

Induktive Statistik

Prof. Dr. Christoph Hanck

University of Duisburg-Essen

Sommersemester 2025



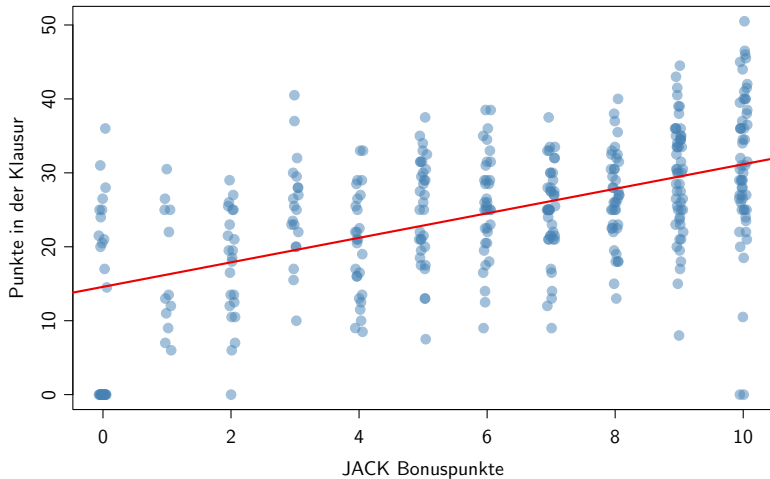
1 Einleitung

2 Grundlagen

- Ziel der **deskriptiven** (beschreibenden) **Statistik**: das Datenmaterial mit Hilfe tabellarischer und grafischer Repräsentationen sowie geeigneter Kenngrößen übersichtlich aufbereiten.
- Ziel der **induktiven** (schließenden) **Statistik**: Verifikation theoretischer Modelle anhand von Daten und Testen von Hypothesen über unbekannte Parameter auf Basis von Wahrscheinlichkeitsmodellen.

Motivation

Beispiel: Lernerfolg



Übergang von der deskriptiven zur induktiven Statistik:

- **Induktives Schließen**, statistische Inferenz, Repräsentationsschluss: Schluss von einer Teilgesamtheit auf die Grundgesamtheit
- **Induktive Statistik**: Methoden, die es erlauben von den Beobachtungen einer Teilgesamtheit (= *Stichprobe*) auf bestimmte Charakteristika der dazugehörenden *Grundgesamtheit* zu schließen.

- Beim Glücksspiel meinen Sie, dass die „Gegenseite“ mit manipulierten Würfeln spielt, d.h. die Zahl 6 fällt häufiger als andere Zahlen. Wie können Sie Ihre Vermutung überprüfen?
- Vor der Bundestagswahl prognostiziert ein Wahlforschungsinstitut, dass 30% der Stimmen auf die CDU/CSU entfallen. Wie kann eine solche Prognose verlässlich durchgeführt werden?

Ziel: Schlussfolgerungen von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit

Schokoladenwürfel





Source: <https://blog.ritter-sport.de/2014/08/05/schatzt-euch-bunt/>

Man beachte: Wahrscheinlichkeitsrechnung

- ist **mehr** als Grundlage der schließenden Statistik
- hat enorme eigenständige ökonomische Bedeutung z.B. in der
 - ▶ Mikroökonomik
 - ▶ Investition und Finanzierung
 - ▶ Portfoliotheorie

1. Einleitung
2. Grundlagen
3. Eindimensionale Zufallsvariablen
4. Ausgewählte theoretische Verteilungen
5. Grundzüge der Stichprobentheorie
6. Statistische Schätzverfahren
7. Statistische Testverfahren
8. Zweidimensionale Zufallsvariablen

1 Einleitung

2 Grundlagen

Zufallsvorgänge (bzw. stochastische Vorgänge) sind durch zwei wesentliche Eigenschaften gekennzeichnet:

1. Sie besitzen verschiedene, sich gegenseitig ausschließende Ausgänge, die bereits vor Beginn des Vorgangs bekannt sind;
2. es ist nicht vorhersehbar, welcher Ausgang tatsächlich eintreten wird.

Beispiele für Zufallsvorgänge:

- Der Ausgang eines Fußballspiels, der Kurs einer Aktie am nächsten Tag oder die realisierte Augenzahl eines Würfelwurfes.

