

# Mitschrieb Elementare Geometrie

Jens Ochsenmeier & Maximilian Franz & Nadine Schorpp

11. Januar 2018



# 1

## Einstieg — Metrische Räume

### 1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die unten abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeometrie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.



Abbildung 1.1. Diese Objekte sind topologisch äquivalent, metrisch allerdings nicht.

**Bemerkung 1** (Kartographieproblem). Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

## 1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

**Definition 1.1** (Metrik). Sei  $X$  eine Menge. Eine Funktion  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist eine **Metrik** (Abstandsfunktion), falls  $\forall x, y, z \in X$  gilt:

1. **Positivität:**  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie:**  $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung:**  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**Definition 1.2** (Metrischer Raum). Ein **metrischer Raum** ist ein Paar  $(X, d)$  aus einer Menge und einer **Metrik** auf dieser.

**Definition 1.3** (Pseudometrik). Eine **Pseudometrik** erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine **Metrik**, außer  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  – die Umkehrung gilt.

**Definition 1.4** (Abgeschlossener  $r$ -Ball um  $x$ ). Eine Teilmenge

$$\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossener  $r$ -Ball um  $x$** .

**Definition 1.5** (Abstandserhaltende Abbildung). Sind  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  **metrische Räume**, so heißt eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  **abstandserhaltend**, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

**Definition 1.6** (Isometrie). Eine **Isometrie** ist eine bijektive **abstandserhaltende Abbildung**. Falls eine Isometrie

$$f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$$

existiert, so heißen  $X$  und  $Y$  *isometrisch*.

## 1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

**Beispiel 1.7** (Triviale Metrik). Menge  $X$ ,

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

also lässt mithilfe der **trivialen Metrik** jede Menge zu einem **metrischen Raum** verwursten.

**Beispiel 1.8** (Simple Metriken). Sei  $X = \mathbb{R}$ .<sup>1</sup>

- $d_1(s, t) := |s - t|$  ist Metrik.
- $d_2(s, t) := \log(|s - t| + 1)$  ist Metrik.

**Beispiel 1.9** (Euklidische Standardmetrik).  $X = \mathbb{R}^n$ ,

$$d_e(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$$

ist die **(euklidische) Standardmetrik** auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung<sup>2</sup>.

**Bemerkung 2** (aus LA II). **Isometrien** von  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

**Beispiel 1.10** (Maximumsmetrik).  $X = \mathbb{R}$ ,

$$d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

ist **Metrik**.

**Beispiel 1.11** (Standardmetrik und Maximumsmetrik allgemein: Norm).  $V$  sei  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine **Norm** auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{>0},$$

so dass  $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ :

1. **Definitheit:**  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

---

<sup>1</sup> **Anmerkung:** Wenn  $d(x, y)$  eine **Metrik** ist, so ist auch  $\tilde{d}(x, y) := \lambda d(x, y)$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Metrik.

<sup>2</sup> **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:**  $(x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

2. **absolute Homogenität:**  $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$

3. **Dreiecksungleichung:**  $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine **Metrik** durch  $d(v, w) := ||v - w||$ .

**Beispiel 1.12** (Einheitssphäre).

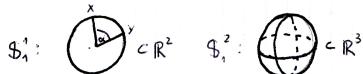
$$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$$

ist die  $n$ -te **Einheitssphäre**.

Auf dieser ist mit

$$d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$$

die **Winkel-Metrik** definiert.



**Abbildung 1.2.** Die erste und zweite Einheitssphäre.

**Beispiel 1.13.** (Hamming-Metrik) Es ist  $\mathbb{F}_2$  der Körper mit zwei Elementen  $\{0, 1\}$ ,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \dots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge  $n$ . Die **Hamming-Metrik** ist definiert als

$$d_H : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

# 2

## Längenmetriken

### 2.1 Graphen

**Definition 2.1** (Graph). Ein **Graph**  $G = (E, K)$  besteht aus einer *Ecken-Menge*  $E$  und einer Menge von Paaren  $\{u, v\}$  ( $u, v \in E$ ), genannt *Kanten*.

**Definition 2.2** (Erreichbarkeit). Seien  $p, q \in E$  von  $G = (E, K)$ .  $q$  ist **erreichbar** von  $p$  aus, falls ein *Kantenzug* von  $p$  nach  $q$  existiert.

**Definition 2.3** (Zusammenhängend).  $G = (E, K)$  heißt **zusammenhängend**, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.

Ist  $G$  ein zusammenhängender **Graph**, so ist  $d(p, q) =$  minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von  $p$  nach  $q$  eine **Metrik**.

**Beispiel 2.4** (Wortmetrik). Sei  $\Gamma := \langle S \rangle$  vom endlichen Erzeugendensystem  $S$  erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \dots \cdot s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig)}, \quad (2.1)$$

z.B.  $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$ .

Dann lässt sich über die Länge von  $g \in \Gamma$  (minimales  $n$  in **Gleichung 2.1**) eine **Metrik** definieren:

**Definition 2.5** (Wortmetrik).

$$d_s(g, k) := |g^{-1}k|$$

ist eine **Metrik** mit

$$\begin{aligned} d_s(kg, kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1} \underbrace{k^{-1}k}_{=e} h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g, h), \end{aligned}$$

also ist  $d_s$  linksmultiplikativ mit  $k \in \Gamma$  und damit eine **Isometrie**.

**Definition 2.6** (Cayley-Graph). Der **Cayley-Graph**  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  von  $\Gamma$  bezüglich  $S$  ist der Graph  $G = (E, K)$  mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die *Graphen-Metrik* auf  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  ist **isometrisch** zur **Wortmetrik**.

## 2.2 Euklidische Metrik

**Beispiel 2.7** (Euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  als Standardmetrik). Sei

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare<sup>1</sup> Kurve. Die *euklidische Länge* von  $C$  ist

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &:= \int_a^b \|C'(t)\| dt \quad (\text{via Polynom-Approximation}) \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> **Hinweis:** Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer  $C^\infty$ -differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

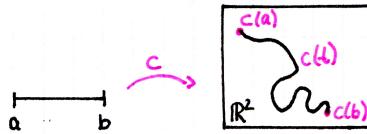


Abbildung 2.1. Eine stückweise differenzierbare Kurve im  $\mathbb{R}^2$ .

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq.$$

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L}_{\text{euk}}(g) = \int_0^1 \|p - q\| dt = \|p - q\| = \underline{d}_e(p, q).$$

**Lemma 2.8** (Unabhängigkeit von  $L_{\text{euk}}$ ).

1.  $L_{\text{euk}}(c)$  ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2.  $L_{\text{euk}}(c)$  ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis.

1. Zu zeigen: Für  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$  und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus<sup>2</sup>  $t : [c, d] \rightarrow [a, b], s \mapsto t(s)$  gilt:

$$L_{\text{euk}}(c(t(s))) = L_{\text{euk}}(c(t)).$$

Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

$$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{dc(t(s))}{dt} \right\| \left\| \frac{dt}{ds} \right\| ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

□

2. • Translation.

Für  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^2$  sei

$$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

die von  $p$  verschobene Kurve. Es gilt

---

<sup>2</sup> **Diffeomorphismus:** Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

## 2 Längenmetriken

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \| (T_p \circ c)' \| dt = \int_a^b \| c' \| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen.  $\square$

- Drehung.

Für  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  sei

$$\begin{aligned} D_\vartheta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos \vartheta x(t) - \sin \vartheta y(t), \sin \vartheta x(t) + \cos \vartheta y(t)) \end{aligned}$$

die um Winkel  $\vartheta$  gedrehte Kurve.

Da  $D_\vartheta$  eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\vartheta \circ c(t))' = D_\vartheta \cdot c'(t)$$

und damit

$$\| (D_\vartheta \circ c(t))' \| = \| D_\vartheta \cdot c' \| \stackrel{\text{orth.}}{=} \| c' \|$$

und damit gilt das Lemma für Drehungen.  $\square$

- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

**Lemma 2.9** (Geraden sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in  $\mathbb{R}^2$  sind genau die Geradensegmente.

*Beweis.*

Seien  $p, q \in \mathbb{R}^2$  beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man  $(p, q)$  überführen in Punkte in spezieller Lage;

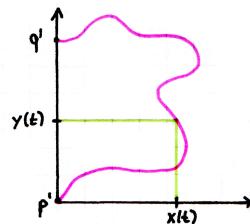
$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen der Invarianz von  $L_{\text{euk}}$  ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungscurven nicht.

Sei jetzt  $c(t) := (x(t), y(t))$  eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen  $p'$  und  $q'$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_a^b |y'| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

$l$  ist die Länge des Geradensegmentes zwischen  $p'$  und  $q'$ .



**Abbildung 2.2.** Die "geeignete" Rotation einer Kurve, sodass Start- und Endpunkt auf einer Achse liegen.

$\Rightarrow$  Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.

Gilt für eine Kurve  $c$ , dass  $L_{\text{euk}}(c) = l$ , so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere  $x'(t) = 0 (\forall t)$ , also  $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$  und somit  $\tilde{c} = (0, y(t))$ . Also ist  $\tilde{c}$  auch (parametrisiertes) Geradensegment.  $\square$

**Definition 2.10** (Euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ -Kurven). Für  $p, q \in \mathbb{R}^2$  sei  $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$  die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen  $p$  und  $q$ . Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{euk}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

**Satz 2.11** (“Neuer” metrischer  $\mathbb{R}^2$ ).

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}})$$

ist ein **metrischer Raum** und **isometrisch** zu  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ .

*Beweis.* Direkter Beweis nach dem **Lemma über Geradensegmente**.

Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{euk}}(p, q) = \|p - q\| = d_e(p, q).$$

Die Identität ist eine Isometrie.

*Beweis.* Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie.*

Sei

$$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.

Es ist  $d_e = d_{\text{euk}}$ , denn ist  $\tilde{c}(t) = (a + b - t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$  (mit gleicher Länge wie  $c$ ) und die Abbildung  $c \mapsto \tilde{c}$  ist bijektiv. Dann  $L(\tilde{c}) = L(c)$ , und damit

$$d(q, p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p, q).$$

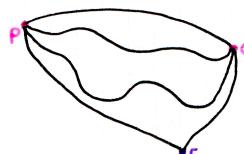
- *Dreiecksungleichung.*

Zu zeigen:  $d_{\text{euk}}(p, q) \leq d_{\text{euk}}(p, r) + d_{\text{euk}}(r, q) (\forall p, q, r \in \mathbb{R}^2)$ .

Verknüpfen von Wegen von  $p$  nach  $r$  mit solchen von  $r$  nach  $q$  liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von  $p$  nach  $q$ :

$$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \not\subseteq \Omega_{pq}.$$

Infimumbildung liefert die Behauptung.



**Abbildung 2.3.** Betrachte Wege von  $p$  nach  $q$  über  $r$  und nicht über  $r$ .

## 2 Längenmetriken

- *Positivität.*

Zu zeigen:  $d_{\text{euk}}(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ .

- Falls  $p = q$ .

Die konstante Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$  hat

$$c'(t) = 0 \Rightarrow L_{\text{euk}}(c) = 0 \sim d_{\text{euk}}(p, p) = 0.$$

- Falls  $p \neq q$ .

Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment<sup>3</sup>

$$t \mapsto (1-t)p + tq$$

mit der Länge  $d_{\text{euk}} = \|p - q\| = 0$ .



Abbildung 2.4. "Schleifen".

## 2.3 Sphärische Geometrie

**Beispiel 2.12** (2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum). Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius  $R$  in  $\mathbb{R}^3$  ist

$$S_R^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a, b] \rightarrow S_R^2 \subset \mathbb{R}^3, t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die **sphärische Länge** durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$$

und

$$d_s(p, q) := \inf L_s(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S_R^2)).$$

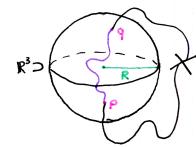


Abbildung 2.5. Es werden nur Kurven betrachtet, die in  $S_R^2$  liegen.

**Lemma 2.13** (Kurvenlängen rotationsinvariant). Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf  $S_R^2$  ist invariant unter Rotationen von  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis.* Eine orthogonale Matrix im  $\mathbb{R}^2$  ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix  $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Da  $\|D(x)\| = \|x\|$  für  $x \in \mathbb{R}^3$  gilt, ist  $D(S_R^2) = S_R^2$ . Insbesondere ist für eine Kurve  $c$  in  $S_R^2$  auch das Bild  $D \circ c \subset S_R^2$ .

Weiter folgt aus  $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$ :

---

<sup>3</sup> **Anmerkung:** nur an dieser Stelle wird die Geometrie des  $\mathbb{R}^2$  benötigt!

$$\begin{aligned} L_s(D \circ c) &= \int_a^b \| (D \circ c(t))' \| dt = \int_a^b \| D(c'(t)) \| dt \\ &= \int_a^b \| c'(t) \| dt = L_S(c). \end{aligned}$$

**Lemma 2.14** (Großkreise sind am kürzesten).

Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in  $S_R^2$  sind **Großkreise**, also Schnitte von  $S_R^2$  und zweidimensionalen Untervektorräumen des  $\mathbb{R}^3$ .

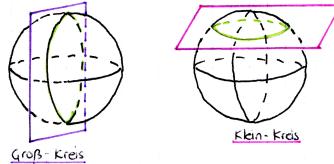


Abbildung 2.6. Groß- und Klein-Kreis.

*Beweis.*

Seien zwei beliebige Punkte  $p, q$  auf  $S_R^2$ . Dann finden wir eine Rotation von  $\mathbb{R}^3$ , die  $p$  auf  $p' = (0, 0, R)$  — also den “Nordpol” — und  $q$  auf  $q' = (0, y, z) \in S_R^2$  abbildet. Aufgrund der **Rotationsinvarianz der Kurvenlängen** und der Definition ist  $d_s(p, q) = d_s(p', q')$ . Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen  $p'$  und  $q'$  zu finden.

*Idee:* Mittels “geographischer Koordinaten”  $\varphi$  und  $\vartheta$ . Nun kann eine Verbindung zwischen  $p'$  und  $q'$  geschrieben werden als

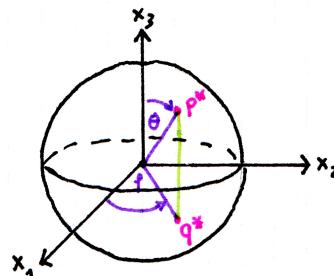


Abbildung 2.7. Geographische Koordinaten auf  $S_R^2$ .

$$c(t) = R(\sin \vartheta(t) \cos \varphi(t), \sin \vartheta(t) \sin \varphi(t), \cos \vartheta(t))$$

und somit

$$c'(t) = (\vartheta' \cos \vartheta \cos \varphi - \varphi' \sin \vartheta \sin \varphi, \vartheta' \cos \vartheta \sin \varphi + \varphi' \sin \vartheta \cos \varphi, -\vartheta' \sin \vartheta),$$

also

$$\|c'(t)\| = R^2(\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta)$$

und somit

$$\begin{aligned} L_s(c) &= R \int_a^b \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta} dt \geq R \int_a^b \sqrt{\vartheta'^2(t)} dt \\ &= R \int_a^b |\vartheta'(t)| dt \geq R \int_a^b \vartheta'(t) dt = \int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(b)} d\vartheta = R(\vartheta(b) - \vartheta(a)) \end{aligned}$$

mit oBdA  $\vartheta(b) \geq \vartheta(a)$ .

## 2 Längenmetriken

Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.

Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere  $\varphi' = 0$ , also wäre  $\varphi$  konstant  $= \varphi(a) = \frac{\pi}{2}$ . Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis.

**Satz 2.15** (Infimums- & Winkelmetrik isometrisch).  $(S_R^2, d_s)$  ist ein metrischer Raum und isometrisch zu  $(S_R^2, R \cdot d_W)$ .

