

# Induktive Statistik

Prof. Dr. Christoph Hanck

University of Duisburg-Essen

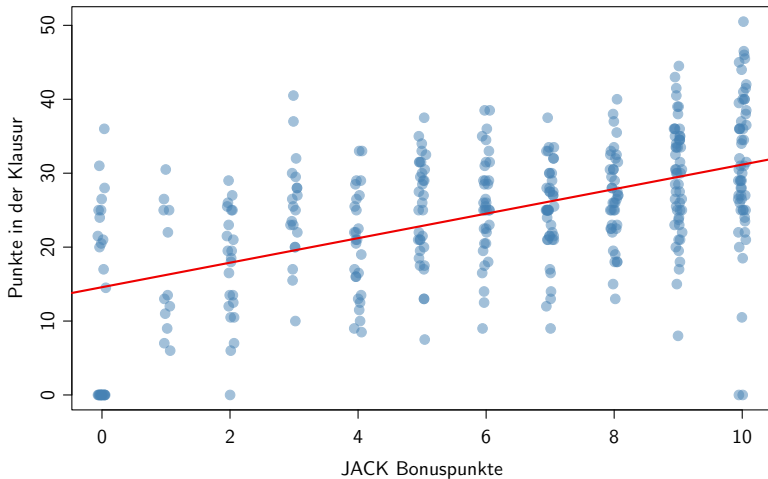
Sommersemester 2025



① Einleitung

② Grundlagen

- Ziel der **deskriptiven** (beschreibenden) **Statistik**: das Datenmaterial mit Hilfe tabellarischer und grafischer Repräsentationen sowie geeigneter Kenngrößen übersichtlich aufbereiten.
- Ziel der **induktiven** (schließenden) **Statistik**: Verifikation theoretischer Modelle anhand von Daten und Testen von Hypothesen über unbekannte Parameter auf Basis von Wahrscheinlichkeitsmodellen.



Übergang von der deskriptiven zur induktiven Statistik:

- **Induktives Schließen**, statistische Inferenz, Repräsentationsschluss: Schluss von einer Teilgesamtheit auf die Grundgesamtheit
- **Induktive Statistik**: Methoden, die es erlauben von den Beobachtungen einer Teilgesamtheit (= *Stichprobe*) auf bestimmte Charakteristika der dazugehörigen *Grundgesamtheit* zu schließen.

- Beim Glücksspiel meinen Sie, dass die „Gegenseite“ mit manipulierten Würfeln spielt, d.h. die Zahl 6 fällt häufiger als andere Zahlen. Wie können Sie Ihre Vermutung überprüfen?
- Vor der Bundestagswahl prognostiziert ein Wahlforschungsinstitut, dass 30% der Stimmen auf die CDU/CSU entfallen. Wie kann eine solche Prognose verlässlich durchgeführt werden?

Ziel: Schlussfolgerungen von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit

## Schokoladenwürfel





Source: <https://blog.ritter-sport.de/2014/08/05/schatzt-euch-bunt/>



### Nue Quiz Section



Man beachte: Wahrscheinlichkeitsrechnung

- ist **mehr** als Grundlage der schließenden Statistik
- hat enorme eigenständige ökonomische Bedeutung z.B. in der
  - ▶ Mikroökonomik
  - ▶ Investition und Finanzierung
  - ▶ Portfoliotheorie

1. Einleitung
2. Grundlagen
3. Eindimensionale Zufallsvariablen
4. Ausgewählte theoretische Verteilungen
5. Grundzüge der Stichprobentheorie
6. Statistische Schätzverfahren
7. Statistische Testverfahren
8. Zweidimensionale Zufallsvariablen

1 Einleitung

2 Grundlagen

Zufallsvorgänge (bzw. stochastische Vorgänge) sind durch zwei wesentliche Eigenschaften gekennzeichnet:

1. Sie besitzen verschiedene, sich gegenseitig ausschließende Ausgänge, die bereits vor Beginn des Vorgangs bekannt sind;
2. es ist nicht vorhersehbar, welcher Ausgang tatsächlich eintreten wird.

