Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Lehrstuhl für Ökonometrie

Wintersemester 2023/2024

Jens Klenke

R Propädeutikum

Lösung Übungsaufgaben 3

1 Verteilungen und Zufallszahlen

1.1 Sei $X \sim t(5)$. Berechnen Sie $P(X < 6)$, $P(3 < X \leq 7)$ und $P(X > 4)$.

- $P(X < 6)$

```
pt(6, df = 5)
```

```
## [1] 0.9990769
```

- $P(3 < X \leq 7)$

```
pt(7, df = 5) - pt(3, df = 5)
```

```
## [1] 0.01459125
```

- $P(X > 4)$.

```
1 - pt(4, df = 5)
```

```
## [1] 0.005161708
```

1.2 Berechnen Sie das 0.95-Quantil einer $F(4, 5)$-verteilten Zufallsvariable.

```
qf(0.95, df1 = 4, df2 = 5)
```

```
## [1] 5.192168
```

1.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Jackpot im Lotto zu gewinnen (d.h. 6 Richtige aus 49). Vernachlässigen Sie bei Ihrer Berechnung Zusatz- oder Superzahlen. (Hinweis: Benutzen Sie die hypergeometrische Verteilung.)

```r
dhyper(6, m = 6, n = 43, k = 6)
```

```
## [1] 7.151124e-08
```

```r
# oder per Binomialkoeffizient:
# 1/choose(49, 6)
```

1.4 Erzeugen Sie 20 $\chi^2(5)$-verteilte Zufallszahlen ohne (!) dabei die `rchisq()`-Funktion zu benutzen.

Hinweis: $\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ mit $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ für alle $i = 1, ..., n$.

```r
# seed damit bei beiden Befehlen die Ergebnisse gleich sind
set.seed(1549)
# schnell:
replicate(20, sum(rnorm(5)^2))
```

```
##  [1]  7.091977  4.967954  5.514013  4.676718  3.931540  7.028298
##  [7] 13.070791  6.461356  7.643946  3.144983  6.943869 10.710932
## [13]  5.536349  6.237411  5.422414  1.965647  3.319014  3.732634
## [19]  8.127858  4.358846
```

```r
# seed damit bei beiden Befehlen die Ergebnisse gleich sind
set.seed(1549)
# mit schleife:
rn <- numeric()
for(i in 1:20){
  rn[i] <- sum(rnorm(5)^2)
}
rn
```

```
##  [1]  7.091977  4.967954  5.514013  4.676718  3.931540  7.028298
##  [7] 13.070791  6.461356  7.643946  3.144983  6.943869 10.710932
## [13]  5.536349  6.237411  5.422414  1.965647  3.319014  3.732634
## [19]  8.127858  4.358846
```

1.5 Ziehen Sie 10-mal standardnormalverteilte Zufallszahlen vom Umfang $n = 10000$ und berechnen Sie für jeden Durchlauf das arithmetische Mittel. Schauen Sie sich danach alle 10 Mittelwerte an. Was fällt Ihnen auf? Sind Sie überrascht?

```r
norm <- numeric()
for(i in 1:10){
  norm[i] <- mean(rnorm(10000))
}
norm
```

```
##  [1] -0.007993253  0.000205263 -0.023010730  0.008032737 -0.015314207
##  [6] -0.006583092 -0.010186764 -0.002472349 -0.001919459 -0.006736107
```

Alle 10 Mittelwerte liegen sehr nahe bei 0. Nicht überraschend, da wir Zufallszahlen mit Erwartungswert 0 ziehen.

Zusatzaufgabe: Führen Sie dieselbe Simulationsstudie mit Cauchy-verteilten Zufallszahlen (`rcauchy()`) durch. Was fällt Ihnen nun auf? Können Sie sich das Ergebnis erklären?

```r
cauchy <- numeric()
for(i in 1:10){
  cauchy[i] <- mean(rt(10000, df = 1))
}
cauchy
```

```
##  [1]  2.86061674  0.28687124 20.24954554 -2.26699594 -0.93806437
##  [6] -0.09852194  0.06981833  0.03190819  0.16937363  0.36625186
```

Nun liegen die Mittelwerte nicht wirklich nahe beieinander. Erklärung: die Cauchy-Verteilung hat keinen Erwartungswert.

