Fraktale Bildcodierung

Jens Ochsenmeier

Inhalt des Vortrags ist

1. eine Übersicht über die bisher erlernten Werkzeuge, die für die theoretischen Grundlagen der fraktalen Bildcodierung benötigt werden,
2. das Collage-Theorem,
3. die stetige Abhängigkeit zwischen dem Attraktor eines IFS und den Parametern seiner Kontraktionen,
4. (TODO) die Erläuterung von einfachen fraktalen Bildcodierungen anhand der Quadtree-Methode,
5. (TODO) eine Übersicht über fortgeschrittene Methoden der fraktalen Bildcodierung und
6. (TODO) der Vergleich von fraktaler Bildcodierung mit anderen, DCT-basierten Bildkomprimierungsverfahren.

Recap — bisherige Themen

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer reellwertigen Funktion $X \times X \to \mathbb{R}$. Diese misst den Abstand zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ und muss dazu folgende Axiome erfüllen ($x, y, z \in X$):

1. **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$
2. **Positive Definitheit**: $0 \leq d(x, y)$ und $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
3. **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Mithilfe von Cauchy-Folgen lassen sich nun vollständige metrische Räume konstruieren. Insbesondere brauchen wir kompakte metrische Räume, eine Teilmenge der vollständigen metrischen Räume.

"Raum der Fraktale"

Für eine gegebene Menge X bezeichnen wir zunächst die Menge aller kompakten Teilmengen von X mit $\mathcal{H}(X)$. Die leere Menge schließen wir hierbei aus.

Um mit $\mathcal{H}(X)$ arbeiten zu können definieren wir passende Abstandsbegriffe:

- $d(x, A) = \min \{d(x, a) : a \in A\}$ ($x \in X$, $A \in \mathcal{H}(X)$) sei der Abstand zwischen einem Punkt $x \in X$ und einem Element A von $\mathcal{H}(X)$.
- $d(A, B) = \max \{d(x, B) : x \in A\}$ sei der Abstand zwischen zwei Mengen in $\mathcal{H}(X)$.

Mithilfe dieser Abstandsbegriffe konstruieren wir die Hausdorff-Distanz zwischen zwei Mengen $A, B \in \mathcal{H}(X)$ durch

$$h(A, B) := \max \{d(A, B),\ d(B, A)\}.$$

Die Hausdorff-Distanz bildet eine Metrik auf $\mathcal{H}(X)$.

Wir erhalten den Raum der Fraktale

$$(\mathcal{H}(X), h).$$

Für uns ist — zumindest vorerst — jede Teilmenge von $(\mathcal{H}(X), h)$ ein Fraktal. Weiter kann gezeigt werden, dass folgender zentraler Satz über den Raum der Fraktale gilt:

Vollständigkeit des Raums der Fraktale

Es gilt

$$\begin{aligned} &(X, d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum} \\ \Rightarrow\ &(\mathcal{H}(X), h) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum.} \end{aligned}$$

Kontraktionen

Eine Kontraktion ist eine spezielle Abbildung $\varphi : X \to X$, für die ein $c \in [0, 1)$ existiert, sodass

$$\forall x, y \in X : d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

c wird hier als Kontraktionsfaktor bezeichnet. Eine Kontraktion zieht eine Menge "in sich selbst zusammen" — mindestens so stark wie eine zentrische Streckung mit festem Streckungsfaktor $c < 1$.

Ein wichtiger Sonderfall einer Kontraktion liegt vor, wenn

$$\forall x, y \in X : d(\varphi(x), \varphi(y)) = c \cdot d(x, y).$$

Eine solche Kontraktion wird Ähnlichkeitsabbildung genannt, c heißt hier Kontraktionsverhältnis.

Banachscher Fixpunktsatz

Ein wichtiges Resultat an dieser Stelle ist der banachsche Fixpunktsatz. Er besagt, dass für eine Kontraktion φ (wie oben) und eine iterativ definierte Folge

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

für einen *beliebigen* Startwert x_0 genau ein $\tilde{x} \in X$ existiert, sodass $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Außerdem gilt

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \tilde{x}.$$

Dieser Fixpunkt $\tilde{x}$ ist also der Grenzwert der obigen Iteration, unabhängig vom gewählten Startwert!

(Affine) Transformationen

Aus den Vorlesungen über Lineare Algebra sind lineare Transformationen bekannt. Sie bilden Geraden auf Geraden ab und fixieren den Ursprung. Dargestellt werden können sie durch die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix:

$$t : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Eine (2-dimensionale) affine Transformation $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung, die durch

$$w(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + e \\ cx_1 + dx_2 + f \end{pmatrix}$$

für feste $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ beschrieben werden kann. Eine affine Transformation setzt sich also aus einer linearen Transformation und einer Translation zusammen.