*Beweis.* Analog zu  $(R^2, d_{\text{euk}})$ .

## 2.4 Wozu sind Metriken gut?

**Bemerkung 3** (Erinnerung: Konvergenz). In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **konvergent**, wenn

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

**Bemerkung 4** (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei  $(X, d)$  metrischer Raum.

Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $X$  heißt **konvergent**, wenn

$$\exists x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also  $x_n \in B_\varepsilon(x)$  ( $\forall n \geq N$ ).

**Bemerkung 5** (Erinnerung: Stetigkeit).  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig** in  $t_0 \in \mathbb{R}$  falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

$f$  heißt **stetig**, wenn sie stetig ist  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 6** (Stetigkeit in metrischen Räumen). Metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ .

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig** in  $x_0 \in X$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn  $f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(x))$  falls  $x \in B_\delta^X(x_0)$ .

$f$  heißt *stetig*, falls  $f$  stetig ist  $\forall x \in X$ .

**Bemerkung 7** (Grenzwerte für stetige Funktionen).

$$f : X \rightarrow Y \text{ stetig} \Rightarrow f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.

Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.



# 3

## Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

### 3.1 Topologische Räume

**Definition 3.1** (Topologischer Raum). Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von  $X$ , so dass gilt

1.  $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus  $\mathcal{O}$  sind wieder in  $\mathcal{O}$ .

Ein solches System  $\mathcal{O}$  heißt **Topologie** von  $X$ . Die Elemente von  $\mathcal{O}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

**Beispiel 3.2** (Extrembeispiele).

1. Menge  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \emptyset\}$  ist die **triviale Topologie**.
2. Menge  $X$ ,  $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$  ist die **diskrete Topologie**.

**Beispiel 3.3** (Standard-Topologie auf  $\mathbb{R}$ ).  $X = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{O}_{s(\text{standard})} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf  $\mathbb{R}$ .<sup>1</sup>

**Beispiel 3.4** (Zariski-Topologie auf  $\mathbb{R}$ ).  $X = \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{O}_{\text{Zariski}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R}\}, E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist die Zariski-Topologie auf  $\mathbb{R}$ .

Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen,  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}$ .

Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Be- trachten von Nullstellen von Polynomen:

$$(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow p(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

$$\mathbb{R} \leftrightarrow \text{Nullpolynom}$$

$$\emptyset \leftrightarrow X^2 + 1$$

**Definition 3.5** (Metrischer Raum  $\rightarrow$  topologischer Raum). Metrische Räume (z.B.  $(X, d)$ ) sind topologische Räume:

$$U \subset X \text{ ist } d\text{-offen} \Leftrightarrow \forall p \in U \exists \varepsilon = \varepsilon(p) > 0,$$

sodass der offene Ball  $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$  um  $p$  mit Radius  $\varepsilon$  ganz in  $U$  liegt:  $B_\varepsilon(p) \subset U$ .

Die  $d$ -offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik  $d$  induzierte Topologie<sup>2</sup>.

**Definition 3.6** (Basis). Eine Basis für die Topologie  $\mathcal{O}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ , sodass für jede offene Menge  $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$  gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

---

<sup>1</sup> Offenes Intervall:  $(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ ,  
a und b beliebig

<sup>2</sup> Übungsaufgabe: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

Beispiel:  $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$  für **Standard-Topologie** auf  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 3.7** (Komplexität einer **Topologie**).  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  haben eine abzählbare Basis bezüglich **Standard-Metrik**  $d(x, y) = |x - y|$  (beziehungsweise **Standard-Topologie**): Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

**Bemerkung 8** (Gleichheit von **Topologien**). Verschiedene **Metriken** können die gleiche Topologie induzieren:

Sind  $d, d'$  Metriken auf  $X$  und enthält jeder Ball um  $x \in X$  bezüglich  $d$  einen Ball um  $x$  bezüglich  $d'$  ( $B_{\varepsilon'}^d(x) \subset B_\varepsilon^d(x)$ ), dann ist jede  $d$ -offene Menge auch  $d'$ -offen und somit  $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$ .

Gilt auch die Umkehrung ( $\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$ ), so sind die Topologien gleich:  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

**Beispiel 3.8** (Bälle und Würfel sind gleich).  $X = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ .

$$\begin{aligned} d(x, y) &:= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d'(x, y) &:= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}. \end{aligned}$$

Die **induzierten Topologien** sind gleich.

**Beispiel 3.9** (Metrische Information sagt nichts über **Topologie**).  $(X, d)$  sei ein beliebiger **metrischer Raum**,

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ist **Metrik** mit  $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$ .

Für  $d'$  gilt:  $d'(x, y) \leq (\forall x, y)$ , insbesondere ist der Durchmesser von  $X$  bezüglich  $d'$ :

$$= \sup_{x, y \in X} d'(x, y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

**Definition 3.10** (Umgebung).  $(X, \mathcal{O})$  sei ein **topologischer Raum**.  $U \subset X$  heißt **Umgebung** von  $A \subset X$ , falls

$$\exists O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

**Definition 3.11** (Innerer und äußerer Punkt). Für  $A \subset X$ ,  $p \in X$  heißt  $p$  ein **innerer Punkt** von  $A$  (bzw. **äußerer Punkt** von  $A$ ), falls  $A$  (bzw.  $X \setminus A$ ) Umgebung von  $\{p\}$  ist. Das **Innere** von  $A$  ist die Menge  $\overset{\circ}{A}$  der inneren Punkte von  $A$ .

**Definition 3.12** (Abgeschlossene Hülle). Die **abgeschlossene Hülle** von  $A$  ist die Menge  $\overline{A} \subset X$ , die nicht äußere Punkte sind.

Beispiel:  $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ ,  
 $\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ .

**Bemerkung 9** (Drei konstruierte topologische Räume). Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie**:  $(X, \mathcal{O}_X)$  topologischer Raum,  $Y \subseteq X$  Teilmenge.

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

definiert eine Topologie auf  $Y$ , die so genannte **Teilraum-Topologie**.<sup>3</sup>

**Achtung!**  $U \in \mathcal{O}_Y$  ist i.A. nicht offen in  $X$ , z.B.  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = [0, 1]$ ,  $V = (-1, 2)$ , also  $U = V \cap Y = Y$ .

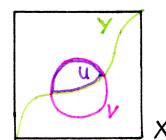


Abbildung 3.1. Graphische Darstellung der Teilraum-Topologie.

2. **Produkttopologie**:  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  zwei topologische Räume. Eine Teilmenge  $W \subseteq X \times Y$  ist **offen** in der **Produkt-Topologie**  $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in W \exists$  Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$  und  $V$  von  $y$  in  $Y$  sodass das "Kästchen"  $U \times V \subseteq W$ .

**Achtung!** Nicht jede offene Menge in  $X \times Y$  ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.

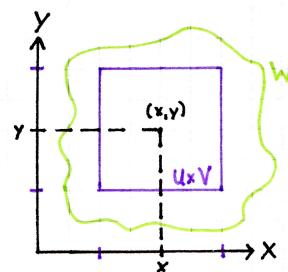


Abbildung 3.2. Punkt  $(x, y)$  und sein  $U \times V$ -Kästchen.

---

<sup>3</sup> Zu überprüfen!

**Beispiel:**  $X = \mathbb{R}$  mit Standard-Topologie, dann ist

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

induzierter topologischer Raum.

3. **Quotiententopologie:**  $(X, \mathcal{O})$  topologischer Raum,  $\sim$  Äquivalenzrelation<sup>4</sup> auf  $X$ . Für  $x \in X$  sei  $[x] := \{y \in X : y \sim x\}$  die Äquivalenzklasse von  $x$ ,  $X / \sim$  die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned}\pi : X &\rightarrow X / \sim \\ x &\mapsto [x]\end{aligned}$$

die kanonische Projektion (surjektiv!).

Die Quotienten-Topologie auf  $X / \sim$  nutzt:

$$U \subset X / \sim \text{ ist offen} \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X.$$

**Beispiel:**  $X = \mathbb{R}$  mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik  $d_{\mathbb{R}}(s, t) = |s - t|$ ).

Seien  $s, t \in \mathbb{R}$ . Wir definieren

$$s \sim t \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \exists m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

Dann ist

$$\mathbb{R} / \sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S^1 = \text{Einheitskreis.}$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{it}.\end{aligned}$$

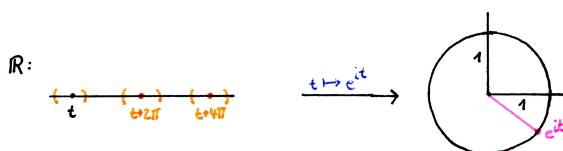


Abbildung 3.3. Quotiententopologie auf  $\mathbb{R}$ .

<sup>4</sup> Impliziert Partitionierung von  $X$  in disjunkte Teilmengen

*Bemerkung:* Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.

$G = (\mathbb{Z}, +)$  operiert auf  $X = \mathbb{R}$ .

*Bahnen-Raum* =  $\mathbb{R}/\sim$  mit

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, t) \mapsto t + 2\pi m.$$

Die Äquivalenzklasse  $[t]$  ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

## 3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

**Bemerkung 10** (Hausdorffsches Trennungsaxiom  $T_2$ ). Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{O})$  heißt **hausdorffsch**, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten  $p, q \in X$  disjunkte **Umgebungen** finden kann, also Umgebungen  $U \ni p$  und  $V \ni q$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

*Beispiel:*

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.

*Beweis.* Sei  $d(p, q) =: \varepsilon$ .

Behauptung:  $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q) = \emptyset$ .

Sei  $z$  in  $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q)$ . Dann gilt

$$d(p, q) \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} d(p, z) + d(z, q) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \sharp$$

2.  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$  ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der **Metrik** induziert wird.
3.  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$  ist nicht hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für  $p, q \in \mathbb{R}, p \neq q$ :

$$U_p = \mathbb{R} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$U_q = \mathbb{R} \setminus \{q_1, \dots, q_k\},$$

also  $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ .

Wichtige Konsequenz von "hausdorffsch": In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.<sup>5</sup>

**Bemerkung 11** (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen).

1. Jeder Teilraum (mit **Teilraum-Topologie**) eines **Hausdorff-Raumes** ist hausdorffsch.
2.  $X, Y$  Hausdorff-Räume  $\Rightarrow X \times Y$  ist Hausdorff-Raum bezüglich **Produkt-Topologie**.

### 3.3 Stetigkeit

**Definition 3.13** (Stetigkeit).  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  **topologische Räume**. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig**, falls die Urbilder von offenen Mengen in  $Y$  offen sind in  $X$ .

**Beispiel 3.14** (Einfache **Stetigkeiten**).

1.  $\text{Id} : X \rightarrow X, x \mapsto x$  ist stetig.
  2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
  3. Für  $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$  gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.
- Für **metrische Räume** ist diese Definition äquivalent zur  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition und zur Folgenstetigkeit<sup>6</sup>.

**Definition 3.15** (Homöomorphismus).

- Eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen **topologischen Räumen** heißt **Homöomorphismus**, falls  $f$  und  $f^{-1}$  **stetig** sind.
- $X$  und  $Y$  heißen **homöomorph**, falls ein Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  existiert (notiere  $X \cong Y$ ).

**Bemerkung 12** (Homöomorphismengruppe).

- $\text{Id}_X : X \rightarrow X, x \mapsto x$  ist **Homöomorphismus**.

---

<sup>5</sup> Erinnerung: Konvergenz:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  (**top. Raum**).  $X \ni a$  heißt *Limes* um  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  falls es zu jeder **Umgebung**  $U$  von  $a$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $x_n \in U \forall n \geq n_0$ .

<sup>6</sup> Übungsaufgabe!

- Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
- Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.

Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

**Beispiel 3.16** (Einfache Homöomorphismen).

- $[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} \cong [a, b]$  mit  $a < b \in \mathbb{R}$   
(via  $f(t) = a + t(b - a)$ ).
- $(0, 1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a, b)$  mit  $a < b$  beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1, 1) \cong (0, 1)$   
(z.B. via  $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ ).
- **Stetig** und injektiv, aber **kein** Homöomorphismus!  
 $f : [0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$  ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.
- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B.  $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1, (x_1, x_2) \mapsto x_1$ :  
Für  $U$  offen in  $X_1$  ist  $p_1^{-1}(U) = U \times X_2$  offen bezüglich der **Produkttopologie**.
- **Metrische Räume**  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  und **Isometrie**  $f : X \rightarrow Y$ , also eine bijektive Abbildung, so dass

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

**Behauptung:**  $f$  ist Homöomorphismus (bzgl. der durch **Metrik** definierten **Topologien**).

**Beweis.** (über  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition):  $\delta := \varepsilon$ .

$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) < \delta = \varepsilon$ , also ist  $f$  stetig.  
Analog für  $f^{-1}$ .

- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\}$  ist die  $n$ -dimensionale **Einheitssphäre** in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .  
 $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$  sei der "Nordpol" von  $S_n$ .

**Behauptung:**  $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** (via stereographische Projektion):

$$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

$$f(x) := \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \text{ stetig,}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n, \quad y \mapsto \left( \frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right) \text{ auch stetig.}$$

Also ist  $f$  homöomorph.

Achtung:  $S^n$  ist nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  (da  $S^n$  kompakt und  $\mathbb{R}^n$  nicht kompakt ist, mehr dazu später).

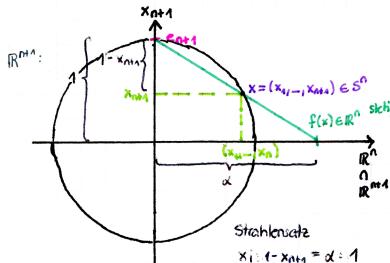


Abbildung 3.4. Stereographische Projektion.

**Bemerkung 13** (**Isometrien**-Untergruppe). Isometrien bilden eine Untergruppe der Homöomorphismen von  $X$  (versehen mit von der **Metrik** induzierten Topologie):

$$\text{Isom}(X, d) \subseteq \text{Homö}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \text{Bij}(X).$$

**Bemerkung 14** (Exkurs 1: Kurven).

Was ist eine Kurve?

*Naive Definition:* Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.

*Problem:*  $\exists$  stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen  $I = [0, 1] \rightarrow I^2$  ("Peano-Kurven", "space-filling curves")<sup>7</sup>.

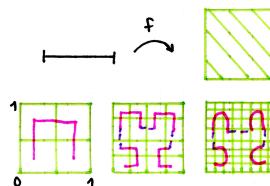


Abbildung 3.5. Space-filling curves.

*Ausweg 1: Jordan-Kurven* (bzw. geschlossene J-Kurven).

$\Leftrightarrow$  top. Raum, homöomorph zu  $I = [0, 1]$  (J-Kurve)

$\Leftrightarrow$  top. Raum, homöomorph zu  $S^1$  (geschlossene J-Kurve)

*Ausweg 2: reguläre stetig differenzierbare Kurven* (lokal injektiv).

*Verwendung:* z.B. Knoten — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von  $\mathbb{R}^3$ :

$$\exists f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

<sup>7</sup> Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.

mit **Teilraumtopologie** von  $\mathbb{R}^3$ .

Zwei Knoten  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$  sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus  $h$  von  $\mathbb{R}^3$  gibt mit  $h(K_1) = K_2$ .<sup>8</sup>



Abbildung 3.6. Äquivalente und nicht-äquivalente Knoten.

