Mitschrieb Elementare Geometrie

Jens Ochsenmeier & Maximilian Franz & Nadine Schorpp

25. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1

Einstieg — Metrische Räume

1.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Vorlesung wird sowohl *Stetigkeitsgeometrie* (Topologie) als auch *metrische Geometrie* sein. Die unten abgebildeten Objekte sind im Sinne der Stetigkeitsgeome-trie "topologisch äquivalent", im Sinne der metrischen Geometrie sind diese allerdings verschieden.

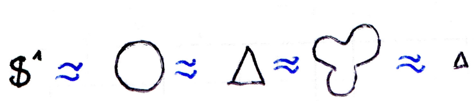

Abbildung 1.1. Diese Objekte sind topologisch äquivalent, metrisch allerdings nicht.

Bemerkung 1.1.1 (Kartographieproblem). Ein zentrales Problem der Kartographie ist die *längentreue* Abbildung einer Fläche auf der Weltkugel auf eine Fläche auf Papier. Mithilfe der Differentialgeometrie und der Gauß-Krümmung lässt sich zeigen, dass das nicht möglich ist.

1.2 Definitionen zu metrischen Räumen

Definition 1.2.1 (Metrik). Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine **Metrik** (Abstandsfunktion), falls $\forall x, y, z \in X$ gilt:

1. **Positivität**: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definition 1.2.2 (Metrischer Raum). Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einer Metrik auf dieser.

Definition 1.2.3 (Pseudometrik). Eine **Pseudometrik** erfüllt die gleichen Bedingungen wie eine Metrik, außer $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ — die Umkehrung gilt.

Aufgabe 1— Pseudometrik

Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$d(x, y) := |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|.$$

Zeigen Sie, dass d eine Pseudometrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Definition 1.2.4 (Abgeschlossener r-Ball um x). Eine Teilmenge

$$\overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

heißt **abgeschlossener r-Ball um x**.

Definition 1.2.5 (Abstandserhaltende Abbildung). Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ **abstandserhaltend**, falls

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Definition 1.2.6 (Isometrie). Eine **Isometrie** ist eine bijektive abstandserhaltende Abbildung. Falls eine Isometrie

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

existiert, so heißen X und Y *isometrisch*.

1.3 Beispiele zu metrischen Räumen

Beispiel 1.3.1 (Triviale Metrik). Menge X,

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

also lässt mithilfe der **trivialen Metrik** jede Menge zu einem metrischen Raum verwursten.

Beispiel 1.3.2 (Simple Metriken). Sei $X = \mathbb{R}$.[1]

- $d_1(s,t) := |s-t|$ ist Metrik.
- $d_2(s,t) := \log(|s-t|+1)$ ist Metrik.

Beispiel 1.3.3 (Euklidische Standardmetrik). $X = \mathbb{R}^n$,

–

ist die **(euklidische) Standardmetrik** auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung[2].

Bemerkung 1.3.4 (aus LA II). Isometrien von $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen.

Beispiel 1.3.5 (Maximumsmetrik). $X = \mathbb{R}$,

$$d(x,y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

ist Metrik.

[1] **Anmerkung**: Wenn $d(x,y)$ eine Metrik ist, so ist auch $\tilde{d}(x,y) := \lambda d(x,y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik.
[2] **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $\langle x, y \rangle \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Beispiel 1.3.6 (Standardmetrik und Maximumsmetrik allgemein: Norm). V sei $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}_{>0},$$

so dass $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. **Definitheit**: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. **absolute Homogenität**: $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. **Dreiecksungleichung**: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Eine Norm definiert eine Metrik durch $d(v, w) := ||v - w||$.

Beispiel 1.3.7 (Einheitssphäre).

$$S_1^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$$

ist die n-te **Einheitssphäre**.
Auf dieser ist mit

$$d_W(x, y) := \arccos(\langle x, y \rangle)$$

die **Winkel-Metrik** definiert.

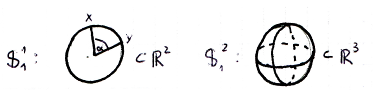

Abbildung 1.2. Die erste und zweite Einheitssphäre.

Beispiel 1.3.8. (Hamming-Metrik) Es ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen $\{0, 1\}$,

$$X := \mathbb{F}_2^n = \{(f_1, \ldots, f_n) : f_i = 0 \vee f_i = 1 \ (i \in 1, \ldots, n)\}$$

die Menge der binären Zahlenfolgen der Länge n. Die **Hamming-Metrik** ist definiert als

$$d_H : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}, \quad d_H(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|.$$

2

Längenmetriken

2.1 Graphen

Definition 2.1.1 (Graph). Ein **Graph** $G = (E, K)$ besteht aus einer *Ecken*-Menge E und einer Menge von Paaren $\{u, v\}$ ($u, v \in E$), genannt *Kanten*.

Definition 2.1.2 (Erreichbarkeit). Seien $p, q \in E$ von $G = (E, K)$. q ist **erreichbar** von p aus, falls ein *Kantenzug* von p nach q existiert.

Definition 2.1.3 (Zusammenhängend). $G = (E, K)$ heißt **zusammenhängend**, falls alle Ecken von einer beliebigen, festen Ecke aus erreichbar sind.
Ist G ein zusammenhängender Graph, so ist $d(p, q)$ = minimale Kantenzahl eines Kantenzuges von p nach q eine Metrik.

Beispiel 2.1.4 (Wortmetrik). Sei $\Gamma := \langle S \rangle$ vom endlichen Erzeugendensystem S erzeugte Gruppe. Dann:

$$g \in \Gamma \Rightarrow g = s_1 \cdot \ldots s_n \text{ (multiplikativ, nicht eindeutig),} \tag{2.1}$$

z.B. $\mathbb{Z} = \langle \pm 1 \rangle$.
Dann lässt sich über die Länge von $g \in \Gamma$ (minimales n in Gleichung 2.1) eine Metrik definieren:

Definition 2.1.5 (Wortmetrik).

$$d_S(g,k) := |g^{-1}k|$$

ist eine Metrik mit

$$\begin{aligned} d_s(kg,kh) &= |(kg)^{-1}kh| \\ &= |g^{-1}\underbrace{k^{-1}k}_{=e}h| = |g^{-1}h| \\ &= d_s(g,h), \end{aligned}$$

also ist d_s linksmultiplikativ mit $k \in \Gamma$ und damit eine Isometrie.

Definition 2.1.6 (Cayley-Graph). Der **Cayley-Graph** $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ von Γ bezüglich S ist der Graph $G = (E, K)$ mit

$$E := \Gamma, \quad K := \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}.$$

Die *Graphen-Metrik* auf $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist isometrisch zur Wortmetrik.

2.2 Euklidische Metrik

Beispiel 2.2.1 (Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ als Standardmetrik). Sei

$$c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

eine stückweise differenzierbare[1] Kurve. Die *euklidische Länge* von c ist

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &:= \int_a^b \|c'(t)\| dt \quad \text{(via } \textit{Polynom-Approximation}\text{)} \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

[1] **Hinweis**: Mit *differenzierbar* ist im Folgenden immer C^∞-differenzierbar gemeint, wenn nicht anders angegeben.

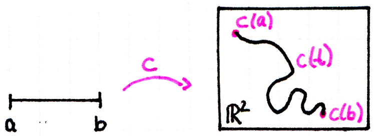

Abbildung 2.1. Eine stückweise differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^2$.

Beispiel: Geraden-Segment.

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = (1-t)p + tq.$$

Dann:

$$g'(t) = -p + q, \quad \|g'(t)\| = \|p - q\|$$

und damit

$$\underline{L_{\text{euk}}(g)} = \int_0^1 \|p-q\| dt = \|p-q\| = \underline{d_e(p,q)}.$$

Lemma 2.2.2 (Unabhängigkeit von L_{euk}).

1. $L_{\text{euk}}(c)$ ist unabhängig von Kurvenparametrisierung.
2. $L_{\text{euk}}(c)$ ist invariant unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen.

Beweis.

1. Zu zeigen: Für $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$ und einen monoton wachsenden Diffeomorphismus[2] $t : [c,d] \to [a,b], s \mapsto t(s)$ gilt:

   $$L_{\text{euk}}(c(t(s))) = L_{\text{euk}}(c(t)).$$

   Das folgt unmittelbar aus der Substitutionsregel für Integrale:

   $$\int_c^d \left\| \frac{dc}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d_c(t(s))}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} ds = \int_{t(c)=a}^{t(d)=b} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt.$$

   □

2. • Translation.
   Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^2$ sei

   $$T_p(c(t)) = c(t) + p = (\lambda(t) + p_1, y(t) + p_2)$$

   die von p verschobene Kurve. Es gilt

[2] **Diffeomorphismus**: Bijektive, stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

$$(T_p \circ c)(t) = c'(t) \Rightarrow \int_a^b \left\|(T_p \circ c)'\right\| dt = \int_a^b \left\|c'\right\| dt$$

und damit gilt das Lemma für Translationen. □

- Drehung.
  Für $\theta \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} D_\theta \circ c(t) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} c(t) \\ &= (\cos\theta x(t) - \sin\theta y(t), \sin\theta x(t) + \cos\theta y(t)) \end{aligned}$$

  die um Winkel θ gedrehte Kurve.
  Da D_θ eine orthogonale Abbildung ist, folgt

$$(D_\theta \circ c(t))' = D_\theta \cdot c'(t)$$

  und damit

$$\left\|(D_\theta \circ c(t))'\right\| = \left\|D_\theta \cdot c'\right\| \overset{\text{orth.}}{=} \left\|c'\right\|$$

  und damit gilt das Lemma für Drehungen. □
- Spiegelungen sind wie Drehungen orthogonal, ihre Invarianz folgt aus der Invarianz der Drehungen.

Lemma 2.2.3 (Geraden sind am kürzesten). Die kürzesten Verbindungskurven zwischen Punkten in $\mathbb{R}^2$ sind genau die Geradensegmente.

Beweis.

Seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Durch geeignete Rotation und Translation kann man (p, q) überführen in Punkte in spezieller Lage;

$$p' = (0, 0), \quad q' = (0, l).$$

Wegen der Invarianz von L_{euk} ändert sich dabei die Länge entsprechender Verbindungskurven nicht.
Sei jetzt $c(t) := (x(t), y(t))$ eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p' und q'. Dann gilt:

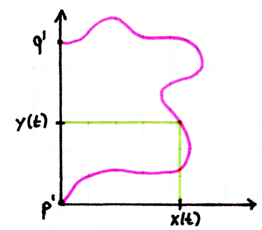

Abbildung 2.2. Die “geeignete” Rotation einer Kurve, sodass Start- und Endpunkt auf einer Achse liegen.

$$\begin{aligned} L_{\text{euk}}(c) &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \geq \int_a^b |y'| dt \geq \int_a^b y'(t) dt = \int_{y(a)=0}^{y(b)=l} dy \\ &= l. \end{aligned}$$

l ist die Länge des Geradensegmentes zwischen p' und q'.

$\Rightarrow$ Infimum der Längenwerte wird angenommen. Eindeutigkeit bleibt zu zeigen.
Gilt für eine Kurve c, dass $L_{\text{euk}}(c) = l$, so hat man in obigen Ungleichungen überall Gleichheit, also insbesondere $x'(t) = 0\ (\forall t)$, also $x(t) = \text{konstant} = x(0) = 0$ und somit $\tilde{c} = (0, y(t))$. Also ist $\tilde{c}$ auch (parametrisiertes) Geradensegment. □

Definition 2.2.4 (Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$-Kurven). Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2)$ die Menge der stetig differenzierbaren Verbindungskurven zwischen p und q. Wir setzen dann:

$$(p, q) = \inf L_{\text{euk}}(c), \quad c \in \Omega_{pq}(\mathbb{R}^2).$$

Satz 2.2.5 ("Neuer" metrischer $\mathbb{R}^2$).

$$(\mathbb{R}^2, d_{\text{euk}})$$

ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, d_e)$.

Beweis. Direkter Beweis nach dem Lemma über Geradensegmente.
Man hat eine explizite Formel

$$d_{\text{euk}}(p, q) = ||p - q|| = d_e(p, q).$$

Die Identität ist eine Isometrie.

Beweis. Konzeptioneller, allgemeinerer Beweis. Es werden die Metrik-Eigenschaften gezeigt.

- *Symmetrie.*
  Sei

  $$\Omega_{pq}(\mathbb{R}^2) \ni c : [a, b] \to \mathbb{R}^2.$$

  Idee: Kurve wird rückwärts durchlaufen.
  Es ist $d_e = d_{\text{euk}}$, denn ist $\tilde{c}(t) = (a + b - t) \in \Omega_{qp}(\mathbb{R}^2)$ (mit gleicher Länge wie c) und die Abbildung $c \mapsto \tilde{c}$ ist bijektiv. Dann $L(\tilde{c}) = L(c)$, und damit

  $$d(q, p) = \inf(L(\tilde{c})) = \inf(L(c)) = d(p, q).$$

- *Dreiecksungleichung.*
  Zu zeigen: $d_{\text{euk}}(p, q) \leq d_{\text{euk}}(p, r) + d_{\text{euk}}(r, q)\ (\forall p, q, r \in \mathbb{R}^2)$.
  Verknüpfen von Wegen von p nach r mit solchen von r nach q liefert gewisse — aber i.A. nicht alle — Wege von p nach q:

  $$\Omega_{pr} \cup \Omega_{rq} \subsetneq \Omega_{pq}.$$

  Infimumbildung liefert die Behauptung.

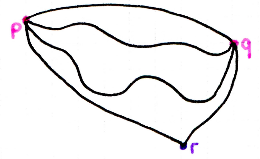

Abbildung 2.3. Betrachte Wege von p nach q über r und nicht über r.

- *Positivität.*
  Zu zeigen: $d_{\text{euk}}(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.
  - Falls $p = q$.
    Die konstante Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t) = p$ hat
    $$c'(t) = 0 \Rightarrow L_{\text{euk}}(c) = 0 \rightsquigarrow d_{\text{euk}}(p,p) = 0.$$
  - Falls $p \neq q$.
    Die kürzeste Kurve ist das Geradensegment[3]
    $$t \mapsto (1-t)p + tq$$
    mit der Länge $d_{\text{euk}} = \|p - q\| = 0$.

Abbildung 2.4. "Schleifen".

2.3 Sphärische Geometrie

Beispiel 2.3.1 (2-dimensionale sphärische Geometrie als Längenraum)**.** Eine 2-dimensionale Sphäre von Radius R in $\mathbb{R}^3$ ist

$$S_R^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Für eine stückweise differenzierbare Kurve

$$c : [a,b] \to S_R^2 \subset \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

definiere die **sphärische Länge** durch

$$L_S(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$$

und

$$d_s(p,q) := \inf L_s(c) \quad (c \in \Omega_{pq}(S_R^2)).$$

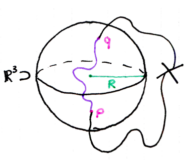

Abbildung 2.5. Es werden nur Kurven betrachtet, die in S_R^2 liegen.

Lemma 2.3.2 (Kurvenlängen rotationsinvariant)**.** Die Länge einer differenzierbaren Kurve auf S_R^2 ist invariant unter Rotationen von $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Eine orthogonale Matrix im $\mathbb{R}^2$ ist (bzgl. Standardbasis) gegeben durch eine orthogonale Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Da $\|D(x)\| = \|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, ist $D(S_R^2) = S_R^2$. Insbesondere ist für eine Kurve c in S_R^2 auch das Bild $D \circ c \subset S_R^2$.
Weiter folgt aus $(D \circ c(t))' = D \circ c'(t)$:

[3] **Anmerkung**: nur an dieser Stelle wird die Geometrie des $\mathbb{R}^2$ benötigt!

$$
\begin{aligned}
L_s(D \circ c) &= \int_a^b \|(D \circ c(t))'\| dt = \int_a^b \|D(c'(t))\| dt \\
&= \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_S(c).
\end{aligned}
$$

Lemma 2.3.3 (Großkreise sind am kürzesten).

Die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten in S_R^2 sind **Großkreise**, also Schnitte von S_R^2 und zweidimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^3$.

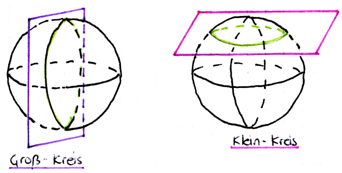

Abbildung 2.6. Groß- uund Klein-Kreis.

Beweis.

Seien zwei beliebige Punkte p, q auf S_R^2. Dann finden wir eine Rotation von $\mathbb{R}^3$, die p auf $p' = (0, 0, R)$ — also den "Nordpol" — und q auf $q' = (0, y, z) \in S_R^2$ abbildet. Aufgrund der Rotationsinvarianz der Kurvenlängen und der Definition ist $d_s(p, q) = d_s(p', q')$. Es genügt also eine kürzeste Verbindung zwischen p' und q' zu finden.
Idee: Mittels "geographischer Koordinaten" φ und θ. Nun kann eine Verbindung zwischen p' und q' geschrieben werden als

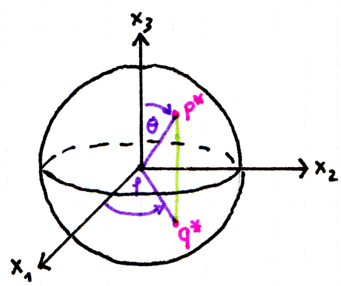

Abbildung 2.7. Geographische Koordinaten auf S_R^2.

$$
c(t) = R(\sin\theta(t)\cos\varphi(t),\ \sin\theta(t)\sin\varphi(t),\ \cos\theta(t))
$$

und somit

$$
c'(t) = (\theta'\cos\theta\cos\varphi - \varphi'\sin\theta\sin\varphi,\ \theta'\cos\theta\sin\varphi + \varphi'\sin\theta\cos\varphi,\ -\theta'\sin\theta),
$$

also

$$
\|c'(t)\| = R^2(\theta'^2 + \varphi'^2\sin^2\theta)
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
L_s(c) &= R\int_a^b \sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2\sin^2\theta}\, dt \geq R\int_a^b \sqrt{\theta'^2(t)}\, dt \\
&= R\int_a^b |\theta'(t)| dt \geq R\int_a^b \theta'(t) dt = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta = R(\theta(b) - \theta(a))
\end{aligned}
$$

mit oBdA $\theta(b) \geq \theta(a)$.

Diese untere Schranke wird durch ein Großkreissegment realisiert.
Eine weitere Kurve diese Länge kann es (wieder) nicht geben — man hätte sonst überall Gleichheit in den Ungleichungen, also insbesondere $\varphi' = 0$, also wäre φ konstant $= \varphi(a) = \frac{\pi}{2}$. Also liegt die Kurve auf Meridian und ist somit Großkreis.

Satz 2.3.4 (Infimums- & Winkelmetrik isometrisch). (S^2_R, d_s) ist ein metrischer Raum und isometrisch zu $(S^2_R, R \cdot d_W)$.

Beweis. Analog zu (R^2, d_{euk}).

