATERIA, FÍSICA TÉRMICA Y
ELECTRÓNICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: ETE35

Dinámica Estocástica de Poblaciones

Stochastic population dynamics

Supervisor: Francisco J. Cao García

J. Enrique Zafra Mena

Grado en Física

Curso académico 2024-2025

Convocatoria Ordinaria

Declaración Responsable sobre Autoría y

Uso Ético de Herramientas de Inteligencia Artificial (IA)

Yo, **José Enrique Zafra Mena**,

con DNI **76744531V**,

declaro de manera responsable que el/la presente:

- Trabajo de Fin de Grado (TFG)**
- Trabajo de Fin de Máster (TFM)
- Tesis Doctoral

Titulado:

Dinámica Estocástica de Poblaciones,

es el resultado de mi trabajo intelectual personal y creativo, y ha sido elaborado de acuerdo con los principios éticos y las normas de integridad vigentes en la comunidad académica y, más específicamente, en la Universidad Complutense de Madrid.

Soy, pues, autor del material aquí incluido y, cuando no ha sido así y he tomado el material de otra fuente, lo he citado o bien he declarado su procedencia de forma clara -incluidas, en su caso, herramientas de inteligencia artificial-. Las ideas y aportaciones principales incluidas en este trabajo, y que acreditan la adquisición de competencias, son mías y no proceden de otras fuentes o han sido reescritas usando material de otras fuentes.

Asimismo, aseguro que los datos y recursos utilizados son legítimos, verificables y han sido obtenidos de fuentes confiables y autorizadas. Además, he tomado medidas para garantizar la confidencialidad y privacidad de los datos utilizados, evitando cualquier tipo de sesgo o discriminación injusta en el tratamiento de la información.

En Madrid, a **27 de mayo de 2025**.

Firma



Resumen:

Los modelos clásicos de poblaciones describen las interacciones biológicas como procesos puramente deterministas. Sin embargo, los ecosistemas reales están sometidos a fluctuaciones ambientales que influyen en la supervivencia de las especies. En las últimas décadas se ha visto que el ruido multiplicativo induce efectos no triviales en diferentes sistemas, como la resonancia estocástica o extinciones repentinas. Los exponentes de Lyapunov ofrecen una medida cuantitativa del caos subyacente, pero la relación entre la intensidad del ruido, la estabilidad dinámica y la biodiversidad sigue sin resolverse por completo. En este trabajo mostramos que, en un sistema Lotka-Volterra de 4 especies, el aumento gradual del ruido blanco genera varias transiciones bien definidas: en primer lugar aparece una zona de sincronización que amortigua el caos y, tras un umbral crítico, aparece un régimen de extinciones intermitentes que se intensifica. A diferencia de estudios anteriores que consideraban el ruido como una simple perturbación, nuestro análisis revela que la estocasticidad actúa como un mecanismo organizador del espacio de fases. Identificamos una correspondencia directa entre las mesetas de extinción y los cambios topológicos del exponente de Lyapunov máximo, proporcionando una métrica predictiva de pérdida de biodiversidad. Esto sugiere que la gestión de reservas naturales debería contemplar la variabilidad ambiental como un parámetro de diseño, no solo como una amenaza externa. Este enfoque es transferible a modelos epidemiológicos y de redes complejas, donde las fluctuaciones aleatorias gobiernan la estabilidad a largo plazo. Integrar el ruido en la planificación ecológica podría mejorar la capacidad de adaptación frente al cambio climático acelerado.

Abstract:

Classical population models describe biological interactions as purely deterministic processes. However, real ecosystems are subject to environmental fluctuations that influence species survival. Over the past decades, it has been shown that multiplicative noise can induce non-trivial effects in various systems, such as stochastic resonance or sudden extinctions. Lyapunov exponents provide a quantitative measure of underlying chaos, but the relationship between noise intensity, dynamical stability, and biodiversity remains not fully understood. In this work, we show that in a four-species Lotka–Volterra system, a gradual increase in white noise leads to several well-defined transitions: first, a synchronization region emerges that suppresses chaos; beyond a critical threshold, a regime of intermittent extinctions appears and intensifies. Unlike previous studies that treated noise as a mere perturbation, our analysis reveals that stochasticity acts as an organizing mechanism in phase space. We identify a direct correspondence between extinction plateaus and topological changes in the maximum Lyapunov exponent, providing a predictive metric for biodiversity loss. This suggests that the management of natural reserves should treat environmental variability as a design parameter, not merely as an external threat. This approach is transferable to epidemiological and complex network models, where random fluctuations govern long-term stability. Integrating noise into ecological planning could enhance adaptive capacity in the face of accelerated climate change.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor Francisco J. Cao García por su dedicación y orientación constante desde el inicio del proyecto. Su implicación ha sido fundamental tanto en el enfoque como en el desarrollo de las ideas.

Agradezco igualmente al profesor Juan José Mazo Torres por sus valiosos comentarios y recomendaciones, ofrecidos de forma desinteresada y con un rigor que ha enriquecido el contenido de este trabajo.

Gracias a Iria, por tu cariño, por estar siempre ahí cuando más lo necesitaba, y por darme la motivación que a veces me faltaba.

A mis tíos, por su apoyo constante; y a mis padres, por acompañarme a lo largo de todo este camino; muy especialmente a mi madre, por su confianza absoluta y su presencia incondicional. Sin vosotros, esto no habría sido posible.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Contexto y motivación	1
1.2. Objetivos y estructura	1
2. Fundamentos teóricos	2
2.1. Modelo de Lotka-Volterra multiespecie	2
2.2. Dinámica determinista del modelo	3
2.2.1. Parámetros elegidos	3
2.3. Fluctuaciones ambientales	4
2.3.1. Procesos de Wiener	5
2.3.2. Ecuación de Langevin	5
2.3.3. Cálculo de Itô e integrales estocásticas	6
2.4. Caos y exponentes de Lyapunov	6
3. Metodología	7
3.1. Integración numérica del sistema	7
3.1.1. Sistema determinista	7
3.1.2. Sistema estocástico: método de Euler-Maruyama	7
3.2. Cálculo de los exponentes de Lyapunov	8
3.2.1. Sistema determinista	9
3.2.2. Sistema estocástico: algoritmo de Benettin-Wolf	10
4. Resultados	10
4.1. Modelo determinista	10
4.2. Modelo estocástico	13
4.3. Análisis del Caos	15
5. Conclusiones y discusión	17
5.1. Implicaciones dinámicas	17
5.2. Relevancia ecológica	17
5.3. Limitaciones y posibles mejoras	17
6. Apéndices	18
7. Bibliografía	20

1. Introducción

1.1. Contexto y motivación

La dinámica de las poblaciones es un área fundamental dentro de la ecología, ya que nos permite entender cómo evolucionan las especies y cómo se estructuran los ecosistemas. Históricamente, los modelos deterministas, como los modelos multiespecie de Lotka-Volterra, han sido una herramienta clave para describir interacciones ecológicas como la competencia, el mutualismo o la depredación [4, 12]. Estos modelos son atractivos por su simplicidad analítica y su facilidad de interpretación, pero asumen condiciones ideales que en la realidad raramente se cumplen.

En particular, una limitación crítica de los modelos deterministas es la ausencia de fluctuaciones ambientales, lo cual reduce significativamente su capacidad predictiva en contextos reales. Las poblaciones naturales están continuamente expuestas a perturbaciones aleatorias tales como variaciones climáticas, escasez temporal de recursos y eventos estocásticos impredecibles [10]. Estos factores pueden inducir efectos no triviales en la dinámica poblacional, como bifurcaciones inducidas por ruido, transiciones al caos, patrones espaciales emergentes o incluso extinciones abruptas [8].

La inclusión de ruido en los modelos ecológicos no solo incrementa su realismo, sino que también revela fenómenos cualitativamente distintos a los que predicen las teorías clásicas deterministas. En este sentido, estudios recientes destacan cómo el ruido puede jugar un papel crucial, generando caos inducido por ruido y afectando significativamente los tiempos esperados de extinción y la estabilidad global del sistema [2]. Además, técnicas modernas como los exponentes de Lyapunov permiten analizar la sensibilidad a condiciones iniciales, proporcionando una herramienta poderosa para distinguir entre dinámicas caóticas y fluctuaciones estocásticas puramente aleatorias [8].

Por otro lado, desde el punto de vista ecológico, Gotelli [4] destaca la importancia de comprender los mecanismos subyacentes de regulación poblacional y cómo estos afectan directamente a la dinámica y estabilidad de las comunidades ecológicas. Esta perspectiva es fundamental para contextualizar adecuadamente la relevancia de los resultados obtenidos mediante modelos matemáticos y simulaciones numéricas.