**Bemerkung 15** (Exkurs 2: Topologische Gruppen). Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe versehen mit einer **Topologie**, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

mit **Produkt-Topologie** und die Inversenbildung

$$i : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

**stetig** sind.

**Beispiel 3.17** (Topologische Gruppen).

1.  $G$  beliebige Gruppe mit **diskreter Topologie** ist **topologische Gruppe**.
2.  $\mathbb{R}^n$  mit **Standard-Topologie** ist abelsche topologische Gruppe.
3.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sind multiplikative topologische Gruppen.
4.  $H \subset G$  Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. **Teilraumtopologie**.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit **Produkttopologie** ist eine topologische Gruppe.
6.  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n \times n}}_{= \mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$  allg. reelle lineare Gruppe.  
 $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  versehen mit **Teilraum-Topologie** induziert von  $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n \times n}$  ist topologische Gruppe:
  - Matrizenmultiplikation ist **stetige** Abbildung  $(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2})$ ,
  - Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für  $A^{-1}$ ).
7.  $SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^\top A = E_n, \det A = 1\}$  ist die **spezielle orthogonale Gruppe**. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.

---

<sup>8</sup> **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

Insbesondere ist

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S^1$$

eine abelsche topologische Gruppe.

### 3.4 Zusammenhang

**Definition 3.18** (Zusammenhängend). Ein **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{O})$  heißt **zusammenhängend**, falls  $\emptyset$  und  $X$  die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  sind.

**Äquivalent:**  $X$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow X$  ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.

*Beweis.*  $A \subset X$  offen und abgeschlossen  $\Leftrightarrow A$  und  $X \setminus A$  offen  $\Leftrightarrow A$  und  $X \setminus A$  abgeschlossen.

**Beispiel 3.19** (Zusammenhang).

1.  $\mathbb{R}$  (und ebenso beliebige Intervalle) ist **zusammenhängend**,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist *nicht* zusammenhängend.

*Beweis.* Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.

*Annahme:*  $I \neq U \neq \emptyset$ , sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von  $I$ . Dann gibt es mindestens einen Punkt  $u \in U$  und  $v \in I \setminus U$ . OBdA  $u < v$ . Setze  $U_0 := \{x \in U : x < v\}$  und  $c := \sup U_0$ . Also  $u \leq c \leq v$ . Weiter ist  $c \in U$ , da  $U$  abgeschlossen ist. Eine ganze Umgebung von  $c$  gehört auch zu  $U$ , da  $U$  offen ist. Damit gehört eine ganze Umgebung von  $c$  auch zu  $U_0$   $\sharp$

**Bemerkung 16** (Ergänzung: Zusammenhang von Teilmengen). *Allgemein:* Eine Teilmenge  $B \subset X$  heißt **zusammenhängend**, falls sie bezüglich der **Teilraumtopologie** zusammenhängend ist.

**Bemerkung 17** (Einpunktige Mengen). Einpunktige Mengen sind **zusammenhängend**:  $\{x\}$  mit **Teilraumtopologie** ist diskret (also sind  $\{x\}$  und  $\emptyset$  die einzigen offenen Mengen).

**Definition 3.20** (Zusammenhangskomponente). Sei  $x \in X$ . Die **Zusammenhangskomponente**  $Z(x)$  ist die Vereinigung aller **zusammenhängenden** Teilmengen, die  $x$  enthalten.

**Lemma 3.21** (Eigenschaften zusammenhängender Mengen).

1.  $A$  ist zusammenhängend  $\Rightarrow \overline{A}$  (abgeschlossene Hülle von  $A$ ) ist zusammenhängend.
2.  $A, B$  zusammenhängend,  $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$  zusammenhängend.<sup>9</sup>

**Bemerkung 18** (Zusammenhängende Mengen bilden disjunkte Zerlegung).

Zusammenhangskomponenten von  $X$  sind zusammenhängende Mengen und bilden eine disjunkte Zerlegung von  $X$ .

*Beweis.* Definiere eine Äquivalenzrelation (für  $x, y \in X$ ):

$$x \sim y \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists \text{ zusammenhängende Menge } A : x, y \in A.$$

$\sim$  ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität:**  $x \sim x$ , denn die einpunktige Menge  $\{x\}$  ist zusammenhängend.
- **Symmetrie:**  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$  nach Definition.
- **Transitivität:**  $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ :  
 $x \sim y : \exists A$  zusammenhängend mit  $x, y \in A$ .  
 $y \sim z : \exists B$  zusammenhängend mit  $y, z \in B$ .  
Also  $y \in A \cap B \stackrel{\text{Lemma}}{\Rightarrow} A \cup B$  zusammenhängend.

**Beispiel 3.22** (Zusammenhangskomponenten).

1.  $\mathbb{R} \setminus \{t\} = \{s \in \mathbb{R} : s < t\} \cup \{s \in \mathbb{R} : s > t\}$  hat 2 Zusammenhangskomponenten.
2.  $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \{\text{irrationale Zahlen}\}$  mit Teilraum-Topologie von  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$  ist **total unzusammenhängend**, d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig.

*Beweis. Annahme:*  $A \subset \mathbb{Q}$  mit mindestens 2 verschiedenen Punkten.

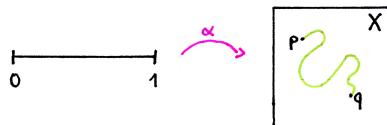
*Behauptung:*  $A$  ist nicht zusammenhängend.

Sei  $\{q_1, q_2\} = A \subset \mathbb{Q}$  mit  $q_1 \neq q_2$  (oBdA  $q_1 < q_2$ ). Sei  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $q_1 < s < q_2$ ,  $O_1 = \{t \in \mathbb{R} : t < s\}$ ,  $O_2 = \{t \in \mathbb{R} : t > s\}$ ,  $\overline{O_1} = O_1 \cap A$ ,  $\overline{O_2} = O_2 \cap A$ .  $\overline{O_1}$  und  $\overline{O_2}$  sind offen in  $A$  oder in  $\mathbb{Q}$  bezüglich der Teilraumtopologie. Es ist  $A = \overline{O_1} \cup \overline{O_2}$  mit  $\overline{O_1} \cap \overline{O_2} \neq \emptyset$ , d.h.  $A$  ist *nicht* zusammenhängend.

**Definition 3.23** (Weg-Zusammenhängend). Sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum.  $X$  heißt **weg-zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten  $p, q \in X$  einen Weg (d.h. stetige Abbildung  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$ ) zwischen  $p$  und  $q$  gibt.

---

<sup>9</sup> Übungsaufgabe, es wird nur die Definition von Zusammenhang benötigt.

Abbildung 3.7. Darstellung der Funktionsweise einer solchen Funktion  $\alpha$ .

**Lemma 3.24** (Weg-Zusammenhang).  $X$  ist weg-zusammenhängend  $\Rightarrow X$  ist zusammenhängend.

*Beweis.* Wäre  $X$  nicht zusammenhängend, dann  $\exists$  eine disjunkte Zerlegung  $X = A \cup B$  mit  $A, B$  offen und nicht-leer,  $A \cap B = \emptyset$  mit  $p \in A$  und  $q \in B$ . Sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  ein (stetiger) Weg zwischen  $p$  und  $q$ , also  $\alpha(0) = p$  und  $\alpha(1) = q$ . Daraus folgt, dass  $[0, 1] = \alpha^{-1}(\alpha([0, 1])) = \alpha^{-1}(A \cap \alpha([0, 1])) \cup \alpha^{-1}(B \cap \alpha([0, 1])) \Rightarrow [0, 1]$  ist nicht zusammenhängend  $\sharp$

**Achtung:** Umkehrung gilt nicht!

Z.B. "topologische Sinuskurve"<sup>10</sup>  $X$  ist zusammenhängend, aber nicht weg-zusammenhängend:

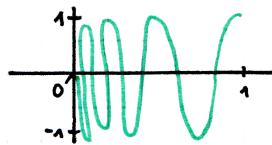


Abbildung 3.8. Darstellung der "topologischen Sinuskurve".

$$X := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{(0, y) : |y| < 1\}.$$

**Lemma 3.25** (Weg-Zusammenhang von Bildern). Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind (weg-)zusammenhängend.

*Beweis.*

1. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $f(X) = A \cup B$  eine disjunkte Zerlegung in nichtleere offene Mengen.  
Dann ist  $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  eine disjunkte Zerlegung.
2. Seien  $x = f(p), y = f(q)$  zwei Punkte in  $f(X)$ . Es ist  $p = f^{-1}(x), q = f^{-1}(y)$ .  
Dann existiert  $a : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $a(0) = p$  und  $a(1) = q$  und somit ist  $f \circ a : [0, 1] \rightarrow f(X)$  ein stetiger Weg in  $f(X)$ .

**Korollar 3.26** (Zwischenwertsatz). Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

<sup>10</sup> Details: Singer-Thorpe p.52

**Bemerkung 19** (Test auf Homöomorphie via Zusammenhang).

Beispiel:  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$  nur falls  $n = 1$ .

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $R \cong \mathbb{R}^n$  für  $n \geq 1$ . Es ist

$$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{nicht zusammenhängend}} \cong \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{zusammenhängend für } n \geq 2} \not\models$$

Ebenso:  $[0, 1] \cong [0, 1]^n$  nur für  $n = 1$ .

**Satz 3.27** (von Brouwer).  $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^m$  für  $m \neq n$ .

*Beweis.* Der Beweis benutzt den **Satz von Gebietstreue** (Brouwer):

Ist  $U \subseteq \text{offen}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive stetige Abbildung, so ist  $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

*Beweisidee:* Ist  $m < n$ , so ist

$$j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

eine Einbettung und eine injektive, stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^m$  auf eine nicht offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Wäre  $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ , so hat man einen Widerspruch zum Satz von Gebietstreue.<sup>11</sup>

### 3.5 Kompaktheit

**Definition 3.28** ((Lokal) kompakt). Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt, also

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k \in I :$$

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

- $A \subseteq X$  heißt *kompakt*, wenn  $A$  bezüglich der **Teilraumtopologie** kompakt ist.
- $X$  heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt von  $X$  eine kompakte Umgebung besitzt.

**Bemerkung 20** (Verwendung kompakter Räume). Kompakte Räume sind oft "einfacher" als nicht-kompakte, weil man beispielsweise von lokalen Eigenschaften auf globale schließen kann.

Begründung:  $\forall x \in X \exists U_x : f|_{U_x} \leq c_x$ . Schreibe  $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ . Da  $X$  kompakt ist existieren  $x_1, \dots, x_k \in X$ , sodass  $X = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$ .

$$\Rightarrow f(x) \leq \max\{c_{x_1}, \dots, c_{x_k}\}.$$

---

<sup>11</sup> siehe auch Alexandrov-Hopf, Topologie, 1935, Kap. X.2

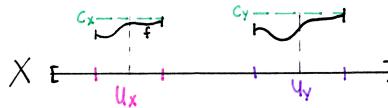


Abbildung 3.9. Konstruktion zum Schließen von lokalen auf globale Eigenschaften bei kompakten Räumen.

**Beispiel 3.29** (Beschränktheit im Kompakten). Ist \$X\$ kompakt und \$f : X \rightarrow \mathbb{R}\$ **lokal beschränkt** (d.h. jeder Punkt von \$X\$ hat eine Umgebung, in der \$f\$ beschränkt ist – z.B. wahr für **stetige** Funktionen), dann ist \$f\$ beschränkt.

**Beispiel 3.30** (**Kompaktheit** von Intervallen). \$I = [0, 1]\$ ist kompakt (ebenso \$[a, b]\$).

*Beweis.* Sei \$(U\_i)\_{i \in I}\$ eine offene Überdeckung von \$[0, 1]\$. Dann existiert eine sogenannte **Lebesgue-Zahl** \$\delta > 0\$, sodass jedes Teilintervall \$I\_\delta \subset I\$ der Länge \$\delta\$ in einem \$U\_i\$ liegt. Da \$[0, 1]\$ mit endlich vielen Intervallen der Länge \$\delta\$ überdeckt werden kann, kann man das auch mit endlich vielen \$U\_i\$.

**Bemerkung 21** (Hinweise zur **Lebesgue-Zahl**). Gäbe es ein solches \$\delta > 0\$ nicht, so wählt man eine Folge von Intervallen \$(I\_n)\_{n \geq 1}\$, \$I\_n \subset [0, 1]\$ der Länge \$\frac{1}{n}\$, die jeweils in keiner Überdeckungsmenge \$U\_i\$ liegen. Nach Bolzano Weierstraß<sup>12</sup> folgt, dass eine Teilfolge der Mittelpunkte \$m\_n\$ von \$I\_n\$ konvergiert gegen ein \$t \in I\$. Dieses \$t\$ liegt aber in einem \$U\_i\$. Also, da \$U\_i\$ offen ist, liegen auch die \$m\_n\$ in \$U\_j\$ für genügend großes \$n\$.

**Satz 3.31** (Sätze über kompakte Räume).

1. **Stetige Bilder von kompakten Räumen** sind kompakt.
2. Abgeschlossene Teilräume von kompakten Räumen sind kompakt.
3. Produkte von kompakten Räumen sind kompakt.

*Beweis.*

1. Sei \$f(X) = \bigcup\_{i \in I} U\_i\$ eine offene Überdeckung. Daraus folgt, dass \$(f^{-1}(U\_i))\_{i \in I}\$ eine offene Überdeckung von \$X\$ ist. \$X\$ ist kompakt, also

$$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_k})$$

und schließlich

$$f(X) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

2. Sei \$X\$ kompakt und \$A \subset X\$ abgeschlossen.

\$A = \bigcup\_{i \in I} U\_i\$ ist offene Überdeckung, also ist \$U\_i = V\_i \cap A\$ für \$V\_i\$ offen in \$X\$.

---

<sup>12</sup> „jede konvergente Folge in \$\mathbb{C}\$ hat konvergente Teilfolgen“

### 3 Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

$A$  ist abgeschlossen, also ist  $X \setminus A$  offen und  $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} V_i$  ist offene Überdeckung von  $X$ .

Da  $X$  kompakt ist gilt:

$$X = (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k} \Rightarrow A = X \cap A$$

also

$$A = X \cap A = (V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}) \cap A = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

3. Die allgemeine Aussage (*Satz von Tichonow*<sup>13</sup>) benutzt das *Lemma von Zorn*<sup>14</sup>.

Seien  $X$  und  $Y$  kompakte Räume.

**Behauptung:**  $X \times Y$  ist kompakt.

Sei  $X \times Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$  offene Überdeckung. Für jedes  $(x, y) \in X \times Y$  existiert  $\lambda(x, y)$ , sodass  $(x, y) \in W_{\lambda(x, y)}$ . Da  $W_{\lambda(x, y)}$  offen ist existiert  $U_{(x, y)} \subset X$  und  $V_{(x, y)} \subset Y$  sodass

$$(x, y) \in U_{(x, y)} \times V_{(x, y)} \subset W_{\lambda(x, y)}.$$

Für festes  $x$  ist  $\bigcup_{y \in Y} V_{(x, y)}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , also – da  $Y$  kompakt ist – existieren  $y_1(x), \dots, y_{m_x}(x)$  sodass

$$Y = V_{(x, y_1(x))} \cup \dots \cup V_{(x, y_{m_x}(x))}.$$

Setze

$$U_x := U_{(x, y_1(x))} \cap \dots \cap U_{(x, y_{m_x}(x))}.$$

Da  $X$  kompakt ist existieren  $x_1, \dots, x_n$  sodass  $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ . Dann ist

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{k=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m_x}} W_{\lambda(x_k, y_j(x_k))}.$$

**Beispiel 3.32 (Weitere kompakte Mengen).**

1. **Produkte kompakter Mengen:**

$$[0, 1]^n = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{n \text{ Faktoren}}$$

ist kompakt (Würfel – allgemein  $[a, b]^n$  ist kompakt)

2. **Abgeschlossene Teilräume kompakter Mengen:**

Abgeschlossene Teileräume des  $n$ -dimensionalen Würfels sind kompakt. Insbe-

---

<sup>13</sup> Ist  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie kompakter topologischer Räume, dann ist auch das kartesische Produkt mit der Produkttopologie kompakt.