- Ist ein Zufallsvorgang unverändert beliebig oft wiederholbar, liegt ein **Zufallsexperiment** vor. Die unveränderte Wiederholbarkeit beschreibt man auch als unter gleichen (Rand-)Bedingungen wiederholbar.
- D.h., dass die Randbedingungen wie bei naturwissenschaftlichen Experimenten kontrolliert werden können. Dies stellt sicher, dass die Bedingungen, unter denen das Experiment stattgefunden hat, auch bei weiteren Durchführungen hätten eingehalten werden können.
- Damit gehören alle Zufallsvorgänge, die fiktiv unter gleichen Bedingungen wiederholbar sind, zu den Zufallsexperimenten. Dies erlaubt es, auch Zufallsvorgänge als Zufallsexperimente aufzufassen, deren praktische Wiederholung unter gleichen Bedingungen schwierig wäre.

- Alle Ausgänge ω_i eines Zufallsvorganges bzw. -experimentes fasst man zu einem **Stichprobenraum** (Ergebnis- bzw. Ereignisraum) Ω zusammen. Der Stichprobenraum ist eine Menge, deren Elemente die Ausgänge sind.
- Ω kann endlich oder unendlich viele Ausgänge enthalten. Lassen sich die unendlich vielen Ausgänge mit den natürlichen Zahlen \mathbb{N} abzählen, bezeichnet man Ω als **abzählbar unendlich**. Gelingt dies nicht, heißt Ω **überabzählbar unendlich**.

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m, \dots\}.$$

Example 2.1: Würfelwurf.

Der Zufallsvorgang *Werfen eines Würfels* hat sechs mögliche Ausgänge.

Ω ist endlich und lässt sich schreiben als:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\} = \{\omega_i, i = 1, \dots, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Example 2.2: Münzwurf.

Wirft man eine Münze mit Seiten *Zahl* (Z) und *Kopf* (K) bis zum ersten Mal Z erscheint, lauten die möglichen Ausgänge:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= Z && \text{(zum ersten Mal } \textit{Zahl} \text{ im ersten Wurf),} \\ \omega_2 &= KZ && \text{(zum ersten Mal } \textit{Zahl} \text{ im zweiten Wurf),} \\ &\vdots && \\ \omega_m &= \underbrace{K \dots K}_{m-1} Z && \text{(zum ersten Mal } \textit{Zahl} \text{ im } m\text{-ten Wurf),} \\ &\vdots && \end{aligned}$$

Der Stichprobenraum ist hier abzählbar unendlich:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m, \dots\}.$$

Example 2.3: Zugverspätung.

Die Verspätung eines Zuges in Minuten sei ein Zufallsvorgang mit Ausgängen im Intervall $[0; 10]$. Bei unendlicher Messgenauigkeit sind überabzählbar viele Verspätungen möglich, da das Intervall $[0; 10]$ Teilmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} ist.

Die reellen Zahlen sind, wie auch jede ihrer Teilmengen, mächtiger als \mathbb{N} und daher überabzählbar unendlich.

- Jede Teilmenge von Ω heißt **(Zufalls–)Ereignis**.
- Da eine Menge auch Teilmenge von sich selbst und die leere Menge \emptyset Teilmenge jeder Menge ist, sind Ω und \emptyset selbst Ereignisse von Ω .
- Ein Ereignis $A \subset \Omega$ tritt ein, wenn der Ausgang ω_i des Zufallsvorgangs Element von A ist: $\omega_i \in A$.
- Da ein Zufallsvorgang immer in einem Ausgang $\omega_i \in \Omega$ mündet, ist Ω auch das **sichere Ereignis**.
- Analog hierzu heißt die leere Menge \emptyset das **unmögliche Ereignis**, weil kein $\omega_i \in \Omega$ existiert, das Element der leeren Menge \emptyset ist: $\omega_i \notin \emptyset, i = 1, \dots, m$.

- Teilmengen $\{\omega_i\}$, deren einziges Element ein Ausgang $\omega_i \in \Omega$ ist, heißen **Elementarereignisse**.
- Umfassen Teilmengen mehrere Ausgänge, nennt man sie **zusammengesetzte Ereignisse**.
- Z. B. ist beim *Wurf eines Würfels* der Ausgang: *Augenzahl 3 liegt oben* ein Elementarereignis und wird geschrieben als $\{3\}$; das Ereignis A: *gerade Augenzahl liegt oben* ist ein zusammengesetztes Ereignis, als Menge geschrieben: $\{2, 4, 6\}$.
- A tritt ein, wenn der Würfelwurf die Augenzahl 2, 4 oder 6 ergibt.

