Fraktale Bildcodierung

Jens Ochsenmeier

Inhalt des Vortrags ist …

Recap — bisherige Themen

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer reellwertigen Funktion $X \times X \to \mathbb{R}$. Diese misst den Abstand zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ und muss dazu folgende Axiome erfüllen ($x, y, z \in X$):

1. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
2. **Positive Definitheit**: $0 \leq d(x, y)$ und $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Mithilfe von Cauchy-Folgen lassen sich nun vollständige metrische Räume konstruieren. Insbesondere brauchen wir kompakte metrische Räume, eine Teilmenge der vollständigen metrischen Räume.

"Raum der Fraktale"

Für eine gegebene Menge X bezeichnen wir zunächst die Menge aller kompakten Teilmengen von X mit $\mathcal{H}(X)$. Die leere Menge schließen wir hierbei aus.

Um mit $\mathcal{H}(X)$ arbeiten zu können definieren wir passende Abstandsbegriffe:

- $d(x, A) = \min \{d(x, a) : a \in A\}$ ($x \in X$, $A \in \mathcal{H}(X)$) sei der Abstand zwischen einem Punkt $x \in X$ und einem Element A von $\mathcal{H}(X)$.
- $d(A, B) = \max \{d(x, B) : x \in A\}$ sei der Abstand zwischen zwei Mengen in $\mathcal{H}(X)$.

Mithilfe dieser Abstandsbegriffe konstruieren wir die Hausdorff-Distanz zwischen zwei Mengen $A, B \in \mathcal{H}(X)$ durch

$$h(A, B) := \max \{d(A, B),\ d(B, A)\}.$$

Die Hausdorff-Distanz bildet eine Metrik auf $\mathcal{H}(X)$.

Wir erhalten den Raum der Fraktale

$$(\mathcal{H}(X), h).$$

Für uns ist — zumindest vorerst — jede Teilmenge von $(\mathcal{H}(X), h)$ ein Fraktal. Weiter kann gezeigt werden, dass folgender zentraler Satz über den Raum der Fraktale gilt:

Vollständigkeit des Raums der Fraktale

Es gilt

$$\begin{aligned} &(X, d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum} \\ \Rightarrow\ &(\mathcal{H}(X), h) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum.} \end{aligned}$$

Kontraktionen

Eine Kontraktion ist eine spezielle Abbildung $\varphi : X \to X$, für die ein $c \in [0, 1)$ existiert, sodass

$$\forall x, y \in X : d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

c wird hier als Kontraktionsfaktor bezeichnet. Eine Kontraktion zieht eine Menge "in sich selbst zusammen" — mindestens so stark wie eine zentrische Streckung mit festem Streckungsfaktor $c < 1$.

Ein wichtiger Sonderfall einer Kontraktion liegt vor, wenn

$$\forall x, y \in X : d(\varphi(x), \varphi(y)) = c \cdot d(x, y).$$

Eine solche Kontraktion wird Ähnlichkeitsabbildung genannt, c heißt hier Kontraktionsverhältnis.

Banachscher Fixpunktsatz

Ein wichtiges Resultat an dieser Stelle ist der banachsche Fixpunktsatz. Er besagt, dass für eine Kontraktion φ (wie oben) und eine iterativ definierte Folge

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

für einen *beliebigen* Startwert x_0 genau ein $\tilde{x} \in X$ existiert, sodass $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}.$$

Dieser Fixpunkt $\tilde{x}$ ist also der Grenzwert der obigen Iteration, unabhängig vom gewählten Startwert!

(Affine) Transformationen

Aus den Vorlesungen über Lineare Algebra sind lineare Transformationen bekannt. Sie bilden Geraden auf Geraden ab und fixieren den Ursprung. Dargestellt werden können sie durch die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix:

$$t : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Eine (2-dimensionale) affine Transformation $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung, die durch

$$w(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + e \\ cx_1 + dx_2 + f \end{pmatrix}$$

für feste $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ beschrieben werden kann. Eine affine Transformation setzt sich also aus einer linearen Transformation und einer Translation zusammen.