**Beispiele** für Zufallsvorgänge:

- Der Ausgang eines Fußballspiels, der Kurs einer Aktie am nächsten Tag oder die realisierte Augenzahl eines Würfelwurfes.

- Ist ein Zufallsvorgang unverändert beliebig oft wiederholbar, liegt ein **Zufallsexperiment** vor. Die unveränderte Wiederholbarkeit beschreibt man auch als unter gleichen (Rand-)Bedingungen wiederholbar.
- D.h., dass die Randbedingungen wie bei naturwissenschaftlichen Experimenten kontrolliert werden können. Dies stellt sicher, dass die Bedingungen, unter denen das Experiment stattgefunden hat, auch bei weiteren Durchführungen hätten eingehalten werden können.
- Damit gehören alle Zufallsvorgänge, die fiktiv unter gleichen Bedingungen wiederholbar sind, zu den Zufallsexperimenten. Dies erlaubt es, auch Zufallsvorgänge als Zufallsexperimente aufzufassen, deren praktische Wiederholung unter gleichen Bedingungen schwierig wäre.

- Alle Ausgänge  $\omega_i$  eines Zufallsvorganges bzw. -experimentes fasst man zu einem **Stichprobenraum** (Ergebnis- bzw. Ereignisraum)  $\Omega$  zusammen. Der Stichprobenraum ist eine Menge, deren Elemente die Ausgänge sind.
- $\Omega$  kann endlich oder unendlich viele Ausgänge enthalten. Lassen sich die unendlich vielen Ausgänge mit den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  abzählen, bezeichnet man  $\Omega$  als **abzählbar unendlich**. Gelingt dies nicht, heißt  $\Omega$  **überabzählbar unendlich**.

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m, \dots\}.$$

## Example 2.1: Würfelwurf.

Der Zufallsvorgang *Werfen eines Würfels* hat sechs mögliche Ausgänge.

$\Omega$  ist endlich und lässt sich schreiben als:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\} = \{\omega_i, i = 1, \dots, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$



## Example 2.2: Münzwurf.

Wirft man eine Münze mit Seiten *Zahl* ( $Z$ ) und *Kopf* ( $K$ ) bis zum ersten Mal  $Z$  erscheint, lauten die möglichen Ausgänge:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= Z && \text{(zum ersten Mal } \textit{Zahl} \text{ im ersten Wurf),} \\ \omega_2 &= KZ && \text{(zum ersten Mal } \textit{Zahl} \text{ im zweiten Wurf),} \\ &\vdots \\ \omega_m &= \underbrace{K \dots K}_{m-1} Z && \text{(zum ersten Mal } \textit{Zahl} \text{ im } m\text{-ten Wurf),} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Der Stichprobenraum ist hier abzählbar unendlich:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m, \dots\}.$$

## **Example 2.3:** Zugverspätung.

Die Verspätung eines Zuges in Minuten sei ein Zufallsvorgang mit Ausgängen im Intervall  $[0; 10]$ . Bei unendlicher Messgenauigkeit sind überabzählbar viele Verspätungen möglich, da das Intervall  $[0; 10]$  Teilmenge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist.

Die reellen Zahlen sind, wie auch jede ihrer Teilmengen, mächtiger als  $\mathbb{N}$  und daher überabzählbar unendlich.

- Jede Teilmenge von  $\Omega$  heißt **(Zufalls-)Ereignis**.
- Da eine Menge auch Teilmenge von sich selbst und die leere Menge  $\emptyset$  Teilmenge jeder Menge ist, sind  $\Omega$  und  $\emptyset$  selbst Ereignisse von  $\Omega$ .
- Ein Ereignis  $A \subset \Omega$  tritt ein, wenn der Ausgang  $\omega_i$  des Zufallsvorgangs Element von  $A$  ist:  $\omega_i \in A$ .
- Da ein Zufallsvorgang immer in einem Ausgang  $\omega_i \in \Omega$  mündet, ist  $\Omega$  auch das **sichere Ereignis**.
- Analog hierzu heißt die leere Menge  $\emptyset$  das **unmögliche Ereignis**, weil kein  $\omega_i \in \Omega$  existiert, das Element der leeren Menge  $\emptyset$  ist:  $\omega_i \notin \emptyset, i = 1, \dots, m$ .