2.4 Wozu sind Metriken gut?

Bemerkung 2.4.1 (Erinnerung: Konvergenz). In Analysis I heißt eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Bemerkung 2.4.2 (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt **konvergent**, wenn

$$\exists\, x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq N).$$

Also $x_n \in B_\varepsilon(x)$ $(\forall n \geq N)$.

Bemerkung 2.4.3 (Erinnerung: Stetigkeit). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $t_0 \in \mathbb{R}$ falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

f heißt *stetig*, wenn sie stetig ist $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.4.4 (Stetigkeit in metrischen Räumen). Metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y). Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig** in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

sodass

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ falls } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Also wenn $f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(x))$ falls $x \in B_\delta^X(x_0)$.
f heißt *stetig*, falls f stetig ist $\forall x \in X$.

Bemerkung 2.4.5 (Grenzwerte für stetige Funktionen).

$$f : X \to Y \text{ stetig} \Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Als Übungsaufgabe zu zeigen, der Beweis ist analog zum Beweis in der Analysis.
Diese Beobachtung führt historisch (um 1900) durch die Verallgemeinerung metrischer Räume zu topologischen Räume.

3

Grundbegriffe der allgemeinen Topologie

3.1 Topologische Räume

Definition 3.1.1 (Topologischer Raum). Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einem System bzw. einer Familie

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen von X, so dass gilt

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. Durchschnitte von *endlich* vielen und Vereinigungen von *beliebig* vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ sind wieder in $\mathcal{O}$.

Ein solches System $\mathcal{O}$ heißt **Topologie** von X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen **offene Teilmengen** von X.
$A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel 3.1.2 (Extrembeispiele).

1. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{trivial}} := \{X, \varnothing\}$ ist die **triviale Topologie**.
2. Menge X, $\mathcal{O}_{\text{diskret}} := \mathcal{P}(X)$ ist die **diskrete Topologie**.

Beispiel 3.1.3 (Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$). $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{s \text{ (standard)}} := \{I \subset \mathbb{R} : I = \text{Vereinigung von offenen Intervallen}\}$$

ist Topologie auf $\mathbb{R}$.[1]

Beispiel 3.1.4 (Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}$). $X = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{O}_{\text{Z(ariski)}} := \{O \subset \mathbb{R} : O = \mathbb{R} \setminus,\ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{R}$.
Mit anderen Worten: Die abgeschlossenen Mengen sind genau die endlichen Mengen, $\varnothing$ und $\mathbb{R}$.
Diese Topologie spielt eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie beim Betrachten von Nullstellen von Polynomen:

$$\begin{aligned}
(a_1 \ldots, a_n) &\leftrightarrow p(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n) \\
\mathbb{R} &\leftrightarrow \text{ Nullpolynom} \\
\varnothing &\leftrightarrow X^2 + 1
\end{aligned}$$

Definition 3.1.5 (Metrischer Raum → topologischer Raum). Metrische Räume (z.B. (X, d)) sind topologische Räume:

$$U \subset X \text{ ist } \boldsymbol{d}\textbf{-offen} \iff \forall p \in U\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(p) > 0,$$

sodass der offene Ball $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$ um p mit Radius ε ganz in U liegt: $B_\varepsilon(p) \subset U$.
Die d-offenen Mengen bilden eine Topologie — die von der Metrik d **induzierte Topologie**[2].

Definition 3.1.6 (Basis). Eine **Basis** für die Topologie $\mathcal{O}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$, sodass für jede offene Menge $\varnothing \neq V \in \mathcal{O}$ gilt:

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \quad V_i \in \mathcal{B}.$$

[1] **Offenes Intervall**: $(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
a und b beliebig

[2] **Übungsaufgabe**: Zeigen, dass es sich wirklich um eine Topologie handelt

Beispiel: $\mathcal{B} = \{\text{offene Intervalle}\}$ für Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.1.7 (Komplexität einer Topologie). $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ haben eine abzählbare Basis bezüglich Standard-Metrik $d(x,y) = |x-y|$ (beziehungsweise Standard-Topologie): Bälle mit rationalen Radien und rationalen Zentren.

Bemerkung 3.1.8 (Gleichheit von Topologien). Verschiedene Metriken können die gleiche Topologie induzieren:
Sind d, d' Metriken auf X und enthält jeder Ball um $x \in X$ bezüglich d einen Ball um x bezüglich d' ($B^d_{\varepsilon'}(x) \subset B^d_{\varepsilon}(x)$), dann ist jede d-offene Menge auch d'-offen und somit $\mathcal{O}(d) \subset \mathcal{O}(d')$.
Gilt auch die Umkehrung ($\mathcal{O}(d') \subset \mathcal{O}(d)$), so sind die Topologien gleich: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.

Beispiel 3.1.9 (Bälle und Würfel sind gleich). $X = \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2},$$
$$d'(x,y) := \max\{|x_1-y_1|,\ |x_2-y_2|\}.$$

Die induzierten Topologien sind gleich.

Beispiel 3.1.10 (Metrische Information sagt nichts über Topologie). (X,d) sei ein beliebiger metrischer Raum,

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

ist Metrik mit $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$.
Für d' gilt: $d'(x,y) \leq$ ($\forall x, y$), insbesondere ist der Durchmesser von X bezüglich d':

$$= \sup_{x,y\in X} d'(x,y) \leq 1,$$

das heißt, der Durchmesser eines metrischen Raumes ("metrische Information") sagt nichts über die Topologie aus.

Definition 3.1.11 (Umgebung). $(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum. $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $A \subset X$, falls

$$\exists\, O \in \mathcal{O} : A \subset O \subset U.$$

Definition 3.1.12 (Innerer und äußerer Punkt). Für $A \subset X$, $p \in X$ heißt p ein **innerer Punkt** von A (bzw. **äußerer Punkt** von A), falls A (bzw. $X \setminus A$) Umgebung von $\{p\}$ ist. Das **Innere** von A ist die Menge $\mathring{A}$ der inneren Punkte von A.

Definition 3.1.13 (Abgeschlossene Hülle). Die **abgeschlossene Hülle** von A ist die Menge $\overline{A} \subset X$, die nicht äußere Punkte sind.
Beispiel: $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$.

Bemerkung 3.1.14 (Drei konstruierte topologische Räume). Folgende drei einfache Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus gegebenen:

1. **Teilraum-Topologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge.

   $$\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : \exists V \in \mathcal{O}_X \wedge U = V \cap Y\}$$

   definiert eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraum-Topologie*.[3]
   Achtung! $U \in \mathcal{O}_Y$ ist i.A. nicht offen in X, z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$, $V = (-1, 2)$, also $U = V \cap Y = Y$.

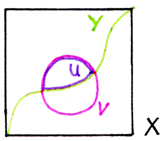

Abbildung 3.1. Graphische Darstellung der Teilraum-Topologie.

2. **Produkttopologie**: $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ ist *offen* in der *Produkt-Topologie* $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in W$ $\exists$ Umgebung U von x in X und V von y in Y sodass das "Kästchen" $U \times V \subseteq W$.
   Achtung! Nicht jede offene Menge in $X \times Y$ ist ein Kästchen: die Vereinigung von zwei Kästchen ist beispielsweise auch offen.

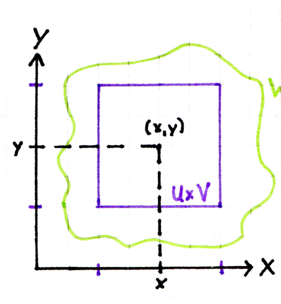

Abbildung 3.2. Punkt (x, y) und sein $U \times V$-Kästchen.

[3] Zu überprüfen!

Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie, dann ist

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{x \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

induzierter topologischer Raum.

3. **Quotiententopologie**: $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\sim$ Äquivalenzrelation[4] auf X. Für $x \in X$ sei $[x] := \{y \in X : y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x, $X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\begin{aligned} \pi : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

die kanonische Projektion (surjektiv!).
Die *Quotienten-Topologie* auf $X/\sim$ nutzt:
$U \subset X/\sim$ ist offen $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \pi^{-1}(U)$ ist offen in X.
Beispiel: $X = \mathbb{R}$ mit Standard-Topologie (induziert durch Standard-Metrik $d_{\mathbb{R}}(s,t) = |s-t|$).
Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$s \sim t \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists\, m \in \mathbb{Z} : t = s + 2\pi m.$$

Dann ist

$$\mathbb{R}/\sim \underset{\text{bijektiv}}{=} S' = \text{Einheitskreis}.$$

Anstatt dies heuristisch auszudrücken kann dies auch explizit getan werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned}$$

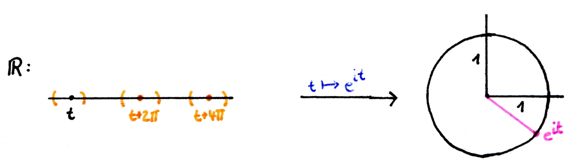

Abbildung 3.3. Quotiententopologie auf $\mathbb{R}$.

[4] Impliziert Partitionierung von X in disjunkte Teilmengen

Bemerkung: Andere Interpretation via Gruppen-Aktionen.
$G = (\mathbb{Z}, +)$ operiert auf $X = \mathbb{R}$.
Bahnen-Raum = $\mathbb{R}/\sim$ mit

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(m, t) \mapsto t + 2\pi m. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $[t]$ ist die Bahn von

$$t = \mathbb{Z} \cdot t = \{t + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\},$$

mehr dazu später.

3.2 Hausdorffsches Trennungsaxiom

Bemerkung 3.2.1 (Hausdorffsches Trennungsaxiom T_2). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **hausdorffsch**, falls man zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in X$ disjunkte Umgebungen finden kann, also Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ mit $U \cap V = \varnothing$.
Beispiel:

1. Metrische Räume sind hausdorffsch.

   Beweis. Sei $d(p, q) =: \varepsilon$.
   Behauptung: $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q) = \varnothing$.
   Sei z in $B_{\varepsilon/3}(p) \cap B_{\varepsilon/3}(q)$. Dann gilt

   $$d(p, q) \overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} d(p, z) + d(z, q) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \lightning$$

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist hausdorffsch, da die Standard-Topologie von der Metrik induziert wird.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Zariski}})$ ist <u>nicht</u> hausdorffsch: offene Mengen sind Komplemente von endlich vielen Punkten, also für $p, q \in \mathbb{R},\ p \neq q$:

   $$\begin{aligned} U_p &= \mathbb{R} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \\ U_q &= \mathbb{R} \setminus \{q_1, \ldots, q_k\}, \end{aligned}$$

   also $U_p \cap U_q \neq \varnothing$.

Wichtige Konsequenz von "hausdorffsch": In einem Hausdorff-Raum hat jede Folge höchstens einen Limespunkt/Grenzwert.[5]

Bemerkung 3.2.2 (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen).

1. Jeder Teilraum (mit Teilraum-Topologie) eines Hausdorff-Raumes ist hausdorffsch.
2. X, Y Hausdorff-Räume $\Rightarrow X \times Y$ ist Hausdorff-Raum bezüglich Produkt-Topologie.

3.3 Stetigkeit

Definition 3.3.1 (Stetigkeit). $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X.

Beispiel 3.3.2 (Einfache Stetigkeiten).

1. $\mathrm{Id} : X \to X, x \mapsto x$ ist stetig.
2. Die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.
3. Für $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ gibt es unendlich viele Beispiele in Analysis I.
   Für metrische Räume ist diese Definition äquivalent zur ε-δ-Definition und zur Folgenstetigkeit[6].

Definition 3.3.3 (Homöomorphismus).

- Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, falls f und f^{-1} stetig sind.
- X und Y heißen **homöomorph**, falls ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert (notiere $X \cong Y$).

Bemerkung 3.3.4 (Homöomorphismengruppe).

- $\mathrm{Id}_X : X \to X, x \mapsto x$ ist Homöomorphismus.

[5] **Erinnerung: Konvergenz**: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ (top. Raum). $X \ni a$ heißt *Limes* um $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ falls es zu jeder Umgebung U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \in U \; \forall n \geq n_0$.

[6] Übungsaufgabe!

- Verkettungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen.
- Inverses eines Homöomorphismus ist ein Homöomorphismus.

Aus diesen drei Punkten folgt, dass die Homöomorphismen eine Gruppe bilden.

Beispiel 3.3.5 (Einfache Homöomorphismen).

- $[0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \le t \le 1\} \cong [a,b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$
  (via $f(t) = a + t(b-a)$).
- $(0,1) = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\} \cong (a,b)$ mit $a < b$ beliebig.
- $\mathbb{R} \cong (-1,1) \cong (0,1)$
  (z.B. via $t \mapsto \tanh t = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$).
- Stetig und injektiv, aber kein Homöomorphismus!
  $f : [0,1) \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + \mathrm{i}\sin(2\pi t)$ ist stetig, injektiv, aber kein Homöomorphismus.
- Projektions-Abbildungen sind stetig, z.B. $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, (x_1, x_2) \mapsto x_1$: Für U offen in X_1 ist $p^{-1}(U) = U \times X_2$ offen bezüglich der Produkttopologie.
- Metrische Räume $(X, d_X), (Y, d_Y)$ und Isometrie $f : X \to Y$, also eine bijektive Abbildung, so dass

  $$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y).$$

  Behauptung: f ist Homöomorphismus (bzgl. der durch Metrik definierten Topologien).

  Beweis. (über ε-δ-Definition): $\delta := \varepsilon$.
  $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y) < \delta = \varepsilon$, also ist f stetig.
  Analog für f^{-1}.

- $S^n = \{x \in R^{n+1} : ||x||^2 = 1\}$ ist die n-dimensionale Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$.
  $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ sei der "Nordpol" von S_n.
  Behauptung: $S^n \setminus \{e_{n+1}\} \cong \mathbb{R}^n$.

  Beweis. (via stereographische Projektion):

  $$\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

  $$f(x) := \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right) \text{ stetig,}$$

  $$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n, \quad y \mapsto \left(\frac{2y_1}{||y||^2+1}, \ldots, \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1}\right) \text{ auch stetig.}$$

  Also ist f homöomorph.

Achtung: S^n ist <u>nicht</u> homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ (da S^n kompakt und $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt ist, mehr dazu später).

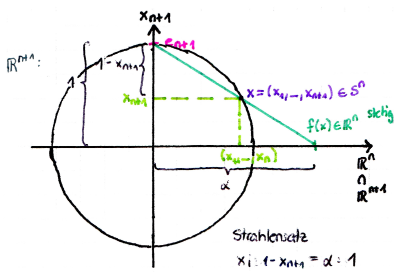

Abbildung 3.4. Stereographische Projektion.

Bemerkung 3.3.6 (Isometrien-Untergruppe). Isometrien bilden eine Untergruppe der Homöomorphismen von X (versehen mit von der Metrik induzierten Topologie):

$$\mathrm{Isom}(X, d) \subseteq \mathrm{Hom\ddot{o}}(X, \mathcal{O}_d) \subseteq \mathrm{Bij}(X).$$

Bemerkung 3.3.7 (Exkurs 1: Kurven).

Was ist eine Kurve?
Naive Definition: Eine Kurve ist ein stetiges Bild eines Intervalls.
Problem: $\exists$ stetige, surjektive (aber nicht injektive) Abbildungen $I = [0,1] \to I^2$ ("Peano-Kurven", "space-filling curves")[7].

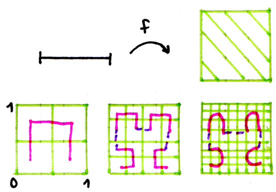

Abbildung 3.5. Space-filling curves.

Ausweg 1: *Jordan-Kuven* (bzw. geschlossene J-Kurven).
:= top. Raum, homöomorph zu $I = [0, 1]$ (J-Kurve)
:= top. Raum, homöomorph zu S^1 (geschlossene J-Kurve)
Ausweg 2: *reguläre stetig differenzierbare Kurven* (lokal injektiv).
Verwendung: z.B. *Knoten* — spezielle geschlossene Jordankurve als Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

$$\exists\, f : S^1 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(S^1) \cong S^1$$

[7] Mehr dazu in Königsberger — Analysis I.

mit Teilraumtopologie von R^3.
Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ sind *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus h von $\mathbb{R}^3$ gibt mit $h(K_1) = K_2$.[8]

Abbildung 3.6. Äquivalente und nicht-äquivalente Knoten.

Bemerkung 3.3.8 (Exkurs 2: Topologische Gruppen). Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass die Gruppenmultiplikation

$$m : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto g \cdot h$$

mit Produkt-Topologie und die Inversenbildung

$$i : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

Beispiel 3.3.9 (Topologische Gruppen).

1. G beliebige Gruppe mit diskreter Topologie ist topologische Gruppe.
2. $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Topologie ist abelsche topologische Gruppe.
3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind multiplikative topologische Gruppen.
4. $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe ist topologische Gruppe bzgl. Teilraumtopologie.
5. Das Produkt von topologischen Gruppen mit Produkttopologie ist eine topologische Gruppe.
6. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathbb{R}^{n\times n}}_{=\mathbb{R}^{n^2}} : \det A \neq 0\}$ allg. reelle lineare Gruppe.

   $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ versehen mit Teilraum-Topologie induziert von $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist topologische Gruppe:
   - Matrizenmultiplikation ist stetige Abbildung ($\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$),
   - Inversen-Abbildung ist ebenfalls stetig (wegen expliziter Formel für A^{-1}).
7. $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A^\top A = E_n, \det A = 1\}$ ist die **spezielle orthogonale Gruppe**. Sie ist eine topologische Gruppe nach Beispiel 4 und 6.

[8] **Knotentheorie** studiert die Äquivalenz von Knoten, siehe z.B. Sossinsky — Mathematik der Knoten

Insbesondere ist

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \cong S'$$

eine abelsche topologische Gruppe.

3.4 Zusammenhang

Definition 3.4.1 (Zusammenhängend). Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **zusammenhängend**, falls $\varnothing$ und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenenen Teilmengen von X sind.
Äquivalent: X ist zusammenhängend $\iff$ X ist *nicht* disjunkte Vereinigung von 2 offenen, nichtleeren Teilmengen.

Beweis. $A \subset X$ offen und abgeschlossen $\iff$ A und $X \setminus A$ offen $\iff$ A und $X \setminus A$ abgeschlossen.

Beispiel 3.4.2 (Zusammenhang).

1. $\mathbb{R}$ (und ebenso beliebige Intervalle) ist zusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *nicht* zusammenhängend.

   Beweis. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (abgeschlossenes oder offenes oder halboffenes) Intervall.
   Annahme: $I \neq U \neq \varnothing$, sei eine offen-abgeschlossene Teilmenge von I. Dann gibt es mindestens einen Punkt $u \in U$ und $v \in I \setminus U$. OBdA $u < v$. Setze $U_0 := \{x \in U : x < v\}$ und $c := \sup U_0$. Also $u \leq c \leq v$. Weiter ist $c \in U$, da U abgeschlossen ist. Eine ganze Umgebung von c gehört auch zu U, da U offen ist. Damit gehört eine ganze Umgebung von c auch zu U_0 $\lightning$

Bemerkung 3.4.3 (Ergänzung: Zusammenhang von Teilmengen). *Allgemein*: Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Bemerkung 3.4.4 (Einpunktige Mengen). Einpunktige Mengen sind zusammenhängend: $\{x\}$ mit Teilraumtopologie ist diskret (also sind $\{x\}$ und $\varnothing$ die einzigen offenen Mengen).

