

FYSIK CAMP 2014

Undervisere:

Nanna Bill Andersen (ansv.)	nba@unf.dk
Jonas Lundholm Bertelsen	jlb@unf.dk
Kasper Zøllner	kaz@unf.dk
Marcus Schultz Carstensen	mssc@unf.dk
Mick Althoff Kristensen	mick@unf.dk
Niels Jakob Søe Loft	nsl@unf.dk

Dette kompendie tilhører:

Kolofon

Kompendie til UNF Fysik Camp 2014

Kompendiet er skrevet af Niels Jakob Søe Loft, Nanna Bill Andersen og Kasper Zøllner og trykt i juli 2014. Teksten er copyright ©2014 af UNF og forfatterne. Gengivelse med kildehenvisning tilladt.

Indhold

Indhold	i
Introduktion	ii
1 Kvantemekanik	1
1.1 Klassisk mekanik vs. kvantemekanik	1
1.2 Schrödingerligningen	2
1.3 Fortolkningen af bølgefunktionen	3
1.4 Opgaver	8
2 Astrofysik	13
2.1 Kosmologi	13
2.2 Rødforskydning og udvidelsen af Universet	15
2.3 Afstande og luminositet	22
2.4 Opgaver	23
2.5 Konstanter	31
3 Relativitetsteori	32
3.1 Observatører i reference- og hvilesystemer	32
3.2 Galileisk transformation	33
3.3 Michelson-Morley og Æteren	35
3.4 Speciel relativitetsteori og dens betydning	36
3.5 Lorentz-transformationer	40
3.6 Generel relativitetsteori	42
3.7 Opgaver	43
A Matematik	48
A.1 Trigonometriske funktioner	48
A.2 Differentialregning	49
A.3 Integralregning	53

Introduktion

Velkommen til UNF Fysik Camp 2014. Hermed præsenteres tre af de større emner, vi skal arbejde med her under campen: kvantemekanik, astrofysik og speciel relativitetsteori. Vi håber, at I finder emnerne ligeså spændende som vi selv, og at I kommer fra denne camp med en fornyet interesse indenfor fysikkens grene. Til dette kompendie medfølger også opgaver som vi håber kan hjælpe med at illustrere emnerne, men da I kommer fra forskellige undervisningsbaggrunde og klassetrin, vil ikke alle opgaver være tilpasset jeres enkelte niveauer. I opfordres derfor til at shoppe lidt og vælge de opgaver I finder udfordrende og interessante. I visse opgaver skal I bruge matematik, som nogle af jer ikke har modtaget undervisning i endnu; trigonometriske funktioner, differentiale- og integralregning. Disse ting er introduceret bagerst i kompendiet i Bilag A. I opfordres til at læse dette bilag, eller bruge det som genopfriskning. Det er ikke et krav, at I kigger på opgaverne inden vi får tid til at lave dem under campen (faktisk vil vi gerne have I gemmer dem til undervisningen), men selve indholdet opfordres I til at læse, da det danner baggrunden. God fornøjelse!

på vegne af det faglige team,
Nanna Bill Andersen, faglig koordinator

Kapitel 1

Kvantemekanik

Dette kapitel omhandler kvantemekanikken, som er en af moderne fysiks største triumfer. Kvantemekanikken forklarer, hvordan ting på størrelse med atomer og mindre fungerer, og teorien har nogle højst mærkværdige konsekvenser, som vi skal prøve at forklare og belyse i teoriafsnittet. I opgaveafsnittet kommer I selv til at prøve kræfter med kvantemekanikkens ligninger.

1.1 Klassisk mekanik vs. kvantemekanik

I gymnasiet lærer man om den klassiske mekanik. Den omhandler Newtons love, og hvordan disse kan bruges til at udregne forskellige ting og fysiske systemer. Det kan fx være et system bestående af en klods på et skråplan, og Newtons love er nogle ligninger, der gælder for systemet. Man kan så løse disse ligninger og komme med forudsigelser om, hvad der sker, når man giver slip på klodsen og lader den glide den. Hvor hurtigt bevæger klodsen sig til en bestemt tid? Hvor hurtigt accelererer den? Man kunne også se på en klods, der hænger i en fjeder, og beregne, hvordan klodsen bevæger sig, hvis man trække klodsen lidt nedad og giver slip. Men uanset hvilket system, man kigger på, så er målet i den klassiske mekanik altid at *løse Newtons ligninger for at kunne finde tidsudviklingen af systemet* – dvs. man vil besvare spørgsmålet ”hvad sker der, når tiden går?”.

Kvantemekanikken fungerer på præcis samme måde, den eneste forskel er, at hvor den klassiske mekanik kun gælder for systemer bestående af ”store” objekter som klodser på et bord, biler, rumskibe, planeter osv., så forsøger kvantemekanikken at beskrive ”små” systemer som atomer, elementarpartikler osv. Ting, der er ”mellemstore”, som fx molekyler, kan ofte beskrives med en blanding af klassisk mekanik og kvantemekanik.

Givet et kvantemekanisk (dvs. tilpas lille) system, er opgaven i kvantemekanikken at *løse Schrödingers ligning for at kunne finde tidsudviklingen af systemet*, præcis som i den klassiske mekanik. Vi ser her, at ligningen, vi skal løse, ikke længere er Newtons love, men Schrödingers ligning. Men den spiller den samme rolle: Har vi et kvantemekanisk system, kan man opskrive Schrödingers ligning, og kan man løse denne ligning, så kan man besvare spørgsmålet ”hvad sker der, når tiden går?”. Desværre er denne ligning ofte svær at løse, men det kan lade sig gøre for nogle simple systemer, bl.a. ét, som I skal regne en opgave med. Men nok snak, lad os få ligningen på bordet!

1.2 Schrödingerligningen

Schrödingerligningen er kvantemekanikkens vigtigste og mest fundamentale ligning. Newtons anden lov $F_x = ma_x$ beskriver en klassisk partikel som en klods med masse m , der udsættes for kraften F_x i x -retningen derfor accelerer a_x i x -retningen, og partiklen vil altså bevæge sig, så ligningen altid er opfyldt. En kvantemekanisk partikel, som fx en elektron eller et atom, med masse m vil bevæge sig, så den altid opfylder Schrödingerligningen, som ser således ud:

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) \quad (1.1)$$

Indrømmet, den er lidt mere kompliceret end Newtons anden lov, men lad os prøve at forstå den en del ad gangen.¹ Som i nærmest alle andre fysik-ligninger, indeholder den nogle konstanter, så lad os få ryddet dem af vejen først. Først og fremmest har vi partiklens energi E , som optræder på venstresiden. En konstant, der ofte optræder i kvantemekanikken, er $\hbar = 1.05457 \times 10^{-34}$ Js, udtales "h bar" eller "h streg" og kaldes Plancks konstant². Desuden finder vi m , som er massen af partiklen. Nu har vi behandlet konstanterne i ligningen, og så er det kun det sværeste tilbage.

Lad os tage funktionen $V(x)$, som kaldes *potentialet*. Denne funktion vælger vi selv afhængig af hvilket system, vi kigger på, og den beskriver hvilke kræfter partiklen udsættes for. I Newtons anden lov skal vi angive kraften F_x , som vi vælger forskelligt efter hvad vi vil udsætte partiklen for. Sætter vi partiklen fast til en fjeder med styrke k , skal vi bruge fjederkraften $F_x(x) = -kx$, men havde vi placeret partiklen på et skråplan, skulle vi bruge formlerne for tyngdekraften, normalkraften og gnidningskraften, som selvfølgelig ser helt anderledes ud. Med andre ord er det udtrykket kraften $F(x, y)$ i hver retning, der beskriver systemet. Ligeledes gælder i kvantemekanikken, at udtrykket for potentialet $V(x)$ beskriver systemet, men i stedet for kræfter, vil man hellere regne med potentialer. Potentialet kender man også fra klassisk mekanik, fordi det er den funktion $V(x)$, der fortæller, hvor meget *potentiell energi* partiklen har, når den er i positionen x . I tilfældet med fjederkraften er potentialet $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Når fjederen er i sin maksimale ustrækning er x maksimal, og den potentielle energi er maksimal og den kinetiske energi er nul. Når $x = 0$ er den potentielle energi nul, og den kinetiske energi er maksimal. Således vil partiklen svinge frem og tilbage. I kvantemekanikken kunne man fx sætte $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Dette er et meget vigtigt system kendt som den harmoniske oscillator.

Den sidste størrelse i ligningen, vi ikke har forklaret, er også en funktion. Det er den såkaldte *bølgefunktion* $\psi(x)$, som afhænger af stedpositionen x . Enhver ligning kræver en ubekendt, man gerne vil finde. I Schrödingerligningen er de ubekendte bølgefunktionen og energien. I Newtons anden lov er den ubekendte accelerationen, som i princippet også er en funktion. Givet en potentialfunktion $V(x)$ kan det dog være svært at finde en bølgefunktion $\psi(x)$, der løser (1.1). Vi skal jo finde en funktion $\psi(x)$, gange den med et tal E ,

¹Bemærk, at ligningen ikke indholder tiden t , og derfor kan man undre sig over, at man skulle kunne vide noget om *tidsudviklingen* af systemet ved at studere en ligning, som ikke indeholder nogen afhængighed af tiden! Dette skyldes, at når man har løst ovenstående ligning for den ukendte funktion $\psi(x)$, så er tidsudviklingen givet som $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, hvor $\Psi(x, t)$ er den såkaldte bølgefunktion, der beskriver partiklen i sted og tid. $\Psi(x, t)$ indgår i en lidt mere avanceret tidsafhængig version af Schrödingerligningen, der fx indeholder det komplekse tal $i = \sqrt{-1}$, som derfor optræder i tidsafhængigheden $e^{-iEt/\hbar}$. Rumafhængigheden af bølgefunktionen $\psi(x)$ er altså den ukendte funktion, vi skal finde, og derfor vil vi koncentrere os om den tidsafhængige Schrödingerligning, hvor denne indgår som den ukendte funktion. Til at angive bølgefunktionen bruger man altid det græske bogstav store "psi" $\Psi(x, t)$ når bølgefunktionen afhænger af både tid og sted, og lille "psi" $\psi(x)$, når bølgefunktionen kun afhænger af stedet.

²Afhængig af hvem man spørger er \hbar Plancks konstant eller Plancks konstant divideret med 2π .

som indtil videre også er ubekendt, på venstresiden, differentiere den to gange med hensyn til x og indsætte dette i første led på højresiden og gange selve funktionen på en kendt funktion $V(x)$, som er det andet led på højresiden, og så skal højresiden og venstresiden være ens.³ Det er ikke så underligt, at dette er en svær opgave. Men det viser sig, at for nogle bestemte potentialer $V(x)$, så er det faktisk muligt at finde funktioner $\psi(x)$ og tal E , som løser ligningen! Man kan retmæssigt spørge, at når man nu har fundet bølgefunktionen, hvad siger det så om systemet? I næste afsnit vil vi uddybe den fysiske fortolkning af bølgefunktionen, men i princippet kan vi, når vi kender bølgefunktionen, beregne alt, der er værd at vide om partiklen og systemet.

Nu ved vi i princippet, hvad alle delene, som indgår i Schrödingerligningen, betyder. Lad os nu se på, hvad de siger alt i alt. Vi starter med højresiden, som består af to led. Vi må tage det som et postulat, men partiklens impuls opløftet i anden kan fortolkes som

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2}. \quad (1.2)$$

I klassisk mekanik er $p = mv$, hvor v er partiklens hastighed, som kan omskrives til $v = p/m$. Så ved at indsætte dette, kan partiklens kinetiske energi skrives som

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2, \quad (1.3)$$

og ved at indsætte (1.2) fremkommer det første led i Schrödingerligningens højreside. Vi kan altså fortolke dette led som partiklens kinetiske energi! Det andet led i højresiden (1.1) er $V(x)\psi(x)$ og kan fortolkes som partiklens potentielle energi, fordi vi allerede har, at $V(x)$ er en funktion, der giver den potentielle energi i positionen x . At gange med bølgefunktionen er en måde at få den potentielle energi for netop den partikel, der er beskrevet vha. $\psi(x)$. Det er alt sammen meget abstrakt, men summa summarum er, at vi kan tænke på højresiden af Schrödingerligningen som summen af den kinetiske og potentielle energi for partiklen. Dermed må venstresiden beskrive totalenergien, hvilket jo giver god mening, da højresiden er $E\psi(x)$ og E er energien hørende til bølgefunktionen $\psi(x)$. Schrödingerligningen er altså en ligning, der siger noget om energien af partiklen og fordelingen mellem kinetisk og potentiel energi.

1.3 Fortolkningen af bølgefunktionen

Vi har nu diskuteret, hvordan bølgefunktionen spiller en vigtig rolle i kvantemekanikken, i og med at det er den ukendte funktion man skal finde for at løse Schrödingerligningen. Men hvad er bølgefunktionen rent fysisk? Man kan ikke give *selve* bølgefunktionen en fysisk betydning, men dens *normkvadrat* $|\psi(x)|^2$ er *sandsynlighedsfordelingen* af partiklen.⁴ At $|\psi(x)|^2$ er sandsynlighedfordelingen betyder, at sandsynligheden

³Hvis du ikke kender til differentialregning, eller ikke er tryk ved notationen $\frac{dy}{dx}$ for den afledte $y'(x)$, så læs en introduktion til dette i appendikset.

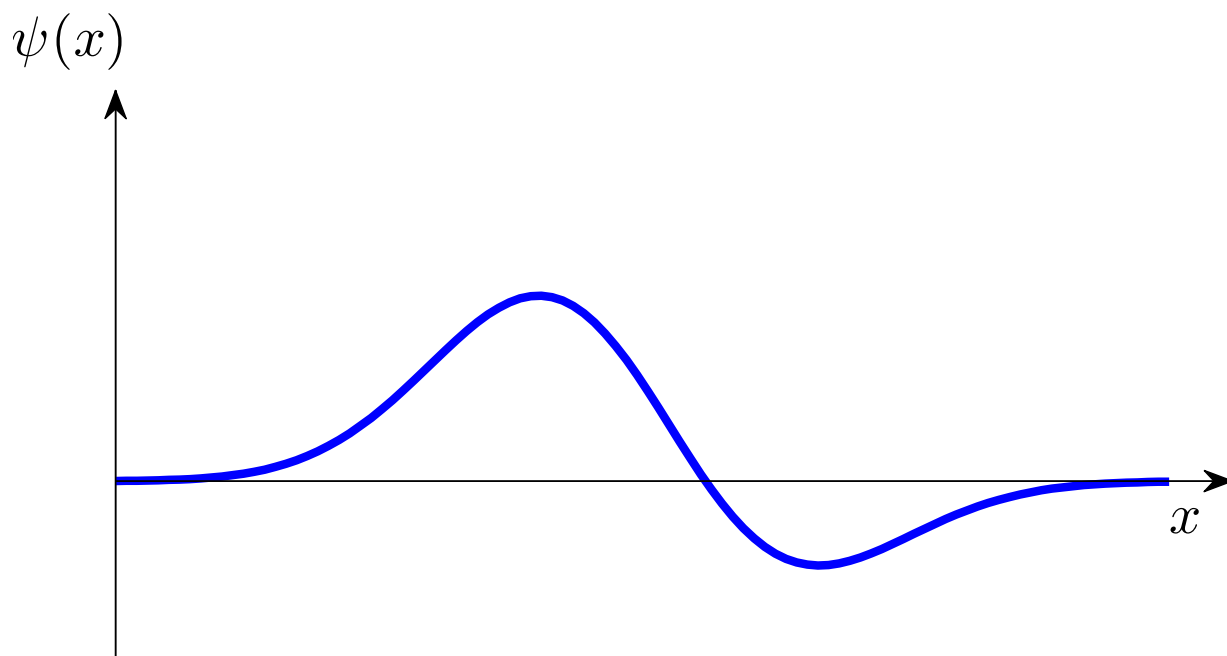
⁴Notationen med normkvadrat stammer fra, at bølgefunktionen som udgangspunkt er en kompleks funktion. Men vi har indtil nu ikke diskuteret komplekse tal i detaljer, og det behøver vi heller ikke, idet vi kun skal arbejde med reelle bølgefunktioner. Her er normkvadratet af bølgefunktionen det samme som at sætte bølgefunktionen i anden, så $|\psi(x)|^2$ er aldrig negativ. En negativ sandsynlighed giver jo ikke mening.

for at finde partiklen mellem positionerne a og b på x -aksen er lig med⁵

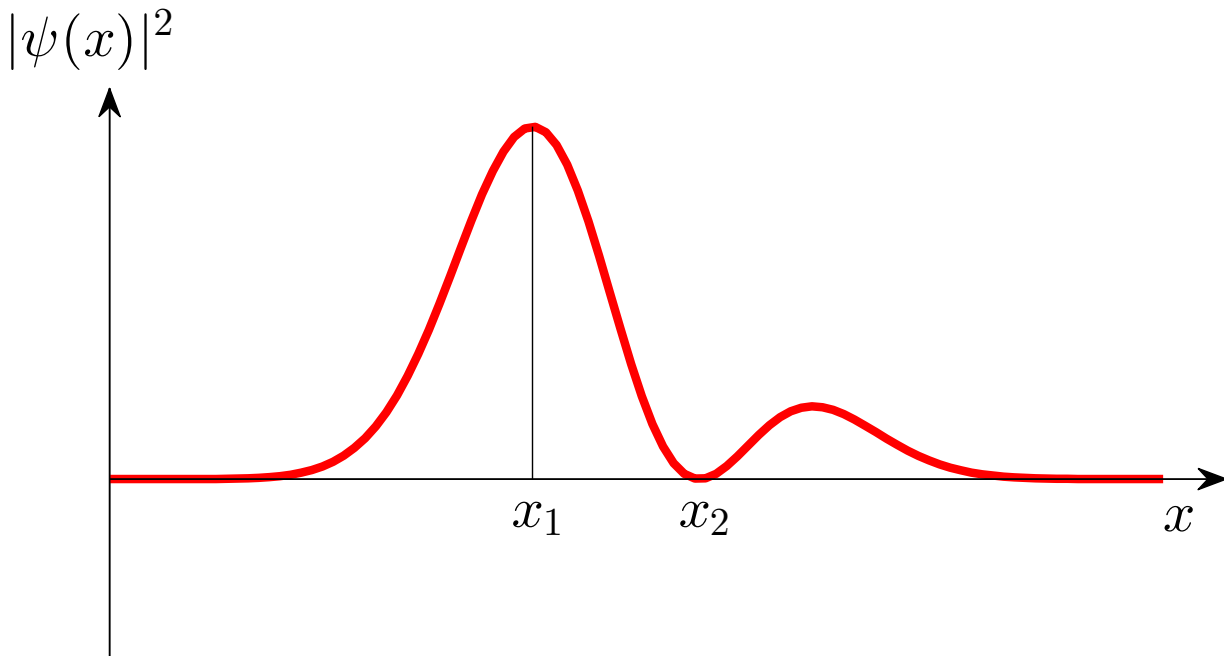
$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx . \quad (1.4)$$

Man kan undre sig over, hvorfor ikke $\psi(x)$ kan fortolkes som sandsynlighedsfordelingen. Men det skyldes jo, at vi bliver nødt til at kræve, at sandsynlighedsfordelingen aldrig er negativ, for en negativ sandsynlighed giver ikke mening! Derfor tager vi $|\psi(x)|^2$, fordi denne aldrig er negativ.

⁵Se appendikset hvis du ikke er bekendt med integralregning og betydningen $\int_a^b f(x) dx$ som arealet under grafen for $f(x)$ fra a til b .



Figur 1.1: Sådan kunne en bølgefunktion se ud. Bemærk, at den går mod nul, når x bliver enten stor eller lille.



Figur 1.2: Normkvadratet på bølgefunktion fra Figur 1.1. Der er størst sandsynlighed for at finde partiklen ved x_1 og slet ingen sandsynlighed for at finde den ved x_2 . Sandsynligheden for at finde den mellem x_1 og x_2 er arealet under kurven mellem x_1 og x_2 .