Eine praktische und übliche Notation ist

$$w(x) = Ax + t \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Konstruktion einer affinen Transformation

Sind eine Menge und eine affin transformierte Kopie dieser gegeben, so kann eine passende affine Transformation, die die Menge auf ihre Kopie abbildet, konstruiert werden, indem drei Punkte der Menge und jeweils die dazugehörige Kopie ermittelt werden.

Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)$ solche Punkte in der Menge und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2), (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ die zugehörigen Punkte in der Kopie.

Daraufhin lassen sich folgende Gleichungen lösen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix}$$

So lassen sich die 6 Parameter einer zugehörigen affinen Transformation bestimmen.

Iterierte Funktionensysteme (IFS)

Ein iteriertes Funktionensystem (IFS) ist Familie endlich vieler Kontraktionen auf einem vollständigen metrischen Raum, hier sei (X, d) ein solcher Raum und $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ eine solche Familie.

Der Kontraktionskoeffizient eines solchen IFS ist der größte Kontraktionsfaktor seiner Kontraktionen:

$$c = \max\{c_1, \dots, c_n\} \quad (c_i \coloneqq \text{Kontraktionsfaktor von } \Phi_i)$$

Erhält man durch Vereinigung der Bilder der Kontraktionen von einer festen Teilmenge $C \subset X$ wieder C, so ist C der Attraktor dieses IFS. Formal:

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_i(C).$$

Modellierung "echter" Bilder

Gegenstand dieses Vortrags ist die Codierung von Bildern mithilfe von Werkzeugen aus der fraktalen Geometrie. Aber was ist ein Bild eigentlich?

Barnsley modelliert solche Bilder entlang von fünf Eigenschaften, die ein Bild haben soll.

Die Menge aller echten Bilder

Grob beschrieben ist ein echtes Bild etwas, dass man irgendwo sehen oder sich zumindest zu sehen vorstellen könnte. Es sei $\mathcal{R}$ die Menge aller echten Bilder und $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ ein echtes Bild. Dieses muss folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Es besitzt einen Träger $\square = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und die Maße $(b - a)$ und $(d - c)$. Der Träger kann beispielsweise eine Tafel oder ein Blatt Papier sein, die Maße sind in einer festen Einheit, beispielsweise Meter.

   Durch den Träger wird ein Bild in den mit der Standardmetrik versehenen euklidischen Raum eingebettet, wodurch die bekannten Werkzeuge aus Geometrie und Topologie zur Verfügung stehen.

2. Es besitzt gewisse chromatische Werte. Ein chromatischer Wert ist eine Funktion

   $$c : \square \to \mathbb{R},$$

   die jedem Punkt des Bildes einen reellwertigen Wert zuordnet. Wir werden in diesem Vortrag nur Bilder in Graustufen betrachten, deswegen reicht für uns ein chromatischer Wert; die Helligkeit an einem bestimmten Punkt.

3. Einem Bild $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ ist *keine* Auflösung zugeordnet. Das heißt, dass es für beliebige, endliche Auflösungen beschrieben werden kann, und diese Beschreibungen dasselbe $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ beschreiben. Die Rasterung findet separat statt.

4. $\mathcal{R}$ ist unter Zuschneiden von Bildern abgeschlossen. Das bedeutet, dass ein fester Bereich $\tilde{\mathcal{I}}$ eines $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ ein eigenständiges Bild und somit $\in \mathcal{R}$ ist.

5. $\mathcal{R}$ ist unter invertierbaren affinen Transformationen abgeschlossen. Das bedeutet, dass kein $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ beliebig vergrößert, verkleinert, gestreckt, gespiegelt, gestaucht und repositioniert werden kann, sodass die Transformation nicht in $\mathcal{R}$ liegt.

Digitalisierung und Rasterung

Digitalisierung und Rasterung sollen in diesem Vortrag nicht näher besprochen werden. Hier werden $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ auf Pixel abgebildet, wozu Modelle aus verschiedenen mathematischen Bereichen zur Rasterung und Interpolation verwendet werden.

