

FYSIK CAMP 2015

Undervisere:

Kasper Zøllner (ansv.)	kaz@unf.dk
Nanna Bill Andersen	nba@unf.dk
Niels Jakob Søe Loft	nsl@unf.dk
Camilla Marie Jensen	cmj@unf.dk
Dorte Thrige Plauborg	dtp@unf.dk
Rasmus Krog	rak@unf.dk
Per Andersen	pea@unf.dk
Tue Holm-Jensen	tho@unf.dk
Maria F. V. Knudsen	mkn@unf.dk

UNGDOMMENS NATURVIDENSKABELIGE FORENING

Kolofon

Kompendie til UNF Fysik Camp 2015

Kompendiet er skrevet af Niels Jakob Søe Loft, Nanna Bill Andersen, Kasper Zøllner og Camilla Marie Jensen, med hjælp fra Dorte Thrigå Plauborg og Rasmus Krog. Kompendiet er trykt i juli 2015 og teksten er copyright ©2015 af UNF og forfatterne. Gengivelse med kildehenvisning tilladt.

Layout: Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen.

Ansvarlig: Kasper Zøllner

Indhold

Indhold	i
Introduktion	iii
1 Astronomi	1
1.1 Stjerner	1
1.2 Afstande til stjerner: parallakse	3
1.3 Afstande til stjerner: luminositet og størrelsesklasser	4
1.4 Astrodynamik	5
1.5 Opgaver	10
2 Elektromagnetisme	19
2.1 Ladninger og Coulombs lov	19
2.2 Elektriske felter	21
2.3 Magnetiske felter	23
2.4 Lorentzkraften	24
2.5 Opgaver	26
3 Kernefysik	33
3.1 Introduktion	33
3.2 Rutherfordudsprængning af atomet	33
3.3 Kernerne egenskaber	35
3.4 Stabile og ustabile kerner	43
3.5 Kernehedenfald	45
3.6 Opgaver	47
4 Partikelfysik	53
4.1 Introduktion	53
4.2 Standardmodellen	53
4.3 Kvarker i sammensætning – hadroner	56
4.4 Partikelreaktioner	58
4.5 Opgaver	62

5 Klimafysik	67
5.1 Starten på iskerneforskning	67
5.2 Stabile vandisotoper	68
5.3 Is på dynamisk skala	70
5.4 Iskerneboringer på Grønland	70
5.5 Analyse af iskerner	71
A Matematik	75
A.1 Trigonometriske funktioner	75
A.2 Vektorer	77

Introduktion

Velkommen til UNF Fysik Camp 2015. Dette kompendium er en introduktion til de emner, som vi skal arbejde med i løbet af campen. Programmet, som I skal igennem, omhandler fire spændende grene af fysikken, som alle giver et indblik i, hvor vigtig og alsidig fysikken er. Emnerne strækker sig fra astronomi og klimafysik til elektromagnetisme og kerne- og partikelfysik. Alle er de relevante for vores verden, og vi håber, at I vil finde dem lige så spændende som vi selv gør.

I kommer alle med forskellig undervisningsbaggrund, og vi kræver ikke, at I bare forstår alt med det samme. Under campen vil der være rig mulighed for at snakke mere om det, som står i dette kompendie og virkelig dykke ned i stoffet. Kompendiet indeholder også en række opgaver, som vi skal arbejde med på selve campen. I må meget gerne undlade at lave disse opgaver hjemmefra, da der nok skal være masser af tid til det. I opfordres dog kraftigt til at læse selve tekststoffet, da det er en forudsætning for at løse opgaverne.

Da mange af jer kommer fra forskellige klassetrin, har I ikke alle modtaget undervisning i alt det, som I måske skal bruge. I opfordres derfor også til at læse den sidste del af kompendiet, som dækker noget af den matematik, som I får brug for.

God fornøjelse, og velkommen i fysikkens verden.

på vegne af det faglige team,
Kasper Zøllner, faglig koordinator

Kapitel 1

Astronomi

Astronomi er studiet af himmellegemer – stjerner, planeter, måner, kometer, galakser og mere til. Vi vil i dette afsnit koncentrere os om to overordnede emner: stjernerne – hvordan de studeres, og hvordan vi kan bruge dem til at bestemme afstande i Mælkevejen, og astrodynamik – et felt, som beskæftiger sig med hvordan himmellegemer bevæger sig, og hvordan man rejser til fjerne omegne af Solsystemet.

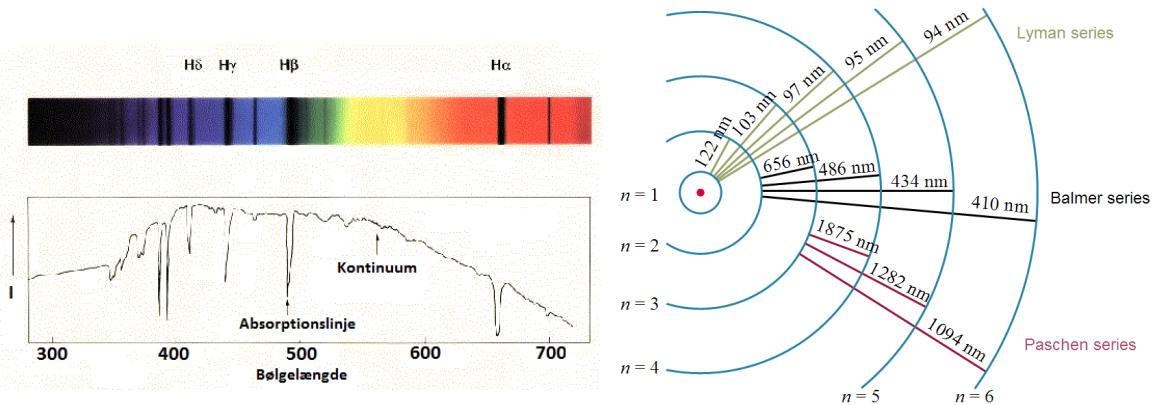
1.1 Stjerner

Stjerner er kugler af gas, som holdes sammen af tyngdekraften, og som lyser på grund af energidannelse i deres indre kerner i en proces kaldet fusion. Solen er den eneste stjerne, som er tæt nok på til at vi kan studere strukturer på dens overflade. Den eneste mulighed for at studere Mælkevejens andre stjerner er ud fra det lys, de udsender som punktkilder (de er nemlig så langt fra os, at for os er de blot lysende punkter på himlen). Det bedste praj om, hvad slags stjerne, man beskæftiger sig med, er ud fra dens temperatur ved overfladen.

Til dette kan man bruge stjernens spektrum. En stjernes spektrum er dens lys adskilt i alle tilstede værende bølgelængder. Et eksempel på dette er vist i figur 1.1. Det består af et kontinuum – f.eks. alle synlige farver fra violet til rød og absorptionslinjer. Absorptionslinjer ses som sorte streger. I virkeligheden er de manglende bølgelængder, som det også ses i figur 1.1. Absorptionslinjer angiver ”bevægelsen” af en elektron fra et lavt energiniveau til et højere energiniveau i et bestemt element, f.eks. et grundstof som hydrogen. Man siger at elektronen exciteres.

Absorptionslinjerne kan forstås ud fra Bohrs atommodel (se figur 1.1). I denne model kan elektronerne i hydrogen-atomet eksistere i bestemte energiniveauer angivet med $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Hvis en elektron får tilført nok energi, kan den ”springe” mellem niveauerne. Afstanden mellem hvert niveau har en bestemt energi, og derved en bestemt bølgelængde. Absorptionslinjerne fra en stjerne opstår i den ydre del af stjernens atmosfære kaldet photosfæren. Det er elementerne i stjernens photosfære, som afgør, hvilke absorptionslinjer, der optræder. Forestil dig, at der blandt alt det lys, stjernen udsender, befinner sig fotoner (lyspartikler) med energien præcis svarende til energiniveauet $n = 2 \rightarrow n = 3$ svarende til bølgelængden 656 nm. Hvis der befinner sig hydrogen med en elektron i energiniveau $n = 2$ i photosfæren, kan elektronen da absorbere lyset, og det kommer derfor til at ”mangle” i stjernes spektrum.

Netop overgange fra $n = 2 \rightarrow n = 3, 4, 5, \dots$ er meget brugt i astronomien. Disse overgange kaldes Balmer-serien. På figur 1.1 svarer absorptionslinjerne vist til venstre netop til Balmer-linjerne vist til højre ved bølgelængderne 656 nm, 486 nm, 434 nm, ..., normalt kaldet H_α , H_β , H_δ osv. Absorptionslinjerne sladrer altså om hvilke stoffer, stjernens photosfære indeholder, fordi hvert stof har sin egen ”stregkode”.



Figur 1.1: Venstre: Et spektrum med absorptionslinjer. Absorptionslinjer betyder manglende intensitet ud fra en bestemt bølgelængde, f.eks. fra H_α ved 656 nm. Højre: Overgange i hydrogen. Balmer-linjerne er excitation af en elektron fra energiniveau $n = 2$ til $n = 3, 4, 5, \dots$, hvilket producerer linjerne kaldet H_α , H_β , H_δ osv. i spektret til venstre.

Hvordan kan absorptionslinjerne i en stjernes spektrum bruges til at estimere dens temperatur? Jo, styrken af absorptionslinjerne afhænger af temperaturen i photosfæren, f.eks. ser man i Solens spektrum ingen absorptionslinjer fra helium, hvilket betyder, at temperaturen ikke er høj nok til at elektronerne i helium kan exciteres. Der gælder nemlig, at jo længere spring, elektronen skal tage, jo højere energi kræver det. Dette betyder, at jo større bølgelængde, linjen har, jo højere skal temperaturen være.

Balmer-linjerne kan bruges til at estimere temperaturen af en stjerne, og stjernerne med de stærkeste Balmer-linjer har temperaturer ca. 10 000 K. Men ikke alle stjerner har stærke Balmer-linjer, og der er tre forklaringer på, at en stjerne har svage Balmer-linjer:

1. Der er ingen eller meget lidt hydrogen i photosfæren.
2. Temperaturen i photosfæren er skarpt større end 10 000 K.
3. Temperaturen i photosfæren er skarpt mindre end 10 000 K.

Vi kan forstå de sidste to muligheder ved at se på absorptionslinjer af andre grundstoffer end hydrogen. Ser vi f.eks. på helium-linjer, så så vi før, at photosfæren ikke er varm nok til at heliumatomer kan exciteres fra et lavere energiniveau til et højere energiniveau i Solens spektrum. Det må derfor betyde, at hvis en stjerne har stærke heliumlinjer, må temperaturen af stjernen være varmere end Solen. Så hvis en stjerne har stærke helium-linjer og svage Balmer-linjer, så må stjernen nødvendigvis have en temperatur skarpt større end 10 000 K.

Grundstoffer hvis yderste skal kun indeholder én elektron findes kun i relativt kolde stjerner. Derfor ved man, at hvis man observerer svage Balmer-linjer, men også absorptionslinjer fra f.eks. natrium, så må stjernens temperatur nødvendigvis være skarpt mindre end 10 000 K.

Alle stjerner kan klassificeres overordnet ud fra deres temperatur, kaldet en spektralklassifikation. De overordnede klasser kaldes OBAFGKMLT¹ og deres temperatur er vist i tabel 1.1.

Spektral type	Temperatur
O	40 000 K
B	20 000 K
A	9000 K
F	7000 K
G	5500 K
K	4500 K
M	3000 K
L	2000 K
T	1300 K

Tabel 1.1: Spektralklassifikation og temperaturer.

Stjerner med en temperaturer mindre end 2000 K kaldes kolde dværgte. Brune dværgte er eksempler på dem af spektraltype L og T. Brune dværgte er kugler af gas, som ikke er tunge nok til at starte fusion i deres indre og derved blive ”rigtige stjerner”.

1.2 Afstande til stjerner: parallakse

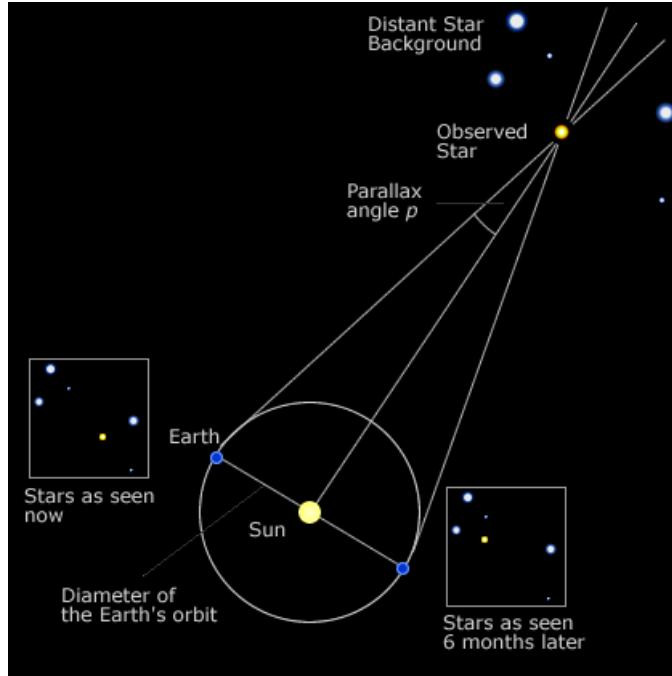
I astronomien bliver stjerner i vid udstrækning brugt til at bestemme afstande med. Til bestemmelse af afstande til nære stjerner bruges det, der kaldes parallakse-metoden. Figur 1.2 viser principippet.

Stjerner, som er tæt på Solsystemet vil flytte deres tilsyneladende position på nattehimlen, når de observeres fra Jorden på forskellige tidspunkter pga. Jordens rotation om Solen. Figur 1.2 viser positionen af en nær stjerne mod en baggrund af fjerne stjerner (hvis position rykker sig så lidt, at det ikke kan ses) observeret fra Jorden med et halvt års mellemrum. Over det halve år har stjernens tilsyneladende position rykket sig en lille afstand på ”himmelkuglen”. Vi kan derfor beskrive denne afstand på himmelkuglen som et vist antal grader. I astronomi er de grader, objekter bevæger sig, typisk så små, at vi ikke beskriver det i grader, men i såkaldte bueminutter (angivet som ') og buesekunder (angivet som ''). Det gælder:

- 1 bueminut i grader: $1' = 1/60^\circ$
- 1 buesekund i grader: $1'' = 1/3600^\circ$

På figur 1.2 ses det, at det halve af den vinkel, som stjernens tilsyneladende position har flyttet sig – kaldet stjernens parallakse p – udgør en retvinklet trekant sammen med afstanden fra Jorden til Solen

¹Denne liste huskes nemt ud fra sætningen ”Oh Be A Fine Guy/Girl, Kiss Me...LT”.



Figur 1.2: Parallakse-metoden: en nær stjerne ændrer sin tilsyneladende placering, som set fra jorden. Geometrisk kan man udregne dens placering.

(defineret som 1 astronomisk enhed, forkortet AU) og afstanden til stjernen. Fra et geometrisk argument kan man komme frem til parallakse-relationen:

$$d = \frac{1}{p}, \quad (1.1)$$

hvor p er stjernens parallakse i buesekunder, og d bliver afstanden til stjernen i enheden *parsec*, forkortet pc. 1 pc er defineret som:

$$1 \text{ pc} = 206265 \text{ AU}, \quad (1.2)$$

hvor 1 AU er defineret som den gennemsnitlige afstand fra Jorden til Solen:

$$1 \text{ AU} = 1,495978 \cdot 10^{11} \text{ m}. \quad (1.3)$$

1.3 Afstande til stjerner: luminositet og størrelsesklasser

En af de mest brugte metoder til bestemmelse af afstande er gennem et objekts *luminositet* L . Et objekts luminositet er et mål for, hvor meget energi, det udstråler. For en stjerne med temperatur T og radius R er luminositeten givet som

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad (1.4)$$

hvor σ er Stefan-Boltzmanns konstant. En stjerne udsender lys ens i alle retninger. Modtages det i en afstand d_L væk fra kilden er det formindsket med en faktor $4\pi d_L^2$, idet lyset nu er ligeligt fordelt over et kugleareal $4\pi d_L^2$. Det lys, der modtages en afstand d_L fra kilden kaldes for fluxen f :

$$f = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (1.5)$$

Fluxen er da det lys, Jorden f.eks. modtager fra en fjern kilde. Hvis luminositeten af kilden kendes, kan man derfor finde afstanden d_L (kaldet luminositetsafstanden).

Et andet vigtigt begreb i astronomien er et objekts størrelsesklasse, som er et mål for, hvor lysstærk et objekt er. Det kan kan beskrives i *magnitudesystemet*, som er et logaritmisk system, der daterer helt tilbage til de gamle grækere. Af historiske årsager fungerer systemet således, at jo højere magnitude, desto svagere ser objektet ud på himlen og omvendt. Det betyder f.eks., at fuldmånen set fra Jorden har en magnitude på $m = -12,74$, mens stjernesystemet alpha Centauri på nattehimlen har en tilsyneladende magnitude på $m = 1,33$.