Este trabajo se centra en estudiar cómo las fluctuaciones estocásticas ambientales afectan a la dinámica de poblaciones, concretamente en sistemas regulados por densidad. La regulación por densidad es vital para entender cómo los ecosistemas limitan el crecimiento poblacional, influyendo en la estabilidad y resiliencia ante perturbaciones externas. La combinación de métodos teóricos, análisis numéricos y simulaciones computacionales ofrece un marco completo para investigar estos fenómenos desde una perspectiva rigurosa y cuantitativa.

1.2. Objetivos y estructura

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es explorar los efectos del ruido en la dinámica de sistemas ecológicos multiespecie con regulación de densidad. Se pretende:

1. Estudiar cómo la introducción de ruido estocástico modifica las dinámicas predichas por los modelos deterministas de Lotka-Volterra, considerando escenarios con diferentes intensidades del ruido.
2. Comparar sistemáticamente las diferencias cualitativas y cuantitativas entre las dinámicas deterministas y estocásticas, estableciendo criterios claros para distinguir caos determinista de fluctuaciones aleatorias inducidas por el ruido.

La estructura del trabajo es la siguiente: en la sección 2, se revisan los fundamentos teóricos necesarios, incluyendo el modelo determinista multiespecie de Lotka-Volterra, los procesos estocásticos y los exponentes de Lyapunov. En la sección 3, se detalla la metodología usada, que incluye el método numérico de Euler-Maruyama para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas y el algoritmo de Benettin-Wolf para hallar los exponentes de Lyapunov. La sección 4 presenta los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas, comparando exhaustivamente los escenarios deterministas y estocásticos. Finalmente, en la sección 5, se discuten las conclusiones derivadas del análisis realizado y se proponen posibles extensiones del trabajo.

2. Fundamentos teóricos

2.1. Modelo de Lotka-Volterra multiespecie

El modelo clásico de Lotka-Volterra es una herramienta ampliamente utilizada para describir cómo evoluciona un sistema compuesto por varias especies que interactúan entre ellas. Para el caso sencillo de dos especies, y siguiendo a Gotelli [4], las ecuaciones diferenciales que rigen su dinámica pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= r_1 x_1(t) \left(1 - \frac{1}{K_1} x_1(t) - \frac{\alpha}{K_1} x_2(t)\right), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= r_2 x_2(t) \left(1 - \frac{\beta}{K_2} x_1(t) - \frac{1}{K_2} x_2(t)\right).\end{aligned}\tag{1}$$

En estas ecuaciones, $x_i(t)$ representa la densidad poblacional de la especie i en el tiempo t , r_i es la tasa de crecimiento intrínseca de cada especie y K_i es su capacidad de carga, es decir, la población máxima que el entorno puede sostener en ausencia de otras especies. Los parámetros α y β cuantifican las interacciones interespecíficas.

Este modelo puede generalizarse directamente al caso de N especies en interacción. Siguiendo a Vano et al. [12], el sistema se puede expresar de manera compacta mediante

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_i x_i(t) \left(1 - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t)\right),\tag{2}$$

donde ahora a_{ij} son los elementos de una matriz que describen cómo afecta la densidad de la especie j al crecimiento de la especie i . En esta representación, la regulación de densidad está incluida dentro de los términos a_{ij} , que representan la interacción intraespecífica y, por tanto, determinan las capacidades de carga de cada especie. De hecho, en comparación con la ecuación (1), identificamos que la regulación de densidad viene dada por $a_{ii} = 1/K_i$, mientras que los términos a_{ij} (con $i \neq j$) siguen representando las interacciones entre diferentes especies. Si además añadimos las restricciones $r_i > 0$ y $a_{ij} > 0$, tenemos un modelo en el que las especies *compiten* por un conjunto limitado de recursos.

En este trabajo, estudiaremos un sistema específico con $N = 4$ especies, que se ha identificado como el sistema más pequeño que exhibe comportamiento caótico [12]. Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son, por tanto, cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que se resolverán numéricamente para distintos análisis.

2.2. Dinámica determinista del modelo

Podemos realizar un análisis dinámico del sistema determinista mediante sus puntos fijos. Estos se definen como los estados estacionarios donde, en ellos, la derivada temporal de todas las especies se anula, es decir, aquellos puntos \vec{x}^* tales que

$$\frac{dx_i^*(t)}{dt} = r_i x_i^*(t) \left(1 - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^*(t) \right) = 0.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones posibles: la solución trivial $x_i^* = 0 \forall i$, que corresponde a la extinción global del sistema; y una solución no trivial dada por la expresión

$$1 - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^*(t) = 0. \quad (3)$$

Esta solución no trivial se puede reescribir como un sistema de ecuaciones en forma matricial

$$A \vec{x}^* = \vec{u},$$

donde $A \equiv a_{ij}$, y $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)^T$, donde el superíndice T indica el traspuesto. Si la matriz de interacción A es invertible, existe una solución única dada por

$$\vec{x}^* = A^{-1} \vec{u}. \quad (4)$$

Para que esta solución sea ecológicamente válida, también tendremos que imponer $x_i \geq 0 \forall i$.

Por lo tanto, para estudiar la estabilidad de este punto de equilibrio, linealizamos el sistema alrededor de \vec{x}^* mediante el Jacobiano J , cuyas componentes vienen dadas por

$$J_{ij}(x) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = r_i \delta_{ij} \left(1 - \sum_k a_{ik} x_k \right) - r_i x_i a_{ij}$$

Evaluando en el punto fijo y usando la expresión (3), el primer término se anula, por lo que el Jacobiano se reduce a:

$$J_{ij}(x^*) = -r_i x_i^* a_{ij}.$$

2.2.1. Parámetros elegidos

Con el objetivo de explorar un régimen que permita la aparición de un comportamiento caótico, seguimos el enfoque de Vano et al. [12], que optimizan los parámetros para obtener el mayor exponente de Lyapunov. Los parámetros optimizados son

$$\vec{r} = (1, 0,72, 1,53, 1,27), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1,09 & 1,52 & 0 \\ 0 & 1 & 0,44 & 1,36 \\ 2,33 & 0 & 1 & 0,47 \\ 1,21 & 0,51 & 0,35 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando la inversa de A y aplicando la ecuación (4), obtenemos:

$$\vec{x}^* \approx (0,301, 0,459, 0,131, 0,356)^T.$$

Verificamos que todos cumplen $x_i^* \geq 0$. Sustituyendo estos valores en la expresión del Jacobiano, evaluamos su espectro:

$$\lambda_1 = -1,032, \quad \lambda_2 = 0,041 + 0,190i, \quad \lambda_3 = 0,041 - 0,190i, \quad \lambda_4 = -0,334.$$

Dos autovalores tienen parte real negativa, mientras que el par complejo conjugado posee parte real positiva. Esto implica que el equilibrio es inestable: las trayectorias cercanas se repelen en al menos una dirección.

Este comportamiento es el de un punto silla-foco (*saddle-focus*), donde coexisten direcciones que contraen y otras que expanden, con un componente rotacional inducido por los autovalores complejos. Dinámicamente, esto implica que las trayectorias cercanas al equilibrio no convergen a él, sino que se acaban alejando girando en espiral.

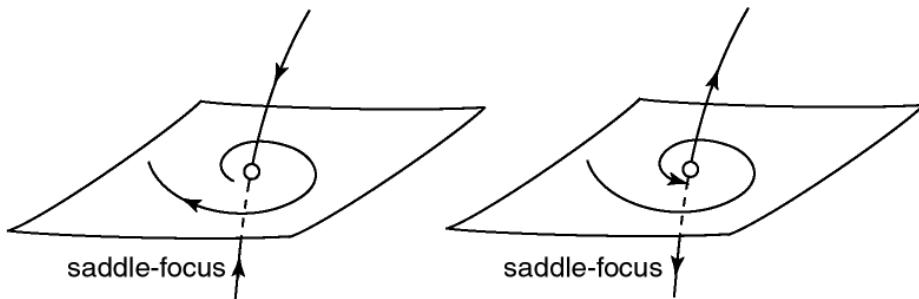


Figura 1: Ilustración tridimensional de un punto silla-foco. Izquierda: autovalor real negativo y par complejo conjugado con parte real positiva. Derecha: autovalor real positivo y par complejo conjugado con parte real negativa. Imagen adaptada de Izhikevich [5].

Nuestro caso se corresponde con el diagrama de la izquierda de la figura 1. Los autovalores complejos generan una variedad inestable bidimensional (un plano) que repele las trayectorias en espiral. A su vez, el autovalor real forma una variedad estable unidimensional (una recta) que atrae las trayectorias al punto fijo. En nuestro sistema de 4 dimensiones existen en realidad dos autovalores reales que extienden la variedad estable a dos dimensiones.

La relevancia de este comportamiento reside en que permite la aparición de caos determinista: las trayectorias divergen exponencialmente del equilibrio en ciertas direcciones, y pueden acabar en un atractor extraño y mostrar sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.