<sup>14</sup> Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

sondere: jede abgeschlossene beschränkte<sup>15</sup> Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  (mit Standard-Topologie) ist kompakt (da diese Teilmenge im Würfel mit Kantenlänge  $2c$  liegt, wenn sie in einem Ball um den Nullpunkt mit Radius  $c$  liegt).

**Satz 3.33** (Heine-Borel). Die kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind genau die abgeschlossenen beschränkten Teilmengen.

*Beweis.*

•  $\Leftarrow$ . Siehe obiges Beispiel.

•  $\Rightarrow$ . Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt.

Die Norm  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = d(0, x)$  ist stetig, also insbesondere lokal beschränkt und damit global beschränkt.

Dass  $K$  abgeschlossen ist folgt aus dem nächsten Lemma.

**Lemma 3.34** (Kompakte Mengen in Hausdorffraum abgeschlossen). Sei  $X$  ein topologischer Raum, der hausdorffsch ist, und  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  abgeschlossen.

*Beweis.* Es ist zu zeigen dass  $X \setminus K$  offen ist in  $X$ .

Sei dafür  $x_0 \in X \setminus K$ . Für jedes  $x \in K$  wähle eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x_0$  und  $V_x$  von  $x$ , sodass  $U_x \cap V_x = \emptyset$  (das geht, weil  $X$  hausdorffsch ist).

Da  $K$  kompakt ist, existieren Punkte  $x_1, \dots, x_n \in K$  mit

$$K = (V_{x_1} \cap K) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap K).$$

$K$  kann also durch endlich viele Mengen überdeckt werden.

Setze  $U := U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \cap K &\subseteq U \cap (V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}) \\ &= (V_{x_1} \cap U) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap U) \\ &\subseteq (V_{x_1} \cap U_{x_1}) \cup \dots \cup (V_{x_n} \cap U_{x_n}) = \emptyset, \end{aligned}$$

also  $x_0 \in U \subset X \setminus K$ .

**Korollar 3.35** (Minimum und Maximum von Teilmengen). Jede stetige Funktion  $f : K \rightarrow C$  auf einer kompakten Teilmenge eines Hausdorffraums nimmt ein endliches Maximum und Minimum an.<sup>16</sup>

**Satz 3.36** (Homiöomorphismen auf Hausdorff-Räumen). Eine stetige, bijektive Abbildung  $f : K \rightarrow Y$  von einem kompakten Raum  $K$  auf einen Hausdorff-Raum

---

<sup>15</sup> Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist beschränkt, wenn sie in einem beliebig großen Ball um den Nullpunkt liegt, also falls  $\forall a \in A : \|a\| \leq x < \infty$

<sup>16</sup> Übungsaufgabe: Beweisen (siehe Satz von Weierstraß in Analysis)

### 3 Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

$Y$  ist ein Homöomorphismus.

*Bemerkung:* Das gilt im Allgemeinen nicht! Beispielsweise

$$X = [0, 1), \quad Y = S^1, \quad f(t) = e^{it2\pi}$$

ist bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus. Sonst wäre  $[0, 1) \cong S^1$   $\not\models$  (da  $S^1$  kompakt ist, aber  $[0, 1)$  nicht)

*Beweis.* Zu zeigen: Inverse Abbildung  $f^{-1}$  ist **stetig**.

Wir müssen zeigen, dass die Bilder von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen von  $f = (f^{-1})^{-1}$  offen (bzw. abgeschlossen) sind.

Sei  $A \subseteq K$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt (als Teilraum eines kompakten Raumes). Dann ist  $f(A)$  kompakt (als stetiges Bild einer kompakten Menge) in  $Y$  und somit ist  $f(A) \subset Y$  abgeschlossen (als kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes).

# 4

## Spezielle Klassen von topologischen Räumen

### 4.1 Übersicht

Folgende spezielle Klassen sollen diskutiert werden:

- **metrische Räume**  $\sim$  metrische Geometrie
- **Mannigfaltigkeiten** (Grundobjekte in Differenzialgeometrie, Physik,...)
- **Polyeder, Simplizialkomplexe** (Kombinatorik, algebraische Topologie)
- Bahnen-Räume von Gruppenaktionen (geometrische Gruppentheorie)

### 4.2 Topologische Mannigfaltigkeiten

**Definition 4.1** (Topologische Mannigfaltigkeit). Eine **topologische Mannigfaltigkeit** ist ein **topologischer Raum**  $M$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $M$  ist **lokal euklidisch**, d.h.  $\forall p \in M \exists$  offene Umgebung  $U$  von  $p$  und ein **Homeomorphismus**  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  mit festem  $n$ . Das Paar  $(\varphi, U)$  heißt **Karte**<sup>1</sup> und  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$  mit  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$  heißt **Atlas**.

---

<sup>1</sup> Eine mathematische Karte ist einer echten Karte ähnlich. Man nehme einen Punkt, zum Beispiel Karlsruhe, und beschreibt die Umgebung von Karlsruhe in Form einer Karte auf einer DIN A4-Karte. Das ist natürlich nicht bijektiv, aber man versucht es möglichst bijektiv zu machen.

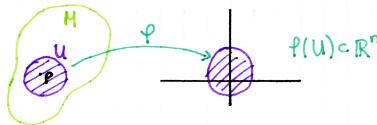


Abbildung 4.1. Karte von  $U$  mittels  $\varphi$ .

2.  $M$  ist **hausdorffsch** und besitzt abzählbare Basis der Topologie.

Bemerkung:

- Die zweite Eigenschaft ist “technisch” und garantiert, dass eine “Zerlegung der Eins” existiert (braucht man z.B. für die Existenz von Riemannschen Metriken).
- Die Zahl  $n$  heißt **Dimension** von  $M$  (eindeutig, wenn  $M$  **zusammenhängend** ist, siehe **Satz von Gebietstreue**).

**Beispiel 4.2 (Topologische Mannigfaltigkeiten).**

0. Eine abzählbare Menge mit **diskreter Topologie** (jeder Punkt ist offen) ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit.
1.  $S^1$  ist eine **kompakte, zusammenhängende** 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.  
 $\mathbb{R}$  ist nichtkompakte, zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeit.

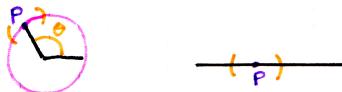


Abbildung 4.2. Darstellung von  $\mathbb{R}$  und  $S^1$  mit den für die topologische Mannigfaltigkeit nötigen Charakteristika.

2. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit, z.B. ist jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (hier ist **Karte** = Einschränkung der Identität).

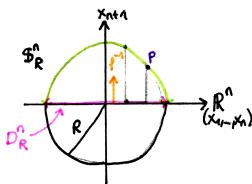
*Spezialfall:*  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$  ist offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n^2}$ , also eine  $n^2$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, denn:

- $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig
- $\{0\}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$
- $\det^{-1}\{0\}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^{n \times n}$
- $\mathbb{R}^{n \times n} \setminus \det^{-1}\{0\} = GL(n, \mathbb{R})$  ist offen in  $\mathbb{R}^{n \times n}$

3. Die  $n$ -dimensionale Sphäre mit Radius  $R > 0$ ,

$$S_R^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = R\},$$

ist  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.



**Abbildung 4.3.**  $n$ -dimensionale Sphäre als topologische Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* Sei  $(x_1, \dots, x_{n+1}) = p \in S_R^n$ , oBdA  $x_{n+1} > 0$ . Man betrachte die Abbildung

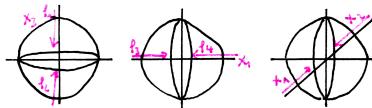
$$\begin{aligned}\varphi^{-1} : D_R^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\} \rightarrow \varphi(D_R^n) \subset S_R^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{R^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}\right)\end{aligned}$$

d.h.  $\varphi$  ist Einschränkung der Orthogonalprojektion

$$\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$$

auf  $S_R^n$ .



**Abbildung 4.4.** Einschränkung der Orthogonalprojektion.

Alternativ kann via stereographischer Projektion mit 2 Karten ausgekommen werden. Ein **Atlas** mit einer Karte existiert nicht.

4. Das Produkt von  $n_1$ -dimensionaler Mannigfaltigkeit  $M_1$  und  $n_2$ -dimensionaler Mannigfaltigkeit  $M_2$  ist  $(n_1 + n_2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

*Karten:*  $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ ,

$$\tilde{\varphi} : U_1 \times U_2 \rightarrow \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$

mit  $(U_1, \varphi_1)$  Karte von  $M_1$  um  $p_1$  und  $(U_2, \varphi_2)$  Karte von  $M_2$  um  $p_2$ .

**Bemerkung 22** (“Wieviele topologische Mannigfaltigkeiten gibt es?”).

- Dimension  $n = 1$ : Im wesentlichen  $\mathbb{R}$  (nicht kompakt) oder  $S^1$  (kompakt).

- Dimension  $n = 2$ : Liste für **zusammenhängende**, kompakte, “orientierbare”, “randlose” Mannigfaltigkeiten:
  - $g = 0$ :  $S^2$  Einheitssphäre
  - $g = 1$ :  $T^2 = S^1 \times S^1$  Torus
  - $g = 2$ : Brezel
  - ...

$g$  ist das **Geschlecht** der Mannigfaltigkeit.

- Dimension  $n = 3$ : Thurston's **Geometrisierungs-Vermutung** ( $\sim 1978$ )  
Bewiesen von Perelman (2002), ein Millenniumsproblem.
- Dimension  $n \geq 4$ : Allgemeine Klassifikation unmöglich, weil das Homöomorphieproblem hier nicht entscheidbar ist (Markov, 1960).

### 4.3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**Definition 4.3** (Kartenwechsel, differenzierbare Mannigfaltigkeit).

Sei  $M$  topologische Mannigfaltigkeit,  
 $p \in M$ . Ein **Kartenwechsel** ist ein <sup>„alternative Karte“</sup> Homöomorphismus

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{\psi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n}.$$

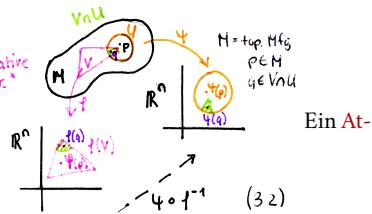


Abbildung 4.5. Kartenwechsel.

Ein  $\mathcal{A}$  von  $M$  ist ein  **$C^\infty$ -Atlas**, falls alle möglichen Kartenwechsel  $C^\infty$ -Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  sind, also alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.  
 Ein maximaler  $C^\infty$ -Atlas heißt  **$C^\infty$ -Struktur** auf der topologischen Mannigfaltigkeit  $M$ . Eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer  $C^\infty$ -Struktur (auch **glatte** oder **differenzierbare Mannigfaltigkeit**).

**Bemerkung 23.**

1. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten ohne differenzierbare Struktur<sup>2</sup>.
2. Auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 4$ <sup>3</sup>, existiert genau eine differenzierbare Struktur.

<sup>2</sup> Kerraire 1960

<sup>3</sup> Kirby, Friedman 1980

3. Auf  $S^7$  existieren 28 differenzierbare Strukturen<sup>4</sup>.

Frage: Wozu die Differenzierbarkeitsbedingung für **Kartenwechsel**? Beispielsweise für die Definition von differenzierbaren Abbildungen zwischen **differenzierbaren Mannigfaltigkeiten**.

**Definition 4.4** (Differenzierbarkeit). Seien  $M^m, N^n$  **differenzierbare Mannigfaltigkeiten** und  $F : M^m \rightarrow N^n$  stetig.  $F$  heißt **differenzierbar in  $p \in M$** , falls für Karten  $(U, \varphi)$  um  $p$  und  $(V, \psi)$  um  $F(p)$  gilt:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U)}_{\subset \mathbb{R}^m} \rightarrow \underbrace{\psi(V)}_{\subset \mathbb{R}^n}$$

ist  $C^\infty$ -Abbildung in  $\varphi(p)$ .

So kommt man von einem abstrakten  $F$  zwischen den Mannigfaltigkeiten zu einer konkreten Darstellung von  $F$ .

$F$  heißt **differenzierbar** ( $C^\infty$ ), falls  $F$  differenzierbar ist für alle  $p \in M$ .

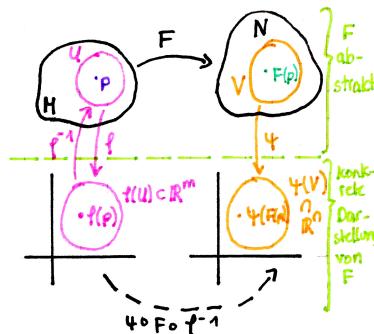


Abbildung 4.6. Differenzierbarkeitskriterium.

**Bemerkung 24** (Wohldefiniertheit der Differenzierbarkeit). Differenzierbarkeit in  $p$  ist wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl der Karten)

*Beweis.* Erster Test:  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ , zweiter Test  $\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}$

Es gilt:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \underbrace{\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\psi}}_{\text{Id}_{\mathbb{R}^n}} \circ F \circ \underbrace{\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}}_{\text{Id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \varphi^{-1}$$

---

<sup>4</sup> Milnor 1956

$$= \underbrace{(\psi \circ \tilde{\psi}^{-1})}_{C^\infty} \circ (\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \circ \underbrace{(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})}_{\text{Kartenwechsel}}$$

Also: Abbildung in Test 1 ist  $C^\infty \Leftrightarrow$  Abbildung in Test 2 ist  $C^\infty$ .

**Bemerkung 25.**

- $N = \mathbb{R}, F : M \rightarrow \mathbb{R}$  (differenzierbar) heißt **differenzierbare Funktion**.
- $M = \mathbb{R}$  (oder  $I \subset \mathbb{R}$ ),  $F : I \rightarrow N$  heißt **differenzierbare Kuve**.
- Eine Abbildung  $F : M \rightarrow N$  zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt **Diffeomorphismus**, falls  $F$  bijektiv und  $F$  und  $F^{-1}$  differenzierbar sind (also  $C^\infty$ ).
- Ein Homöomorphismus ist nicht unbedingt ein Diffeomorphismus. Beispielsweise  $\mathbb{R}$  mit  $\text{Id}$  als Karte,  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  ist Homöomorphismus, aber kein Diffeomorphismus, da  $F^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$  nicht  $C^\infty$ .
- Die Menge der Diffeomorphismen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Gruppe mit der Verkettung von Abbildungen.

**Beispiel 4.5.**

1.  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen (bzgl. Standard-Topologie).

$\varphi_0 := \text{Id}|_U$  mit zugehörigem maximalen Atlas definiert  $C^\infty$ -Struktur auf  $U$ , die kanonische differenzierbare Struktur.

2. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten heißen auch **Flächen**, speziell *regulär parametrisierte Flächen*<sup>5</sup>.

**Definition 4.6** (Reguläre Fläche). Eine Teilmenge  $S$  von  $\mathbb{R}^3$  (mit Teilraum-Topologie von  $\mathbb{R}^3$ ) heißt **reguläre Fläche**, falls für jeden Punkt  $p \in S$  eine Umgebung  $V$  von  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  und eine Abbildung

$$\begin{aligned} F : U_{\text{offen}} &\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

existiert, so dass gilt:

1.  $F$  ist ein differenzierbarer Homöomorphismus

---

<sup>5</sup> Gegenstand der klassischen Differentialgeometrie, siehe auch Kapitel 5

2. das Differential (Jacobi-Matrix) von  $F$ ,

$$dF_q : \mathbb{R}^2 \ni T_q U \rightarrow T_{F(q)} \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$$

ist *injektiv* (d.h. Jacobi-Matrix hat Rang 2) für  $\forall q \in U$ .

$F$  heißt **lokale Parametrisierung** von  $S$ .

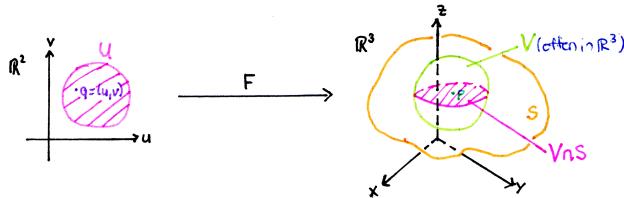


Abbildung 4.7. Lokale Parametrisierung.

