Seminar Fraktale

Fraktale Bildcodierung

Jens Ochsenmeier

10. Mai 2018

Wichtige Werkzeuge

Metrische Räume

Menge X mit reellwertiger Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die

1. symmetrisch und
2. positiv definit ist und die
3. Dreiecksungleichung erfüllt

Metrische Räume

Menge X mit reellwertiger Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die

1. symmetrisch und
2. positiv definit ist und die
3. Dreiecksungleichung erfüllt

$\rightarrow$ *vollständige* metrische Räume (Cauchy-Folgen konvergieren)

Metrische Räume

Menge X mit reellwertiger Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die

1. symmetrisch und
2. positiv definit ist und die
3. Dreiecksungleichung erfüllt

$\rightarrow$ *vollständige* metrische Räume (Cauchy-Folgen konvergieren)

$\rightarrow$ *kompakte* metrische Räume (beschränkt und abgeschlossen)

Raum der Fraktale über X:

$$\mathcal{H}(X) := \{\mathcal{A} \subseteq X : \mathcal{A} \text{ kompakt}\} \setminus \varnothing$$

Raum der Fraktale

Raum der Fraktale über X:

$$\mathcal{H}(X) := \{\mathcal{A} \subseteq X : \mathcal{A} \text{ kompakt}\} \setminus \varnothing$$

Abstandsbegriffe:

- $d(x, A) := \min\{d(x, a) : a \in A\} \qquad (x \in X, A \in \mathcal{H}(X))$
- $d(A, B) := \max\{d(x, B) : x \in A\} \qquad (A, B \in \mathcal{H}(X))$

Raum der Fraktale

Raum der Fraktale über X:

$$\mathcal{H}(X) := \{\mathcal{A} \subseteq X : \mathcal{A} \text{ kompakt}\} \setminus \varnothing$$

Abstandsbegriffe:

- $d(x, A) := \min \{d(x, a) : a \in A\} \qquad (x \in X, A \in \mathcal{H}(X))$
- $d(A, B) := \max \{d(x, B) : x \in A\} \qquad (A, B \in \mathcal{H}(X))$
- $h(A, B) := \max \{d(A, B),\ d(B, A)\}$ (Hausdorff-Abstand)

Raum der Fraktale

Raum der Fraktale über X:

$$\mathcal{H}(X) := \{\mathcal{A} \subseteq X : \mathcal{A} \text{ kompakt}\} \setminus \varnothing$$

Abstandsbegriffe:

- $d(x, A) := \min\{d(x, a) : a \in A\} \qquad (x \in X, A \in \mathcal{H}(X))$
- $d(A, B) := \max\{d(x, B) : x \in A\} \qquad (A, B \in \mathcal{H}(X))$
- $h(A, B) := \max\{d(A, B),\ d(B, A)\}$ (Hausdorff-Abstand)

$\to$ Raum der Fraktale $(\mathcal{H}(X), h)$

Fraktal

Ein Fraktal ist eine Teilmenge von $(\mathcal{H}(X), h)$.

Abbildungen und Transformationen

Kontraktion

Abbildung $\varphi : X \to X$ für die $c \in [0, 1)$ existiert, sodass

$$\forall\, x, y \in X : d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

Kontraktionsfaktor: c

Ähnlichkeitsabbildung

Abbildung $\varphi : X \to X$ für die $c \in [0, 1)$ existiert, sodass

$$\forall\, x, y \in X : d(\varphi(x), \varphi(y)) = c \cdot d(x, y)$$

Kontraktionsverhältnis: c

Banachscher Fixpunktsatz

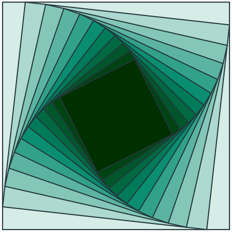
- Kontraktion $\varphi : X \to X$
- Iterative Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$
- *Beliebiger* Startwert x_0

Satz (Banach, 1922)

1. Es existiert genau ein $\widetilde{x} \in X$, sodass $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$.
2. Es ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \widetilde{x}$.

Banachscher Fixpunktsatz

- Kontraktion $\varphi : X \to X$
- Iterative Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$
- *Beliebiger* Startwert x_0



Satz (Banach, 1922)

1. Es existiert genau ein $\widetilde{x} \in X$, sodass $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$.
2. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \widetilde{x}$.