To himmellegemer med fluxer f_1 og f_2 vil have tilsyneladende magnituder – altså magnituder som de ser ud på f.eks. Jordens overflade – som er relateret til hinanden ved

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{f_1}{f_2} \right). \quad (1.6)$$

Men den tilsyneladende magnitude fortæller i sig selv ikke noget om luminositeten eller afstanden af en given kilde. Den *absolotte* magnitude M er defineret som den tilsyneladende magnitude for en kilde, hvis den var placeret i en afstand på 10 parsec fra Jorden. En kildes tilsyneladende og absolute magnitude er relateret til hinanden ved:

$$M = m - 5 \log \left(\frac{d_L}{10 \text{pc}} \right). \quad (1.7)$$

Forskellen mellem M og m for et objekt er en meget brugt størrelse i astronomien. Det kaldes for objektet distancemodulus μ og fra det kan man finde afstanden i enten pc eller Mpc (mega-parsec, $1 \text{Mpc} = 10^6 \text{ pc}$):

$$\mu = m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{\text{pc}} \right) - 5 = 5 \log \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (1.8)$$

1.4 Astrodynamik

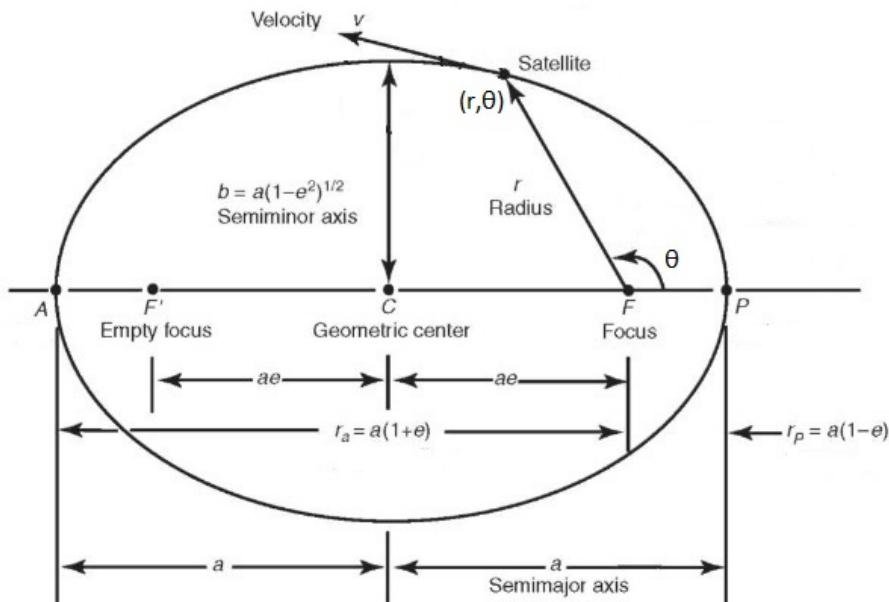
En af de største videnskabsmænd nogensinde var Isaac Newton, som levede i 1600-tallets England. Året 1665 beskriver Newton selv som sit *annus mirabilis* (forunderlige år), hvor han bl.a. formulerede sine tre kendte love samt sin gravitationslov, der beskriver tyngdekraften mellem to legemer. Den sidste danner grundlag for beskrivelsen af himmellegemernes dynamik, et emne som har optaget mange astronomer igennem tiden. Selvom en komplet forståelse af legemers bevægelse i rummet kræver en inklusion af Einsteins generelle relativitetsteori, så er Newtons beskrivelse ganske præcis, og gør én i stand til at forudsige baner for alle objekter i rummet.

Tyngdekraften mellem to legemer af masse M og m , der er adskilt af en afstand r er givet som

$$F = -G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1.9)$$

hvor $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ kaldes for gravitationskonstanten. Det negative fortegn fortæller, at tyngdekraften altid er tiltrækkende. Newton udledte sin version af ligning (1.9) ved at kræve, at tyngdekraften skal resultere i planetbaner, som overholder Keplers love. Det er også muligt at udlede Keplers tre love som en konsekvens af Newtons gravitationslov.

Ser vi f.eks. på en planets kredsløb omkring en stjerne, så fortæller den første lov, at planeten vil bevæge sig i et elliptisk kredsløb med Solen i det ene fokuspunkt. Dette er vist på figur 1.3. Den



Figur 1.3: Parametre for et elliptisk kredsløb.

længste og korteste afstand gennem ellipsen, der passerer centrum, kaldes henholdsvis storaksen og lille-aksen. Halvdelen af storaksen kaldes den *halve storakse* (semimajor) a , mens halvdelen af lille-aksen ikke overraskende kaldes den *halve-lille-akse* (semiminor) b . Hvor elliptisk kredsløbet er beskrevet af excentriciteten e , hvor $e = 0$ svarer til en cirkel. Jo større e er, jo mere fladmægtig er banen.

Keplers anden lov fortæller, at hvis man tegner en streg fra Solen til planeten på figur 1.3, så vil den overstryge et lige stort areal over per tidsenhed, lige meget hvor på kredsløbet den er. Det betyder essentielt set bare, at hvis planeten er langt fra Solen, så kredser den langsomt, mens den tæt på Solen rejser hurtigere.

Den tredje lov siger, at perioden P – det vil sige den tid, som det tager planeten at kredse rundt om Solen – afhænger af den halve storakse a således:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3, \quad (1.10)$$

hvor M og m er henholdsvis stjernens og planetens masse. Da planeterne har en meget mindre masse end Solen, kan man ofte bruge $M + m \approx M$.

Gravitationsloven fra (1.9) kan kombineres med Newtons anden lov på vektorform² $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, hvor \mathbf{a} er accelerationen af legemet med masse m . Bevægelsen af et legeme i tre dimensioner kan skrives som en vektor, \mathbf{r} . Accelerationen er, ligesom i én dimension, den dobbeltafledte af \mathbf{r} mht. tiden.³. Gravitationsloven i ligning (1.9) kombineret med Newtons anden lov giver den det der kaldes to-legeme-ligningen for bevægelse:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \left(\frac{GM}{r^3} \right) \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

hvor $\mathbf{0}$ er nulvektoren, altså en vektor som har 0 på alle indgange.

En løsning til ovenstående ligning er ligningen for en konisk sektion

$$r = a \frac{(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)}, \quad (1.12)$$

hvor θ beskriver den polære vinkel eller *den sande anomali*. Det smarte ved at skrive et legemes position op i såkaldte polære koordinater er bl.a. at man så kan beskrive positionen med en afstand og en vinkel i forhold til legemet i brændpunktet. Dette er også vist på figur 1.3. En konisk sektion er en kurve, der er dannet ved skæring mellem et plan der passerer igennem en kegle. Dette er vist på figur 1.4.

Den vinkel, som planen skærer keglen med, bestemmer om den koniske sektion er en *cirkel, ellipse, parabel eller hyperbel*. Som sagt har en cirkel $e = 0$, mens for en ellipse er $0 < e < 1$. Parablen har $e = 1$ mens hyperbelen har $e > 1$. Den koniske sektion hænger også sammen med den halve storakse a . For en cirkel er $a = \text{radius}$, mens den er mindre for en ellipse. For en hyperbel er $a > 0$ mens den for en parabel er uendelig. Det vil altså sige, at Keplers første lov omhandler cirkler og ellipser - hvilket man kalder for *lukkede* kredsløb. Fysikken bag tyngdekraft tillader dog også *åbne* kredsløb, hvilket er hvad parabel og hyperbel baner er. Den halve storakse beskriver altså hvor stort et kredsløb er, mens excentriciteten beskriver hvordan formen ser ud. Sidstnævnte kan udtrykkes ved hjælp af a (semimajor-akse) og b (semiminor-akse):

$$e = \left(\frac{1 - b^2}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (1.13)$$

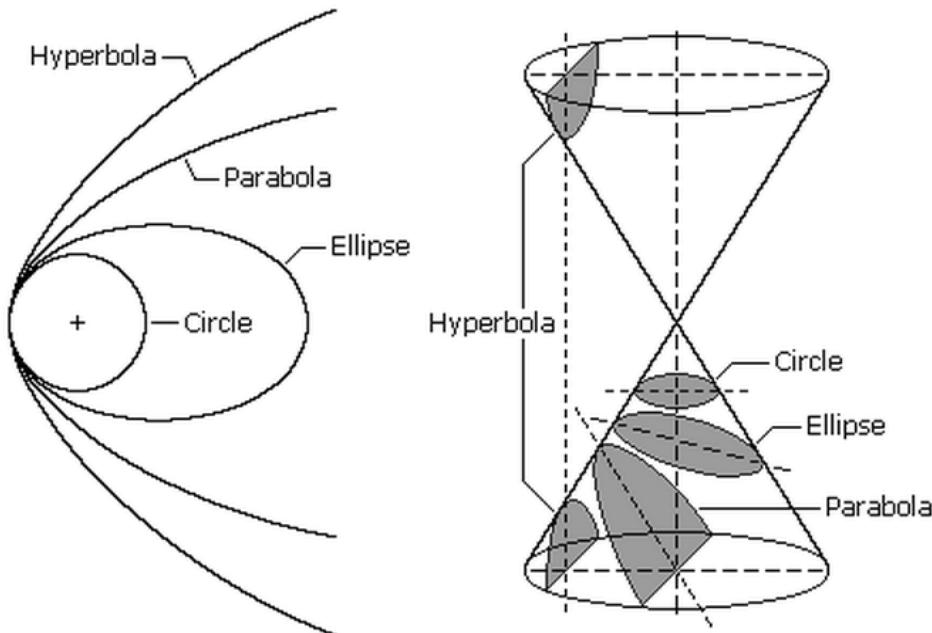
Fra to-legeme ligningen kan man udlede en masse andre relationer. En af dem kaldes for energi-ligningen.

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{-GM}{2a}, \quad (1.14)$$

hvor ϵ er *den specifikke mekaniske energi*, som er den mekaniske energi per masse. Skal man bruge den totale mekaniske energi af legemet i kredsløb skal man altså gange igennem med dets masse, m . Da kræfterne i systemet er konservative (altså uafhængige af vej) er energien bevaret. Det andet led i ligningen, $-GM/r$ definerer den potentielle energi til at være nul uendelig langt væk og negativ for enhver radius mindre end uendelig. I så fald vil energien for et elliptisk kredsløb være negativ. Som

²Hvis du ikke kender til vektorer, kan du læse om dem i appendikset bagerst i dette kompendie.

³Dette argument kræver kendskab til avanceret differentialregning, så hvis du ikke forstår det, så gør det ikke noget. Du kan bare tage resultatet (1.12) for gode varer.



Figur 1.4: Eksempler på koniske sektioner.

energien stiger (går mod 0) vil ellipsen blive større som den nærmer sig en parabel-bane. Energien for en parabel er 0. Det vil sige, at parabelen er den bane med mindst mulige energi som skal bruges til at undslippe det gravitationelle potentiale. Vi kan sætte energien til nul i ligning (1.14) og finde

$$v_{\text{esc}} = \left(\frac{2GM}{r} \right)^{1/2}, \quad (1.15)$$

hvor v_{esc} er *undslippelseshastigheden* - den hastighed det kræver at undslippe tyngdefeltet af et legeme i afstand r og med massen M .

Fra ligning 1.14 kan vi også se, at legemet i kredsløb bevæger sig hurtigst tættest på det der kredses om (hvilket også er konsistent med Keplers anden lov) og langsomt når det er længst væk. Vi kalder de to punkter, tættest og længst væk, i kredsløbet for henholdsvis periapsis- og apoapsis-afstanden⁴. Fra ligning 1.12 kan man udlede formler for hastigheden i de to punkter. Man får hhv.

$$v_{\text{pe}} = \left(\frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2}, \quad (1.16)$$

og

$$v_{\text{ap}} = \left(\frac{GM}{a} \frac{1-e}{1+e} \right)^{1/2}. \quad (1.17)$$

⁴Oftest bruger man begreberne periapsis og apoapsis generelt mens man i kredsløb om noget specifikt godt kan støde på andre endelser. For Solen bruger man -helion (f.eks. perihelion) mens man for Jorden bruger -geum (f.eks. apogeum). De generelle er dog periapsis og apoapsis.

Der findes ikke nogen simpel ligning for $r(t)$ eller $v(t)$ men man kan benytte ligning 1.12 til at finde hastigheden i en bane som funktion af afstanden fra det centrale legeme. Vi finder

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (1.18)$$

hvor v beskriver hastigheden et legeme skal have for at holde sig i en bane med halve storakse a i en afstand r . Ovenstående er kendt som *vis visa*-ligningen. Ved hjælp af Keplers tredje lov kan vi omskrive den

$$v = \frac{2\pi a}{P} \left(2\frac{a}{r} - 1 \right)^{1/2}, \quad (1.19)$$

hvor P er perioden.

Begrænsninger på størrelsen af kredsløb

Når to legemer kredser om hinanden, så påvirker de begge deres ledsager med en kraft givet ved (1.9). Den afhænger af afstanden, r . Ser man på Månen omkring Jorden, så hiver Jorden i Månen, mens Månen også hiver lidt i Jorden (og i vandet, hvilket er hvad der forårsager tidevand). Hvis man flyttede Månen tættere og tættere på Jorden ville man nå en grænse, hvor kraften fra Jorden ville være så stor, at den trækker langt mere i den ene side af Månen end i den anden. Denne differentielle tyngdekraft ville få Månen fra hinanden (og give os en ring om planeten lige som Saturn). Det samme gælder for enhver situation, hvor noget stort trækker i noget mindre stort. Omvendt så er der også en grænse, hvor Solen vil trække mere i Månen end Jorden gør, hvilket ville resultere i, at Månen gik i kredsløb om Solen frem for omkring Jorden.

Vi finder frem til, at den mindst mulige afstand, også kendt som *Roche grænsen*, r_R , er givet som

$$r_R = 2,44 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} R, \quad (1.20)$$

hvor ρ som sædvanligt angiver densiteten (masseylden) og R er radius for det store tunge objekt.

Den maksimale afstand, kendt som *Hill radius* r_H for objektet er

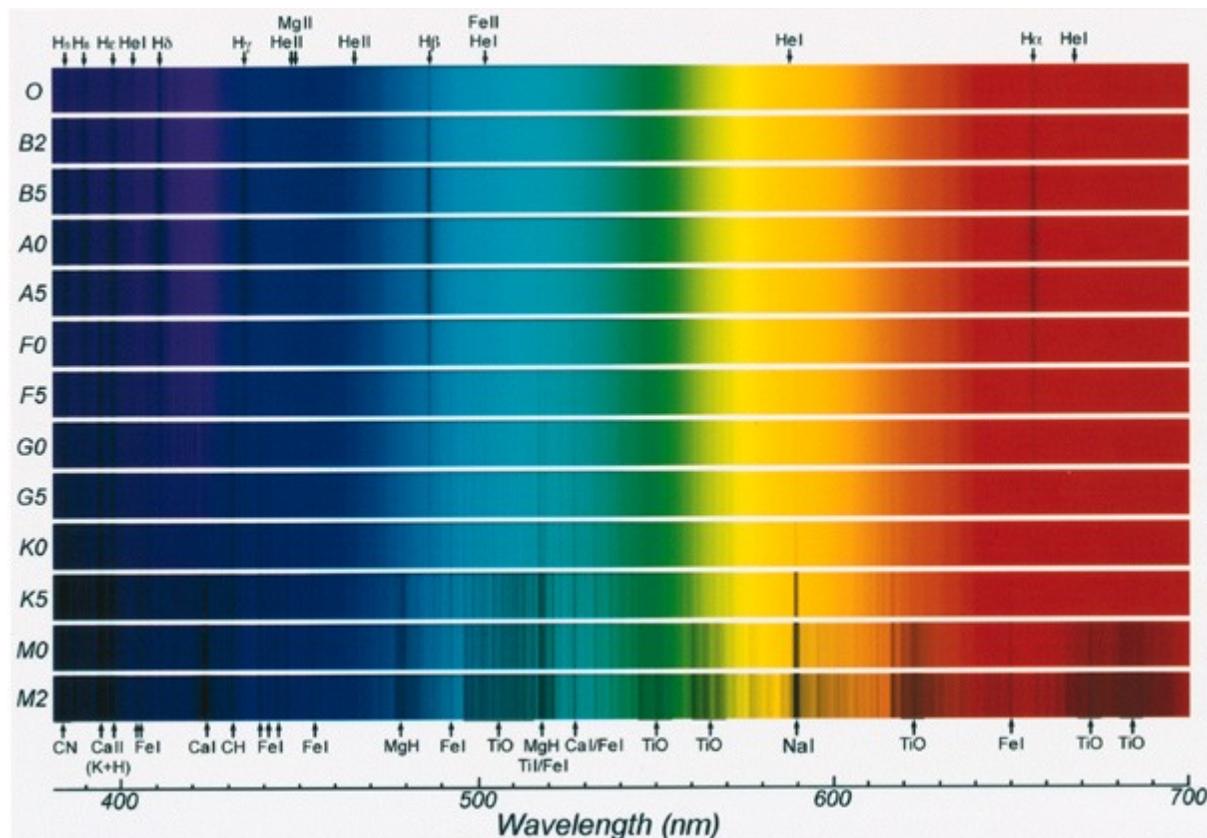
$$r_H = \left(\frac{M_1}{2M_2} \right)^{1/3} a, \quad (1.21)$$

hvor M_1 og M_2 er hhv. det lette og tunge objekt, der trækker i legemet der kredser om det lette objekt i en bane med halve storakse a .

1.5 Opgaver

- **Opgave 1: Stjernernes spektr**

Figur 1.5 viser forskellige spektraltyper og visse absorptionslinjer angivet.



Figur 1.5: Absorption for spektraltyper.

- 1) Solen har spektralklasse G2V, men i dette tilfælde kan vi godt tilnærme den til en G0-type. Hvad er nogle eksempler på grundstoffer, som kan ses i dens atmosfære?
- 2) Stjerner af typerne M0 og M2 har f.eks. molekylerne MgH og TiO i deres atmosfærer. Ud fra din viden om spektraltyper hvad vil du så sige var den primære årsag til at molekylerne kan eksistere i deres atmosfærer?