**Beispiel 4.7** (Rotationsfläche). Gegeben ist eine ebene Kurve  $c(v) = (r(v), 0, h(v))$ ,  $v \in [a, b]$  mit  $r(v) > 0$ ,  $c'(v) = (r'(v), 0, h'(v))$  Tangentialvektor (mit  $C^\infty$ -Funktionen  $r, h$ ).<sup>6</sup>

$$F(u, v) := \begin{pmatrix} r(v) \cos u \\ r(v) \sin u \\ h(v) \end{pmatrix}$$

ist reguläre Fläche.<sup>7</sup>

Beispiel: 2-Sphäre von Radius  $R$ :

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos v \cos u \\ R \cos v \sin u \\ R \sin v \end{pmatrix}.$$

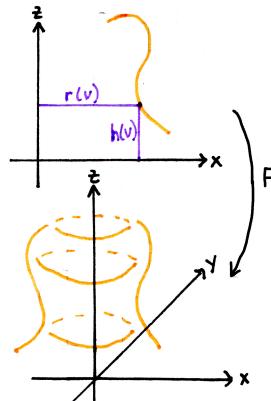


Abbildung 4.8. Rotationsfläche.

Es gibt andere Parametrisierungen, beispielsweise

<sup>6</sup>  $\|c'(v)\| \neq 0 \Leftrightarrow (r')^2 + (h')^2 \neq 0$

<sup>7</sup> Übung!

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 26** (Geometrische Eigenschaften parametrisierungsunabhängig).

Geometrische Eigenschaften sollten unabhängig sein von Parametrisierung. Das wird durch Eigenschaft 2 von regulären Flächen garantiert. Genauer gilt: Parameterwechsel sind differenzierbar ( $\rightsquigarrow$  reguläre Flächen sind differenzierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit  $F^{-1}$  (Umkehr-Abbildung der Parametrisierung) als Karten):

Sei  $p \in S$  und  $F_1 : \mathbb{R}^2 \ni U \rightarrow S, F_2 : \mathbb{R}^2 \ni V \rightarrow S$  zwei Parametrisierungen, sodass  $p \in F_1(U) \cap F_2(V) =: W$ .

*Behauptung:* Der Parameterwechsel

$$H := F_1^{-1} \circ F_2 : \mathbb{R}^2 \ni F_2^{-1}(W) \rightarrow F_1^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2$$

ist Diffeomorphismus.

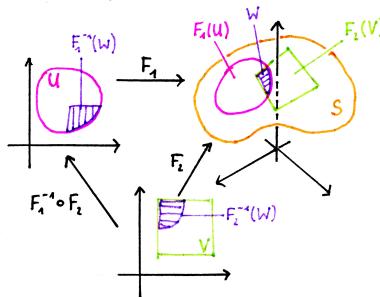


Abbildung 4.9. Parameterwechsel.

*Beweis.*  $H$  ist Homöomorphismus, da  $F_1$  und  $F_2$  Homöomorphismen sind.

*Problem:*  $F_1^{-1}$  ist auf einer offenen Teilmenge von  $S$  definiert und da weiß man nicht was differenzierbar heißt.

*Ausweg:* Erweiterung von  $F$ . Sei  $r \in F_2^{-1}(W)$  und  $q := H(r)$ . Da

$$F_1(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

reguläre Parametrisierung ist können wir oBdA (erst Koordinatenachsen von  $\mathbb{R}^3$  umbenennen) annehmen, dass

$$\frac{J(x, y)}{J(u, v)}(q) \neq 0 \quad (\text{Jacobi-Determinante}).$$

Trick: Erweitere  $F_1$  zu Abbildung

$$\widetilde{F_1} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\widetilde{F_1}(u, v, t) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

$\widetilde{F_1}$  ist differenzierbar und  $\widetilde{F_1}|_{U \times \{0\}} = F_1$ .

Die Jacobi-Determinante von  $\widetilde{F_1}$  in  $(q, 0)$ ,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & 0 \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & 0 \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & 1 \end{pmatrix} (q, 0) = \det \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix} (q) \neq 0.$$

Nach dem Umkehrsatz (Analysis II) existiert eine Umgebung  $A$  von  $\widetilde{F_1}(q, 0) = F_1(q)$  in  $\mathbb{R}^3$  sodass  $\widetilde{F_1}^{-1}$  auf  $A$  existiert und differenzierbar ( $C^\infty$ ) ist. Da  $F_2$  stetig ist existiert Umgebung  $B$  von  $v$  in  $V$ , sodass  $F_2(B) \subset A$ . Und nun ist  $H|_B = \widetilde{F_1}^{-1} \circ F_2|_B$  ist Verkettung von differenzierbaren Abbildungen, also differenzierbar in  $r$  und da  $r$  beliebig ist ist  $H$  differenzierbar auf  $F_2^{-1}(W)$ .

**Beispiel 4.8** (Weitere Beispiele von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten).

1. **n-Sphäre** von Radius  $R$  (und Zentrum 0):

$$S_R^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = R\}.$$

Karten via stereographischer Projektion.

$$N := (0, \dots, 0, R), \quad S := (0, \dots, 0, -R)$$

$$U_1 := S_R^n \setminus \{N\}, \quad U_2 := S_R^n \setminus \{S\}$$

Stereographische Projektion bzgl  $N$ :

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p)), x_i(p) := \frac{Rp_i}{R - p_{i+1}}$$

Stereographische Projektion bzgl.  $S$ :<sup>8</sup>

$$\varphi_1 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p)), x_i(p) := \frac{Rp_i}{R - p_{i+1}}$$

Kartenwechsel:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|} R^2$$

---

<sup>8</sup> Übung:  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind Homöomorphismen.

ist  $C^\infty$ .

$\Rightarrow \mathcal{A} := \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$  ist ein differenzierbarer Atlas für  $S_R^n$ .

$\rightsquigarrow$  max. Atlas aller mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten (also allen  $(U, \varphi)$ ) mit  $\varphi \circ \psi^{-1}$  ist  $C^\infty$  für  $\psi$  aus  $\mathcal{A}$  sofern Verkettung definiert ist) definiert differenzierbare Struktur auf  $S_R^n$ , also ist  $S_R^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit Dimension  $n$ .

2.  $n$ -dimensionaler reell projektiver Raum

$$P^n \mathbb{R} := \{1\text{-dim. UVR von } \mathbb{R}^{n+1}\} \equiv (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

mit  $x \sim y \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x = \lambda y$  (1-dimensionaler UVR = Äquivalenzklasse)  $\equiv S^n / \sim$  mit  $x \sim y \stackrel{\text{Def.}}{\iff} x = -y$ .

Wir sehen:

1. *Definition:* Eindimensionale Untervektorräume

2. *Definition:* Äquivalenzklassen in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

3. *Definition:* Äquivalenzklassen in  $S^n$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Definitionen äquivalent sind.

Aus der 3. Definition sieht man

$$P^n \mathbb{R} = S^n / \sim$$

ist kompakt als Quotientenraum von  $S^n$  (Quotiententopologie  $X \xrightarrow{\pi} Y = X / \sim$  mit topologischem Raum  $X$  und Quotiententopologie:  $U$  offen in  $Y \iff \pi^{-1}(U)$  ist offen in  $X$ ). Diese Abbildung ist stetig, und ein stetiges Bild von einer kompakten Menge ist wieder kompakt.

**Karten:**

$$\tilde{U}_i := \{x \in S^n : x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1$$

$$U_i := \pi(\tilde{U}_i) \text{ mit } \pi : S^n \rightarrow S^n / \sim = P^n \mathbb{R}.$$

Projektion:

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_i([x]) := \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

sind Homöomorphismen.<sup>9</sup>

**Bemerkung 27.** Man kann zeigen:  $P^n \mathbb{R}$  ist hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis der Topologie. Also ist  $P^n \mathbb{R}$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

---

<sup>9</sup> Übung: Kartenwechsel  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sind  $C^\infty$ .

Analog:  $P^n \mathbb{C} := \{\text{komplexe 1-dim. UVR von } C^{n+1}\}$  ist kompakte  $2n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

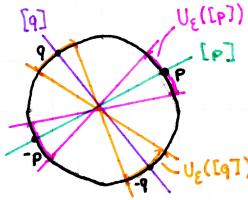


Abbildung 4.10. Idee zu Hausdorffsch.

**Beispiel 4.9** (Produkt-Mannigfaltigkeiten). Für  $M^m$  und  $N^n$   $m$ - bzw.  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist die **Produkt-Mannigfaltigkeit**  $M \times N$  eine  $(m+n)$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.<sup>10</sup>

**Exkurs 1** (Lie-Gruppen). Eine **Lie-Gruppe** ist eine Gruppe mit einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeitstruktur, so dass die Abbildung

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

$C^\infty$  ist.

**Beispiel 4.10** (zu Lie-Gruppen).

- $(\mathbb{Z}, +)$  ist eine 0-dimensionale Lie-Gruppe.
- $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi] \right\} \xrightarrow[\text{homö}]{} S^1$  ist kompakte 1-dimensionalen  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und Lie-Gruppe.<sup>11</sup>
- $SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in C, \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \right\} \xrightarrow[\text{homö}]{} S^3$  ist kompakte 3-dimensionalen  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.<sup>12</sup>
- $GL(n, \mathbb{R})$  (offene) Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n^2} \rightsquigarrow n^2$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

<sup>10</sup> Übung!

<sup>11</sup> Übung: Wieso?

<sup>12</sup>  $1 = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  mit  $\alpha = x_1 + ix_2$  und  $\beta = x_3 + ix_4$ .

**Bemerkung 28** (Fakt von Cartan). Abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind Lie-Gruppen sind auch Lie-Gruppen.

**Beispiel 4.11** (Fakt von Cartan benutzen).

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^\top = E, \det A = 1\} \text{ und}$$

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

sind Lie-Gruppen: Benutze, dass

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \text{ und } X \text{ ist hausdorffsch}$$

$\Rightarrow A$  abgeschlossen,  $f, g$  stetige Abbildungen

## 4.4 Simplicialkomplexe

Simplicialkomplexe sind Objekte der algebraischen Topologie. Mittels Kombinatorik sollen topologische Invarianten bestimmt werden.

**Definition 4.12** (Simplex). Ein  $k$ -dimensionales **Simplex** im  $\mathbb{R}^n$  ist die konvexe Hülle von  $k + 1$  Punkten  $v_0, \dots, v_k$  in allgemeiner Lage:

$$s(v_0, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

für  $v_0 - v_1, \dots, v_0 - v_k$  linear unabhängig.

**Beispiel 4.13** (Einfache Simplices).

- **0-Simplex:**  $v_0$  (Punkt)
- **1-Simplex:**  $v_0 - v_1$  (Strecke,  $s(v_0, v_1) = \{\lambda v_0 + (1 - \lambda)v_1 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ )
- **2-Simplex:**  $\Delta v_0, v_1, v_2$  (Dreiecksfläche)
- **3-Simplex:**  $v_0, v_1, v_2, v_3$  ((volles) Tetraeder)

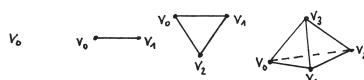


Abbildung 4.11. 0-, 1-, 2- und 3-Simplex.

**Definition 4.14** (Teilsimplex, Seite).

Die konvexe Hülle einer Teilmenge von  $\{v_0, \dots, v_k\}$  heißt **Teilsimplex** oder **Seite** von  $s(v_0, \dots, v_k)$ .

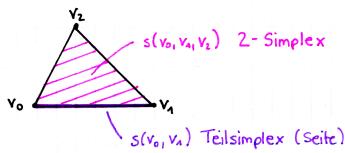


Abbildung 4.12. Simplex und Teilsimplex.

**Definition 4.15** (Simplizialkomplex). Eine endliche Menge  $K$  von Simplices in  $\mathbb{R}^n$  heißt **Simplizialkomplex**, wenn gilt:

1. Mit jedem seiner Simplices enthält  $K$  auch dessen sämtliche Teilsimplices.
2. Der Durchschnitt von je zwei Simplices ist entweder leer oder ein gemeinsamer Teilsimplex.

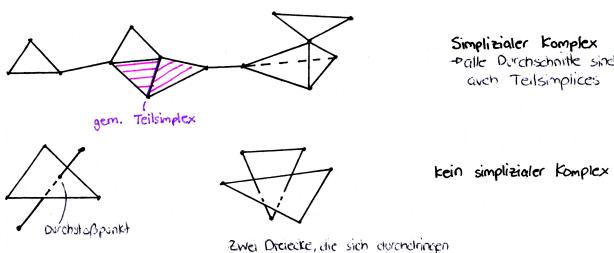


Abbildung 4.13. Simplizialer Komplex vs. kein simplizialer Komplex.

**Definition 4.16** (Geometrische Realisierung).

$$|K| := \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^n$$

mit Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}^n$  heißt der dem Simplizialkomplex  $K$  zugrunde liegende topologische Raum.

Achtung: Verschiedene Simplizialkomplexe  $K, K'$  können das gleiche  $|K| = |K'|$  haben.

**Bemerkung 29** (Vorteil von Simplizialkomplexen). Kennt man von einem (endlichen) Simplizialkomplex die **wesentlichen Simplices** (also solche, die nicht Seiten von anderen sind) in jeder Dimension und ihre **Inzidenzen** (also welche Ecken sie gemeinsam haben), so kennt man  $|K|$  (bis auf Homöomorphie).

*Beweis* (Konstruktionsidee von  $|K|$  aus diesen Daten).

#### 4 Spezielle Klassen von topologischen Räumen

1. Wähle in jeder Dimension einen *Standard-Simplex*  $\Delta_k := s(\underbrace{e_1, \dots, e_{k+1}}_{\text{Std.-Basis-Vek.}})$
2. Bilde disjunkte Vereinigung von solchen  $\Delta_k$  in jeder Dimension  $k$  soviele wie es wesentliche  $k$ -Simplices gibt:

$$X := \underbrace{\Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_0}_{\# \text{ wesentliche } 0\text{-Simp.}} \cup \dots \cup \underbrace{\Delta_n \cup \dots \cup \Delta_n}_{\# \text{ wesentliche } n\text{-Simp.}}$$

3. Identifizierte Inzidenzen (via Äquivalenzrelation) gemäß Inzidenz-Angaben für Ecken

Diese drei Schritte liefern dann eine stetige Bijektion des (kompakten) Quotientenraumes  $X / \sim$  auf Hausdorff-Raum  $|K|$ , also ein Homöomorphismus.

**Definition 4.17** (Dimension). Die **Dimension** eines Simplizialkomplexes  $K$  ist die maximale Dimension seiner Simplices.

**Bemerkung 30** (Spezialfall — Graph). Ein **endlicher Graph** ist ein endlicher, 0- oder 1-dimensionaler Simplizialkomplex,<sup>13</sup> gebaut aus 1-dimensionalen (*Kanten*) und 0-dimensionalen (*Ecken*) Simplices.

Ein Graph  $G$  heißt **zusammenhängend**, falls zu je zwei Ecken  $p, p' \in G$  eine Folge  $p = p_0, p_1, \dots, p_n = p'$  paarweise verschiedener Ecken von  $G$  existiert, sodass  $p_{i-1}$  und  $p_i$  durch eine Kante verbunden sind.

Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph  $T$ , so dass für jedes 1-Simplex (*Kante*)  $s \in T$  gilt:  $|T| \setminus \hat{s}$  ist nicht zusammenhängend (mit  $\hat{s} = \text{offener } 1\text{-Simplex}$ , also Kante ohne Endpunkte).