1.6 Zeigen Sie, dass das Integral über die Dichtefunktion einer $\chi^2(15)$-verteilten Zufallsvariable 1 ist.

```r
integrate(dchisq, lower = 0, upper = Inf, df = 15)
```

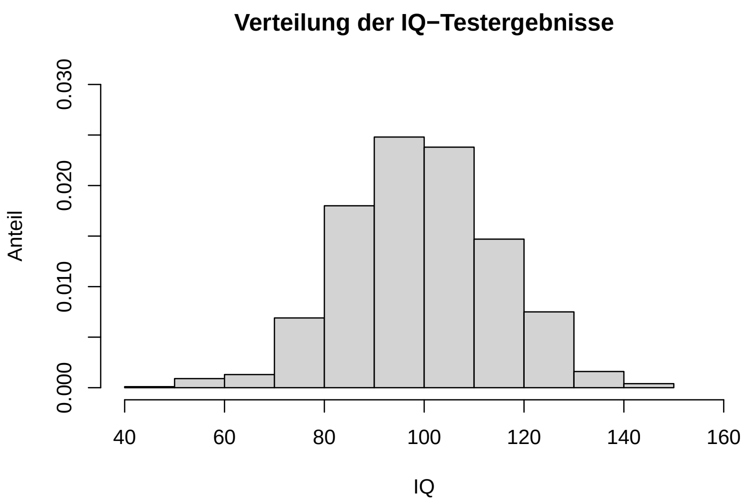
```
## 1 with absolute error < 1.5e-05
```

2 Grafiken

```
set.seed(385)
results <- rnorm(1000, mean = 100, sd = 15)
```

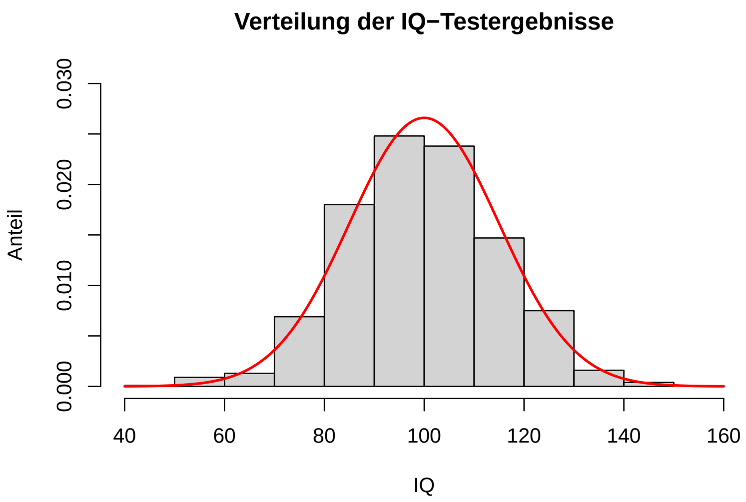
2.1 Kopieren Sie obigen Code und nehmen Sie an, dass dieser eine IQ-Testreihe mit 1000 Probanden simuliert. Zeichnen Sie ein Histogramm der Ergebnisse. Geben Sie Ihrem Plot anschließend eine passende Überschrift sowie passende Achsenbeschriftungen. Spezifizieren Sie darüber hinaus den Bereich von x- und y-Achse auf $[40, 160]$ bzw. $[0, 0.03]$.

```
    set.seed(385)
    results <- rnorm(1000, mean = 100, sd = 15)
    hist(results,
         freq = F,
         xlab = 'IQ',
         ylab = 'Anteil',
         main = 'Verteilung der IQ-Testergebnisse',
         xlim = c(40, 160),
         ylim = c(0, 0.03))
```



2.2 Hinterlegen Sie dem Plot die dem IQ zugrundeliegende, theoretische Dichtefunktion, d.h. eine Normalverteilung mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$. Wählen Sie als Zeichenfarbe Rot und machen Sie die einzuzeichnende Linie etwas breiter.