- **Opgave 2: Blinke, blinke stjerne der**

Stjernen Dschubba i stjernebildet Skorpionen (som ser virkelig nice ud på en mørk nattehimmel men som man skal til Sydeuropa eller længere ned for at kunne se) har en overfladetemperatur på 28 000

K, en anslæt radius på $5,6 \cdot 10^9$ m og ligger i en afstand på 123 pc. Stjernen har en tilsyneladende magnitude på $m = 2,3$

- 1) Hvad er stjernens luminositet?
- 2) Hvad er stjernens flux ved dens overflade?
- 3) Hvad er stjernens flux ved Jordens overflade?
- 4) Solen har en tilsyneladende magnitude på $m_{\odot} = -27$. Hvad er stjernens flux i enheder af Solens flux?

•• Opgave 3: Afstandsbedømmelse i nabologat

En stjerne har en tilsyneladende magnitude på 17,5 og en absolut magnitude på -1,27.

- 1) Hvad er afstanden til stjernen?
- 2) Satellitten GAIA som blev opsendt i 2012 kan måle parallakser ned til ca. 20 mikro-buesekunder (10^{-6}). Vil GAIA kunne måle stjernens parallakse?
- 3) Det oplyses nu, at lyset på sin vej fra stjernen til os er blevet reduceret med 60pct. pga. udslukning fra interstellart støv. Hvad er den faktiske afstand til stjernen? Kan GAIA måle stjernens parallakse?

• Opgave 4: Sortlegemestråling

Planeter, almindelige stjerner og kompakte objekter er eksempler på objekter, som til en god tilnærmede kan beskrives som sorte legemer. Det betyder, at spektrene for den stråling, de udsender, er næsten perfekte Planck-spektrum givet ved Plancks strålingslov, og at de udstråler med maksimal intensitet ved bølgelængden:

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^6 \text{ nm K}}{T} \quad (1.22)$$

Vi ser på fire objekter:

- En planet med overfladetemperatur $T_p = 290 \text{ K}$
- En stjerne med overfladetemperatur $T_s = 5,0 \cdot 10^3 \text{ K}$
- En hvid dværg med overfladetemperatur $T_{hd} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ K}$
- En neutronstjerne med overfladetemperatur $T_{ns} = 1,0 \cdot 10^6 \text{ K}$

- 1) Hvilket af de fire objekter udsender sortlegemestråling med den korteste bølgelængde ved maksimal intensitet?

- 2) Det oplyses nu at radierne for de fire objekter er:

- Planet $R_p = 6000 \text{ km}$
- Stjerne $R_s = 6,0 \cdot 10^5 \text{ km}$
- Hvid dværg $R_{hd} = 6000 \text{ km}$
- Neutronstjerne $R_{ns} = 10 \text{ km}$

Hvilket af de fire objekter udsender sortlegemestråling med den største luminositet?

•• Opgave 5: Det super-massive sorte hul i Mælkevejens centrum

Stjernen S0-16 er en B-stjerne med en masse omkring $10M_{\odot}$, som bevæger sig i en elliptisk bane omkring et objekt i Mælkevejens centrum med den halve storakse $a = 1800$ AU, eccentricitet $e = 0,9389$ og omløbsperiode $P = 38$ år.

- 1) Bestem massen af det centrale objekt, som S0-16 er i bane om.
- 2) Hvad er den korteste afstand i banen mellem S0-16 og det centrale objekt? *Hint: Se på figur 1.3.*
- 3) S0-16 er utsat for voldsomme tidevandskræfter, når den bevæger sig ind omkring det centrale objekt. Vurder hvor meget større tidevandspåvirkningen på S0-16 er i periastron i forhold til i det punkt i banen, hvor S0-16 er længst fra det centrale objekt. *Hint: Den største afstand i banen er det, vi definerer som apoapsis.*
- 4) Brug resultaterne til at argumentere for, at objektet i centrum af Mælkevejen formentlig er et gigantisk sort hul.

••• Opgave 6: That's no moon...

Saturns måne Mimas er placeret i en elliptisk bane omkring Saturn med halve storakse $a_{\text{Mimas}} = 185,5 \cdot 10^3$ km. Desuden oplyses det, at massen af Saturn er $M_s = 5,685 \cdot 10^{26}$ kg og at massen af Mimas er $M_{\text{Mimas}} = 3,751 \cdot 10^{19}$ kg.

- 1) Bestem baneperioden for Mimas.

Vi vil nu i de følgende opgaver prøve at udregne temperaturen på overfladen af Mimas.

- 2) Vis først, at en planet eller måne med radius R_m i en afstand d fra Solen og med en albedo-værdi på A vil absorbere energien

$$L_{\text{abs}} = \frac{R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \pi R_m^2}{d^2} (1 - A), \quad (1.23)$$

hvor R_{\odot} og T_{\odot} er hhv. radius og temperatur af Solen. *Hint: man kan sige, at den del af planeten eller månen der er vendt mod Solen udgør et areal givet ved πR_m^2 .*

- 3) Hvis en måne eller planet roterer hurtigt, udsender den energi givet ved luminositeten L_{uds} i ligning 1.4. Solen er en stjerne i termisk ligevægt, så vi kan derfor skrive $L_{\text{abs}} = L_{\text{uds}}$. Vis, at temperaturen på overfladen af en planet eller måne, T_m , kan udtrykkes som

$$T_m = T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{d} \right)^{1/2} \quad (1.24)$$

Hint: start med at sætte $L_{\text{abs}} = L_{\text{uds}}$.

- 4) Det oplyses nu, at Mimas roterer hurtigt, samt at albedoen på overfladen af Mimas er $A_{\text{Mimas}} = 0,962$. Desuden oplyses det, at temperaturen på overfladen af Solen er $T_{\odot} = 5778$ K, Solens radius er

$R_{\odot} = 6,955 \cdot 10^5$ km, samt at middelfstanden mellem Mimas og Solen er $d_{Mimas} = 1,43 \cdot 10^9$ km.
 Beregn ud fra oplysningerne en teoretisk temperatur på overfladen af Mimas. Gøre rede for dine antagelser. Cassini-rumsonden vurderede temperaturen på overfladen af Mimas til at være ca. 65 K - hvad kan forskellen mellem den teoretiske og den observede temperatur skyldes?

- **Opgave 7: Til skræk og rædsel...**

Mars har to måner, Phobos og Deimos (græsk: skræk og rædsel). Den inderste måne, Phobos, har en tæthed på $\rho_{Phobos} \approx 1900 \text{ kg m}^{-3}$. Mars har en densitet omkring $\rho_{Mars} \approx 3900 \text{ kg m}^{-3}$ og en radius på $R_{Mars} = 3397 \text{ km}$.

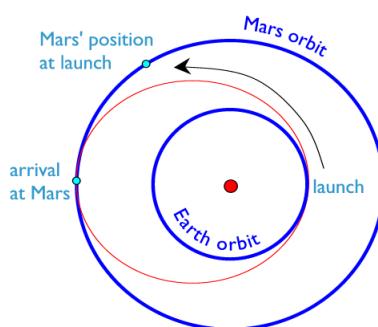
1) Hvad er minimumsafstanden mellem Mars og Phobos før månen ødelægges? Hvad er det i Mars radier?

Phobos kredser i en næsten cirkulær bane med $a_{Phobos} = 9400 \text{ km} = 2,76 R_{Mars}$.

2) Er det et problem? Hvad forhindrer Phobos i at blive ødelagt? (*Hint: Det er det samme, som forhindrer dig i at blive revet i stykker selvom du er inden for din Roche-grænse i forhold til Jorden*)

- **Opgave 8: Rejsen til Mars**

Astrodynamikken er ekstremt vigtig, da den ikke bare danner baggrund for vores forståelse af himmellegemernes bevægelse, men også er baggrund for alt rumfart. Et spændende tilfælde er rejsen til andre planeter. En måde at komme fra Jorden til en anden planet, f.eks. Mars, er at placere sit rumfartøj i et såkaldt Hohmann transfer orbit, der er en ellipse med perihelion ved den indre planet (Jorden) og aphelion ved den ydre (Mars), som vist i figur 1.6.



Figur 1.6: Udseende af et Hohmann transfer orbit.

Antag at Jorden og Mars er på et cirkulært kredsløb med $a_{\oplus} = 1 \text{ AU}$ og $P_{\oplus} = 1 \text{ år}$ og $a_{Mars} = 1,52 \text{ AU}$ og $P_{Mars} = 1,88 \text{ år}$.

- 1) Hvad er den halve storakse for Hohmann banen mellem Mars og Jorden?
- 2) Hvad er rejsetiden i dage? Sammenlign f.eks. med de tre dage det tog Apollo 11 astronauterne at komme til Månen.
- 3) Hvor hurtigt bevæger Jorden sig i sin bane? Hvad med Mars?
- 4) Hvad skal rumskibets hastighed være ved afgang fra Jorden for at være i Hohmann kredsløbet?
- 5) Er det hurtigere eller langsommere end Jordens hastighed? Med hvor meget?
- 6) Hvad er rumskibets hastighed ved ankomst til Mars?
- 7) Er det hurtigere eller langsommere end Mars? Med hvor meget?
- 8) Hvilke fordele tror du der er ved at benytte et Hohmann kredsløb til at rejse til andre planeter?
- 9) Hvilke ulemper kunne der være?
- 10) Hvordan ser rejsetiden for et Hohmann kredsløb fra Jorden ud i Solsystemet ud, som funktion af afstand fra Solen?
- 11) Hvad kan man ellers gøre, når man skal rejse gennem Solsystemmet?

- **Opgave 9: Massen af Solsystemet**

Planeten Neptun – Solsystemets yderste planet – bevæger sig i en nær-cirkulær bane med en periode på 164,8 år og en baneradius på ca. 30 AU

- 1) Kan du estimere den totale masse af solsystemet? Kommentér svaret - hvad er det f.eks. i forhold til Solens masse?

- **Opgave 10: Undslippelseshastighed**

Undslippelseshastigheden, v_{esc} , angiver den minimale hastighed det kræves for at undslippe et tyngdefelt.

- 1) Hvor hurtigt skal en rumraket flyve fra Jordens overflade for at undslippe Jordens tyngdefelt?
- 2) Din rumraket flyver ud af Solsystemet fra et sted i Jordens bane. Hvor hurtigt skal den flyve for at undslippe? (*Hint: brug massen af solsystemet som du estimerede i opgave 9.*)

- ● ● **Opgave 11: En tur i et sort hul**

Schwarzschild radius, r_{sch} , er et begreb der ofte bruges sammen med sorte huller. Det er defineret som den afstand, hvor undslippelseshastigheden bliver lig med lysets hastighed, c .

- 1) Brug formlen for undslippelseshastighed til at finde et udtryk for et objekts Schwarzschild radius. Vis derefter, at dette også kan skrives som $r_{\text{sch}} = 3 \text{ km} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)$. (*Hint: Det gælder for enheden newton at N = kg m/c².*)

Et sort hul er en singularitet og har derfor ingen rumlig udstrækning. Man kan dog godt bruge r_{sch} som en slags radius for et sort hul. Dette kaldes begivenhedshorisonten. Efter denne vil selv ikke lys kunne undslippe, og hvad end der passerer forbi er altså tabt fra vores univers.

2) Hvad vil Schwarzschild-radius være for Solen, hvis den blev til et sort hul, i enheder af AU?

3) Hvad er densiteten?

4) Hvad vil densiteten af det super massive sorte hul i Mælkevejens centrum være hvis det har en masse på $M_{\bullet} \approx 4,2 \cdot 10^6 M_{\odot}$?

Hvis du, i din iver efter at se hvad der er på den anden side af begivenhedshorisonten, hopper i et sort hul, er du interesseret i at vide, hvad der sker med dig. Tyngdekraftforskellen vil være $\Delta F \approx GMmr^{-3}l$, hvor l er din højde og m din masse. Et bud på, hvor stor en kraft der skal til at rive et menneske itu er $F_{\text{rip}} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ N}$. Et gennemsnitsmenneske har $l = 1,8 \text{ m}$ og $m = 70 \text{ kg}$.

5) Brug ovenstående oplysninger til at udregne den afstand fra det sorte hul, r_{rip} , hvor et menneske vil blive revet itu af tidevandskræfterne. Omskriv dette til et udtryk der minder om det for r_{sch} du fandt i første delopgave.

6) Kan du overleve at hoppe i et sort hul? Ville det være bedst at hoppe i et tungt sort hul eller i et "let"? Hvis du vil se, hvad der gemmer sig bag begivenhedshorisonten, hvor tungt skal det sorte hul så være?

•• Opgave 12: Saturns måner

Saturn er den næsttungeste planet i solsystemet med en masse på $M_S = 5,68 \cdot 10^{26} \text{ kg}$ og en bane omkring Solen med halve storakse $a_S = 1,43 \cdot 10^{12} \text{ m}$. Omkring Saturn kredser mange måner, hvor man til dato har opdaget 61 forskellige. Månen Fornjot er en af de nyest opdagede måner. Fornjot har en masse på ca. $M_F = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ kg}$ samt en baneperiode på $P_F = 1432 \text{ dage}$.

1) Beregn den halve storakse af banen af Fornjot omkring Saturn.

2) For alle måner i bane om en planet i solsystemet eksisterer der en maksimal baneradius, hvor månen kan være i en stabil bane om planeten. Før rede for hvorfor der eksisterer sådan en maksimal baneradius og beregn den maksimale baneradius for måner i bane om Saturn.

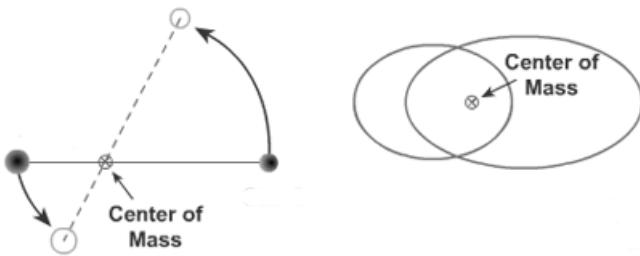
Saturns måne Fornjot har en eccentricitet i banen på $e_F = 0,186$.

3) Kommer Fornjot på noget tidspunkt i sit omløb længere væk fra Saturn end svaret i 2)?.

••• Opgave 13: Bortløbne stjerner

I et binært stjernesystem kredser to stjerner omkring et fælles massemidtpunkt, se figur 1.7.

Hvis den ene stjerne pludselig forsvinder (f.eks. eksploderer som en supernova) vil det, som før holdte den anden stjerne bundet i systemet være væk. Stjernen vil derfor blive slynget ud med høj hastighed. Man kalder disse stjerner for *runaway* stjerner. I nogle tilfælde, kan opsplittelsen af binære systemer gennem supernovaer eller mødet med det supermassive sorte hul slynge stjerner ud med en så høj hastighed, at de bevæger sig hurtigere end undslippelseshastigheden for Mælkevejen. Disse kaldes



Figur 1.7: Et binært stjernesystem.

hypervelocity stjerner.

1) Et binært stjernesystem bliver opsplittet og den ene stjerne slynges ud. Hvis vi antager, at udslyngelseshastigheden, δv er sammenlignelig med den hastighed, som stjernen havde i sin bane, så vil

$$\delta v = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a_{\text{bin}}}} \left(\frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \right), \quad (1.25)$$

hvor a_{bin} er den halve storakse for systemet. Vis, på baggrund af Keplers love, at dette udtryk er korrekt.
(Hint: Du kan antage $e = 0$ samt benytte, at den halve storakse afhænger af begge stjerners position i forhold til det fælles massemidtpunkt ($a = r_1 + r_2$), samt at vægtstangsprincippet gælder, $r_1 m_1 = r_2 m_2$).

••• Opgave 14: Supernovaer

Supernovaer, som er resultatet af en stjernes eksplasive endeligt er af kæmpe vigtighed for astrofysikken, idet disse voldsomme eksplasioner er så lysstærke, at de kan detekteres ud til store afstande. Stjerner omsætter lette grundstoffer til tungere gennem fusion i deres kerne, dette skaber et strålingstryk som balancerer stjernens egen vægt. De tungeste stjerner kan kun fusionere op til jern, det grundstof med den højeste bindingsenergi, og har stjernen herefter fået en bestemt masse, kollapseden under sin egen vægt, enten til en supernova eller et sort hul. Supernovaer påvirker det interstellare medium voldsomt – deres shock-bølger kan sætte gang i stjernedannelse, ødelægge planetssystemer, og berige mediet med store mængder tungere stoffer syntetiseret i eksplasionen, hvorfaf nye planetssystemer som vores eget Solsystem kan dannes. En bestemt type supernova, Supernova type Ia (SN Ia), er af særlig betydning, idet det er observationen af disse, som ledte til opdagelsen om, at Universet udvidelse accelererer. SN Ia er den supernova som opstår, når en hvid dværg, en ellers død mindre stjerne, tilegner sig ekstra masse, f.eks. fra en stor partnerstjerne. Fordi alle SN Ia er fra det samme type objekt, er deres lysprofil ens alle steder i Universet, og deres lysstyrke kan derfor kalibreres til meget præcist at bestemme afstande.

1) SN2014J, en SN1a opdaget i januar 2014 fra M82, er den nærmeste supernova opdaget i nyere tid. Galaksens distance-modulus er bestemt til 27.7. Hvad er dens afstand?

2) Generelt kan vi om den absolutte magnitude og luminositet skrive

$$M = -2.5 \log(L) + \text{konstant} \quad (1.26)$$

Vis, at vi kan finde den absolute magnitude af et objekt som:

$$M = -2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) + M_{\odot}, \quad (1.27)$$

hvor L_{\odot} og M_{\odot} er hhv. luminositet og absolut magnitude for Solen.

3) Opskriv et udtryk for et objekts luminositet som funktion af dets absolute magnitude, Solens absolute magnitude og Solens luminositet.

4) SN2014J er observeret med en tilsyneladende magnitude på 11 mag. Hvad er dens luminositet i enheder af L_{\odot} ? Hint: brug at Solens absolute magnitude er 4.74 mag.