**Definition 4.18** (Euler-Charakteristik). Sei  $G$  ein endlicher Graph,

$$\alpha_0 := \text{Anzahl Ecken in } G,$$

$$\alpha_1 := \text{Anzahl Kanten in } G.$$

Die **Euler-Charakteristik** von  $G$  ist

$$\chi(G) := \alpha_0 - \alpha_1$$

*Bemerkung:*  $\chi(G)$  ist invariant unter Unterteilung (also dem Hinzufügen von neuen Ecken auf einer Kante).

**Satz 4.19** ( $\chi$  von Bäumen). Sei  $T$  ein (endlicher) Baum. Dann gilt  $\chi(T) = 1$ .

---

<sup>13</sup> Aufgrund der Eindimensionalität haben beispielsweise die Dreiecke in einem Graph keine Füllung!

*Beweis.* Induktion nach  $\alpha_0 = \text{Anzahl Ecken}$ .

- $n = 1$ . Dann ist  $G$  ein Punkt,  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \chi(T) = \alpha_0 - \alpha_1 = 1 \quad \checkmark$

- $n = 2$ . Dann ist  $G$  eine Kante mit Endpunkten,  $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 1, \chi(T) = 1 \quad \checkmark$

- **Induktionsannahme:** Satz gilt für alle Bäume mit  $n$  Ecken.

- **Induktionsschritt:**  $\chi(T) = 1$  für Bäume mit  $n + 1$  Ecken.

Sei  $T$  ein Baum mit  $n + 1$  Ecken und  $v_0$  ein **Ende** von  $T$  (also eine Ecke die zu genau einer Kante gehört). Ein solches Ende existiert.<sup>14</sup>

Sei  $|T_1| := |T| \setminus \{\overset{\circ}{s}_1 \cup v_0\}$ .  $T_1$  ist wieder ein Baum, sonst existiert  $s_2$  sodass  $T_1 \setminus \{\overset{\circ}{s}_2\}$  zusammenhängend ist, also auch  $T \setminus \{\overset{\circ}{s}_2\}$  zusammenhängend  $\nexists$ .

$T_1$  hat  $n$  Ecken, also nach IV:  $\chi(T_1) = 1$ .

Da  $\alpha_0(T) = \alpha_0(T_1) + 1$  und  $\alpha_1(T) = \alpha_1(T_1) + 1$  ist  $\chi(T_1) = 1$ .  $\square$

**Satz 4.20** ( $\chi$  von zusammenhängenden Graphen). Sei  $G$  ein zusammenhängender, endlicher Graph. Sei  $n$  die Anzahl von offenen 1-Simplices (Kanten), die man aus  $G$  entfernen kann, sodass  $G$  zusammenhängend bleibt. Dann ist  $\chi(G) = 1 - n$ .<sup>15</sup>

*Beweis.* Ist  $G$  ein Baum, so ist  $n = 0$  und die Behauptung gilt.

Ist  $G$  **kein** Baum, so existiert ein offenes 1-Simplex  $\overset{\circ}{s}_1$ , sodass  $|G_1| = |G| \setminus \{\overset{\circ}{s}_1\}$  zusammenhängend ist. Ist  $G_1$  ein Baum, so hält man an. Ist  $G_1$  kein Baum, so entfernt man eine Kante  $\overset{\circ}{s}_2$  usw.

$G$  hat endlich viele Kanten, also existiert ein max.  $n$ , so dass  $|G| \setminus \{\overset{\circ}{s}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{s}_n\}$  ein Baum ist. Es gilt dann  $\chi(G) = \chi(T) - n = 1 - n$ .  $\square$

**Bemerkung:** Das Komplement  $T$  aller offenen Kanten die man aus  $G$  entfernen kann (wie im Beweis) ist ein sog. **spannender Baum** für  $G$ , der alle Ecken in  $G$  enthält (nicht eindeutig).

**Definition 4.21** (Ebene und planare Graphen). Ein Graph heißt **eben**, falls er durch Punkte und Geradenstücke in der Ebene (also  $\mathbb{R}^2$ ) realisiert ist, so dass sich die Kanten nicht schneiden (außer in den Ecken).

Ein (abstrakter) Graph (also gegeben durch Ecken-Mengen und Inzidenzen) heißt **planar**, falls er *isomorph* zu einem ebenen Graphen ist.

### Beispiel 4.22.

1.  $K_4$  = vollständiger Graph mit 4 Ecken (d.h. alle Ecken-Paare sind durch Kanten verbunden). Zeichnet man diesen Graphen als Quadrat, so ist dieser nicht eben.

Man kann aber  $K_4$  so zeichnen, dass der Graph eben ist. Also ist  $K_4$  planar.

---

<sup>14</sup> vgl. Übung

<sup>15</sup> Die Aussage aus dem vorhergehenden Satz folgt aus diesem direkt.

2.  $K_5$  = vollständiger Graph mit 5 Ecken. Dieser Graph ist nicht isomorph zu einem ebenen Graphen, also ist  $K_5$  nicht planar.

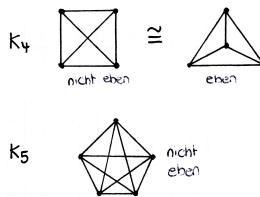


Abbildung 4.14. Planar vs. nicht planar.

**Definition 4.23** (Seiten). Die **Seiten** eines ebenen Graphen  $G$  sind die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ .

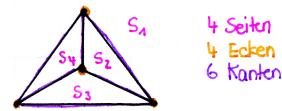


Abbildung 4.15. Seiten, Ecken und Kanten eines Graphen.

**Satz 4.24** (Euler-Formel). Für einen zusammenhängenden, ebenen Graphen  $G$  gilt:

$$\chi(G) := e(G) - k(G) + s(G) = 2,$$

wobei  $e(G)$  die Anzahl Ecken von  $G$ ,  $k(G)$  die Anzahl Kanten von  $G$  und  $s(G)$  die Anzahl Seiten von  $G$  ist.

$\chi(G)$  ist die **Euler-Charakteristik** von  $G$ .

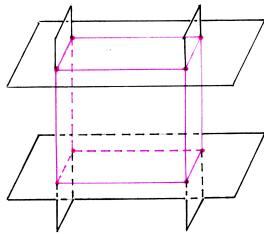
*Beweis.* Sei  $T$  ein **aufspannender Baum** für  $G$  (also ein Baum der alle Ecken von  $G$  enthält). Dann gilt  $e(T) - k(T) = 1$  und  $s(T) = 1$ . Also gilt die Behauptung für  $T$ .  $G$  erhält man aus  $T$  durch Hinzufügen von Kanten. Für jede neue Kante entsteht auch eine neue Seite, welche sich in der Summe aus der Behauptung aufheben. Also

$$\chi(G) = e(G) - k(G) + s(G) = 2.$$

□

**Definition 4.25** (Polyeder). Eine Teilmenge  $P$  von  $\mathbb{R}^3$  heißt **(konvexes) Polyeder**, falls

1.  $P$  ist Durchschnitt von endlich vielen **affinen Halbräumen** von  $\mathbb{R}^3$  (d.h. gegeben durch Ungleichungen  $a_i x + b_i y + c_i z \geq d_i, i = 1, \dots, k$ )
2.  $P$  ist beschränkt und nicht in einer Ebene enthalten.

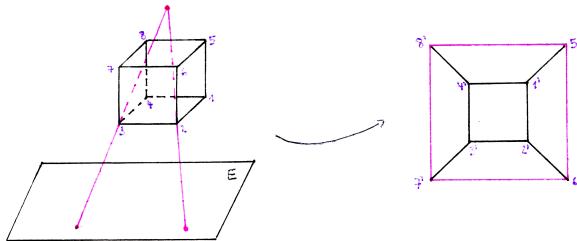


Der **Rand** von  $P$  besteht dann aus Seiten(flächen), Kanten und Ecken (gegeben als 2-dimensionale, 1-dimensionale und 0-dimensionale Schnitte von Ebenen).

**Abbildung 4.16.** Ein voller Würfel, beschränkt durch seine Seitenflächen. Vorder- und Rückseite sind zur Übersichtlichkeit weggelassen.

**Bemerkung 31** (Bezug von Polyedern zu Graphen). Das **1-Skelett** von  $P$  (also die Menge der Ecken und Kanten) von  $P$  ist ein Graph in  $\mathbb{R}^3$ .

Man kann zeigen (Resultat der konvexen Geometrie): durch Zentralprojektion von einem Punkt nahe bei einem “Seitenmittelpunkt” auf eine geeignete Ebene wird das 1-Skelett  $p^{(1)}$  von  $P$  auf einen *ebenen* Graphen  $G_p$  abgebildet (sog. **Schlegeldiagramm**). Es gilt dann:  $s(P) = s(G_p)$ ,  $k(P) = k(G_p)$ ,  $e(P) = e(G_p)$ .



**Abbildung 4.17.** Projektion des vollen Würfels auf die Ebene.

**Folgerung 1** (Eulersche Polyeder-Formel).

$$e(P) - k(P) + s(P) = 2.$$

**Definition 4.26** (Regulärer Polyeder). Ein Polyeder in  $\mathbb{R}^3$  heißt **regulär**, falls alle Seitenflächen kongruente reguläre  $n$ -Ecke (d.h. sie haben gleich lange Kanten) sind und in jeder Ecke  $m$  solche  $n$ -Ecke zusammentreffen (insbesondere gehen von jeder Ecke  $m$  Kanten aus).

**Satz 4.27** (Platonische Körper). Es gibt genau 5 reguläre Polyeder in  $\mathbb{R}^3$ :

- $(m, n) = (3, 3)$  Tetraeder
- $= (3, 4)$  Würfel
- $= (4, 3)$  Oktaeder
- $= (3, 5)$  Dodekaeder
- $= (5, 3)$  Ikosaeder

*Beweis.*

- **Existenz:** Explizite Konstruktion, siehe Euklid (oder Tutorium (oder basteln (oder Google))).
- **Vollständigkeit:** Sei  $s$  = Anzahl an Seitenflächen. Dann gilt:  $s \cdot n = 2k$ , ebenso  $m \cdot e = 2k$  und damit

$$n \cdot s = 2k = m \cdot e \Rightarrow k = \frac{me}{2} \quad s = \frac{me}{n}$$

Euler-Polyeder-Formel für  $P$  bzw.  $G_p$  ergibt:

$$2 = e - k + s = e - \frac{me}{2} + \frac{me}{n} \Leftrightarrow 4n = e(2n - nm + 2m).$$

Da  $n > 0$  und  $e > 0$  folgt:

$$2n - nm + 2m > 0 \Leftrightarrow nm - 2n - 2m + 4 < 4 \Leftrightarrow (n-2)(m-2) < 4.$$

Man sieht, dass es nur obenstehende Möglichkeiten gibt. □

**Definition 4.28** (Euler-Charakteristik von Simplizialkomplexen). Sei  $K$  ein Simplizialkomplex. Dann ist die **Euler-Charakteristik** [def:eulercharakteristikSimplizialkomplex] von  $K$ :

$$\chi(K) := \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \mp \dots \pm \alpha_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \alpha_i,$$

wobei  $\alpha_i$  = Anzahl von  $i$ -Simplices in  $K$ .

Die sogenannten “**Betti-Zahlen**” lassen sich berechnen mit Methoden aus der algebraischen Topologie (als Dimension von gewissen Vektorräumen, die man zu  $K$  konstruiert).

Man zeigt:  $\chi(K)$  ist eine topologische Invariante, also

$$|K| \underset{\text{homö}}{\cong} |\widetilde{K}| \Rightarrow \chi(K) = \chi(\widetilde{K}).$$

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **triangulierbar**, falls ein (endlicher) Simplizialkom-

plex  $K$  existiert und ein Homöomorphismus  $|K| \xrightarrow{\sim} X$ .

Ist  $X$  (via  $K$ ) triangulierbar, so definiert man  $\chi(X) := \chi(K)$  (und zeigt, dass  $\chi(X)$  unabhängig von der gewählten Triangulierung ist).

Nun ist  $\chi(S^2) = \chi(\text{Tetraeder}) = 2$  und jeder (reguläre) Polyeder homöomorph zu  $S^2$ , also  $\chi(P) = \chi(S^2) = 2$ .

## 4.5 Spezielle Konstruktion von Quotientenräumen (“Verkleben”)

**Definition 4.29** (Verklebung).  $X$  und  $Y$  seien topologische Räume,  $A \subset X$  ein Teilraum und  $f : A \rightarrow Y$  eine Abbildung (nicht notwendigerweise stetig). Sei  $X \cup Y$  die disjunkte Vereinigung. Definiere eine Äquivalenzrelation auf  $X \cup Y$  via  $f$  wie folgt:

$$x \sim x' \stackrel{\text{Def}}{\iff} \begin{cases} x = x' \\ \text{oder } f(x) = x' \quad (x \in A) \\ \text{oder } f(x') = x \quad (x' \in A) \\ \text{oder } f(x) = f(x') \quad (x, x' \in A) \end{cases}$$

Das ist eine Äquivalenzrelation.

Der Quotientenraum  $X \cup_f Y := X \cup Y / \sim$  heißt **Verklebung** von  $Y$  an  $X$  via  $f$ .

### Beispiel 4.30.

1.  $X = Y = S^1$ ,  $A = \{x_0\}$ ,  $f(x_0) := x_0$

$$X = \textcircled{1} \xrightarrow{x_0} \quad Y = \textcircled{2} \xrightarrow{x_0} \quad S^1 \cup_f S^1 = \textcircled{1} \textcircled{2}$$

Abbildung 4.18. Einfache Verklebung.

2.  $X = [0, 1]$ ,  $Y = [2, 5]$ ,  $A = \{0, 1\} \subset X$ ,  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 3$

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \text{---} \\ Y \end{array} \quad \begin{array}{c} X \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \\ \text{---} \\ \textcircled{4} \quad \textcircled{5} \end{array} \quad X \cup_f Y = \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$$

Abbildung 4.19. Intervallverklebung.

3. Zusammenhängende Summe von 2-Mannigfaltigkeiten  $M_1$  und  $M_2$ .

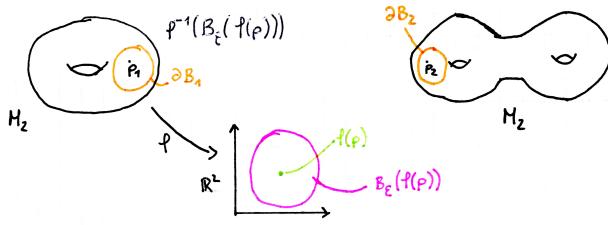


Abbildung 4.20. Zusammenhängende Summe von 2-Mannigfaltigkeiten.

Konstruktion:

1. Entferne geeignet kleine abgeschlossene "Kreisscheiben" von  $p_1 \in M_1$  und  $p_2 \in M_2$  mit Rändern  $\delta B_1$  und  $\delta B_2$  homöomorph zu  $S^1$ .
2. Wähle Homöomorphismus  $f : \delta B_1 \rightarrow \delta B_2$ .
3. Verklebe  $M_1$  und  $M_2$  mittels  $f : M_1 \cup_f M_2 =: M_1 \# M_2$

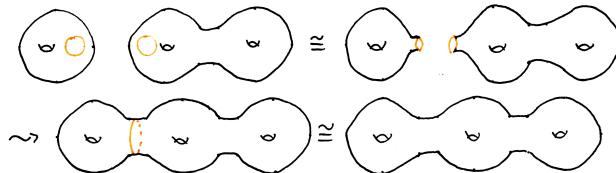


Abbildung 4.21. Verklebung.

Alle kompakten geschlossenen Flächen kann man aus  $S^2$  konstruieren durch Verkleben Tori.