2.3. Fluctuaciones ambientales

Aunque nuestro modelo de tipo Lotka-Volterra ofrece una aproximación simplificada para entender las dinámicas ecológicas, estos modelos asumen condiciones ideales que rara vez se cumplen. En la naturaleza, las poblaciones se enfrentan continuamente a fluctuaciones ambientales impredecibles, como variaciones meteorológicas repentinas, disponibilidad variable de recursos y otros eventos de origen estocástico.

Desde un punto de vista ecológico, el ruido representa esas influencias externas no controlables. Incorporar este tipo de variabilidad en los modelos permite reflejar con mayor precisión la sensibilidad de los sistemas reales a las perturbaciones externas y mejorar la capacidad predictiva del modelo.

En nuestro caso usaremos ruido blanco *multiplicativo*, donde la intensidad de las fluctuaciones es proporcional al tamaño de la población. Esta elección permite simular fluctuaciones ambientales si consideramos la dinámica poblacional a largo plazo. Esto es posible porque, aunque en realidad las fluctuaciones ambientales tienen cierta correlación temporal, esta correlación es muy corta comparada con la escala temporal en que observamos la evolución del sistema, por lo que podemos aproximarla mediante ruido blanco [6].

Aunque existen otros tipos de ruido, como el aditivo, en este trabajo consideramos adecuado el uso de ruido blanco multiplicativo. Este tipo de ruido refleja que las fluctuaciones afectan al ritmo de crecimiento relativo de la población, ya que su intensidad es proporcional a su tamaño. Además, su implementación es sencilla mediante técnicas de integración estocástica.

2.3.1. Procesos de Wiener

El proceso de Wiener, $W(t)$, es un modelo matemático del movimiento browniano. Tiene media nula y varianza creciente linealmente con el tiempo. Sus incrementos son independientes y siguen una distribución gaussiana,

$$W(t + \Delta t) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, \Delta t).$$

En la práctica, este proceso se emplea para modelar el ruido blanco, que se define formalmente como la derivada generalizada de $W(t)$, denotada por

$$\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt}.$$

Esta derivada no existe en el sentido clásico, es decir, como una derivada ordinaria de una función diferenciable. Sin embargo, sí pueden definirse rigurosamente en el marco de los procesos estocásticos. Esta interpretación constituye la base para introducir ruido blanco en nuestras ecuaciones diferenciales estocásticas.

2.3.2. Ecuación de Langevin

Vamos a modelar nuestro ruido ambiental como un proceso de Wiener. En este contexto, implementaremos un ruido blanco multiplicativo como un término adicional en la dinámica del sistema, lo que conduce a una diferencial estocástica del tipo Langevin [3]:

$$dx(t) = F(x(t), t)dt + G(x(t), t)dW_t, \quad (5)$$

donde $F(x(t), t)$ corresponde al término determinista del sistema, concretamente a (2), mientras que $G(x(t), t)$ modela la intensidad del ruido implementado. En la ecuación (5) hemos utilizado la notación $W(t) \equiv W_t$, que será usada más adelante.

Como nos interesa principalmente el cálculo de las trayectorias, en nuestro caso es más conveniente usar la formulación integral de esta ecuación, dada por [6]

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(x(s), s)ds + \int_{t_0}^t G(x(s), s)dW_s, \quad (6)$$

donde el último término es una integral estocástica.

2.3.3. Cálculo de Itô e integrales estocásticas

Las trayectorias de un proceso de Wiener son, casi con toda probabilidad, no diferenciables. Esto conlleva que las integrales ya no se puedan entender bajo el marco del cálculo clásico, dado por las integrales de Riemann-Stieltjes. Para resolver este problema, recurrimos al cálculo de Itô, que nos proporciona una definición conveniente de la integración cuando el integrador es un movimiento browniano.

Sea $f(t, \omega)$ un proceso estocástico y $W_t(\omega)$ el proceso de Wiener, con ω un elemento del espacio de probabilidades Ω . Entonces la integral de Itô de f respecto de $W_t(\omega)$ en el intervalo $[S, T]$ se define formalmente (ver Øksendal [7]) como

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega). \quad (7)$$

Para aproximar el valor de esta integral, se divide el intervalo $[S, T]$ en subintervalos $[t_{i-1}, t_i]_{i=1, \dots, n}$, y se evalúa la función f en el extremo izquierdo de cada subintervalo. Esto da lugar a la siguiente suma:

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}, \omega) (W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)). \quad (8)$$

Tal como se ve en Øksendal [7], a medida que $(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$, esta suma converge en media cuadrática a la integral de Itô. Esto es, la varianza de la diferencia entre ambos valores disminuye según aumenta n .

Si en lugar de evaluar f en el extremo izquierdo se utilizara el punto medio de cada subintervalo, se obtendría la integral de Stratonovich, con propiedades distintas. No obstante, dado que en este trabajo utilizamos ruido blanco sin correlaciones temporales, utilizaremos la convención de Itô.

2.4. Caos y exponentes de Lyapunov

Los exponentes característicos de Lyapunov miden la sensibilidad de un sistema dinámico a perturbaciones infinitesimales en sus condiciones iniciales. Son fundamentales como cuantificadores de la estabilidad y para identificar la presencia de caos.

Formalmente, si consideramos una separación inicial $\delta x(0)$ entre dos trayectorias en el espacio de fases, y $\delta x(t)$ la evolución de dicha separación, se define (siguiendo, por ejemplo, a Strogatz [11]) el exponente de Lyapunov λ como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(0)\|} \right). \quad (9)$$

Un indicador clave es la suma de los exponentes, $\sum_i \lambda_i$, que está relacionada con la conservación de los volúmenes del espacio fásico del sistema. Si la suma es nula, entonces el sistema es conservativo (Hamiltoniano); cuando la suma es negativa, el sistema es disipativo y el espacio fásico colapsa hacia un atractor. Por último, si la suma es positiva, el sistema expande el volumen del espacio fásico.

El mayor de todos los exponentes de Lyapunov, λ_{max} , proporciona aún más información. Si $\lambda_{max} = 0$, suele estar asociado a trayectorias periódicas; si $\lambda_{max} > 0$, el sistema es caótico, ya que las trayectorias divergen; y si $\lambda_{max} < 0$, como esto implica que $\sum_i \lambda_i < 0$, de nuevo las trayectorias tienden a ser estables, convergiendo a un atractor.

Tabla 1: Interpretación de los exponentes de Lyapunov

Indicador	Condición numérica	Interpretación dinámica
$\lambda_{\max} > 0$	Divergencia exponencial de las trayectorias	Dinámica caótica
$\lambda_{\max} < 0$	Convergencia exponencial de las trayectorias	Atracción a un punto fijo o ciclo límite estable
$\lambda_{\max} = 0$	Separación subexponencial de las trayectorias	Dinámica periódica o cuasiperiódica
$\sum_i \lambda_i > 0$	Expansión de volumen en el espacio de fases	Dinámica caótica con expansión del espacio de fases
$\sum_i \lambda_i < 0$	Contracción de volumen; espacio de fases colapsa hacia el atractor	Sistema disipativo; atractores disipativos
$\sum_i \lambda_i = 0$	Conservación de volumen en el espacio de fases	Sistema conservativo (Hamiltoniano)

3. Metodología

3.1. Integración numérica del sistema

3.1.1. Sistema determinista

La resolución numérica del sistema, dado por la expresión (2), se realiza con el método de Runge-Kutta-Fehlberg (RK45) implementado en la función `solve_ivp()` de la librería `scipy.integrate` de Python. Esta elección se justifica por su alta eficiencia y precisión efectiva de orden 5(4).

Para el vector de condiciones iniciales tomaremos uno arbitrario menor que la capacidad de carga de cada especie, que en cualquier caso es $K_i = 1$. Así, se considera, salvo que explícitamente se especifique otro valor, el vector de condiciones iniciales

$$\vec{x}(0) = (0,5, 0,5, 0,5, 0,5),$$

y se integra en el intervalo temporal $[0, 500]$, espaciado en intervalos de $\Delta t = 0,005$. De esta forma, nos aseguramos suficiente precisión para la simulación, tanto para hallar su evolución temporal como para su espacio de fases.

Los programas usados en este TFG han sido desarrollados por el autor y están disponibles en el repositorio indicado en la referencia [14].

3.1.2. Sistema estocástico: método de Euler-Maruyama

La integración numérica del sistema estocástico, descrito por la ecuación de Langevin asociada a (2), se lleva a cabo mediante el esquema de Euler–Maruyama [7]. Este método constituye la extensión natural del método de Euler a ecuaciones diferenciales estocásticas y conserva primer orden de convergencia débil.