Kapitel 2

Elektromagnetisme

Dette kapitel omhandler de grundlæggende begreber i elektromagnetisme: elektriske og magnetiske felter, og den kraft, som de yder på ladede partikler. Forståelsen af elektromagnetismen er utvivlsomt en af de største triumfer i fysikken nogensinde, og den medførte en teknologisk revolution, hvis betydning for vores moderne verden umuligt kan overvurderes! Som fysisk teori er elektromagnetismen også uhyre interessant, og selvom vi desværre ikke har tid til at komme ind på det her, så har den været meget vigtig i udviklingen af Einsteins relativitetsteori og senere i partikelfysikken.

Elektriske og magnetiske felter er *vektorfelter*, så de matematiske værktøjer, vi får brug for, er vektorer i tre dimensioner, og de operationer, man kan lave med dem. Se mere derom i Appendix A, som vi anbefaler, at du læser først.

2.1 Ladninger og Coulombs lov

Vi starter med en lov, som læseren muligvis kender: nemlig Newtons gravitationslov, der beskriver kraften mellem to punktpartikler (punktlegemer) med *masserne* m_1 og m_2 . Størrelsen af kraften er givet ved

$$F_N = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

hvor r er afstanden mellem partiklerne, og G er Newtons gravitationskonstant. Kraften, som de to partikler yder på hinanden, er lige stor og modsatrettet, og den er altid tiltrækkende. Vi ved, at kræfter er vektorer, dvs. de har en størrelse og retning. Formlen ovenfor giver kun størrelsen, mens jeg i ord forklarede, at kræftens retning tiltrække de to masser mod hinanden. Dette kan vi også beskrive matematisk ved at skrive Newtons lov som en vektorlov. For at gøre det, skal vi have indført nogle positionsvektorer, så vi siger nu, at massen m_1 befinner sig i punktet \mathbf{r}_1 og m_2 befinner sig i punktet \mathbf{r}_2 . Vektoren, der peger fra m_2 til m_1 er da givet ved $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Denne vektor har længden $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. På vektorform siger Newtons lov, at kræften, som massen m_1 oplever pga. m_2 , er givet ved

$$\mathbf{F}_1 = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

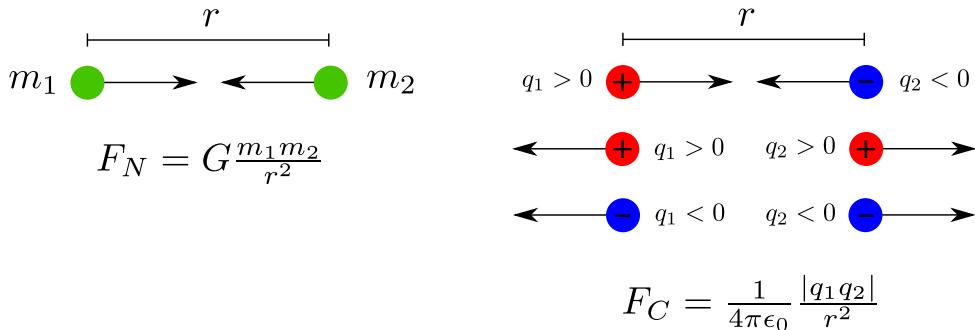
Da masser ikke kan være negative og da G er positiv, er Gm_1m_2 en positiv konstant. Men minustegnet foran betyder, at \mathbf{F}_1 peger i den stik modsatte retning som $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Så \mathbf{F}_1 peger altså fra m_1 mod m_2 , dvs. kraften er *tiltrækkende!* (Bemærk, at i en hypotetisk verden, hvor masser kan være negative, kan m_1m_2 være negativ og dermed vende retningen på kraften, så den bliver frastødende.)

Tilsvarende er kraften, som m_2 oplever pga. m_1 givet ved

$$\mathbf{F}_2 = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{F}_1$$

fordi vi blot har skiftet fortegn på vektoren mellem de to masser. Dette giver jo vektoren, der peger i den modsatte retning. Du kan se, at kraften igen er tiltrækkende, som den jo skal være.

Hvis vi blot vil kende størrelsen på kraften, betyder retningen ikke noget. Kalder vi afstanden mellem masserne for r , ser vi, at $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = r$. Dermed får vi ganske rigtigt (2.1), når vi tager størrelsen af krafterne: $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = F_N$.



Figur 2.1: Newtons gravitationslov (til venstre) og Coulombs lov(til højre).

Nu undrer du dig sikkert over, at vi har brugt så meget energi på Newtons lov, når vi nu skulle snakke om elektromagnetisme og ladninger. Men dette skyldes, at den grundlæggende lov i elektromagnetisme, nemlig Coulombs lov, har præcis samme form som Newtons lov!

Lad os nu betragte Coulombs lov, som beskriver kraften mellem to punktpartikler med (elektriske) *ladninger* q_1 i punktet \mathbf{r}_1 og q_2 i punktet \mathbf{r}_2 :

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (2.2)$$

hvor $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ er afstanden mellem partiklerne, og ϵ_0 er en positiv konstant kaldet vakuumpermittiviteten. Bemærk numeriske tegnene rundt om ladningerne, som indikerer, at ladninger kan være både positive og negative, og Coulomb-kraften dermed både kan være tiltrækkende og frastødende afhængig af fortegnene på ladningerne!

På vektorform, er kraften som q_1 oplever pga. q_2 givet ved

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Tilsvarende er kraften som q_2 oplever pga. q_1 givet ved

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{F}_1$$

med den fælles længde givet ved Coulombs lov $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = F_C$. Så Coulombs lov har alst  præcis samme struktur som i Newtons lov, hvor $1/(4\pi\epsilon_0)$ spiller samme rolle som G og ladningerne fungerer som en slags „elektriske masser“. Partikler uden masse føler ingen gravitationskraft (2.1) ligesom partikler uden ladning ikke føler nogen Coulombkraft (2.2). Partikler, der både har masse og ladning føler begge krafter, men som I vil regne en opgave med, s  kan man ofte negligere gravitationskraften. Til campen vil I også lave et eksperiment, hvor I tester Coulombs lov. Det eneste ekstra twist er, at ladningernes indbyrdes fortegn kan gøre kraften tiltrækkende eller frastødende. Kraften er tiltrækkende, hvis ladningerne har forskelligt fortegn, og frastødende hvis ladningerne har samme fortegn, se figur 2.1.

2.2 Elektriske felter

Vi vil nu se, hvordan vi kan indføre et såkaldt elektrisk felt til at beskrive konsekvenserne af Coulombs lov på en elegant m de. Lad os derfor betragte en ladningsfordeling med totalladning Q og en punktladning ved siden af med ladning q , se figur 2.2. Vi kan tænke på ladningsfordelingen som en samling af en masse punktladninger, og alle punktladningerne påvirker hinanden via Coulombs lov. Hvis vi vil vide, hvilken kraft, ladningsfordelingen påvirker punktladningen q med, så skal vi tage højde for, at hver eneste punktladning, der udg r r ladningsfordelingen, påvirker q med en kraft givet ved Coulombs lov. Den samlede kraft, som Q påvirker q med er så givet ved at lægge alle bidragene sammen som vektorer i overensstemmelse med superpositionsprincippet af krafter.

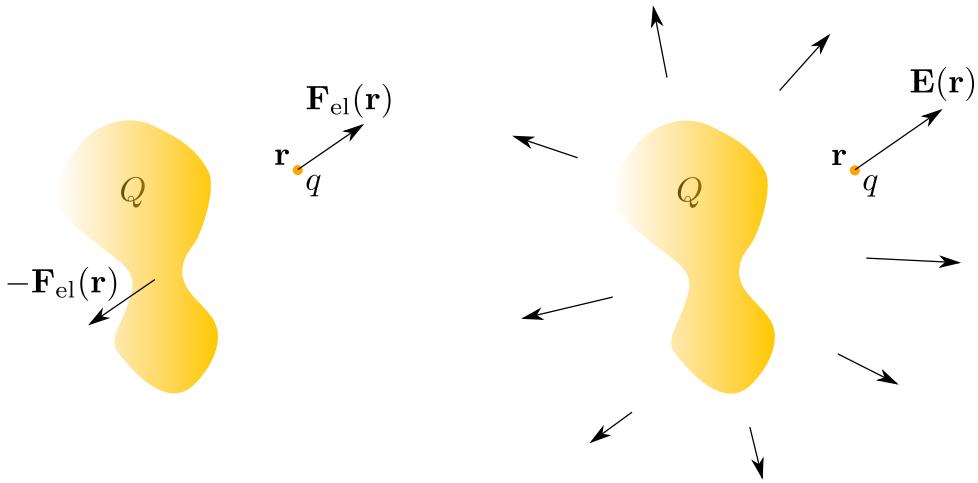
Vi kan tænke på situationen som at ladningsfordelingen Q skaber et elektrisk felt omkring sig, der påvirker punktladningen q . Vi ønsker, at det elektriske felt kun skal være en egenskab ved Q og dermed skal det være uafhængigt af q . Hvis punktladningen befinner sig i punktet \mathbf{r} , så definerer vi det elektriske felt i det punkt som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_{el}(\mathbf{r})}{q}, \quad (2.3)$$

hvor $\mathbf{F}_{el}(\mathbf{r})$ er den samlede Coulombkraft som vektor, som ladningsfordelingen påvirker punktladning med. Vi har skrevet et sænket 'el' fordi man også kalder kraften for den elektriske kraft. Bemærk, at $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ er et vektorfelt, s  til ethvert punkt i rummet \mathbf{r} knytter vi en vektor $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, der så er det elektriske felt i det punkt. Coulombkraften $\mathbf{F}_{el}(\mathbf{r})$ er proportional med q , men da vi deler med q i (2.3) bliver det elektriske felt $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ uafhængigt af q ! Dette er meget ønskværdigt, for vi ønsker jo, at det elektriske felt kun skal være en egenskab ved ladningsfordelingen. Vi kan sige, at *alle ladede objekter producerer et elektrisk felt omkring sig, der påvirker andre ladede objekter*.

Det elektriske felt fra en punktladning

Det er relativt nemt at finde det elektriske felt, som en punktladning Q giver anledning til. Vi vil nu finde det elektriske felt, som denne punktladning giver anledning til i et vilkårligt punkt. Lad \mathbf{r} være



Figur 2.2: Coulombs lov giver en samlet kraft, som ladningsfordelingen påvirker punktladningen med (til venstre). Vi kan også tænke det som om, at ladningsfordelingen skaber et elektrisk felt omkring sig (til højre). Her er kun tegnet nogle få feltvektorer, men ethvert punkt i rummet kan tilskrives en elektrisk feltvektor, som påvirker ladninger, der befinder sig i det punkt.

vektoren, der peger fra punktladningen ud til vores vilkårlige punkt. Vi forestiller os derfor, at vi placerer en anden punktladning q i det vilkårlige punkt, som \mathbf{r} peger på, og ser, hvilken Coulombkraft q bliver påvirket af. Denne kraft er givet ved

$$\mathbf{F}_{\text{el}}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

så det elektriske felt er givet ved

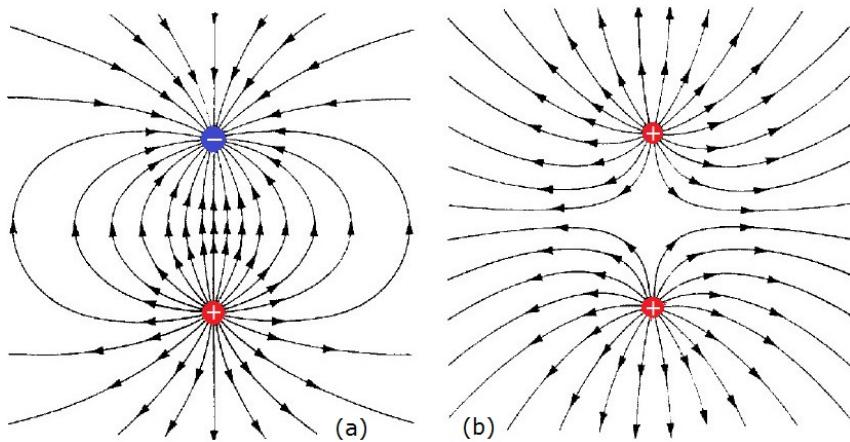
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_{\text{el}}(\mathbf{r})}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Vi ser, at størrelsen på det elektriske felt

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

kun afhænger af afstanden $|\mathbf{r}| = r$ og størrelsen på ladningen $|Q|$. Til gengæld afhænger retningen af det elektriske felt af fortegnet på ladningen. Hvis $Q > 0$ stråler feltet væk fra ladningen, mens det stråler ind mod feltet hvis $Q < 0$.

Vi har i denne beregning placeret en hypotetisk punktladning q i afstanden r fra Q og udelukkende set på, hvordan Q påvirker q . Hvis man rent faktisk placerede to sådanne punktladninger i nærheden af hinanden, vil de påvirke hinanden. Man kan lave en lignende, men lidt mere kompliceret beregning, for at finde det elektriske felt, som to punktladninger skaber i fællesskab. De elektriske feltlinjer er tegnet på figur 2.3. Bemærk, at tæt på punktladningerne stråler de ganske rigtigt radialt ind eller ud, som vi netop har beregnet.



Figur 2.3: Det elektriske felt skabt af to punktladninger for (a) en positiv og negativ punktladning og (b) to positive punktladninger.

2.3 Magnetiske felter

Vi har set, at ladede objekter påvirker andre ladede objekter med elektriske Coulombkrafter. I termen af elektriske felter hedder det sig, at ladningsfordelinger skaber elektriske felter omkring sig, og at andre ladninger påvirkes af det elektriske felt, som de befinner sig i. Den elektriske kraft var givet ved $\mathbf{F}_{\text{el}} = q\mathbf{E}$.

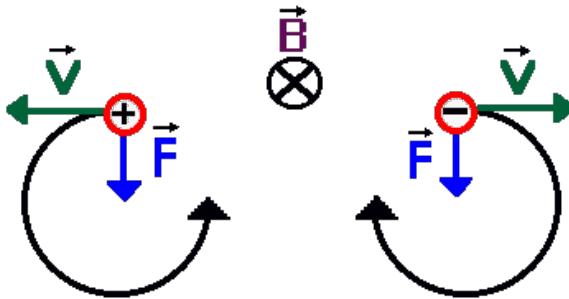
Der findes et andet vektorfelt, som påvirker ladede partikler: *det magnetiske felt*. En punktpartikel med ladning q og hastighed \mathbf{v} påvirkes af det magnetiske felt \mathbf{B} med en magnetisk kraft, der er givet ved:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.4)$$

Denne kraft er på mange måder underlig. For det første betyder vektorproduktet i ovenstående ligning, at den magnetiske kraft \mathbf{F}_{mag} , som påvirker partiklen, er ortogonal (vinkelret) på både magnetfeltet \mathbf{B} og partiklens hastighed \mathbf{v} ! For det andet påvirker magnetfeltet kun ladninger, der bevæger sig. Ladninger der ligger stille er således fuldstændig upåvirkede af magnetfelter, men de kan stadig påvirkes af elektriske felter. Figur 2.4 illustrerer, hvorledes en ladet partikel i bevægelse oplever en magnetisk kraft og dermed bliver afbøjet i et magnetfelt.

Ladninger i bevægelse

Hvor kommer magnetfelter fra? De fleste vil nok tænke på en klassisk stangmagnet, hvor magnetfeltet går i buer fra nordpolen til sydpolen. For at forstå præcis hvordan magnetfeltet opstår i en stangmagnet skal man bruge kvantemekanikken, men vi kan tænke på en stangmagnet som bygget op af en masse små magneter, hvor alle nord- og sydpolerne er ordnet i samme retning, så de tilsammen danner én stor magnet. Hvis man deler en stangmagnet på midten, får man ikke én nordpol og én sydpol – derimod får man bare to mindre magneter med hver sin nord- og sydpol. Nord- og sydpol kommer *altid* i par. Dette kan måske undre én lidt, når man nu godt kan have adskilte elektriske positive og negative ladninger.



Figur 2.4: En ladet partikel i bevægelse påvirkes af et magnetfelt. \otimes angiver, at magnetfeltet \mathbf{B} peger ind i papiret. Til venstre/højre ses en positiv/negativ ladning, så $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ jævnfør højrehåndsreglen for vektorprodukter peger kraften i begge tilfælde nedad. Pga. kraften vil partiklen ændre bevægelsesretning, og dermed ændres retningen på hastigheden. Dette vil så give anledning til at kraften ændrer retning, hvorved bevægelsesretningen ændres igen osv... Den resulterende bevægelse vil være cirkulær.

Dybtest set dannes magnetfelter af *ladninger i bevægelse*. Ud over at danne et elektrisk felt omkring sig, danner ladede partikler også magnetfelter omkring sig – dog kun hvis de er i bevægelse! En punktpartikel med ladning q og hastighed \mathbf{v} danner et magnetfelt i ethvert punkt omkring sig. Hvis \mathbf{r} er vektoren fra partiklens position ud til et eller andet punkt, så er magnetfeltet i dette punkt givet ved

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.5)$$

hvor r er længden af \mathbf{r} og μ_0 er en positiv konstant kaldet vakuumpermeabiliteten. Denne konstant er givet ved $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$, hvor c er lysets fart i vakuums. Vektorproduktet i (2.5) betyder, at magnetfeltet er ortogonalt på både bevægelsesretningen og vektoren \mathbf{r} . For en partikel med konstant fart, afhænger størrelsen af magnetfeltet kun af afstanden r . Retningen af magnetfeltet er givet ved højrehåndsreglen, men uanset fortegnet på q , så cirkler magnetfeltet rundt om partiklens bevægelsesretning.