- Die insgesamt möglichen Ereignisse eines Zufallsvorgangs findet man, indem alle Teilmengen für Ω gebildet werden.
- Die Zusammenfassung dieser Teilmengen führt bei endlichem oder abzählbar unendlichem Stichprobenraum Ω zur **Potenzmenge** $PM(\Omega)$.
- Die Anzahl der Ereignisse der Potenzmenge ist 2^m , wobei m der Anzahl der Elemente von Ω entspricht.
- Siehe Buch, S. 11.

Example 2.4: Potenzmenge.

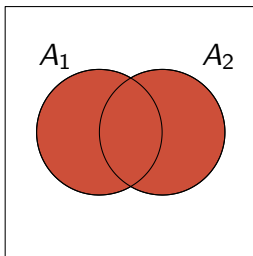
Ein Zufallsvorgang hat den Stichprobenraum $\Omega = \{1, 2, 3\}$; wegen $m = 3$ beträgt die Anzahl der möglichen Ereignisse

$$2^3 = 8.$$

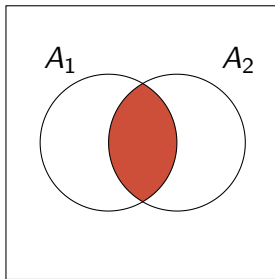
Diese Ereignisse lauten $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{3\}$, $A_5 = \{1, 2\}$, $A_6 = \{1, 3\}$, $A_7 = \{2, 3\}$, $A_8 = \{1, 2, 3\} = \Omega$. Die Potenzmenge ist

$$PM(\Omega) = \{A_1, \dots, A_8\}.$$

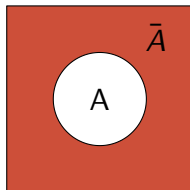
- Zwischen den Ereignissen können bestimmte Beziehungen vorliegen.
- **Beispiel:** Das Ereignis $A_5 = \{1, 2\}$ tritt dann ein, wenn entweder $A_2 = \{1\}$ oder $A_3 = \{2\}$ eintritt. A_5 heißt daher **Vereinigungsereignis**, geschrieben als $A_5 = A_2 \cup A_3$.
- Verallgemeinert erhält man Vereinigungsereignisse V als $V = \bigcup_{j=1}^n A_j$.
- Für $n = 2$ ist V als rote Fläche im **Venn-Diagramm** wiedergegeben, wobei das Rechteck den Stichprobenraum Ω festlegt.



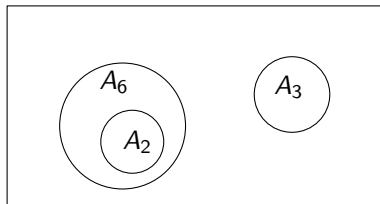
- Ist der Schnitt zweier Ereignisse A_i und A_j nicht leer, gilt $A_i \cap A_j = D \neq \emptyset$, so treten mit D auch die Ereignisse A_i und A_j ein.
- D heißt daher **Durchschnittsereignis**, das allgemein definiert ist als $D = \bigcap_{j=1}^n A_j$. D tritt ein, wenn alle A_j eintreten.



- Tritt A_i genau dann ein, wenn A_j nicht eintritt, so sind die beiden Ereignisse zueinander komplementär.
- A_i heißt **Komplementärereignis** oder kurz Komplement und lässt sich schreiben als $A_i = \bar{A}_j$. Natürlich ist auch A_j Komplementärereignis zu A_i : $A_j = \bar{A}_i$.
- Im Beispiel 2.4 ist das Ereignis $A_2 = \{1\}$ das Komplement zu $A_7 = \{2, 3\}$: $A_2 = \bar{A}_7$. Umgekehrt gilt auch $A_7 = \bar{A}_2$.
- Für A und sein Komplement \bar{A} gelten $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$.



- A_i und A_j heißen **disjunkt**, wenn ihr Schnitt leer ist: $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- Komplementäre Ereignisse sind daher immer auch disjunkt, die Umkehrung gilt aber nicht.
- So sind im Beispiel 2.4 $A_2 = \{1\}$ und $A_3 = \{2\}$ zwar disjunkt, aber nicht komplementär. Denn wenn A_3 nicht eintritt, folgt nicht notwendigerweise das Eintreten von A_2 ; es könnte auch $A_4 = \{3\}$ eintreten.