I klassisk mekanik er partiklen ét og kun ét sted! Men her ser vi, hvordan kvantemekanikken er fundamental anderledes, idet vi ikke ved, hvor partiklen er! Det eneste vi ved, er, at *sandsynligheden* for at finde partiklen mellem a og b er givet ved (1.4). Jo større $|\psi(x)|^2$ er omkring punktet x , jo større er sandsynligheden for at finde partiklen her. Hvordan finder man partiklen? Man foretager en måling, dvs. man kan forestille sig, at man spørger ”partikel, hvor er du?”, og så ”siger” partiklen ”jeg er her”. Men man er ikke aldrig sikker på, hvad partiklen svarer på spørgsmålet om hvor den er. Man siger, at partiklen er *delokaliseret*. At partikler er delokaliserede er ikke noget vi bemærker i hverdagen, fordi elektroner og atomer kun er delokaliserede på en meget lille længeskala. Altså, om et atom er ”her” eller ufatteligt tæt på ”her” har absolut ingen betydning i vores makroskopiske verden. Én ting er dog sikkert – partiklen er et eller andet sted. Oversat til matematik betyder dette, at arealet under hele $|\psi(x)|^2$ skal give 1, fordi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1, \quad (1.5)$$

er sandsynligheden for at finde partiklen mellem $-\infty$ og ∞ , dvs. et eller andet sted på x -aksen. Dette betyder også, at bølgefunktionen må gå mod nul, når x går mod store positive eller negative værdier (som på Figur 1.1). Ellers ville integralet i (1.5) gå mod uendelig. Spørgsmålet er så, hvordan man sikrer, at bølgefunktionen opfylder kravet i (1.5), kaldet *normeringskravet*. Til at besvare spørgsmålet observerer vi, at hvis $\psi(x)$ løser

(1.1), så vil også $A\psi(x)$, hvor A er en konstant, løse ligningen. Dette kan vi let vise ved at gange med A på begge sider af Schrödingerligningen:

$$\begin{aligned} E\psi(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) \\ \Rightarrow A(E\psi(x)) &= A\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x)\right) \\ \Rightarrow E A\psi(x) &= -A\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + A V(x)\psi(x) \\ \Rightarrow E(A\psi(x)) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 A\psi(x)}{dx^2} + V(x)(A\psi(x)) , \end{aligned}$$

hvilket betyder, at $A\psi(x)$ også løser Schrödingerligningen. Med andre ord kan vi selv vælge konstanten A foran bølgefunktionen, og vi vælger A således at normeringskravet (1.5) er opfyldt. Derfor kalder man A for *normeringskonstanten*.

1.4 Opgaver

Partikel i en uendelig dyb brønd

En partikel med masse m i en uendelig dyb brønd kan beskrives kvantemekanisk som en bølgefunktion, der opfylder Schrödingers ligning med følgende potential:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{ellers} \end{cases} \quad (1.6)$$

hvor x er partiklens position og L er længden af brønden. Da partiklen ikke kan slippe ud af brønden, er der ingen sandsynlighed for at finde partiklen udenfor brønden, hvorfor bølgefunktionen er nul i dette område, dvs. $\psi(x) = 0$ når $-\infty \leq x \leq 0$ eller når $L \leq x \leq \infty$.

Spørgsmål 1

Tegn potentialet $V(x)$ for den uendeligt dybe brønd.

Spørgsmål 2

Vis, at Schrödingerligningen (1.1), der gælder inde i brønden, dvs. når $0 \leq x \leq L$, er

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x) , \quad (1.7)$$

hvor $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ og $E \geq 0$ er energien af partiklen beskrevet ved bølgefunktionen $\psi(x)$.

Spørgsmål 3

Vi ønsker nu at finde de bølgefunktioner $\psi(x)$, der løser Schrödingerligningen (1.7). Med andre ord skal vi løse en andenordensdifferentialligning. Vis ved at indsætte i (1.7), at funktionen

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) , \quad (1.8)$$

hvor A og B er endnu ukendte konstanter, er en løsning.

Bølgefunktioner skal være kontinuerte. Overvej, at det betyder, at $\psi(0) = \psi(L) = 0$, og benyt dette til at vise, at $B = 0$.

Spørgsmål 4

Bølgefunktioner må ikke være nul overalt, for dette svarer jo til, at der ikke er nogen sandsynlighed for at finde partiklen nogen steder. Så fordi $\psi(x) = A \sin(kx)$ ikke må være nul overalt, må $A \neq 0$.

Overvej, at fordi $\psi(L) = A \sin(kL) = 0$ må $kL = n\pi$, hvor n er et heltal. Af fysiske årsager kan vi kun bruge løsninger, når n er positiv, dvs. $n = 1, 2, 3, \dots$

Bemærk, at vi nu ikke blot har fundet én løsning til Schrödingerligningen (1.7), men uendeligt mange, nemlig én løsning for hvert $n = 1, 2, 3, \dots$. Vi kan nummerere løsningerne ved at skrive $\psi_n(x)$. Omskriv bølgefunktionen til

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.9)$$

Spørgsmål 5

Tegn de tre første bølgefunktioner, dvs. $\psi_n(x)$ for $n = 1, 2, 3$.

Spørgsmål 6

Vi vil nu finde konstanten A .

Sandsynligheden for at finde partiklen mellem position a og b er givet ved at integrere bølgefunktionen i anden fra a til b :

$$\int_a^b \psi(x)^2 dx$$

Med 100% sandsynlighed skal partiklen være ét eller andet sted i brønden. I kvantemekanikken siger vi, at bølgefunktionen skal *normeres*, hvilket betyder, at vi kræver, at

$$\int_0^L \psi_n(x)^2 dx = 1 .$$

Benyt dette krav til at finde *normeringskonstanten* A for den n 'te bølgefunktion $\psi_n(x)$.

Hint:

$$\int_a^b \alpha \sin^2(\beta x) dx = \frac{\alpha}{4\beta} (2\beta(b-a) + \sin(2a\beta) - \sin(2b\beta))$$

Vælg den positive løsning for A og opskriv $\psi_n(x)$.

Spørgsmål 7

Den n 'te bølgefunktion $\psi_n(x)$ løser Schrödingerligningen med en energi E_n . Find energien E_n .

Spørgsmål 8

Hvis I tænker på partiklen i brønden som en klassisk bold, der bevæger sig frem og tilbage mellem brøndens vægge, hvad vil I så mene boldens "middelposition" er?

For den kvantemekaniske partikel er middelværdien for positionen, skrevet $\langle x \rangle$, givet ved

$$\langle x \rangle = \int_0^L x \psi_n(x)^2 dx, \quad (1.10)$$

og virker dette resultat rimeligt?

Hint:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \alpha x \sin^2(\beta x) dx \\ &= \alpha \left(-\frac{\cos(2\beta b)}{8\beta^2} - \frac{b \sin(2\beta b)}{4\beta} + \frac{b^2}{4} + \frac{\cos(2\beta a)}{8\beta^2} + \frac{a \sin(2\beta a)}{4\beta} - \frac{a^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Elektroner med spin

Elektroner er partikler, der besidder en egenskab, der kaldes *spin*. Der er ingen analogier fra klassisk fysik til det kvantemekaniske begreb spin, men man kan tænke på det som en særlig egenskab de har, der gør, at de er i en særlig tilstand, kaldet spin-tilstand. For elektroner er der kun to muligheder for denne spin-tilstand: enten er elektronen i spin-op, ofte angivet med en pil, der peger op \uparrow , eller også er den i spin-ned \downarrow . Det er lidt ligesom en stikkontakt, som har den egenskab, at den enten er slået op eller ned. Der er ingen muligheder andre end de to.

Har vi to elektroner, vil der altså være følgende muligheder af deres spinkonfiguration:

$$\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$$

Spørgsmål 1

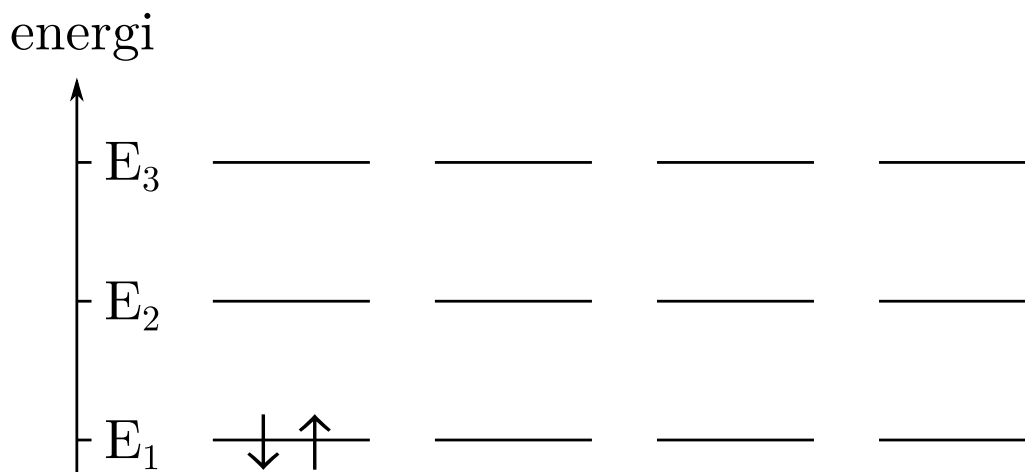
Hvilke mulige spinkonfigurationer er der af tre elektroner?

Spørgsmål 2

Et meget vigtigt princip i kvantemekanikken er *Paulis udelukkelsesprincip*, der siger, at to elektroner ikke må være i samme kvantetilstand. Det er bølgefunktionen, der afgør hvilken kvantetilstand, partiklen er i.

Bruges princippet på den forrige opgave betyder det, at to elektroner med samme spin (enten \uparrow eller \downarrow) ikke må være i samme energitilstand. Det er værdien af n i ψ_n , der angiver energitilstanden, og en partikel i energitilstanden n har energien E_n , hvor $n = 1, 2, 3, \dots$. Jo højere n er, jo højere er energien. Hvis hver streg nedenfor angiver en energitilstand med en bestemt energi, så skal vi altså placere elektroner i tilstande, så der aldrig er to elektroner med *samme* spin i *samme* energitilstand. Den laveste totale energi af de to elektroner opnås altså ved at placere to elektroner med forskelligt spin i energitilstanden med lavest energi, hvilket giver

totalenergien $E_1 + E_1$ (vist nedenfor).



Hvordan vil to elektroner begge med \uparrow placere sig, hvis den lavest mulige energi skal opnås, og hvad er energien (tegn på figuren)?

Spørgsmål 3

Som fortsættelse til spørgsmål 2: Hvordan vil I placere tre elektroner, hvis I selv kan vælge deres spin \uparrow eller \downarrow og gerne vil opnå den lavest mulig energi?

Hvordan vil I placere tre elektroner, der alle har \downarrow , så energien er lavest?

Spørgsmål 4

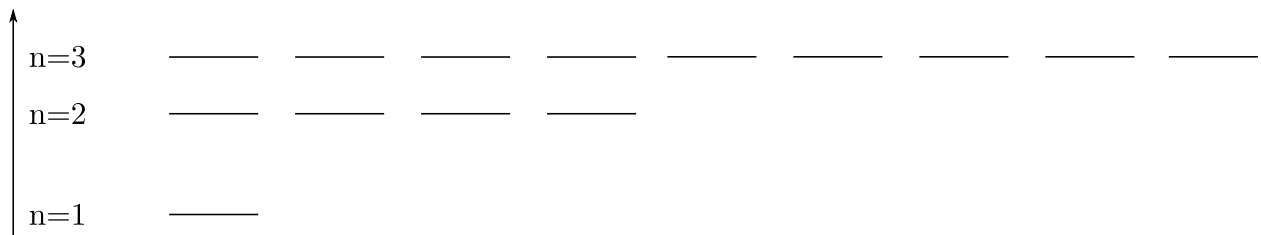
Atomere består af en atomkerne og en række elektroner udenom kernen. Elektronerne kan placere sig i forskellige skaller givet tallet $n = 1, 2, 3, \dots$. I modsætningen til før er der dog flere tilstande (streger) med samme energi. Paulis udelukkelsesprincip siger, at hver af disse mange tilstande ikke kan besættes af to elektroner med samme spin.⁶ Elektronerne i et atom vil vælge spin og energitilstand således, at totalenergien er lavest mulig.

Et He-atom har to elektroner. Hvordan vil de placere sig?

Et Ne-atom har 10 elektroner. Hvordan vil de placere sig?

⁶Vi betragter her en lidt forsimplet model for atomet, for i virkeligheden er der mange små effekter, der gør, at de forskellige tilstande tegnet på figuren med samme n ikke helt har samme energi.

energi

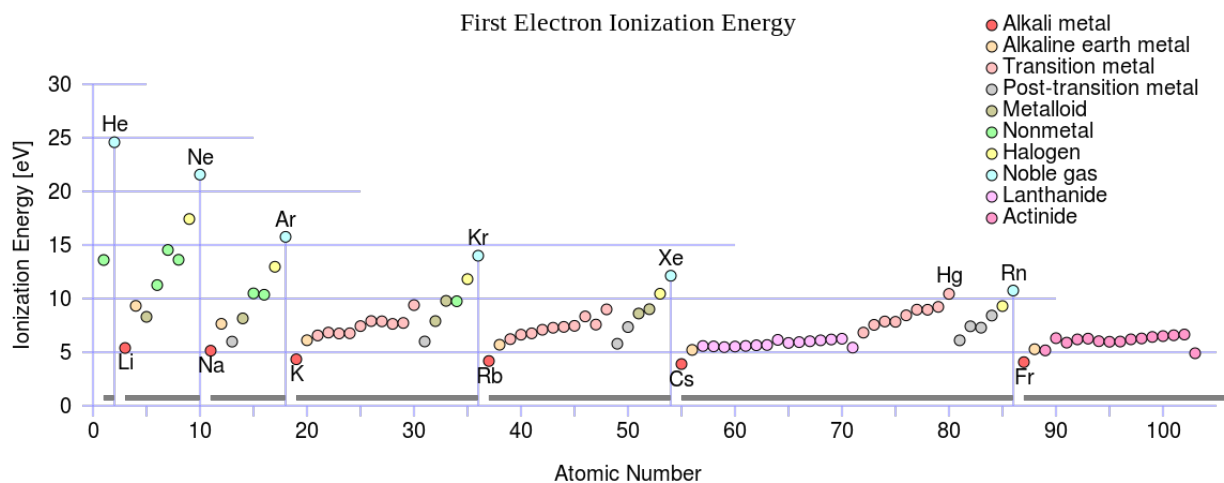


Spørgsmål 5

Ionisationsenergien er den energi, der skal tilføres et atom for at slå en elektron løs, altså at fjerne den fra atomet. Nedenfor ses ionisationsenergien for de forskellige grundstoffer.

Samspejlet mellem elektronerne i et atom er meget kompliceret, og afhængig af hvilke tilstande elektronerne besætter, er der mulighed for at sænke totalenergien ved bestemte elektronkonfigurationer.

Li har tre elektroner, og Na har 11 elektroner. Hvad siger det om elektronkonfigurationerne, at disse atomer har meget lave ionisationsenergien, mens He og Ne har meget høje?



Kapitel 2

Astrofysik

Dette afsnit vil kort komme omkring nogle centrale begreber i astrofysikken og kosmologien; fysikken bag astronomiske objekter og læren om Universet.

2.1 Kosmologi

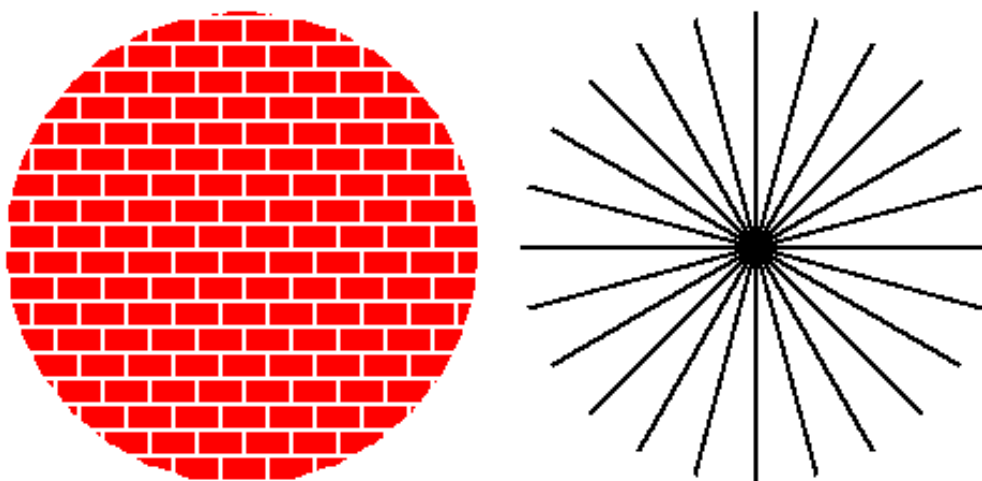
Kosmologi (fra græsk: *kosmos* ”verden” og *logia* ”studiet af”) er studiet af fødslen, udviklingen og den endelige skæbne for vores Univers. Denne del af astronomien omhandler Universets struktur på stor skala – Universet som *system* – og her er man ikke interesseret i mindre systemer som stjerner, solsystemer eller galakser. Den vigtigste antagelse i kosmologien er det *kosmologiske princip*:

Bortset fra lokale uregelmæssigheder er Universet homogent og isotropt.

At noget er *homogent* betyder, at noget er ensartet over det hele, dvs. at tætheden er ens. *Isotropi* dækker over, at et system ikke har en foretrukken retning – dette betyder en observatør vil observere Universet som værende ens i alle retninger. Det kunne umiddelbart lyde som om, at de to egenskaber er ens, men forskellen mellem dem, selvom den er subtil, er vigtig. Dette er illustreret i figur 2.1.

Antagelsen om at vores Univers er homogent og isotropt, er understøttet af kortlægningen af den kosmiske mikrobølgebaggrund (eng: *CMB* – cosmic microwave background). Baggrunden består af stråling fra det tidspunkt, hvor Universet blev gennemsigtigt (ca. 380 000 år efter Big Bang) – altså hvor temperaturen af plasmaet og strålingen dannet efter Big Bang faldt tilstrækkeligt til, at frie elektroner kunne kombinere med atomkerner og danne hydrogen og helium (af historiske årsager kaldes dette for rekombinationen, men man kalder det også for foton-afkoblingen) og lyset kunne undslippe. Den kosmiske mikrobølgebaggrund er derfor det ældste lys i Universet! Dengang var strålingen i UV-området, men udvidelsen af Universet (se næste sektion) har nu kølet den til en temperatur på 2.73 K og flyttet den til mikrobølgeområdet. Den kosmiske mikrobølgebaggrund er blevet kortlagt af flere missioner, først COBE (COsmic Background Explorer), siden WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) og senest Planck, se figur 2.2.

Det ses, at selv med høj opløsning er kortet uniformt – beviset på et næsten homogent og isotropt tidligt Univers. Men små fluktuationer i tætheden er stadig til stede, og var det ikke for disse, ville den gravitationelle



Figur 2.1: Figuren til venstre viser et homogent system, men dette system er ikke isotropt, fordi vi kan orientere os ved hjælp af mønstret, og derved kende forskel på de forskellige retninger. En observatør i centrum af figuren til højre vil se, at systemet er ens i alle retninger – at der er isotropi. Men tætheden ændrer sig gennem figuren, og systemet er derfor ikke homogent. Fra http://www.astro.ucla.edu/~wright/homo_iso.gif

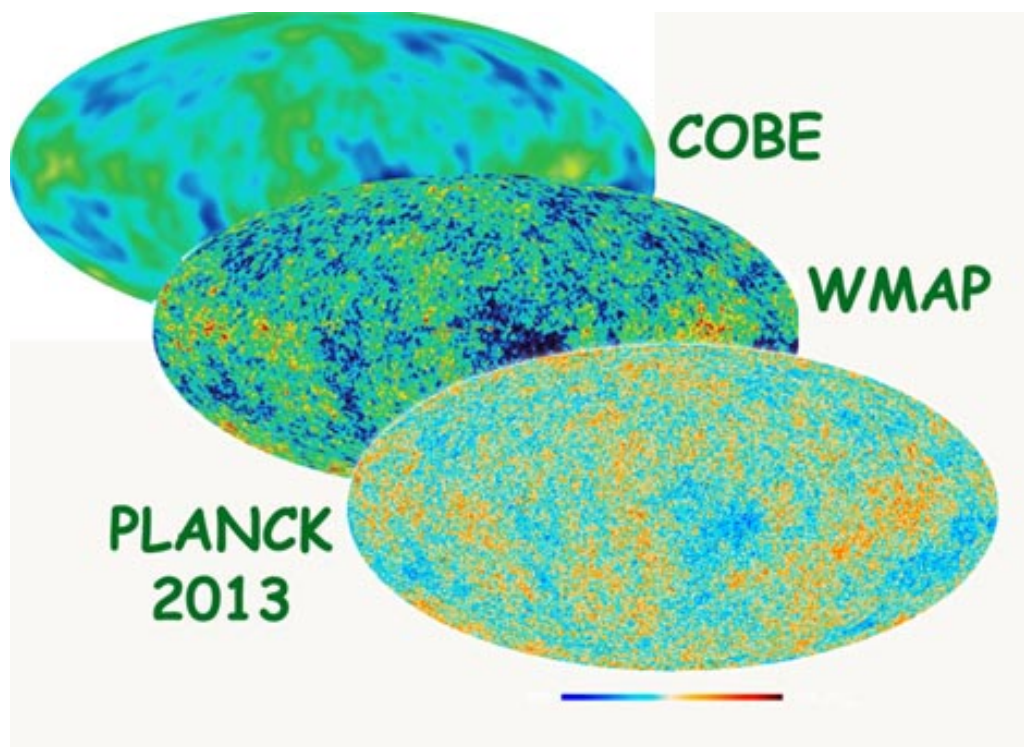
tiltrækning ikke have kunnet skabt de galakser vi observerer (og bebor!) idag.