Partimos de la ecuación de Langevin

$$dx(t) = F(x(t), t)dt + G(x(t), t)dW_t, \quad (10)$$

donde W_t es un proceso de Wiener. Se discretiza el intervalo temporal $[0, T]$ en N pasos de tamaño $\Delta t = T/N$. El incremento browniano se aproxima por

$$W_{t_{n+1}} - W_{t_n} = \sqrt{\Delta t} \zeta^{(n)}, \quad \zeta^{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (11)$$

Siguiendo la motivación de modelar fluctuaciones ambientales proporcionales al tamaño poblacional, adoptamos $G(x(t), t) = x(t)$ para simular ruido multiplicativo de intensidad σ . De esta forma, podemos aproximar el resultado de la integral de Itô (6) como

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + F(x, t_{i-1})\Delta t + x(t_{i-1})\sigma\sqrt{\Delta t} \zeta(t_{i-1}). \quad (12)$$

Aplicado a la expresión (2), obtenemos la discretización

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + r_i x_i^{(n)} \left(1 - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^{(n)} \right) \Delta t + \sigma_i x_i^{(n)} \sqrt{\Delta t} \zeta_i^{(n)}, \quad (13)$$

donde $x_i^{(n)}$ es el valor de x_i en el paso n -ésimo, con $t = n\Delta t$.

Se emplea el mismo vector de condiciones iniciales que en el caso determinista,

$$\vec{x}(0) = (0,5, 0,5, 0,5, 0,5),$$

y se integra en el intervalo $[0, 500]$ con paso $\Delta t = 0,005$, lo que garantiza una resolución temporal suficiente para caracterizar la dinámica estocástica y facilitar la comparación con los resultados deterministas.

3.2. Cálculo de los exponentes de Lyapunov

El modelo estudiado en este trabajo está formulado originalmente en tiempo continuo mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, dado que la resolución numérica de estas ecuaciones requiere métodos discretos, obtenemos una aproximación discreta de la dinámica original.

La dinámica discretizada obtenida mediante estos métodos puede expresarse de forma general como:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Este sistema puede linealizarse respecto a un punto mediante el Jacobiano:

$$\delta x_{n+1} = Df(x_n)\delta x_n \equiv J_n \delta x_n.$$

Iterando esta última expresión, podemos estudiar la sensibilidad del sistema frente a las perturbaciones iniciales:

$$\delta x_N = J_{N-1}\delta x_{N-1} = (J_{N-1} \dots J_1 J_0)\delta x_0.$$

Así, los exponentes de Lyapunov en sistemas de tiempo discreto se pueden definir como el promedio logarítmico respecto del tiempo del crecimiento de las perturbaciones (ver [9]):

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \|(J_{N-1} \dots J_0)\delta x_0\|. \quad (14)$$

Este procedimiento permite obtener una estimación precisa de los exponentes de Lyapunov del modelo dado por la ecuación (2), pero considerando que la dinámica ha sido discretizada debido a la resolución numérica.

3.2.1. Sistema determinista

Para el régimen determinista, hallaremos los exponentes de Lyapunov a partir de la expresión (14). De forma numérica resulta ineficiente multiplicar directamente todos los Jacobianos J_k porque ello induce un crecimiento exponencial de los errores de redondeo. Una estrategia estándar (ver, entre otros, [13], [9]) es intercalar, tras cada paso de integración, una descomposición QR . La matriz Q_k es una matriz ortogonal (rotación) y R_k es una triangular superior con diagonal positiva, responsable de las dilataciones.

Inicialmente tenemos $J_1 = Q_1 R_1$. Si ahora definimos un $J_2^* \equiv J_2 Q_1$, que se descompone como $J_2^* = Q_2 R_2$, entonces el producto de los dos primeros Jacobianos es

$$J_2 J_1 = J_2 Q_1 R_1 = J_2^* R_1 = Q_2 R_2 R_1.$$

Si iteramos este procedimiento, en cada paso:

1. definimos $J_k^* \equiv J_k Q_{k-1}$;
2. descomponemos $J_k^* = Q_k R_k$.

Al final, el producto de todos los Jacobianos vendrá dado simplemente por

$$J_K J_{K-1} \dots J_1 = Q_K R_K R_{K-1} \dots R_1.$$

Las matrices Q_k , al ser ortogonales, conservan las normas: $|Q_k v| = |v|$. Por ello, no afectan al cambio de escala medido por los exponentes y *dentro del logaritmo pueden omitirse*. De este modo, siguiendo a Sandri [9], los elementos diagonales del producto de las matrices R_k satisfacen

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log(R_N R_{N-1} \dots R_1)_{ii} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log(R_k)_{ii}. \quad (15)$$

Para el cálculo numérico, integramos durante un tiempo total de $T = 1000$ con un paso temporal de $\Delta t = 0,005$, por lo que necesitamos $N = 2 \cdot 10^5$ iteraciones. En cada iteración k se realiza:

1. Hallamos el jacobiano J_k del sistema
2. Efectuamos la descomposición QR
3. Renormalizamos actualizando la matriz ortogonal por la nueva $Q_{k-1} \leftarrow Q_k$. Con esto las distancias vuelven a valer 1, evitando así un *overflow* numérico y los factores de estiramiento local quedan almacenados en la diagonal de R_k .
4. Se integra el sistema durante un tiempo Δt para obtener el nuevo x_{k+1}

Tras las N iteraciones, el exponente i-ésimo se estima con (15). Este valor converge cuando $N \rightarrow \infty$. Para más detalles, puede verse el código en [14].

3.2.2. Sistema estocástico: algoritmo de Benettin-Wolf

En el sistema determinista, el cálculo de los exponentes de Lyapunov se ha realizado linealizando las ecuaciones alrededor de la trayectoria y utilizando el Jacobiano para describir la evolución de las perturbaciones. Sin embargo, al introducir el término estocástico, esta linealización deja de ser directamente aplicable. Su tratamiento formal en teoría de sistemas dinámicos está fuera del alcance de este trabajo, pero existen distintos métodos de cálculo numérico para abordar este problema. En nuestro caso, utilizaremos el algoritmo de Benettin-Wolf [13], que estima el mayor exponente a partir de una trayectoria experimental sin necesidad de linealizar el sistema.

El algoritmo se puede sintetizar en los siguientes puntos:

1. Tomamos un punto de referencia y un vecino cercano, y tomamos la distancia euclíadiana entre ambos, denotada por $L(t_0)$.
2. Evolucionamos el sistema un tiempo pequeño t_1 , y hallamos la nueva distancia $L'(t_1)$.
3. Guardamos el valor de $\log(L'(t_1)/L(t_0))$.
4. Avanzamos el punto de referencia un tiempo τ y tomamos un nuevo vecino cercano. Con esto controlamos que la distancia no haga *overflow* numérico, pero la orientación puede cambiar. Esto no es un problema: al promediar los crecimientos sobre muchos reemplazos la contribución dominante sigue siendo la asociada a λ_1 .

Con esto obtenemos un *array* de valores del logaritmo de la tasa de crecimiento. Finalmente, como se explica en [13], obtenemos el mayor exponente de Lyapunov promediando en el tiempo

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{M\Delta t} \sum_{k=1}^M \log \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})}, \quad (16)$$

donde M es el número de pasos temporales y Δt el tamaño de los mismos.

Tomamos un intervalo de evolución de $\tau = 25$ (500 pasos), lo bastante largo para capturar el crecimiento de la separación sin abandonar el régimen lineal. Para evitar que el vecino sea una misma trayectoria que se reencuentra, exigimos una exclusión temporal mínima de 180 pasos. Con un total de 10^5 pasos, esto deja unas 200 renormalizaciones. Para reducir la varianza, calculamos el exponente sobre 1000 puntos de referencia igualmente espaciados y promediamos los resultados.

4. Resultados

Esta sección se estructura en tres bloques interdependientes. En primer lugar, se caracteriza la dinámica determinista del modelo de Lotka-Volterra (2), estableciendo la referencia base. Tras esto, se incorpora ruido blanco multiplicativo y se cuantifican sus efectos sobre las trayectorias y las tasas de extinción. Por último, se examina la relación entre el régimen caótico y el número de extinciones a lo largo de un barrido sistemático en la intensidad del ruido. En el apéndice A se describen los procedimientos de validación numérica: la convergencia del integrador Euler-Maruyama y la calibración del algoritmo de Benettin-Wolf.

4.1. Modelo determinista

Antes de introducir las fluctuaciones ambientales, caracterizamos la dinámica del sistema de Lotka–Volterra definido en la ecuación (2), con los parámetros optimizados y condiciones iniciales

según lo expuesto en la sección 3.1.1. Para ver las variaciones en las poblaciones nos basta con tomar un tiempo de integración de $T = 500$ con un paso temporal de $\Delta t = 0,005$ y resolver con el método de RK45. Este análisis establece el régimen determinista de referencia frente al cual se evaluarán posteriormente los efectos del ruido.