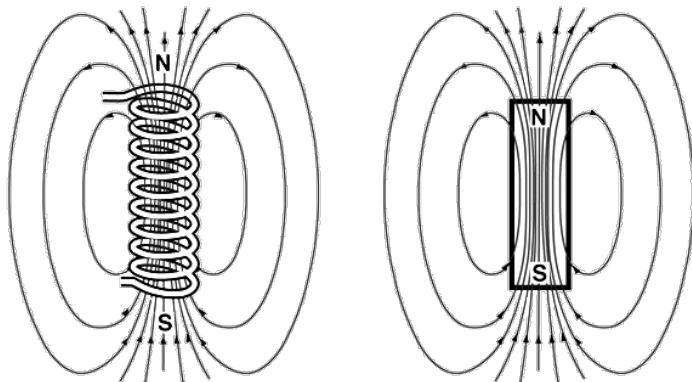
En strøm, der løber i en leder, er et eksempel på ladninger i bevægelse. Her løber de elektrisk ladede elektroner igennem lederen, og dette giver anledning til et magnetisk felt omkring lederen. Hvis man vikler en ledning til en spole (kaldet en solenoide), skaber den et lignende magnetfelt som man får fra en stangmagnet, se figur 2.5.

2.4 Lorentzkraften

Vi har diskuteret hvordan ladninger påvirkes i henholdsvis elektriske og magnetiske felter, men vi har kigget på de to tilfælde hver for sig. Har vi en situation, hvor en ladet partikel med ladning q bevæger sig med hastigheden \mathbf{v} i både elektriske og magnetiske felter, lægger vi blot de to bidrag sammen til en samlet elektromagnetisk kraft, kaldet Lorentzkraften:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{el}} + \mathbf{F}_{\text{mag}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.6)$$

Kender man det elektriske og magnetiske felt, ved man, hvilken elektromagnetisk kraft, ens partikel påvirkes af. Vi ved, at disse felter skabes af andre ladningsfordelinger, der evt. bevæger sig, så det store



Figur 2.5: En strøm i en solenoide (venstre) skaber et lignende magnetfelt, som man får fra en stangmagnet (højre). Feltlinjerne går fra nordpolen til sydpolen.

spørgsmål er så at beregne, hvordan disse felter ser ud. Maxwells ligninger, der beskriver dette, er desværre temmelig komplicerede, så vi må stoppe vores introduktion til elektromagnetismens her. Men vid blot, at vi kun har kradset i overfladen til en stor og spændende del af fysikken.

2.5 Opgaver

- **Opgave 1: Enheder**

I denne opgave skal vi finde SI-enhederne for de forskellige fysiske størrelser i elektromagnetismen.

1) SI-enheten for ladning er Coulomb, forkortet C. Du ved sikkert, at SI-enhederne for kraft og afstand er henholdsvis newton (N) og meter (m). Find SI-enheten for vakuumpermittiviteten ϵ_0 .

2) Find SI-enheten for det elektriske felt.

3) Find SI-enheten for det magnetiske felt.

- **Opgave 2: To poser protoner**

For at få en ide om styrkeforholdet mellem elektromagnetiske og gravitationelle kræfter sammenligner vi de tos påvirkning af to poser med protoner på hver side af jorden.

1) Vi har to poser med en million protoner i hver på hver side af jorden. Brug Coulombs lov til at beregne kraften på de to poser.

2) Brug nu Newtons gravitationslov til at beregne tyngdekraften de to poser påvirker hinanden med. Hvor mange gange større en den elektromagnetiske påvirkning?

3) Inkluder nu jordens tyngdekraft. Vil poserne blive på jorden, eller overvinder den elektriske frastødning tyngdekraften?

- ● **Opgave 3: Coulombs lov**

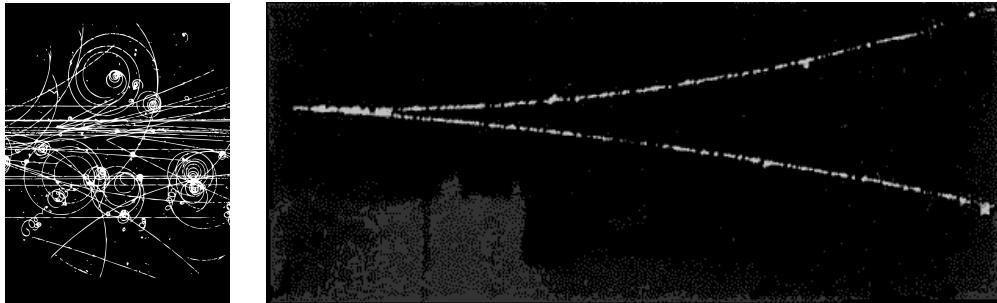
For at få lidt træning i Coulombs lov, vil vi se på, hvordan tre punktladninger på en linje påvirker hinanden.

1) Tre punktladninger befinner sig på x -aksen. Ladning $q_1 = +3,00 \mu\text{C}$ ved $x = 0,000 \text{ m}$, ladning $q_2 = -5,00 \mu\text{C}$ ved $x = 0,200 \text{ m}$ og ladning $q_3 = -8,00 \mu\text{C}$ et ukendt sted. Den samlede kraft som q_3 oplever, er $7,00 \text{ N}$ i den negative x -retning? Uden at regne positionen af q_3 ud, kan du så sige, hvor den befinner sig i forhold til de to andre ladninger?

2) Regn den præcise position af q_3 ud.

- **Opgave 4: Opdagelsen af positronen**

I 1928 forudsagde den teoretiske fysiker Paul Dirac, at der eksisterede en partikel med samme masse som elektronen, men med modsat ladning. Den blev døbt „positronen“, fordi den havde positiv ladning, modsat den negativt ladede elektron. Ifølge teorien skulle partiklen kunne skabes i en proces, hvor en foton γ omdannes til en elektron e^- og en positron e^+ , altså: $\gamma \rightarrow e^- e^+$. Positronen blev eksperimentelt opdaget i 1932 af Carl Anderson i et såkaldt boblekammer, hvor ladede partikler afbøjes i et magnetfelt



Figur 2.6: Et typisk boblekammer-eksperiment (til venstre), og $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ (til højre).

og efterlader et karakteristisk spor.

- 1) På figuren til højre flyver en foton ind fra venstre side i billedet. Fotoner er ladningsløse, så dette giver ikke noget spor i boblekammeret, men så snart fotonen omdannes til en elektron og en positron, ser vi to tydelige spor. Magnetfeltet peger direkte ud af papiret. Hvilket spor tilhører hvilken partikel?
- 2) Hvordan ville sporene se ud, hvis positronen havde højere ladning end elektronen?
- 3) Hvordan ville sporene se ud, hvis positronen havde højere masse end elektronen?

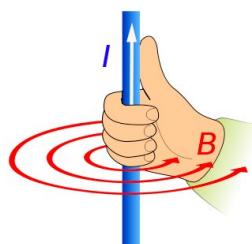
- **Opgave 5: Magnetfeltet omkring en leder 1**

Når der løber strøm i en leder, skyldes det, at elektronerne inde i lederen bevæger samlet set bevæger sig i den ene retning. Dvs. vi har ladede partikler, der bevæger sig, og dette giver anledning til et magnetfelt omkring lederen.

- 1) Strømmen I er defineret som ladningsmængden ΔQ , der løber igennem et punkt på lederen i løbet af tiden Δt :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Man kan også angive strømmen som en vektor \mathbf{I} , hvor retningen er defineret som den retning, hvori positive ladninger løber. Da elektroner er negativt ladede, er strømretningen altså *modsat* den retning, elektronerne løber i. Forklar, at magnetfeltet rundt om lederen ser ud som vist på figur 2.7.



Figur 2.7: En leder med strømmen \mathbf{I} langs din højre tommelfinger skaber et magnefelt \mathbf{B} omkring lederen langs dine fingre.

2) Til venstre på figur 2.5 ses en soleniode, som består af en drejet leder, hvori der løber strøm fra S til N. Forklar, at det resulterende magnetfelt ser ud som på tegningen.

•• Opgave 6: Magnetfeltet omkring en leder 2

I den foregående opgave fik vi en intuition om, hvordan magnetfelter omkring en leder ser ud. Nu skal vi regne på det.

1) Lad os kigger på et meget lille stykke af en leder med længden Δl , hvori der i tiden Δt bevæger sig en samlet ladning på ΔQ med gennemsnitshastighed \mathbf{v} . Vis, at strømmen kan skrives som $\mathbf{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \mathbf{v}$.

2) Lad \mathbf{r} pege fra lederykket til et punkt i rummet. Angiv den magnetiske feltvektor $\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r})$ i dette punkt, som det lille lederykke giver anledning til, i termer af \mathbf{I} , Δl , \mathbf{r} og naturkonstanter.

3) Lad ϕ være vinklen mellem \mathbf{I} og \mathbf{r} . Vis, at du kan omskrive resultatet til

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \phi}{r^2}. \quad (2.8)$$

••• Opgave 7: Magnetfeltet omkring en leder 3

I den foregående opgave regnede vi magnetfeltet fra et meget lille stykke leder. Lad os nu bruge dette resultat til at beregne magnetfeltet fra en uendelig lang leder. OBS: Denne opgave kræver kendskab til integralregning!

1) Lad os starte med at tage skridtet fuldt ud og sige, at det meget lille stykke leder i virkeligheden er *infinitesimalt* lille. Vi udskifter derfor Δ med d i (2.8):

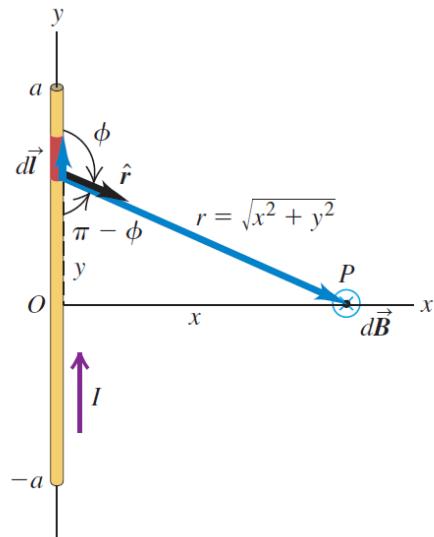
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \phi}{r^2} dl. \quad (2.9)$$

Det infinitesimale lederykke er en del af et længere lederykke, som vist på figur 2.8, men vi starter med kun at betragte effekten af det infinitesimale stykke. Betragt derfor et punkt P , hvor vi ønsker at beregne det infinitesimale magnetfelt $d\mathbf{B}$, som det infinitesimale lederykke dl giver anledning til. Definér x og y som på figur 2.8, og omskriv r og $\sin \phi$ i termer af x og y . Indsæt dette i (2.9).

2) For at finde størrelsen på magnetfeltet i punktet P fra hele lederen, må vi lægge alle de små bidrag sammen fra hele lederykket. Med andre om skal vi integrere dB fra $y = -a$ til $y = a$. Vis, at dette giver:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Du behøver ikke løse selve integralet. Så længe du har skrevet det rigtigt op, kan du tage mit resultatet for gode varer.



Figur 2.8: Vi betragter magnetfeltet $d\mathbf{B}$ i punktet P som det infinitesinale ledsterkke $d\mathbf{l}$ giver anledning til.

3) Man kan tit approksimere lange ledere med uendeligt lange ledere. Dette svarer til at lade a gå mod uendelig. Vis, at i grænsen $a \rightarrow \infty$, går ovenstående udtryk mod

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} .$$

Dette udtryk afhænger kun af afstanden fra lederen x og strømstyrken I . Retningen af det magnetiske felt kender vi fra højrehåndsreglen på figur 2.7.

- **Opgave 8: Pladekapacitorer og tordenskyer**

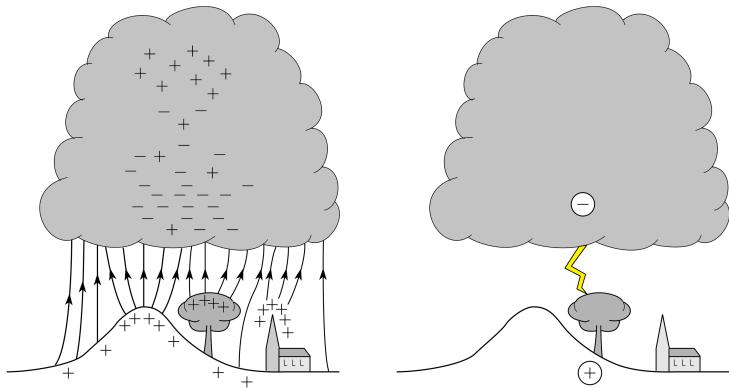
En pladekapacitor består af to parallelle plader. De to plader er ladede, og har lige stor ladning med modsat fortegn. Mellem de to plader opstår der et elektrisk felt. En tordensku kan opfattes som en pladekapacitor, da undersiden af skyen er negativt ladet. Den negative ladning tiltrækker positiv ladning fra jordoverfladen, hvorved der opstår et elektrisk felt mellem jorden og skyen. Når feltet mellem skyen og jorden bliver for stort, springer der et lyn mellem jorden og skyen.

1) En tordensky er dannet i 4 km højde. Skyen er ladet op så der er en spændingsforskell mellem bunden af skyen og jorden på 400 MV. Beregn det elektriske felt ved hjælp af

$$E = \frac{V}{d}, \quad (2.10)$$

hvor E angiver det elektriske felt, V spændingsforskellen og d afstanden mellem kapacitorpladerne.

2) Feltet mellem to kapacitorplader afhænger af størrelsen af ladningerne på pladerne. Ved kendskab til



Figur 2.9: En tordensky, der er negativt ladet på undersiden, tiltrækker positiv ladning til jordoverfladen, så det kommer til at fungere som en pladekapacitor.

pladernes areal A og feltstyrken E kan ladningen på pladerne beregnes. Beregn ved hjælp af nedstående formel hvor meget ladning der er på tordenskyen hvis den har et areal på 100 km^2 .

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (2.11)$$

3) Et typisk lyn varer 30 s. Antag at skyen aflades ved 20 lyn. Strømstyrke er defineret som mængde af ladning der flyttes per tid. Hvor stor er strømstyrken i et typisk lyn?

••• Opgave 9: Elektrostatisk detektion af Rydberg-atomer

Bohrs atommodel var det første forsøg på at forklare de observerede spektrallinjer i lyset fra brint. Modellen er en semiklassisk model, der antager at elektronen kredser om kernen i bestemte baner. Modellen virker godt for brint, men for alle andre atomer er den helt utilstrækkelig, og vi er nødsaget til at bruge en fuld kvantemekanisk beskrivelse for at beskrive atomerne. Det er dog muligt at bringe visse atomer i en tilstand, så de opfører sig meget lig Bohrs beskrivelse af et atom. Det sker når den yderste elektron bringes op i et højt eksiteret niveau, det vil sige ud i en skal med skaltal $n > 30$. For disse atomer bevæger elektronen sig næsten i en cirkelbane om kernen, og vi kalder dem for Rydberg-atomer.

Rydberg-atomer kan detekteres ved hjælp af elektriske felter, da de påvirkes kraftigt af felterne på grund af den store afstand mellem kernen og elektronen. Det er derfor muligt at ionisere Rydberg-atomer, dvs. løsøre elektronen fra atomet, ved at lade det passere igennem et kraftigt elektrisk felt. I denne opgave vil vi regne på størrelsen af de involverede felter. Det er en fordel at regne opgave 8 først.

1) Benyt Coulombs lov til at beregne den elektrostatiske kraft på elektronen i grundtilstanden for Bohrs atommodel for brint.

2) Beregn det tilsvarende elektriske felt. Sammenlign ved hjælp af ligning 2.10 feltet med en pladekapacitor ved at bestemme spændingsforskellen mellem to kondensatorplader med afstanden 1 cm i vakuums,

der giver anledning til et tilsvarende felt.

3) I Bohrs atommodel er energiniveauerne kvantiserede, hvilket betyder at elektronen kun kan bevæge sig i bestemte baner eller skaller om protonen. Det skyldes at kun bestemte værdier for bevægelsesmængden i banebevægelsen, baneimpulsmomentet, er tilladte. Baneimpulsmomentet er givet ved ved at $mvr = n\hbar$, hvor n er skalnummeret og \hbar er Plancks konstant. Vis at dette fører til Bohrs formel for baneradius

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2} \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}, \quad (2.12)$$

ved anvendelse af Newtons 2. lov $F = ma = \frac{mv^2}{r}$, hvor F er kraften, m er elektronens masse og a er accelerationen for den cirkulære bevægelse, og Coulombs lov.

4) Hvor mange gange større er baneradius for et brintatom med $n = 50$ end atomet i grundtilstanden? Beregn igen feltet og den nødvendige spænding på kondensatorpladerne fra 2) for at opnå en tilsvarende spænding.

5) Hvor meget kan spændingen øges, hvis et atom med $n = 50$, skal kunne detekteres, men ikke et atom med $n = 49$?

Kapitel 3

Kernefysik

3.1 Introduktion

I centrum af ethvert atom befinder sig en utrolig tæt, positivt ladet kerne. Atomets udstrækning er på størrelsesordenen 10^{-10} m , mens selve kernen kun udspænder cirka 10^{-15} m – kernen er derfor 100 000 gange mindre end atomet. Alligevel befinder størstedelen af atomets masse sig i kernen. Atomkernen udgøres af positive partikler kaldet *protoner* (skrevet som "p") og neutrale partikler *neutroner* (skrevet som "n"). Kernen holdes sammen af den *stærke kernekraft*, én af de fire fundamentale kræfter. Denne kraft konkurrerer med den elektriske frastødning, som protonerne udøver på hinanden, og dette afgør, om kernen er stabil eller ikke. Ustabile kerner kan *henfalde* – omdanne sig selv til en anden sammensætning, ved en række processer.