Antagelsen om at Universet er homogent og isotropt bryder sammen på små skalaer, hvor det jo er klart, at der nogen steder er tomt rum, og andre steder befinder sig planeter, solsystemer, galakser og superhobe – dog observerer vi ingen indikation på skalaer større end ~ 100 mega-parsec ($100 \text{ Mpc} = 3 \cdot 10^8 \text{ lysår} \approx 3 \cdot 10^{24} \text{ m}$). 100 Mpc er da vores skala for homogenitet for Universet.

Kosmologiske modeller skal kunne fortælle os noget om Universet på de skalaer, hvor det kosmologiske princip gælder – hvordan det udvikler sig i tid, og hvilke bestanddele det består af. Den til dags dato mest anerkendte model er den såkaldte Λ CDM-model (eng:*Lambda-Cold-Dark-Matter*), som beskriver et fladt¹Univers, som er ca. 13.75 mia. år gammelt, der udvider sig accelererende.

Modellen er navngivet således, fordi den forudsiger Universets to største bestanddele til at være *mørk energi*, Λ (nogle gange kaldet den kosmologiske konstant) (som udgør $\sim 70\%$ af det samlede Univers) og det ”kolde” (ikke-relativistiske) mørke stof (som udgør næsten 30%). Universet består derfor i meget lille grad af ”lyst” (såkaldt *baryonisk*) stof – dybest set alt hvad vi kender fra elementarpartikler og kvarker til stjerner og galakser. Det mørke stof kaldes mørkt, fordi det modsat ”lyst” stof, ikke kan påvirkes af lys/elektromagnetisk stråling. Det kan klumpe sammen ved at vekselvirke gennem tyngdekraft – i så høj grad, at det forvrænger selve rumtiden, det 4-dimensionelle rum. Denne gravitationelle effekt kan man blandt andet se i billeder af ”Hubble Deep Field” (se fig. 2.3), som er billeder taget af Hubble-rumteleskopet (eng:*Hubble Space Telescope*, HST) dybt ud i rummet, og dermed tilbage i tiden.

¹ modsat andre former for krumning af rummet, som kan være både *åbne* og *lukkede*, såkaldte ikke-Euklidiske geometrier



Figur 2.2: Kortlægningen af den kosmiske mikrobølgebaggrund af COBE, WMAP og Planck. Mælkevejen, som ellers ville være til stede i billedet, er redigeret ud. Fra <http://www.planetastronomy.com/astronews/astrn-2013/04/astron3.jpg>

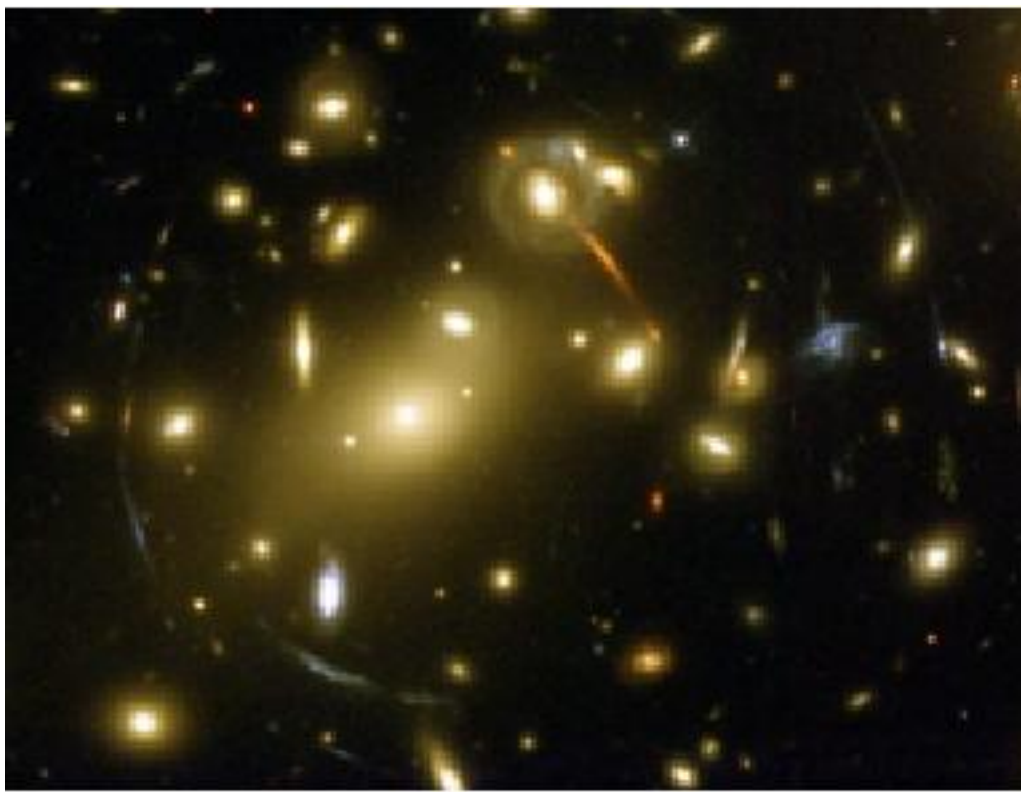
Et Univers domineret af mørkt stof ville trække Universet sammen i et såkaldt "big crunch" – et stort kollaps. Men Universet trækker sig ikke sammen, tværtimod – det udvider sig accelererende. Dette skyldes mørk energi, nogen gange beskrevet som vakuum energien, som modarbejder sammenklumpningen af stof. Meget mere ved vi ikke om det, men dets effekter kan observeres.

2.2 Rødforskydning og udvidelsen af Universet

I 1920'erne opdagede Edwin Hubble at fjerne galakser bevægede sig væk Jorden med en hastighed, der var proportional med deres afstand, kendt som Hubble's lov:

$$v = H_0 D, \quad (2.1)$$

hvor D er afstanden til galakserne og proportionalitetskonstanten H_0 er kendt som Hubble's konstant. Hubble's opdagelse kunne kun tolkes som at Universet udvidede sig. Denne opdagelse gjorde han på baggrund af det fænomen, der hedder rødforskydning. Man kan ikke snakke om rødforskydning, uden først at nævne Doppler-effekten, et begreb du måske er bekendt med fra din hverdag. Kan du din Doppler-effekt ud og ind,

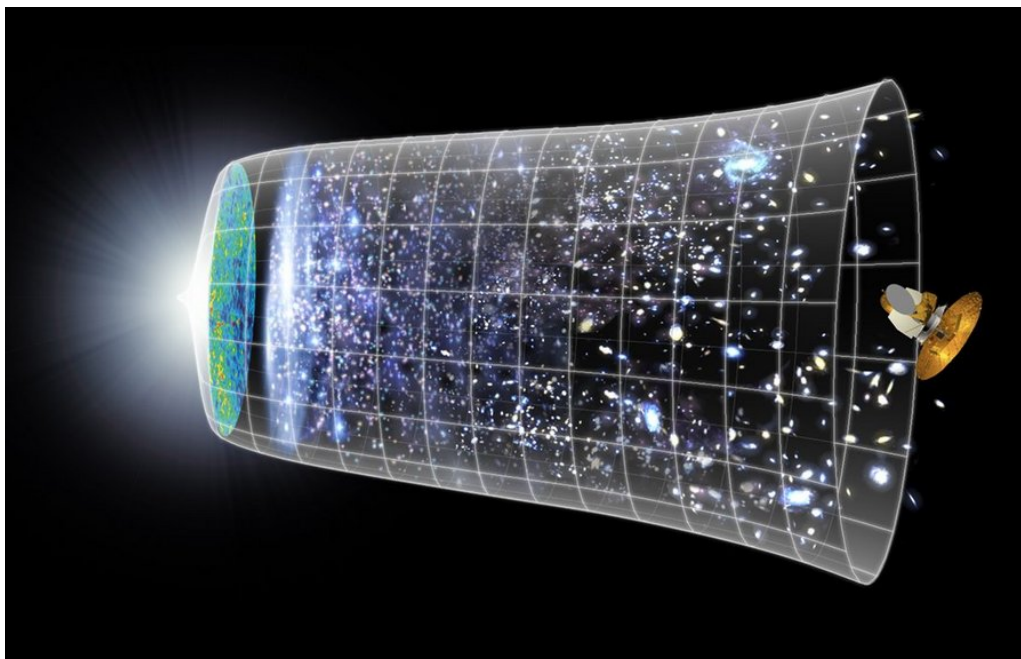


Figur 2.3: Hubble Deep Field. Det ses, hvordan nogle galakser er forvrængede og strakte – en optisk effekt af at lyset fra disse galakser bevæger sig i rumtiden, som krummer sig omkring massive mængder mørkt stof. Denne effekt kaldes gravitationel linsning. Fra <http://www.hep.shef.ac.uk/research/dm/images/hubbleDeepField.jpg>

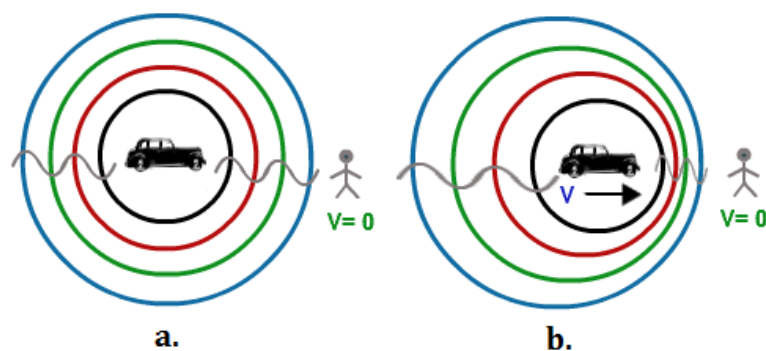
spring da videre til næste sektion om lys og rødforskydning, ellers så kan du læse lidt om Doppler-effekten nedenfor.

Doppler-effekten

Doppler-effektens mest kendte hverdagseksempel er sirenen på en kørende udrykningsbil. Kommer sirenen imod dig er tonen høj (svarende til større frekvens), mens tonen er dybere (lav frekvens) når den bevæger sig væk fra dig. Hvad skyldes dette fænomen? Selvom sirenen fra køretøjet ikke ændrer sin frekvens, vil hver bølgetop fra sirenen være tættere på dig (man kan se det som at de udsendte bølgetoppe bliver skubbet sammen), dette får frekvensen (antal bølgetoppe per tid) til at synes højere. Tilsvarende vil der for en observatør for hvilken sirenen bevæger sig væk fra, synes længere mellem hver bølgetop, svarende til en tilsyneladende lavere frekvens. Doppler-effekten er tilstede for alle slags bølger hvis kilde er i bevægelse, tænk bare på bølgerne i vandet omkring en svømmende svane eller på blå- eller rødforskydningen af lys.



Figur 2.4: Illustration af Universets tidslinje, fra Big Bang til undslippelsen af strålingen fra rekombinationen som skulle blive til CMB til dannelsen af stjerner og galakser i et Univers som udvider sig accelererende. Fra http://www.strings.ph.qmul.ac.uk/~bigdraw/wmap/CMB_timeline-main.jpg

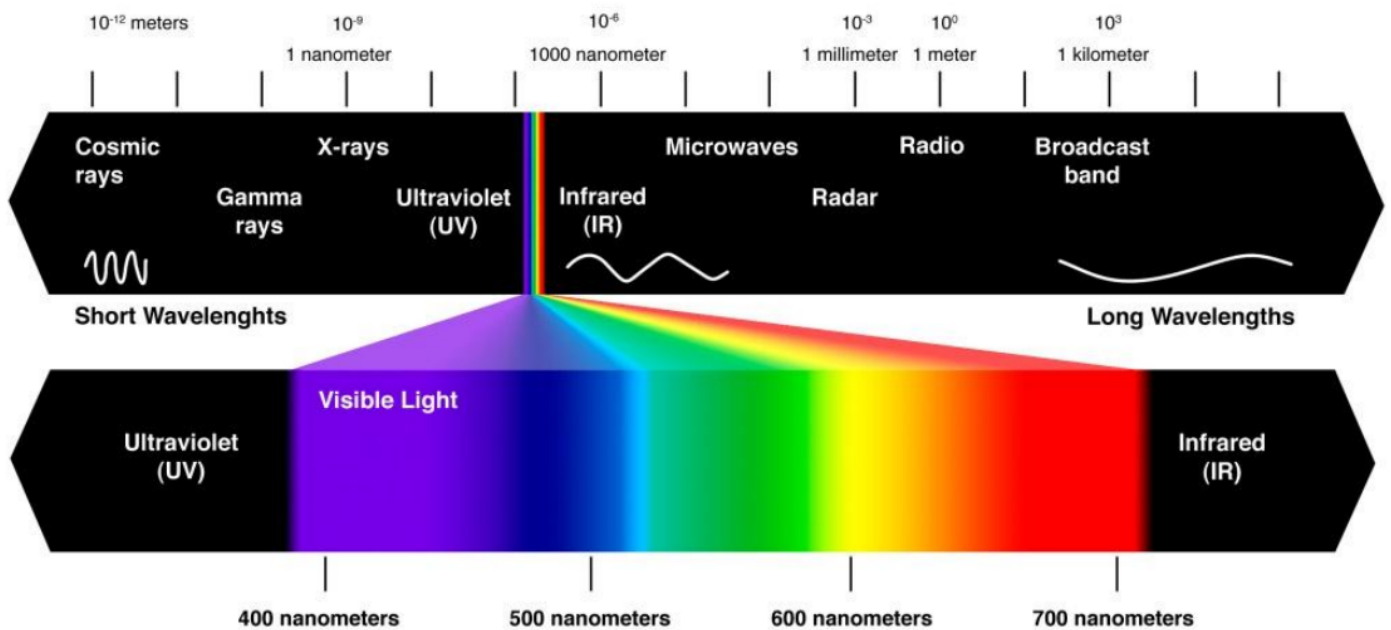


Figur 2.5: Illustration af Doppler-effekten. a: kilden er i hvile, og frekvensen syntes ens i alle retninger. b: kilden er i bevægelse mod en observatør som opfatter frekvensen højere (kortere bølgelængde).

Lys

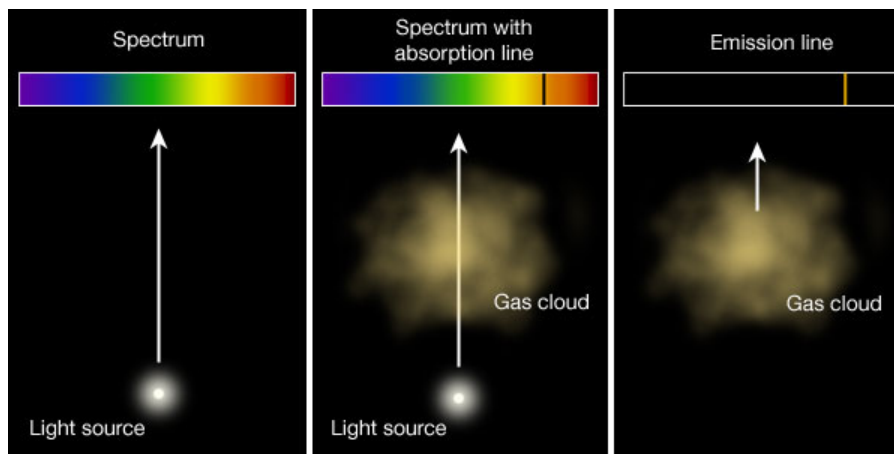
Rødforskydning dækker over, at lyset fra en kilde er modtaget med *større* bølgelængde, end det er udsendt med – man siger, at lyset er blevet *rødere*, idet vi i det synlige område (se fig. 2.6) bevæger os mod rødere farve med længere bølgelængde.

Bølgelængder af lys fra astronomiske kilder (stjerner, galakser, interstellare gasskyer) måles med *spektroskopi*, som måler hele eller dele af kildens spektrum, en slags skanning over bølgelængder. Alt efter kildens



Figur 2.6: Det elektromagnetiske spektrum. Fra <http://www.immunolight.com/wp-content/uploads/2014/03/Electromagnetic-Spectrum-BLACK.png>

natur kan spektret enten ses som et absorptionspektrum eller et emissionsspektrum, disse er vist i fig. 2.7. De sorte absorptionslinjer eller de farvede emissionslinjer kaldes for spektrallinjer.

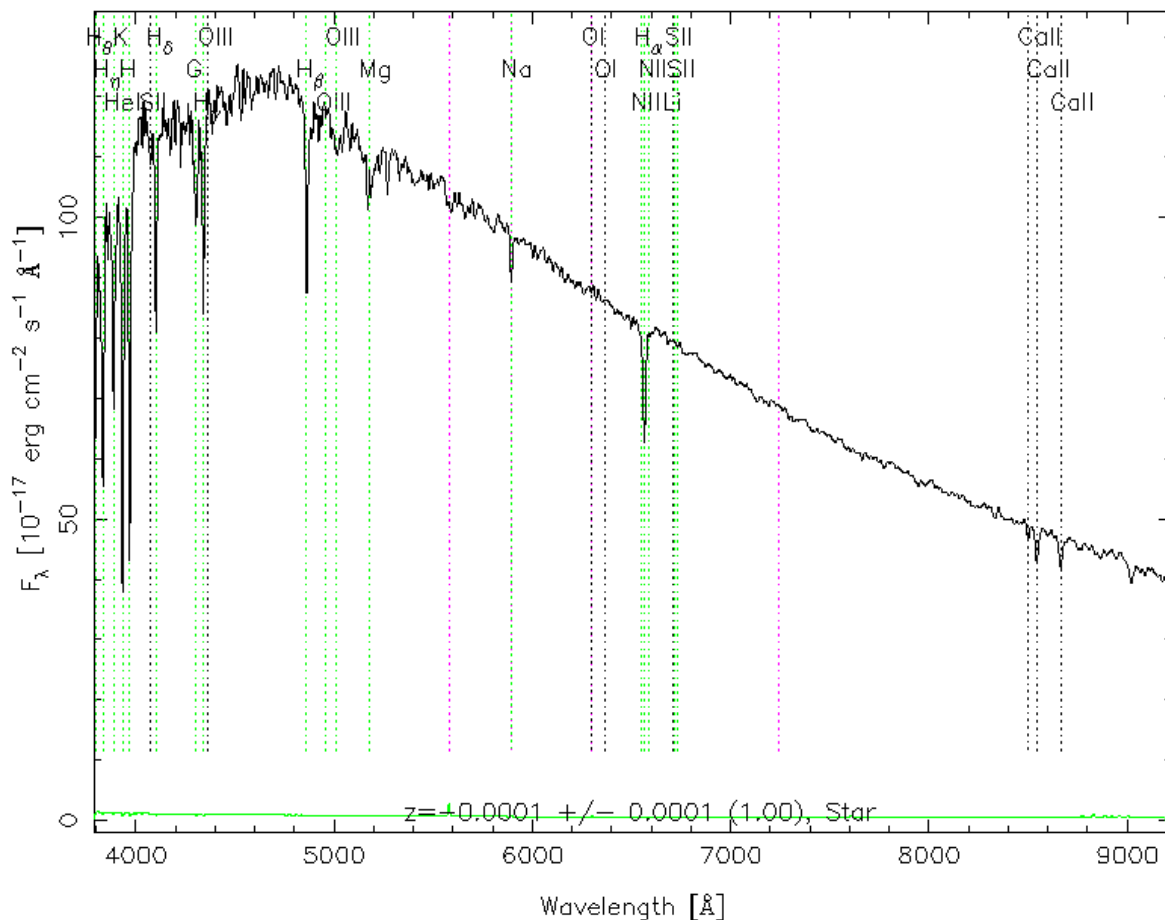


Figur 2.7: Kontinuert spektrum (til højre), absorptions-spektrum (midtfor) og emissions-spektrum (til venstre) fra <http://astro.psu.edu/public-outreach/fireworks-masks-1/absorption-and-emission-spectra>

Et typisk spektrum fra en stjerne er vist i fig.2.8.