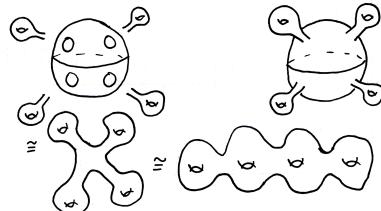


Abbildung 4.22. Konstruieren einer beliebigen kompakten geschlossenen Gläche aus  $S^2$ .

#### 4.5 Spezielle Konstruktion von Quotientenräumen ("Verkleben")

**Bemerkung 32** (Selbstverklebungen). "Selbst-Verklebungen" sind analog definiert:  $X$  = topologischer Raum,  $A \subset X$  Teilraum,  $f : A \rightarrow X$ ,  $X_f := X / \sim$  mit Äquivalenzrelation wie oben.

#### Beispiel 4.31.

1.  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  = Einheitsquadrat,

$$A \subset \delta X = \underbrace{(\{0\} \times [0, 1])}_{=: A_1} \cup \underbrace{(\{1\} \times [0, 1])}_{=: B_2} \\ \cup \underbrace{([0, 1] \times \{0\})}_{=: A_2} \cup \underbrace{([0, 1] \times \{1\})}_{=: B_2},$$

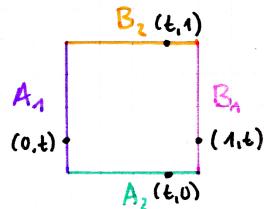


Abbildung 4.23. Vorbereitung zur Selbstverklebung am Einheitsquadrat.

$$A := A_1 \cup A_2,$$

$$f : A_1 \rightarrow B_1, \quad (0, t) \mapsto (1, t) \\ A_2 \rightarrow B_2, \quad (t, 0) \mapsto (t, 1)$$

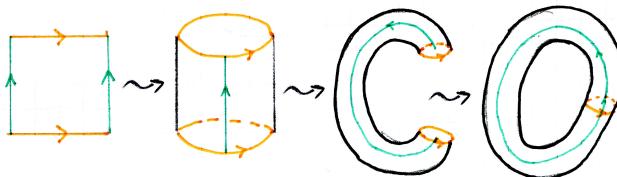


Abbildung 4.24. Verklebungsprozess.

2. Möbiusband:  $X = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $A = A_1$ ,  $f : A_1 \ni (0, 1) \mapsto (1, 1-t) \in B_1$
3. Projektive Ebene:  $P^2\mathbb{R}$  entsteht durch Verkleben einer Kreisscheibe und eines Möbiusbandes längs der Ränder.



# 5

## Geometrie von Flächen

Ziel dieses Kapitels ist es, auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten (beziehungsweise Flächen im  $\mathbb{R}^3$ ) "Geometrie" zu betreiben (also beispielsweise Längen und Winkel messen und so weiter).<sup>1</sup>

### 5.1 Reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$

**Bemerkung 33** (Erinnerung an reguläre Flächen). Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^3$  ist eine **reguläre Fläche**, falls es zu jedem Punkt  $p \in S$  eine offene Umgebung  $V$  von  $p$  in  $\mathbb{R}^3$ , eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^2$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung

$$x : U \ni (u, v) \mapsto x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

gibt mit:

1.  $x(U) = S \cap V$  und  $x : U \rightarrow S \cap V$  ist ein Homöomorphismus.
2. Das Differenzial  $dx|_{(u,v)} : T_{(u,v)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong \mathbb{R}^2} T_{x(u,v)} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong \mathbb{R}^3}$  ist injektiv ( $\forall (u, v) \in U$ )  
 $\Leftrightarrow$  Die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup> Für mehr Informationen: **Gauß** (1827) vgl. **Spirak**: *A comprehensive introduction to differential geometry* Vol. III — how to read Gauß

- hat Rang 2 ( $\forall (u, v) \in U$ ).
- $\Leftrightarrow x_u(u, v), x_v(u, v)$  sind linear unabhängig ( $\forall (u, v) \in U$ ).
- $\Leftrightarrow$  Vektorprodukt  $x_u(u, v) \times x_v(u, v) \neq 0$  ( $\forall (u, v) \in U$ ).

**Bemerkung 34** (Erinnerung an das Kreuz-/Vektorprodukt).

$a := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  und  $b := (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ .

$$a \wedge b (\cong a \times b) := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Eigenschaften:

1.  $a \wedge b \perp a \quad a \wedge b \perp b$
2.  $\det(a, b, a \wedge b) \geq 0$
3.  $a \wedge (-b) = -(a \wedge b)$
4.  $\|a \wedge b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \alpha$  (Winkel zwischen den Vektoren), Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallellogramms

**Definition 5.1** (Tangentialraum). Der **Tangentialraum** in Punkt  $p \in \mathbb{R}^3$  ist der affine Unterraum

$$T_p \mathbb{R}^3 := \{p\} \times \mathbb{R}^3 = \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^3\}.$$

Für eine reguläre Fläche  $S$  und  $p = x(u, v) \in S$  ist die **Tangentialebene** in  $p \in S$  definiert als

$$T_p S := dx_{(u, v)}(T_{(u, v)} \mathbb{R}^2) := \{p\} \times [x_u(u, v), x_v(u, v)] \subset T_p \mathbb{R}^3$$

2-dimensionaler, affiner Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ .

**Bemerkung 35** (Geometrische Interpretation des Tangentialraums).

$$x_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} x(u_0 + t, v_0) = dx|_{(u_0, v_0)}(e_1)$$

Allgemein:

Sei  $c(t) := x(u(t), v(t))$  eine **Flächenkurve** in  $x(U)$  durch den Punkt  $x(u(0), v(0)) = x(u_0, v_0)$ .

**Tangentialvektor** an  $c$  im Punkt  $x(u_0, v_0)$ :

$$c'(0) = \frac{dc}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt} x(u(t), v(t))|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial u}(u(0), v(0))u'(0) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(0) = x_u(u_0, v_0)u'(0) + x_v(u_0, v_0)v'(0)$$

Also: Tangentialebene in  $x(u_0, v_0)$  = Menge aller Tangentialvektoren als Flächenkurven.

**Bemerkung 36** (Parameterisierungsunabhängigkeit obiger Definitionen).

Sei  $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow \bar{x}(\bar{U}) = x(U)$  eine andere Parametrisierung von  $S$  um  $p = x(u_0, v_0) = \bar{x}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ .

Zu zeigen: Die lineare Hüllen sind gleich:  $[\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}] = [x_u, x_v]$ .

Es ist  $k := \bar{x}^{-1} \cdot x : U \rightarrow \bar{U}$  die Koordinatentransformation:

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \bar{x}(\bar{x}^{-1} \circ x)}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}(u, v)$$

Entsprechend:

$$\begin{aligned} x_u &= \bar{x}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \bar{x}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \quad \text{d.h. } x_u \text{ ist Linearkombination von } \bar{x}_{\bar{u}} \text{ und } \bar{x}_{\bar{v}} \\ x_v &= \bar{x}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \bar{x}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \quad \text{d.h. } x_v \text{ ist Linearkombination von } \bar{x}_{\bar{u}} \text{ und } \bar{x}_{\bar{v}} \end{aligned}$$

Also  $[x_u, x_v] = [\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}]$ , verschiedene Basen von  $T_p S$  mit Basis-Transformations-Matrix

$$D(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Das ist die Funktionalmatrix der Parametertransformation. Insb. ist  $\det D(u, v) \neq 0$ .

### Beispiel 5.2.

1. *affine Ebene*:  $a_0, a, b \in \mathbb{R}^3$ ,  $S := \{a_0 + ua + vb : u, v \in \mathbb{R}\}$  ist reguläre Fläche, falls  $a$  und  $b$  linear unabhängig sind. Mit

$$U := \mathbb{R}^2, V := \mathbb{R}^3, x : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto a_0 + ua + vb \in \mathbb{R}^3,$$

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = a, x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = b, T_{x(u, v)}S = \{x(u, v)\} \times [a, b] \cong S.$$

2.  $U \subseteq \mathbb{R}^2, f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ -Funktion,  $S := \text{Graph von } f := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in U, x_3 = f(x_1, x_2)\}$ .

*Behauptung*:  $S$  ist reguläre Fläche.

$U = U, V = \mathbb{R}^3, x : U \ni (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ .  
 $x(U) = S = S \cap V, x : U \rightarrow S$  stetig und  $x^{-1} : S \ni (u, v, f(u, v)) \mapsto (u, v) \in U$  ist als Projektion auch stetig. Also ist  $x$  ein Homöomorphismus.

Weiter ist

$$x_u = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right), \\ x_v = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

also sind  $x_u$  und  $x_v$  linear unabhängig.

**Bemerkung 37.** Ist  $S$  reguläre Fläche in  $\mathbb{R}^3$ , so existiert zu jedem Punkt  $p \in S$  eine offene Umgebung  $O \subset \mathbb{R}^3$ , so dass  $S \cap O$  Graph einer  $C^\infty$ -Funktion ist (beispielsweise  $S^2 = 2\text{-Sphäre vom Radius } 1$ ).

## 5.2 Erste Fundamentalform einer regulären Fläche

**Bemerkung 38** (Erinnerung an LA). Modell der euklidischen Geometrie:

$\mathbb{R}$ -Vektorraum + Skalarprodukt = euklidischer  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ -Vektorraum

$\rightsquigarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$  Länge eines Vektors  $a \in V$

$\rightsquigarrow \cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} = \left\langle \frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|} \right\rangle$  Winkel

**Bemerkung 39** (Übertragung auf gekrümmte Flächen (Gauß)). Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $p \in S$ . Betrachte die bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle a, b \rangle_p := \langle a, b \rangle$$

(identifizierte affine Ebene mit VR  $R^2$ ,  $\langle a, b \rangle$  ist Standard-SKP in  $\mathbb{R}^3$ ).

Die Zuordnung  $I : p \mapsto I_p := \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  heißt **1. Fundamentalform der Fläche  $S$** .

Ist  $x : U \ni (u, v) \mapsto x(u, v) \in S$  eine lokale Parametrisierung von  $S$  (um  $p \in S$ ), so bilden  $x_u(u, v)$  und  $x_v(u, v)$  eine Basis von  $T_{x(u, v)} S$ . Bezuglich dieser können wir  $I_p, p \in x(U) \subset S$  durch eine positiv definite symmetrische  $2 \times 2$ -Matrix darstellen:

$$\left( \underbrace{g_{ij}(u, v)}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 2}} \right) = \begin{pmatrix} g_{11}(u, v) & g_{12}(u, v) \\ g_{21}(u, v) & g_{22}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}$$

Originalnotation Gauß

mit

$$g_{11}(u, v) = E(u, v) = \langle x_u(u, v), x_u(u, v) \rangle_p = \langle x_u(u, v), x_u(u, v) \rangle$$

Standard-SKP von  $\mathbb{R}^3$

$$g_{12}(u, v) = \langle x_u, x_v \rangle_p = \langle x_v, x_u \rangle = g_{21}(u, v)$$

$$g_{22}(u, v) = \langle x_v, x_v \rangle_p = \langle x_v, x_v \rangle$$

insbesondere sind die  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ -Funktionen.

Also:  $(g_{ij}(u, v))$  ist eine Familie  $\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  von Skalarprodukten, die differenzierbar von  $(u, v)$  abhängig ist. (Riemannsche Metrik)

**Bemerkung 40** (Bedingungen an obige Matrix).

1. Hurwitz:  $I_p$  ist positiv definit  $\Leftrightarrow E = g_{11} > 0, E \cdot G - F^2 = \det(g_{ij}) > 0$ .

2. andere Parametrisierung:  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) \rightsquigarrow$  neue Basis  $\{\bar{x}_u, \bar{x}_v\}$ , Matrix von  $I$  bezüglich

dieser Basis  $\left( \underbrace{\bar{g}_{ij}(\bar{u}, \bar{v})}_{\in \mathbb{R}^{2 \times 2}} \right)$  mit

$$(g_{ij}(u, v)) = D(u, v)^\top (\bar{g}_{ij}(\bar{u}, \bar{v})) D(u, v)$$

mit

$$D(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix},$$

siehe auch Basiswechselmatrix.

**Beispiel 5.3** (Beispiele zur 1. Fundamentalform).

1.  $S :=$  affine Ebene  $\subset \mathbb{R}^3$ :  $a, b: \|a\| = \|b\| = 1, \langle a, b \rangle = 0$  (also  $a \perp b$ )

Parametrisierung:  $x(u, v) = a_0 + ua + vb, (u, v) \in \mathbb{R}^2 = U$ .

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = a, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = b,$$

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = \langle a, a \rangle = \|a\|^2 = 1$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = \langle a, b \rangle = 0$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = \langle b, b \rangle = \|b\|^2 = 1$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. S = \text{Zylinder} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$$

*Lokale Parametrisierung* (als Rotationsfläche):

$$x(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v), \quad (u, v) \in U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = r(-\sin u, \cos u, 0),$$

$$x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = r(0, 0, 1),$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u, v) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \text{ konstant}$$

*Bemerkung:* Für  $r = 1$  ist die erste Fundamentalform des Zylinders identisch mit der ersten Fundamentalform der Ebene.

*Grund:* Ebene und Zylinder sind lokal isometrisch (haben im Kleinen die gleiche Geometrie): auf- und abwickeln. Insbesondere sagt die erste Fundamentalform nichts darüber aus, wie die Fläche in  $\mathbb{R}^3$  eingebettet ist.

$$3. S = S_R^2 = \text{Sphäre vom Radius } R$$

*Lokale Parametrisierung* (mit geographischen Koordinaten):

$$(\vartheta, \varphi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) = U$$

$$x(\vartheta, \varphi) = (R \cos \vartheta \cos \varphi, R \cos \vartheta \sin \varphi, R \sin \vartheta),$$

$$x_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = (-R \sin \vartheta \cos \varphi, -R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta),$$

$$x_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (-R \cos \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta \cos \varphi, 0)$$

$$\text{Erste Fundamentalform: } I(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \langle x_\vartheta, x_\vartheta \rangle & \langle x_\vartheta, x_\varphi \rangle \\ \langle x_\varphi, x_\vartheta \rangle & \langle x_\varphi, x_\varphi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 41** (Wozu ist die erste Fundamentalform gut?).

1. *Längen:* Mithilfe der ersten Fundamentalform können beispielsweise Längenmessungen von Flächenkurven durchgeführt werden:

$$x : [\alpha, \beta] \rightarrow S, \quad t \mapsto x(u(t), v(t)) =: c(t)$$

sei eine differenzierbare Flächenkurve in  $x(U) \subset S$ . Die Länge von  $c$  (also Kurve in  $\mathbb{R}^3$ ) ist

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \|c'(t)\| dt, \quad \|c'(t)\|_{c(t)}^2 = \langle c'(t), c'(t) \rangle$$

mit

$$c'(t) = \frac{d}{dt} c(t) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = x_u \cdot u' + x_v \cdot v'$$

ist also

$$\begin{aligned} \|c'(t)\|_{c(t)}^2 &= \langle c'(t), c'(t) \rangle = (u')^2 \langle x_u, x_u \rangle + 2u'v' \langle x_u, x_v \rangle + (v')^2 \langle x_v, x_v \rangle \\ &= (u')^2 E(u, v) + 2u'v' F(u, v) + (v')^2 G(u, v) \end{aligned}$$

Man braucht also nur die erste Fundamentalform von  $S$  und die Beschreibung der Kurve  $t \mapsto (u(t), v(t))$  in einem Parametergebiet  $U$ , um die Länge der Kurve ausrechnen zu können:

$$\Rightarrow L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E(u, v)(u')^2 + F(u, v)2u'v' + G(u, v)(v')^2} dt$$

Also: Länge einer Flächenkurve ist eine Größe der inneren Geometrie einer Fläche  $S$  (d.h. Eigenschaften/Größen, die nur von der ersten Fundamentalform abhängig sind).