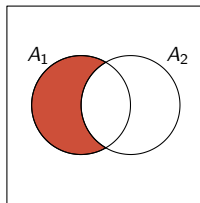


- A_i ist ein **Teilereignis** von A_j , wenn jeder Ausgang eines Zufallsvorgangs, der zu A_i gehört, auch in A_j liegt, A_j aber mindestens einen Ausgang ω_j enthält, der nicht auch in A_i enthalten ist.
- A_i ist eine **echte Teilmenge** von $A_j : A_i \subset A_j$.
- In der Abbildung repräsentieren die Kreise die Ereignisse A_2 , A_3 und A_6 des Beispiels 2.4.

- Das **Differenzereignis** $A_i \setminus A_j$ tritt dann ein, wenn der Ausgang des Zufallsvorgangs in A_i , aber nicht in A_j liegt.
- Man nennt $A_i \setminus A_j$ auch das **relative Komplement** zu A_j bezüglich A_i . Alternativ kann man schreiben $A_i \setminus A_j = A_i \cap \bar{A}_j$. Im Beispiel 2.4 folgt für $A_6 = \{1, 3\}$ und $A_5 = \{1, 2\}$ das Differenzereignis $A_6 \setminus A_5$ als

$$A_6 \setminus A_5 = A_6 \cap \bar{A}_5 = \{1, 3\} \cap \{3\} = \{3\}.$$

Nur $\omega_3 = 3$ führt dazu, dass $A_6 \setminus A_5$ eintritt. Das Beispiel zeigt, dass im Allgemeinen $A_i \setminus A_j \neq A_j \setminus A_i$.



Würfelwurf 1



```
x <- c(1,3,5)
```

```
y <- c(2,3,6)
```

```
union(x,y)
```

```
## [1] 1 3 5 2 6
```

```
intersect(x,y)
```

```
## [1] 3
```

```
setdiff(x,y)
```

```
## [1] 1 5
```

```
setdiff(y,x)
```

```
## [1] 2 6
```

```
setdiff(union(x,y),y) # Komplement von y, wenn Omega = union(x,y)
```

```
## [1] 1 5
```

```
rje::powerSet(x)
```

```
## [[1]]  
## numeric(0)  
##  
## [[2]]  
## [1] 1  
##  
## [[3]]  
## [1] 3  
##  
## [[4]]  
## [1] 1 3  
##  
## [[5]]  
## [1] 5  
##  
## [[6]]  
## [1] 1 5  
##  
## [[7]]  
## [1] 3 5  
##  
## [[8]]  
## [1] 1 3 5
```

Exercise 2.5:

Ein Würfel wird einmal gewürfelt. Es sind folgende Ereignisse definiert:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4\}, A_3 = \{2, 4\}, A_4 = \{1, 2, 3, 4\}, \\ A_5 &= \{4\}, A_6 = \{3, 4, 5, 6\}, A_7 = \{5, 6\}, A_8 = \{1, 2, 4, 5\}, \\ A_9 &= \{2, 3, 6\}, A_{10} = \{1, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie folgende Ereignisse und stellen Sie diese jeweils in einem Venn-Diagramm grafisch dar!

- | | | |
|--------------------|--|-----------------------|
| (a) $A_1 \cup A_2$ | (b) $A_2 \cap A_3$ | (c) \bar{A}_1 |
| (d) $A_1 \cap A_2$ | (e) $A_8 \cap \bar{A}_9 = A_8 \setminus A_9$ | (f) $A_5 \subset A_4$ |

- Jedes zusammengesetzte Ereignis A kann in disjunkte Teilereignisse $A_j \neq \emptyset$ so zerlegt werden, dass gilt: $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$. A ergibt sich jetzt als disjunkte Vereinigung.
- In Beispiel 2.4 lässt sich A_8 in $A_2 = \{1\}$ und $A_7 = \{2, 3\}$, aber auch in $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$ und $A_4 = \{3\}$ zerlegen. Beim zweiten Fall wurde A_8 in Elementarereignisse zerlegt.
- Die Zerlegung von A in Elementarereignisse heißt **kanonische Darstellung**: Jedes Ereignis ergibt sich eindeutig als Vereinigungsereignis von Elementarereignissen:

$$A = \bigcup_{j=1}^n \{\omega_j\}.$$

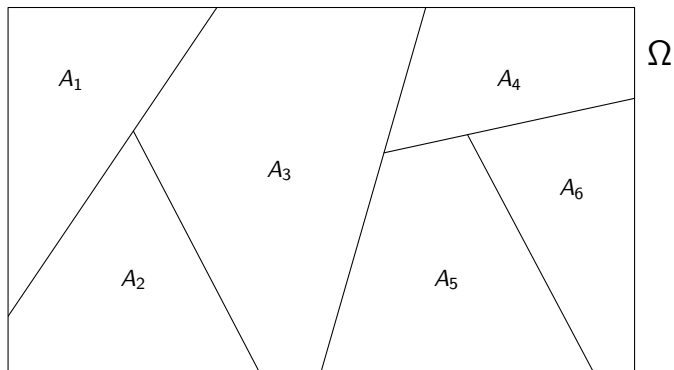
- Da auch Ω zu den zusammengesetzten Ereignissen gehört, kann es auch in (Teil-)Ereignisse A_j zerlegt werden.
- Die Menge $\{A_1, \dots, A_n\}$ bildet ein **vollständiges System von Ereignissen**, wenn für diese Zerlegung gilt:

$$(1) \quad \Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^n A_j,$$

$$(2) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j,$$

$$(3) \quad A_j \neq \emptyset \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

- Ein vollständiges System wird auch **vollständiges Ereignissystem** bzw. **vollständige Zerlegung** genannt.



Exercise 2.6:

Ein Würfel wird einmal gewürfelt. Es sind folgende Ereignisse definiert:

$$A_1 = \{2, 4, 6\}, A_2 = \{1, 3, 5\}, A_3 = \{2\}, \\ A_4 = \{4, 6\}, A_5 = \{1, 3\}, A_6 = \{5, 6\}.$$

Welche der folgenden Mengen bildet ein vollständiges Ereignissystem?

- (a) $F_1 = \{A_1, A_2\}$
- (b) $F_2 = \{A_1, A_5, A_6\}$
- (c) $F_3 = \{A_3, A_4, A_5\}$
- (d) $F_4 = \{A_2, A_3, A_4\}$

- Zufallsvorgänge zeichnen sich dadurch aus, dass ungewiss ist, welches ihrer möglichen Ereignisse eintritt.
- Wahrscheinlichkeiten quantifizieren die Chance des Eintretens eines bestimmten Ereignisses und werden mit P symbolisiert.
- Für ein Ereignis $A \subset \Omega$ gibt $P(A)$ jetzt die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten von A an.
- P ist also eine Funktion, die Ereignissen reelle Zahlen zuordnet, welche wir als Wahrscheinlichkeit bezeichnen.

- Die axiomatische Grundlage für Wahrscheinlichkeiten wurde von **Kolmogoroff** entwickelt.
- Auf der Basis dieser Axiomatik lässt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion wie folgt definieren:

Kolmogoroff-Axiome

$$(K1) \quad P(A) \geq 0 \text{ für alle } A,$$

$$(K2) \quad P(\Omega) = 1,$$

$$(K3) \quad P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

für alle A_i und A_j , die paarweise disjunkt sind: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Kolmogoroff-Axiome

- (K1) **Nichtnegativität**: Die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A ist stets nichtnegativ.
- (K2) **Normierung** der Wahrscheinlichkeit.
- (K3) **Volladditivität**: Die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung paarweise disjunkter Ereignisse gleicht der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Jedes Ereignis $A \subset \Omega$ wird somit durch P in das geschlossene Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ abgebildet.

Aus diesen Axiomen lassen sich folgende Rechenregeln ableiten:

Rechenregeln

$$(R1) \quad P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

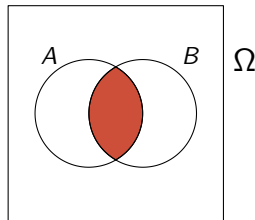
$$(R2) \quad P(A) \leq P(B) \text{ für } A \subset B,$$

$$(R3) \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \text{ (für paarweise disjunkte Ereignisse),}$$

$$(R4) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (für paarweise nicht disjunkte Ereignisse).}$$

Ihre Herleitung findet sich im Buch auf S. 23.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- A und B sind nicht disjunkt, da $A \cap B \neq \emptyset$. $A \cap B$ entspricht der roten Fläche.
- $(A \cup B)$ würde mit $P(A) + P(B)$ die Wahrscheinlichkeit für $A \cap B$ doppelt erfassen; folglich muss $P(A \cap B)$ subtrahiert werden.