En meget prominent linje er H_{α} -linjen ved en bølglængde på ca. 656 nanometer eller 6560 ångstrøm

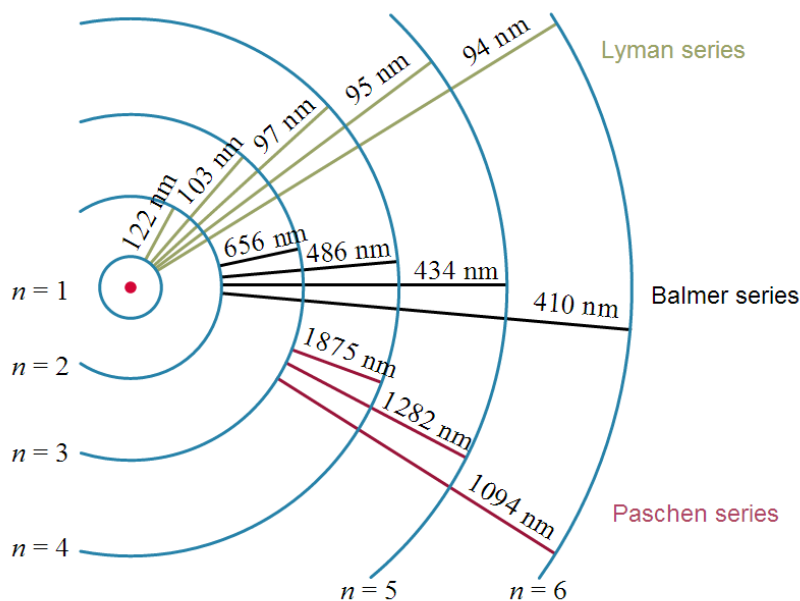
RA=170.25353, DEC=-1.18754, MJD=51612, Plate= 280, Fiber=202



Figur 2.8: Et typisk stjernespektrum. Y-aksen skal forstås som intensitet, mens der på X-aksen er bølgelængde i ångstrøm (Å) ($1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$). Dykkene i intensitet er angivet med en overgang tilhørende et grundstof, som er identificeret i stjernens atmosfære. fra <http://i.stack.imgur.com/RMHmB.gif>

(Å), som kommer fra brint. Vi kan forstå denne bølgelængde ud fra Bohr's model af brintatomet (se fig. 2.9. Til hvert niveau eller bane (n) hører en bestemt energi. Lys, som udover at kunne forstås som bølger, kan også ses som partikler kaldet fotoner, som hver bærer en bestemt energi karakteriseret via dens frekvens eller tilsvarende bølgelængde (husk, $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$). Kan en foton overføre energi til en elektron svarende til energiforskellen mellem to eller flere baner, vil elektronen springe mellem niveauerne.

Observeres der således lys i alle bølgelængder og derved energier (et kontinuum) fra en baggrundskilde der er rejst igennem en sky af hydrogen, vil fotoner med den energi der svarer til overgangene i atomet mangle, idet deres energi er blevet overført til elektronerne i hydrogenet – vi ser et absorptionsspektrum. Jo højere bane eller niveau, elektronerne befinder sig i, desto højere energi af atomet. Det er mest energi-



Figur 2.9: Bohr's brintmodel, hvor der er angivet bølgelængden af det lys, der skal absorberes eller udsendes førend en elektron kan hoppe mellem banerne. Fra http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b2/Hydrogen_transitions.svg

mæssigt favorabelt for at atom at være i så lav en energitilstand, som det kan lade sig gøre, og derfor vil de energirige (exiterede) elektroner gerne springe tilbage i de lavere baner under udsendelse af fotoner, igen med en bestemt energi karakteriseret ved energiforskellen mellem banerne. Disse fotoner bliver udskudt i alle retninger fra skyen, ikke kun i samme retning, som lyset fra baggrundskilden, og derfor mangler linjerne stadig i det observerede spektrum. En observatør af skyen, hvor baggrundskilden til fotonerne ikke er i synsretningen, vil da kun modtage enkelte fotoner med energier tilsvarende niveauerne i brint – et emissionsspektrum.

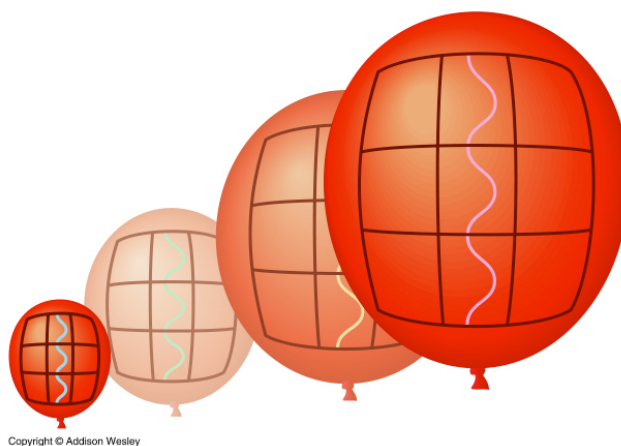
Tilbage til H_α -linjen. Ud fra fig. 2.9 kan vi se, at bølgelængden på 656 nanometer svarer til at en elektron bevæger sig mellem $n = 2$ - og $n = 3$ -banen (en linje fra Balmer-serien)

H_α -linjen og alle de andre linjer i fig. 2.8 optræder ved deres "rigtige" bølgelængder, korrigeret for det Dopplerskift, de har været udsat for. Fra laboratoriet kendes grundstoffernes bølgelængder for absorptions- og emissionslinjerne, og det er disse man sammenligner med for at se, hvor rødforskuet et objekt er.

Dopplerskiftet af stjerners spektrum er af stor vigtighed indenfor feltet, som beskæftiger sig med at søge efter exoplaneter (ekstra-solare planeter), planeter udenfor vores eget solsystem. Planeter kredser nemlig ikke bare om deres stjerne, men omkring et fælles massemidtpunkt i systemet, som stjernen også kredser om. Men fordi stjernen er så tung, bevæger den sig meget lidt i forhold til planeterne. Dog kan skiftet i spektrallinjerne fra stjernen fra denne bevægelse godt detekteres – og derved kan man regne ud, at der findes en eller flere planeter, som "hiver" i den, uden at man behøver at observere dem direkte.

Kosmologisk rødforskydning

Størstedelen af alle astronomiske objekter langt fra os, som andre galakser, er rødforskydet på grund af udvidelsen af Universet. Dette skyldes lysets endelige hastighed (ca. 300 000 km/s). Siden Universets skalaer er så store, tager det lyset lang tid at nå os, og det kan ændres undervejs. Dermed er det lys vi modtager også ”gammelt” – et meget forsinket billede af, hvordan Universet så ud, da det blev udsendt. Der er en forskel fra normal Doppler-effekt, idet rødforskydningen her ikke skyldes kildens egen bevægelse væk fra os, men udvidelsen af rummet, inden lyset bliver modtaget her på Jorden. Udvidelsen af rummet betyder at alle indbyrdes afstande bliver forøgede, som var de på overfladen af en ballon, der pustes op, eller som rosiner i en bolledej, der hæver. Dette er forsøgt illustreret i fig.2.10.



Figur 2.10: Rødforskydning af lys forårsaget af Universets udvidelse. Fra http://usersguidetotheuniverse.com/wp-content/uploads/2011/01/balloon_expanding.jpg

Fra Jorden ser det ud som om alle ting fjerner sig fra os, og man kunne måske derfor ledes til at tro, at vi befandt os i centrum af Universet. Men dette ville jo være et klart brud på det kosmologiske princip om isotropi; der kan ikke være noget centrum i Universet. Dette betyder, at fra alle punkter i Universet, ikke bare fra Jorden, må man observere det samme: afstanden mellem alle punkterne udvider sig med rumtiden.

Rødforskydningen z er defineret som:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{uds}}} - 1, \quad (2.2)$$

hvor λ_{obs} er bølglængden af det observerede lys og λ_{uds} er bølglængden af det oprindeligt udsendte lys. Rødforskydningen angiver også den afstand med hvilken kilden bevæger sig væk fra os. For lave hastigheder (mindre end halvdelen af lysets hastighed, c) er z relateret til hastigheden v gennem: $z = \frac{v}{c}$. For hastigheder tæt på c gælder følgende relation:

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \quad (2.3)$$

mens der gælder mere komplicerede udtryk for objekter med meget høj rødforskydning, som observeres langt tilbage i Universets levetid.

2.3 Afstande og luminositet

Afstand er et vigtigt begreb i astrofysikken og kosmologien. En af de mest brugte metoder til bestemmelse af afstande er gennem et objekts *luminositet*. Et objekts absolutte luminositet L er energi udsendt per sekund. For en stjerne af temperatur T og radius R er denne

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad (2.4)$$

hvor σ er Stefan-Boltzmann's konstant.

Hvis denne energi er udsendt ens i alle retninger og modtages i en afstand d_L væk, er den modtagne *tilsyneladende* luminositet – eller *fluxen* – givet ved:

$$f = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (2.5)$$

d_L er derfor kaldet luminositetsafstanden. Et objekts lysstyrke kan beskrives i *magnitudesystemet*, som er et logaritmisk system, der daterer helt tilbage til de gamle grækere. Af historiske årsager fungerer systemet således, at jo højere magnitude, desto svagere ser objektet ud på himlen og omvendt.

Det betyder, at fuldmånen set fra Jorden har en magnitude på $m = -12.74$, mens stjernesystemet alpha Centauri på nattehimmelen har en tilsyneladende magnitude på $m = 1.33$. To himmellegemer med fluxer f_1 og f_2 vil have tilsyneladende magnituder som er relateret til hinanden ved

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{f_1}{f_2} \right). \quad (2.6)$$

Men den tilsyneladende magnitude fortæller i sig selv ikke noget om luminositeten af en given kilde. Den *absolutte*, eller endelige, magnitude, M , er defineret som den tilsyneladende magnitude for en kilde, *hvis den var placeret i en afstand på 10 parsec (pc)² fra observatøren/Jorden*.

En kildes tilsyneladende og absolutte magnitude er relateret til hinanden ved:

$$M = m - 5 \log \left(\frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right). \quad (2.7)$$

²se afsnittet "Konstanter" om enheden parsec

Forskellen mellem M og m er objektets *distancemodulus*:

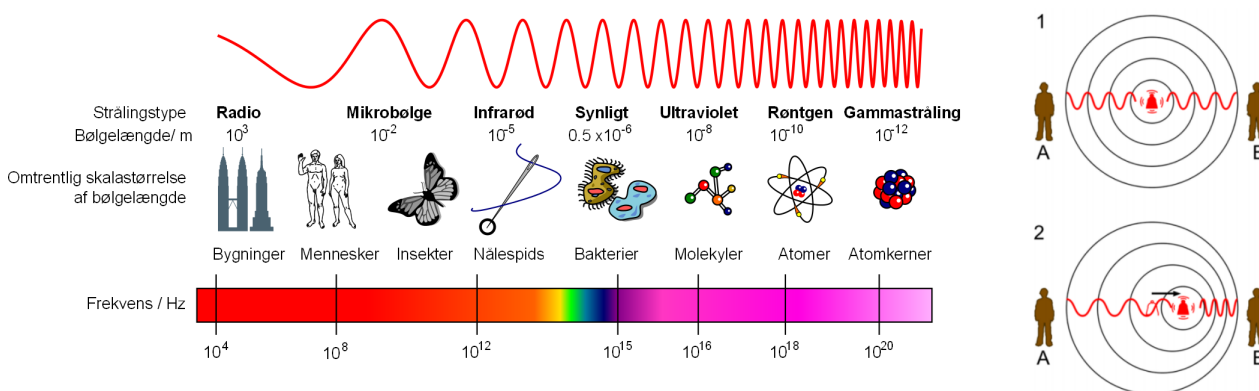
$$\mu \equiv m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{10 \text{pc}} \right) - 5 = 5 \log \left(\frac{d_L}{10 \text{Mpc}} \right) - 25. \quad (2.8)$$

2.4 Opgaver

Opgaverne kan laves kronologisk, eller alt efter, hvad man lige synes er interessant. Det er forsøgt at ramme bredt med niveauet, så nogle opgaver vil måske enten falde dig meget nemme eller meget svære, det er tilladt at hoppe så meget i det man lyster. For nyttige konstanter og omregninger til opgaveregningen, se næste sektion, ”Konstanter”.

Rød- og blå-forskydning

Et vigtigt begreb i astrofysikken er rød- og blåforskydningen af lys. Brug billederne nedenunder til at forklare forskellen på de to fænomener.



Figur 2.11: .

Kvasarer

Kvasarer (eng: ”quasars” fra ”quasi-stellar radio sources”) er de mest energirige og fjerne medlemmer af objekterne kendt som aktive galaksekerner (eng: ”AGN: Active Galactic Nuclei”). Kvasarer har siden deres opdagelse været omgivet af mystik, men der er nu opnået generel enighed om, at de er kompakte regioner i massive galakser, der indeholder det centrale supermassive sorte hul. De kæmpe mængder energi der bliver udstrålet af kvasarerne stammer fra al stoffet, som falder ind mod det sorte hul og bliver slynget ud.

Et kvasar-spektrum er vist i fig. 2.13.

- Bevæger kvasaren sig mod eller væk fra os?
- Hvad er dens hastighed?
- Man ser tit, at spektrallinjerne fra kvasarer er meget brede, fordi gassen bevæger sig hurtigt omkring det sorte hul, hvilket giver en Doppler-forbredning (lyset bliver både rød- og blåforskydet). Estimer bredden af H_{α} -linjen, $\Delta\lambda_{\text{obs}}$ og udregn denne hastighed via

$$v_{\text{gas}} = \frac{\Delta\lambda_{\text{obs}}}{2\lambda_{\text{uds}}} c. \quad (2.9)$$



Figur 2.12: En kunstnerisk forestilling af en kvasar

Andromeda-galaksen

Andromeda-galaksen eller Messier-31 (M31) er den nærmeste spiralgalakse, og den største galakse i den Lokale Gruppe, som er en samling af ca. 50 galakser, heriblandt vores egen Mælkevej.

- Det observerede lys fra Andromeda er 2.54 mio. år gammelt. Hvor langt er der til Andromeda-galaksen?
- Lyset fra Andromeda-galaksen er blåforskudt, svarende til at det bevæger sig mod os med en hastighed på -301 km/s. Hvornår støder Andromeda og Mælkevejen sammen? Hvad tror I, det kommer til at betyde?

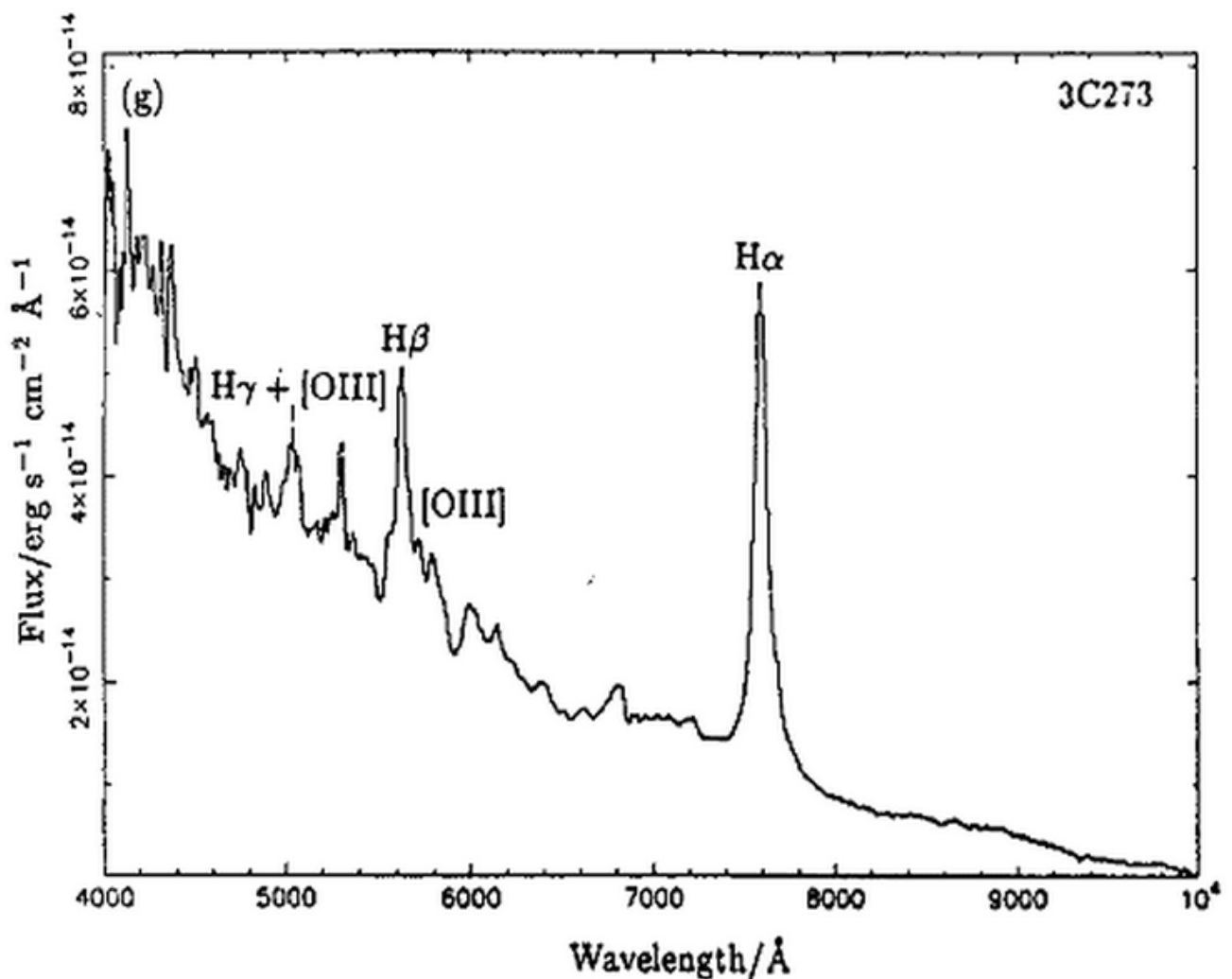
Pulsarer

Pulsarer er hurtigtroterende neutronstjerner, som udsender et "beam" af elektromagnetisk stråling, meget lig et fyrtårn. De er tungere end Solen, men er størrelsesmæssigt meget mindre end Jorden, og er derfor utroligt tætte objekter.

Pulsarer roterer med faste, korte perioder, der producerer signal i meget præcise intervaller på mellem millisekunder og sekunder for individuelle pulsarer. Ligesom med fyrtårnet, kan vi kun detektere puls-signalet fra dem, hvis beamet peger mod os/Jorden.

En pulsar har en rotationsperiode på $T \simeq 33$ ms, masse på $M \simeq 3 \cdot 10^{30}$ kg og en radius på $R = 10$ km.

- Udregn pulsarens inertimoment, under antagelse af at den er en kugle med uniform massetæthed.
- Pulsaren udstråler energi med en samlet effekt på $P \simeq 6 \cdot 10^{31}$ W, som får den til at bremses. Hvor meget længere er pulsarens periode T_f da efter et døgn?



Figur 2.13: Spektrum af en kvasar

Skalafaktoren

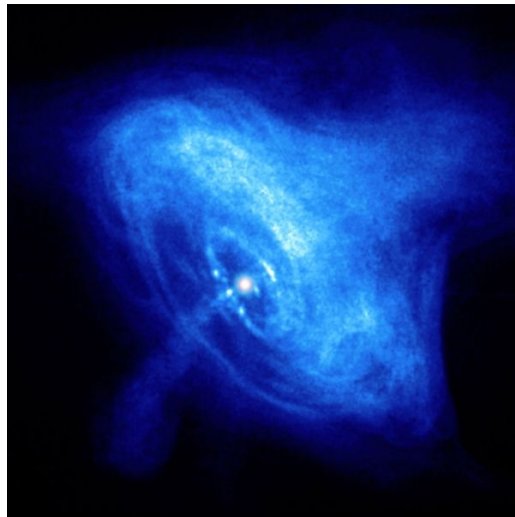
I et udvidende (eller sammentrækkende) homogent Univers vil en partikel som er lokaliseret på punktet \mathbf{x} til tiden t_0 være lokaliseret til en anden tid t ved punktet \mathbf{r} (med $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{x}$). Vi kan derfor skrive

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}, \quad (2.10)$$

hvor $a(t)$ kun afhænger af tiden. $a(t)$ kaldes for skala-faktoren, og den beskriver hvordan parametre udvikler sig i tiden som følge af Universet udvidelse. Det ses hvordan $a(t_0) = 1$. Tidspunktet t_0 er arbitrært, vi vælger det til at være idag= t_0 . I Λ CDM-modellen kan alle Universets bestanddele deles op i *stråling*, *stof* og *kosmologisk konstant*. Strålingsbidraget kan idag negligeres, og stof-bidraget tæller både det lyse og det



Figur 2.14: Andromeda-galaksen, observeret med Hubble Space Telescope (HST).



