AI-homework3

晏悦 2017K8009918013

September 2019

请证明 $\frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}I(f(x_i)\neq y_i)\leq exp(-2\Sigma_{k=1}^{K}\gamma_k^2)$，其中 $\gamma_k=\frac{1}{2}-e_k$
证明：
1. 首先证明 $\Pi_{k=1}^{K}\sqrt{1-4\gamma_k^2}\leq\exp(-2\Sigma_{k=1}^{K}\gamma_k^2)$
不妨设 $x_k=\gamma_k^2$，由于 $\gamma_k\in(0,\frac{1}{2})$, 所以 $x_k\in(0,\frac{1}{4})$.
两边同时去对数 ln
得到 $\Sigma_{k=1}^{K}\sqrt{1-4x_k}\leq-2\Sigma x_k$
即证 $f(x)=\sqrt{1-4x}+2x\leq 0$ 对 x 恒成立。
对函数求导，导函数恒 $<\ 0$，$f(x)\leq f(0)=0$ 成立
2. 接下来证明 $\frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}I(f(x_i)\neq y_i)\leq\Pi_{k=1}^{K}\sqrt{1-4\gamma_k^2}$
显然 $I(f(x_i)\neq y_i)<\exp(-y_i*f(x_i))$
并且由于 $f(x_i)=sign(\Sigma_k\alpha_k*f_k(x_i))$
所以
$\frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}I(f(x_i)\neq y_i)$
$<\frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}\exp(-y_if(x_i))$
$=\frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}\exp(-y_i\Sigma_k\alpha_k*f_k(x_i))$
$=\frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}\Pi_k\exp(-y_i\alpha_k*f_k(x_i)$
由于 $d_{0,i}=\frac{1}{N}$, 且 $d_{k-1,i}\exp(-\alpha_ky_if_k(x_i))=Z_kd_{k,i}$
所以上式等于
$=Z_1\Pi_{k=2}^{K}\exp(-y_i\alpha_k*f_k(x_i)$
$=Z_1Z_2\Pi_{k=3}^{K}\exp(-y_i\alpha_k*f_k(x_i)$
$=\Pi_{k=1}^{K}Z_k$
又因为 $d_{k-1,i}\exp(-\alpha_ky_if_k(x_i))=Z_kd_{k,i}$，其中 $d_{k,i}$ 满足归一化条件
左右两边对 i 求和
得到 $Z_k=\Sigma_id_{k-1,i}\exp(-\alpha_ky_if_k(x_i))$

$= \Sigma_{y_i=f_k(x_i)} d_{k-1,i} \exp(-\alpha_k) + \Sigma_{y_i \neq f_k(x_i)} d_{k-1,i} \exp(\alpha_k)$
$= (1-e_k)e^{-\alpha_k} + e_k e^{\alpha_k}$
其中 $e_k = \Sigma_i d_{k-1,i}(y_i \neq f_k(x_i))$
$= 2\sqrt{e_k(1-e_k)}$
$= \sqrt{1-4\gamma_k}$
两边同时对 k 求连续乘，得到要证明的不等式，证明完毕！