- Teilmengen  $\{\omega_i\}$ , deren einziges Element ein Ausgang  $\omega_i \in \Omega$  ist, heißen **Elementarereignisse**.
- Umfassen Teilmengen mehrere Ausgänge, nennt man sie **zusammengesetzte Ereignisse**.
- Z. B. ist beim *Wurf eines Würfels* der Ausgang: *Augenzahl 3 liegt oben* ein Elementarereignis und wird geschrieben als  $\{3\}$ ; das Ereignis *A: gerade Augenzahl liegt oben* ist ein zusammengesetztes Ereignis, als Menge geschrieben:  $\{2, 4, 6\}$ .
- *A* tritt ein, wenn der Würfelwurf die Augenzahl 2, 4 oder 6 ergibt.

- Die insgesamt möglichen Ereignisse eines Zufallsvorgangs findet man, indem alle Teilmengen für  $\Omega$  gebildet werden.
- Die Zusammenfassung dieser Teilmengen führt bei endlichem oder abzählbar unendlichem Stichprobenraum  $\Omega$  zur **Potenzmenge**  $PM(\Omega)$ .
- Die Anzahl der Ereignisse der Potenzmenge ist  $2^m$ , wobei  $m$  der Anzahl der Elemente von  $\Omega$  entspricht.
- Siehe Buch, S. 11.

### Example 2.4: Potenzmenge.

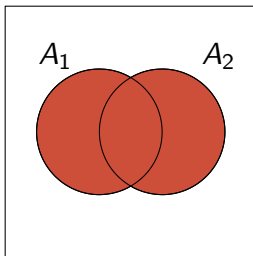
Ein Zufallsvorgang hat den Stichprobenraum  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ; wegen  $m = 3$  beträgt die Anzahl der möglichen Ereignisse

$$2^3 = 8.$$

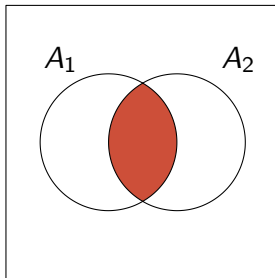
Diese Ereignisse lauten  $A_1 = \emptyset$ ,  $A_2 = \{1\}$ ,  $A_3 = \{2\}$ ,  $A_4 = \{3\}$ ,  $A_5 = \{1, 2\}$ ,  $A_6 = \{1, 3\}$ ,  $A_7 = \{2, 3\}$ ,  $A_8 = \{1, 2, 3\} = \Omega$ . Die Potenzmenge ist

$$PM(\Omega) = \{A_1, \dots, A_8\}.$$

- Zwischen den Ereignissen können bestimmte Beziehungen vorliegen.
- **Beispiel:** Das Ereignis  $A_5 = \{1, 2\}$  tritt dann ein, wenn entweder  $A_2 = \{1\}$  oder  $A_3 = \{2\}$  eintritt.  $A_5$  heißt daher **Vereinigungsereignis**, geschrieben als  $A_5 = A_2 \cup A_3$ .
- Verallgemeinert erhält man Vereinigungsereignisse  $V$  als  $V = \bigcup_{j=1}^n A_j$ .
- Für  $n = 2$  ist  $V$  als rote Fläche im **Venn-Diagramm** wiedergegeben, wobei das Rechteck den Stichprobenraum  $\Omega$  festlegt.

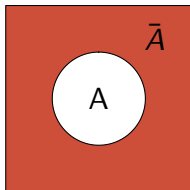


- Ist der Schnitt zweier Ereignisse  $A_i$  und  $A_j$  nicht leer, gilt  $A_i \cap A_j = D \neq \emptyset$ , so treten mit  $D$  auch die Ereignisse  $A_i$  und  $A_j$  ein.
- $D$  heißt daher **Durchschnittsereignis**, das allgemein definiert ist als  $D = \bigcap_{j=1}^n A_j$ .  $D$  tritt ein, wenn alle  $A_j$  eintreten.