Collage-Theorem

Wir haben in anderen Vorträgen gesehen, dass mithilfe eines IFS komplexe Bilder mit nur wenigen Kontraktionen beschrieben werden können.

Idee ist nun, statt ein Bild aus einem vorgegebenen IFS zu generieren, ein möglichst passendes IFS für ein gegebenes Bild zu finden. Offensichtlich wird ein gegebenes Bild in der Regel keine erkennbare selbstähnliche Struktur besitzen. Das Collage-Theorem erlaubt die Konstruierung von iterierten Funktionensystemen, deren Attraktoren einem gegebenen Bild möglichst genau entsprechen.

Collage-Theorem

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $L \in \mathcal{H}(X)$, $\varepsilon \geq 0$.
Bestimme ein IFS $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ mit Kontraktionskoeffizient $0 \leq s < 1$ derart, dass

$$h\left(L, \bigcup_{i=0}^{n} \Phi_i(L)\right) \leq \varepsilon \quad (h\text{: Hausdorff-Metrik}).$$

Dann gilt:

$$h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s} \quad (A\text{: Attraktor des IFS}).$$

Um ein gegebenes Bild $L \in \mathcal{H}(X)$ durch den Attraktor eines IFS anzunähern, muss die Vereinigung ("Collage") der Kontraktionen des IFS, angewandt auf das gegebene Bild L, dem gegebenen Bild ähneln (im Sinne der Hausdorff-Metrik).

Beweis
Wir zeigen, dass in einem vollständigen metrischen Raum (X, d) für eine Kontraktion $f : X \to X$ mit einem Konstraktionsfaktor $0 \leq s < 1$ und einem Fixpunkt $\tilde{x} \in X$ gilt:

$$d(x, \tilde{x}) \leq \frac{d(x, f(x))}{1-s}.$$

Wir nutzen dazu die Stetigkeit der Abstandsfunktion. Es gilt also

$$\begin{aligned} d(x, \tilde{x}) &= d\left(x, \lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} d(x, f^n(x)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} d(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} d(x, f(x))(1 + s + \cdots + s^{n-1}) \\ &\leq \frac{d(x, f(x))}{1-s}. \end{aligned}$$

□

Stetige Abhängigkeit von Parametern

Ein weiterer wichtiger Satz zur Komprimierung von Bildern ist der Satz über die stetige Abhängigkeit des Attraktors eines IFS von den Parametern des IFS:

Stetige Abhängigkeit von Parametern

Es seien (P, d_P) ein metrischer und (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, außerdem sei $\Phi : P \times X \to X$ eine Familie von Kontraktionen auf X mit Kontraktionskoeffizient $0 \leq s < 1$. Für jedes $p \in P$ ist also $\Phi(p, \cdot)$ eine Kontraktion auf X.

Für jedes $x \in X$ sei Φ stetig auf P. Dann ist der Fixpunkt von Φ stetig abhängig von p.

Das heißt: $\tilde{x} : P \to X$ ist stetig.

Beweis

Sei $\tilde{x}(p)$ der Fixpunkt von Φ für festes $p \in P$. Es seien $p \in P$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt für alle $q \in P$:

$$d(\tilde{x}(p), \tilde{x}(q)) = d(\Phi(p, \tilde{x}(p)), \Phi(q, \tilde{x}(q)))$$

Page Layout

Headings

This style provides a- and b-heads (that is, `\section` and `\subsection`), demonstrated above.

The Tufte-LaTeX classes will emit an error if you try to use `\subsubsection` and smaller headings.

In his later books,[1] Tufte starts each section with a bit of vertical space, a non-indented paragraph, and sets the first few words of the sentence in small caps. To accomplish this using this style, use the `\newthought` command:

```
\newthought{In his later books}, Tufte starts...
```

[1] Edward R. Tufte. Beautiful Evidence. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7

Sidenotes

One of the most prominent and distinctive features of this style is the extensive use of sidenotes. There is a wide margin to provide ample room for sidenotes and small figures. Any `\footnotes` will automatically be converted to sidenotes.[2] If you'd like to place ancillary information in the margin without the sidenote mark (the superscript number), you can use the `\marginnote` command.