- Der **Additionssatz für disjunkte Ereignisse**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

liefert eine Vorschrift für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ eines abzählbar unendlichen Stichprobenraumes Ω .

- **Elementarereignisse** $\{\omega_j\}$, $j = 1, \dots, n$ sind paarweise disjunkt.


Exercise 2.7:

Es sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.25.$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cup B), P(\bar{B}), P(A \cap \bar{B}), P(A \cup \bar{B})$$

Wir verwenden einen Punkt anstelle eines Kommas als **Dezimaltrennzeichen**, da dies der angloamerikanischen Schreibweise der Programmiersprache  entspricht.

Exercise 2.8:

Ein Würfel wird ein Mal gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

- a) eine 2 oder eine 3 zu würfeln?
- b) eine 2, eine 3 oder eine 4 zu würfeln?
- c) eine ungerade Zahl oder eine gerade Zahl zu würfeln?
- d) eine Augenzahl kleiner als 4 oder eine gerade Augenzahl zu würfeln?
- e) eine Augenzahl kleiner als 4 und eine gerade Augenzahl zu würfeln?

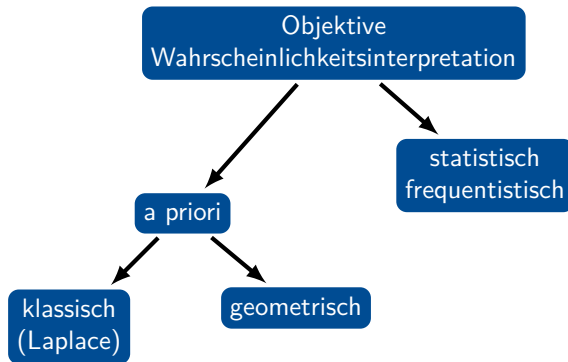
Exercise 2.9:

In einer Urne befinden sich 20 rote und 30 grüne Kugeln. 5 rote und 10 grüne Kugeln sind mit einer 1 beschriftet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) eine gezogene Kugel rot oder mit einer 1 beschriftet ist?
- b) eine gezogene Kugel nicht mit einer 1 beschriftet ist?
- c) eine rote Kugel gezogen wird und diese nicht mit einer 1 beschriftet ist?
- d) eine Kugel gezogen wird, die rot oder nicht mit einer 1 beschriftet ist?

- Mit den **Axiomen von Kolmogoroff** und den Regeln (R1) bis (R4) sind nur die allgemeinen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten festgelegt, nicht jedoch welche Werte sie bei bestimmten Ereignissen annehmen.
- Hierzu muss eine dem Zufallsvorgang adäquate **Wahrscheinlichkeitsinterpretation** vorliegen.

Mit dem subjektiven und statistisch/frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff befasst sich das Buch auf S. 25.



Exercise 2.10:

Student Paul kommt jeden Morgen zwischen 8.00 und 8.30 Uhr an einer Bushaltestelle an, an der zwei Buslinien halten:

Linie A: 8.04, 8.14, 8.24

Linie B: 8.10, 8.20, 8.30.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Linie A nimmt?

- **a-priori:**

- ▶ **Laplace- (bzw. klassische) Wahrscheinlichkeit:** Anwendung bei Zufallsvorgängen mit endlichem Ω und deren Elementarereignisse die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen (**Laplace-Experimente**).
- ▶ Laplace-Experimente können als die zufällige Entnahme aus einer endlichen Menge von Objekten charakterisiert werden. Wird mehrfach gezogen, muss zwischen *Ziehen mit Zurücklegen* oder *Ziehen ohne Zurücklegen* unterschieden werden.

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis $\{\omega_i\}$, $i = 1, \dots, m$ beträgt dann $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{m}$.

$P(A)$ erhält man als

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}.$$

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt **Mächtigkeit** $|M|$. Die Laplace-Wahrscheinlichkeit ist dann

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Würfelwurf 2



Exercise 2.11: Laplace-Experimente.

- (a) In einer Urne befinden sich 20 Kugeln, von denen 8 rot sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel bei einer zufälligen Entnahme zu erhalten.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach Ziehen einer roten Kugel ohne Zurücklegen im zweiten Zug erneut eine rote Kugel zu ziehen?
- (c) Ein **Laplace-Würfel** (idealer Würfel) wird geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Augenzahl größer als 2 oben liegt.