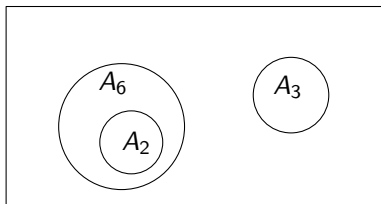




- Tritt  $A_i$  genau dann ein, wenn  $A_j$  nicht eintritt, so sind die beiden Ereignisse zueinander komplementär.
- $A_i$  heißt **Komplementärereignis** oder kurz Komplement und lässt sich schreiben als  $A_i = \bar{A}_i$ . Natürlich ist auch  $A_j$  Komplementärereignis zu  $A_i$ :  $A_j = \bar{A}_i$ .
- Im Beispiel 2.4 ist das Ereignis  $A_2 = \{1\}$  das Komplement zu  $A_7 = \{2, 3\}$ :  $A_2 = \bar{A}_7$ . Umgekehrt gilt auch  $A_7 = \bar{A}_2$ .
- Für  $A$  und sein Komplement  $\bar{A}$  gelten  $A \cup \bar{A} = \Omega$  und  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .



- $A_i$  und  $A_j$  heißen **disjunkt**, wenn ihr Schnitt leer ist:  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .
- Komplementäre Ereignisse sind daher immer auch disjunkt, die Umkehrung gilt aber nicht.
- So sind im Beispiel 2.4  $A_2 = \{1\}$  und  $A_3 = \{2\}$  zwar disjunkt, aber nicht komplementär. Denn wenn  $A_3$  nicht eintritt, folgt nicht notwendigerweise das Eintreten von  $A_2$ ; es könnte auch  $A_4 = \{3\}$  eintreten.

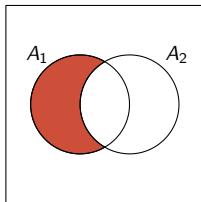


- $A_i$  ist ein **Teilereignis** von  $A_j$ , wenn jeder Ausgang eines Zufallsvorgangs, der zu  $A_i$  gehört, auch in  $A_j$  liegt,  $A_j$  aber mindestens einen Ausgang  $\omega_j$  enthält, der nicht auch in  $A_i$  enthalten ist.
- $A_i$  ist eine **echte Teilmenge** von  $A_j : A_i \subset A_j$ .
- In der Abbildung repräsentieren die Kreise die Ereignisse  $A_2$ ,  $A_3$  und  $A_6$  des Beispiels 2.4.

- Das **Differenzereignis**  $A_i \setminus A_j$  tritt dann ein, wenn der Ausgang des Zufallsvorgangs in  $A_i$ , aber nicht in  $A_j$  liegt.
- Man nennt  $A_i \setminus A_j$  auch das **relative Komplement** zu  $A_j$  bezüglich  $A_i$ . Alternativ kann man schreiben  $A_i \setminus A_j = A_i \cap \bar{A}_j$ . Im Beispiel 2.4 folgt für  $A_6 = \{1, 3\}$  und  $A_5 = \{1, 2\}$  das Differenzereignis  $A_6 \setminus A_5$  als

$$A_6 \setminus A_5 = A_6 \cap \bar{A}_5 = \{1, 3\} \cap \{3\} = \{3\}.$$

Nur  $\omega_3 = 3$  führt dazu, dass  $A_6 \setminus A_5$  eintritt. Das Beispiel zeigt, dass im Allgemeinen  $A_i \setminus A_j \neq A_j \setminus A_i$ .



## Würfelwurf 1



```
x <- c(1,3,5)
```

```
y <- c(2,3,6)
```

```
union(x,y)
```

```
## [1] 1 3 5 2 6
```

```
intersect(x,y)
```

```
## [1] 3
```

```
setdiff(x,y)
```

```
## [1] 1 5
```

```
setdiff(y,x)
```

```
## [1] 2 6
```

```
setdiff(union(x,y),y) # Komplement von y, wenn Omega = union(x,y)
```

```
## [1] 1 5
```

```
rje::powerSet(x)
```

```
## [[1]]  
## numeric(0)  
##  
## [[2]]  
## [1] 1  
##  
## [[3]]  
## [1] 3  
##  
## [[4]]  
## [1] 1 3  
##  
## [[5]]  
## [1] 5  
##  
## [[6]]  
## [1] 1 5  
##  
## [[7]]  
## [1] 3 5  
##  
## [[8]]  
## [1] 1 3 5
```

