Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Lehrstuhl für Ökonometrie

Wintersemester 2024/2025

Jens Klenke

R Propädeutikum

Übungsaufgaben 3

1 Verteilungen und Zufallszahlen

1.1 Sei $X \sim t(5)$. Berechnen Sie $P(X < 6)$, $P(3 < X \leq 7)$ und $P(X > 4)$.

1.2 Berechnen Sie das 0.95-Quantil einer $F(4,5)$-verteilten Zufallsvariable.

1.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Jackpot im Lotto zu gewinnen (d.h. 6 Richtige aus 49). Vernachlässigen Sie bei Ihrer Berechnung Zusatz- oder Superzahlen. (Hinweis: Benutzen Sie die hypergeometrische Verteilung.)

1.4 Erzeugen Sie 20 $\chi^2(5)$-verteilte Zufallszahlen ohne (!) dabei die `rchisq()`-Funktion zu benutzen.

Hinweis: $\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ mit $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ für alle $i = 1, ..., n$.

1.5 Ziehen Sie 10-mal standardnormalverteilte Zufallszahlen vom Umfang $n = 10000$ und berechnen Sie für jeden Durchlauf das arithmetische Mittel. Schauen Sie sich danach alle 10 Mittelwerte an. Was fällt Ihnen auf? Sind Sie überrascht?

Zusatzaufgabe: Führen Sie dieselbe Simulationsstudie mit Cauchy-verteilten Zufallszahlen (`rcauchy()`) durch. Was fällt Ihnen nun auf? Können Sie sich das Ergebnis erklären?

1.6 Zeigen Sie, dass das Integral über die Dichtefunktion einer $\chi^2(15)$-verteilten Zufallsvariable 1 ist.

Hinweis: Zum Integrieren in R können Sie `integrate()` benutzen.

2 Grafiken

```r
set.seed(385)
results <- rnorm(1000, mean = 100, sd = 15)
```

2.1 Kopieren Sie obigen Code und nehmen Sie an, dass dieser eine IQ-Testreihe mit 1000 Probanden simuliert. Zeichnen Sie ein Histogramm der Ergebnisse. Geben Sie Ihrem Plot anschließend eine passende Überschrift sowie passende Achsenbeschriftungen. Spezifizieren Sie darüber hinaus den Bereich von x- und y-Achse auf $[40, 160]$ bzw. $[0, 0.03]$.

2.2 Hinterlegen Sie dem Plot die dem IQ zugrundeliegende, theoretische Dichtefunktion, d.h. eine Normalverteilung mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$. Wählen Sie als Zeichenfarbe Rot und machen Sie die einzuzeichnende Linie etwas breiter.

2.3 Zeichnen Sie einen Punkt in Form eines Dreiecks an das Maximum der theoretischen Dichte. Wählen Sie als Farbe Blau.

2.4 Kennzeichnen Sie sowohl das 0.025- als auch das 0.975-Quantil der theoretischen Dichte, in dem Sie Vertikalen an diesen Punkten einzeichnen. Wählen Sie als Farbe Grün.

3 Lineare Regression

3.1 Betrachten Sie im Folgenden den Datensatz `faithful`, der Daten zum Old Faithful Geysir im Yellowstone Nationalpark enthält. Sowohl die Dauer einer Eruption in Min. (`eruptions`) als auch die Wartezeit bis zur nächsten Eruption in Min. (`waiting`) sind als Variable im Datensatz verfügbar. Unterstellen Sie nachfolgendes Regressionsmodell und schätzen Sie die entsprechenden Parameter $\widehat{\beta_0}$, $\widehat{\beta_1}$. Zeichnen Sie anschließend eine geeignete Grafik und interpretieren Sie diese.

$$\text{waiting}_t = \beta_0 + \beta_1 \text{eruptions}_t + u_t$$

3.2 Verschaffen Sie sich mit `summary()` einen Überblick über ihr in 3.1 erhaltenes Ergebnis. Interpretieren Sie die geschätzten Koeffizienten und speichern Sie anschließend das R^2 (*Multiple R-squared*) in der Variablen `R2` ab. *Hinweis:* Schauen Sie sich die, beim Ausführen von `summary()`, ausgegebene Datenstruktur genauer an.

3.3 Angenommen Sie beobachten einen zusätzlichen Datenpunkt für die Dauer einer Eruption von $X_{new} = 4$. Sagen Sie die entsprechende Wartezeit bis zur nächsten Eruption vorher.