Definition 3.4.5 (Zusammenhangskomponente). Sei $x \in X$. Die **Zusammenhangskomponente** $Z(x)$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten.

Lemma 3.4.6 (Eigenschaften zusammenhängender Mengen).

1. A ist zusammenhängend $\Rightarrow \overline{A}$ (abgeschlossene Hülle von A) ist zusammenhängend.
2. A, B zusammenhängend, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ zusammenhängend.[9]

Bemerkung 3.4.7 (Zusammenhängende Mengen bilden disjunkte Zerlegung). Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängende Mengen und bilden eine disjunkte Zerlegung von X.

Beweis. Definiere eine Äquivalenzrelation (für $x, y \in X$):

$$x \sim y \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ zusammenhängende Menge } A : x, y \in A.$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität**: $x \sim x$, denn die einpunktige Menge $\{x\}$ ist zusammenhängend.
- **Symmetrie**: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ nach Definition.
- **Transitivität**: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$:
  $x \sim y : \exists\, A$ zusammenhängend mit $x, y \in A$.
  $y \sim z : \exists\, B$ zusammenhängend mit $y, z \in B$.
  Also $y \in A \cap B \overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} A \cup B$ zusammenhängend.

Beispiel 3.4.8 (Zusammenhangskomponenten).

1. $\mathbb{R} \setminus \{t\} = \{s \in \mathbb{R} : s < t\} \cup \{s \in \mathbb{R} : s > t\}$ hat 2 Zusammenhangskomponenten.
2. $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \{\text{irrationale Zahlen}\}$ mit Teilraum-Topologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{standard}})$ ist **total unzusammenhängend**, d.h. alle Zusammenhangskomponenten sind einpunktig.

   Beweis. Annahme: $A \subset \mathbb{Q}$ mit mindestens 2 verschiedenen Punkten.
   Behauptung: A ist nicht zusammenhängend.
   Sei $\{q_1, q_2\} = A \subset \mathbb{Q}$ mit $q_1 \neq q_2$ (oBdA $q_1 < q_2$). Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q_1 < s < q_2$, $O_1 = \{t \in \mathbb{R} : t < s\}$, $O_2 = \{t \in \mathbb{R} : t > s\}$, $\widetilde{O_1} = O_1 \cap A$, $\widetilde{O_2} = O_2 \cap A$. $\widetilde{O_1}$ und $\widetilde{O_2}$ sind offen in A oder in $\mathbb{Q}$ bezüglich der Teilraumtopoogie. Es ist $A = \widetilde{O_1} \cup \widetilde{O_2}$ mit $\widetilde{O_1} \cap \widetilde{O_2} \neq \emptyset$, d.h. A ist *nicht* zusammenhängend.

Definition 3.4.9 (Weg-Zusammenhängend). Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. X heißt **weg-zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ einen Weg (d.h. stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \to X$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$) zwischen p und q gibt.

[9] Übungsaufgabe, es wird nur die Definition von Zusammenhang benötigt.

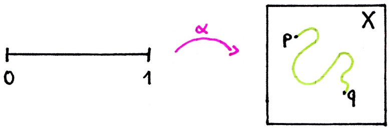

Abbildung 3.7. Darstellung der Funktionsweise einer solchen Funktion α.

Lemma 3.4.10 (Weg-Zusammenhang). X ist weg-zusammenhängend $\Rightarrow$ X ist zusammenhängend.

Beweis. Wäre X *nicht* zusammenhängend, dann $\exists$ eine disjunkte Zerlegung $X = A \cup B$ mit A, B offen und nicht-leer, $A \cap B = \varnothing$ mit $p \in A$ und $q \in B$. Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein (stetiger) Weg zwischen p und q, also $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$. Daraus folgt, dass $[0,1] = \alpha^{-1}(\alpha([0,1])) = \alpha^{-1}(A \cap \alpha([0,1])) \cup \alpha^{-1}(B \cap \alpha([0,1])) \Rightarrow [0,1]$ ist nicht zusammenhängend $\lightning$

Achtung: Umkehrung gilt nicht! Z.B. "topologische Sinuskurve"[10] X ist zusammenhängend, aber *nicht* weg-zusammenhängend:

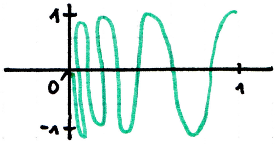

Abbildung 3.8. Darstellung der "topologischen Sinuskurve".

$$X := \left\{\left(x, \sin\tfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,y) : |y| < 1\}.$$

Lemma 3.4.11 (Weg-Zusammenhang von Bildern). Stetige Bilder von (weg-)zusammenhängenden Räumen sind (weg-)zusammenhängend.

Beweis.

1. Sei $f : X \to X$ stetig und $f(X) = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung in nichtleere offene Mengen.
   Dann ist $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ eine disjunkte Zerlegung.
2. Seien $x = f(p), y = f(q)$ zwei Punkte in $f(X)$. Es ist $p = f^{-1}(x), q = f^{-1}(y)$.
   Dann existiert $a : [0,1] \to X$ mit $a(0) = p$ und $a(1) = q$ und somit ist $f \circ a : [0,1] \to f(X)$ ein stetiger Weg in $f(X)$.

Korollar 3.4.12 (Zwischenwertsatz). Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

[10] **Details**: Singer-Thorpe p.52

Bemerkung 3.4.13 (Test auf Homöomorphie via Zusammenhang).
Beispiel: $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ nur falls $n = 1$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $R \cong \mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$. Es ist

$$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{nicht zusammenhängend}} \quad \cong \quad \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\text{Punkt}\}}_{\text{zusammenhängend für } n \geq 2} \qquad \lightning$$

Ebenso: $[0, 1] \cong [0, 1]^n$ nur für $n = 1$.

Satz 3.4.14 (von Brouwer). $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ für $m \neq n$.

Beweis. Der Beweis benutzt den **Satz von Gebietstreue** (Brouwer):

Ist $U \subseteq$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive stetige Abbildung, so ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Beweisidee: Ist $m < n$, so ist

$$j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

eine Einbettung und eine injektive, stetige Abbildung von $\mathbb{R}^m$ auf eine *nicht* offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wäre $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$, so hat man einen Widerspruch zum Satz von Gebietstreue.[11]

3.5 Kompaktheit

Definition 3.5.1 ((Lokal) kompakt). Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt, also

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, \ U_i \text{ offen} \ \Rightarrow \ \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I :$$
$$X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$$

- $A \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn A bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.
- X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

Bemerkung 3.5.2 (Verwendung kompakter Räume). Kompakte Räume sind oft "einfacher" als nicht-kompakte, weil man beispielsweise von lokalen Eigenschaften auf globale schließen kann.
Begründung: $\forall x \in X\ \exists\, U_x : f|_{U_x} \leq c_x$. Schreibe $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Da X kompakt ist existieren $x_1, \ldots, x_k \in X$, sodass $X = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$.
$\Rightarrow f(x) \leq \max\{c_{x_1}, \ldots, c_{x_k}\}$.

[11] siehe auch Alexandrov-Hopf, Topologie, 1935, Kap. X.2

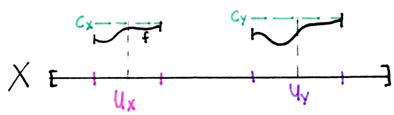

Abbildung 3.9. Konstruktion zum Schließen von lokalen auf globale Eigenschaften bei kompakten Räumen.

Beispiel 3.5.3 (Beschränktheit im Kompakten). Ist X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ **lokal beschränkt** (d.h. jeder Punkt von X hat eine Umgebung, in der f beschränkt ist — z.B. wahr für stetige Funktionen), dann ist f beschränkt.

Beispiel 3.5.4 (Kompaktheit von Intervallen). $I = [0, 1]$ ist kompakt (ebenso $[a, b]$).

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Dann existiert eine sogenannte **Lebesgue-Zahl** $\delta > 0$, sodass jedes Teilintervall $I_\delta \subset I$ der Länge δ in einem U_i liegt. Da $[0, 1]$ mit endlich vielen Intervallen der Länge δ überdeckt werden kann, kann man das auch mit endlich vielen U_i.

Bemerkung 3.5.5 (Hinweise zur Lebesgue-Zahl). Gäbe es ein solches $\delta > 0$ nicht, so wählt man eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n \subset [0, 1]$ der Länge $\frac{1}{n}$, die jeweils in keiner Überdeckungsmenge U_i liegen. Nach Bolzano Weierstraß[12] folgt, dass eine Teilfolge der Mittelpunkte m_n von I_n konvergiert gegen ein $t \in I$. Dieses t liegt aber in einem U_i. Also, da U_i offen ist, liegen auch die m_n in U_j für genügend großes n ↯

Satz 3.5.6 (Sätze über kompakte Räume).

1. Stetige Bilder von kompakten Räumen sind kompakt.
2. Abgeschlossene Teilräume von kompakten Räumen sind kompakt.
3. Produkte von kompakten Räumen sind kompakt.

Beweis.

1. Sei $f(X) = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Daraus folgt, dass $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. X ist kompakt, also

   $$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_k})$$

   und schließlich

   $$f(X) = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

2. Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen.
   $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ ist offene Überdeckung, also ist $U_i = V_i \cap A$ für V_i offen in X.

[12] "jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ hat konvergente Teilfolgen"

A ist abgeschlossen, also ist $X \setminus A$ offen und $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} V_i$ ist offene Überdeckung von X.
Da X kompakt ist gilt:

$$X = (X \setminus A) \cup V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k} \Rightarrow A = X \cap A$$

also

$$A = X \cap A = \left(V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k}\right) \cap A = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$

3. Die allgemeine Aussage (*Satz von Tichonow*[13]) benutzt das *Lemma von Zorn*[14].
   Seien X und Y kompakte Räume.
   Behauptung: $X \times Y$ ist kompakt.
   Sei $X \times Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ offene Überdeckung. Für jedes $(x, y) \in X \times Y$ existiert $\lambda(x, y)$ sodass $(x, y) \in W_{\lambda(x,y)}$. Da $W_{\lambda(x,y)}$ offen ist existiert $U_{(x,y)} \subset X$ und $V_{(x,y)} \subset Y$ sodass

   $$(x, y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset W_{\lambda(x,y)}.$$

   Für festes x ist $\bigcup_{y \in Y} V_{(x,y)}$ eine offene Überdeckung von Y, also — da Y kompakt ist — existieren $y_1(x), \ldots, y_{m_x}(x)$ sodass

   $$Y = V_{(x,y_1(x))} \cup \cdots \cup V_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

   Setze

   $$U_x := U_{(x,y_1(x))} \cap \cdots \cap U_{(x,y_{m_x}(x))}.$$

   Da X kompakt ist existieren $x_1, \ldots, x_n$ sodass $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Dann ist

   $$X \times Y = \bigcup_{\substack{k=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m_x}} W_{\lambda(x_k, y_j(x_k))}.$$

Beispiel 3.5.7 (Weitere kompakte Mengen).

1. **Produkte kompakter Mengen**:

   $$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n \text{ Faktoren}}$$

   ist kompakt (Würfel — allgemein $[a, b]^n$ ist kompakt)

2. **Abgeschlossene Teilräume kompakter Mengen**:
   Abgeschlossene Teilräume des n-dimensionalen Würfels sind kompakt. Insbe-

[13] Ist $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume, dann ist auch das kartesische Produkt mit der Produkttopologie kompakt.
[14] Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

sondere: jede abgeschlossene beschränkte[15] Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (mit Standard-Topologie) ist kompakt (da diese Teilmenge im Würfel mit Kantenlänge $2c$ liegt, wenn sie in einem Ball um den Nullpunkt mit Radius c liegt).

Satz 3.5.8 (Heine-Borel). Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind genau die abgeschlossen-beschränkten Teilmengen.

Beweis.

- $\Leftarrow$. Siehe obiges Beispiel.
- $\Rightarrow$. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
  Die Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = d(0, x)$ ist stetig, also insbesondere lokal beschränkt und damit global beschränkt.
  Dass K abgeschlossen ist folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 3.5.9 (Kompakte Mengen in Hausdorffraum abgeschlossen). Sei X ein topologischer Raum, der hausdorffsch ist, und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis. Es ist zu zeigen dass $X \setminus K$ offen ist in X.
Sei dafür $x_0 \in X \setminus K$. Für jedes $x \in K$ wähle eine offene Umgebung U_x von x_0 und V_x von x, sodass $U_x \cap V_x = \varnothing$ (das geht, weil X hausdorffsch ist).
Da K kompakt ist, existieren Punkte $x_1 \ldots, x_n \in K$ mit

$$K = (V_{x_1} \cap K) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap K).$$

K kann also durch endlich viele Mengen überdeckt werden.
Setze $U := U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \cap K &\subseteq U \cap (V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}) \\ &= (V_{x_1} \cap U) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap U) \\ &\subseteq (V_{x_1} \cap U_{x_1}) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap U_{x_n}) = \varnothing, \end{aligned}$$

also $x_0 \in U \subset X \setminus K$.

Korollar 3.5.10 (Minimum und Maximum von Teilmengen). Jede stetige Funktion $f : K \to C$ auf einer kompakten Teilmenge eines Hausdorffraums nimmt ein endliches Maximum und Minimum an.[16]

Satz 3.5.11 (Homöomorphismen auf Hausdorff-Räumen). Eine stetige, bijektive Abbildung $f : K \to Y$ von einem kompakten Raum K auf einen Hausdorff-Raum Y

[15] Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *beschränkt*, wenn sie in einem beliebig großen Ball um den Nullpunkt liegt, also falls $\forall a \in A : \|a\| \leq x < \infty$

[16] Übungsaufgabe: Beweisen (siehe Satz von Weierstraß in Analysis)

ist ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Das gilt im Allgemeinen nicht! Beispielsweise

$$X = [0, 1), \quad Y = S^1, \quad f(t) = e^{it2\pi}$$

ist bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus. Sonst wäre $[0, 1) \cong S^1$ ↯ (da S^1 kompakt ist, aber $[0, 1)$ nicht)

Beweis. Zu zeigen: Inverse Abbildung f^{-1} ist stetig.
Wir müssen zeigen, dass die Bilder von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen von $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$ offen (bzw. abgeschlossen) sind.
Sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt (als Teilraum eines kompakten Raumes). Dann ist $f(A)$ kompakt (als stetiges Bild einer kompakten Menge) in Y und somit ist $f(A) \subset Y$ abgeschlossen (als kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes).

4

Spezielle Klassen von topologischen Räumen

4.1 Übersicht

Folgende spezielle Klassen sollen diskutiert werden:

- metrische Räume $\rightsquigarrow$ metrische Geometrie
- Mannigfaltigkeiten (Grundobjekte in Differenzialgeometrie, Physik,…)
- Polyeder, Simplizialkomplexe (Kombinatorik, algebraische Topologie)
- Bahnen-Räume von Gruppenaktionen (geometrische Gruppentheorie)

4.2 Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition 4.2.1 (Topologische Mannigfaltigkeit). Eine **topologische Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Raum M mit folgenden Eigenschaften:

1. M ist **lokal euklidisch**, d.h. $\forall p \in M$ $\exists$ offene Umgebung U von p und ein Homöomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ mit festem n. Das Paar (φ, U) heißt **Karte**[1] und $\mathcal{A} = \{(\varphi_a, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ mit $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$ heißt **Atlas**.

[1] Eine mathematische Karte ist einer echten Karte ähnlich. Man nehme einen Punkt, zum Beispiel Karlsruhe, und beschreibt die Umgebung von Karlsruhe in Form einer Karte auf einer DIN A4-Karte. Das ist natürlich nicht bijektiv, aber man versucht es möglichst bijektiv zu machen.

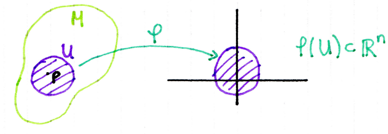

Abbildung 4.1. Karte von U mittels φ.

2. M ist hausdorffsch und besitzt abzählbare Basis der Topologie.

Bemerkung:

- Die zweite Eigenschaft ist "technisch" und garantiert , dass eine "Zerlegung der Eins" existiert (braucht man z.B. für die Existenz von Riemannschen Metriken).
- Die Zahl n heißt **Dimension** von M (eindeutig, wenn M zusammenhängend ist, siehe Satz von Gebietstreue).

Beispiel 4.2.2 (Topologische Mannigfaltigkeiten).

0. Eine abzählbare Menge mit diskreter Topologie (jeder Punkt ist offen) ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit.
1. S^1 ist eine kompakte, zusammenhängenge 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. $\mathbb{R}$ ist nichtkompakte, zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeit.

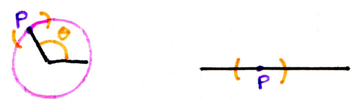

Abbildung 4.2. Darstellung von $\mathbb{R}$ und S^1 mit den für die topologische Mannigfaltigkeit nötigen Charakteristika.

2. Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit, z.B. ist jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit (hier ist Karte = Einschränkung der Identität).
Spezialfall: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A \neq 0\}$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$, also eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit, denn:
    - $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist stetig
    - $\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$
    - $\det^{-1}\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n\times n}$
    - $\mathbb{R}^{n\times n} \setminus \det^{-1}\{0\} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$

3. Die n-dimensionale Sphäre mit Radius $R > 0$,

$$S_R^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = R\},$$

ist n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

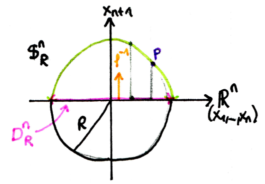

Abbildung 4.3. n-dimensionale Sphäre als topologische Mannigfaltigkeit.

Beweis. Sei $(x_1, \dots, x_{n+1}) = p \in S_R^n$, oBdA $x_{n+1} > 0$. Man betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : D_R^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\} &\to \varphi(D_R^n) \subset S_R^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{R^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}\right) \end{aligned}$$

d.h. φ ist Einschränkung der Orthogonalprojektion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 0) \end{aligned}$$

auf S_R^n.

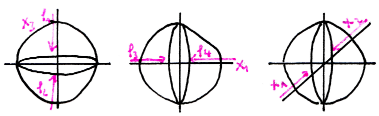

Abbildung 4.4. Einschränkung der Orthogonalprojektion.

Alternativ kann via stereographischer Projektion mit 2 Karten ausgekommen werden. Ein Atlas mit einer Karte existiert nicht.

4. Das Produkt von n_1-dimensionaler Mannigfaltigkeit M_1 und n_2-dimensionaler Mannigfaltigkeit M_2 ist $(n_1 + n_2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Karten: $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$,

$$\tilde{\varphi} : U_1 \times U_2 \to \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$

mit (U_1, φ_1) Karte von M_1 um p_1 und (U_2, φ_2) Karte von M_2 um p_2.

Bemerkung 4.2.3 ("Wieviele topologische Mannigfaltigkeiten gibt es?").

- *Dimension* $n = 1$: Im wesentlichen $\mathbb{R}$ (nicht kompakt) oder S^1 (kompakt).