### Exercise 2.5:

Ein Würfel wird einmal gewürfelt. Es sind folgende Ereignisse definiert:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4\}, A_3 = \{2, 4\}, A_4 = \{1, 2, 3, 4\}, \\ A_5 &= \{4\}, A_6 = \{3, 4, 5, 6\}, A_7 = \{5, 6\}, A_8 = \{1, 2, 4, 5\}, \\ A_9 &= \{2, 3, 6\}, A_{10} = \{1, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie folgende Ereignisse und stellen Sie diese jeweils in einem Venn-Diagramm grafisch dar!

- |                    |  |                       |
|--------------------|--|-----------------------|
| (a) $A_1 \cup A_2$ | (b) $A_2 \cap A_3$                           | (c) $\bar{A}_1$       |
| (d) $A_1 \cap A_2$ | (e) $A_8 \cap \bar{A}_9 = A_8 \setminus A_9$ | (f) $A_5 \subset A_4$ |



- Jedes zusammengesetzte Ereignis  $A$  kann in disjunkte Teilereignisse  $A_j \neq \emptyset$  so zerlegt werden, dass gilt:  $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ .  $A$  ergibt sich jetzt als disjunkte Vereinigung.
- In Beispiel 2.4 lässt sich  $A_8$  in  $A_2 = \{1\}$  und  $A_7 = \{2, 3\}$ , aber auch in  $A_2 = \{1\}$ ,  $A_3 = \{2\}$  und  $A_4 = \{3\}$  zerlegen. Beim zweiten Fall wurde  $A_8$  in Elementarereignisse zerlegt.
- Die Zerlegung von  $A$  in Elementarereignisse heißt **kanonische Darstellung**: Jedes Ereignis ergibt sich eindeutig als Vereinigungsereignis von Elementarereignissen:

$$A = \bigcup_{j=1}^n \{\omega_j\}.$$

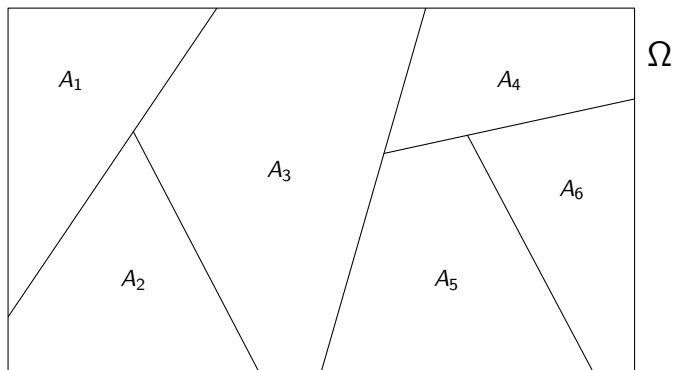
- Da auch  $\Omega$  zu den zusammengesetzten Ereignissen gehört, kann es auch in (Teil-)Ereignisse  $A_j$  zerlegt werden.
- Die Menge  $\{A_1, \dots, A_n\}$  bildet ein **vollständiges System von Ereignissen**, wenn für diese Zerlegung gilt:

$$(1) \quad \Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^n A_j,$$

$$(2) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j,$$

$$(3) \quad A_j \neq \emptyset \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

- Ein vollständiges System wird auch **vollständiges Ereignissystem** bzw. **vollständige Zerlegung** genannt.



### Exercise 2.6:

Ein Würfel wird einmal gewürfelt. Es sind folgende Ereignisse definiert:

$$A_1 = \{2, 4, 6\}, A_2 = \{1, 3, 5\}, A_3 = \{2\}, \\ A_4 = \{4, 6\}, A_5 = \{1, 3\}, A_6 = \{5, 6\}.$$

Welche der folgenden Mengen bildet ein vollständiges Ereignissystem?