Dette afsnit af kompendiet vil give et kort overblik over kernefysikken – kategoriseringen af kernerne, hvilke modeller der kan bruges til at beskrive deres egenskaber, og hvordan de kan gennemgå henfald. Vi starter med beskrivelsen af et betydningsfuldt eksperimentelt forsøg, der afdækkede vigtige egenskaber for kernerne.

3.2 Rutherford's udforskning af atomet

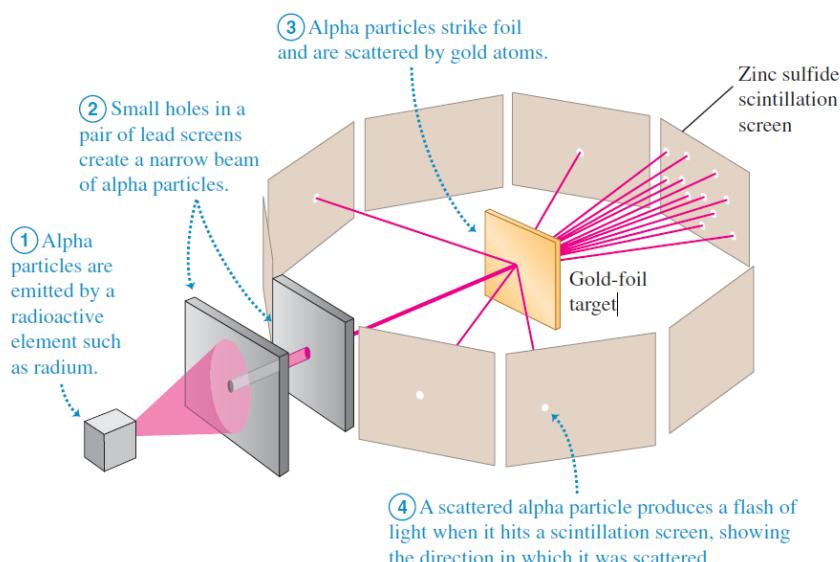
Omkring år 1910 havde eksperimenter afklaret en række af elektronens egenskaber; forholdet mellem dens ladning og masse, e/m og dens ladning, den negative elementarladning, $-e$. Forsøgene viste, at al atomets masse måtte være tilknyttet til den positive del af atomet, idet de negative elektroner var så lette i forhold til atomernes masse. Man kendte også til størrelsen af atomet, men ikke, hvordan massen eller ladningen var fordelt inde i. En kendt model af atomet på dette tidspunkt var foreslået af Thomson, hvori atomet var en positiv ladet kugle af størrelsen 10^{-10} m , hvor elektronerne sad fast som rosinerne i en bolle.

Den første eksperimentelle opsætning som var designet til at udforske atomets indre struktur blev udført af Rutherford i årene 1910-1911. Eksperimentet bestod i at lade ladede partikler ramme tynde folier af eksempelvis guld og observere, hvordan partiklernes bane blev afbøjet af at vekselvirke med guldets atomer. Som ladede partikler brugte Rutherford *alfa-partikler* (skrevet som α) – disse er identiske

til helium-kernens opbygning, bestående af to protoner og to neutroner – som blev udsendt af naturligt radioaktive elementer, for eksempel radon.

Forsøgsopstillingen er skitseret i figur 3.1 og opsummeres som:

1. En radioaktiv kilde udsender alfa-partikler. Kilden vil udstråle alfa-partikler i alle retninger.
2. alfa-partiklerne bliver skærmet med blyplader, som er udstyret med et lille hul, hvor kun en smal stråle (eng: *beam*) af alfa-partikler kan passere igennem.
3. Partiklerne rammer guld-foliet – en meget tynd skive guld – og bliver afbøjet (også kaldet *spredt*) af guldets atomer.
4. 360° rundt om guldet står scintillationsskærme. Disse skærme blinker kort, når de bliver ramt. Ved at se på, hvor skærmene blinker, kan man udregne, hvordan partiklerne er blevet afbøjet.



Figur 3.1: Rutherford's forsøg: en radioaktiv kilde udsender alfa-partikler, som undslipper gennem et smalt hul i blypladerne og rammer guld-folien. Partiklerne bliver afbøjet af at vekselvirke med guldet, og kan ramme scintillationsskærmene rundt om, så man kan aflæse deres baner.

Hvordan kan spredningen af alfa-partiklerne på et *target* (et element, som skydes med partikler) fortælle om atomets struktur?

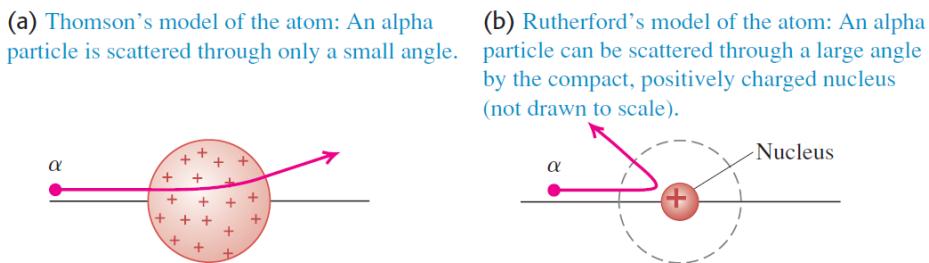
Atomerne i guld-foliet kan tænkes som værende tætpakkede marmorkugler. Alfa-partiklerne kan passere igennem foliet og ramme skærmene på den anden side (se figur 3.1), så de må være i stand til at passere igennem atomerne. Atomets samlede ladning er *neutral*, så udenfor atomet oplever de positive alfa-partikler ingen eller meget lille elektrisk kraft. Inde i selve atomet kan de påvirkes af atomets positive ladning og elektronerne. Men massen af elektronerne er forsvindende lille i forhold til den positive komponent af atomet, så elektronerne kan ikke afbøje alfa-partiklerne synderligt (det ville

populært sagt svare til at smide en småsten igennem en sværm af myg). Kun atomets massive positive komponent kan derfor afbøje alfa-partiklerne.

I den fornævnte Thomson model, er den positive ladning og elektronerne fordelt over hele atomets udstrækning. Dette ville resultere i et forholdsvis lille elektrisk felt inde i selve atomet, så den elektriske kraft på en passerende alfa-partikel ville være svag. Derfor ville man ikke forvente, at se en særlig stor afbøjning af partiklen. Dette var imidlertid ikke hvad der blev observeret!

Rutherford og hans assistenter så i stedet, hvordan nogle alfa-partikler blev spredt med høje vinkler, endda så ekstremt som næsten 180° , svarende til en afbøjning næsten lige bagud.

Disse observationer foreslog i stedet, at atomets positive komponent optog en meget mindre del af selve atomet – så kunne den positive ladning være koncentreret i en punktkilde, hvilket ville resultere i et meget højt elektrisk felt, som ville gøre det muligt at sprede partikler i så høje vinkler. Dette er illustreret i figur 3.2.



Figur 3.2: Venstre: Thomsens model af atomet. Grundet den store udstrækning af den positive ladning, bliver alfa-partiklen afbøjet i små vinkler. Højre: Rutherford's model. Hele atomets positive ladning er koncentreret i en tæt kerne, hvilket giver et stærkt elektrisk felt, som kan afbøje positivt ladede partikler i store vinkler.

Rutherford navngav atomets lille, men tætte koncentration af positiv ladning som atomets kerne eller *nucleus*.

3.3 Kernerne egenskaber

Der skulle gå næsten 10 år efter Rutherford's forsøg, før protonen som partikel blev opdaget, og yderligere 10 år efter det før opdagelsen af neutronen. Eksperimentelt set har det vist sig, at atomets kerne kan ses som en kugle med radius R indeholdende et antal *nukleoner* - protoner og neutroner. Dette antal skrives A .

For de fleste kerner gælder det, at kernens radius kan udtrykkes som

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (3.1)$$

hvor R_0 er en eksperimentelt bestemt konstant:

$$R_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,2 \text{ fm}.^1 \quad (3.2)$$

Partikel	Masse, [kg]	Masse, [u]	Masse, [MeV/c ²]
1 atomar masseenhed	$9,109\ 382\ 91 \cdot 10^{-31}$	1	931,494 061
neutron	$1,674\ 927\ 351 \cdot 10^{-27}$	1,008 664 916 00	939, 565 379
proton	$1,672\ 621\ 777 \cdot 10^{-27}$	1,007 276 466 812	938, 272 046
elektron	$9,19\ 382\ 91 \cdot 10^{-31}$	5,485 799 0946 $\cdot 10^{-4}$	0,510 998 928

Tabel 3.1: Massen af den atomare masseenhed, neutronen, protonen og elektronen i udvalgte enheder

Nukleon-tallet A kaldes også for *massetallet*, idet det lægger sig tæt op ad kernens masse udtrykt i *atomare masseenheder*. Én atomar masseenhed, skrevet u eller m_u , er af historiske årsager defineret som en tolvtedel af massen af Carbon-12:

$$u = m_u \equiv \frac{1}{12} M(^{12}\text{C}). \quad (3.3)$$

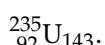
Her betyder tegnet (\equiv) "defineret som". Tabel 3.1 viser massen af den atomare masseenhed, samt neutronen, protonen og elektronen i enheder af henholdsvis kg, u og MeV/c²².

Det ses, hvordan protonens og neutronens masser er meget tæt på 1 u, og det er derfor A tilnærmelsesvist giver massen af kernen i atomare masseenheder.

Som sagt er kernens massetal, A , antallet af nukleoner i kernen, altså summen af kernens antal protoner (skrevet som Z) og neutroner (skrevet som N):

$$A = Z + N. \quad (3.4)$$

Kernens grundstof, også nogle gange kaldet kernens element, er bestemt af antal protoner, Z . For eksempel har hydrogen (H) altid én proton, helium (He) har to, og uran (U) har 92. Kerner af det samme grundstof kan dog have forskellig masse (A) ved at have forskellige antal neutroner, N . Kerner med samme Z , men forskellig N kaldes *isotoper*. Tages uran ($Z = 92$) som eksempel, er to almindeligt forekommende isotoper uran-235 (massetal $A = 235$ og $N = A - Z = 143$) og uran-238 ($N = 146$). I fysikken kan vi bruge forskellig notation til at angive et grundstof på forskellige måder. Ser vi igen på uran kan vi angive hvilken isotop der er tale om ved at skrive "uran-235", "U-235" eller



Her ses det, at notationen for et vilkårligt grundstof X følger:



men man vil oftest udelade informationen om Z og N , idet grundstoffet selv er defineret ud fra Z , og N opnås som $N = A - Z$. Man skriver derfor



¹ Her står "fm" for *femto*-meter, hvor femto = 10^{-15}

² Enheden MeV/c² er mega (10^6) elektronvolt over kvadratet af lysets hastighed c . Masse og energi er direkte koblet gennem Einsteins formel $E = mc^2$, ud fra det følger at en masse kan skrives som $m = E/c^2$.

Kerners binding

I en kerne er nukleonerne samlet indenfor et begrænset område – man siger, at kernen er et *bundent system*³.

En vigtig egenskab for kernerne kan belyses gennem et simpelt eksempel. En alfa-partikel er et bundent system, bestående af to protoner og to neutroner (identisk til en helium-kerne). Massen af alfa-partikler i atomare masseenheder er målt til at være 4.001506179125 u. Den samlede masse af de to protoner og to neutroner kan udregnes til:

$$\begin{aligned} N \cdot m_n + Z \cdot m_p &= 2 \cdot 1,00866491600 \text{ u} + 2 \cdot 1,007276466812 \text{ u} \\ &= 4,03188276562 \text{ u}. \end{aligned}$$

Dette er ikke tilsvarende massen af alfa-partiklen! Faktisk ser vi, hvordan alfa-partiklen, det bundne system, har *mindre* masse end summen af masserne for de tilstedevarende protoner og neutroner! Dette er tilfældet for alle kerners masse sammenlignet med massen af de individuelle nukleoner. Dette skyldes at det bunde system har mindre *potentiel energi* end hvad de individuelle nukleoner oplever. Simpelt sagt kan man sige, at at noget af massen "forsvinder" og bliver lagret form af energi, når individuelle nukleoner bliver bundet sammen i kerner.

Forskellen i masse mellem kernen og massesummen af nukleonerne kaldes for *massedefekten*, skrevet som ΔM (udtales "delta-M"):

$$\Delta M \equiv M(Z, A) - Z(m_p + m_e) - N \cdot m_n. \quad (3.6)$$

Læg mærke til, at massen m_e – elektronens masse – optræder i formlen. Dette skyldes at $M(Z, A)$ er den *atomare* masse af elementet, massen af kernen medtaget elektronerne om kernen. Et "uændret" atom er neutralt, og har derfor lige mange protoner og elektroner, derfor ganges m_e med antallet af protoner Z .

Vi kan vende tilbage til vores eksempel med alfa-partiklen og udregne massedefekten. I dette tilfælde har vi massen M_α af alfa-partiklen opgivet ($M(2, 4)$, uden bidraget fra elektronerne), svarende til størrelsen $M_\alpha = M(2, 4) - 2 \times m_e$. Massedefekten udregnes da som:

$$\begin{aligned} \Delta M &= M_\alpha + 2 \cdot m_e - Z(m_p + m_e) - N \cdot m_n \\ &= M_\alpha - Z \cdot m_p - N \cdot m_n \\ &= 4,001506179125 \text{ u} - 2 \cdot 1,00866491600 \text{ u} - 2 \cdot 1,007276466812 \text{ u} \\ &= -0,03037658649 \text{ u} \end{aligned}$$

Dette er altså forskellen mellem massen af alfa-partiklen og massen af de to protoner og to neutroner. Masse og energi er ækvivalente gennem Einsteins formel

³ En mere "fysisk" beskrivelse ville lyde på, at en partikel i et bundent system er utsat for et *potential*, som kan holde partiklen lokaliseret. Potentialt kan være en ydre påvirkning (som et kraftfelt) eller kan være opstået som resultat af vekselvirkningen mellem det bundne systems komponenter.

$$E = mc^2, \quad (3.7)$$

hvor c er lysets hastighed. Så hvad svarer den manglende masse til i energi? Læg her mærke til, at den atomare masseenhed u også kan udtrykkes i den meget praktiske enhed MeV/c^2 , hvor $1 u = 931,494061 \text{ MeV}/c^2$. Derfor kan vi direkte omregne massedefekten til energi:

$$\begin{aligned} E &= \Delta Mc^2 \cdot 931,494061 \text{ MeV}/c^2/u \\ &= -0,03037658649 uc^2 \cdot 931,494061 \text{ MeV}/c^2/u \\ &= -28,2956099089 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Denne størrelse – uden fortegnet! – er kernens *bindingsenergi*. Bindingsenergien er den energi, som skal tilføres det bundne system for at skille det ad til dets individuelle nukleoner. Jo større bindingsenergi, desto sværere er det at skille kernen ad, med andre ord sagt, at jo højere bindingsenergi, desto mere stabil er kernen. Omvendt er bindingsenergien den energi der udløses, ved at samle frie nukleoner – eller kerner – til større systemer. Dette er princippet bag *fusion*, den sammensmelting af mindre elementer til tungere elementer som foregår i Solen og andre stjerner for at producere energi. Bindingsenergi, skrevet E_B udtrykkes altid som en positiv størrelse. Udtrykt som funktion af massedefekten kan vi derfor skrive:

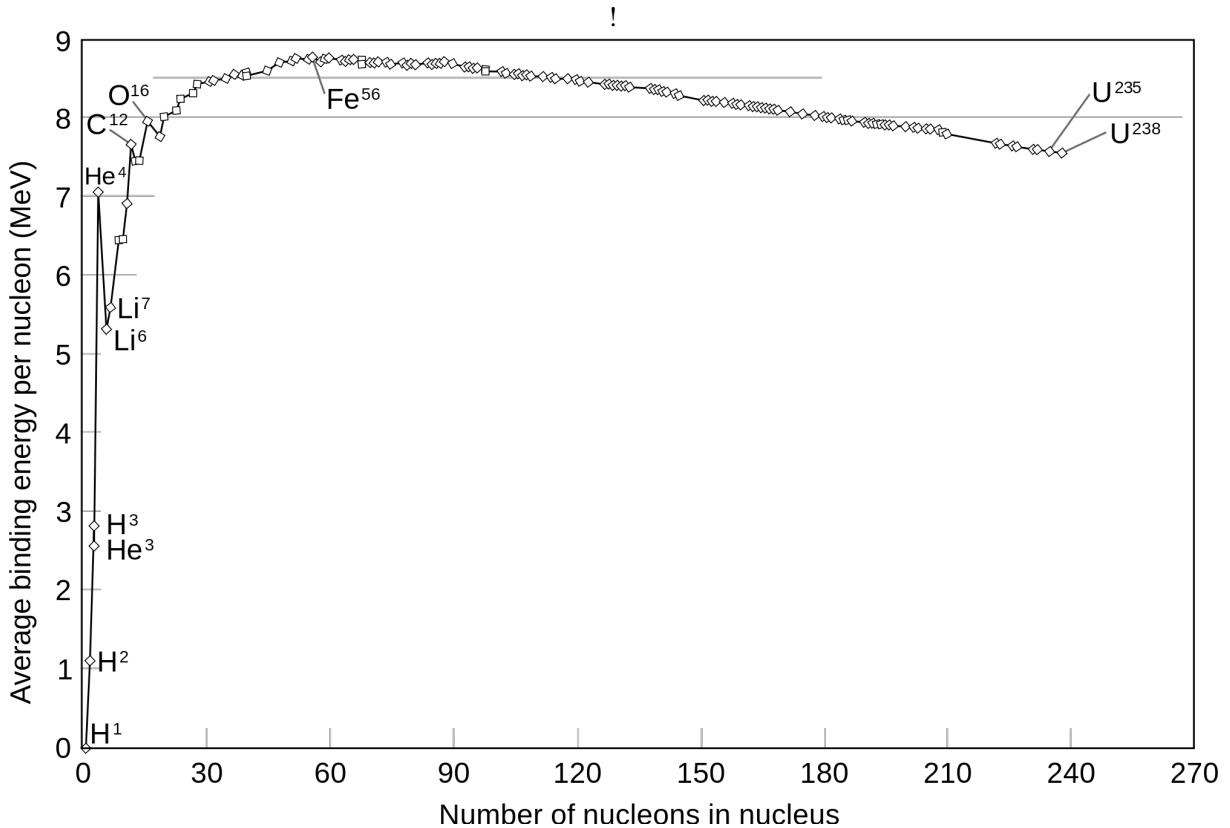
$$E_B = -\Delta Mc^2. \quad (3.8)$$

En kernes bindingsenergi vil ændre sig hvis der tilføjes eller fjernes nukleoner fra kernen, og *vil altid stige med antallet af nukleoner, A* . Selvom nukleonerne i sig selv ikke besidder bindingsenergi, kan vi forestille os, at bindingsenergien for en kerne kan deles ligeligt mellem dens nukleoner. Denne størrelse kaldes for (den gennemsnitlige) bindingsenergi per nukleon, E_B/A . Figur 3.3 viser E_B/A som funktion af A .