En la figura 2 se representa la evolución temporal de las cuatro especies. Se observa cómo las poblaciones interactúan de forma no lineal y muestran una coexistencia dinámica, sin converger a un equilibrio estacionario. Esta oscilación sostenida sugiere la existencia de un atractor extraño.

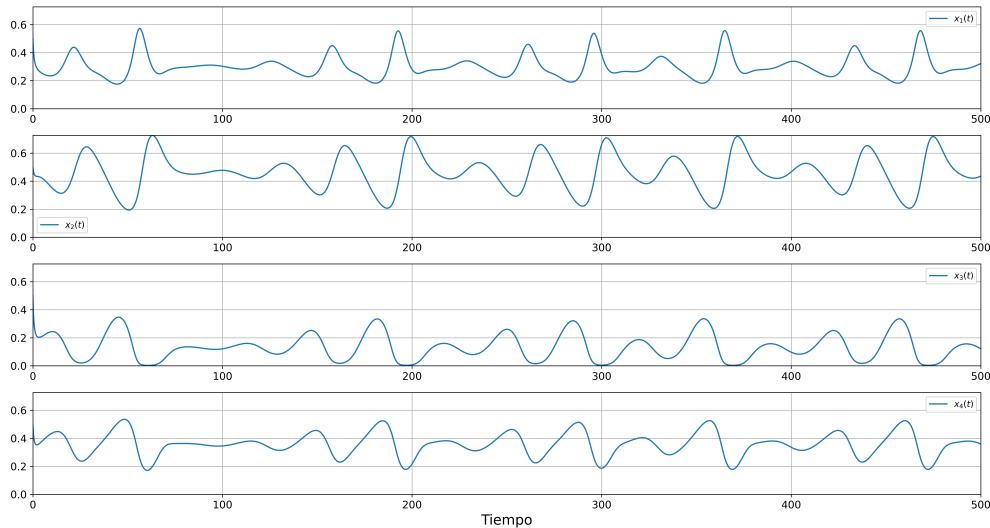


Figura 2: Evolución temporal de las poblaciones para el sistema determinista (2). La integración numérica se ha realizado con RK45, durante un tiempo $T = 500$ con paso $\Delta t = 0,005$. Las trayectorias reflejan una oscilación persistente sin convergencia al equilibrio, característica de una dinámica caótica.

Para entender mejor la estructura subyacente, representamos el espacio de fases tridimensional de nuestro sistema (figura 3), omitiendo una de las especies para facilitar la visualización. Las trayectorias revelan un atractor que sugiere un comportamiento caótico, pero por sí solo no lo confirma.

Al representar el espacio de fases de este sistema, obtenemos, como esperábamos, el atractor extraño, representado en la figura . Al ser una proyección en 3 dimensiones de un sistema de 4, hemos omitido una especie, decisión que no altera el resultado. En este caso, se integra hasta un tiempo $T = 2000$ u.t.

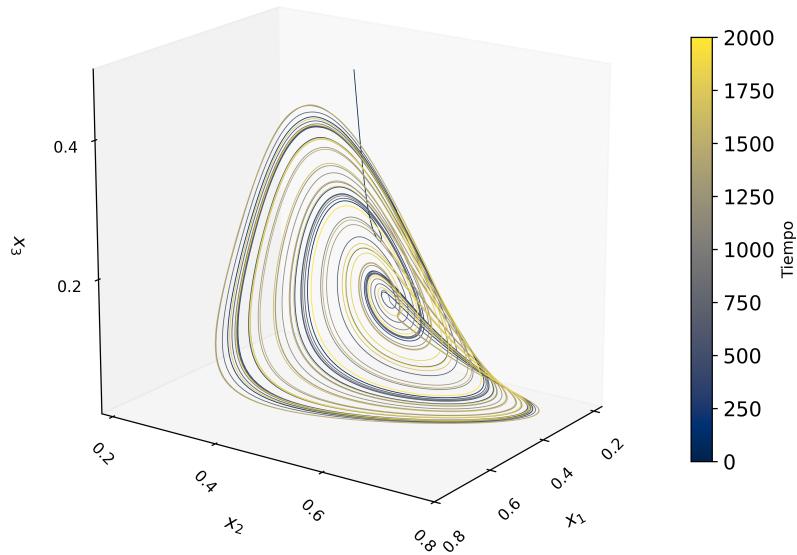


Figura 3: Proyección tridimensional del espacio de fases del sistema determinista (2), integrando numéricamente con el método RK45 hasta $T = 2000$ con paso $\Delta t = 0,005$. Se toma ese T para permitir que el sistema realice varias órbitas, y se omite una de las especies para facilitar la visualización. Las trayectorias revelan una estructura no periódica compatible con un atractor extraño, lo que apoya la presencia de caos determinista.

Esta dinámica caótica puede cuantificarse con el cálculo de los exponentes de Lyapunov, siguiendo el método explicado en la sección 3.2.1. En la figura 4 se muestra la convergencia de los exponentes tras 10^5 iteraciones durante un tiempo de integración de $T = 5000$. Tomamos un valor de T alto para que los exponentes converjan. La positividad λ_1 confirma la presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales y, por lo tanto, de caos determinista.

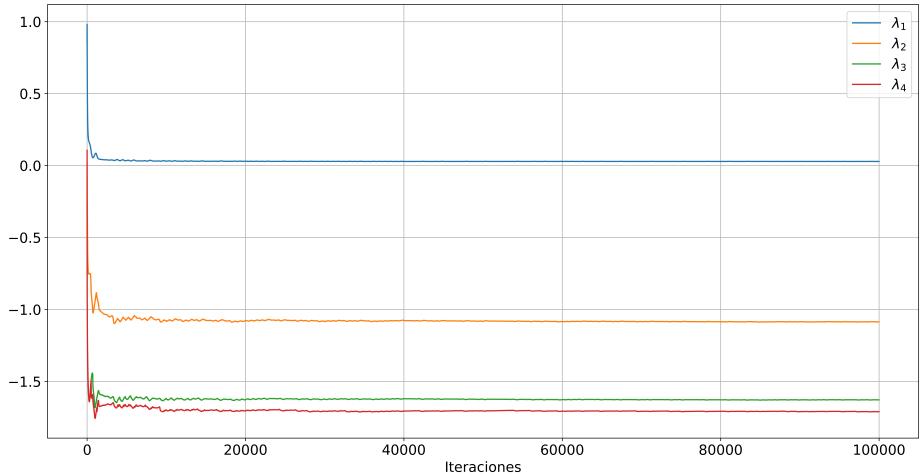


Figura 4: Evolución temporal de los cuatro exponentes de Lyapunov λ_i en el régimen determinista del sistema (2). Se calculan mediante el método descrito en la sección 3.2.1, a partir de la expresión (15). La integración se realiza hasta $T = 5000$, con paso $\Delta t = 0,005$. La convergencia de $\lambda_1 > 0$ confirma el carácter caótico del sistema, mientras que la suma negativa de los exponentes indica disipación.

La tabla 2 resume los valores obtenidos junto con sus desviaciones estándar, halladas sobre la mitad final de las iteraciones para reducir el efecto de transitorios. El valor $\lambda_1 = 0,029$ implica un horizonte de predictibilidad de $1/\lambda_1 \approx 35$. La suma negativa de los exponentes indica que el sistema es disipativo y que las trayectorias colapsan hacia un atractor extraño.

Exponente	Valor promedio	Desviación estándar
λ_1	0.029	0.001
λ_2	-1.047	0.004
λ_3	-1.613	0.004
λ_4	-1.742	0.004

Tabla 2: Valores promedio y desviaciones estándar de los exponentes de Lyapunov en el caso determinista.

En conjunto, estos resultados confirman que el sistema, bajo condiciones deterministas, presenta una dinámica caótica asentada sobre un atractor disipativo de estructura compleja.

Es importante señalar que los valores obtenidos para los exponentes de Lyapunov difieren ligeramente de los reportados por Vano et al. [12], quienes obtienen, por ejemplo, $\lambda_1 = 0,0203$. Esta discrepancia puede deberse a diferencias en la implementación numérica o en la resolución temporal empleada.

4.2. Modelo estocástico

Una vez caracterizado el régimen determinista, introducimos fluctuaciones ambientales mediante un término de ruido blanco multiplicativo, según la ecuación de Langevin (5), e implementado numéricamente mediante el método de Euler–Maruyama (sección 3.1.2). Las simulaciones se realizan con las mismas condiciones iniciales y parámetros que en el caso anterior, manteniendo un

paso temporal $\Delta t = 0,005$ y una duración total de $T = 500$.

El objetivo es analizar cómo afecta el ruido a la estabilidad del sistema y a las trayectorias de las especies. Para comparar ambas dinámicas de forma coherente, en la figura 5 se muestran las evoluciones temporales del sistema con y sin ruido ($\sigma = 0,03$), utilizando en ambos casos el mismo integrador. Se observa que las trayectorias se vuelven más irregulares, aunque todavía persiste la coexistencia entre especies.