[2] This is a sidenote that was entered using the `\footnote` command.

This is a margin note. Notice that there isn't a number preceding the note, and there is no number in the main text where this note was written.

The specification of the `\sidenote` command is:

`\sidenote`[⟨*number*⟩][⟨*offset*⟩]{*Sidenote text.*}

Both the ⟨*number*⟩ and ⟨*offset*⟩ arguments are optional. If you provide a ⟨*number*⟩ argument, then that number will be used as the sidenote number. It will change of the number of the current sidenote only and will not affect the numbering sequence of subsequent sidenotes.

Sometimes a sidenote may run over the top of other text or graphics in the margin space. If this happens, you can adjust the vertical position of the sidenote by providing a dimension in the ⟨*offset*⟩ argument. Some examples of valid dimensions are:

`1.0in`   `2.54cm`   `254mm`   `6\baselineskip`

If the dimension is positive it will push the sidenote down the page; if the dimension is negative, it will move the sidenote up the page.

While both the ⟨*number*⟩ and ⟨*offset*⟩ arguments are optional, they must be provided in order. To adjust the vertical position of the sidenote while leaving the sidenote number alone, use the following syntax:

`\sidenote`[][⟨*offset*⟩]{*Sidenote text.*}

The empty brackets tell the `\sidenote` command to use the default sidenote number.

If you only want to change the sidenote number, however, you may completely omit the ⟨*offset*⟩ argument:

`\sidenote`[⟨*number*⟩]{*Sidenote text.*}

The `\marginnote` command has a similar *offset* argument:

`\marginnote`[⟨*offset*⟩]{*Margin note text.*}

References

References are placed alongside their citations as sidenotes, as well. This can be accomplished using the normal `\cite` command.[3]

[3] The first paragraph of this document includes a citation.

The complete list of references may also be printed automatically by using the `\bibliography` command. (See the end of this document for an example.) If you do not want to print a bibliography at the end of your document, use the `\nobibliography` command in its place.

To enter multiple citations at one location,[4] you can provide a list of keys separated by commas and the same optional vertical offset argument: `\cite{Tufte2006,Tufte1990}`.

[4] Edward R. Tufte. Beautiful Evidence. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7; and Edward R. Tufte. Envisioning Information. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8

`\cite`[⟨*offset*⟩]{*bibkey1,bibkey2,...*}

Figures and Tables

Images and graphics play an integral role in Tufte's work. In addition to the standard **figure** and **tabular** environments, this style provides special figure and table environments for full-width floats.

Full page–width figures and tables may be placed in **figure*** or **table*** environments. To place figures or tables in the margin, use the **marginfigure** or **margintable** environments as follows (see figure 1):

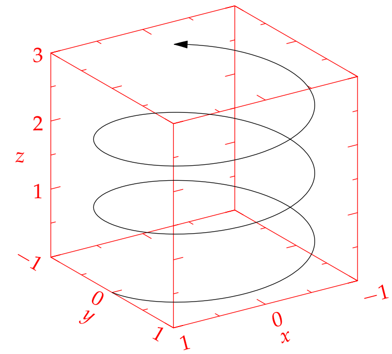

Abbildung 1: This is a margin figure. The helix is defined by $x = \cos(2\pi z)$, $y = \sin(2\pi z)$, and $z = [0, 2{,}7]$. The figure was drawn using Asymptote (http://asymptote.sf.net/).

```
\begin{marginfigure}
  \includegraphics{helix}
  \caption{This is a margin figure.}
\end{marginfigure}
```

The **marginfigure** and **margintable** environments accept an optional parameter ⟨*offset*⟩ that adjusts the vertical position of the figure or table. See the "Sidenotes" section above for examples. The specifications are:

```
 \begin{marginfigure}[⟨offset⟩]
    ...
  \end{marginfigure}

  \begin{margintable}[⟨offset⟩]
    ...
  \end{margintable}
```

Figure 2 is an example of the `figure*` environment and figure 3 is an example of the normal `figure` environment.