- (a)  $F_1 = \{A_1, A_2\}$
- (b)  $F_2 = \{A_1, A_5, A_6\}$
- (c)  $F_3 = \{A_3, A_4, A_5\}$
- (d)  $F_4 = \{A_2, A_3, A_4\}$

- Zufallsvorgänge zeichnen sich dadurch aus, dass ungewiss ist, welches ihrer möglichen Ereignisse eintritt.
- Wahrscheinlichkeiten quantifizieren die Chance des Eintretens eines bestimmten Ereignisses und werden mit  $P$  symbolisiert.
- Für ein Ereignis  $A \subset \Omega$  gibt  $P(A)$  jetzt die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten von  $A$  an.
- $P$  ist also eine Funktion, die Ereignissen reelle Zahlen zuordnet, welche wir als Wahrscheinlichkeit bezeichnen.

- Die axiomatische Grundlage für Wahrscheinlichkeiten wurde von **Kolmogoroff** entwickelt.
- Auf der Basis dieser Axiomatik lässt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion wie folgt definieren:

### Kolmogoroff-Axiome

$$(K1) \quad P(A) \geq 0 \text{ für alle } A,$$

$$(K2) \quad P(\Omega) = 1,$$

$$(K3) \quad P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

für alle  $A_i$  und  $A_j$ , die paarweise disjunkt sind:  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ .

## Kolmogoroff-Axiome

- (K1) **Nichtnegativität**: Die Wahrscheinlichkeit  $P$  eines Ereignisses  $A$  ist stets nichtnegativ.
- (K2) **Normierung** der Wahrscheinlichkeit.
- (K3) **Volladditivität**: Die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung paarweise disjunkter Ereignisse gleicht der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Jedes Ereignis  $A \subset \Omega$  wird somit durch  $P$  in das geschlossene Intervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  abgebildet.

Aus diesen Axiomen lassen sich folgende Rechenregeln ableiten:

### Rechenregeln

$$(R1) \quad P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

$$(R2) \quad P(A) \leq P(B) \text{ für } A \subset B,$$

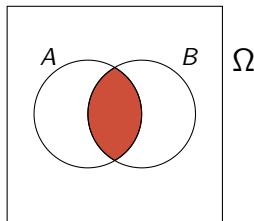
$$(R3) \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \text{ (für paarweise disjunkte Ereignisse),}$$

$$(R4) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (für paarweise nicht disjunkte Ereignisse).}$$

Ihre Herleitung findet sich im Buch auf S. 23.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- $A$  und  $B$  sind nicht disjunkt, da  $A \cap B \neq \emptyset$ .  $A \cap B$  entspricht der roten Fläche.
- $(A \cup B)$  würde mit  $P(A) + P(B)$  die Wahrscheinlichkeit für  $A \cap B$  doppelt erfassen; folglich muss  $P(A \cap B)$  subtrahiert werden.

- Der **Additionssatz für disjunkte Ereignisse**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

liefert eine Vorschrift für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  eines abzählbar unendlichen Stichprobenraumes  $\Omega$ .

- **Elementarereignisse**  $\{\omega_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$  sind paarweise disjunkt.


### Exercise 2.7:

Es sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.25.$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cup B), P(\bar{B}), P(A \cap \bar{B}), P(A \cup \bar{B})$$

Wir verwenden einen Punkt anstelle eines Kommas als **Dezimaltrennzeichen**, da dies der angloamerikanischen Schreibweise der Programmiersprache  entspricht.

### Exercise 2.8:

Ein Würfel wird ein Mal gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

- a) eine 2 oder eine 3 zu würfeln?
- b) eine 2, eine 3 oder eine 4 zu würfeln?
- c) eine ungerade Zahl oder eine gerade Zahl zu würfeln?
- d) eine Augenzahl kleiner als 4 oder eine gerade Augenzahl zu würfeln?
- e) eine Augenzahl kleiner als 4 und eine gerade Augenzahl zu würfeln?