Eine praktische und übliche Notation ist

$$w(x) = Ax + t \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; t = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Konstruktion einer affinen Transformation

Sind eine Menge und eine affin transformierte Kopie dieser gegeben, so kann eine passende affine Transformation, die die Menge auf ihre Kopie abbildet, konstruiert werden, indem drei Punkte der Menge und jeweils die dazugehörige Kopie ermittelt werden.

Seien (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) solche Punkte in der Menge und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ die zugehörigen Punkte in der Kopie.

Daraufhin lassen sich folgende Gleichungen lösen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix}$$

So lassen sich die 6 Parameter einer zugehörigen affinen Transformation bestimmen.

Iterierte Funktionensysteme (IFS)

Ein iteriertes Funktionensystem (IFS) ist Familie endlich vieler Kontraktionen auf einem vollständigen metrischen Raum, hier sei (X, d) ein solcher Raum und $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ eine solche Familie.

Der Kontraktionskoeffizient eines solchen IFS ist der größte Kontraktionsfaktor seiner Kontraktionen:

$$c = \max\{c_1, \ldots, c_n\} \quad (c_i \coloneqq \text{Kontraktionsfaktor von } \Phi_i)$$

Erhält man durch Vereinigung der Bilder der Kontraktionen von einer festen Teilmenge $C \subset X$ wieder C, so ist C der Attraktor dieses IFS. Formal:

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_i(C).$$

Modellierung "echter" Bilder

Gegenstand dieses Vortrags ist die Codierung von Bildern mithilfe von Werkzeugen aus der fraktalen Geometrie. Aber was ist ein Bild eigentlich?

Barnsley modelliert solche Bilder entlang von fünf Eigenschaften, die ein Bild haben soll.

Die Menge aller echten Bilder

Grob beschrieben ist ein echtes Bild etwas, dass man irgendwo sehen oder sich zumindest zu sehen vorstellen könnte. Es sei $\mathcal{R}$ die Menge aller echten Bilder und $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ ein echtes Bild. Dieses muss folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Es besitzt einen Träger $\square = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und die Maße $(b - a)$ und $(d - c)$. Der Träger kann beispielsweise eine Tafel oder ein Blatt Papier sein, die Maße sind in einer festen Einheit, beispielsweise Meter.

   Durch den Träger wird ein Bild in den mit der Standardmetrik versehenen euklidischen Raum eingebettet, wodurch die bekannten Werkzeuge aus Geometrie und Topologie zur Verfügung stehen.

2. Es besitzt gewisse chromatische Werte. Ein chromatischer Wert ist eine Funktion

   $$c : \square \to \mathbb{R},$$

   die jedem Punkt des Bildes einen reellwertigen Wert zuordnet. Wir werden in diesem Vortrag nur Bilder in Graustufen betrachten, deswegen reicht für uns ein chromatischer Wert; die Helligkeit an einem bestimmten Punkt.

3. Einem Bild $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ ist *keine* Auflösung zugeordnet. Das heißt, dass es für beliebige, endliche Auflösungen beschrieben werden kann, und diese Beschreibungen dasselbe $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ beschreiben. Die Rasterung findet separat statt.

4. $\mathcal{R}$ ist unter Zuschneiden von Bildern abgeschlossen. Das bedeutet, dass ein fester Bereich $\tilde{\mathcal{I}}$ eines $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ ein eigenständiges Bild und somit $\in \mathcal{R}$ ist.

5. $\mathcal{R}$ ist unter invertierbaren affinen Transformationen abgeschlossen. Das bedeutet, dass kein $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ beliebig vergrößert, verkleinert, gestreckt, gespiegelt, gestaucht und repositioniert werden kann, sodass die Transformation nicht in $\mathcal{R}$ liegt.

Digitalisierung und Rasterung

Digitalisierung und Rasterung sollen in diesem Vortrag nicht näher besprochen werden. Hier werden $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ auf Pixel abgebildet, wozu Modelle aus verschiedenen mathematischen Bereichen zur Rasterung und Interpolation verwendet werden.

Collage-Theorem

Wir haben in anderen Vorträgen gesehen, dass mithilfe eines IFS komplexe Bilder mit nur wenigen Kontraktionen beschrieben werden können.