Lineare Transformation

Lineare Transformation

- bildet Geraden auf Geraden ab
- fixiert den Ursprung

Darstellung durch Matrix:

$$t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad t(x,y) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Konkret: Skalieren, Spiegeln, Strecken, Drehen

Affine Transformation

Affine Transformation: Lineare Transformation + Translation

Darstellung durch Matrix:

$$w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad w(x, y) := A \cdot x + t = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{lineare Transformation}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{\text{Translation}}$$

Affine Transformation — Konstruktion

1. Drei Punkte auf Startmenge wählen
2. Dazugehörige Punkte in Bildmenge finden
3. Ein paar Gleichungssysteme lösen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{y}_1 \\ \widetilde{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{z}_1 \\ \widetilde{z}_2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ affine Transformation

Iterierte Funktionensysteme

Iteriertes Funktionensystem (IFS)

IFS: Familie $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ mit $\Phi_i : X \to X$

Kontraktion

(X, d) vollständiger metrischer Raum

Kontraktionskoeffizient $c = \max\{c_1, \ldots, c_n\}$

($c_i :=$ Kontraktionsfaktor von Φ_i)

Attraktor des IFS: $C \subset X$ derart, dass

$$\bigcup_{i=0}^{n} \Phi_i(C) = C$$

Modellierung echter Bilder

“Echte” Bilder

Echtes Bild: *Etwas, dass man irgendwo sehen oder sich zumindest zu sehen vorstellen könnte*

- $\mathcal{R}$: Menge aller echten Bilder
- $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$: echtes Bild

"Echte" Bilder

Echtes Bild: *Etwas, dass man irgendwo sehen oder sich zumindest zu sehen vorstellen könnte*

- $\mathcal{R}$: Menge aller echten Bilder
- $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$: echtes Bild

$\rightarrow$ mathematisch nicht wirklich greifbar

“Echte” Bilder

Echtes Bild: *Etwas, dass man irgendwo sehen oder sich zumindest zu sehen vorstellen könnte*

- $\mathcal{R}$: Menge aller echten Bilder
- $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$: echtes Bild

$\rightarrow$ mathematisch nicht wirklich greifbar

$\rightarrow$ Modellierung entlang von Eigenschaften

“Echte” Bilder

Echtes Bild: *Etwas, dass man irgendwo sehen oder sich zumindest zu sehen vorstellen könnte*

- $\mathcal{R}$: Menge aller echten Bilder
- $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$: echtes Bild

$\rightarrow$ mathematisch nicht wirklich greifbar

$\rightarrow$ Modellierung entlang von Eigenschaften

Schloss Neuschwanstein, Unsplash

Eigenschaft 1

Ein Bild besitzt

1. Träger $\square = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$
2. Maße $(b - a)$ und $(c - d)$

$\rightarrow$ Einbettung in den euklidischen Raum

Eigenschaft 2

Ein Bild besitzt chromatische Werte

$$c : \square \to \mathbb{R}$$

Hier: **nur Graustufen**: c ist die *Helligkeit* an einem bestimmten Punkt

Eigenschaft 3

$\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ besitzt *keine* Auflösung!

$\rightarrow$ verschiedene Auflösungen beschreiben dasselbe Bild

Eigenschaft 4

$\mathcal{R}$ ist unter Zuschneiden von Bildern abgeschlossen

Eigenschaft 5

$\mathcal{R}$ ist unter affinen Transformationen abgeschlossen

Digitalisierung

$$\mathcal{I} \in \mathcal{R} \rightsquigarrow \text{Pixel}$$

- Welche Pixel kriegen welche Farbe?
- Interpolation?
- Skalierung?

$\rightarrow$ Maßtheorie,...

$\Rightarrow$ Gerastertes Bild mit Farben pro Pixel

Collage-Theorem

Collage-Theorem

- vollständiger metrischer Raum (X, d)
- $L \in \mathcal{H}(X)$
- $\varepsilon \geq 0$
- IFS $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$
    - Kontraktionskoeffizient $0 \leq s < 1$
    - Attraktor A

Satz (Barnsley, 1992)

$$h\left(L, \bigcup_{i=0}^{n} \Phi_i(L)\right) \leq \varepsilon \Rightarrow h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1 - s}$$

Stetige Abhängigkeit von Parametern

Stetige Abhängigkeit — Fixpunkt

- (P, d_P) metrischer Raum
- (X, d) vollständiger metrischer Raum
- $\Phi : P \times X \to X$ Familie von Kontraktionen auf X
- $0 \leq s < 1$ Kontraktionskoeffizient von $\Phi(p, \cdot)$
- $\Phi(\cdot, x)$ stetig für jedes $x \in X$

Lemma

Der Fixpunkt $\widetilde{x}(p)$ von Φ ist stetig abhängig von p. Das heißt:

$$\widetilde{x} : P \to X \text{ ist stetig.}$$

Stetige Abhängigkeit — Attraktor

- (X, d) und (P, d_P) wie gehabt
- IFS wie gehabt
- Φ_i hänge von p im Sinne folgender Einschränkung ab:

$$d(\Phi_{i,p}(x), \Phi_{i,q}(x)) \leq k \cdot d_P(p, q)$$

Satz (Barnsley, 1992)

Der Attraktor $A_p \in \mathcal{H}(X)$ ist stetig von p mittels der Hausdorff-Metrik $h(d)$ abhängig.

Quellen

- Barnsley — **Fractals Everywhere** (1993)
- Barnsley, Hurd — **Fractal Image Compression** (1993)