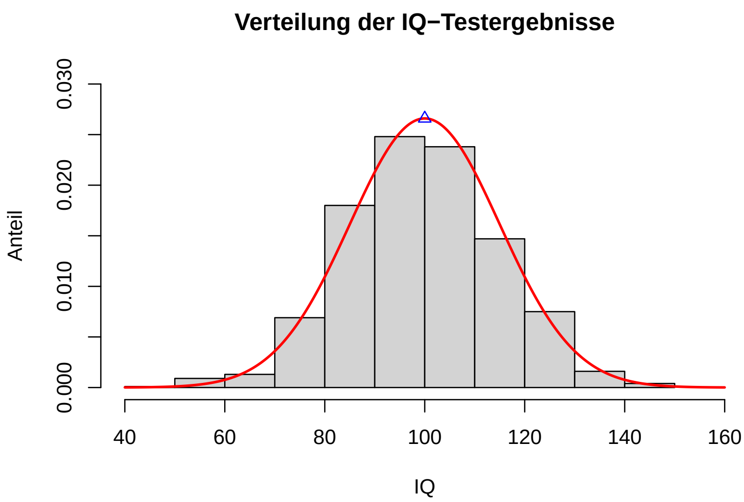
```r
set.seed(385)
results <- rnorm(1000, mean = 100, sd = 15)
hist(results, freq = F, xlab = 'IQ', ylab = 'Anteil',
     main = 'Verteilung der IQ-Testergebnisse',
     xlim = c(40, 160), ylim = c(0, 0.03))
x <- seq(40, 160, 0.01)
y <- dnorm(x, mean = 100, sd = 15)
lines(x, y, col = 'red', lwd = 2)
```



2.3 Zeichnen Sie einen Punkt in Form eines Dreiecks an das Maximum der theoretischen Dichte. Wählen Sie als Farbe Blau.

```r
hist(results,
     freq = F,
     xlab = 'IQ',
     ylab = 'Anteil',
     main = 'Verteilung der IQ-Testergebnisse',
     xlim = c(40, 160),
     ylim = c(0, 0.03))

x <- seq(40, 160, 0.01)
y <- dnorm(x, mean = 100, sd = 15)

lines(x,
      y,
      col = 'red',
```

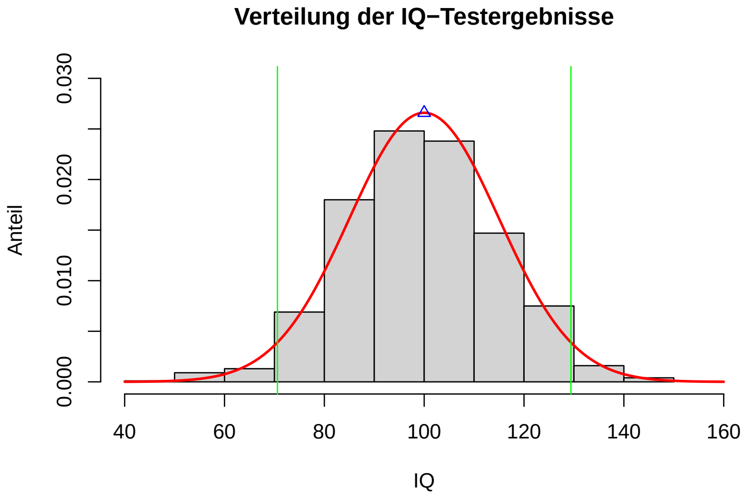
```
      lwd = 2)

points(100,
       dnorm(100, mean = 100, sd = 15),
       pch = 2,
       col = 'blue')
```



2.4 Kennzeichnen Sie sowohl das 0.025- als auch das 0.975-Quantil der theoretischen Dichte, in dem Sie Vertikalen an diesen Punkten einzeichnen. Wählen Sie als Farbe Grün.

```
hist(results,
     freq = F,
     xlab = 'IQ',
     ylab = 'Anteil',
     main = 'Verteilung der IQ-Testergebnisse',
     xlim = c(40, 160),
     ylim = c(0, 0.03))

x <- seq(40, 160, 0.01)
y <- dnorm(x, mean = 100, sd = 15)

lines(x, y, col = 'red', lwd = 2)

points(100,
       dnorm(100, mean = 100, sd = 15),
       pch = 2,
```

```r
       col = 'blue')

abline(v = qnorm(0.025, mean = 100, sd = 15), col = 'green')
abline(v = qnorm(0.975, mean = 100, sd = 15), col = 'green')
```