Figuren angiver udvalgte kerner, for eksempel He-3 ($Z = 2, N = 1$), He-4 ($Z = 2, N = 2$) og Fe-56 (jern-56, $Z = 26, N = 30$). Vi kan gøre os følgende observationer; først og fremmest siger E_B/A stejlt for de lette kerner. Kurven ser ud til at toppe omkring jern-56. Herefter falder bindingsenergien per nukleon langsomt igen for de tunge kerner. Desuden er kurven heller ikke "glat" men viser udslag af høje bindingsenergier for bestemte kerner, He-4, Ca-12 (carbon-12), O-16 (oxygen-16)... Vi skal senere vende tilbage til, hvorfor netop kernerne He-4, Ca-12, og O-16 udviser høj bindingsenergi, altså er særlig stabile.

Den semi-empiriske masseformel

Kurvens overordnede udseende i figur 3.3 kan tilnærmes med et vigtigt udtryk i kernefysikken kendt som den *semi-empiriske masseformel*. Udtrykket er semi-empirisk, idet det indeholder en række konstanter som er bestemt ved at observere eksperimentelt (empirisk bestemt), men at formen stadig har et teoretisk grundlag. For atomare masser tager den semi-empiriske masseformel formen:



Figur 3.3: Bindingsenergi per nukleon som funktion af massetallet, A

$$M(Z, A) = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta(A, Z), \quad (3.9)$$

Vi gennemgår nu hvert led for at forstå hvorfra den semi-empiriske masseformel tager sit udseende.

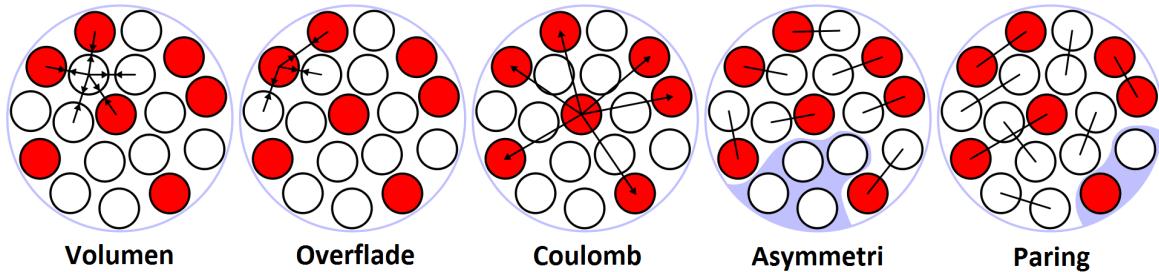
$$\text{første led: } Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n. \quad (3.10)$$

Dette led genkender vi som værende massen af atomets bestanddele, Z antal protoner og elektroner og $A - Z = N$ antal neutroner. Alle de efterfølgende led kan ses som korrektioner til dette første led.

$$\text{andet led, volumendelen: } -a_1 A \quad (3.11)$$

Her er det antaget, at $a_1 > 0$, altså at ledet har et negativt bidrag til massen, eller omvendt *et positivt bidrag til bindingsenergien*. Dette led kaldes for volumendelen. Husk fra forrige afsnit, at

radius af kernen er proportional (skrevet som " \propto ") med $A^{1/3}$, svarende til en volumen-afhængighed på $V \propto R^3 \propto (A^{1/3})^3 = A$. Bindingsenergien stiger altså riktig nok med antallet af nukleoner. Nukleonerne i kernen vekselvirker gennem den stærke kernekraft, som er kortrækkende. Hver nukleon kan derfor kun påvirke sine nærmeste naboer og bidrage til bindingen. Dette er illustreret i figur 3.4.



Figur 3.4: De fem led i den semi-empiriske masseformel

$$\text{tredje led, overfladedelen: } + a_2 A^{2/3}. \quad (3.12)$$

Dette led er en korrektion til volumendelen, idet de nukleoner, som befinner sig ved overfladen af kernen, ikke har ligeså mange naboer indenfor rækkevidde som de nukleoner i kernens indre. Dette sænker bindingsenergien og giver altså et positivt bidrag til massen. Der ganges med $A^{2/3}$ fordi overfladearealet af en kugle er proportionalt med R^2 , og $R^2 \propto (A^{1/3})^2 = A^{2/3}$, og jo større overfladeareal, desto mindre bundet er kernen.

$$\text{fjerde led, Coulomb-delen: } + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (3.13)$$

Dette led tager højde for, at protonerne, som jo er positivt ladede, vil frastøde hinanden. Denne effekt sænker bindingsenergien og giver derfor en positiv korrektion til massen. Coulomb-bidraget kan i dette tilfælde vises at være den gennemsnitlige energi mellem et proton-proton-par ganget med antallet af protonpar (husk, at der ikke er nogen frastødning til stede, medmindre vi har mindst to protoner). Antallet af protonpar må være $Z(Z - 1)/2$. Dette giver et led på formen:

$$E_C = \frac{6}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} \frac{Z(Z - 1)}{2}. \quad (3.14)$$

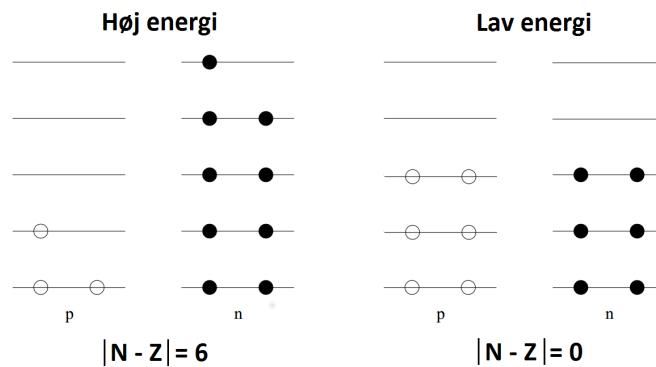
Her kan substitutionen $Z(Z - 1) \approx Z^2$ godt bruges for de fleste værdier af Z . Husker vi samtidig også på, at $R = R_0 A^{1/3}$, og samler vi alle konstanterne i en samlet konstant, a_3 , får vi endelig Coulomb-leddet:

$$\frac{6}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} \frac{Z(Z - 1)}{2} \approx \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z(Z - 1)}{R_0 A^{1/3}} \approx a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Det næste led kaldes asymmetri-leddet.

$$\text{femte led, asymmetrileddet: } + a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A}. \quad (3.15)$$

Denne effekt er ren *kvantemekanisk*. Baggrunden for denne del af den semi-empiriske masseformel er derfor lidt mere kompleks. For at forstå det, skal vi kigge på et meget vigtigt princip i kvantemekanikken, nemlig *Pauli's udelukkelsesprincip*. Princippet lyder: *to ens fermioner kan ikke optage den samme kvantemekaniske tilstand*. Som vi skal lære i afsnittet om partikelfysik, så er protoner og neutroner blandt de partikler der kaldes fermioner, og de må altså adlyde Pauli's udelukkelsesprincip. Ligesom I måske kender det fra elektronernes baner i atomet (atomets energiniveauer) har kernen også en række "energiniveauer", – kvantemekaniske tilstande, – af højere og højere energi. På grund af udelukkelsesprincippet, kan der kun være et endeligt antal protoner eller neutroner i en tilstand. De protoner og neutroner der ikke er plads til i ét energiniveau, må sætte sig i et højere (mere energirigt) energiniveau. Protonerne og neutronerne er to forskellige partikler, så kernen fordeler dem i hver sine tilstande nede fra og op (tænk på én trappe til protonerne og én til neutronerne, hvor hvert trappetin har en højere energi). Dette er illustreret for to systemer i figur 3.5.



Figur 3.5: To systemer med $A = 12$. Systemet til højre har samlet set en større energi end systemet til venstre.

Her har begge systemer de samme antal nukleoner, $A = 12$. I det ene system er $Z = 3, N = 9$. Neutronerne må fordeles op til en tilstand med høj energi. I det andet tilfælde er $Z = N = 6$, og partiklerne er fordelt på en sådan måde at et befinner sig på lavere energiniveauer. Den samlede energi af kernen er højere for det første tilfælde end for det andet tilfælde. Jo højere energi, desto mindre bundet er kernen. En forskel i antallet mellem protoner og neutroner tvinger altså energien for en kerne op, og sænker derfor bindingen. Hvad er meningen bag størrelsen $A - 2Z$, som optræder i asymmetrileddet? Vi husker $A = N + Z$ og derfor $A - 2Z = N + Z - 2Z = N - Z$. Det fortæller altså noget om hvor mange neutroner der er "til overs" i forhold til protoner. Dette er også illustreret i figur 3.4.

Vi ser, at hvis vi ikke har nogen neutroner til overs, altså at $Z = N$, så bidrager asymmetrileddet ikke. Selve formen $\frac{(A-2Z)^2}{A}$ er empirisk bestemt. Vi ser, at det er uafhængigt af fortegnet på $N - Z$.

(fordi størrelsen opløftes i anden) og at på grund af at A optræder i nævneren, så er effekten mindre for store kerner. For to kerner med samme A vil den kerne der har den største forskel mellem Z og N have den mindste bindingsenergi og derfor det største bidrag til massen af kernen.

Det sidste led er paringsleddet. Dette har at gøre med ulige og lige tal for A, Z og N tager forskellige værdier ud fra tre forskellige tilfælde:

$$\text{sjette led, paringsdelen: } \delta(A, Z) = \begin{cases} -\frac{a_5}{A^{1/2}} & \text{hvis } Z \text{ og } N \text{ lige } (A \text{ lige}) \\ 0 & \text{hvis } A \text{ ulige} \\ +\frac{a_5}{A^{1/2}} & \text{hvis } Z \text{ og } N \text{ ulige } (A \text{ lige}) \end{cases} \quad (3.16)$$

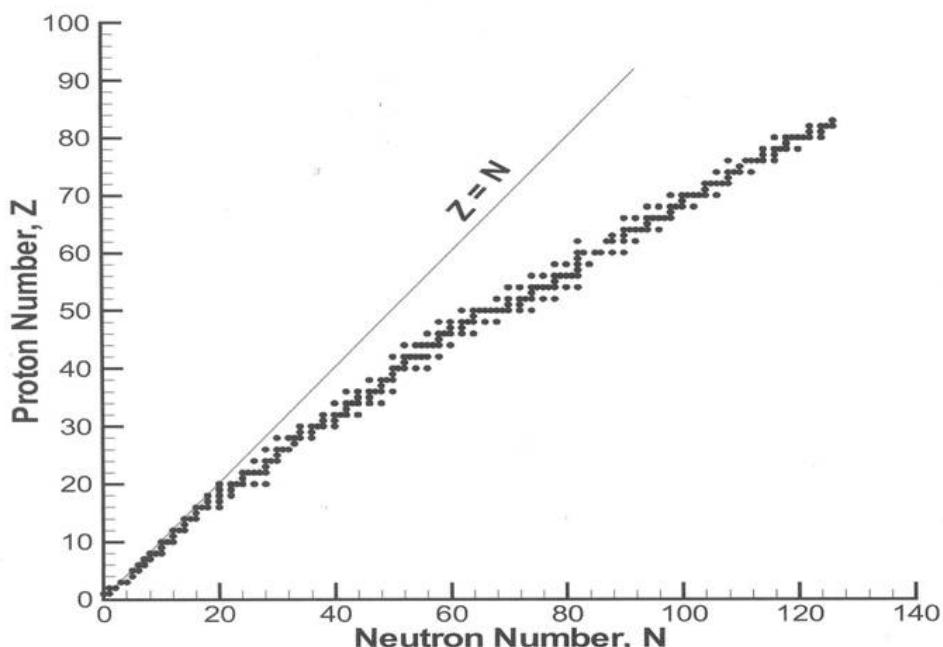
Paringsleddet stammer også fra kvantemekanik, og beskriver, hvordan kerner, hvis nukleoner kan sættes sammen i proton-proton- og og neutron-neutron-par, har højere binding. Derfor er der maksimal bidrag til bindingsenergien (størst sænkning af massen), hvis både Z og N er lige, således at alle protoner og neutroner kan parres. Hvis Z og N begge er ulige, er der uparret én proton og én uparret neutron, og dette sænker bindingen. Hvis A er ulige, sådan at Z og N er henholdsvis lige og ulige eller omvendt, så bidrager ledet slet ikke. Afhængigheden på $A^{1/2}$ kan ikke forklares teoretisk, men er bestemt empirisk.

De fem konstanter i ligning 3.11-3.16 har fået deres værdier bestemt eksperimentelt til:

$$\begin{aligned} a_1 &= 15,56 \text{ MeV}/c^2 \\ a_2 &= 17,23 \text{ MeV}/c^2 \\ a_3 &= 0,697 \text{ MeV}/c^2 \\ a_4 &= 23,2 \text{ MeV}/c^2 \\ a_5 &= 12 \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.4 Stabile og ustabile kerner

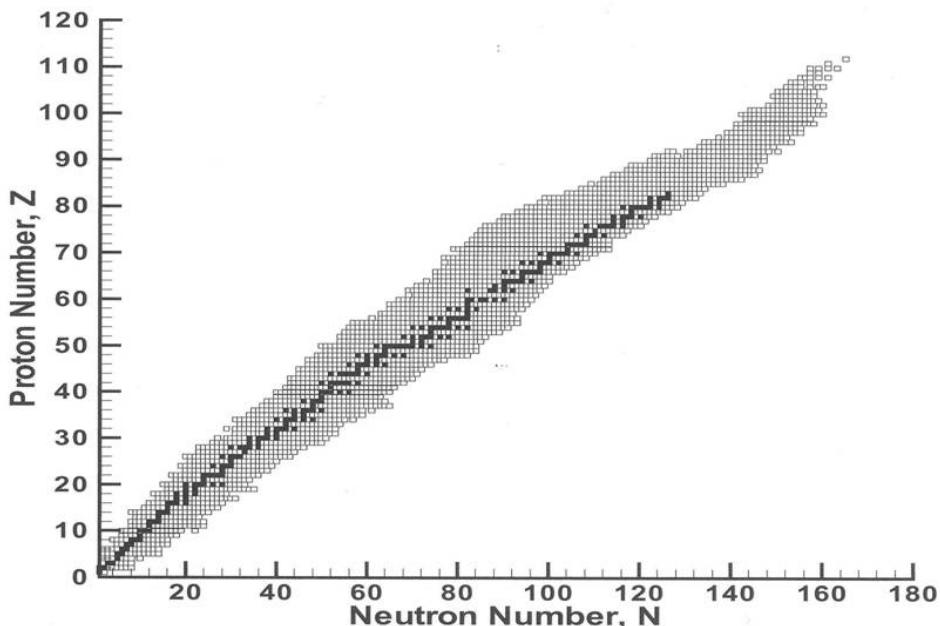
Kerner kan enten være stabile eller ustabile. At en kerne er stabil mener, at den, ulig de ustabile kerner, ikke er radioaktiv, det vil sige, at den ikke spontant undergår radioaktiv henfald. Når der snakkes om stabile kerner, mener man stabile isotoper, idet det samme element både kan have stabile og ustabile isotoper. Vi kan prøve at plotte de eksperimentelt bestemte stabile isotoper ud fra deres værdier af Z og N . Et sådan plot er vist i figur 3.6.



Figur 3.6: Stabile isotoper (markeret som sorte firkanter) og deres værdier af Z og N .

Indtegnet på figuren er også linjen svarende til $Z = N$. Det ses, hvordan de lette kerner (små værdier af Z og N) ligger op ad denne linje, men efterhånden som vi bevæger os mod de tungere kerner (højere værdier af Z og N), afviges der fra den rette linje, og isotoper med højere N favoriseres over isotoper med højere Z . Den snævre region af stabile kerner vist i figur 3.6 kaldes for *stabilitetslinjen*.
Plottet vist i figur 3.7 viser alle kendte isotoper, med de stabile isotoper igen markeret i sort. Det ses, hvordan kerner ikke er fundet til at have vilkårlige antal Z og N , eksempelvis ses ingen kerner til at have $Z = 50, N = 20$ eller $Z = 100, N = 100$. Generelt er der ingen kerner som uudviser meget stor forskel mellem Z og N , meget højt protonantal ($Z \gtrsim 80$) eller er ekstremt tunge ($A \gtrsim 200$).