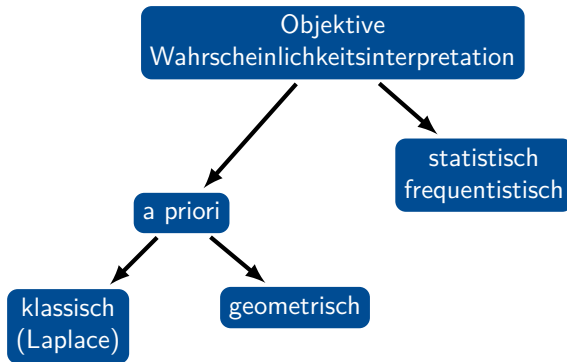
### Exercise 2.9:

In einer Urne befinden sich 20 rote und 30 grüne Kugeln. 5 rote und 10 grüne Kugeln sind mit einer 1 beschriftet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) eine gezogene Kugel rot oder mit einer 1 beschriftet ist?
- b) eine gezogene Kugel nicht mit einer 1 beschriftet ist?
- c) eine rote Kugel gezogen wird und diese nicht mit einer 1 beschriftet ist?
- d) eine Kugel gezogen wird, die rot oder nicht mit einer 1 beschriftet ist?

- Mit den **Axiomen von Kolmogoroff** und den Regeln (R1) bis (R4) sind nur die allgemeinen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten festgelegt, nicht jedoch welche Werte sie bei bestimmten Ereignissen annehmen.
- Hierzu muss eine dem Zufallsvorgang adäquate **Wahrscheinlichkeitsinterpretation** vorliegen.

Mit dem subjektiven und statistisch/frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff befasst sich das Buch auf S. 25.



## Exercise 2.10:

Student Paul kommt jeden Morgen zwischen 8.00 und 8.30 Uhr an einer Bushaltestelle an, an der zwei Buslinien halten:

Linie A: 8.04, 8.14, 8.24

Linie B: 8.10, 8.20, 8.30.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Linie A nimmt?



- **a-priori:**

- ▶ **Laplace- (bzw. klassische) Wahrscheinlichkeit:** Anwendung bei Zufallsvorgängen mit endlichem  $\Omega$  und deren Elementarereignisse die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen (**Laplace-Experimente**).
- ▶ Laplace-Experimente können als die zufällige Entnahme aus einer endlichen Menge von Objekten charakterisiert werden. Wird mehrfach gezogen, muss zwischen *Ziehen mit Zurücklegen* oder *Ziehen ohne Zurücklegen* unterschieden werden.

### Laplace-Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis  $\{\omega_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$  beträgt dann  $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{m}$ .

$P(A)$  erhält man als

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}.$$

Die Anzahl der Elemente einer Menge  $M$  heißt **Mächtigkeit**  $|M|$ . Die Laplace-Wahrscheinlichkeit ist dann

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

## Würfelwurf 2



### Exercise 2.11: Laplace-Experimente.

- (a) In einer Urne befinden sich 20 Kugeln, von denen 8 rot sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel bei einer zufälligen Entnahme zu erhalten.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach Ziehen einer roten Kugel ohne Zurücklegen im zweiten Zug erneut eine rote Kugel zu ziehen?
- (c) Ein **Laplace-Würfel** (idealer Würfel) wird geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Augenzahl größer als 2 oben liegt.

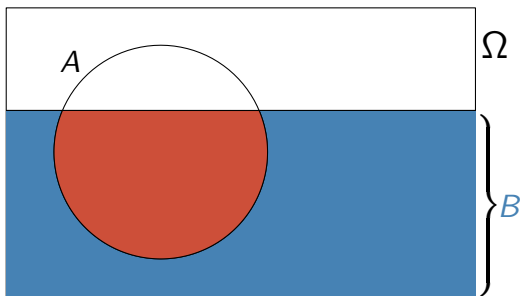
### Exercise 2.12:

Ein Laplace-Würfel wird einmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Augenzahl kleiner 3 fällt?

### Exercise 2.13:

Eine Laplace-Münze und ein Laplace-Würfel werden gemeinsam geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kopf und eine Augenzahl größer als 4 fällt?

- Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten erfolgt bislang unter Bezug auf den ganzen Stichprobenraum  $\Omega$ .
- Es lassen sich aber auch dann Wahrscheinlichkeiten für  $A$  berechnen, wenn nicht ganz  $\Omega$ , sondern nur noch ein Teil  $B$  davon relevant ist. Die Abbildung verdeutlicht die Veränderung des Bezugssystems.



- Der Kreis entspricht  $A$ , das untere Rechteck  $B$  und das rote Kreissegment  $A \cap B$ .
- $P(A)$ ,  $P(B)$  und  $P(A \cap B)$  sind die Wahrscheinlichkeiten für  $A$ ,  $B$  und  $A \cap B$ , wenn  $\Omega$  zugrunde liegt.
- Es kann aber auch die Wahrscheinlichkeit für  $A$  unter der Bedingung berechnet werden, dass nur noch die Ausgänge in  $B$  relevant sind.
- Diese **bedingte Wahrscheinlichkeit** wird mit  $P(A|B)$  bezeichnet.
- In der Abbildung ist  $P(A)$  das Verhältnis der Kreisfläche zur Fläche des Rechtecks  $\Omega$ ; die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  jedoch das Verhältnis der roten Fläche zur Fläche des Rechtecks  $B$ .

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

Es seien  $A, B \subset \Omega$  Ereignisse und  $P(B) > 0$ . Für die **bedingte Wahrscheinlichkeit**  $P(A|B)$  gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$



### Example 2.14: Idealer Würfel.

Ein idealer Würfel wird geworfen. Also sind  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$  und  $P(\{\omega_i\}) = 1/6$  für  $i = 1, \dots, 6$ .

$A$  ist das Ereignis, eine 1 zu würfeln;  $B$  das Ereignis einer ungeraden Augenzahl.  $A \cap B$  tritt bei einer 1 ein. Die Wahrscheinlichkeiten betragen  $P(A) = 1/6$ ,  $P(B) = 1/2$  und  $P(A \cap B) = 1/6$ .

Was ist nun die Wahrscheinlichkeit einer 1 unter der Bedingung, dass eine ungerade Augenzahl eintritt? Der durch die Bedingung gegebene Stichprobenraum lautet  $B = \{1, 3, 5\}$ , also gilt  $P(A|B) = 1/3$ .

Denselben Wert erhält man nach der eingeführten Definition:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

### Exercise 2.15:

Nach der achtmaligen Durchführung des Zufallsexperiments *zweimaliges Werfen einer Münze* erhält man folgendes Resultat:

Versuch	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Wurf	K	Z	Z	Z	K	Z	Z	K
2. Wurf	Z	Z	K	K	K	Z	K	Z

Ereignis  $A$ : K beim 1. Wurf, Ereignis  $B$ : K beim 2. Wurf

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

(a)  $P(A)$       (b)  $P(B)$       (c)  $P(A \cap B)$

(d)  $P(A|B)$       (e)  $P(B|A)$

### Exercise 2.16:

In einem Dorf leben 1000 Personen. Es ist bekannt, dass 600 Einwohner nach Mallorca in den Urlaub fahren und dass 500 Einwohner die Bild-Zeitung lesen. Zusätzlich weiß man, dass von den 600 Mallorca-Urlaubern 400 die Bild lesen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- (a) eine Person Mallorca-Urlauber ist,
- (b) eine Person Bild-Zeitung-Leser ist,
- (c) eine Person Mallorca-Urlauber und Bild-Zeitung-Leser ist,
- (d) wenn ein Einwohner Bild-Zeitung liest, dieser auch ein Mallorca-Urlauber ist,
- (e) wenn ein Einwohner Mallorca-Urlauber ist, dieser auch Bild-Zeitung liest?

- $P(A|B)$  lässt sich als die Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter der zusätzlichen Information interpretieren, dass  $B$  bereits eingetreten ist.
- Übt diese Information keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von  $A$  aus, gilt  $P(A|B) = P(A)$ .
- $A$  ist dann **unabhängig** von  $B$ .
- Dann ist aber auch  $B$  unabhängig von  $A$ , wie folgende Umformung zeigt:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \quad (\text{wegen } P(A|B) = P(A)). \end{aligned}$$