- *Dimension* $n = 2$: Liste für zusammenhängende, kompakte, “orientierbare”, “randlose” Mannigfaltigkeiten:
  - $g = 0$: S^2 Einheitssphäre
  - $g = 1$: $T^2 = S^1 \times S^1$ Torus
  - $g = 2$: Brezel
  - …

  g ist das **Geschlecht** der Mannigfaltigkeit.
- *Dimension* $n = 3$: Thurston’s **Geometrisierungs-Vermutung** (~ 1978)
  Bewiesen von Perelman (2002), ein Milleniumsproblem.
- *Dimension* $n \geq 4$: Allgemeine Klassifikation unmöglich, weil das Homöomorphieproblem hier nicht entscheidbar ist (Markov, 1960).

4.3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 4.3.1 (Kartenwechsel, differenzierbare Mannigfaltigkeit).

Sei M topologische Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Ein **Kartenwechsel** ist ein Homöomorphismus

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n} \to \underbrace{\psi(D)}_{\subset \mathbb{R}^n}.$$

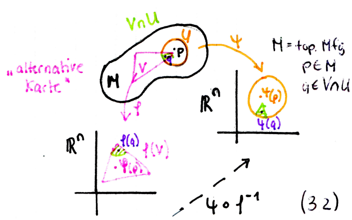

Abbildung 4.5. Kartenwechsel.

Ein Atlas $\mathcal{A}$ von M ist ein C^∞**-Atlas**, falls alle möglichen Kartenwechsel C^∞-Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ sind, also alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.
Ein maximaler C^∞-Atlas heißt C^∞**-Struktur** auf der topologischen Mannigfaltigkeit M. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer C^∞-Struktur (auch **glatte** oder **differenzierbare Mannigfaltigkeit**).

Bemerkung 4.3.2.

1. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten ohne differenzierbare Struktur[2].
2. Auf $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$[3], existiert genau eine differenzierbare Struktur.

[2] Kerraire 1960
[3] Kirby, Friedman 1980

3. Auf S^7 existieren 28 differenzierbare Strukturen[4].

Frage: Wozu die Differenzierbarkeitsbedingung für Kartenwechsel? Beispielsweise für die Definition von differenzierbaren Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Definition 4.3.3 (Differenzierbarkeit). Seien M^m, N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $F : M^m \to N^n$ stetig. F heißt **differenzierbar in** $p \in M$, falls für Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $F(p)$ gilt:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U)}_{\subset \mathbb{R}^m} \to \underbrace{\psi(V)}_{\subset \mathbb{R}^n}$$

ist C^∞-Abbildung in $\varphi(p)$.
So kommt man von einem abstrakten F zwischen den Mannigfaltigkeiten zu einer konkreten Darstellung von F.
F heißt **differenzierbar** (C^∞), falls F differenzierbar ist für alle $p \in M$.

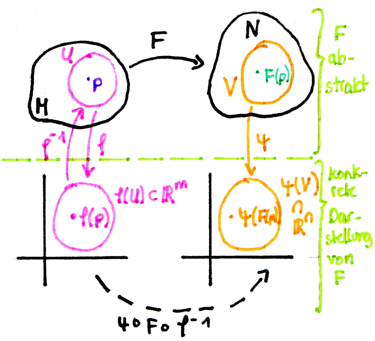

Abbildung 4.6. Differenzierbarkeitskriterium.

Bemerkung 4.3.4 (Wohldefiniertheit der Differenzierbarkeit). Differenzierbarkeit in p ist wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl der Karten)

Beweis. Erster Test: $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$*, zweiter Test* $\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}$
Es gilt:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \underbrace{\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\psi}}_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} \circ F \circ \underbrace{\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}}_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \varphi^{-1}$$

4 Milnor 1956

$$= \underbrace{\left(\psi \circ \tilde{\psi}^{-1}\right)}_{C^\infty} \circ \left(\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}\right) \circ \underbrace{\left(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}\right)}_{\text{Kartenwechsel}}$$

Also: Abbildung in Test 1 ist $C^\infty \iff$ Abbildung in Test 2 ist C^∞.

Bemerkung 4.3.5.

- $N = \mathbb{R}$, $F : M \to \mathbb{R}$ (differenzierbar) heißt **differenzierbare Funktion**.
- $M = \mathbb{R}$ (oder $I \subset \mathbb{R}$), $F : I \to N$ heißt **differenzierbare Kuve**.
- Eine Abbildung $F : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt **Diffeomorphismus**, falls F bijektiv und F und F^{-1} differenzierbar sind (also C^∞).
- Ein Homöomorphismus ist nicht unbedingt ein Diffeomorphismus. Beispielsweise $\mathbb{R}$ mit Id als Karte, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist Homöomorphismus, aber kein Diffeomorphismus, da $F^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist nicht C^∞.
- Die Menge der Diffeomorphismen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Gruppe mit der Verkettung von Abbildungen.

Beispiel 4.3.6.

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (bzgl. Standard-Topologie).
   $\varphi_0 := \mathrm{Id}\,|_U$ mit zugehörigem maximalen Atlas definiert C^∞-Struktur auf U, die kanonische differenzierbare Struktur.
2. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten heißen auch **Flächen**, speziell *regulär parametrisierte Flächen*[5].

Definition 4.3.7 (Reguläre Fläche). Eine Teilmenge S von $\mathbb{R}^3$ (mit Teilraum-Topologie von $\mathbb{R}^3$) heißt **reguläre Fläche**, falls für jeden Punkt $p \in S$ eine Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$ und eine Abbildung

$$F : \underset{\text{offen}}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \underset{\text{offene TM von S}}{V \cap S} \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

existiert, so dass gilt:

1. F ist ein differenzierbar Homöomorphismus

[5] Gegenstand der klassischen Differentialgeometrie, siehe auch Kapitel 5

2. das Differential (Jacobi-Matrix) von F,

$$\mathrm{d}F_q : \mathbb{R}^2 \supseteq T_qU \to T_{F(q)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$$

ist *injektiv* (d.h. Jacobi-Matrix hat Rang 2) für $\forall q \in U$.

F heißt **lokale Parametrisierung** von S.

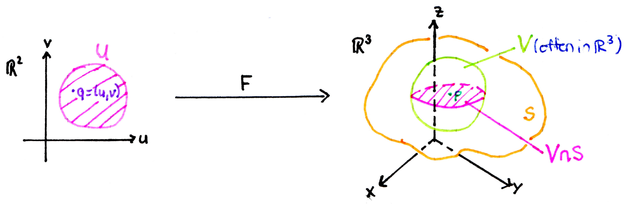

Abbildung 4.7. Lokale Parametrisierung.

Beispiel 4.3.8 (Rotationsfläche). Gegeben ist eine ebene Kurve $c(v) = (r(v), 0, h(v))$, $v \in [a, b]$ mit $r(v) > 0$, $c'(v) = \big(r'(v), 0, h'(v)\big)$ Tangentialvektor (mit C^∞-Funktionen r, h).[6]

$$F(u,v) := \begin{pmatrix} r(v)\cos u \\ r(v)\sin u \\ h(v) \end{pmatrix}$$

ist reguläre Fläche.[7]

Beispiel: 2-Sphäre von Radius R:

$$(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos v\cos u \\ R\cos v\sin u \\ R\sin v \end{pmatrix}.$$

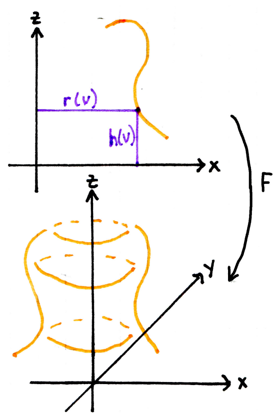

Abbildung 4.8. Rotationsfläche.

Es gibt andere Parametrisierungen, beispielsweise

[6] $\|c'(v)\| \neq 0 \Leftrightarrow (r')^2 + (h')^2 \neq 0$

[7] Übung!

$$(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.3.9 (Geometrische Eigenschaften parametrisierungsunabhängig).
Geometrische Eigenschaften sollten unabhängig sein von Parametrisierung. Das wird durch Eigenschaft 2 von regulären Flächen garantiert. Genauer gilt: Parameterwechsel sind differenzierbar ($\rightsquigarrow$ reguläre Flächen sind differenzierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit F^{-1} (Umkehr-Abbildung der Parametrisierung) als Karten):
Sei $p \in S$ und $F_1 : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to S$, $F_2 : \mathbb{R}^2 \supseteq V \to S$ zwei Parametrisierungen, sodass $p \in F_1(U) \cap F_2(V) =: W$.
Behauptung: Der Parameterwechsel

$$H := F_1^{-1} \circ F_2 : \mathbb{R}^2 \supset F_2^{-1}(W) \to F_1^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2$$

ist Diffeomorphismus.

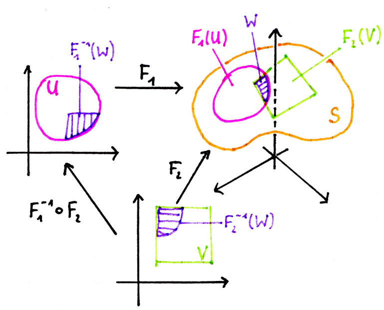

Abbildung 4.9. Parameterwechsel.

Beweis. H ist Homöomorphismus, da F_1 und F_2 Homöomorphismen sind.
Problem: F_1^{-1} ist auf einer offenen Teilmenge von S definiert und und da weiß man nicht was *differenzierbar* heißt.
Ausweg: Erweiterung von F. Sei $r \in F_2^{-1}(W)$ und $q := H(r)$. Da

$$F_1(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

reguläre Parametrisierung ist können wir oBdA (erst Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^3$ umbenennen) annehmen, dass

$$\frac{J(x,y)}{J(u,v)}(q) \neq 0 \quad \text{(Jacobi-Determinante).}$$

Trick: Erweitere F_1 zu Abbildung

$$\widetilde{F_1} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$\widetilde{F_1}(u,v,t) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v) + \boldsymbol{t}).$$

$\widetilde{F_1}$ ist differenzierbar und $\widetilde{F_1}|_{U\times\{0\}} = F_1$.
Die Jacobi-Determinante von $\widetilde{F_1}$ in $(q,0)$,

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} & 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} & 0 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v} & 1 \end{pmatrix}(q,0) = \det\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} \end{pmatrix}(q) \neq 0.$$

Nach dem Umkehrsatz (Analysis II) existiert eine Umgebung A von $\widetilde{F_1}(q,0) = F_1(q)$ in $\mathbb{R}^3$ sodass $\widetilde{F_1}^{-1}$ auf A existiert und differenzierbar (C^∞) ist. Da F_2 stetig ist existiert Umgebung B von v in V, sodass $F_2(B) \subset A$. Und nun ist $H|_B = \widetilde{F_1}^{-1} \circ F_2|_B$ ist Verkettung von differenzierbaren Abbildungen, also differenzierbar in r und da r beliebig ist ist H differenzierbar auf $F_2^{-1}(W)$.

Beispiel 4.3.10 (Weitere Beispiele von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten).

1. **n-Sphäre** von Radius R (und Zentrum 0):

   $$S_R^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = R\}.$$

   Karten via stereographischer Projektion.

   $$N := (0,\dots,0,R), \qquad S := (0,\dots,0,-R)$$
   $$U_1 := S_R^n \setminus \{N\}, \qquad U_2 := S_R^n \setminus \{S\}$$

   Stereographische Projektion bzgl N:

   $$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n,\ p = (p_1,\dots,p_{n+1}) \mapsto (x_1(p),\dots,x_n(p)),\ x_i(p) := \frac{Rp_i}{R - p_{i+1}}$$

   Stereographische Projektion bzgl. S:[8]

   $$\varphi_1 : U_2 \to \mathbb{R}^n,\ p = (p_1,\dots,p_{n+1}) \mapsto (x_1(p),\dots,x_n(p)),\ x_i(p) := \frac{Rp_i}{R - p_{i+1}}$$

   Kartenwechsel:

   $$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|} R^2$$

[8] **Übung**: φ_1 und φ_2 sind Homöomorphismen.

ist C^∞.
$\Rightarrow \mathcal{A} := \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ist ein differenzierbarer Atlas für S^n_R.
$\rightsquigarrow$ max. Atlas aller mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten (also allen (U, φ)) mit $\varphi \circ \psi^{-1}$ ist C^∞ für ψ aus $\mathcal{A}$ sofern Verkettung definiert ist) definiert differenzierbare Struktur auf S^n_R, also ist S^n_R eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit Dimension n.

2. n-dimensionaler reell projektiver Raum

$$P^n\mathbb{R} := \{\text{1-dim. UVR von } \mathbb{R}^{n+1}\} \equiv \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$$

mit $x \sim y \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \mathbb{R} \ni \lambda \neq 0 : x = \lambda y$ (1-dimensionaler UVR = Äquivalenzklasse) $\equiv S^n / \sim$ mit $x \sim y \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} x = -y$.
Wir sehen:
1. Definition: Eindimensionale Untervektorräume
2. Definition: Äquivalenzklassen in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$
3. Definition: Äquivalenzklassen in S^n
Es ist leicht zu sehen, dass diese Definitionen äquivalent sind.
Aus der 3. Definition sieht man

$$P^n\mathbb{R} = S^n / \sim$$

ist kompakt als Quotientenraum von S^n (Quotiententopologie $X \xrightarrow{\pi} Y = X/\sim$ mit topologischem Raum X und Quotiententopologie: U offen in $Y \Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ ist offen in X). Diese Abbildung ist stetig, und ein stetiges Bild von einer kompakten Menge ist wieder kompapkt.
Karten:

$$\tilde{U}_i := \{x \in S^n : x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \ldots, n+1$$
$$U_i := \pi(\tilde{U}_i) \text{ mit } \pi : S^n \to S^n / \sim = P^n\mathbb{R}.$$

Projektion:

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_i([x]) := \left(\frac{x_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{i}, \frac{x_{i+1}}{i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

sind Homöomorphismen.[9]

Bemerkung 4.3.11. Man kann zeigen: $P^n\mathbb{R}$ ist hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis der Topologie. Also ist $P^n\mathbb{R}$ eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

[9] **Übung**: Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sind C^∞.

Analog: $P^n\mathbb{C} := \{$komplexe 1-dim. UVR von $C^{n+1}\}$ ist kompakte $2n$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

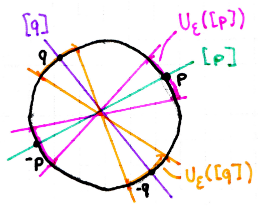

Abbildung 4.10. Idee zu Hausdorffsch.

Beispiel 4.3.12 (Produkt-Mannigfaltigkeiten). Für M^m und N^n m- bzw. n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist die **Produkt-Mannigfaltigkeit** $M \times N$ eine $(m+n)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.[10]

Exkurs 4.3.13 (Lie-Gruppen). Eine **Lie-Gruppe** ist eine Gruppe mit einer C^∞-Mannigfaltigkeitstruktur, so dass die Abbildung

$$G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto gh^{-1}$$

C^∞ ist.

Beispiel 4.3.14 (zu Lie-Gruppen).

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine 0-dimensionale Lie-Gruppe.
- $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \underset{\text{homö}}{\cong} S^1$ ist kompakte 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und Lie-Gruppe.[11]
- $SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in C,\ \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1 \right\} \underset{\text{homö}}{\cong} S^3$ ist kompakte 3-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.[12]
- $GL(n, \mathbb{R})$ (offene) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$ $\rightsquigarrow$ n^2-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

[10] **Übung**!
[11] **Übung**: Wieso?
[12] $1 = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ mit $\alpha = x_1 + \mathrm{i}x_2$ und $\beta = x_3 + \mathrm{i}x_4$.

Bemerkung 4.3.15 (Fakt von Cartan). Abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind Lie-Gruppen sind auch Lie-Gruppen.

Beispiel 4.3.16 (Fakt von Cartan benutzen).

$$SO(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : AA^\top = E,\ \det A = 1\} \text{ und}$$
$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

sind Lie-Gruppen: Benutze, dass

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \text{ und } X \text{ ist hausdorffsch}$$

$\Rightarrow$ A abgeschlossen, f, g stetige Abbildungen

4.4 Simplizialkomplexe

Simplizialkomplexe sind Objekte der algebraischen Topologie. Mittels Kombinatorik sollen topologische Invarianten bestimmt werden.

Definition 4.4.1 (Simplex). Ein k-dimensionales **Simplex** im $\mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle von $k+1$ Punkten $v_0, \ldots, v_k$ in allgemeiner Lage:

$$s(v_0, \ldots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i : \forall \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

für $v_0 - v_1, \ldots, v_0 - v_k$ linear unabhängig.

Beispiel 4.4.2 (Einfache Simplices).

- **0-Simplex**: v_0 (Punkt)
- **1-Simplex**: $v_0 - v_1$ (Strecke, $s(v_0, v_1) = \{\lambda v_0 + (1-\lambda)v_1 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$)
- **2-Simplex**: $\triangle v_0, v_1, v_2$ (Dreicksfläche)
- **3-Simplex**: v_0, v_1, v_2, v_3 ((volles) Tetraeder)

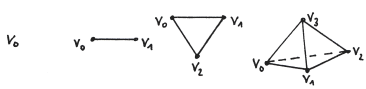

Abbildung 4.11. 0-, 1-, 2- und 3-Simplex.

Definition 4.4.3 (Teilsimplex, Seite). Die konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{v_0, \ldots, v_k\}$ heißt **Teilsimplex** oder **Seite** von $s(v_0, \ldots, v_k)$.

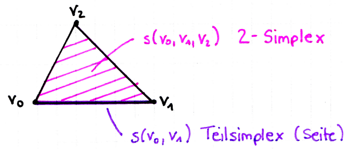

Abbildung 4.12. Simplex und Teilsimplex.

Definition 4.4.4 (Simplizialkomplex). Eine endliche Menge K von Simplices in $\mathbb{R}^n$ heißt **Simplizialkomplex**, wenn gilt:

1. Mit jedem seiner Simplices enthält K auch dessen sämtliche Teilsimplices.
2. Der Durchschnitt von je zwei Simplices ist entweder leer oder ein gemeinsamer Teilsimplex.

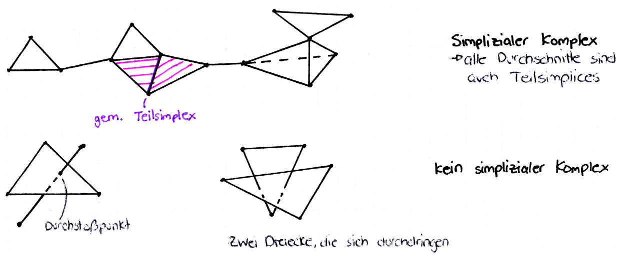

Abbildung 4.13. Simplizialer Komplex vs. kein simplizaler Komplex.

Definition 4.4.5 (Geometrische Realisierung).

$$|K| := \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^n$$

mit Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^n$ heißt der dem Simplizialkomplex K zugrunde liegende topologische Raum.
Achtung: Verschiedene Simplizialkomplexe K, K' können das gleiche $|K| = |K'|$ haben.