Figur 2.15: En pulsar i Krabbetågen, set i röntgen.

mørke stof. I et fladt Univers summer den såkaldte tæthedsparemeter Ω altid til 1. Vi kan derfor skrive $\Omega \approx \Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0}$, hvor M og Λ står for hhv. stof og kosmologisk konstant. 0-subskript betyder værdier til $t = t_0$, altså værdien idag. For mørk energi/kosmologisk konstant gælder $\Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{\Lambda}$. I denne model afhænger $a(t)$ af disse størrelser, såvel som Hubble's konstant H_0 :

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{M,0}}{4\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \left(\exp \left[\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{\Lambda}} H_0 t \right] - \exp \left[-\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{\Lambda}} H_0 t \right] \right)^{2/3} \quad (2.11)$$

(a) Temperaturen af den kosmiske mikrobølgebaggrund er idag 2.73 K. Brug at temperaturen udvikler sig

som

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}, \quad (2.12)$$

til at finde ud af, hvad temperaturen af Universet var, da rekombinationen fandt sted.

- (b) Værdien af den observerede bølglængde fra fjerne kilder afhænger selvfølgelig også af skalafaktoren. Der gælder $\lambda(a) = a\lambda_{\text{obs}}$. Udtryk rødforskydningen z som funktion af $a(t)$. Hvad er rødforskydningen af den kosmiske mikrobølgebaggrund? Giver dette resultat mening?

Mælkevejens supermassive sorte hul

Man har fundet ud af, at spiralgalakser som vores egen Mælkevej indeholder et såkaldt *super-massivt* sort hul (eng: "Super Massive Black Hole", *SMBH*) i centrum. Dette er blandt andet konkluderet ud fra opførslen af systemer tæt på centrum af galaksen. Stjernen S0-2 er i bane om det, man mener er Mælkevejens centrale SMBH. Vi vil nu prøve at estimere dets masse ved at antage, at S0-2 bevæger sig i en cirkelbane med en radius på $r_{\text{min}} = 6 \times 10^{-4}$ pc og en hastighed på $v_{\text{max}} = 5000$ km/s. Vi kan negligere stjernens masse.

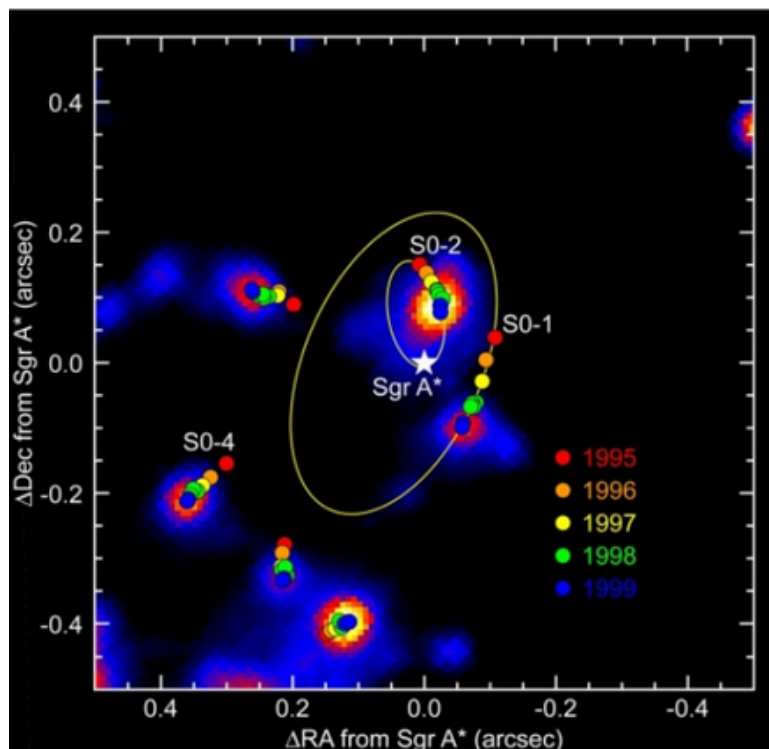
- (a) Brug at tyngdeaccelerationen er $a = \frac{GM}{r^2}$. Brug enten din viden om cirkelbaner eller Kepler's love til at finde massen af S0-2 omdrejningspunkt i enheder af Solens masse.
- (b) En anden form for rødforskydning, vi ikke har nævnt endnu er gravitationel rødforskydning, som er den forvrængning lys får af at være tæt på en stor krumning i rumtiden, eksempelvis forårsaget af et sort hul. Denne rødforskydning kan findes ved:

$$z_G + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}. \quad (2.13)$$

Hvad giver den største rødforskydning: stjernens Dopplerskift eller påvirkningen fra det sorte hul?

Supernovaer

Supernovaer, som er resultatet af en stjernes eksplosive endeligt er af kæmpe vigtighed for astrofysikken og kosmologien, idet disse voldsomme eksplosioner er så lysstærke, at de kan detekteres ud til høje rødforskydninger. Stjerner omsætter lette grundstoffer til tungere gennem fusion i deres kerne, dette skaber et strålingstryk som balancerer stjernens egen vægt. De tungeste stjerner kan kun fusionere op til jern, det grundstof med den højeste bindingsenergi, og har stjernen herefter nået en bestemt masse, kolliderer den under sin egen vægt, enten til en supernova eller et sort hul. Supernovaer påvirker det interstellare medium voldsomt – deres shock-bølger kan sætte gang i stjernedannelse, ødelægge planetsystemer, og berige mediet med store mængder tungere stoffer syntetiseret i eksplosionen, hvoraf nye planetsystemer som vores eget Solsystem kan dannes.



Figur 2.16: Sgr-A* er en kilde til kraftig röntgen-stråling nær Mælkevejens dynamiske centrum, og man mener, at dette er Mælkevejens supermassive sorte hul. Fra <http://blogs.scientificamerican.com/guest-blog/files/2011/09/SagA-ghez.jpg>



Figur 2.17: En mulig måde for en hvid dværg at eksplodere i en SN1a er gennem vekselvirkning med en binær partner at suge masse til sig. Fra http://hetdex.org/images/dark_energy/supernova_explosion_34452.jpg



Figur 2.18: SN1a SN1994D i NGC 4526 (nederst til venstre) lyser næsten lige så stærkt som sin galakse. Fra <http://ca0.ru/main/SN1994D-.jpg>

En bestemt type supernova, Supernova type 1a (SN1a), er af særlig betydning, idet det er observationen af disse, som ledte til opdagelsen om, at Universet udvidede sig accelererende. SN1a er den supernova som opstår, når en hvid dværg, en ellers død mindre stjerne, tilegner sig ekstra masse, f.eks. fra en stor partnerstjerne. Fordi alle SN1a er fra den samme type objekt, er deres lysprofil ens alle steder i Universet, og deres lysstyrke kan derfor kalibreres til meget præcist at bestemme afstande.

- (a) SN2014J, en SN1a opdaget i januar 2014 fra M82, er den nærmeste supernova opdaget i nyere tid. Galaksens distance-modulus er bestemt til 27.7. Hvad er dens afstand?
- (b) Generelt kan vi om den absolutte magnitude og luminositeten skrive

$$M = -2.5 \log(L) + \text{konstant} \quad (2.14)$$

Vis, at vi kan finde den absolutte magnitude af et objekt som:

$$M = -2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) + M_{\odot}, \quad (2.15)$$

hvor L_{\odot} og M_{\odot} er hhv. luminositet og absolut magnitude for Solen.

- (c) Opskriv et udtryk for et objekts luminositet som funktion af dets absolutte magnitude, Solens absolutte magnitude og Solens luminositet.

SN2014J er observeret med en tilsyneladende magnitude på 11 mag. Hvad er dens luminositet i enheder af L_{\odot} ? (hint: brug at Solens absolutte magnitude er 4.74 mag). Kan du estimere SN2014J's massetab per sekund i enheder af Solens masse?

Exoplaneterne i Gliese 581

Temperaturen på overfladen af en planet er vigtig for forholdene for eventuelt liv. Denne temperatur afhænger af afstanden til den stjerne, planeten kredser om, hvor meget stråling stjernen producerer, og hvor meget stråling planeten reflekterer fra sin overflade. Sidstnævnte angives procentvis ved planetens såkaldte albedoværdi, A .

- (a) Vis, at mængden af energi en planet i afstand r med radius R_P absorberer per sekund er givet ved

$$L_{\text{abs}} = \frac{R^2 \sigma T^4 \pi R_P^2}{r^2} (1 - A), \quad (2.16)$$

hvor R og T er hhv. radius og temperatur af stjernen.

- (b) Hvis planeten roterer hurtigt, kan den udsende en luminositet L_{uds} givet ved ligning 2.4. Antag at $L_{\text{abs}} = L_{\text{uds}}$ og vis, at temperaturen på overfladen af planeten kan skrives som

$$T_p = T \left(\frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2}. \quad (2.17)$$

- (c) Omkring stjernen Gliese 581 har man identificeret 6 exoplaneter, hvoraf flere kunne ligge i den beboelige zone – det område for hvilket vand kan eksistere i flydende form. For Gliese 581 gælder $R = 2.02 \times 10^8$ m og $T = 3480$ K. Hvis vi antager, at alle planeterne er stenplaneter (dette er en rimelig antagelse, givet deres masser, se tabellen nedenfor), og at de er lig Mars, således at de besidder en albedo på 0.16 og en drivhuseffekt på $T_d = 75$ grader, kan vi udregne om de ligger i den beboelige zone eller ej.

Navn	$M_{\text{min}} [M_{\text{jord}}]$	afstand [AU]
Gliese 581e	1.7	0.0285
Gliese 581b	15.6	0.0406
Gliese 581c	5.6	0.0730
Gliese 581g	3.1	0.146
Gliese 581d	5.6	0.218
Gliese 581f	7.0	0.758

Hvilke planeter har potentiale for at ligge i den beboelige zone?

2.5 Konstanter

Navn	symbol	værdi
Lysets hastighed i vakuum	c	$2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$
Newtons gravitations konstant	G	$6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Stefan-Boltzmanns konstant	σ	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$
Hubble's konstant	H_0	$70.4 \text{ km}/(\text{s Mpc})$
Tæthed af lyst stof	$\Omega_{b,0}$	0.0456
Tæthed af mørkt stof	$\Omega_{c,0}$	0.227
Tæthed af mørk energi/kosmologisk konstant	$\Omega_{\Lambda,0}$	0.728
Solens masse	M_{\odot}	$1.988 \times 10^{30} \text{ kg}$
Solens luminositet	L_{\odot}	$3.846 \times 10^{26} \text{ J/s}$
1 lysår	ly	$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$
1 parsec	pc	$3.08 \times 10^{16} \text{ m}$
1 astronomisk enhed	AU	$1.49 \times 10^{11} \text{ m}$

Kapitel 3

Relativitetsteori

I 1905 præsenterede Einsteins første del af hvad, der dagligt kaldes for relativitetsteori. Teorien beskæftiger sig med objekter i bevægelse, og forudsiger effekter, som har været helt ukendte i den klassiske mekanik, og som for mange strider mod al logik. Tid er relativt, længder kan ændre sig, masse og energi er det samme, og lysets hastighed i vakuum kan aldrig overskrides. Alt dette er blevet kendt som Einsteins *specielle relativitetsteori*, og vil i dette kapitel blive gennemgået. I vil komme forbi de generelle principper og ligninger, der danner grundlaget for teorien, og I vil komme til at beskæftige Jer med nogle af de fascinerende konsekvenser, teorien har. Den anden del, fremlagt i 1916, er kendt som den *almene relativitetsteori*. Den er en beskrivelse af tyngdekraft, og mindst lige så spændende. Den er dog også matematisk set langt mere kompleks og vil derfor kun blive introduceret kort.

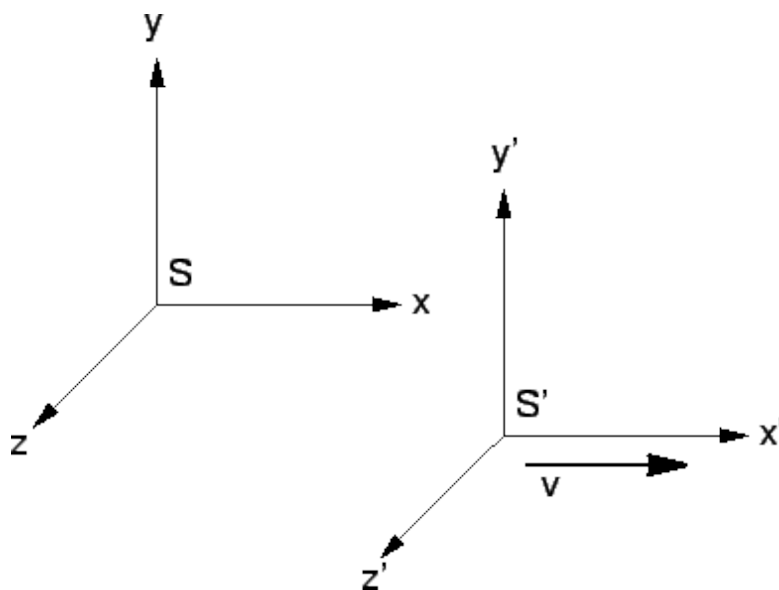
3.1 Observatører i reference- og hvilesystemer

Idéen om relativitet er en gammel størrelse. Princippet blev første gang formuleret af Galileo Galilei i 1630, og mange har siden beskæftiget sig med det, deriblandt Isaac Newton. Forestil dig en mand, som går med en hastighed af en meter per sekund (1 m/s) på dækket af et skib. Skibet selv sejler forbi en bred med en given hastighed. For personer på skibet er sagen klar. Manden bevæger sig med 1 m/s . For folk på bredden bevæger han sig dog forbi med en anden hastighed, fordi skibet også bevæger sig. For et skib på vej i modsat retning har manden en helt tredje hastighed. Mandens hastighed afhænger altså af, hvilket sted han observeres fra.

Vi kalder en samling af observatører, der alle er i hvile i forhold til hinanden, for et *referencesystem*. Observatørerne på dækket er ét system, dem på bredden er et andet osv. Manden selv udgør også et referencesystem, hvori han står stille, og alle andre bevæger sig i forhold til ham. Nu lyder det måske tosset – manden ved jo, at han går hen af dækket, og han ved, at det er skibet der sejler, og ikke bredden der står stille. Men hvad hvis han befandt sig under dæk? Ville han så vide at skibet sejler? Galilei indså hurtigt, at så længe bevægelsen er med konstant hastighed, uden opbremsning eller acceleration og i en ret linje, så er det umuligt for en observatør at vide, om han er i hvile eller i bevægelse. Er bevægelsen sådan konstant kaldes den uniform, og i et referencesystem i hvile eller uniform bevægelse gælder Newtons første lov – et legeme i hvile eller i uniform bevægelse vil forblive sådan, medmindre en kraft påvirker det. Vi kalder sådan et referencesystem

for et *hvilesystem*. Et hvilesystem er en idealisering i den forstand, at intet forsøg kan udføres for virkelig at bestemme om loven er opfyldt. Tit kan man dog med god samvittighed antage, at et referencesystem er et hvilesystem, og det er også hvad, der vil blive gjort her.

Et referencesystem, S , består af fire koordinater. Der er tre rumlige, x , y og z , som angiver en observatørs position, og en tidslig koordinat, t , der fortæller tiden hos observatøren. Et andet referencesystem, S' (udtales "S mærke") har også fire koordinater x' , y' , z' og t' .



Figur 3.1: To referencesystemer, S og S' .

3.2 Galileisk transformation

Frem indtil Einstein revolutionerede forståelsen af relativitet var den gængse opfattelse den, der var udviklet af Galilei. Den bliver derfor kaldt for Galileisk relativitet, og skønt vi ved, at den ikke er helt korrekt, så passer den stadig godt ved hastigheder langt mindre end lysets.

En hændelse E finder sted ved x , y , z til tiden t , målt i hvilesystemet S . Hvad vil koordinaterne af E være i et andet hvilesystem S' , der bevæger sig med hastighed V i x -retningen? Det kan vi godt svare på. To observatører i hvert sit system har på forhånd synkroniseret deres ure. I den Galileiske forståelse af relativitet er tid en absolut størrelse, så

$$t' = t \quad (3.1)$$

S' bevæger sig i x -retningen i forhold til S , så ved tiden t må afstanden mellem de to være Vt . Så må

$$x' = x - Vt, \quad (3.2)$$

mens y og z er ens i de to systemer

$$y' = y \quad (3.3)$$

$$z' = z. \quad (3.4)$$

Ligningerne (3.1) til (3.4) kaldes den *Galileiske transformation*. Det ses, at det eneste der skal til for at gå tilbage fra S' til S , er et skift af tegn i (3.2), da transformationen er den samme, men V er hastigheden af S i forhold til S' , så for S' har S en hastighed på $-V$. Ved at skifte tegnet får vi den *inverse transformation*, altså den der går den modsatte vej.

Et tog kører i x -retningen med hastighed V forbi en perron, hvorpå der står en observatør, S . På toget sidder en anden observatør, S' . De vil nu begge gerne måle afstanden mellem to pæle, placeret ved A og B , der står på perronen. For S er positionen af de to uafhængig af tid

$$x_1 = A, \quad x_2 = B \quad (3.5)$$

og afstanden $x_2 - x_1 = B - A$.

For S' findes koordinaterne vha. transformationen (3.2)

$$x'_1 = A - Vt' \quad (3.6)$$

$$x'_2 = B - Vt' \quad (3.7)$$

For observatøren på toget måles positionen af pæl 1 til tiden t'_1 og pæl 2 til t'_2 . Så

$$x'_2 - x'_1 = B - A - V(t'_2 - t'_1). \quad (3.8)$$

Da pælene bevæger sig i S' bliver observatøren på toget nødt til at måle deres position samtidigt for at få den rigtige afstand, så $t'_2 = t'_1$ og derved bliver $x'_2 - x'_1 = B - A$. Vi siger at afstanden er *invariant*, den har samme værdi i alle referencesystemer. Vi skal se senere, at dette (meget overraskende) ikke er tilfældet i speciel relativitetsteori.

Et legeme bevæger sig i x -retningen med hastighed v , målt i S . Positionen til tiden t er

$$x = vt. \quad (3.9)$$

Bruges den inverse af (3.1) og (3.2) fås

$$x' = (v - V)t'. \quad (3.10)$$

Begge ligninger beskriver en bevægelse med konstant hastighed. Størrelsen af den sidste, kaldet v' , er

$$v' = v - V \quad (3.11)$$

og den inverse

$$v = v' + V \quad (3.12)$$

Dette resultat er ret logisk. Går vi tilbage til skibet, S' , kan vi se, at hvis manden bevæger sig 1 m/s og skibet 5 m/s, så vil folk på bredden, S , måle en hastighed på $v = 6$ m/s, og manden vil opleve bredden flytte sig med $v' = -4$ m/s.

Vi så tidligere, at afstand er invariant under Galileisk transformation. Det kan udledes, at dette også er tilfældet for en masse fysiske love. Faktisk kan der formuleres et princip, der siger, at alle fysiske love er de samme i hvilke som helst to hvilesystemer. Dette kaldes *relativitetsprincippet*.

Her kommer Galilei modellen til kort. Det viser sig, at Maxwells ligninger, de ligninger der beskriver elektromagnetisme, ikke er invariante under Galileisk transformation. To muligheder var åbne for datidens fysikere. Enten gælder relativitetsprincippet ikke for elektromagnetisme og Maxwells ligninger er kun gældende i et specielt referencesystem, eller også er relativitetsprincippet universelt og Galileisk transformation forkert. Einstein holdte på den sidste løsning, og det førte ham til speciel relativitetsteori. Før vi kommer dertil, skal vi dog omkring den første mulighed, som i starten af det 19. århundrede var den foretrukne mulighed blandt fysikere.

