Universität Duisburg-Essen
Lehrstuhl für Ökonometrie
Dr. Yannick Hoga
MSc. Martin Arnold

Wintersemester 2022/23

Übungsblatt 2 — Grundlagen in Statistik

Zu diesem Übungsblatt empfehlen wir neben der Lektüre der Kapitel 2 und 3 des Lehrbuches *Introduction to Econometrics* von *Stock & Watson* eine Aufarbeitung mithilfe der Kapitel 2 und 3 in unserem Online-Companion *Introduction to Econometrics with R*.

Aufgabe 1

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und X, Y, Z reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

1. $\mathsf{Var}\,(aX+b) = a^2 \mathsf{Var}\,(X)$
2. $\mathsf{Var}\,(X+Y) = \mathsf{Var}\,(X) + \mathsf{Var}\,(Y) + 2\mathsf{Cov}\,(X,Y)$
3. Beweisen Sie den Verschiebungssatz für a) die Varianz und b) die Kovarianz, d.h.

$$\mathsf{Var}\,(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 \text{ und } \mathsf{Cov}\,(X,Y) = \mathsf{E}\,(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y).$$

4. Seien $X_1,\ X_2$ unabhängig und identisch $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Bestimmen Sie $\mathsf{E}([X_1 - X_2]^2)$.

Lösung:

1. Es gilt per Definition der Varianz:

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\,(aX+b) &= \mathsf{E}\left\{(aX+b-\mathsf{E}[aX+b])^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{(aX+b-a\mathsf{E}(X)-b)^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{(a[X-\mathsf{E}(X)])^2\right\}\\ &= a^2\mathsf{E}\left\{(X-\mathsf{E}[X])^2\right\}\\ &= a^2\mathsf{Var}(X)\end{aligned}$$

2. Es gilt per Definition der Varianz:

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\,(X+Y) &= \mathsf{E}\left\{(X+Y-\mathsf{E}[X+Y])^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{[X-\mathsf{E}(X)+Y-\mathsf{E}(Y)]^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{[X-\mathsf{E}(X)]^2+2[X-\mathsf{E}(X)][Y-\mathsf{E}(Y)]+[Y-\mathsf{E}(Y)]^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{[X-\mathsf{E}(X)]^2\right\}+\mathsf{E}\left\{[Y-\mathsf{E}(Y)]^2\right\}+2\mathsf{E}\left\{[X-\mathsf{E}(X)][Y-\mathsf{E}(Y)]\right\}\\ &= \mathsf{Var}\,(X)+\mathsf{Var}\,(Y)+2\mathsf{Cov}\,(X,Y)\end{aligned}$$

3. Es gilt per Definition:

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\,(X) &= \mathsf{E}\left\{(X-\mathsf{E}[X])^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{X^2-2X\mathsf{E}[X]+\mathsf{E}[X]^2\right\}\\ &= \mathsf{E}(X^2)-2\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(X)+\mathsf{E}(X)^2\\ &= \mathsf{E}(X^2)-\mathsf{E}(X)^2.\end{aligned}$$

Ebenso gilt per Definition:

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}(X,Y) &= \mathsf{E}\left\{(X-\mathsf{E}[X])(Y-\mathsf{E}[Y])\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{XY - X\mathsf{E}[Y] - \mathsf{E}[X]Y + \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]\right\}\\ &= \mathsf{E}[XY] - 2\mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y] + \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y]\\ &= \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y].\end{aligned}$$

4. $\mathsf{E}([X_1 - X_2])^2$ ist gesucht.

   Es ist

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(X_1 - X_2) =& \mathsf{E}\left[(X_1 - X_2)^2\right] - \mathsf{E}(X_1 - X_2)^2 && \text{(Verschiebungssatz)}\\ \Leftrightarrow \mathsf{E}([X_1 - X_2])^2 =& \mathsf{Var}(X_1 - X_2) + \mathsf{E}(X_1 - X_2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(X_1 - X_2) =& \mathsf{Var}(X_1) + \mathsf{Var}(X_2) = 1 + 1 = 2 && (X_1, X_2 \text{ unabhängig})\\ \mathsf{E}(X_1 - X_2) =& \mathsf{E}(X_1) - \mathsf{E}(X_2) = 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

   Insgesamt gilt also

$$\mathsf{E}([X_1 - X_2])^2 = \mathsf{Var}(X_1 - X_2) = 2.$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie erneut zwei Zufallsvariablen X und Y. Zeigen Sie:

(a) Falls X und Y unabhängig sind, gilt $\mathsf{Cov}(X,Y) = 0$. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)$.

(b) Die Umkehrung von (a) gilt i.A. nicht.