Bemerkung 4.4.6 (Vorteil von Simplizialkomplexen). Kennt man von einem (endlichen) Simplizialkomplex die **wesentlichen Simplices** (also solche, die nicht Seiten von anderen sind) in jeder Dimension und ihre **Inzidenzen** (also welche Ecken sie gemeinsam haben), so kennt man $|K|$ (bis auf Homöomorphie).

Beweis (Konstruktionsidee von $|K|$ aus diesen Daten).

1. Wähle in jeder Dimension einen *Standard-Simplex* $\Delta_k := s(\underbrace{e_1, \ldots, e_{k+1}}_{\text{Std.-Basis-Vek.}})$
2. Bilde disjunkte Vereinigung von solchen Δ_k in jeder Dimension k soviele wie es wesentliche k-Simplices gibt:
$$X := \underbrace{\Delta_0 \cup \cdots \cup \Delta_0}_{\#\text{ wesentliche } 0\text{-Simp.}} \cup \cdots \cup \underbrace{\Delta_n \cup \cdots \cup \Delta_n}_{\#\text{ wesentliche } n\text{-Simp.}}$$
3. Identifiziere Inzidenzen (via Äquivalenzrelation) gemäß Inzidenz-Angaben für Ecken

Diese drei Schritte liefern dann eine stetige Bijektion des (kompakten) Quotientenraumes $X/\sim$ auf Hausdorff-Raum $|K|$, also ein Homöomorphismus.

Definition 4.4.7 (Dimension). Die **Dimension** eines Simplizialkomplexes K ist die maximale Dimension seiner Simplices.

Bemerkung 4.4.8 (Spezialfall — Graph). Ein **endlicher Graph** ist ein endlicher, 0- oder 1-dimensionaler Simplizialkomplex,[13] gebaut aus 1-dimensionalen (*Kanten*) und 0-dimensionalen (*Ecken*) Simplices.
Ein Graph G heißt **zusammenhängend**, falls zu je zwei Ecken $p, p' \in G$ eine Folge $p = p_0, p_1, \ldots, p_n = p'$ paarweise verschiedener Ecken von G existiert, sodass p_{i-1} und p_i durch eine Kante verbunden sind.
Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph T, so dass für jedes 1-Simplex (*Kante*) $s \in T$ gilt: $|T| \setminus \mathring{s}$ ist nicht zusammenhängend (mit $\mathring{s}$ = *offener* 1-Simplex, also Kante ohne Endpunkte).

Definition 4.4.9 (Euler-Charakteristik). Sei G ein endlicher Graph,
$$\alpha_0 := \text{Anzahl Ecken in } G,$$
$$\alpha_1 := \text{Anzahl Kanten in G.}$$

Die **Euler-Charakteristik** von G ist
$$\chi(G) := \alpha_0 - \alpha_1$$

Bemerkung: $\chi(G)$ ist invariant unter Unterteilung (also dem Hinzufügen von neuen Ecken auf einer Kante).

Satz 4.4.10 (χ von Bäumen). Sei T ein (endlicher) Baum. Dann gilt $\chi(T) = 1$.

[13] Aufgrund der Eindimensionalität haben beispielsweise die Dreiecke in einem Graph keine Füllung!

Beweis. Induktion nach α_0 = Anzahl Ecken.

- $n = 1$. Dann ist G ein Punkt, $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \chi(T) = \alpha_0 - \alpha_1 = 1$ ✓
- $n = 2$. Dann ist G eine Kante mit Endpunkten, $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 1, \chi(T) = 1$ ✓
- **Induktionsannahme**: Satz gilt für alle Bäume mit n Ecken.
- **Induktionsschritt**: $\chi(T) = 1$ für Bäume mit $n + 1$ Ecken.
  Sei T ein Baum mit $n + 1$ Ecken und v_0 ein **Ende** von T (also eine Ecke die zu genau einer Kante gehört). Ein solches Ende existiert.[14]
  Sei $|T_1| := |T| \setminus \{\mathring{s}_1 \cup v_0\}$. T_1 ist wieder ein Baum, sonst existiert s_2 sodass $T_1 \setminus \{\mathring{s}_2\}$ zusammenhängend ist, also auch $T \setminus \{\mathring{s}_2\}$ zusammenhängend $\lightning$.
  T_1 hat n Ecken, also nach IV: $\chi(T_1) = 1$.
  Da $\alpha_0(T) = \alpha_0(T_1) + 1$ und $\alpha_1(T) = \alpha_1(T_1) + 1$ ist $\chi(T_1) = 1$. □

Satz 4.4.11 (χ von zusammenhängenden Graphen). Sei G ein zusammenhängender, endlicher Graph. Sei n die Anzahl von offenen 1-Simplices (*Kanten*), die man aus G entfernen kann, sodass G zusammenhängend bleibt. Dann ist $\chi(G) = 1 - n$.[15]

Beweis. Ist G ein Baum, so ist $n = 0$ und die Behauptung gilt.
Ist G <u>kein</u> Baum, so existiert ein offenes 1-Simplex $\mathring{s}_1$, sodass $|G_1| = |G| \setminus \{\mathring{s}_1\}$ zusammenhängend ist. Ist G_1 ein Baum, so hält man an. Ist G_1 kein Baum, so entfernt man eine Kante $\mathring{s}_2$ usw.
G hat endlich viele Kanten, also existiert ein max. n, so dass $|G| \setminus \{\mathring{s}_1 \cup \dots \cup \mathring{s}_n\}$ ein Baum ist.
Es gilt dann $\chi(G) = \chi(T) - n = 1 - n$. □

Bemerkung: Das Komplement T aller offenen Kanten die man aus G entfernen kann (wie im Beweis) ist ein sog. **spannender Baum** für G, der alle Ecken in G enthält (nicht eindeutig).

Definition 4.4.12 (Ebene und planare Graphen). Ein Graph heißt **eben**, falls er durch Punkte und Geradenstücke in der Ebene (also $\mathbb{R}^2$) realisiert ist, so dass sich die Kanten nicht schneiden (außer in den Ecken).
Ein (abstrakter) Graph (also gegeben durch Ecken-Mengen und Inzidenzen) heißt **planar**, falls er *isomorph* zu einem ebenen Graphen ist.

Beispiel 4.4.13.

1. K_4 = vollständiger Graph mit 4 Ecken (d.h. alle Ecken-Paare sind durch Kanten verbunden). Zeichnet man diesen Graphen als Quadrat, so ist dieser nicht eben. Man kann aber K_4 so zeichnen, dass der Graph eben ist. Also ist K_4 planar.

[14] vgl. Übung
[15] Die Aussage aus dem vorhergehenden Satz folgt aus diesem direkt.

2. K_5 = vollständiger Graph mit 5 Ecken. Dieser Graph ist nicht isomorph zu einem ebenen Graphen, also ist K_5 nicht planar.

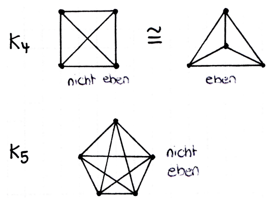

Abbildung 4.14. Planar vs. nicht planar.

Definition 4.4.14 (Seiten). Die **Seiten** eines ebenen Graphen G sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

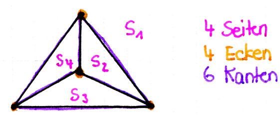

Abbildung 4.15. Seiten, Ecken und Kanten eines Graphen.

Satz 4.4.15 (Euler-Formel). Für einen zusammenhängenden, ebenen Graphen G gilt:

$$\chi(G) := e(G) - k(G) + s(G) = 2,$$

wobei $e(G)$ die Anzahl Ecken von G, $k(G)$ die Anzahl Kanten von G und $s(G)$ die Anzahl Seiten von G ist.
$\chi(G)$ ist die **Euler-Charakteristik** von G.

Beweis. Sei T ein **aufspannender Baum** für G (also ein Baum der alle Ecken von G enthält). Dann gilt $e(T) - k(T) = 1$ und $s(T) = 1$. Also gilt die Behauptung für T.
G erhält man aus T durch Hinzufügen von Kanten. Für jede neue Kante entsteht auch eine neue Seite, welche sich in der Summe aus der Behauptung aufheben. Also

$$\chi(G) = e(G) - k(G) + s(G) = 2.$$

□

Definition 4.4.16 (Polyeder). Eine Teilmenge P von $\mathbb{R}^3$ heißt **(konvexes) Polyeder**, falls

1. P ist Durchschnitt von endlich vielen **affinen Halbräumen** von $\mathbb{R}^3$ (d.h. gegeben durch Ungleichungen $a_i x + b_i y + c_i z \geq d_i$, $i = 1, \ldots, k$)
2. P ist beschränkt und nicht in einer Ebene enthalten.

Der **Rand** von P besteht dann aus Seiten(flächen), Kanten und Ecken (gegeben als 2-dimensionale, 1-dimensionale und 0-dimensionale Schnitte von Ebenen).

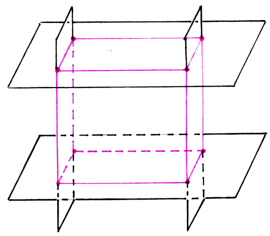

Abbildung 4.16. Ein voller Würfel, beschränkt durch seine Seitenflächen. Vorder- und Rückseite sind zur Übersichtlichkeit weggelassen.

Bemerkung 4.4.17 (Bezug von Polyedern zu Graphen). Das **1-Skelett** von P (also die Menge der Ecken und Kanten) von P ist ein Graph in $\mathbb{R}^3$.
Man kann zeigen (Resultat der konvexen Geometrie): durch Zentralprojektion von einem Punkt nahe bei einem "Seitenmittelpunkt" auf eine geeignete Ebene wird das 1-Skelett $p^{(1)}$ von P auf einen *ebenen* Graphen G_p abgebildet (sog. **Schlegel-Diagramm**). Es gilt dann: $s(P) = s(G_p)$, $k(P) = k(G_p)$, $e(P) = e(G_p)$.

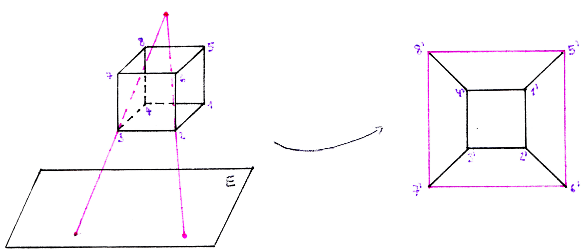

Abbildung 4.17. Projektion des vollen Würfels auf die Ebene.

Folgerung 4.4.18 (Eulersche Polyeder-Formel).

$$e(P) - k(P) + s(P) = 2.$$

Definition 4.4.19 (Regulärer Polyeder). Ein Polyeder in $\mathbb{R}^3$ heißt **regulär**, falls alle Seitenflächen kongruente reguläre n-Ecke (d.h. sie haben gleich lange Kanten) sind und in jeder Ecke m solche n-Ecke zusammentreffen (insbesondere gehen von jeder Ecke m Kanten aus).

Satz 4.4.20 (Platonische Körper). Es gibt genau 5 reguläre Polyeder in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}(m,n) &= (3,3) && \text{Tetraeder}\\ &= (3,4) && \text{Würfel}\\ &= (4,3) && \text{Oktaeder}\\ &= (3,5) && \text{Dodekaeder}\\ &= (5,3) && \text{Ikosaeder}\end{aligned}$$

Beweis.

- **Existenz**: Explizite Konstruktion, siehe Euklid (oder Tutorium (oder basteln (oder Google))).
- **Vollständigkeit**: Sei s = Anzahl an Seitenflächen. Dann gilt: $s \cdot n = 2k$, ebenso $m \cdot e = 2k$ und damit

  $$n \cdot s = 2k = m \cdot e \Rightarrow k = \frac{me}{2} \quad s = \frac{me}{n}$$

  Euler-Polyeder-Formel für P bzw. G_p ergibt:

  $$2 = e - k + s = e - \frac{me}{2} + \frac{me}{n} \Leftrightarrow 4n = e\,(2n - nm + 2m)\,.$$

  Da $n > 0$ und $e > 0$ folgt:

  $$2n - nm + 2m > 0 \Leftrightarrow nm - 2n - 2m + 4 < 4 \Leftrightarrow (n-2)(m-2) < 4.$$

  Man sieht, dass es nur obenstehende Möglichkeiten gibt. □

Definition 4.4.21 (Euler-Charakteristik von Simplizialkomplexen). Sei K ein Simplizialkomplex. Dann ist die **Euler-Charakteristik**[def:eulercharakteristikSimplizialkomplex] von K:

$$\chi(K) := \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \mp \cdots \pm \alpha_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \alpha_i,$$

wobei α_i = Anzahl von i-Simplices in K.
Die sogenannten "**Betti-Zahlen**" lassen sich berechnen mit Methoden aus der algebraischen Topologie (als Dimension von gewissen Vektorräumen, die man zu K konstruiert).
Man zeigt: $\chi(K)$ ist eine topologische Invariante, also

$$|K| \underset{\text{homö}}{\cong} |\widetilde{K}| \Rightarrow \chi(K) = \chi(\widetilde{K}).$$

Ein topologischer Raum X heißt **triangulierbar**, falls ein (endlicher) Simplizialkom-

plex K existiert und ein Homöomorphismus $|K| \xrightarrow{\sim} X$.
Ist X (via K) triangulierbar, so definiert man $\chi(X) := \chi(K)$ (und zeigt, dass $\chi(X)$ unabhängig von der gewählten Triangulierung ist).
Nun ist $\chi(S^2) = \chi(\text{Tetraeder}) = 2$ und jeder (reguläre) Polyeder homöomorph zu S^2, also $\chi(P) = \chi(S^2) = 2$.

4.5 Spezielle Konstruktion von Quotientenräumen ("Verkleben")

Definition 4.5.1 (Verklebung). X und Y seien topologische Räume, $A \subset X$ ein Teilraum und $f : A \to Y$ eine Abbildung (nicht notwendigerweise stetig). Sei $X \uplus Y$ die disjunkte Vereinigung. Definiere eine Äquivalenzrelation auf $X \uplus Y$ via f wie folgt:

$$x \sim x' \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} & x = x' \\ \text{oder} & f(x) = x' \quad (x \in A) \\ \text{oder} & f(x') = x \quad (x' \in A) \\ \text{oder} & f(x) = f(x') \quad (x, x' \in A) \end{cases}$$

Das ist eine Äquivalenzrelation.
Der Quotientenraum $X \cup_f Y := X \uplus Y/_\sim$ heißt **Verklebung** von Y an Y via f.

Beispiel 4.5.2.

1. $X = Y = S^1$, $A = \{x_0\}$, $f(x_0) := x_0$

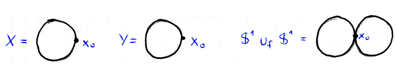

Abbildung 4.18. Einfache Verklebung.

2. $X = [0, 1]$, $Y = [2, 5]$, $A = \{0, 1\} \subset X$, $f(0) = 2$, $f(1) = 3$

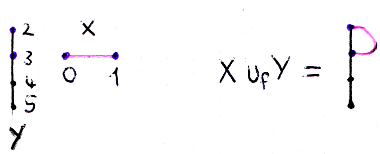

Abbildung 4.19. Intervallverklebung.

3. *Zusammenhängende Summe* von 2-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2.

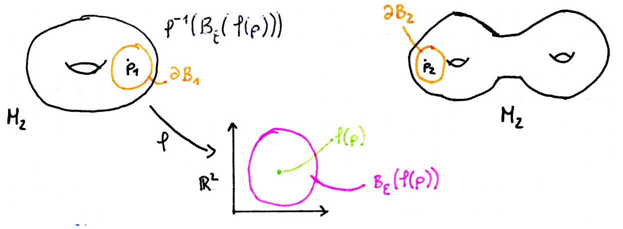

Abbildung 4.20. Zusammenhängende Summe von 2-Mannigfaltigkeiten.

Konstruktion:

1. Entferne geeignet kleine abgeschlossene "Kreisscheiben" von $p_1 \in M_1$ und $p_2 \in M_2$ mit Rändern δB_1 und δB_2 homöomorph zu S^1.
2. Wähle Homöomorphismus $f : \delta B_1 \to \delta B_2$.
3. Verklebe M_1 und M_2 mittels $f : M_1 \cup_f M_2 =: M_1 \# M_2$

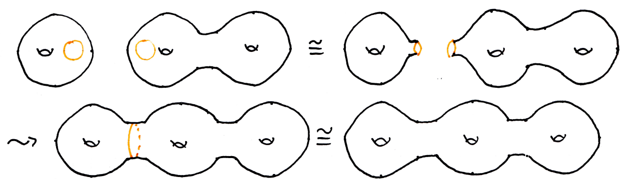

Abbildung 4.21. Verklebung.

Alle kompakten geschlossenen Flächen kann man aus S^2 konstruieren durch Verkleben Tori.

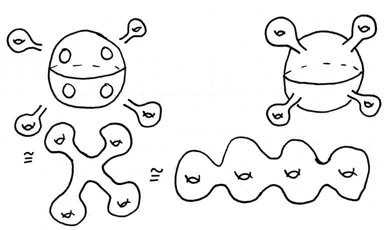

Abbildung 4.22. Konstruieren einer beliebigen kompakten geschlossenen Gläche aus S^2.

Bemerkung 4.5.3 (Selbstverklebungen). "**Selbst-Verklebungen**" sind analog definiert:
X = topologischer Raum, $A \subset X$ Teilraum, $f: A \to X$, $X_f := X/_\sim$ mit Äquivalenzrelation wie oben.

Beispiel 4.5.4.

1. $X = [0,1] \times [0,1]$ = Einheitsquadrat,

$$A \subset \delta X = \underbrace{(\{0\} \times [0,1])}_{=:A_1} \cup \underbrace{(\{1\} \times [0,1])}_{=:B_2} \cup \underbrace{([0,1] \times \{0\})}_{=:A_2} \cup \underbrace{([0,1] \times \{1\})}_{=:B_2},$$

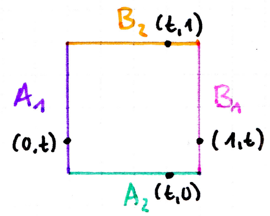

Abbildung 4.23. Vorbereitung zur Selbstverklebung am Einheitsquadrat.

$A := A_1 \cup A_2$,

$$\begin{aligned} f: A_1 &\to B_1, \quad (0,t) \mapsto (1,t) \\ A_2 &\to B_2, \quad (t,0) \mapsto (t,1) \end{aligned}$$

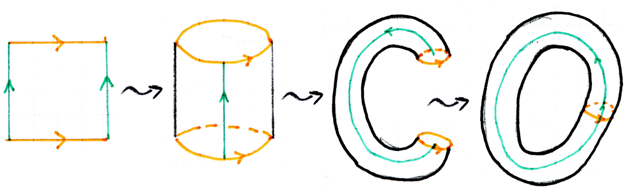

Abbildung 4.24. Verklebungsprozess.