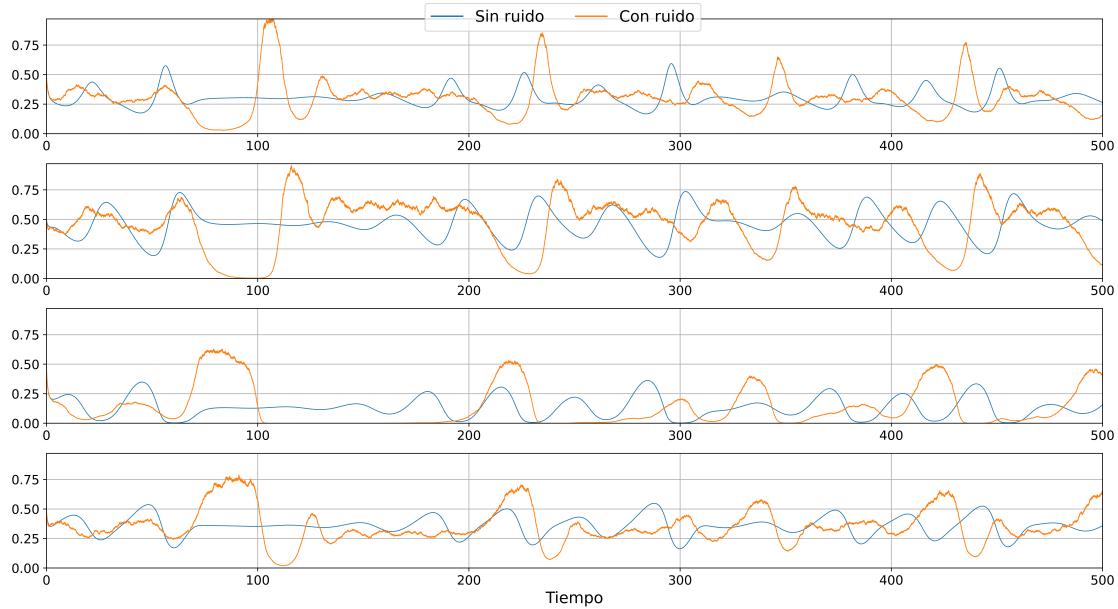


Figura 5: Comparación de las trayectorias temporales $x_i(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Langevin (5), sin ruido ($\sigma = 0$) y tras aplicar una pequeña intensidad de ruido ($\sigma = 0,03$). En ambos casos se usa el método de Euler-Maruyama con tiempo de integración $T = 500$ y paso $\Delta t = 0,005$. Las fluctuaciones ambientales aumentan la irregularidad de las trayectorias.

Para identificar extinciones dentro de nuestras simulaciones, introducimos un umbral mínimo de densidad poblacional fijado en $x_i < 10^{-9}$. Este valor ha sido seleccionado porque, una vez alcanzado, la especie correspondiente no logra recuperarse dentro del intervalo de integración considerado ($T = 500$). Dado que las fluctuaciones del ruido son proporcionales al tamaño poblacional, una densidad tan baja implica que las perturbaciones son también minúsculas, impidiendo una reversión efectiva del proceso extintivo. Este criterio permite distinguir numéricamente entre poblaciones activas y especies funcionalmente extintas.

Con una intensidad de ruido algo mayor ($\sigma = 0,04$), la figura 6 muestra cómo una de las especies se extingue, mientras que las restantes ajustan su comportamiento dinámico. La extinción modifica las interacciones y, en consecuencia, altera la estructura global del sistema.

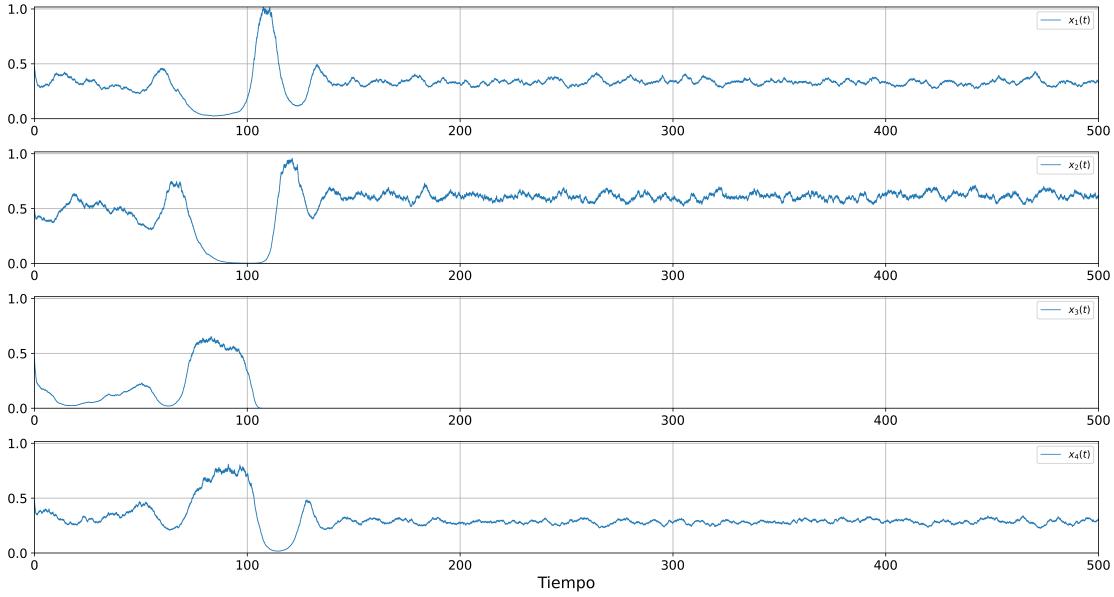


Figura 6: Evolución temporal del sistema estocástico (13) con ruido blanco multiplicativo de intensidad $\sigma = 0,04$. El método de integración es Euler-Maruyama con paso $\Delta t = 0,0005$ en un intervalo $T = 500$. La densidad de la tercera especie cae por debajo del umbral de extinción, $x_3 < 10^{-9}$, alterando la dinámica de las restantes.

Este resultado evidencia que incluso niveles moderados de ruido pueden provocar transiciones cualitativas abruptas, como la pérdida irreversible de especies.

4.3. Análisis del Caos

Para evaluar de forma sistemática cómo la intensidad del ruido afecta al comportamiento dinámico del sistema, realizamos un barrido paramétrico en σ , desde 0 hasta 1.5, con 5000 valores equidistantes. En cada caso se resuelve el sistema estocástico mediante el método de Euler–Maruyama, integrando durante un tiempo total de $T = 5000$ unidades temporales, con un paso temporal $\Delta t = 0,05$.

Para reducir la dependencia de las condiciones iniciales, en cada simulación se aleatoriza el vector x_0 , manteniendo valores dentro del rango ecológicamente relevante. A partir de cada trayectoria obtenida, se estima el mayor exponente de Lyapunov λ_1 mediante el algoritmo de Benettin–Wolf, descrito en la sección 3.2.2. Asimismo, se registra el número total de extinciones E en cada realización, aplicando el umbral definido en el apartado anterior.

Los resultados se presentan en la figura 7. En el panel (a) se observa cómo la intensidad del ruido modula el valor de λ_1 . La respuesta no es monótona: para valores bajos de σ , el sistema conserva una dinámica caótica moderada; a medida que σ aumenta, se observan transiciones abruptas en la sensibilidad dinámica, con zonas de mayor o menor expansión exponencial. En el panel (b), se muestra el número de extinciones correspondiente a cada simulación. Se aprecia la aparición de mesetas, en las que el número de especies supervivientes permanece constante durante ciertos rangos de σ , intercaladas con saltos bruscos.