Idee ist nun, statt ein Bild aus einem vorgegebenen IFS zu generieren, ein möglichst passendes IFS für ein gegebenes Bild zu finden. Offensichtlich wird ein gegebenes Bild in der Regel keine erkennbare selbstähnliche Struktur besitzen. Das Collage-Theorem erlaubt die Konstruierung von iterierten Funktionensystemen, deren Attraktoren einem gegebenen Bild möglichst genau entsprechen.

Collage-Theorem

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $L \in \mathcal{H}(X)$, $\varepsilon \geq 0$.
Bestimme ein IFS $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ mit Kontraktionskoeffizient $0 \leq s < 1$ derart, dass

$$h\left(L, \bigcup_{i=0}^{n} \Phi_i(L)\right) \leq \varepsilon \quad (h\text{: Hausdorff-Metrik}).$$

Dann gilt:

$$h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s} \quad (A\text{: Attraktor des IFS}).$$

Um ein gegebenes Bild $L \in \mathcal{H}(X)$ durch den Attraktor eines IFS anzunähern, muss die Vereinigung ("Collage") der Kontraktionen des IFS, angewandt auf das gegebene Bild L, dem gegebenen Bild ähneln (im Sinne der Hausdorff-Metrik).

Beweis
Wir zeigen, dass in einem vollständigen metrischen Raum (X, d) für eine Kontraktion $f : X \to X$ mit einem Konstraktionsfaktor $0 \leq s < 1$ und einem Fixpunkt $\tilde{x} \in X$ gilt:

$$d(x, \tilde{x}) \leq \frac{d(x, f(x))}{1-s}.$$

Wir nutzen dazu die Stetigkeit der Abstandsfunktion. Es gilt also

$$\begin{aligned} d(x, \tilde{x}) &= d\left(x, \lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} d(x, f^n(x)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} d(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} d(x, f(x))(1 + s + \cdots + s^{n-1}) \\ &\leq \frac{d(x, f(x))}{1-s}. \end{aligned}$$

□

Stetige Abhängigkeit von Parametern

Ein weiterer wichtiger Satz zur Komprimierung von Bildern ist der Satz über die stetige Abhängigkeit des Attraktors eines IFS von den Parametern des IFS. Diese stetige Abhängigkeit wird uns erlauben, durch kleine Änderungen der Parameter kleine Änderungen am Attraktor eines IFS provozieren zu können (und große durch große). Eine praktische Folgerung ist außerdem, dass zwischen verschiedenen Attraktoren ein stetiger Übergang durch Parameteränderungen konstruiert werden kann — diese Eigenschaft ist besonders praktisch zur Konstruktion und Komprimierung von animierten Bildern und Filmmaterial.

Stetige Abhängigkeit von Parametern — Fixpunkt

Es seien (P, d_P) ein metrischer und (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, außerdem sei $\Phi_{p\in P} : X \to X$ eine Familie von Kontraktionen auf X mit Kontraktionskoeffizient $0 \leq s < 1$. Für jedes $p \in P$ ist also $\Phi_p \in \Phi$ eine Kontraktion auf X.

Für jedes $x \in X$ sei Φ stetig auf P. Dann ist der Fixpunkt $\tilde{x}_p$ von Φ stetig abhängig von p.

Das heißt: $\tilde{x} : P \to X$ ist stetig.

Beweis

Es seien $p \in P$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt für alle $q \in P$:

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_p, \tilde{x}_q) &= d(\Phi_p(\tilde{x}_p), \Phi_q(\tilde{x}_q)) \\ &\leq d(\Phi_p(\tilde{x}_p), \Phi_q(\tilde{x}_p)) + d(\Phi_q(\tilde{x}_p), \Phi_q(\tilde{x}_q)) \\ &\leq d(\Phi_p(\tilde{x}_p), \Phi_q(\tilde{x}_p)) + s \cdot d(\tilde{x}_p, \tilde{x}_q). \end{aligned}$$

Das impliziert, dass

$$d(\tilde{x}_p, \tilde{x}_q) \leq \frac{d(\Phi_p(\tilde{x}_p), \Phi_q(\tilde{x}_p))}{1-s}$$

Die rechte Seite des Terms kann beliebig klein gemacht werden, indem q nach genug bei p gewählt wird. Offensichtlich existiert ein $C \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$d(\Phi_p(x), \Phi_q(x)) \leq C \cdot d(p, q)$$

für alle $p, q \in P$ und $x \in X$. Also

$$d(\tilde{x}_p, \tilde{x}_q) \leq \frac{C \cdot d(p,q)}{1-s}.$$

Das ist eine sinnvolle Abschätzung und beendet den Beweis.