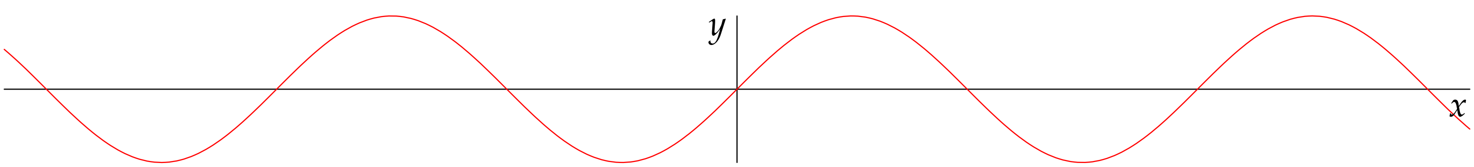

Abbildung 2: This graph shows $y = \sin x$ from about $x = [-10, 10]$. Notice that this figure takes up the full page width.

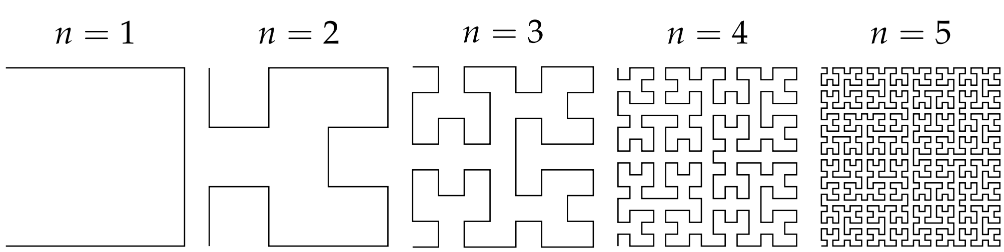

Abbildung 3: Hilbert curves of various degrees n. Notice that this figure only takes up the main textblock width.

Table 1 shows table created with the `booktabs` package. Notice the lack of vertical rules—they serve only to clutter the table's data.

Margin	Length
Paper width	8 1/2 inches
Paper height	11 inches
Textblock width	6 1/2 inches
Textblock/sidenote gutter	3/8 inches
Sidenote width	2 inches

Tabelle 1: Here are the dimensions of the various margins used in the Tufte-handout class.

Full-width text blocks

In addition to the new float types, there is a fullwidth environment that stretches across the main text block and the sidenotes area.

```
\begin{fullwidth}
Lorem ipsum dolor sit amet...
\end{fullwidth}
```

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Typography

Typefaces

If the Palatino, Helvetica, and `Bera Mono` typefaces are installed, this style will use them automatically. Otherwise, we'll fall back on the Computer Modern typefaces.

Letterspacing

This document class includes two new commands and some improvements on existing commands for letterspacing.

When setting strings of the letterspacing—that is, the spacing between the letters—should be increased slightly.[5] The `\allcaps` command has proper letterspacing for strings of These commands will also automatically convert the case of the text to upper- or lowercase, respectively.

[5] Robert Bringhurst. The Elements of Typography. Hartley & Marks, 3.1 edition, 2005. ISBN 0-88179-205-5

The `\textsc` command has also been redefined to include letterspacing. The case of the `\textsc` argument is left as is, however. This allows one to use both uppercase and lowercase letters: The Initial Letters Of The Words In This Sentence Are Capitalized.

Installation

To install the Tufte-LaTeX classes, simply drop the following files into the same directory as your `.tex` file:

```
tufte-book.cls
tufte-common.def
tufte-handout.cls
tufte.bst
```

More Documentation

For more documentation on the Tufte-LaTeX document classes (including commands not mentioned in this handout), please see the sample book.

Support

The website for the Tufte-LaTeX packages is located at `https://github.com/Tufte-LaTeX/tufte-latex`. On our website, you'll find links to our repository, mailing lists, bug tracker, and documentation.

Literatur

Robert Bringhurst. The Elements of Typography. Hartley & Marks, 3.1 edition, 2005. ISBN 0-88179-205-5.

Edward R. Tufte. Envisioning Information. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8.

Edward R. Tufte. Beautiful Evidence. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7.