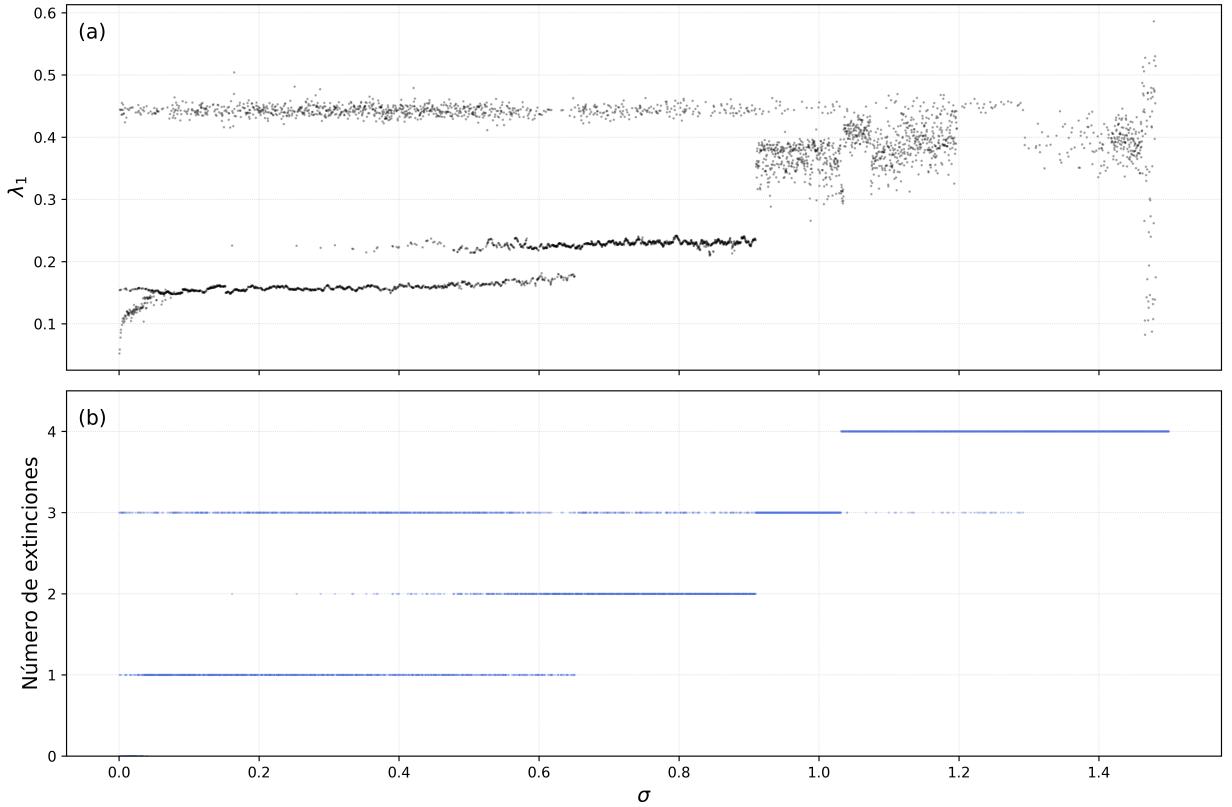


Figura 7: (a) Valor del mayor exponente de Lyapunov λ_1 estimado con el algoritmo de Benettin-Wolf (16), frente a la intensidad del ruido σ , para el sistema estocástico descrito por (13). (b) Número total de extinciones en cada simulación, aplicando un umbral de $x_i < 10^{-9}$. En ambos casos, se integra hasta $T = 5000$ con paso $\Delta t = 0,05$. El valor relativamente alto de Δt puede introducir imprecisiones en la estimación de λ_1 . Se observan mesetas y transiciones que evidencian una reorganización no lineal del espacio de fase inducida por el ruido.

Este análisis revela que el ruido no actúa solo como una perturbación difusa, sino como un agente estructurador del espacio de fases. La coexistencia de atractores con diferente grado de caos, la aparición de ventanas de sincronización, y la relación directa entre extinción y sensibilidad dinámica son manifestaciones de una complejidad emergente no lineal, profundamente dependiente de la estocasticidad ambiental.

A partir de estos datos, se observa que para intensidades moderadas del ruido ($\sigma \lesssim 1$), el sistema presenta bandas de valores casi constantes para λ_1 : una superior cercana a 0,45 y otra inferior en torno a 0,17. Estas bandas reflejan la coexistencia de varios atractores, entre los que el sistema alterna al variar σ . Dentro del intervalo $0,5 \leq \sigma \leq 1$ aparece un tercer régimen intermedio, lo que sugiere un paisaje dinámico multiescala. Al superar $\sigma \approx 1$, las extinciones rápidas distorsionan la estimación de λ_1 , generando una nube de puntos dispersa.

El comportamiento observado en λ_1 se refleja también en el número de extinciones E , que exhibe mesetas escalonadas asociadas a cambios en la dinámica del sistema. A menor número de especies, λ_1 tiende a aumentar, lo que indica que la interacción entre especies amortigua el caos. El ruido actúa así como catalizador de bifurcaciones, y la relación entre σ y E es no monótona: ciertas extinciones múltiples ocurren antes que otras más simples. La dispersión creciente de λ_1 cerca de $\sigma \approx 0,5$ y $\sigma \approx 1$ indica la aparición y desaparición de atractores competitivos. Cada extinción

elimina términos no lineales del sistema, amplificando la sensibilidad de las poblaciones restantes.

5. Conclusiones y discusión

El análisis realizado ha mostrado que el ruido estocástico no actúa como una simple perturbación, sino como un mecanismo organizador de la dinámica poblacional. Frente a la complejidad del régimen determinista, donde ya emergía caos, la introducción de ruido genera transiciones abruptas en la estructura del sistema: zonas de sincronización, bifurcaciones dinámicas y extinciones irreversibles. Se ha observado una correspondencia clara entre la intensidad del ruido, la sensibilidad caótica y la pérdida de biodiversidad, lo que sugiere que la variabilidad ambiental tiene un papel activo en moldear el ecosistema.

5.1. Implicaciones dinámicas

El ruido reorganiza el espacio de fases, induciendo bifurcaciones sucesivas. A intensidades moderadas aparecen atractores intermedios y zonas de alternancia entre regímenes. La desaparición de especies reduce la dimensión efectiva del sistema, lo que, paradójicamente, puede amplificar la sensibilidad a las condiciones iniciales. Este fenómeno podría interpretarse como una manifestación de caos inducido por reducción del acoplamiento.

5.2. Relevancia ecológica

Las extinciones observadas no son lineales ni progresivas, sino que responden a umbrales críticos. Esto sugiere que, en ecosistemas reales, pequeñas fluctuaciones ambientales podrían desencadenar colapsos abruptos si se supera cierta intensidad de perturbación. En ese sentido, la gestión ecológica debería contemplar la estocasticidad como parte estructural del sistema, no como un factor externo o secundario.

5.3. Limitaciones y posibles mejoras

Aunque se ha utilizado ruido blanco multiplicativo por su implementación sencilla y relevancia ecológica, podrían explorarse alternativas más complejas como el ruido coloreado, que introduce correlaciones temporales. Modelarlo exige acoplar variables auxiliares y manejar el tiempo de correlación, lo que complica tanto la integración como el análisis. Para una introducción, véase [3, 7].

En cuanto al integrador numérico, hemos visto que nuestro método no era demasiado preciso (ver figura 8). El método de Euler–Maruyama tiene orden fuerte de convergencia 0.5. Una mejora natural sería el método de Milstein, de orden fuerte 1, que reduce errores sin disminuir tanto el paso Δt . Sin embargo, requiere derivadas adicionales y una implementación más técnica, especialmente en sistemas de varias especies o con ruido no lineal.

Una última limitación técnica reside en la sensibilidad del cálculo de los exponentes de Lyapunov a los parámetros numéricos empleados. Aunque nuestro valor estimado en el caso determinista está en el rango esperado para dinámicas caóticas, resulta ligeramente superior al reportado en Vano et al. [12]. Esta diferencia puede atribuirse a factores como la discretización temporal, el esquema de integración o incluso en la estrategia de renormalización en el algoritmo *QR*. En trabajos futuros podría evaluarse la estabilidad del resultado frente a esas condiciones.

6. Apéndices

A. Convergencia del método de Euler-Maruyama

Vamos a ver la precisión de nuestro integrador estocástico: el método de Euler-Maruyama. Para esto, resolveremos el sistema cuando la intensidad del ruido se anula, $\sigma = 0$, con ambos métodos de integración. Primero, con la función `solve_ivp()`, que utiliza el RK45; y en segundo lugar con Euler-Maruyama con un paso temporal de $dt = 0,0005$.

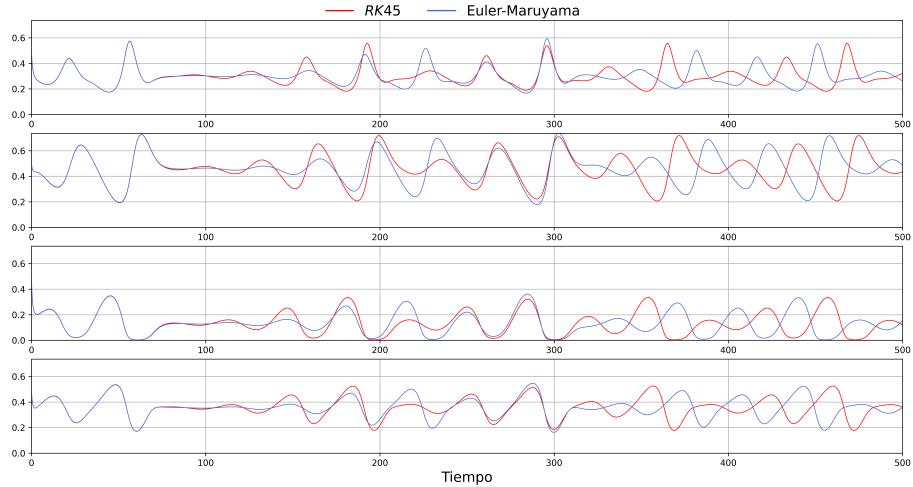


Figura 8: Comparación de una trayectoria individual del sistema determinista resuelta con RK45 frente a la obtenida con el método de Euler–Maruyama (13), en ausencia de ruido ($\sigma = 0$). Se usa un paso $\Delta t = 0,0005$. Aunque ambas coinciden hasta $T \approx 300$, divergen posteriormente, como es esperable. La figura ilustra la precisión limitada del integrador estocástico en el régimen determinista.