□

Sinnvoll wird diese Erkenntnis allerdings erst, wenn wir die stetige Abhängigkeit zwischen den IFS-Parametern und dem tatsächlichen Attraktor des IFS zeigen können. Dazu schränken wir die Kontraktionen der IFS auf Lipschitz-stetige Kontraktionen ein — das bedeutet, dass für ein mit $p \in P$ parametrisiertes IFS

$$\left\{\Phi_{1_p}, \dots, \Phi_{n_p}\right\} \quad (\Phi_{i_p} \text{ stetig})$$

ein $k \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass gilt:

$$d(\Phi_{i_p}(x), \Phi_{i_q}(x)) \leq k \cdot d_P(p,q).$$

Das ist nicht die allgemeinste Forderung, aber sie ist einfach zu handhaben und reicht für unsere Zwecke aus.

Unser Ziel ist nun, für beliebiges $B \in \mathcal{H}(X)$ nachzuweisen, dass gilt:

$$h(\Phi_{i_p}(B), \Phi_{i_q}(B)) \leq k \cdot d_P(p,q). \tag{1}$$

Das bedeutet, dass der "Unterschied" zwischen den Bildern von B unter zwei verschieden parametrierten Kontraktionen nach oben durch ein Vielfaches des Abstands der Parameter abgeschätzt werden kann.

Beweis (1)
Diese Aussage kann leicht nachgewiesen werden, indem die Eigenschaften einer Metrik nachgegangen werden:

$$h(\Phi_p(B), \Phi_q(B)) = \mathit{max}\left\{d(\Phi_p(B), \Phi_q(B)), d(\Phi_q(B), \Phi_p(B))\right\}$$

mit

$$d(\Phi_p(B), \Phi_q(B)) = \mathit{max}_{x \in \Phi_p(B)}(d(x, \Phi_q(B))),$$
$$d(x, \Phi_q(B)) = \mathit{min}_{y \in \Phi_q(B)}(d(x,y)).$$

$x \in \Phi_p(B)$ bedeutet, dass es ein $x' \in B$ gibt, sodass $x = \Phi_p(x')$. Außerdem gibt es dan ein $\Phi_q(x') \in \Phi_q(B)$. Für diesen Punkt gilt unsere Anforderung. Es folgt

$$d(x, \Phi_q(x')) \leq k \cdot d_P(p,q) \Rightarrow \mathit{min}_{y \in \Phi_q(B)}(d(x,y)) \leq d(x, \Phi_q(x')) \leq k \cdot d_P(p,q).$$

Wir erhalten also

$$d(\Phi_p(B), \Phi_q(B)) \leq k \cdot d_P(p,q).$$

Die Argumentation für $d(\Phi_q(B), \Phi_p(B))$ ist analog, wir haben also

$$h(\Phi_p(B), \Phi_q(B)) \leq k \cdot d_P(p,q).$$

Für endliches n erhalten wir ein endliches IFS $\left\{\Phi_{1_p}, \dots, \Phi_{n_p}\right\}$ mit zugehörigen Konstanten $k_1, \dots, k_n$. Wähle

$$k := \mathit{max}\left\{k_1, \dots, k_n\right\}.$$

und somit erhalten wir letztendlich

$$h(\Phi_{i_p}(B), \Phi_{i_q}(B)) \leq k \cdot d_P(p, q). \qquad \square$$

Die Vereinigung solcher Bilder kann sich von Parameter zu Parameter offensichtlich nicht stärker verändern als die maximale Hausdorff-Distanz von oben. Es gilt also

$$h\left(W_p(B), W_q(B)\right) \leq k \cdot d_P(p, q),$$

wobei

$$W_p(B) = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_{i_p}(B),$$

$W_q(B)$ respektive. Wenden wir nun das Resultat der stetigen Abhängigkeit von Fixpunkten an, so erhalten wir

$$h(A_p, A_q) \leq \frac{h(A_p, W_q(A_p))}{1 - s} \leq k \cdot \frac{d_P(p, q)}{1 - s}.$$

Das lässt sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Stetige Abhängigkeit von Parametern — Attraktor

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ ein IFS mit Kontraktionskoeffizient s, wobei Φ_i von $p \in (P, d_P)$ im Sinne der Einschränkung

$$d(\Phi_{i_p}(x), \Phi_{i_q}(x)) \leq k \cdot d_P(p, q)$$

für beliebiges x abhänge.

Dann ist der Attraktor $A_p \in \mathcal{H}(X)$ stetig von p mittels der Hausdorff-Metrik $h(d)$ abhängig.