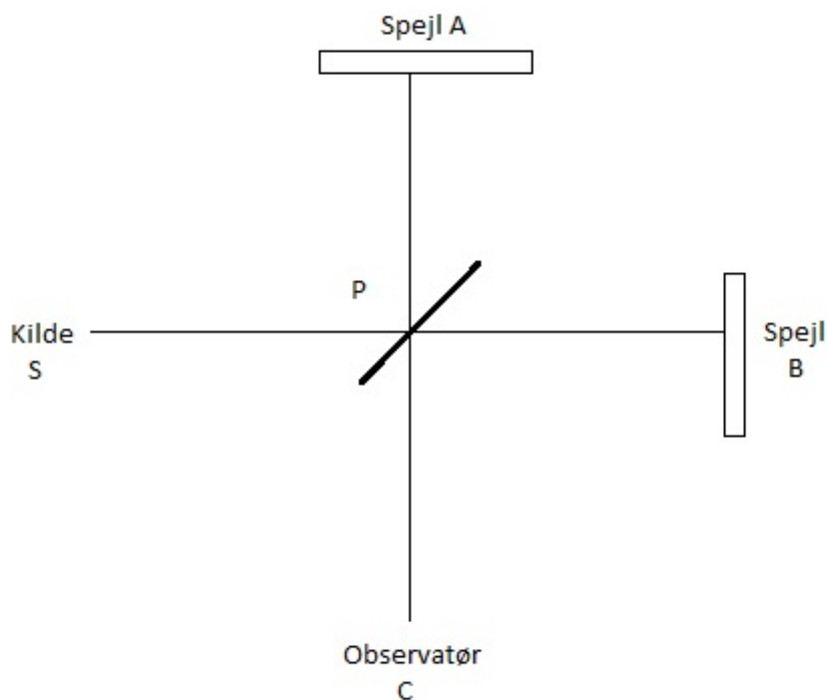
3.3 Michelson-Morley og Æteren

I dag ved vi at lysets natur udviser *dualitet*. Nogle gange beskrives det bedst som bølger og andre gange som partikler. I det 18. århundrede rasede en stor diskussion mellem fysikere om hvorvidt det var den ene eller den anden forklaring, der var rigtig. Mange forsøg udført på den tid pegede mod, at lyset skulle opfattes som bølger, og som alle andre bølger måtte disse have et medium at udbrede sig i. Dette medium blev kaldt *æteren*. Maxwell viste senere, at lys slet ikke behøver et medium, men datidens fysikere var ikke meget for at opgive idéen, så i starten af det 19. århundrede levede teorien om en æter i bedste velgående, nu blot som et medium, der på en eller anden måde støttede lysbølgerne i deres udbredelse.

Man ville forsøge at støtte denne idé ved at prøve at måle jordens relative bevægelse i forhold til æteren, i den berømte opstilling, vi nu kender som et Michelson-Morley-interferometer.

Grundlaget for Michelson-Morley-forsøget kan forstås ved at vende tilbage til skibet. Ligger dette stille i vandet, på en helt vindstille dag, så vil observatører kunne måle bølger der rejser i forskellige retninger, og disse vil alle have samme hastighed. Til gengæld, så hvis skibet bevæger sig, så vil bølger, der rejser i skibets retning have en mindre hastighed end bølger på vej i modsat retning. Måler observatørerne bølgenes hastighed i alle retninger, så vil de kunne bestemme skibets hastighed relativt til vandet. Dette kan overføres til Jorden, i dens bevægelse omkring Solen. Læg mærke til, at dette udelukkende bunder i den Galileiske transformation.

Selve forsøget blev udført med en laser, som vist på Figur 3.2. Hele opstillingen kunne roteres. Hvis Jorden bevæger sig relativt til æteren vil lysets hastighed være forskellige langs forskellige veje i forsøget. Hvis vejen SPA er i retningen af Jordens bevægelse, V , gennem æteren, så vil hastigheden af lysstrålen ved PA være $c - V$ og ved AP være $c + V$. Når lyset, der har taget $SPBPC$ mødes med lyset fra $SPAPC$ i punktet C vil der opstå interferens.



Figur 3.2: På figuren ses den klassiske Michelson-Morley-opstilling. En laser sender lys mod en halvt reflektiv plade (en plade som både kan reflektere og tillader at lyset rejser igennem den). Bevæger opstillingen sig med æteren vil der være en forskel på rejsetiden, som vil kunne måles på diffraktionsmønstret hos en observatør.

Under udførelse af eksperimentet fandt man dog ingen skift når opstillingen blev roteret, et tegn på at den tiltænkte tilstedeværende æter slet ikke fandtes.

3.4 Speciel relativitetsteori og dens betydning

Æteren var et forsøg på et specielt referencesystem, hvori Maxwells ligninger kunne være opfyldt. Einstein gik som nævnt en anden vej, og det gjorde han på baggrund af to principper.

Det første er det kendte relativitets princip, om at alle fysikkens love er de samme i alle hvilesystemer. Det betød imidlertid at den Galileiske transformation måtte være forkert.

Det andet princip byggede på det første, men var banebrydende for sin tid. Einstein indså, at hvis Maxwells ligninger, som bl.a. giver lysets korrekte hastighed på baggrund af kendte konstanter, gælder i alle hvilesystemer, så må lysets hastighed i vakuum også være den samme i alle hvilesystemer. Lysets hastighed er altså uafhængigt af kildens hastighed. Samtidigt kan intet andet end lys bevæge sig med lysets hastighed.

De to principper ovenfor medfører en masse ting, som for mange strider mod almen logik. Den første ting vi skal se på er, hvordan begrebet *samtidighed* er relativt.

Vi kigger på endnu et eksempel: En observatør er placeret på et tog, som vist på Figur 3.3. En anden observatør er placeret på jorden ved siden af skinnerne. Lyn slår ned i punkterne A , B , A' og B' på samme tid, men da observatøren på toget bevæger sig mod lyset fra B' , vil vedkommende observere dette først, og konkludere at det fandt sted før nedslaget i A' ! Observatøren på perronen vil derimod se de to nedslag ske samtidigt. Så om de to ting fandt sted samtidigt eller ej afhænger altså af observatørens bevægelse! Men ved man ikke, at de to nedslag skete samtidigt for observatøren på toget? Hvis man nu kunne kommunikere med punkterne uden forsinkelsen som lyset oplever, vil man da se de to nedslag skete på samme tid. Det er dog ikke tilfældet. Hvis observatøren sidder midt mellem punkterne vil der være lige så langt til A' som til B' , så tiden det tager lyset at rejse fra A' frem til observatøren er den samme, som det tager at rejse fra B' . Så de to signaler når kun frem til observatøren, hvis de er udsendt samtidigt. Lyset når her ikke samtidigt frem til observatøren, som er nødt til at konkludere, at de to nedslag ikke skete samtidigt. Relativitetsprincippet støtter op om dette. Hvis alle love er ens for alle systemer, så findes der ikke et system som er mere rigtigt end et andet. Så begge observatører har altså ret i deres eget referencesystem. Samtidighed er altså relativt.

For at komme frem til et udtryk mellem tid i forskellige systemer betragtes et andet eksempel, illustreret på Figur 3.4. For observatøren på toget, med hastigheden v i forhold til jorden, bevæger lyset sig afstanden $2d$ i tiden Δt_0 (hvor Δ er det græske bogstav 'delta'). Denne tid er givet

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c} \quad (3.13)$$

For observatøren i S , tager rejsen Δt og i den tid når lyset at rejse $2l$, hvor l er

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} \quad (3.14)$$

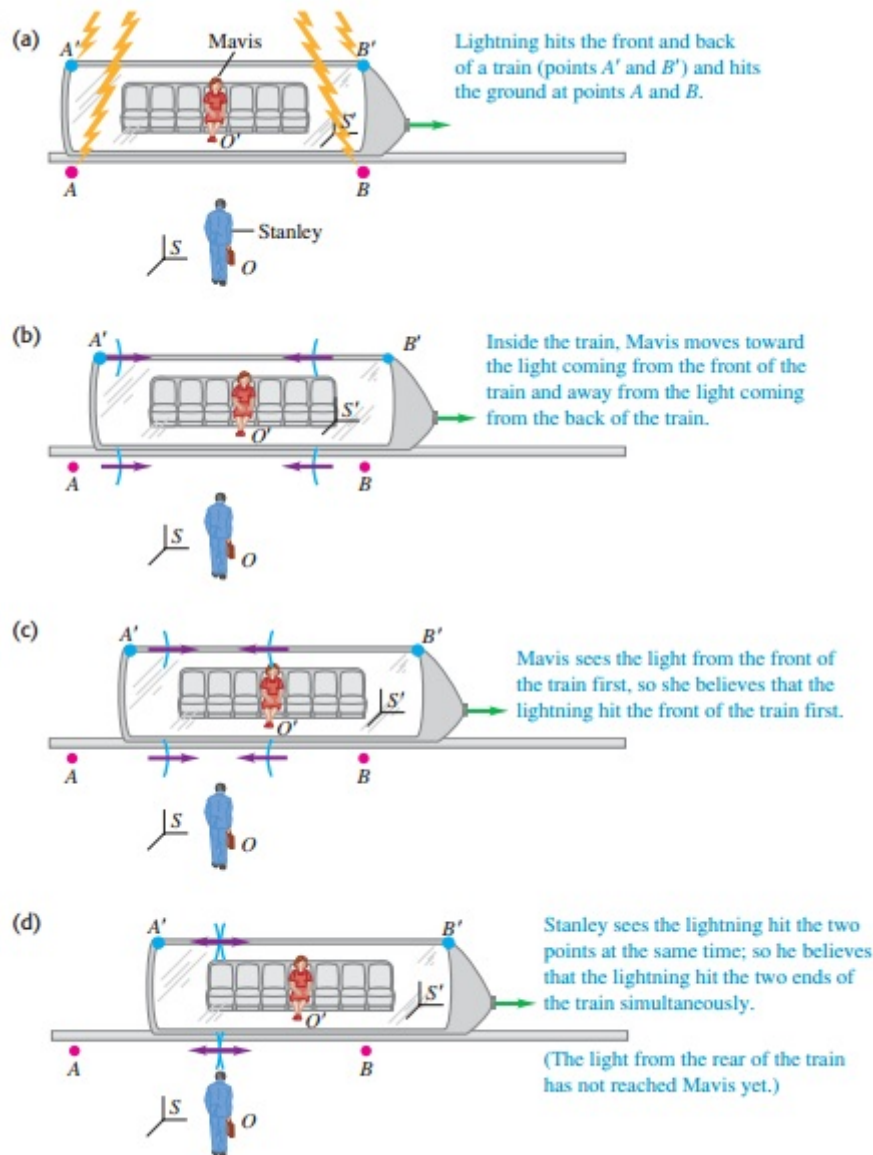
Lysets hastighed er den samme for begge observatører, så for observatøren i S tager turen

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} \quad (3.15)$$

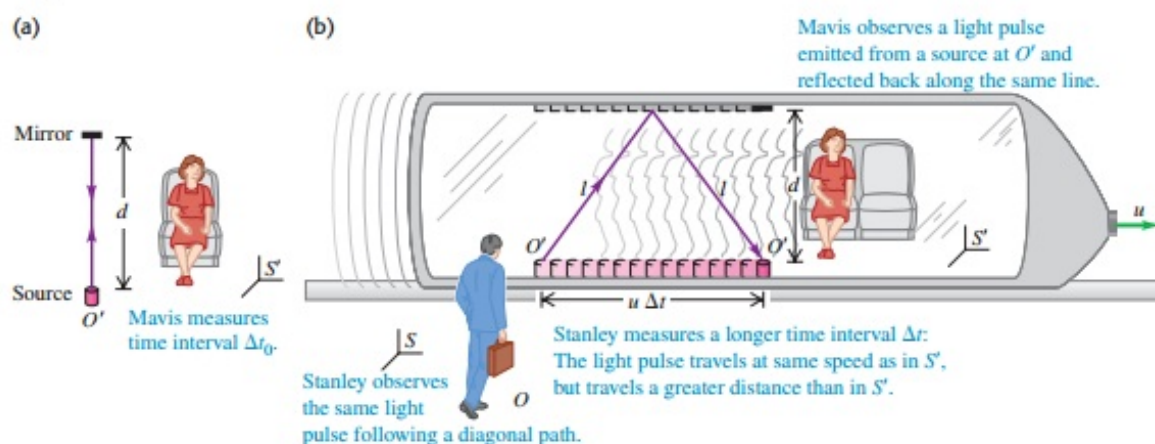
Isoleres d i (3.13) kan (3.14) omskrives til

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.16)$$

Da en observatør ikke kan rejse med lysets hastighed vil nævneren i ovennævnte altid være mindre end 1. Det betyder, at Δt altid er større end Δt_0 . Sagt på en anden måde, så vil en observatør altid måle, at et ur i bevægelse, relativt til dem der står stille, går langsommere. Dette er udelukkende en effekt af, at lysets hastighed er den samme for alle observatører, i alle referencesystemer. Effekten er selvfølgelig lille for hverdagsfænomener, men det faktum at tiden går langsommere, jo hurtigere man bevæger sig, er blevet bekræftet af atomure i kredsløb om Jorden.



Figur 3.3: En observatør er placeret på et tog S' , som passerer en anden observatør på jorden S . Lyn slår ned i punkterne A , B , A' og B' samtidigt. Observatøren i S vil se de to lysglimt nå frem samtidigt, og konkluderer at nedslagene fandt sted samtidigt. For observatøren på toget er situationen dog en anden. Vedkommende bevæger sig imod lyset fra B' og væk fra A' . Observatøren i S' vil derfor se lyset fra B' først og konkludere at dette nedslag fandt sted først. Fra Young & Friedmann *University Physics*, 13th ed.



Figur 3.4: For en observatør placeret i et tog, S' vil en lyspuls udsendt fra O' blive reflekteret af et spejl og vende tilbage langs samme linje med længde d . For en stationær observatør på jorden, S , vil situationen være en anden. For denne har toget rykket sig et stykke i den tid, som det har taget lyset at blive reflekteret. Lyset vender stadig tilbage til kilden, men har for observatøren i S rejst et længere stykke end for observatøren i S' . Fra Young & Friedmann *University Physics*, 13th ed.

Størrelsen $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ støder man på meget tit i relativitetsteori, så den betegnes ofte med det græske bogstav gamma (γ).

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (3.17)$$

γ som en funktion af den relative hastighed mellem referencesystemerne kan ses på Figur 3.5.

Oftentimes forkortes brøken v/c med det græske bogstav beta β .

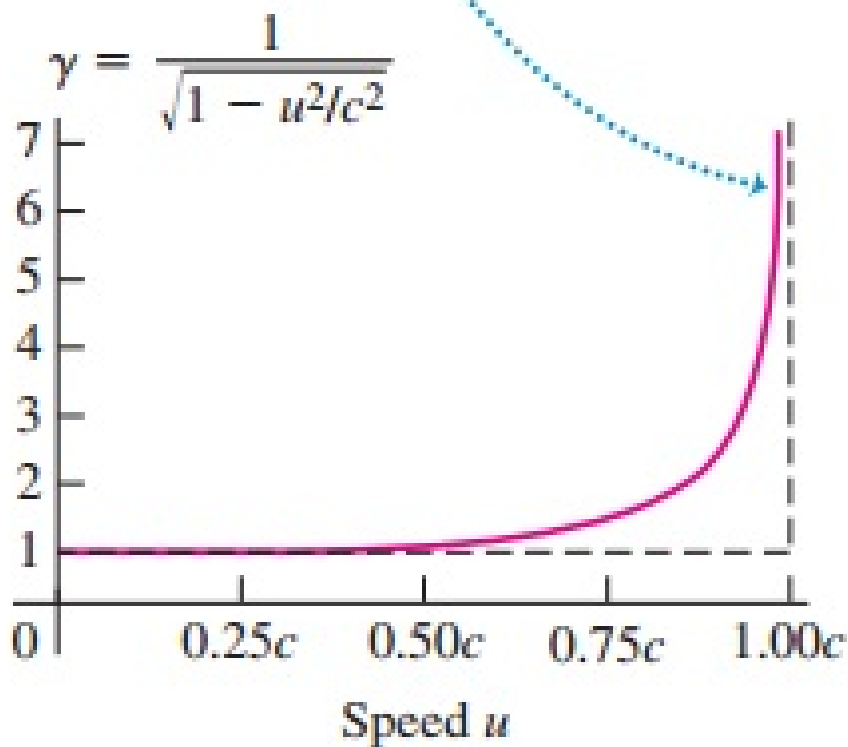
Tidligere viste vi, at længde er invariant under Galileisk transformation. Med en simpel betragtning som den ovenstående kan man komme frem til, at længde ikke er invariant i Einsteins version. Udtrykket man kan komme frem til relaterer længden, l , af et objekt i det stationære system, S , og længden af samme objekt, l_0 i systemet, S' , der bevæger sig med v relativt til S . Længden for observatøren på jorden vil være

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma} \quad (3.18)$$

Så længden af et objekt vil for en stillestående observatør være kortere end den længde som objektet har i sit hvilesystem. Denne effekt kaldes normalt *længdeforkortelse*.

Det er vigtigt at påpege, at objekter kun bliver forkortet i den retning, som de bevæger sig.

As speed u approaches the speed of light c , γ approaches infinity.



Figur 3.5: Størrelsen γ som funktion af den relative hastighed v mellem to referencesystemer. Efterhånden som v nærmer sig c går γ mod uendelig. Fra Young & Friedmann *University Physics*, 13th ed.

3.5 Lorentz-transformationer

Den Galileiske transformation er altså kun nogenlunde rigtig, og kun så længe hastigheden af det ene hvilesystem er lille i forhold til det andet. Der er altså brug for en anden måde at transformere på, der baserer sig på ideerne bag den specielle relativitetsteori.

Betragt to hvilesystemer, som befinder sig det samme sted til tiden $t = 0 = t'$, hvor S' bevæger sig med hastigheden v i forhold til S . Til tiden t , vil transformationen fra S' til S være givet ved den inverse til (3.2), altså stadig som den Galileiske $x = vt + x'$. Men som det nu er klart, så vil x' i S være længdeforkortet med

en faktor $1/\gamma$, som beskrevet i (3.18). Så

$$x = vt + x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.19)$$

og dens inverse

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x - vt) \quad (3.20)$$

Igen er bevægelsen blevet begrænset til at ligge udelukkende i x -retningen, så

$$y' = y \quad (3.21)$$

$$z' = z \quad (3.22)$$

Skiftes der hvilesystem, er den eneste forskel en ændring i fortegn for hastigheden. Det leder til et udtryk for transformationen af tid

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(t - vx/c^2) \quad (3.23)$$

Vi kalder ligningerne (3.20) til (3.23) for *Lorentz transformation* som er den relativistiske generalisering af Galileisk transformation. I det tilfælde, hvor v bliver meget lille går Lorentz transformationen mod den Galileiske. Generelt ses det dog, at alle koordinater (inklusiv tid) i et referencesystem er afhængig af koordinaterne i et andet. Man siger derfor, at rum og tid er sammenhængende, og at hverken længde eller tid har en betydning der er uafhængig af referencesystem. Derfor refererer man ofte til tid og de tre rumlige koordinater som den fire-dimensionale størrelse *rum-tid*.

Transformationen for hastigheden kan findes ved at differentiere (3.20) og (3.23)

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \quad \text{og} \quad dt' = \gamma(dt - vdx/c^2) \quad (3.24)$$

Ændring i position per ændring i tid dx'/dt' er hvad, der i daglig tale kaldes hastighed. Hvis de to ovenstående ligninger divideres med hinanden, og både tæller og nævner divideres med dt fås

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - vv_x/c^2} \quad (3.25)$$

Vi ser, at i det ekstreme tilfælde, hvor $v_x = c$ så vil $v'_x = c$, hvilket jo var Einsteins ene postulat.

De fleste kender en enkelt del af relativitetsteorien bedre end nogen anden del. Einsteins berømte ligning $E = mc^2$ fortæller, at masse og energi er to sider af samme sag. De færreste indser dog, at dette også betyder, at masse er en relativistisk størrelse, ganske som vi har set længde og tid er. Et objekt med hvilemasse m (altså den masse objektet har i dens eget hvilesystem) der bevæger sig med en hastighed v i forhold til en observatør vil for observatøren have en masse, der er større end massen objektet har i sit eget hvilesystem. Vi siger, at objektets *relativistiske masse* er givet

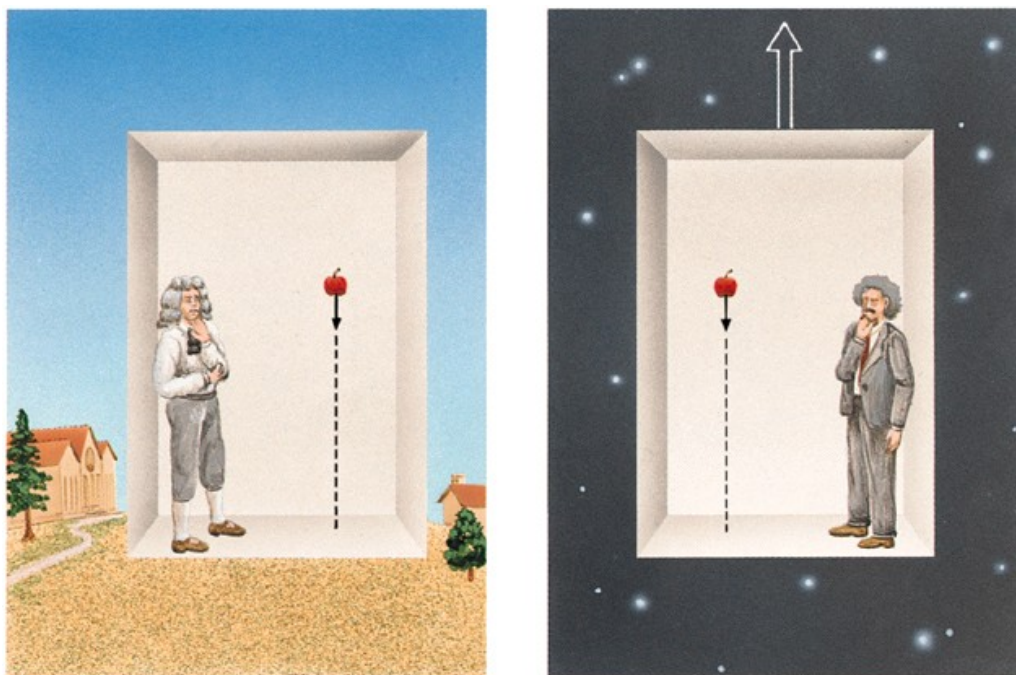
$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.26)$$

3.6 Generel relativitetsteori

Både Einsteins specielle og generelle relativitetsteori er forbundet. Den generelle er som sagt matematisk set mere kompleks, men den grundlæggende idé bag den kan illustreres med et eksempel.