La coincidencia visual entre ambas trayectorias dura hasta $T = 300$, momento a partir del cual divergen, como es de esperar. Sin embargo, esta comparación no es completamente directa: aunque el método de Euler Maruyama comparte la estructura del esquema de Euler, que resulta inestable en muchos casos deterministas, en sistemas estocásticos puede mostrar un comportamiento más regular. De hecho, bajo ciertas condiciones, como la presencia de ruido aditivo, se mitigan las inestabilidades numéricicas, permitiendo que el método sea útil incluso sin modificaciones adicionales (véase Abdulle et al. [1]).

B. Parametrización del algoritmo de Benettin-Wolf

El algoritmo calcula el mayor exponente de Lyapunov a partir de la serie (16). Aparte de los parámetros definidos anteriormente para este método, tenemos que dar nuevos valores a otros que ya teníamos. Ahora el rango temporal es mayor, hasta 5000 u.t.. Esto es totalmente necesario, ya que, como explican en Wolf et al. [13], para aplicar este método el sistema debe haber dado suficientes órbitas alrededor de su atractor. Como queremos mantener el número de pasos temporales en 10^5 para que las simulaciones no sean demasiado pesadas, debemos cambiar el intervalo temporal a $dt = 0,05$.

Para comprobar que el método está bien parametrizado, podemos aplicarlo al caso de intensidad de ruido nula. De esta forma, debemos obtener el mayor exponente de Lyapunov coincidente con

el obtenido con el caso determinista.

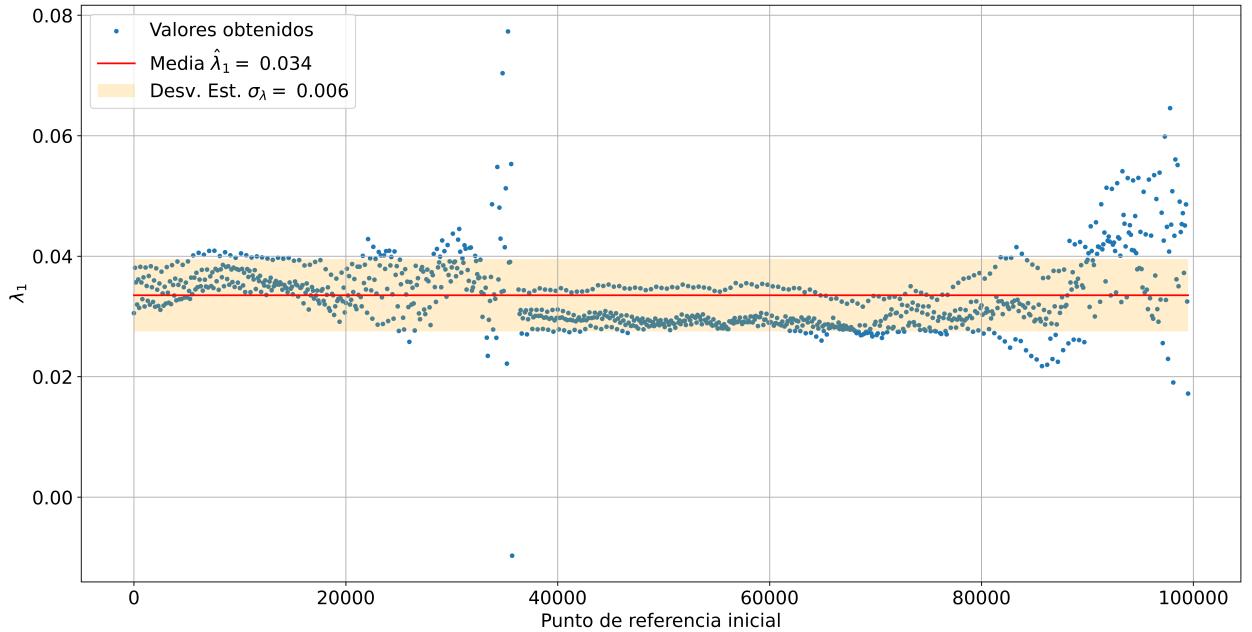


Figura 9: Distribución de los valores del mayor exponente de Lyapunov λ_1 estimados con el algoritmo de Benettin–Wolf (16) para el sistema sin ruido ($\sigma = 0$). Se emplean 10^5 puntos con paso $\Delta t = 0,05$ en un intervalo $T = 5000$, variando los puntos de referencia. Las zonas de dispersión corresponden a transitorios o regiones de pocas renormalizaciones. El valor promedio coincide, dentro del error, con el hallado en el caso determinista (figura 4), validando los parámetros del método.

En la figura 9 podemos ver la distribución de los valores estimados del mayor exponente de Lyapunov para nuestro sistema sin ruido, variando el punto de referencia inicial. Hay dos zonas en las que los valores se dispersan. Una es en los puntos finales, pero es lo esperado, ya que en esos puntos se pueden hacer muy pocas renormalizaciones. La otra zona es alrededor del punto $3,5 \cdot 10^4$, y parece ser intrínseca al sistema, ya que aparece para distintas configuraciones.

Lo importante es que obtenemos un valor que, teniendo en cuenta su desviación estándar, coincide con el obtenido con el método utilizado en el caso determinista. Con esto, concluimos que los parámetros elegidos son válidos. Este valor coincide con el expuesto en la tabla 2, con lo que podemos concluir que los parámetros seleccionados son válidos.

7. Bibliografía

Referencias

- [1] Assyr Abdulle et al. “High Weak Order Methods for Stochastic Differential Equations Based on Modified Equations”. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 34.3 (ene. de 2012), A1800-A1823. DOI: 10.1137/110846609.
- [2] Bernat Bassols-Cornudella y Jeroen S. W. Lamb. “Noise-induced chaos: a conditioned random dynamics perspective”. en. En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 33.12 (dic. de 2023), pág. 121102. DOI: 10.1063/5.0175466.
- [3] Crispin W. Gardiner. *Handbook of stochastic methods: for physics, chemistry and the natural sciences*. Study ed., 2. ed., 6. print. Springer series in synergetics. Springer, 2002. ISBN: 978-3-540-61634-4 978-3-540-15607-9.
- [4] Nicholas J. Gotelli. *A Primer of Ecology*. 4th. Sinauer Associates, 2008. ISBN: 978-0-87893-318-1.
- [5] Eugene M. Izhikevich. *Equilibrium figure 3d*. https://www.scholarpedia.org/wiki/File:Equilibrium_figure_3d.gif. Imagen adaptada para uso académico. 2007.
- [6] Rodrigo Crespo Miguel. “Statistical Physics applied to Population Dynamics”. Director: Francisco Javier Cao García. Tesis doctoral. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid, 2022.
- [7] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6th. Universitext. Springer, 2003. ISBN: 978-3-540-04758-1. DOI: 10.1007/978-3-642-14394-6.
- [8] O. A. Rosso et al. “Distinguishing Noise from Chaos”. en. En: *Physical Review Letters* 99.15 (oct. de 2007), pág. 154102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.154102.
- [9] Marco Sandri. “Numerical calculation of Lyapunov exponents”. En: *Math. J.* 6 (ene. de 1996).
- [10] Bernardo Spagnolo et al. “Noise-induced effects in population dynamics”. En: *Journal of Physics: Condensed Matter* 14.9 (mar. de 2002), págs. 2247-2255. DOI: 10.1088/0953-8984/14/9/313.
- [11] Steven H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Second edition. Westview Press, a member of the Perseus Books Group, 2015. ISBN: 978-0-8133-4910-7.
- [12] J A Vano et al. “Chaos in low-dimensional Lotka–Volterra models of competition”. En: *Nonlinearity* 19.10 (oct. de 2006), págs. 2391-2404. DOI: 10.1088/0951-7715/19/10/006.
- [13] Alan Wolf et al. “Determining Lyapunov exponents from a time series”. En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16.3 (jul. de 1985), págs. 285-317. DOI: 10.1016/0167-2789(85)90011-9.
- [14] José Enrique Zafra Mena. *TFG*. Repositorio con todo el código y los scripts usados para las simulaciones numéricas. 2025. URL: <https://github.com/jenriquezafra/TFG>.