2. *Möbiusband*: $X = [0,1] \times [0,1]$, $A = A_1$, $f: A_1 \ni (0,1) \mapsto (1, 1-t) \in B_1$
3. *Projektive Ebene*: $P^2\mathbb{R}$ entsteht durch Verkleben einer Kreisscheibe und eines Möbiusbandes längs der Ränder.

5 Geometrie von Flächen

Ziel dieses Kapitels ist es, auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten (beziehungsweise Flächen im $\mathbb{R}^3$) “Geometrie” zu betreiben (also beispielsweise Längen und Winkel messen und so weiter).[1]

5.1 Reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$

Bemerkung 5.1.1 (Erinnerung an reguläre Flächen). Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine **reguläre Fläche**, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine C^∞-Abbildung

$$x : U \ni (u, v) \mapsto x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

gibt mit:

1. $x(U) = S \cap V$ und $x : U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.
2. Das Differenzial $\mathrm{d}x|_{(u,v)} : \underbrace{T_{(u,v)}\mathbb{R}^2}_{\cong\mathbb{R}^2} \to \underbrace{T_{x(u,v)}\mathbb{R}^3}_{\cong\mathbb{R}^3}$ ist injektiv ($\forall (u, v) \in U$)

   $\iff$ Die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \end{pmatrix}$$

[1] Für mehr Informationen: **Gauß** (1827) vgl. **Spirak**: *A comprehensive introduction to differential geometry* Vol. III — how to read Gauß

hat Rang 2 ($\forall (u,v) \in U$).

$\Leftrightarrow$ $x_u(u,v), x_v(u,v)$ sind linear unabhängig ($\forall (u,v) \in U$).

$\Leftrightarrow$ Vektorprodukt $x_u(u,v) \times x_v(u,v) \neq 0$ ($\forall (u,v) \in U$).

Bemerkung 5.1.2 (Erinnerung an das Kreuz-/Vektorprodukt).
$a := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $b := (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$a \wedge b \, (\cong a \times b) \;:= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Eigenschaften:

1. $a \wedge b \perp a \qquad a \wedge b \perp b$
2. $\det(a, b, a \wedge b) \geq 0$
3. $a \wedge (-b) = -(a \wedge b)$
4. $||a \wedge b|| = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \sin \alpha$ (Winkel zwischen den Vektoren), Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms

Definition 5.1.3 (Tangentialraum). Der **Tangentialraum** in Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ ist der affine Unterraum

$$T_p\mathbb{R}^3 := \{p\} \times \mathbb{R}^3 = \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^3\}.$$

Für eine reguläre Fläche S und $p = x(u,v) \in S$ ist die **Tangentialebene** in $p \in S$ definiert als

$$T_pS := \mathrm{d}x_{(u,v)}\left(T_{(u,v)}\mathbb{R}^2\right) := \{p\} \times [x_u(u,v), x_v(u,v)] \subset T_p\mathbb{R}^3$$

2-dimensionaler, affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 5.1.4 (Geometrische Interpretation des Tangentialraums).

$$x_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} x(u_0 + t, v_0) = \mathrm{d}x|_{(u_0,v_0)}(e_1)$$

Allgemein:
Sei $c(t) := x(u(t), v(t))$ eine **Flächenkurve** in $x(U)$ durch den Punkt $x(u(0), v(0)) = x(u_0, v_0)$.
Tangentialvektor an c im Punkt $x(u_0, v_0)$:

$$c'(0) = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(u(t), v(t))|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial u}(u(0), v(0))u'(0) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(0) = x_u(u_0, v_0)u'(0) + x_v(u_0, v_0)v'(0)$$

Also: Tangentialebene in $x(u_0, v_0)$ = Menge aller Tangentialvektoren als Flächenkurven.

Bemerkung 5.1.5 (Parameterisierungsunabhängigkeit obiger Definitionen).
Sei $\overline{x} : \overline{U} \to \overline{x}(\overline{U}) = x(U)$ eine andere Parametrisierung von S um $p = x(u_0, v_0) = \overline{x}(\overline{u_0}, \overline{v_0})$.
Zu zeigen: Die lineare Hüllen sind gleich: $[\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{x}_{\overline{v}}] = [x_u, x_v]$.
Es ist $k := \overline{x}^{-1} \cdot x : U \to \overline{U}$ die Koordinatentransformation:

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \overline{x}(\overline{x}^{-1} \circ x)}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \overline{x}}{\partial u}(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{u}}(\overline{u}, \overline{v}) \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{v}} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}$$

Entsprechend:

$$\begin{aligned} x_u &= \overline{x}_{\overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \overline{x}_{\overline{v}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} \quad \text{d.h. } x_u \text{ ist Linearkombination von } \overline{x}_{\overline{u}} \text{ und } \overline{x}_{\overline{v}} \\ x_v &= \overline{x}_{\overline{u}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \overline{x}_{\overline{v}} \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \quad \text{d.h. } x_v \text{ ist Linearkombination von } \overline{x}_{\overline{u}} \text{ und } \overline{x}_{\overline{v}} \end{aligned}$$

Also $[x_u, x_v] = [\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{x}_{\overline{v}}]$, verschiedene Basen von T_pS mit Basis-Transformations-Matrix

$$D(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Das ist die Funktionalmatrix der Parametertransformation. Insb. ist $\det D(u, v) \neq 0$.

Beispiel 5.1.6.

1. *affine Ebene*: $a_0, a, b \in \mathbb{R}^3$, $S := \{a_0 + ua + vb : u, v \in \mathbb{R}\}$ ist reguläre Fläche, falls a und b linear unabhängig sind. Mit

$$U := \mathbb{R}^2,\ V := \mathbb{R}^3,\ x : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto a_0 + ua + vb \in \mathbb{R}^3,$$

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = a,\ x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = b,\ T_{x(u,v)}S = \{x(u, v)\} \times [a, b] \cong S.$$

2. $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ C^∞-Funktion, $S :=$ Graph von $f := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in U,\ x_3 = f(x_1, x_2)\}$.
   Behauptung: S ist reguläre Fläche.

$U = U, V = \mathbb{R}^3, x : U \ni (u,v) \mapsto (u,v,f(u,v)) \in \mathbb{R}^3$.
$x(U) = S = S \cap V$, $x : U \to S$ stetig und $x^{-1} : S \ni (u,v,f(u,v)) \mapsto (u,v) \in U$ ist als Projektion auch stetig. Also ist x ein Homöomorphismus.
Weiter ist

$$x_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right),$$
$$x_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

also sind x_u und x_v linear unabhängig.

Bemerkung 5.1.7. Ist S reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$, so existiert zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $O \subset \mathbb{R}^3$, so dass $S \cap O$ Graph einer C^∞-Funktion ist (beispielsweise S^2 = 2-Sphäre vom Radius 1).

5.2 Erste Fundamentalform einer regulären Fläche

Bemerkung 5.2.1 (Erinnerung an LA). Modell der euklidischen Geometrie:
$\mathbb{R}$-Vektorraum + Skalarprodukt = euklidischer $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$-Vektorraum
$\rightsquigarrow ||a|| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ **Länge** eines Vektors $a \in V$
$\rightsquigarrow \cos \measuredangle(a,b) = \frac{\langle a,b \rangle}{||a|| \cdot ||b||} = \left\langle \frac{a}{||a||}, \frac{b}{||b||} \right\rangle$ **Winkel**

Bemerkung 5.2.2 (Übertragung auf gekrümmte Flächen (Gauß)). Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Betrachte die bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pS \times T_pS \to T_pS, \quad \langle a, b \rangle_p := \langle a, b \rangle$$

(identifiziere affine Ebene mit VR R^2, $\langle a, b \rangle$ ist Standard-SKP in $\mathbb{R}^3$).
Die Zuordnung $I : p \mapsto I_p := \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ heißt **1. Fundamentalform der Fläche S**.
Ist $x : U \ni (u,v) \mapsto x(u,v) \in S$ eine lokale Parametrisierung von S (um $p \in S$), so bilden $x_u(u,v)$ und $x_v(u,v)$ eine Basis von $T_{x(u,v)}S$. Bezüglich dieser können wir I_p, $p \in x(U) \subset S$ durch eine positiv definite symmetrische 2×2-Matrix darstellen:

$$\Bigg(\underbrace{g_{ij}(u,v)}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}\Bigg) = \begin{pmatrix} g_{11}(u,v) & g_{12}(u,v) \\ g_{21}(u,v) & g_{22}(u,v) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}}_{\text{Originalnotation Gauß}}$$

mit

$$\begin{aligned} g_{11}(u,v) = E(u,v) = \langle x_u(u,v), x_u(u,v)\rangle_p &= \underbrace{\langle x_u(u,v), x_u(u,v)\rangle}_{\text{Standard-SKP von } \mathbb{R}^3} \\ g_{12}(u,v) = \langle x_u, x_v\rangle_p &= \langle x_v, x_u\rangle = g_{21}(u,v) \\ g_{22}(u,v) = \langle x_v, x_v\rangle_p &= \langle x_v, x_v\rangle \end{aligned}$$

insbesondere sind die $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ C^∞-Funktionen.
Also: $(g_{ij}(u,v))$ ist eine Familie $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von Skalarprodukten, die differenzierbar von (u,v) abhängig ist. (Riemannsche Metrik)

Bemerkung 5.2.3 (Bedingungen an obige Matrix).

1. *Hurwitz*: I_p ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $E = g_{11} > 0$, $E \cdot G - F^2 = \det(g_{ij}) > 0$.
2. *andere Parametrisierung*: $\overline{x}(\overline{u},\overline{v}) \rightsquigarrow$ neue Basis $\{\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{x}_{\overline{v}}\}$, Matrix von I bezüglich dieser Basis $\Bigg(\underbrace{\overline{g}_{ij}(\overline{u},\overline{v})}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}}\Bigg)$ mit

   $$(g_{ij}(u,v)) = D(u,v)^\top (\overline{g}_{ij}(\overline{u},\overline{v})) D(u,v)$$

   mit

   $$D(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix},$$

   siehe auch Basiswechselmatrix.

Beispiel 5.2.4 (Beispiele zur 1. Fundamentalform).

1. $S :=$ affine Ebene $\subset \mathbb{R}^3$: a, b: $\|a\| = \|b\| = 1$, $\langle a,b\rangle = 0$ (also $a \perp b$)
   Parametrisierung: $x(u,v) = a_0 + ua + vb$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2 = U$.

   $$\begin{aligned} &x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = a, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = b, \\ &E = \langle x_u, x_u\rangle = \langle a,a\rangle = \|a\|^2 = 1 \\ &F = \langle x_u, x_v\rangle = \langle a,b\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = \langle b, b \rangle = ||b||^2 = 1$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. S = Zylinder = $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = r^2\right\}$
   Lokale Parametrisierung (als Rotationsfläche):

   $$x(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v), \quad (u,v) \in U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

   $$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = r(-\sin u, \cos u, 0),$$
   $$x_v = \frac{\partial x}{\partial v} = r(0,0,1),$$
   $$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(u,v) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \text{ konstant}$$

   Bemerkung: Für $r = 1$ ist die erste Fundamentalform des Zylinders identisch mit der ersten Fundamentalform der Ebene.
   Grund: Ebene und Zylinder sind lokal isometrisch (haben im Kleinen die gleiche Geometrie): auf- und abwickeln. Insbesondere sagt die erste Fundamentalform nichts darüber aus, wie die Fläche in $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.
3. $S = S_R^2$ = Sphäre vom Radius R
   Lokale Parametrisierung (mit geographischen Koordinaten):

   $$(\theta, \varphi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) = U$$
   $$x(\theta, \varphi) = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta),$$
   $$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = (-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta),$$
   $$x_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi, 0)$$

   Erste Fundamentalform: $I(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta \rangle & \langle x_\theta, x_\varphi \rangle \\ \langle x_\varphi, x_\theta \rangle & \langle x_\varphi, x_\varphi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$

Bemerkung 5.2.5 (Wozu ist die erste Fundamentalform gut?).

1. *Längen*: Mithilfe der ersten Fundamentalform können beispielsweise Längenmessungen von Flächenkurven durchgeführt werden:

$$x : [\alpha, \beta] \to S, \quad t \mapsto x(u(t), v(t)) =: c(t)$$

sei eine differenzierbare Flächenkurve in $x(U) \subset S$. Die Länge von c (also Kurve in $\mathbb{R}^3$) ist

$$L(c) = \int_\alpha^\beta \|c'(t)\| \mathrm{d}t, \quad \|c'(t)\|^2_{c(t)} = \langle c'(t), c'(t) \rangle$$

mit

$$c'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = x_u \cdot u' + x_v \cdot v'$$

ist also

$$\begin{aligned} \|c'(t)\|^2_{c(t)} &= \langle c'(t), c'(t) \rangle = (u')^2 \langle x_u, x_u \rangle + 2u'v' \langle x_u, x_v \rangle + (v')^2 \langle x_v, x_v \rangle \\ &= (u')^2 E(u,v) + 2u'v' F(u,v) + (v')^2 G(u,v) \end{aligned}$$

Man braucht also nur die erste Fundamentalform von S und die Beschreibung der Kurve $t \mapsto (u(t), v(t))$ in einem Parametergebiet U, um die Länge der Kurve ausrechnen zu können:

$$\Rightarrow L(c) = \int_\alpha^\beta \sqrt{E(u,v)(u')^2 + F(u,v) 2u'v' + G(u,v)(v')^2} \mathrm{d}t$$

Also: Länge einer Flächenkurve ist eine Größe der inneren Geometrie einer Fläche S (d.h. Eigenschaften/Größen, die nur von der ersten Fundamentalform abhängig sind).

2. *Winkel*: Außer Längen können auch Winkel zwischen Flächenkurven als Winkel zwischen den entsprechenden Tangenten an diese Kurven gemessen werden:
Seien $c_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $c_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ zwei Flächenkurven mit $c_1(0) = c_2(0)$.

$$\cos \measuredangle(c_1'(0), c_2'(0)) := \frac{\langle c_1'(0), c_2'(0) \rangle}{\|c_1'(0)\| \cdot \|c_2'(0)\|}$$

Explizite Rechnung via Parametrisierung:

$$\begin{aligned} c_1'(0) &= x_u(u_0, v_0) a + x_v(u_0, v_0) b \\ c_2'(0) &= x_u(u_0, v_0) c + x_v(u_0, v_0) d \end{aligned}$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\cos\measuredangle(c_1'(0), c_2'(0)) = \frac{\langle x_u a + x_v b, x_u c + x_v d\rangle}{\|x_u a + x_v b\| \cdot \|x_u c + x_v d\|} = \frac{acE + (bc + ad)F + bdG}{\sqrt{a^2E + 2abF + b^2G}\sqrt{c^2E + 2cdF + d^2G}}$$

also ist der Winkel zwischen Flächenkurven die Größe des Winkels zwischen zwei Geraden.

3. *Flächeninhalt* eines regulären parametrisierten Flächenstücks

$$x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^2$$

ist definiert als

$$A(x(U)) := \iint_U \|x_u \wedge x_v\|(u, v)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Da $\|x_u \wedge x_v\|^2 = \langle x_u, x_u\rangle\langle x_v, x_v\rangle - \langle x_u, x_v\rangle^2 = EG - F^2 = \underset{\text{aus 1. FF}}{\det(I)}$ laut der Formel für das Vektorprodukt (Fläche Parallelogramm im Quadrat) ist A invariant unter Parameter-Transformationen (also wohldefiniert):
Denn für eine andere Parametrisierung $\overline{x} : \mathbb{R}^2 \supset \overline{U} \to \overline{x}(\overline{U}) = x(U) \subset S \subset \mathbb{R}^3$ gilt:

$$I = D^\top \overline{I} D$$

wobei D = Funktionalmatrix des Kartenwechsels (= Parameter-Transformation $\overline{x} \circ x^{-1} : U \to \overline{U}$). Somit:

$$\det(I) = (\det D)^2 \det \overline{I} \quad (\star)$$

und die Behauptung folgt aus der Transformationsformel für Integrale:

$$\iint_{\overline{U}} \sqrt{\det \overline{I}}\, \mathrm{d}\overline{u}\mathrm{d}\overline{v} \underset{\text{TF}}{=} \iint_U \sqrt{\det \overline{I}}\, |\det D|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \underset{(\star)}{=} \iint_U \sqrt{\det I}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Beispiel 5.2.6 (Beispiel zur Flächeninhaltsberechnung). $S = S_R^2$ = Sphäre vom Radius S parametrisiert durch georgraphische Koordinaten (θ, φ).
Erste Fundamentalform:

$$I(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$
$$U = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi),$$

also

$$\begin{aligned} A(x(U)) \underset{\substack{x(U)\text{: die}\\ \text{ganze Sphäre bis auf}\\ \text{“Nullmengen” überdeckt}}}{=} A(S_R^2) &= \iint_U \sqrt{\det I}\, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R^2 \cos\theta \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\ &= R^2 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

5.3 (Lokale) Isometrien von Flächen

Bemerkung 5.3.1 (Reguläre Fläche = Metrischer Raum). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Wir definieren eine *Längenmetrik* auf S durch

$$d_S(p,q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c)$$

mit $p, q \in S$, Ω_{pq} := Menge von differenzierbaren *Flächenkurven*, die p und q verbinden, $L(c)$:= Länge von x (gemessen in S).
Wir verifizieren die Metrik-Axiome:

- $d_S(p,q) = d_S(q,p)$ (Wege rückwärts durchlaufen):

  $$c : [0,1] \to S \rightsquigarrow \tilde{c} : [0,1] \to S,\ t \mapsto \tilde{c}(t) = c(1-t)$$

  $$c(0) = p,\ c(1) = q, \quad \tilde{c}(0) = c(1) = q,\ \tilde{c}(1) = p$$

  und $L(c) = L(\tilde{c})$.
- $d_S(p,q) \leq d_S(p,r) + d_S(r,q)$
- $d_S(p,p) = 0$: $c_0(t) = p \rightsquigarrow c_0'(t) = 0 \rightsquigarrow L(c_0) = 0$.

Die obigen Punkte gelten ganz allgemein und haben mit S nichts zu tun.

- $p \neq 1 \Longrightarrow d_S(p,q) > 0$:

  $$\exists\, \varepsilon > 0 \underset{\text{Def.}}{:} \underbrace{B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(q)}_{\varepsilon\text{-Bälle in } \mathbb{R}^3} \cap S = \varnothing.$$

  Hier benutzt man, dass $\mathbb{R}^3$ mit Standard-Metrik hausdorffsch ist. Also

  $$d_S(p,q) \geq d_{\mathbb{R}^3}(p,q) \geq 2\varepsilon > 0.$$

Fazit: Jede reguläre Fläche ist metrischer Raum.

Definition 5.3.2. Seien S und $\tilde{S}$ reguläre Flächen in $\mathbb{R}^3$ und $f : S \to \tilde{S}$ eine Abbildung.

1. f heißt **(Flächen-)Isometrie**, wenn f ein Diffeomorphismus von S auf $\tilde{S}$ ist und für alle differenzierbaren Kurven $c : I \to S$ gilt:

   $$L(f \circ c) = L(c) \quad \text{“}f \text{ ist Längen-erhaltend”.}$$

2. f heißt **lokale Isometrie**, falls für jeden Punkt $p \in S$ offene Umgebungen A von p und B von $f(p)$ existieren, so dass f eine Isometrie von A auf B ist.