2. Winkel: Außer Längen können auch Winkel zwischen Flächenkurven als Winkel zwischen den entsprechenden Tangenten an diese Kurven gemessen werden:

Seien  $c_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, c_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  zwei Flächenkurven mit  $c_1(0) = c_2(0)$ .

$$\cos \angle(c_1'(0), c_2'(0)) := \frac{\langle c_1'(0), c_2'(0) \rangle}{\|c_1'(0)\| \cdot \|c_2'(0)\|}$$

Explizite Rechnung via Parametrisierung:

$$\begin{aligned} c_1'(0) &= x_u(u_0, v_0)a + x_v(u_0, v_0)b \\ c_2'(0) &= x_u(u_0, v_0)c + x_v(u_0, v_0)d \end{aligned}$$

für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

## 5 Geometrie von Flächen

$$\begin{aligned}\cos \alpha(c_1'(0), c_2'(0)) &= \frac{\langle x_u a + x_v b, x_u c + x_v d \rangle}{\|x_u a + x_v b\| \cdot \|x_u c + x_v d\|} \\ &= \frac{acE + (bc + ad)F + bdG}{\sqrt{a^2 E + 2abF + b^2 G} \sqrt{c^2 E + 2cdF + d^2 G}}\end{aligned}$$

also ist der Winkel zwischen Flächenkurven die Größe des Winkels zwischen zwei Geraden.

3. *Flächeninhalt* eines regulären parametrisierten Flächenstücks

$$x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^2$$

ist definiert als

$$A(x(U)) := \iint_U \|x_u \wedge x_v\|(u, v) \, du \, dv.$$

Da  $\|x_u \wedge x_v\|^2 = \langle x_u, x_u \rangle \langle x_v, x_v \rangle - \langle x_u, x_v \rangle^2 = EG - F^2 = \det(I)$  laut der Formel für das Vektorprodukt (Fläche Parallelogramm im Quadrat) ist  $A$  invariant unter Parameter-Transformationen (also wohldefiniert):

Denn für eine andere Parametrisierung  $\bar{x} : \mathbb{R}^2 \supset \bar{U} \rightarrow \bar{x}(\bar{U}) = x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^3$  gilt:

$$I = D^\top \bar{I} D$$

wobei  $D$  = Funktionalmatrix des Kartenwechsels (= Parameter-Transformation  $\bar{x} \circ x^{-1} : U \rightarrow \bar{U}$ ). Somit:

$$\det(I) = (\det D)^2 \det \bar{I} \quad (\star)$$

und die Behauptung folgt aus der Transformationsformel für Integrale:

$$\iint_{\bar{U}} \sqrt{\det \bar{I}} \, d\bar{u} \, d\bar{v} \stackrel{\text{TF}}{=} \iint_U \sqrt{\det \bar{I}} |\det D| \, du \, dv = \iint_U \sqrt{\det I} \, du \, dv$$

**Beispiel 5.4** (Beispiel zur Flächeninhaltsberechnung).  $S = S_R^2$  = Sphäre vom Radius  $R$  parametrisiert durch geographische Koordinaten  $(\vartheta, \varphi)$ .

Erste Fundamentalform:

$$\begin{aligned}I(\vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \vartheta \end{pmatrix} \\ U &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 A(x(U)) &= A(S_R^2) = \iint_U \sqrt{\det I} \, d\vartheta d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R^2 \cos \vartheta \, d\varphi d\vartheta \\
 &\stackrel{x(U): \text{die ganze Sphäre bis auf "Nullmengen" überdeckt}}{=} R^2 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \, d\vartheta \\
 &= 4\pi R^2
 \end{aligned}$$

### 5.3 (Lokale) Isometrien von Flächen

**Bemerkung 42** (Reguläre Fläche = Metrischer Raum). Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche. Wir definieren eine *Längenmetrik* auf  $S$  durch

$$d_S(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c)$$

mit  $p, q \in S$ ,  $\Omega_{pq} :=$  Menge von differenzierbaren *Flächenkurven*, die  $p$  und  $q$  verbinden,  $L(c) :=$  Länge von  $x$  (gemessen in  $S$ ).

Wir verifizieren die Metrik-Axiome:

- $d_S(p, q) = d_S(q, p)$  (Wege rückwärts durchlaufen):

$$c : [0, 1] \rightarrow S \rightsquigarrow \tilde{c} : [0, 1] \rightarrow S, t \mapsto \tilde{c}(t) = c(1 - t)$$

$$c(0) = p, c(1) = q, \quad \tilde{c}(0) = c(1) = q, \quad \tilde{c}(1) = p$$

und  $L(c) = L(\tilde{c})$ .

- $d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$
- $d_S(p, p) = 0: c_0(t) = p \rightsquigarrow c'_0(t) = 0 \rightsquigarrow L(c_0) = 0$ .

Die obigen Punkte gelten ganz allgemein und haben mit  $S$  nichts zu tun.

- $p \neq q \Rightarrow d_S(p, q) > 0$ :

$$\exists \varepsilon > 0 \underset{\substack{\text{Def.} \\ \varepsilon\text{-Bälle in } \mathbb{R}^3}}{\text{: }} B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(q) \cap S = \emptyset.$$

Hier benutzt man, dass  $\mathbb{R}^3$  mit Standard-Metrik hausdorffsch ist. Also

$$d_S(p, q) \geq d_{\mathbb{R}^3}(p, q) \geq 2\varepsilon > 0.$$

*Fazit:* Jede reguläre Fläche ist metrischer Raum.

**Definition 5.5.** Seien  $S$  und  $\tilde{S}$  reguläre Flächen in  $\mathbb{R}^3$  und  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  eine Abbildung.

1.  $f$  heißt (**Flächen-Isometrie**), wenn  $f$  ein Diffeomorphismus von  $S$  auf  $\tilde{S}$  ist und für alle differenzierbaren Kurven  $c : I \rightarrow S$  gilt:

$$L(f \circ c) = L(c) \quad "f \text{ ist Längen-erhaltend}".$$

2.  $f$  heißt **lokale Isometrie**, falls für jeden Punkt  $p \in S$  offene Umgebungen  $A$  von  $p$  und  $B$  von  $f(p)$  existieren, so dass  $f$  eine Isometrie von  $A$  auf  $B$  ist.

**Bemerkung 43** (Abstandserhaltend). Ist  $f : S \rightarrow \tilde{S}$  eine Flächen-Isometrie, so ist  $f$  eine Isometrie zwischen den metrischen Räumen  $(S, d_S)$  und  $(\tilde{S}, d_{\tilde{S}})$ , d.h. es gilt:

$$\forall p, q \in S : d_{\tilde{S}}(f(p), f(q)) = d_S(p, q) \quad "f \text{ ist Abstands-erhaltend}".$$

**Satz 5.6** (Kriterium für lokale Isometrien). Sind  $S$  und  $\tilde{S}$  reguläre Flächen und sind  $x : U \rightarrow x(U) \subset S$  und  $\tilde{x} : U \rightarrow \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$  mit **gleichem** Parameterbereich  $U$ , sodass

$$\forall (u, v) \in U : \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u, v) = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}(u, v),$$

1. FF von  $S$     1. FF von  $\tilde{S}$

d.h. stimmen die erste Fundamentalform von  $S$  und  $\tilde{S}$  in entsprechenden Punkten überein, so sind  $x(U)$  und  $\tilde{x}(U)$  isometrisch.

*Beweis.* Die Abbildung  $f := \tilde{x} \circ x^{-1} : S \supset x(U) \rightarrow \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$  ist Diffeomorphismus. Sei dann

$$c : [a, b] \rightarrow S, \quad c(t) = x(u(t), v(t)) \subset x(U) \subset S$$

eine differenzierbare (Test-)Kurve.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \|c'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E^2(u(t), v(t))(u')^2 + 2F(u(t), v(t))u'v' + G^2(u(t), v(t))(v')^2} dt \\ &\stackrel{\text{Vorr.}}{=} \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u(t), v(t))(u')^2 + 2u'v'\tilde{F}(u(t), v(t)) + (v')^2\tilde{G}(u(t), v(t))} dt. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für die Länge der Bildkurve

$$f \circ c(t) = (\tilde{x} \circ x^{-1}) \circ x(u(t), v(t)) = \tilde{x}(u(t), v(t));$$

$$L(f \circ c) = \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u(t), v(t))(u')^2 + 2u'v'\tilde{F}(u(t), v(t)) + (v')^2\tilde{G}(u(t), v(t))} dt.$$

□

## 5.4 Normalvektoren und zweite Fundamentalform

Ist  $S$  reguläre Fläche in  $\mathbb{R}^3$ , dann existiert in jedem Punkt  $p \in S$  die Tangentialebene.  
Für gegebene Parametrisierung

$$x : U \ni (u, v) \mapsto x(u, v) \in S$$

um  $p$  ist  $T_p S = [x_u, x_v]$ .

Ist  $\bar{x} : \bar{U} \rightarrow S$  eine andere Parametrisierung um  $p \in S$ , so gilt:  $[\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}] = [x_u, x_v]$ .

Weiter gilt für das Vektorprodukt:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}} &= \left( x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \wedge \left( x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) (x_u \wedge x_v) \\ &= \det(d\varphi)(x_u \wedge x_v), \end{aligned}$$

wobei  $\varphi = x^{-1} \circ \bar{x} : \bar{U} \rightarrow U$  die Koordinatentransformation (Parameterwechsel) und  $d\varphi$  das Differential davon ist.

**Definition 5.7** (Normalenvektor). Da  $x_u$  und  $x_v$  linear unabhängig sind, ist

$$x_v \wedge x_u \neq 0 \quad \text{und} \quad n(p) \cong n(x(u, v)) \equiv n(u, v) := \frac{x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)}{\|x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)\|}$$

ist ein Einheitsvektor senkrecht zu  $T_p S$  für alle  $p \in x(U) \subset S$ .

$n(p)$  heißt **Normalenvektor** von  $S$  im Punkt  $p$ .

Nach obiger Rechnung gilt für eine andere Parametrisierung um  $p$ :

$$\bar{n}(p) = \frac{\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}}{\|\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}\|} = \frac{\det(d\varphi)x_u \wedge x_v}{|\det(d\varphi)| \cdot \|x_u \wedge x_v\|} = \frac{\det(\varphi)}{|\det(\varphi)|} n(p) = \pm n(p)$$

Damit die Normalenvektoren eindeutig bestimmt sind, brauchen wir die Voraussetzung, dass  $\det(d\varphi) > 0$  für alle Parameterwechsel.

**Definition 5.8** (Orientierbarkeit). Eine reguläre Fläche  $S$  — oder allgemeiner, eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  — heißt **orientierbar**, falls ein Atlas von  $S$  (bzw.  $M$ ) existiert, sodass alle Kartenwechsel (Parameterwechsel) eine positive Funktional-determinante haben.

**Beispiel 5.9** (Orientierbarkeit von Flächen). Sphären und Tori sind orientierbar, Möbiusband und projektive Ebene nicht.

**Beispiel 5.10** (Normalenvektoren).

1. **Affine Ebene:**  $x(u, v) = ua + vb$ ,  $a, b$  linear unabhängig

$$\rightarrow x_u = a, x_v = b, n(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|} = \text{konstant}$$

2. **2-Sphäre  $S^2$  mit Radius  $R$ :**

$$x(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad x_\vartheta = \begin{pmatrix} -R \sin \vartheta \cos \varphi \\ -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad x_\varphi = \begin{pmatrix} -R \cos \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_\vartheta \wedge x_\varphi = \begin{pmatrix} -R^2 \cos^2 \vartheta \cos \varphi \\ -R^2 \cos^2 \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} = -R \cos \vartheta \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix} = -R \cos \vartheta x(u, v)$$

$$n(\vartheta, \varphi) = \frac{x_\vartheta \wedge x_\varphi}{\|x_\vartheta \wedge x_\varphi\|} = \frac{-x(\vartheta, \varphi)}{\|x(\vartheta, \varphi)\|}$$

**Bemerkung 44** (Krümmungsmessung). Frage: Wie soll man Krümmung messen?

Möglichkeit nach Gauß: “Änderung der Normalen” messen — wie ändert sich die Normale, wenn  $p \in S$  sich ändert?

Betrachte eine Testkurve auf  $S$ :  $c(t) = x(u(t), v(t))$  und Normalenvektoren von  $S$  entlang  $c(t)$ :  $n(c(t))$ . Dann ergibt sich die Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n(c(t)) &= \frac{d}{dt} n(u(t), v(t)) = \frac{\partial n}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= n_u \frac{\partial u}{\partial t} + n_v \frac{\partial v}{\partial t} = n_u u' + n_v v' \end{aligned}$$

**Bemerkung 45** (Zwischenbemerkung). Für differenzierbare Kurven  $a(t), b(t)$  in  $\mathbb{R}^3$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a(t), b(t) \rangle &= \frac{d}{dt} (a_1(t)b_1(t) + a_2(t)b_2(t) + a_3(t)b_3(t)) \\ &= a'_1 b_1 + a_1 b'_1 + a'_2 b_2 + a_2 b'_2 + a'_3 b_3 + a_3 b'_3 \\ &= \langle a'(t), b(t) \rangle + \langle a(t), b'(t) \rangle = \langle \frac{d}{dt} a(t), b(t) \rangle + \langle a(t), \frac{d}{dt} b(t) \rangle. \end{aligned}$$

Es ist  $\langle n(t), n(t) \rangle = \|n(t)\|^2 = 1$ , also

$$\begin{aligned}\langle n_u, n \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{du} \langle n, n \rangle = 0 \\ \text{und } \langle n_v, n \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \langle n, n \rangle = 0.\end{aligned}$$

$n_u$  ist also durch die Komponenten des Skalarprodukts bestimmt:

$$\langle n_u, x_u \rangle = -\langle n, x_{uu} \rangle \quad \text{und} \quad \langle n_u, x_v \rangle = -\langle n, x_{uv} \rangle$$

wobei

$$x_{uu} := \frac{d^2 x}{du^2}, \quad x_{uv} = \frac{d^2 x}{dudv} = \frac{d^2 x}{dvdu} = x_{vu}$$

Diese Formeln motivieren folgende Definition:

Diese Formeln motivieren folgende Definition:

**Definition 5.11** (2. Fundamentalform). Die **2. Fundamentalform** einer regulären (orientierbaren) Fläche  $S$  ist eine Familie von Bilinearformen  $\{\Pi_p : p \in S\}$ , die für eine Parametrisierung  $x : U \rightarrow S$  (bezüglich der Basen  $\{x_u, x_v\}$  von  $T_{x(u,v)}S$ ) gegeben ist durch die symmetrischen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} L(u, v) & M(u, v) \\ M(u, v) & N(u, v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n \rangle & \langle x_{uv}, n \rangle \\ \langle x_{vu}, n \rangle & \langle x_{vv}, n \rangle \end{pmatrix}$$

**Hinweis:**  $\Pi_p$  ist symmetrisch, aber im Allgemeinen nicht positiv definit.

**Beispiel 5.12** (zur zweiten Fundamentalform).

1. Ebene:  $x_u = a, x_v = b, x_{uu} = 0, x_{uv} = 0, x_{vv} = 0$ .

Also ist  $\Pi_p = 0$  für alle  $p \in S \cong$  Ebene.

2. Zylinder:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad x_u = \begin{pmatrix} -r \sin u \\ r \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ x_{uu} &= \begin{pmatrix} -r \cos u \\ -r \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{uv} = x_{vu} = x_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also}\end{aligned}$$

$$\Pi_{x(u,v)} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 5.5 Gauß-Krümmung

**Definition 5.13** (Gauß-Krümmung). Sei  $S$  eine reguläre Fläche,  $p \in S$ . Die **Gauß-Krümmung** von  $S$  ist die Funktion

$$K : S \ni p \mapsto K(p) := \frac{\det \text{II}_p}{\det \text{I}_p} \in \mathbb{R}$$