Du vågner en morgen og står ud af sengen. Til din store forfærdelse opdager du, at du i løbet af natten er blevet bortført af rumvæsner, som har lukket dig inde i deres rumskib, i et lukket rum uden vinduer. I chok taber du din bamse. Som fysiker ser du straks, at bamsen falder mod gulvet med en acceleration på præcis 9.8 m/s^2 , som er Jordens tyngdeacceleration g . Du er altså i det mindste stadig på Jorden.

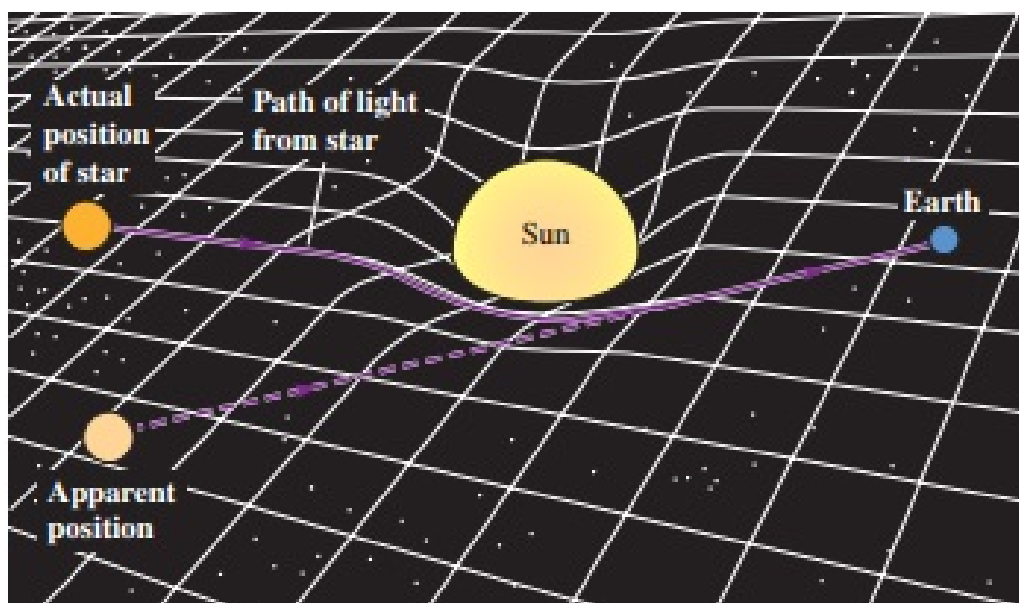
Pludselig glider et panel til side, og afslører et vindue. Udenfor ser du det tomme rum, og du indser nu, at i virkeligheden accelererer rumskibet blot med præcis g , og grunden til, at du kan stå på gulvet er ikke, at Jorden hiver i dig, men i stedet at gulvet kommer imod dig, med en acceleration der bare har samme størrelse, som du ville have oplevet Jorden trække dig ned med.



Figur 3.6: Ækvivalensprincippet: der kan ikke skelnes mellem at befinde sig i et tyngdefelt med tyngdeacceleration g eller det at befinde sig i et uniformt accelererende referencesystem med acceleration g . Fra http://www.zamandayolculuk.com/cetinbal/PU/p_kauf24_2.jpg

Eksemplet danner grundlag for den generelle relativitetsteori. Hvis man ikke kan skelne eksperimentelt mellem tyngdekraften fra et objekt i et givet punkt og så et uniformt accelereret referencesystem, så kan der ikke være nogen rigtig forskel på de to. Dette kaldes *ækvivalensprincippet* og er illustreret i figur 3.6. Dette betyder, at alle de spændende effekter, som kommer med et referencesystem i bevægelse i forhold til et andet, også er tilstede, når det kommer til tyngdekraft. F.eks. går ure på Jorden langsommere end i rummet, fordi vi befinder os i Jordens *tyngdepotentiale*.

Generelt siges det at *masse-energi krummer rum-tiden og rum-tidens krumning fortæller masse-energi, hvordan det skal bevæge sig*. Et eksempel ses på Figur 3.7.



Figur 3.7: Massen af Solen krummer rumtiden omkring sig. Lyset fra en stjerne vil følge en lige bane gennem rummet, men grundet Solens tilstedeværelse vil denne bane være anderledes tæt på Solen. Lyset afbøjes, så stjernen ser ud til at befinde sig et andet sted. Idéen om, at masse krummer rumtiden omkring sig er essensen i den generelle relativitetsteori. Fra Young & Friedmann *University Physics*, 13th ed.

3.7 Opgaver

Kombination af Galileiske transformationer

To tog kører parallelt med hinanden i x -retningen, det ene med hastighed V og det andet med hastighed U , relativt til jorden. Lad det første tog være S' og det andet S'' , med deres respektive koordinater. Jorden betegnes S .

1. Hvad er den Galileiske transformation fra $S(x, y, z, t)$ til $S''(x'', y'', z'', t'')$?
2. Hvad er den Galileiske transformation fra S' til S'' ?
3. Hvad svarer størrelsen $(U - V)$ til?

Hvornår er relativitetsteori virkelig nødvendig?

Som det ses, så indgår γ meget ofte i relativitetsteori. Når γ er større end væsentligt større end 1, er det nødvendigt at bruge de relativistiske udtryk, frem for de Galileiske. For hvilken hastighed (i enheder af c) er værdien af γ :

1. 1 % større end 1?
2. 10 % større end 1?
3. 100 % større end 1?

Generelt er det altid mere korrekt at bruge de relativistiske formler, og vi vil derfor gå væk fra de Galileiske udtryk i de resterende opgaver.

Et lille tankeeksperiment

De relativistiske effekter ses ikke i hverdagen fordi c er så stor, sammenlignet med hastigheder vi oplever i hverdagen. Men hvad nu hvis lysets hastighed var meget mindre? Lad os se hvad der sker, hvis nu $c = 50$ km/t.

1. Usain Bolt rekord-topfart er 44.72 km/t. Hans hvilemasse er 94 kg. Hvad er hans masse når han når topfart?

Elektronerne i kælderen

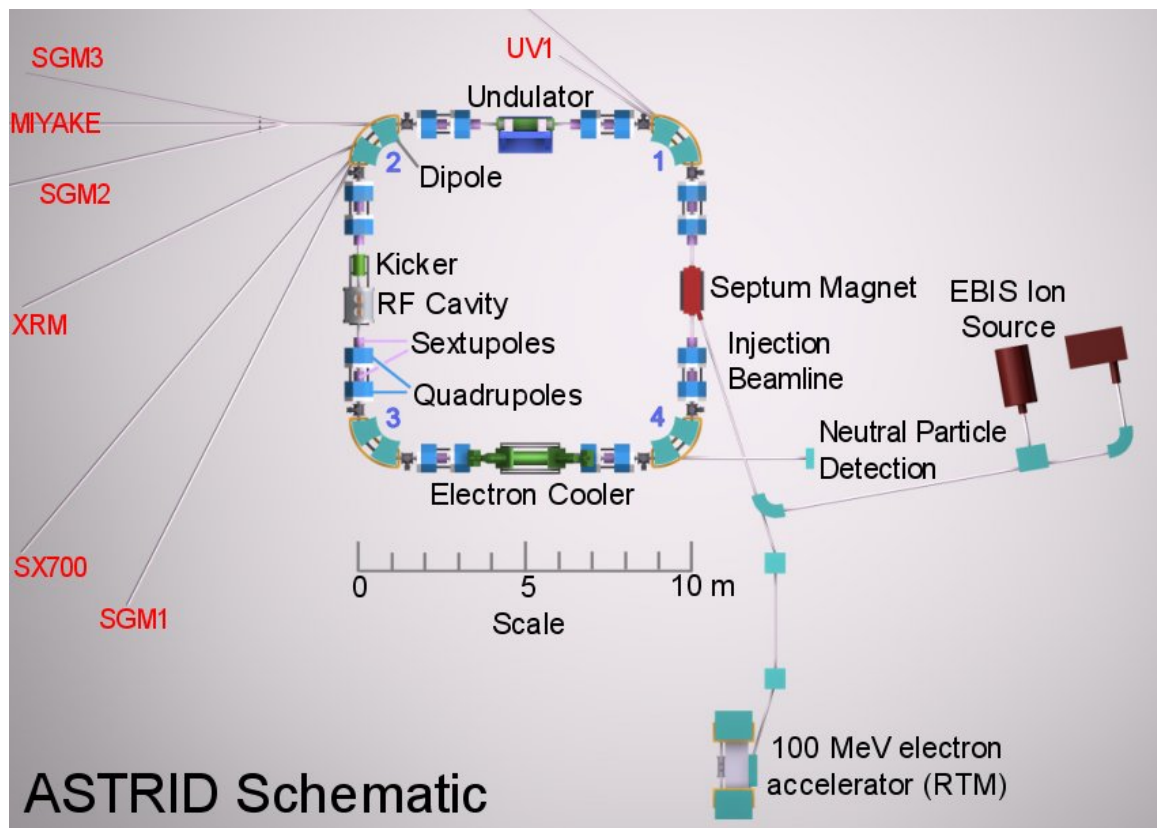
I kælderen på Institut for Fysik og Astronomi på Aarhus Universitet står partikelacceleratoren ASTRID, hvor elektroner bevæger sig rundt i ring med meget høje hastigheder. En tegning af maskinen ses på figur 3.8. Elektronens hvilemasse er $m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ (omregnet til SI-enheder er dette $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, men ofte er det nemmest at regne med masseenheden MeV/c^2).

1. Elektronerne i ASTRID kan accelereres op så deres energi bliver $E = 580 \text{ MeV}$. Brug $E = m_{rel}c^2$ til at beregne deres fart.
2. Beregn deres relativistiske masse.
3. ASTRID er 40 m i omkreds. Hvor mange omløb tager elektronerne pr. sekund?

Muoner i Jordens atmosfære

Muoner er ustabile sub-atomare partikler, der med en levetid på $2.2 \mu\text{s}$ ($2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$) henfalder til elektroner. Muoner produceres omkring 10 km over Jordens overflade, hvor energirige partikler fra rummet rammer atmosfæren, og de rejser med en hastighed tæt på lysets i forhold til Jorden, lad os sige $v = 0.999c$.

1. Hvad er den længste afstand en muon kan nå at rejse i sin levetid på $2.2 \mu\text{s}$?
2. Fra ovenstående lader det til, at muonerne aldrig vil nå os på overfladen. Ikke desto mindre detekterer vi dem! Men levetiden angivet er i muonens hvilesystem. Hvad er dens levetid målt for en observatør på Jorden?
3. Hvor langt vil muonen nå nu?



Figur 3.8: Skematisk tegning af ASTRID.

4. Fra muonens synspunkt lever den stadig kun $2.2 \mu\text{s}$. Hvad er tykkelsen af 10 km atmosfære, set fra muonens system?

Relativitet og rumfart

For nyligt valgte NASA at pensionere deres rumfærger. Indtil da var rumfærgeren en forholdsvis billig måde at fragte udstyr og mennesker ud i rummet, fordi færgeren, og det meste af det man brugte til at sende den op med, kunne genanvendes. Efter endt mission kunne rumfærgeren lande som et fly.

En observatør på Jorden måler en landingsbane til at være 3600 m. En rumfærge befinder sig i kredsløb om Jorden med en hastighed af $4.00 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ relativt til Jorden. Vi antager, at dens bane er en ret linje under hele opgaven og at den flyver parallelt med landingsbanen.

1. Hvad er længden af landingsbanen målt af piloten på rumfærgeren?
2. En observatør på Jorden måler tiden der går, fra rumfærgeren er direkte over den ene ende af landingsbanen, og til den er over den anden ende. Hvor lang tid får vedkommende?
3. Piloten på rumfærgeren måler den tid, det tager ham at flyve længden af landingsbanen. Hvilken værdi får han?

4. Rumfærgen har en vægt på godt 2000 tons. Hvad ville rumfærgen veje, hvis en observatør på Jorden kunne veje dens mens den var i kredsløb, dvs. hvad er dens relativistiske masse?
5. Rumfærgen er 60 meter lang og 10 meter høj i dens eget referencesystem. Hvor lang og høj er rumfærgen for en observatør på Jorden?

Tvillinge-Paradokset - Her skal du bruge hovedet

Tvillinge-paradokset er et af de mest kendte paradokser inden for speciel relativitetsteori. Egentligt er det ikke et paradoks, da Einstein allerede løste det tilbage i 1905. I denne opgave skal I også løse det. Det kræver at man lige tænker sig lidt om.

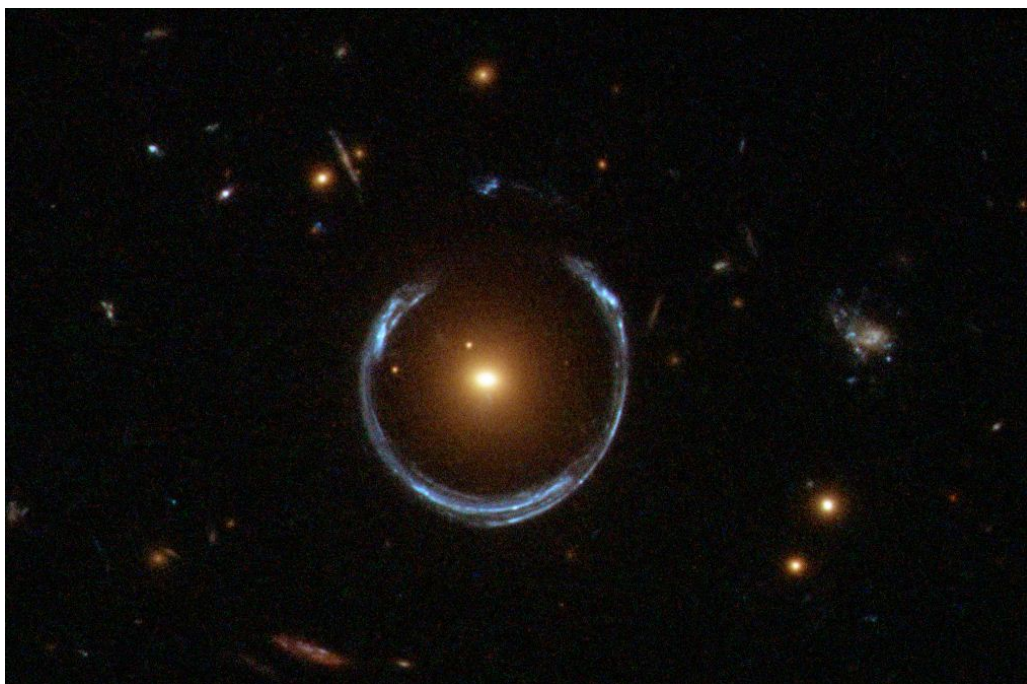
Barbara og Arthur er tvillinger. Arthur bliver på Jorden, mens Barbara rejser afsted med et rumskib, med hastighed nær c . På et tidspunkt vender rumskibet hurtigt, og flyver tilbage til Jorden. Da Barbara kommer tilbage, mødes hun med Arthur til en sammenligning. For Arthur har Barbara rejst ud og hjem igen med nær lysets hastighed. Derfor er tiden for hende gået langsommere, og hun vil derfor se yngre ud end Arthur. Men fra Barbaras synspunkt er det jo Arthur, som har bevæget sig i forhold til hende. Derfor bruger hun samme argument til at konkludere, at han vil se yngre ud end hende. Samtidigt er der jo ikke noget referencesystem, som er bedre end andre, så et argument der bygger på dette vil komme frem til, at alle resultater må være symmetriske mellem de to tvillinger. De er altså lige gamle.

1. Ud fra ovenstående lader det til, at der er tre muligheder, men kun en kan være rigtig. Hvilken mulighed er det?
2. Hvis en af tvillingerne er ældst, kan du så sige noget om, hvor lang tid, der er gået for den yngste i forhold til den ældste?

Rum-tid

På Figur 3.9 ses et billede taget med Hubble teleskopet.

1. Hvad forestiller billedet, og hvordan kan dette relateres til Einsteins generelle relativitetsteori?



Figur 3.9: En såkaldt "Einstein-ring". Fra upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/A_Horseshoe_Einstein_Ring_from_Hubble.JPG

Bilag A

Matematik

Her vil vi forklare noget af den matematik, man skal bruge for at regne opgaverne. Det meste vil alle møde i løbet af gymnasietiden, men da jeres – deltagernes – faglige forudsætning er vidt forskellige, vil det være nyt for nogen og en genopfriskning for andre.

A.1 Trigonometriske funktioner

På figur A.1 ses en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius 1. En sådan cirkel kaldes enhedscirklen. Den nemmeste måde at beskrive punkter på enhedscirklen er ud fra vinkel t med x -aksen. Vi definerer de trigonometriske funktioner *cosinus* og *sinus* til vinklen t , så punktet (x, y) på enhedscirklen svarende til vinklen t er

$$\begin{aligned}\cos(t) &= x \\ \sin(t) &= y\end{aligned}$$

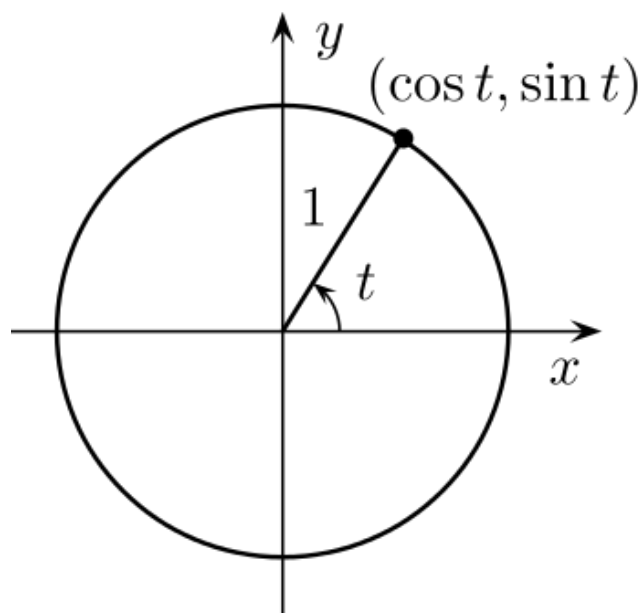
Da omkredsen af enhedscirklen er 2π er det oplagt at angive vinklen t i radianer i stedet for grader. I radianer går der 2π på en hel cirkel, hvorimod der i grader går 360° . Men har man da en vinkel t , vil det ikke ændre noget at lægge 2π til vinklen, for dette svarer jo til at gå en hel gang rundt i cirklen, hvorefter man er tilbage, hvor man startede. Man kan også gå den modsatte vej i cirklen, hvorfor det at trække 2π fra vinklen heller ikke ændrer noget. Dette kan man gøre lige så mange gange man vil, så for en vilkårlig vinkel t gælder, at

$$t + n2\pi = t, \text{ hvor } n \text{ er et helt tal.} \quad (\text{A.1})$$

Indsættes dette i de trigonometriske funktioner ser vi, at

$$\cos(t) = \cos(t + n2\pi) \text{ og } \sin(t) = \sin(t + n2\pi), \quad (\text{A.2})$$

hvilket igen udtrykker, at uendeligt mange vinkler kan bruges til at udtrykke det samme punkt på enhedscirklen. Hvis vi tænker på $\cos(t)$ og $\sin(t)$ som funktioner af variabelen t betyder (A.2), at graferne gentager sig selv, hver gang vi lægger $n2\pi$ til argumentet, hvilket man også kan se på figur A.2. Man siger,



Figur A.1: Enhedscirklen.

at $\cos(t)$ og $\sin(t)$ er *periodiske* med en periode på 2π . Prøv at følg punktet på figur A.1 hele vejen rundt på enhedscirklen, og se, at graferne på figur A.2 stemmer overens med x - og y -koordinaten for punktet.