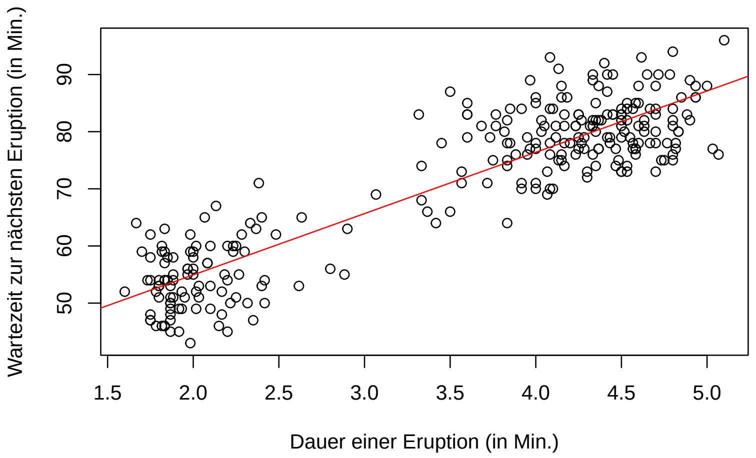


3 Lineare Regression

3.1 Betrachten Sie im Folgenden den Datensatz `faithful`, der Daten zum Old Faithful Geysir im Yellowstone Nationalpark enthält. Sowohl die Dauer einer Eruption in Min. (`eruptions`) als auch die Wartezeit bis zur nächsten Eruption in Min. (`waiting`) sind als Variable im Datensatz verfügbar. Unterstellen Sie nachfolgendes Regressionsmodell und schätzen Sie die entsprechenden Parameter $\widehat{\beta_0}$, $\widehat{\beta_1}$. Zeichnen Sie anschließend eine geeignete Grafik und interpretieren Sie diese.

$$\text{waiting}_t = \beta_0 + \beta_1 \text{eruptions}_t + u_t$$

```r
model_ff <- lm(waiting ~ eruptions, data = faithful)

plot(faithful$eruptions,
     faithful$waiting,
     xlab = 'Dauer einer Eruption (in Min.)',
     ylab = 'Wartezeit zur nächsten Eruption (in Min.)')

abline(model_ff, col = 'red')
```



Grundsätzlich: Je länger die Dauer einer Eruption ist, desto länger ist die Wartezeit bis zur nächsten Eruption.

3.2 Verschaffen Sie sich mit `summary()` einen Überblick über ihr in 3.1 erhaltenes Ergebnis. Interpretieren Sie die geschätzten Koeffizienten und speichern Sie anschließend das R^2 (*Multiple R-squared*) in der Variablen `R2` ab. (Hinweis: Schauen Sie sich die, beim Ausführen von `summary()`, ausgegebene Datenstruktur genauer an.)

```
summary(model_ff)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = waiting ~ eruptions, data = faithful)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -12.0796  -4.4831   0.2122   3.9246  15.9719
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  33.4744     1.1549   28.98   <2e-16 ***
## eruptions    10.7296     0.3148   34.09   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 5.914 on 270 degrees of freedom
```

```
## Multiple R-squared:  0.8115, Adjusted R-squared:  0.8108
## F-statistic:  1162 on 1 and 270 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Achsenabschnitt (`Intercept`)
  - Bei einer Eruptionsdauer von 0 Minuten, beträgt die Wartezeit bis zur nächsten Eruption etwa 33.5 Minuten (nicht wirklich sinnvoll interpretierbar).
- Steigungskoeffizient (`eruptions`)
  - Steigt die Dauer einer Eruption um eine Minute, steigt die Wartezeit bis zur nächsten Eruption um etwa 10.7 Minuten.

```r
R2 <- summary(model_ff)$r.squared
R2
```

```
## [1] 0.8114608
```

Summary erstellt ebenfalls eine Liste, in der u. a. auch das R^2 enthalten ist.

3.3 Angenommen Sie beobachten einen zusätzlichen Datenpunkt für die Dauer einer Eruption von $X_{new} = 4$. Sagen Sie die entsprechende Wartezeit bis zur nächsten Eruption vorher.

```r
new_value <- data.frame(eruptions = 4)
predict(model_ff, newdata = new_value)
```

```
##        1
## 76.39296
```

Bei einer Eruptionsdauer von 4 Min. beträgt die mit unserem Modell geschätzte Wartezeit etwa. 76.4 Min.