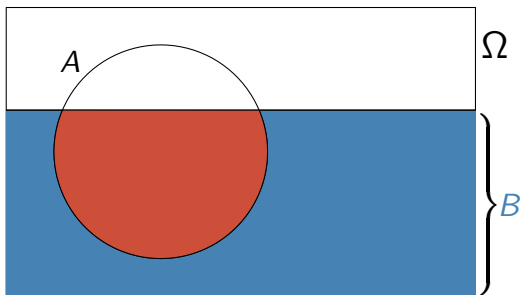
Exercise 2.12:

Ein Laplace-Würfel wird einmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Augenzahl kleiner 3 fällt?

Exercise 2.13:

Eine Laplace-Münze und ein Laplace-Würfel werden gemeinsam geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kopf und eine Augenzahl größer als 4 fällt?

- Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten erfolgt bislang unter Bezug auf den ganzen Stichprobenraum Ω .
- Es lassen sich aber auch dann Wahrscheinlichkeiten für A berechnen, wenn nicht ganz Ω , sondern nur noch ein Teil B davon relevant ist. Die Abbildung verdeutlicht die Veränderung des Bezugssystems.



- Der Kreis entspricht A , das untere Rechteck B und das rote Kreissegment $A \cap B$.
- $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$ sind die Wahrscheinlichkeiten für A , B und $A \cap B$, wenn Ω zugrunde liegt.
- Es kann aber auch die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung berechnet werden, dass nur noch die Ausgänge in B relevant sind.
- Diese **bedingte Wahrscheinlichkeit** wird mit $P(A|B)$ bezeichnet.
- In der Abbildung ist $P(A)$ das Verhältnis der Kreisfläche zur Fläche des Rechtecks Ω ; die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ jedoch das Verhältnis der roten Fläche zur Fläche des Rechtecks B .

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Es seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse und $P(B) > 0$. Für die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(A|B)$ gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Example 2.14: Idealer Würfel.

Ein idealer Würfel wird geworfen. Also sind $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ und $P(\{\omega_i\}) = 1/6$ für $i = 1, \dots, 6$.

A ist das Ereignis, eine 1 zu würfeln; B das Ereignis einer ungeraden Augenzahl. $A \cap B$ tritt bei einer 1 ein. Die Wahrscheinlichkeiten betragen $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/2$ und $P(A \cap B) = 1/6$.

Was ist nun die Wahrscheinlichkeit einer 1 unter der Bedingung, dass eine ungerade Augenzahl eintritt? Der durch die Bedingung gegebene Stichprobenraum lautet $B = \{1, 3, 5\}$, also gilt $P(A|B) = 1/3$.

Denselben Wert erhält man nach der eingeführten Definition:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Exercise 2.15:

Nach der achtmaligen Durchführung des Zufallsexperiments *zweimaliges Werfen einer Münze* erhält man folgendes Resultat:

Versuch	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Wurf	K	Z	Z	Z	K	Z	Z	K
2. Wurf	Z	Z	K	K	K	Z	K	Z

Ereignis A : K beim 1. Wurf, Ereignis B : K beim 2. Wurf

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A \cap B)$

(d) $P(A|B)$ (e) $P(B|A)$

Exercise 2.16:

In einem Dorf leben 1000 Personen. Es ist bekannt, dass 600 Einwohner nach Mallorca in den Urlaub fahren und dass 500 Einwohner die Bild-Zeitung lesen. Zusätzlich weiß man, dass von den 600 Mallorca-Urlaubern 400 die Bild lesen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- (a) eine Person Mallorca-Urlauber ist,
- (b) eine Person Bild-Zeitung-Leser ist,
- (c) eine Person Mallorca-Urlauber und Bild-Zeitung-Leser ist,
- (d) wenn ein Einwohner Bild-Zeitung liest, dieser auch ein Mallorca-Urlauber ist,
- (e) wenn ein Einwohner Mallorca-Urlauber ist, dieser auch Bild-Zeitung liest?

- $P(A|B)$ lässt sich als die Wahrscheinlichkeit von A unter der zusätzlichen Information interpretieren, dass B bereits eingetreten ist.
- Übt diese Information keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von A aus, gilt $P(A|B) = P(A)$.
- A ist dann **unabhängig** von B .
- Dann ist aber auch B unabhängig von A , wie folgende Umformung zeigt:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \quad (\text{wegen } P(A|B) = P(A)). \end{aligned}$$