Fra figur A.1 kan vi se, at nogle simple punkter beskrevet vha. de trigonometriske funktioner er

$$\begin{aligned}(1, 0) &= (\cos(0), \sin(0)) \\ (0, 1) &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ (-1, 0) &= (\cos(\pi), \sin(\pi)) \\ (0, -1) &= \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

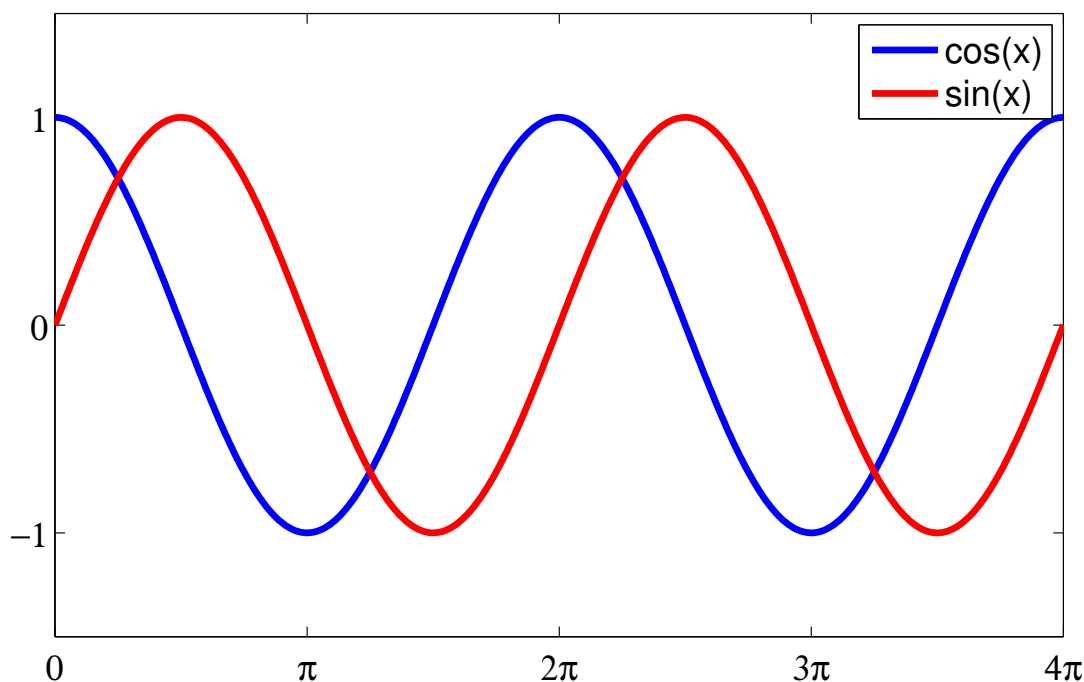
Ved at benytte (A.2) med $t = 0$, finder vi, at

$$\cos(n2\pi) = 1 \text{ og } \sin(n2\pi) = 0 \text{ for alle heltal } n.$$

Man kan vise mange nyttige regneregler for $\cos(t)$ og $\sin(t)$, men det vil vi ikke gå ind på her.

A.2 Differentialregning

Har man en funktion $f(x)$ af en variabel x kan man tegne dens graf. De fleste har set graferne for simple funktioner som den lineære funktion $f(x) = a \cdot x + b$ eller et andengradspolynomie $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, hvor



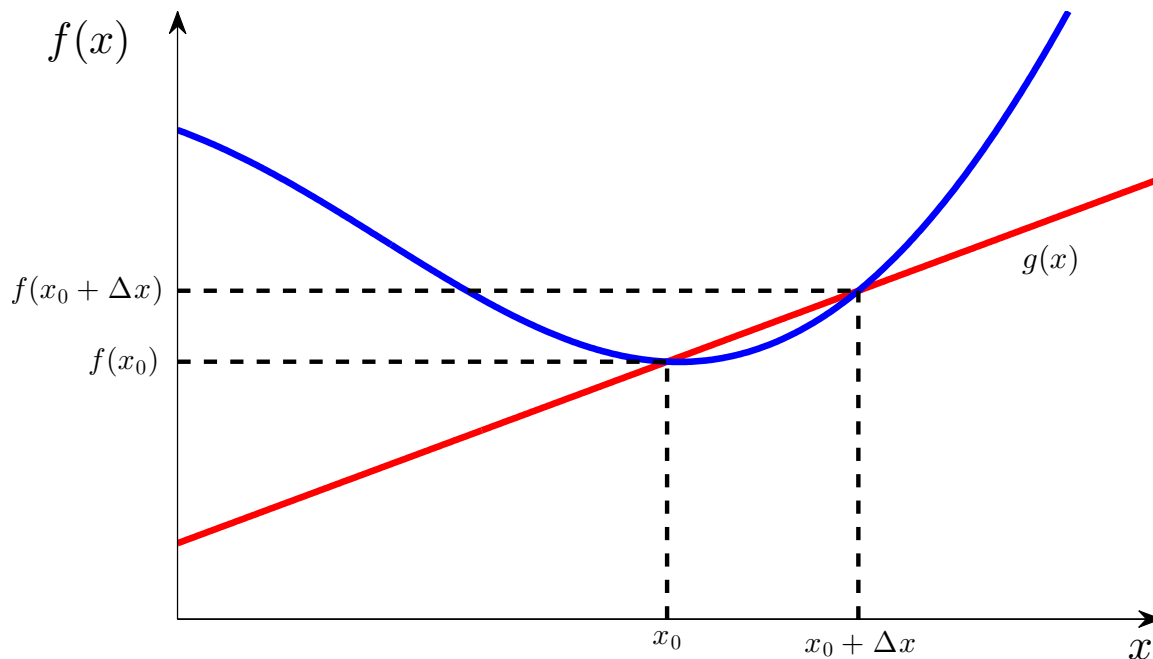
Figur A.2: Graferne for de trigonometriske funktioner.

a , b og c er tal. Men i virkeligheden er det kun fantasien, der sætter grænser for, hvilke funktioner, man kan lave.

Ofte kan man være interesseret i at finde hældningen af en funktion i et bestemt punkt. Matematikken bag dette kaldes differentialregning, og vi vil kort indføre den her. Antag, at vi har en funktion $f(x)$, og vi gerne vil finde dens hældning ved en bestemt værdi $x = x_0$. I første omgang kan man se på et lille tal $\Delta x > 0$, og så udregner vi funktionsværdien i x_0 og $x_0 + \Delta x$, dvs. vi udregner $f(x_0)$ og $f(x_0 + \Delta x)$. Dernæst konstruerer vi en linje gennem de to punkter $(x_0, f(x_0))$ og $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ som det ses på figur A.3 kaldet $g(x)$. Hældningen af denne linje kan jo let beregnes, fordi det blot er en ret linje givet ved ligningen

$$g(x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot x + f(x_0) . \quad (\text{A.3})$$

Husk, at brøken foran x blot er et tal, og det er netop hældningen af den rette linje $g(x)$. Nu var det jo hældningen af $f(x)$ i x_0 vi var interesseret i, og den vil nu angive som $f'(x_0)$. Vi ser, at hvis vi gør Δx meget lille, ændrer $g(x)$ sig, så dens hældning bliver en approksimation til hældningen af $f(x)$ i x_0 , altså $f'(x_0)$. Formelt siger man, at hældningen af $g(x)$ går mod $f'(x_0)$ når Δx går mod nul, eller at $f'(x_0)$ er *grænseværdien*



Figur A.3: Vi ønsker at finde hældningen af funktionen $f(x)$ i punktet x_0 .

af hældningen af $g(x)$ kendt fra (A.3) når Δx går mod nul. Dette kan udtrykkes i symboler som

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (\text{A.4})$$

hvor $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ betyder grænseværdien af brøken, når Δx går mod 0. Det er vigtigt at bemærke, at man kun lader Δx gå mod 0, så vi kommer "uendeligt" tæt på 0, men at Δx aldrig bliver eksakt nul! Husk, at vi ikke må dividere med 0, så derfor må nævneren i (A.4) aldrig gå hen og bliver 0.

Indtil videre har vi betragtet hældningen af $f(x)$ for en bestemt x -værdi x_0 . Men ofte er vi interesseret i at finde et formel for hældningen af $f(x)$ for et vilkårligt punkt. Dette kan gøres ved ikke at finde hældningen for en fast x -værdi, men blot lade punktet være variabelen x . Da bliver hældningen i et vilkårligt punkt x

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (\text{A.5})$$

Man kalder ofte $f'(x)$ for den *afledede* eller *differentialkvotienten* af $f(x)$ og skriver $f'(x) = \frac{df}{dx}$. Husk, at kvotient betyder brøk og differens betyder forskel, så differentialkvotient er altså en slags brøk mellem to forskelle. For at forstå dette skal vi blot kigge på (A.5), hvor vi ser, at tælleren er en forskel i funktionsværdien,

når x -værdien ændrer sig med forskellen Δx . Hvis du ikke er helt overbevist, så se på figur A.3 igen. Hvis vi angiver forskellen i funktionsværdien som Δf og kan vi omformulere (A.5) til

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} .$$

At finde differentialkvotienten for $f(x)$ kaldes at *differentiere* $f(x)$ med hensyn til x . Grunden til, at man skal specificere, at differentiationen foregår ”med hensyn til x ” skyldes, at en funktion kan afhænge af mere en én variabel. Tag fx

$$f(x, y) = 2x^2 - x \cdot y + 7y ,$$

som afhænger af to variable x og y . Her kan man differentiere $f(x, y)$ enten med hensyn til x eller y . Hvis vi fx vil differentiere funktionen mht. x betragter vi y som en konstant. Vi vil ikke vise det her, men differentierer man et polynomie

$$h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n ,$$

hvor a_i 'erne er nogle koefficienter og n er et helt tal, fås

$$\frac{dh}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} .$$

Bemærk, at leddene differentieres enkeltvist som $\frac{d}{dx}a_kx^k = ka_kx^{k-1}$. Desuden gælder der helt generelt, at hvis $f_1(x)$ og $f_2(x)$ er to funktioner er $\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x)) = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}$, og hvis a er en konstant, så er $\frac{d}{dx}(a \cdot f(x)) = a \frac{df}{dx}$. Vi vil ikke vise det her, men differentieres en potensfunktion x^k fås $\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$ (beviset kan slås op i en lærebog eller på nettet). Hvis man benytter disse regler, kan man vise, at den ovenstående differentiation af polynomiet $h(x)$ er korrekt.

Så med fra eksemplet fra før er $\frac{df}{dx} = 2 \cdot 2x - y = 4x - y$ og $\frac{df}{dy} = -x + 7$. Bemærk, at differentialkvotienten af en funktion er en ny funktion af de samme variable. Det betyder, at vi kan differentiere den igen, hvilket betegnes $\frac{d^2f}{dx^2}$ og kaldes den dobbelte afledede af f med hensyn til x . Med eksemplet fra før er $\frac{d^2f}{dx^2} = 4$ og $\frac{d^2f}{dy^2} = 0$.

Man kan vise, at differentieres de trigonometriske funktioner med hensyn til x , fås

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos(kx) &= -k \sin(kx) \\ \frac{d}{dx} \sin(kx) &= k \cos(kx) , \end{aligned}$$

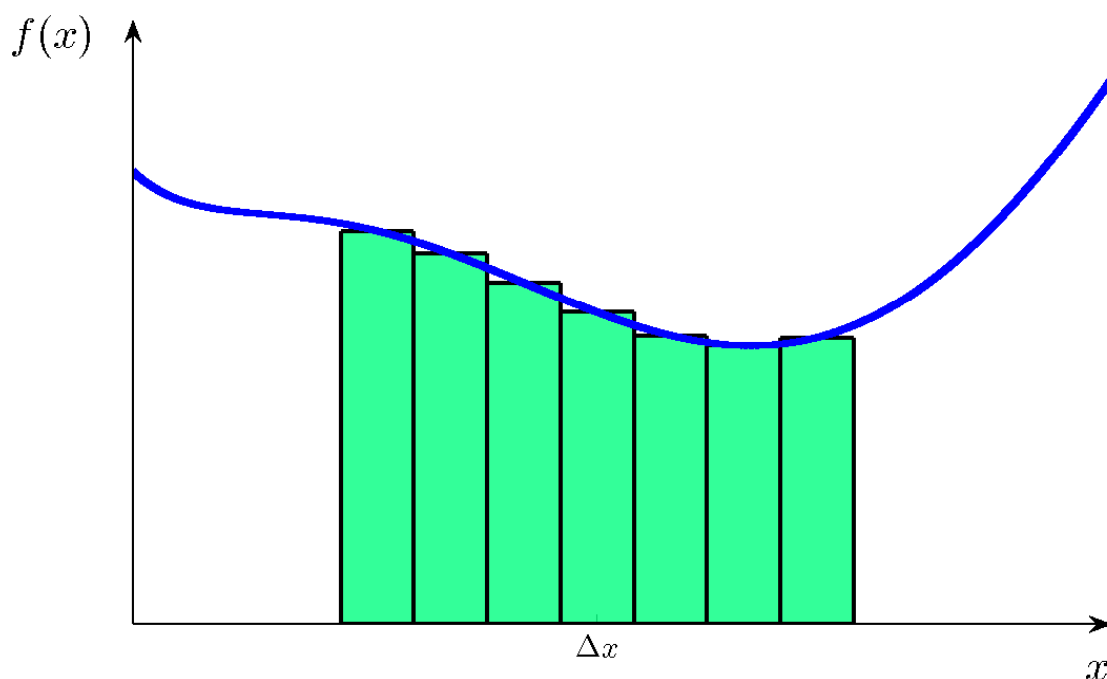
hvor k er et tal. Man ser, at differentierer vi en gang til, fås

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \cos(kx) &= \frac{d}{dx}(-k \sin(kx)) = -k \frac{d}{dx} \sin(kx) = -k^2 \cos(kx) \\ \frac{d^2}{dx^2} \sin(kx) &= \frac{d}{dx}(k \cos(kx)) = k \frac{d}{dx} \cos(kx) = -k^2 \sin(kx) . \end{aligned}$$

A.3 Integralregning

Integralregning handler ligesom differentialregning om funktioner og deres grafer. Igen skal vi have fat i en vilkårlig funktion $f(x)$ af variabelen x , og hvor vi i differentialregningen ønskede at finde hældningen af funktionen, ønsker vi nu at finde arealet under grafen for funktionen. Lad os sige, at vi vil finde arealet under grafen for $f(x)$ mellem punkterne a og b på x -aksen, hvor $a < b$. Dette areal kaldes *integralet* af $f(x)$ mellem a og b , og det betegnes

$$\int_a^b f(x) dx . \quad (\text{A.6})$$



Figur A.4: Integralet kan approksimeres ved en sum af kassernes arealer.

I første omgang kan vi dele området mellem a og b op i nogle stykker med længde Δx og tegne kasser op til grafen som det ses på Figur A.4. Det er klart, at lægger vi arealerne af kasserne sammen, får vi et tal, der er tæt på arealet under grafen, og jo flere kasser vi bruger, jo tættere på kommer vi. Lad os derfor finde et udtryk for summen af kassernes areal. Lad os sige vi opdele stykket mellem a og b i N stykker med samme længde Δx . Lad x_i betegne midtpunktet for den i 'te kasse. Den første kasse har midtpunkt $x_1 = a + \frac{\Delta x}{2}$ og den sidste

har $x_N = b - \frac{\Delta x}{2}$. For hvert midtpunkt x_i , hvor $i = 1, 2, 3, \dots, N$, udregner vi funktionsværdien $f(x_i)$. Dette er højden af den i 'te kasse, så arealet af den i 'te kasse er altså $f(x_i) \cdot \Delta x$. Summen af kassernes arealer er da

$$f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_N) \Delta x . \quad (\text{A.7})$$

Sådan en sum kan også udtrykkes vha. et sumtegn Σ , så vi i en lidt kønnere notation kan udtrykke præcis den samme sum som

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x . \quad (\text{A.8})$$

Dette udtrykker blot, at vi skal summere det, der står efter Σ mens vi lader indekset i gå fra 1 til N . Sammenlign evt. med det første udtryk for summen af kassernes areal og se, at det er det, vi gør.

Vi ønskede jo at udregne arealet under grafen for $f(x)$, og jo finere inddeling af intervallet fra a til b vi laver, dvs. jo større antallet af N inddelinger vi laver, jo tættere på kommer summen (A.8) til integralet (A.6). Til gengæld bliver længden af hver inddeling Δx mindre og mindre. Vi har jo, at længden af hver inddeling er længden af intervallet delt med antallet af inddelinger, dvs.

$$\Delta x = \frac{b - a}{N} .$$

Formelt siger vi, at Δx går mod nul, når N går mod uendelig, fordi vi deler med et større og større tal i brøken. Dette kan udtrykkes vha. en *grænseværdi* (skrives \lim):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x . \quad (\text{A.9})$$

Det ser måske uhyre formelt ud, men det udtrykker blot, at når inddelingen af intervallen fra a til b bliver finere og finere, går summen af kassernes areal mod arealet under grafen for $f(x)$. Grunden til, at jeg indførte sumnotationen var også, at udtrykket for integralet ovenfor giver en forklaring på, hvorfor man skriver integraler $\int \dots dx$ med en "slange" først og et " dx " til sidst. Ligesom i differentialregningen kan man tænke på dx som en uendelig lille tilvækst i x -værdi, og vi ser nu, at dx kan tolkes som Δx , når denne bliver uendelig lille. Tilsvarende kan vi tolke slangetegnet \int som et sumtegn Σ , hvor vi summer uendeligt mange uendeligt små led. Da vi derfor udregner funktionsværdien i alle punkter mellem a og b erstattes $f(x_i)$ af $f(x)$. Dette giver forhåbenligt en intuitiv fornemmelse af integraler og en forklaring på hvorfor de ser ud som de gør. Men hvordan man rent faktisk udregner integralet har vi ikke været inde på, og det er heller ikke nødvendigt for at udregne opgaverne i dette kompendie. Er man interesseret kan man foran i sin matematikbog eller søge på nettet. Det kan dog siges, at hvor vi her indførte integralet som arealet under grafen for $f(x)$, så skulle man ikke umiddelbart tro, at integraler har meget med differentialkvotienter at gøre. Men det viser sig, at differentialregning og integralregning er uløseligt forbundet, og de går tit under den samlede betegnelse *infinitesimalregning*, fordi man regner med infinitesimale (uendeligt små) størrelser. Som vi så, optræder den

uendeligt lille tilvækst dx både i differentialregningen og integralregningen, og det er netop her samspillet mellem de to regnearter sker. Man kan nemlig tænke sig, at hvis man integrerer en differentialkvotient

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx \quad (\text{A.10})$$

går de to dx 'er ud med hinanden¹ og vi får

$$\int_a^b df, \quad (\text{A.11})$$

som er en sum af uendeligt små tilvækster i funktionsværdien fra a til b , jævnfør tolkningen af \int som en sum af uendeligt mange uendeligt små led. Derfor vil man tro, at ovenstående giver funktionstilvæksten fra a til b , altså $f(b) - f(a)$, og det er ganske rigtigt!

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a). \quad (\text{A.12})$$

Dermed har vi en måde at finde integralet på. Hvis vi vil integrere funktionen $g(x)$ skal vi finde en anden funktion $f(x)$ kaldet *stamfunktionen*, der, når man differentierer den, giver $g(x)$. Dernæst skal man udregne værdien af stamfunktionen i de to grænser a og b , og dette er integralet af $g(x)$ fra a til b .

Afsluttende bemærkning: Hvad sker der, hvis $f(x)$ bliver negativ? Bliver arealet under den negativ del af kurven så et negativt eller positivt areal? Svaret er et negativt areal og integralet bliver negativt. Således vil integralet af funktioner, der er "lige meget" positive og negative på intervallet fra a til b give nul. Fx. vil $\cos(x)$ og $\sin(x)$ integreret fra 0 til 2π give nul.

¹Matematikere vil insistere på, at dette er forbudt, fordi differentialkvotienten teknisk set ikke er en brøk og $\int \dots dx$ som helhed er et symbol for integralet. Men intuitivt kan man fint tænkte på dx som et (uendeligt lille) tal og lade dx 'erne gå ud med hinanden.