Lösung:

(a) Beh.:

$$X, Y \text{ unabhängig } \Rightarrow \mathsf{Cov}(X,Y) = 0$$

Bew.:

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}(X,Y) &= \mathsf{E}\left[(X - \mathsf{E}(X))(Y - \mathsf{E}(Y))\right]\\ &= \mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) && \text{(Verschiebungssatz)}\\ &= \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y) && (X,Y \text{ unabhängig})\\ &= 0\end{aligned}$$

Denn:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (X,Y \text{ unabhängig})\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y\\ &= \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)\end{aligned}$$

(b) Beh.:

$$\text{i.A.: } \mathsf{Cov}(X,Y) = 0 \;\not\Rightarrow\; X, Y \,\text{unabh.}$$

Bew.:

Es gilt für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}(X,X^2) &= \mathsf{E}(XX^2) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(X^2) \qquad \text{(Aufgabe 1, 3.)}\\ &= \underbrace{\mathsf{E}(X^3)}_{=0(\text{ symm.})} - \underbrace{\mathsf{E}(X)}_{=0} \underbrace{\mathsf{E}(X^2)}_{=\mathsf{Var}(X)-\mathsf{E}(X)^2=1-0^2=1}\\ &= 0\end{aligned}$$

Aber X, X^2 sind offenbar nicht unabhängig.

Aufgabe 3

(a) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, d.h. X ist standardnormalverteilt. Zeigen Sie, dass $Z := \mu + \sigma X$ Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besitzt. Dementsprechend ist $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable in Abhängigkeit von der Verteilungsfunktion $\Phi(\cdot)$ einer $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariable. Berechnen Sie damit die Dichte einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable. Benutzen Sie hierfür das Ergebnis aus (a).

Lösung:

(a) Erwartungswert von Z:

$$\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}(\mu + \sigma X) = \mu + \sigma \mathsf{E}(X) = \mu \qquad \text{(Linearität)}$$

Varianz von Z:

$$\mathsf{Var}(Z) = \mathsf{Var}(\mu + \sigma X) = \mathsf{Var}(\sigma X) = \sigma^2 \mathsf{Var}(X) = \sigma^2 \qquad \text{(s. Aufgabe 1.1)}$$

(b) Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Verteilungsfunktion F und Dichte f:

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(\mu + \sigma X \leq z) = P(\sigma X \leq z - \mu) = P(X \leq \tfrac{z-\mu}{\sigma}) = \Phi(\tfrac{z-\mu}{\sigma})$$

$$f(z) = F'(z) = \tfrac{d}{dz}(\tfrac{z-\mu}{\sigma}) \cdot \Phi'(\tfrac{z-\mu}{\sigma}) = \tfrac{1}{\sigma}\phi(\tfrac{z-\mu}{\sigma}) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(z-\mu)^2)$$

Aufgabe 4

Diese Aufgabe befasst sich mit dem *Gesetz der großen Zahlen* (law of large numbers/LNN) Eine grafische Veranschaulichung finden Sie im Online-Companion zum Lehrbuch in *Key Concept 2.6*.

Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Zufallsvariablen.

(a) Ist auch $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ eine Zufallsvariable? Begründen Sie! Können Sie die Verteilungsfunktion von $\overline{Y}$ bestimmen?

(b) Nehmen Sie an es ist $\mu = 10$ und $\sigma^2 = 4$. Zeigen Sie, dass $P(10 - \epsilon \leq \overline{Y} \leq 10 + \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ gegen 1 konvergiert für $n \to \infty$.

(c) Benutzen Sie das Resultat aus (b) um zu zeigen, dass $\overline{Y} \xrightarrow{p} 10$, d.h. $\overline{Y}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen $\mu = 10$.

Lösung:

(a) Ja, $\overline{Y}$ ist eine lineare Funktion der Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ und ist damit ebenfalls eine Zufallsvariable.

Für den Erwartungswert von $\overline{Y}$ gilt

$$\mathsf{E}(\overline{Y}) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(Y_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu.$$

Für die Varianz von $\overline{Y}$ finden wir

$$\mathsf{Var}(\overline{Y}) = \mathsf{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(\overline{Y}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Da $Y_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist, folgt

$$\overline{Y} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

(b) Mit dem Ergebnis aus (a) folgt $\frac{\overline{Y}-10}{\sqrt{4/n}} =: Z \sim N(0, 1)$. Wir schreiben $\overline{Y} = Z \cdot \sqrt{4/n} + 10$, setzen für $\overline{Y}$ ein und formen um:

$$P(10 - \epsilon \leq \overline{Y} \leq 10 + \epsilon) = P\left(\underbrace{-\frac{\epsilon}{\sqrt{4/n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} -\infty} \leq Z \leq \underbrace{\frac{\epsilon}{\sqrt{4/n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} +\infty}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

(c)

$$\begin{aligned} P(10 - \epsilon \leq \overline{Y} \leq 10 + \epsilon) &= P(-\epsilon \leq \overline{Y} - 10 \leq \epsilon) \\ &= P(|\overline{Y} - 10| \leq \epsilon) \end{aligned}$$

Mit (b) folgt

$$P(|\overline{Y} - 10| \leq \epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \text{ d.h. } \overline{Y} \xrightarrow{p} 10.$$

Für die i.i.d. Zufallsvariablen $Y_i, i = 1, \ldots, n$ konvergiert $\overline{Y}$ für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $E(Y) = 10$.