Bemerkung 5.3.3 (Abstandserhaltend). Ist $f : S \to \tilde{S}$ eine Flächen-Isometrie, so ist f eine Isometrie zwischen den metrischen Räumen (S, d_S) und $(\tilde{S}, d_{\tilde{S}})$, d.h. es gilt:

$$\forall p, q \in S : d_{\tilde{S}}(f(p), f(q)) = d_S(p, q) \quad \text{“}f \text{ ist Abstands-erhaltend”.}$$

Satz 5.3.4 (Kriterium für lokale Isometrien). Sind S und $\tilde{S}$ reguläre Flächen und sind $x : U \to x(U) \subset S$ und $\tilde{x} : U \to \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$ mit **gleichem** Parameterbereich U, sodass

$$\forall (u, v) \in U : \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{1. FF von } S}(u, v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}}_{\text{1. FF von } \tilde{S}}(u, v),$$

d.h. stimmen die erste Fundamentalform von S und $\tilde{S}$ in entsprechenden Punkten überein, so sind $x(U)$ und $\tilde{x}(U)$ isometrisch.

Beweis. Die Abbildung $f := \tilde{x} \circ x^{-1} : S \supset x(U) \to \tilde{x}(U) \subset \tilde{S}$ ist Diffeomorphismus. Sei dann

$$c : [a, b] \to S,\ c(t) = x(u(t), v(t)) \subset x(U) \subset S$$

eine differenzierbare (Test-)Kurve.
Dann filt:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sqrt{E^2(u(t), v(t))(u')^2 + 2F(u(t), v(t))u'v' + G^2(u(t), v(t))(v')^2} \,\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{Vorr.}}{=} \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u(t), v(t))(u')^2 + 2u'v'\tilde{F}(u(t), v(t)) + (v')^2\tilde{G}(u(t), v(t))} \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für die Länge der Bildkurve

$$f \circ c(t) = (\tilde{x} \circ x^{-1}) \circ x(u(t), v(t)) = \tilde{x}(u(t), v(t)):$$

$$L(f \circ c) = \int_a^b \sqrt{\tilde{E}(u(t), v(t))(u')^2 + 2u'v'\tilde{F}(u(t), v(t)) + (v')^2\tilde{G}(u(t), v(t))}\, \mathrm{d}t.$$

□

5.4 Normalvektoren und zweite Fundamentalform

Ist S reguläre Fläche in $\mathbb{R}^3$, dann existiert in jedem Punkt $p \in S$ die Tangentialebene. Für gegebene Parametrisierung

$$x : U \ni (u, v) \mapsto x(u, v) \in S$$

um p ist $T_pS = [x_u, x_v]$.
Ist $\overline{x} : \overline{U} \to S$ eine andere Parametrisierung um $p \in S$, so gilt: $[\overline{x}_{\overline{u}}, \overline{x}_{\overline{v}}] = [x_u, x_v]$.
Weiter gilt für das Vektorprodukt:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{\overline{u}} \wedge \overline{x}_{\overline{v}} &= \left(x_u \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} \right) \wedge \left(x_u \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} \right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{u}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} - \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} \right) (x_u \wedge x_v) \\
&= \det(\mathrm{d}\varphi)(x_u \wedge x_v),
\end{aligned}$$

wobei $\varphi = x^{-1} \circ \overline{x} : \overline{U} \to U$ die Koordinatentransformation (Parameterwechsel) und $\mathrm{d}\varphi$ das Differential davon ist.

Definition 5.4.1 (Normalenvektor). Da x_u und x_v linear unabhängig sind, ist

$$x_v \wedge x_u \neq 0 \quad \text{und} \quad n(p) \cong n(x(u, v)) \equiv n(u, v) := \frac{x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)}{||x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)||}$$

ist ein Einheitsvektor senkrecht zu T_pS für alle $p \in x(U) \subset S$.
$n(p)$ heißt **Normalenvektor** von S im Punkt p.
Nach obiger Rechnung gilt für eine andere Parametrisierung um p:

$$\overline{n}(p) = \frac{\overline{x}_{\overline{u}} \wedge \overline{x}_{\overline{v}}}{||\overline{x}_{\overline{u}} \wedge \overline{x}_{\overline{v}}||} = \frac{\det(\mathrm{d}\varphi) x_u \wedge x_v}{|\det(\mathrm{d}\varphi)| \cdot ||x_u \wedge x_v||} = \frac{\det(\varphi)}{|\det(\varphi)|} n(p) = \pm n(p)$$

Damit die Normalenvektoren eindeutig bestimmt sind, brauchen wir die Voraussetzung, dass $\det(\mathrm{d}\varphi) > 0$ für alle Parameterwechsel.

Definition 5.4.2 (Orientierbarkeit). Eine reguläre Fläche S — oder allgemeiner, eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M — heißt **orientierbar**, falls ein Atlas von S (bzw. M) existiert, sodass alle Kartenwechsel (Parameterwechsel) eine positive Funktionaldeterminante haben.

Beispiel 5.4.3 (Orientierbarkeit von Flächen). Sphären und Tori sind orientierbar, Möbiusband und projektive Ebene nicht.

Beispiel 5.4.4 (Normalenvektoren).

1. **Affine Ebene**: $x(u, v) = ua + vb$, a, b linear unabhängig
   $\to x_u = a, x_v = b, n(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|}$ = konstant
2. **2-Sphäre S^2 mit Radius R**:

$$x(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad x_\theta = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, \quad x_\varphi = \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_\theta \wedge x_\varphi = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2\theta\cos\varphi \\ -R^2\cos^2\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = -R\cos\theta \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix} = -R\cos\theta x(u, v)$$

$$n(\theta, \varphi) = \frac{x_\theta \wedge x_\varphi}{\|x_\theta \wedge x_\varphi\|} = \frac{-x(\theta, \varphi)}{\|x(\theta, \varphi)\|}$$

Bemerkung 5.4.5 (Krümmungsmessung). Frage: Wie soll man Krümmung messen? Möglichkeit nach Gauß: "Änderung der Normalen" messen — wie ändert sich die Normale, wenn $p \in S$ sich ändert?
Betrachte eine Testkurve auf S: $c(t) = x(u(t), v(t))$ und Normalenvektoren von S entlang $c(t)$: $n(c(t))$. Dann ergibt sich die Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} n(c(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} n(u(t), v(t)) = \frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} \\ &= n_u \frac{\partial u}{\partial t} + n_v \frac{\partial v}{\partial t} = n_u u' + n_v v' \end{aligned}$$

Bemerkung 5.4.6 (Zwischenbemerkung). Für differenzierbare Kurven $a(t), b(t)$ in $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle a(t), b(t)\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a_1(t)b_1(t) + a_2(t)b_2(t) + a_3(t)b_3(t)\right) \\ &= a_1'b_1 + a_1b_1' + a_2'b_2 + a_2b_2' + a_3'b_3 + a_3b_3' \\ &= \langle a'(t), b(t)\rangle + \langle a(t), b'(t)\rangle = \langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t), b(t)\rangle + \langle a(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b(t)\rangle. \end{aligned}$$

Es ist $\langle n(t), n(t)\rangle = \|n(t)\|^2 = 1$, also

$$\langle n_u, n\rangle = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\langle n, n\rangle = 0$$
$$\text{und } \langle n_v, n\rangle = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\langle n, n\rangle = 0.$$

n_u ist also durch die Komponenten des Skalarprodukts bestimmt:

$$\langle n_u, x_u\rangle = -\langle n, x_{uu}\rangle \quad \text{und} \quad \langle n_u, x_v\rangle = -\langle n, x_{uv}\rangle$$

wobei

$$x_{uu} := \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}u^2}, \quad x_{uv} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}u \mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}v \mathrm{d}u} = x_{vu}$$

Diese Formeln motivieren folgende Definition:

Diese Formeln motivieren folgende Definition:

Definition 5.4.7 (2. Fundamentalform). Die **2. Fundamentalform** einer regulären (orientierbaren) Fläche S ist eine Familie von Bilinearformen $\{\mathrm{II}_p : p \in S\}$, die für eine Parametrisierung $x : U \to S$ (bezüglich der Basen $\{x_u, x_v\}$ von $T_{x(u,v)}S$) gegeben ist durch die symmetrischen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} L(u,v) & M(u,v) \\ M(u,v) & N(u,v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n\rangle & \langle x_{uv}, n\rangle \\ \langle x_{vu}, n\rangle & \langle x_{vv}, n\rangle \end{pmatrix}$$

Hinweis: II_p ist symmetrisch, aber im Allgemeinen <u>nicht</u> positiv definit.

Beispiel 5.4.8 (zur zweiten Fundamentalform).

1. *Ebene*: $x_u = a$, $x_v = b$, $x_{uu} = 0$, $x_{uv} = 0$, $x_{vv} = 0$.
   Also ist $\mathrm{II}_p = 0$ für alle $p \in S \cong$ Ebene.
2. *Zylinder*:

$$x(u,v) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ v \end{smallmatrix}\right), \; x_u = \left(\begin{smallmatrix} -r\sin u \\ r\cos u \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \; x_v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),$$
$$x_{uu} = \left(\begin{smallmatrix} -r\cos u \\ -r\sin u, 0 \end{smallmatrix}\right), \; x_{uv} = x_{vu} = x_{vv} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \text{ also}$$

$$\mathrm{II}_{x(u,v)} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.5 Gauß-Krümmung

Definition 5.5.1 (Gauß-Krümmung). Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$. Die **Gauß-Krümmung** von S ist die Funktion

$$\kappa : S \ni p \mapsto \kappa(p) := \frac{\det \mathrm{II}_p}{\det \mathrm{I}_p} \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 5.5.2 (Invarianz Gauß-Krümmung). κ ist invariant unter Parameterwahl.

Beweis. Seien $x, \overline{x}$ lokale Parametrisierungen von S um $p \in S$. Sei $\varphi := \overline{x}^{-1} \circ x$ der Parameterwechsel.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_p &= \begin{pmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_v, x_u \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{pmatrix} = J_x^\top J_x \\
\mathrm{II}_p &= \begin{pmatrix} \langle x_{uu}, n \rangle & \langle x_{uv}, n \rangle \\ \langle x_{vu}, n \rangle & \langle x_{vv}, n \rangle \end{pmatrix} = -J_x^\top J_n
\end{aligned}$$

Es ist $J_x = J_{\overline{x} \circ \varphi} = J_{\overline{x}} J_\varphi$, $J_n = J_{\overline{n} \circ \varphi} = J_{\overline{n}} J_\varphi$, also ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_p &= J_x^\top J_x = (J_{\overline{x}} J_\varphi)^\top J_{\overline{x}} J_\varphi = J_{\overline{x}}^\top J_\varphi^\top J_{\overline{x}} J_\varphi = J_\varphi^\top \overline{\mathrm{I}}_p J_\varphi \\
\mathrm{II}_p &= J_x^\top J_x = \cdots = J_\varphi^\top \overline{\mathrm{II}}_p J_\varphi
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\det \mathrm{II}_p}{\det \mathrm{I}_p} = \frac{\det \overline{\mathrm{II}}_p}{\det \overline{\mathrm{I}}_p}$$

□

Beispiel 5.5.3 (Gauß-Krümmung).

1. *Fläche*:

$$\begin{aligned}
x(u,v) &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x_u \wedge x_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = n, \; x_{uu} = x_{uv} = x_{vv} = 0
\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \kappa = 0.$$

2. *Zylinder*:

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ v \end{pmatrix}, \; x_u = \begin{pmatrix} -r\sin u \\ r\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_u \wedge x_v = \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, n = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, x_{uu} = \begin{pmatrix} -r\cos u \\ -r\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, x_{uv} = x_{vv} = 0$$

Also ist

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & \cos^2(u)r^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \kappa = 0.$$

3. *Kugel*: $(u,v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$,

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos u\cos v \\ r\cos u\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix}, \; x_u = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix}, \; x_v = \begin{pmatrix} -r\cos u\sin v \\ r\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_u \wedge x_v = -r^2\cos u \begin{pmatrix} \cos u\cos v \\ \cos u\sin v \\ \sin u \end{pmatrix}, \; n = \begin{pmatrix} -\cos u\cos v \\ -\cos u\sin v \\ -\sin u \end{pmatrix},$$

$$x_{uu} = \begin{pmatrix} -r\cos u\cos v \\ -r\cos u\sin v \\ -r\sin u \end{pmatrix} = -x, \; x_{uv} = \begin{pmatrix} r\sin u\sin v \\ -r\sin u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_{vv} = \begin{pmatrix} -r\cos u\cos v \\ -r\cos u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & \cos^2(u)r^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \cos^2(u)r^2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \kappa = \frac{r^2\cos^2 u}{r^4\cos^2 u} = \frac{1}{r^2}$$

Satz 5.5.4 (theorem egregium, Gauß 1827). Die Grauß-Krümmung κ einer regulären Fläche S ist eine Größe der inneren Geometrie von S, also kann κ aus den Funktionen E, F und G bzw. deren Ableitungen berechnet werden.

Satz 5.5.5 (Satz von Bertrand-Puiseux, 1848). Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Für hinreichend kleine $r > 0$ ist

$$S_r(p) := \{q \in S : d(p,q) = r\}$$

eine geschlossene, differenzierbare Kurve der Länge $L(S_r(p))$. Dann gilt:

$$\kappa(p) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi r^3}(2\pi r - L(S_r(p))).$$

5.6 Der Satz von Gauß-Bonnet — lokale Version

Definition 5.6.1 (Kovariante Ableitung). Gegeben sei eine lokale Parametrisierung $x : U \to S$. Sei $a : U \to \mathbb{R}^3$ ein tangentiales Vektorfeld auf S, also

$$a(u,v) \in T_{x(u,v)}S \quad \forall (u,v) \in U.$$

Insbesondere ist $a \perp n$.
Im Allgemeinen ist $a_u(u,v) := \frac{\partial a(u,v)}{\partial u} \notin T_{x(u,v)}S$, daher definiert man die **kovariante Ableitung** von a nach u als

$$D_u a := a_u - \langle n, a_u \rangle n.$$

Dies ist die Komponente von a_u in Tangentialrichtung, also die Orthogonalprojektion von a_u auf $T_{x(u,v)}S$.
Da $n \perp a$ ist, ist $\langle n, a \rangle = 0$, also

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\langle n, a \rangle = \langle n_u, a \rangle + \langle n, a_u \rangle,$$

also ist

$$D_u a = a_u + \langle n_u, a \rangle n.$$

Definition 5.6.2 (Geodätische Krümmung).
Sei $c(s) := x(u(s), v(s))$ eine Flächenkurve, ohne Einschränkung sei c nach Bogenlänge parametrisiert, also $||\frac{\partial c}{\partial s}(s)|| = 1$. Nun gilt $\langle c', c' \rangle = ||c'||^2 = 1$, also ist

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle c', c' \rangle = \langle c'', c' \rangle = \langle c'', c' \rangle + \langle c', c'' \rangle = 2\langle c', c'' \rangle,$$

also ist $c' \perp c''$. c' ist Tangentialvektor, also $c' \perp n$.
Da c' und n orthogonale Einheitsvektoren sind, ist $\{c', n \wedge c', n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Bezüglich dieser Basis können wir c'' jetzt aufspalten:

$$c''(s) = \underset{c'' \perp c'}{0} \cdot c'(s) + \kappa_g(s)(n(s) \wedge c'(s)) + \alpha(s) n(s).$$

Wir bezeichnen $\kappa_g(s)$ als **geodätische Krümmung** von c in $c(s)$.
“Linkskurven” haben positive geodätische Krümmung, “Rechtskurven” negative, wobei “oben” durch den Normalenvektor bestimmt wird.
Durchläuft man c rückwärts, so kehrt sich das Vorzeichen von κ_g um[2].

Es folgen nun einige Lemmas, die als Vorbereitung für den Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet benötigt werden.

[2] siehe Übungsblatt

Lemma 5.6.3 (Formel von Stokes). Sei $\widetilde{G}$ ein ebenes Gebiet mit differenzierbarem Rand $\delta\widetilde{G}$. Seien $P, Q : \widetilde{G} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann:

$$\oint_{\delta(\widetilde{G})} Pu + Qv\mathrm{d}s = \iint_{\widetilde{G}} (Qu - Pv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Beweis. ohne Beweis.

Lemma 5.6.4.

1. Für ein Einheitstangentenvektorfeld

   $$e : S \ni p \mapsto e(p) \in T_pS \quad (\text{also } e(p) \in \mathbb{R}^3)$$

   längs S gilt:

   $$\langle D_u e, e\rangle = 0.$$

2. Es ist

   $$D_u(f\underset{\substack{\text{Normalen-}\\\text{vektorfeld}}}{n}) = fn_u \quad (f : U \to \mathbb{R}\ C^\infty).$$

Beweis.

1. Es ist

   $$\begin{aligned}\langle e, e\rangle = 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}\langle e, e\rangle &= 0\\ &= 2\langle \frac{\partial e}{\partial u}, e\rangle = 2\langle D_u e + \alpha n, e\rangle,\end{aligned}$$

   also $0 = \langle D_u e, e\rangle + \underbrace{\langle \alpha n, e\rangle}_{=0} = \langle D_u e, e\rangle = 0.$ □

2. Es ist

   $$D_u(fn) = (fn)_u - \langle (fn)_u, n\rangle \underset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} \overset{\text{normal}}{f_u n} + \overset{\text{tangential}}{fn_u} - \overset{\text{normal}}{\langle (fn)_u, n\rangle}.$$

   Vergleich der Tantential-Anteile ergibt Behauptung: $D_u(fn) = fn_u$. □

Lemma 5.6.5. Sei $a : U \to \mathbb{R}^3$ ein tangentiales Vektorfeld längs S. Dann ist

$$(D_v D_u - D_u D_v)a = (K\sqrt{EG - F^2})(n \wedge a).$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
D_v D_u a &= D_v(a_u + \langle n_u, a\rangle n) = D_v a_u + d_v(\langle n_u, a\rangle n) \\
&= a_{uv} - \langle n, a_{uv}\rangle n + D_v(\underbrace{\langle n_u, a\rangle n}_{=f\cdot n}) \\
&\underset{\text{L2}}{=} a_{uv} - \langle n, a_{uv}\rangle n + f_{uv} \\
&\Rightarrow (D_v D_u - D_u D_v)a = \underbrace{\langle n_u, a\rangle n_v}_{f_v} - \langle n_v, a\rangle n_u \overset{(\star)}{=} (n_u \wedge n_v) \wedge a.
\end{aligned}
$$

$(\star)$: für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ist $\langle b, a\rangle c - \langle c, a\rangle b = (b \wedge c) \wedge a$.
Also ist $\langle a \wedge b, c \wedge d\rangle = \langle a, c\rangle \langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle \langle b, c\rangle$.

Es ist $n_u \wedge n_v = \underset{\in\mathbb{R}}{\lambda}$, also ist zu zeigen, dass $\lambda = K\sqrt{EG - F^2}$:

$$
\langle \lambda n, x_u \wedge x_v\rangle = \langle n_u \wedge n_v, x_u \wedge x_v\rangle \overset{(\star)}{=} \langle n_u, x_u\rangle \langle n_v, x_v\rangle - \langle n_u, x_v\rangle \langle n_v, x_u\rangle = LN - M^2
$$

$$
\langle n, x_u \wedge x_v\rangle = \left\langle \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}, x_u \wedge x_v \right\rangle = \|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{EG - F^2}, \text{ also}
$$

$$
\Rightarrow \lambda\sqrt{EG - F^2} = LN - M^2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}(EG - F^2) = K(EG - F^2), \text{ also}
$$

$$
\lambda = K\sqrt{EG - F^2}.
$$

□

Satz 5.6.6 (Satz von Gauß-Bonnet — lokale Version).
Sei S eine reguläre Fläche, $x : U \to S$ lokale Parametrisierung.
Sei $G \subseteq x(U) \subset S$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit differenzierbarem Rand $\delta(G)$.
$c(s) := x(u(s), v(s))$ beschreibe δG und die Kurve $s \mapsto (u(s), v(s))$ beschreibe $x^{-1}(\delta G) \subset U$. Dann gilt:

$$
\int_{\delta(G)} \kappa_g(s)\mathrm{d}s + \iint_G K\mathrm{d}A = 2\pi.
$$

Explizit

$$
\int_{\delta G} \kappa_g(s)\mathrm{d}s = \int_{x^{-1}(\delta G)} \kappa_g(s)\mathrm{d}s,
$$

$$
\iint_G D\mathrm{d}A = \iint_{x^{-1}(G)} K\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.
$$

Beweis. Definiere ein “Bezugs-Vektorfeld” auf $x(U) \subset S$: $e := \frac{x_u}{\|x_u\|}$. Da $\|e\| = 1$ folgt $D_u e \perp$

e (L2a). Weiter ist nach Definition $e \perp n$, also $D_u e$ parallel zu $n \wedge e$. Also $D_u e =: P(n \wedge e)$ für eine C^∞-Funktion $P : U \to \mathbb{R}$. Analog $D_v e =: Q(n \wedge e)$ für C^∞-Funktion $Q : U \to \mathbb{R}$. Sei jetzt $c(s) = x(u(s), v(s))$ die mit Bogenlänge parametrisierte Kurve, die δG beschreibt. Betrachte e längs c: $e(s) := e(c(s))$. Dann

$$e' = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}s} = e_u u' + e_v v'.$$

Wegen $e_u = D_u e + \langle e_u, n\rangle\, n$ ist

$$P = \langle D_u e, n \wedge e\rangle = \langle e_u, n \wedge e\rangle\,, \text{ analog}$$
$$Q = \langle e_v, n \wedge e\rangle\,.$$

Wir betrachten jetzt die linke Seite der Stokesschen Formel. Wir erhalten

$$\int_{\delta G} = (Pu' + Qv')\mathrm{d}s = \int_{\delta G} \left\langle \underbrace{e_u u' + e_v v'}_{=e'}, n \wedge e \right\rangle \mathrm{d}s = \int_{\delta G} \left\langle e', n \wedge e\right\rangle \mathrm{d}s. \tag{5.1}$$

Da $\left\|c'\right\| = 1$ können wir schreiben

$$c'(s) = \cos\theta(s) e(s) + \sin\theta(s)(n \wedge e). \tag{5.2}$$

Weiter ist

$$c''(s) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} c(s) = \kappa_g (n \wedge e') + \alpha n = \alpha n + \kappa_g(\cos\theta(n \wedge e)) + \sin\theta(n \wedge (n \wedge e))e,$$

also

$$\left\langle c'', n \wedge e\right\rangle = \kappa_g \cos\theta. \tag{5.3}$$

Aus Gleichung 5.1 ergibt sich:

$$c'' = \cos\theta e' + (\cos\theta)' e + \sin\theta(n \wedge e)' + (\sin\theta)'(n \wedge e),$$

also

$$\left\langle c'', n \wedge e\right\rangle = \cos\theta \left\langle e', n \wedge e\right\rangle + (\sin\theta)' = \cos\theta \left(\left\langle e', n \wedge e\right\rangle + \theta'\right). \tag{5.4}$$

Vergleich von Gleichung 5.3 und Gleichung 5.4 ergibt $\kappa_g = \left\langle e', n \wedge e\right\rangle + \theta'$ und somit wegen Gleichung 5.1:

$$\int_{\delta G} (Pu' + Qv')\mathrm{d}s = \int_{\delta G} \kappa_g \mathrm{d}s - \int_{\delta G} \kappa_g \mathrm{d}s - \theta(s)|_0^{2\pi} = \int_{\delta G} \kappa_g \mathrm{d}s - 2\pi.$$

Betrachte jetzt die rechte Seite von Lemma 1. Es ist

$$D_v D_u e \overset{\mathrm{Def}\,P}{=} D_v(P(n \wedge e)) = P_v(n \wedge e) + P(n \wedge e)v - \underbrace{\text{Normalkomp. von } [\cdots]}_{=:\beta_n} \overset{(\star\star)}{=} P_v(n \wedge e) + P(n \wedge e_v).$$

$(\star\star)$: $(n \wedge e)_v = \underbrace{n_v \wedge e}_{\text{normal}} + \underbrace{n \wedge e_v}_{\text{tangential}}$, also $(n \wedge e)_v = 0$.
Weiter ist $n \wedge e_v = n \wedge D_v e$ (da $D_v e = e_v + \alpha n$ und $n \wedge n = 0$). Also:

$$D_v D_u e = P_v(n \wedge e) + P(n \wedge D_v e) \overset{\mathrm{Def}\,Q}{=} P_v(n \wedge e) + P(n \wedge Q(n \wedge e)) = P_v(n \wedge e) + PQ(n \wedge n \wedge e).$$

Vertauschen von u, v und Subtrahieren ergibt

$$(D_u D_v - D_v D_u)e = (P_v - Q_u)n \wedge e = (K\sqrt{EG - F^2})n \wedge e.$$

Somit

$$\begin{aligned} (P_v - Q_u) &= K\sqrt{EG - F^2} \text{ und} \\ (P_v - Q_u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= K\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = K\mathrm{d}A. \end{aligned}$$

Also ist die rechte Seite von Stokes:

$$\iint (Q_u - P_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\iint K\mathrm{d}A.$$

□

Bemerkung 5.6.7 (Bemerkungen zu Gauß-Bonnet).

1. Im Beweis kommt folgender Term vor:

   $$\int_{\delta G} \theta' \mathrm{d}s = \theta|_0^L = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi.$$

   emph: $\theta(s)$ ist eindeutig, falls $\theta(s) \in [0, 2\pi)$. Dann gilt $\theta(0) = \theta(L)$.
   Man benötigt eine Winkelfunktion $\theta : [0, L] \to \mathbb{R}$ und muss dann zeigen, dass für einfach geschlossene Kurven gilt: $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi$.
   Das ist nicht trivial und Inhalt des sogenannten "Umlaufsatzes von Hopf".
2. *Was misst die geodätische Krümmung?*
   Sei beispielsweise S = Ebene. Welche Kurven $c \in S$ haben $\kappa_g = 0$? Es ist

   $$\kappa_g = 0 \Leftrightarrow c'' || n \Leftrightarrow c'' \perp \text{ Tangentialebene } T_{c(s)}S.$$

   Für eine Kurve in S = Ebene ist $c' \in T_{c(s)}S = T_{c(s)}E = E$. Ebenso ist $c'' \in E$.

   $$\begin{aligned} \text{Also } c'' \perp E &\Leftrightarrow c'' = 0 \\ &\underset{\text{2-mal integrieren}}{\Leftrightarrow c =} \text{ parametrisierte Gerade.} \end{aligned}$$

Definition 5.6.8 (Geodätische). Eine Flächenkurve mit $\kappa_g = 0$ heißt **Geodätische** (Analogon zu Geraden auf krummen Flächen). Man kann zeigen: Geodätische sind lokal kürzeste Verbindungen.

Beispiel 5.6.9 (Geodätische).

1. *Kugel*: $S = S_R^2$. Mit Bogenlänge parametrisierte Großkreise sind Geodätische (ha-

ben also $\kappa_g = 0$).
Denn: $c'' \| n$. $\left\|c'\right\|^2 = 1 \Leftrightarrow \left\langle c', c'\right\rangle = 1 \underset{\text{ableiten}}{\Rightarrow} 2\left\langle c', c''\right\rangle = 0$.

2. *Zylinder*: $x(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$.
   $c(s) = (\cos(as), \sin(as), bs)$, also Bilder unter x von $(u(s), v(s)) = (as, bs)$ (= Gerade im Parametergebiet U). Also

$$c'(s) = (-a\sin(as), a\cos(as), b)\,.$$

s = Bogenlänge $\Leftrightarrow \left\|c'(s)\right\| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$. Es ist

$$c''(s) = \left(-a^2\cos(as), -a^2\sin(as), 0\right),$$

also $c'' \| n$, also ist $c(s)$ Geodätische. Es ist:

$$\begin{aligned} a = 0,\ b = 1 &\Rightarrow \text{ Mantellinie} \\ a = 1,\ b = 0 &\Rightarrow \text{ Breitenkreis} \\ \text{sonst } &\Rightarrow \text{ Schraubenkurve} \end{aligned}$$

5.7 Gauß-Bonnet — 2. lokale Version für "Gebiete mit Ecken"

Sei G ein Gebiet mit nur stückweise glattem Rand, m Ecken bei $c(t_i)$ ($i = 1, \ldots, m$). Es sei $c'(t_i^+)$ die rechtsseitige und $c'(t_i^-)$ die linksseitige Ableitung bei t_i. Es sei δ_i der Außenwinkel zwischen den beiden Tangenten an $c(t_i)$.
Sowohl Satz als auch Beweis der zweiten lokalen Version ähneln der ersten — anstelle des Terms

$$\int_{\delta G} \theta' \mathrm{d}s = 2\pi \quad \text{kommt} \quad \int_{\delta G} \theta' \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 2\pi \quad \text{(Umlaufsatz).}$$

Mit $\alpha_i := \pi - \delta_i$ (*Innenwinkel*) für $i = 1, \ldots, m$ ergibt sich

$$\iint_G K \mathrm{d}A + \iint_{\delta G} \kappa_g \mathrm{d}s = \pi(2 - m) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.$$

Bemerkung 5.7.1 (Spezialfall). Gauß-Bonnet für geodätische Dreiecke mit Innenwinkel α, β, γ (also G = Dreieck mit geodätischen Segmenten als Randkurven):

$$\iint_\triangle K \mathrm{d}A = \alpha + \beta + \gamma - 2\pi.$$

Bemerkung 5.7.2 (Spezialfälle des Spezialfalls).

1. S = Ebene, also $K \equiv 0 \rightsquigarrow$ Gauß-Bonnet in Ebene:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

2. $S = S_1^2$ = Einheitssphäre hat $K \equiv 1$. Sei $\triangle$ = geodätisches Dreieck auf S:

$$\underbrace{\iint_\triangle 1 \mathrm{d}A}_{\text{Flächeninhalt } \triangle} + 0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

   Der Flächeninhalt des (unentarteten) Dreiecks ist > 0, also $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Deswegen sehen Dreiecke auf der Einheitssphäre so fett aus.

3. Flächen mit $K \equiv -1$, z.B. Rotationsfläche einer Traktix (Schleppkurve):

$$\underbrace{\iint_\triangle -1 \mathrm{d}A}_{<0} + 0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

   Das Integral ist < 0, also $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Deswegen sehen Dreiecke auf solchen Flächen so dünn aus.

5.8 Satz von Gauß-Bonnet — globale Version

Satz 5.8.1 (Klassifikationssatz für 2-Mannigfaltigkeiten). Eine kompakte randlose 2-Mannigfaltigkeit ist entweder zu einer Sphäre S^2, zu einer zusammenhängenden Summe von g Tori (falls M orientierbar ist) oder zu einer zusammenhängenden Summe von g projektiven Ebenen (falls M nicht orientierbar ist) homöomorph.
Weiter sind kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten mit gleichem g homöomorph. g ist also eine topologische Invariante, das sog. **Geschlecht** der 2-Mannigfaltigkeit.

Beweis. ohne Beweis. Siehe z.B. Messey, Algebraic Topology.

Definition 5.8.2 (Triangulierung — Approximation durch Simplizialkomplexe). Es sei M eine kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit. eine **Triangulierung** von M ist eine endliche Familie

$$\sigma_k : \underset{\substack{\text{Standard} \\ \text{2-Simplex}}}{\triangle} \mapsto \sigma_k(\triangle) \subset M \quad k = 1, \ldots, m$$

von (orientierungserhaltenden) Diffeomorphismen, für die gilt:

1. Die Simplices $\sigma_k(\triangle)$ bilden eine Überdeckung von M:

$$M = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k(\triangle)$$

2. Ist $\sigma_k(\triangle) \cap \sigma_j(\triangle) \neq \varnothing$ $(k \neq j)$, so haben $\sigma_k(\triangle)$ und $\sigma_j(\triangle)$ entweder genau eine Kante oder genau eine Ecke gemeinsam.

Die **Euler-Charakteristik** einer Triangulierung T von M ist definiert als

$$\chi_T(M) := \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen}.$$

Satz 5.8.3 (Euler-Charakteristik und Geschlecht).

1. $\chi(M) := \chi_T(M)$ ist unabhängig von der Wahl der Triangulierung.
2. Es gilt

$$\chi_T(M) = 2 - 2g \quad (g = \text{ Geschlecht von } M)$$

Insbesondere gilt nach dem Klassifikationssatz, dass $\chi(M)$ eine topologische Invariante ist.

Beweis. Beweisskizze.

1. Folgt aus dem Satz von Gauß-Bonnet, mehr dazu später.
2. Es ist $\chi(T^2) = 0$. Nehmen wir ein Dreieck heraus, so ist $\chi(T^2 \setminus \dot{\triangle}) = \chi(T^2) - 1 = -1$. Es ist also

$$\chi(T^2 \# T^2) = -2 = 2 - 2 \cdot 2.$$

Mit Induktion:

$$\chi(\underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_{k \text{ Summanden}}) = 2 - 2g.$$

Satz 5.8.4 (Beinhalten von Triangulierungen). Jede kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit gegebenem Atlas $\mathcal{A}$ besitzt eine Triangulierung

$$\sigma_k : \delta \to M, \quad k = 1, \ldots, m,$$

sodass jedes Simplex $\sigma_k(\triangle)$ ganz im Definitionsbereich einer Karte (also dem Bild einer Parametrisierung) von $\mathcal{A}$ enthalten ist.
Dieser Satz erlaubt den Übergang vom lokalen Gauß-Bonnet-Satz zum globalen.

Satz 5.8.5 (Globaler Satz von Gauß-Bonnet). Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte randlose orientierbare Fläche. Dann gilt:

$$\overbrace{\iint_S K \mathrm{d}A}^{\text{geometrische Größe}} = \underbrace{2\pi\chi(S)}_{=2\pi(2-g),\ \text{topologische Größe}}.$$

Beweis. Wähle eine Triangulierung $\sigma_j : \triangle \to S$ $(j = 1, \ldots, f)$ sodass alle Dreiecke $\sigma_j(\triangle)$ ganz in einem Kartengebiet $x_j(U_j)$ liegen. Wie orientieren die Ränder der Dreiecke, sodass sie mit der Orientierung von S übereinstimmen.
Sei $e :=$ # Ecken, $k :=$ # Kanten, $f :=$ # Flächen.
Aus der lokalen Version des Satzes von Gauß-Bonnet folgt, dass für jedes Dreieck gilt:

$$\iint_{\sigma_j(\triangle)} K \mathrm{d}A = -\int_{\delta(\sigma_j(\triangle))} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{(j)} - \pi$$

Summieren über $j = 1, \ldots, f$ ergibt:

$$\iint_S K \mathrm{d}A = \sum_{j=1}^{f} \iint_{\sigma_j(\triangle)} K \mathrm{d}A = -\sum_{j=1}^{f} \int_{\delta(\sigma_j(\triangle))} \kappa_g \mathrm{d}s + e \cdot 2\pi + f \cdot \pi.$$

Jede Dreieckskante erscheint in dieser Summe 2 mal, aber gegenläufig orientiert. Da die geodätische Krümmung das Vorzeichen ändert, wenn die Kurven/Kanten gegenläufig durchlaufen werden, hebt sich der κ_g-Term auf — also:

$$\iint_S K \mathrm{d}A = e \cdot 2\pi + f \cdot \pi$$

Jede Dreiecksfläche hat 3 Kanten, jede Kante berandet 2 Dreiecksflächen, also $3f = 2k$ und somit

$$\iint_S K \mathrm{d}A = 2\pi e - f\pi = 2\pi(e - \frac{3}{2}f + f) = 2\pi(e - k + f) = 2\pi\chi(S).$$

□

Bemerkung 5.8.6. Der Satz gilt allgemein für kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten, die nicht unbedingt in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet sein müssen. Dazu muss man die Begriffe wie Tangentialebene, erste Fundamentalform, Krümmung usw. verallgemeinern (siehe Vorlesung Differentialgeometrie).
Die Topologie schränkt die Möglichkeiten für die Geometrie ein (und umgekehrt) — beispielsweise gilt, dass die meisten Flächen negative Euler-Charakteristik haben. Also kann die Krümmung nicht überall ≥ 0 sein. Ist beispielsweise $K \equiv 0$, so muss $\chi(S) = 0 \Leftrightarrow g = 1$ gelten.

6

Nichteuklidische Geometrie — Hyperbolische Ebene

Die euklidische Geometrie verfolgt einen axiomatischen Zugang — es ist beispielsweise nicht näher definiert, was ein Punkt ist. Genauso gibt es das Parallelen-Axiom, welches besagt, dass es zu einer gegebenen Gerade g und einem Punkt P, der nicht auf dieser Geraden liegt, genau eine Gerade gibt, die parallel zu g ist und P beinhaltet. Es wurde lange versucht, das Parallelen-Axiom aus anderen Axiomen zu konstruieren, allerdings gelang das nicht.
Um 1900 wurde von Poincaré und Klein die hyperbolische Ebene formalisiert.

Definition 6.0.1 (Hyperbolische Ebene). Es sei $H^2 := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\right\}$ die obere Halbebene. Es seien

- **Punkte** die Elemente in H^2 und
- **Geraden** die Halbkreise mit Zentrum auf der x_1-Achse und die Parallelen zur x_2-Achse.

Leicht lässt sich zeigen, dass es wie in der euklidischen Geometrie auf der hyperbolischen Ebene eine Gerade zwischen zwei beliebiegen Punkten gibt. Allerdings ist diese Gerade hier im Allgemeinen nicht eindeutig. Das Parallelen-Axiom gilt auf der hyperbolischen Ebene nicht, da hier zu gegebener Gerade g und Punkt P mehrere Geraden $\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}, \ldots$ gefunden werden können, sodass

$$\widetilde{g_1} \cap g = \widetilde{g_2} \cap g = \cdots = \varnothing.$$