Vi vil komme til at se, at ustabile kerner kan "vinde" energi ved at undergå radioaktivt henfald og ændre komposition, således at de bevæger sig tættere på stabilitetslinjen i NZ -plottet. Eksempelvis vil kerner, som har mange neutroner i forhold til protoner (kernerne, som ligger under stabilitetslinjen) spontant omdanne en af deres neutroner til en proton i det der hedder et β^- -henfald, mens meget tunge kerner kan brydes op i to mindre kerner, hvoraf én typisk er ${}^4\text{He}$.



Figur 3.7: Alle kendte isotoper ud fra deres værdier af Z og N . Stabile isotoper er markeret som sorte firkanter, mens ustabile isotoper er markeret med lysegrå firkanter

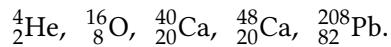
Magiske tal og skalmodellen

Vi skal nu vende de særligt stabile kerner, som viser sig i figur 3.3 ved at have særlig høj E_B / A . Denne opførsel kan ikke forudsiges af den semi-empiriske masseformel, men ved at beskrive kernen ud fra et bestemt billede, kaldet skalmodellen, kan vi forstå, hvorfor eksempelvis ${}^4\text{He}$ er så stabil. Skalmodellen minder i princip om et andet fænomen, I nok har hørt om i forbindelse med elektronskaller. Elektroner bundet i et atom kan ses som at arrangere sig i bestemte "baner" eller skaller om atomkernen. Hver skal kan holde et bestemt antal elektroner og elektronerne vil generelt fyldte skallerne nedefra og op. Atomer hvis elektronskaller alle er fyldt op, deltager ikke i kemiske reaktioner. Dette kender vi fra ædelgasserne. Tilbage til skalmodellen og kerne-billedet. Selvom billedet er mere komplekst, så kan kernen på samme måde som atomet siges at bestå af en række skaller og underskaller. Men i stedet for at fyldte skallerne op med elektroner, skal skallerne fyldes med protoner og neutroner. Dette er lig billedet vi brugte til at beskrive asymmetribidraget til den semi-empiriske masseformel. Grundet Paulis udelukkelsesprincip kan der kun eksistere et endeligt antal protoner eller neutroner i en skal. Bestemte antal af Z og N vil på samme måde som elektronerne, svare til fyldte skaller. Ud fra skalmodellen er disse forudsæt til at være

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, \text{ magiske tal for } Z \text{ og } N. \quad (3.18)$$

Disse kaldes for *magiske tal*. Det er altså for disse proton- og neutron-antal, at bindingsenergien per nukleon er usædvanlig høj. Bemærk at selvom $Z = 126$ er forudsagt som en "magisk" kerne, så er denne

kerne ikke observeret i naturen. Det er også muligt for en kerne at være dobbelt-magisk, i så fald er både Z og N magiske tal. Dette gælder blandt andet for kernerne



3.5 Kernehensfald

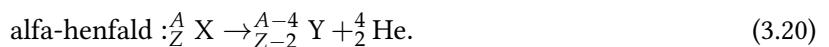
Omkring 90% af alle kendte kerner er radioaktive og kan derfor henvende spontant. Som nævnt i det foregående afsnit, vil et henvende af en ustabil kerne bringe kernen tættere på stabilitetslinjen i NZ -kortet. For et henvende som ændrer kompositionen af kernen (ændrer Z eller N) benævnes den originale kerne som *moder-kernen*, mens slutproduktet kaldes for *datter-kernen*. Et henvende kan foregå spontant (naturligt) såfremt massen af det originale atom (tit kaldet den initiale masse, M_i) er større end massen af slutproduktet (den finale masse, M_f). I enheder af energi er forskellen mellem de to simpelt skrevet som:

$$Q = (M_i - M_f)c^2. \quad (3.19)$$

Dette tal kaldes for reaktionens Q -værdi. Det ses, at for reaktioner med positiv Q -værdi (såkaldt exo-energiske reaktioner) må det gælde at $M_i > M_f$, og det er altså disse reaktioner, som kan foregå. Nedenfor gennemgås nogle almindelige slags henvende; alfa- og beta-henvende, som ændrer kompositionen af kernerne, og gamma-henvende, som er et indre henvende af et anslået atom, og derfor ikke ændrer Z eller N .

Alfa-henvende

Et alfa-henvende er når moderkernen udskiller en alfa-partikel. Skematisk kan vi skrive:



Normalt skelner man mellem notationen α (helium-kerne) og ${}_2^4\text{He}$ (helium-atom). Ved at skrive ${}_2^4\text{He}$ i reaktionsskemaet angiver man, at der regnes med atomare masser, og ikke kernemasser - på denne måde er ladningen også bevaret i reaktionen. Anvend derfor den atomare masse af ${}_2^4\text{He}$ medmindre andet er angivet.

Beta-henvende

Der findes tre former for beta-henvende, kaldet beta-minus (skrevet som β^-), beta-plus (β^+) og elektronindfangning. Ligesom ved alfa-henvendet er henvendet navngivet efter den partikel, der udsender i reaktionen. En beta-minus-partikel er en elektron. Det er ikke åbenlyst hvordan en kerne kan udsende en elektron, når den kun består af neutroner og protoner, men vi ser, hvordan henvendet omhandler omdannelsen af en neutron til en proton. Dette slags henvende forekommer derfor for kerner, som har

mange neutroner i forhold til protoner (kerner som befinder sig under stabilitetslinjen i NZ -plottet vist i figur 3.7). Omdannelsesprocessen forløber således:

$$\beta^- \text{-henfald: } n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.21)$$

eller skrevet ved brug af kerne-notation:

$$\beta^- \text{-henfald: } {}_Z^A X \rightarrow {}_{Z+1}^A Y + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.22)$$

Partiklen angivet som $\bar{\nu}_e$ er en *anti-neutrino* (hvor en neutrino skrives som ν_e ved det græske bogstav "nu"). Vi skal i kapitlet om partikelfysik gennemgå nogle simple love, der diktører, hvorfor henfaldet kræver udsendelse af en anti-neutrino, men for nu bliver vi nødt til bare at godtage dens tilstedeværelse. Neutrinoen og anti-neutrinoen er effektivt masseløse, så der skal ikke tages højde for dem under beregning af Q -værdi.

β^+ -henfald forekommer for kerner, som har mange protoner i forhold til neutroner. Her udsendes elektronens anti-partikel, *positronen* (e^+), og en neutrino:

$$\beta^+ \text{-henfald: } p \rightarrow n + e^+ + \nu_e, \quad (3.23)$$

som ved brug af kerne-notation skrives som

$$\beta^+ \text{-henfald: } {}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + e^+ + \nu_e. \quad (3.24)$$

Den sidste form for beta-henfald kaldes for elektronindfangning (*eng: electron capture*, forkortet EC). Dette er en proces, hvor kernen "fanger"en af atomets inderste elektroner og omdanner den til en neutron:

$$\text{EC: } p + e^- \rightarrow n + \nu_e, \quad (3.25)$$

som skrives som:

$$\text{EC: } {}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + \nu_e. \quad (3.26)$$

Gamma-henfald

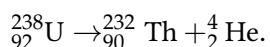
Kerner, som gennemgår et henfald eller en kollision, kan ende i en anslået (exciteret) tilstand. Dette betyder, at kernens nukleoner ikke befinner sig i den lavest mulige energitilstand (kaldet grundtilstanden), men besidder "ekstra"energi i kraft af at befinde sig i en højere energitilstand. For at "falde tilbage" til grundtilstanden skal kernen give afkald på den ekstra energi, og dette sker under udsendelse af en *foton*, skrevet med symbolet γ (det græske bogstav "gamma"). Denne slags henfald kaldes for et gamma-henfald. En foton, også kaldet en lys-kvant, besidder en energi, men ingen ladning. Et gamma-henfald kan derfor ikke ændre på sammensætningen af en kerne, og A , Z og N ændres derfor ikke. En kerne, som er exciteret angives normalt med symbolet ${}^* X$. Et gamma-henfald kan derfor skrives skematisk som

$$\text{gamma-henfald: } {}_Z^A X^* \rightarrow {}_Z^A X + \gamma. \quad (3.27)$$

3.6 Opgaver

- **Opgave 1: Alfa-henfald**

Alfa-henfald, hvor der udsendes en heliumkerne er en almindelig type henfald. F.eks. følgende henfald af Uran-238



1) Hvorfor tror du netop udsendelsen af en alfa-partikel er en favoriseret type henfald?

2) Hvad er reaktionens Q -værdi? Ville denne reaktion forekomme naturligt? Du kan anvende følgende atomare masser:

$$M(^{238}\text{U}) = 238,05079 \text{ u}$$

$$M(^{234}\text{Th}) = 234,04360 \text{ u}$$

$$M(^4\text{He}) = 4,002602 \text{ u}$$

- **Opgave 2: En isotop af jern**

^{49}Fe og ^{51}Fe er begge kort-livede radioaktive isotoper af jern, mens ^{50}Fe endnu ikke er opdaget.

1) Brug den semi-empiriske masseformel (ligning 3.9) til at finde den forudsagte atomare masse af jern-50

2) Hvad er dens forudsagte bindingsenergi per nukleon? Er dette lavt eller højt sammenlignet med stabile kerner nær $A = 50$?

- **Opgave 3: Bindingsenergi fra den semi-empiriske masseformel**

Anvend den semi-empiriske masseformel (ligning 3.9) og formlen for masse-defekt (ligning 3.6) til at opskrive et udtryk for bindingsenergien (se ligning 3.8).

1) hvad er den forudsagte bindingsenergi for $^{62}_{28}\text{Ni}$? Du kan sammenligne dette resultat med resultatet du får i opgave 6.

- **Opgave 4: Berylliums isotoper**

Det lette grundstof beryllium har i alt otte isotoper, hvoraf kun Be-9 er stabil.

1) Sammenlign den atomare masse af Be-8 med massen af to He-4. Hvad kan man konkludere herfra?

2) Sammenlign også den atomare masse af Be-9 med massen af ^7Li og ^2H . Hvad fortæller dette dig?

Du kan anvende følgende masser:

$$M(^2\text{H}) = 2,014102 \text{ u}$$

$$M(^4\text{He}) = 4,002602 \text{ u}$$

$$M(^7\text{Li}) = 7,016003 \text{ u}$$

$$M(^8\text{Be}) = 8,005305 \text{ u}$$

$$M(^9\text{Be}) = 9,012174 \text{ u}$$

••• Opgave 5: Kerners tæthed

En atomkerne kan antages at være en kugle, sådan at volumen er givet som $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Vis, at tætheden af en kerne ikke afhænger af grundstoffet, altså at tætheden er ens for alle kerner. Hint: anvend at massen af en kerne i atomare masseenheder ca. er lig massetallet for kernen, altså at $m \approx A$.

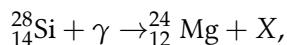
• Opgave 6: Den stærkest bundne kerne

^{62}Ni har den højeste bindingsenergi per nukleon af alle kerner.

1) Hvor meget energi skal der til for at splitte kernen ad? Anvend at den atomare masse af ^{62}Ni er 61,928349 u.

• Opgave 7: Splittelsen af en kerne

Antag følgende reaktion:



hvor X er en kerne.

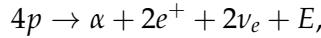
1) hvad er A og Z for X ?

2) hvis vi antager at energien af fotonen ikke går til kinetisk energi for $_{12}^{24}\text{Mg}$ og X , hvad er så dens energi? Anvend at massen af et Si-28-atom er 27,976927 u og at massen af et Mg-24-atom er 23,985042 u

• Opgave 8: Fusion i Solen

Stjerner som Solen skinner på grund af den fusion som foregår i deres kerner. Temperaturen i stjernernes kerner er så høje, at elektronerne er frie, altså ikke bundet til atomer. I Solen omdannes 4 protoner

gennem en række skridt (kaldet pp-kæden) til én ${}^4\text{He}$ -kerne. Helt overordnet kan reaktionen skrives som:



Dvs. der bliver desuden dannet to positroner og 2 elektronneutrinoer samt en mængde energi.

1) Hvor meget energi dannes i ovenstående reaktion? Antag at elektronneutrinoens masse er 0. Du kan anvende *den atomare masse* af helium: $M({}^4\text{He}) = 4,002602 \text{ u}$.

2) pp-kæden starter ved at to protoner mødes. Men i kraft af deres ladning vil de frastøde hinanden, og de skal derfor have tilstrækkelig bevægelsesenergi for at det kan lade sig gøre. Det elektriske potential (barrieren) mellem to ladede partikler er givet ved:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (3.28)$$

Potentialet U er i joule, hvis ladningerne af partiklerne angives i coulomb. Antag at den stærke kernekraft overvinder den elektriske frastødning når de to protoner kommer i afstanden af $1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ fra hinanden. Hvad er den samlede minimale energi af protonerne?

3) Det er kun muligt for atomer og partikler at have så høje energier ved virkelig høje temperaturer. Den gennemsnitlige energi af partikler og temperaturen af det medie, de befinner sig i, er relateret til hinanden via:

$$E = \frac{3}{2} kT, \quad (3.29)$$

hvor k er Boltzmanns konstant og T er temperaturen i grader Kelvin. Hvad er temperaturen svarende til energien du fandt i foregående opgave? Solens kernetemperatur er ca. $1,5 \cdot 10^7 \text{ K}$. Hvordan sammenlignes det med dit resultat?

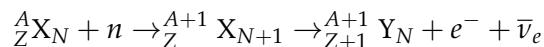
4) NB: sjov opgave! Vi kan prøve at antage, at al energien der bliver produceret i ovenstående reaktion bliver båret væk af neutrinoer. Lad os også antage at al Solens udstråling bliver skabt ved ovenstående reaktion. Ved Jordens overflade modtages Solens udstråling (kaldet solkonstanten S_0) ved værdien: $S_0 = 1,362 \cdot 10^3 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Hvor mange neutrinoer fra Solen rammer en kvadratcentimeter af Jordens overflade hvert sekund? Hvor mange solneutrinoer rammer spidsen af din finger hvert sekund?

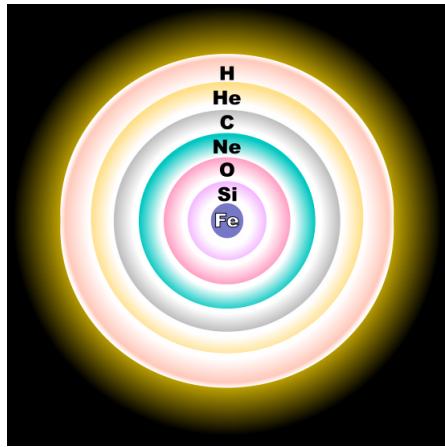
•• Opgave 9: Dannelse af tunge grundstoffer i en supernova: r- og s-proces

Stjerner kan kun fusionere grundstoffer op til jern. Figur 3.8 viser tværsnittet af en tung stjerne som befinner sig i slutningen af dens levetid.

1) Forklar løgstruktur-udseendet af stjernen. Hvad er grunden til at stjerner ikke kan danne elementer tungere end jern ved fusion?

Elementer tungere end jern må da være dannet andetsteds end i stjernernes indre. Et miljø, hvor der dannes tunge grundstoffer er de energirige supernova-eksplosioner. Her bliver grundstofferne ikke dannet ved fusion, men ved neutron-indfangning og senere β^- -henfald af kernen. Det kunne f.eks. foregå på følgende måde:





Figur 3.8: Skalstruktur i stjerner

I en supernova-eksplasion skabes en kæmpe mængde neutroner, som gør neutron-indfangning muligt. Men kerner med ekstra neutroner er ustabile og vil henfalde ved hjælp af β^- -henfald. Derfor kan man sige, at neutron-indfangningen og henfaldene konkurrerer med hinanden. Hvis neutron-indfangningen kan ske hurtigere end kernen kan nå henfalde kaldes det for en r-proces ("r" for eng: *rapid* - hurtig). Hvis kernen når at henfalde inden den kan indfange en ny neutron kaldes det for en s-proces ("s" for eng: *slow* - langsom).

Figur 3.2 viser et udsnit af kernekortet omkring $N \sim 100$ og $Z \sim 70$.

De sorte firkanter repræsenterer kerner som er stabile, og derfor ikke kan undergå henfald.

- 2) Hvordan ændrer en kerne sig på kortet hvis den fanger én neutron? Hvordan ændrer en kerne sig på kortet hvis den undergår β^- -henfald?
- 3) Start ved kernen ^{181}Ta . Antag at kernen undergår 5 neutron-indfangninger ved r-proces. Hvilken kerne bliver dannet (til sidst?)?
- 4) Antag nu at kernen undergår 5 neutron-indfangninger ved s-proces. Hvilken kerne bliver dannet?
- 5) Kan kernen ^{180}Ta dannes ved neutronindfangning? Forklar dit svar.

Z	177Ir	178Ir	179Ir	180Ir	181Ir	182Ir	183Ir	184Ir	185Ir	186Ir	187Ir	188Ir	189Ir	190Ir	191Ir	192Ir	193Ir			
	176Os	177Os	178Os	179Os	180Os	181Os	182Os	183Os	184Os	185Os	186Os	187Os	188Os	189Os	190Os	191Os	192Os			
75	175Re	176Re	177Re	178Re	179Re	180Re	181Re	182Re	183Re	184Re	185Re	186Re	187Re	188Re	189Re	190Re	191Re			
	174W	175W	176W	177W	178W	179W	180W	181W	182W	183W	184W	185W	186W	187W	188W	189W	190W			
73	173Ta	174Ta	175Ta	176Ta	177Ta	178Ta	179Ta	180Ta	181Ta	182Ta	183Ta	184Ta	185Ta	186Ta	187Ta	188Ta	189Ta			
	172Hf	173Hf	174Hf	175Hf	176Hf	177Hf	178Hf	179Hf	180Hf	181Hf	182Hf	183Hf	184Hf	185Hf	186Hf	187Hf	188Hf			
71	171Lu	172Lu	173Lu	174Lu	175Lu	176Lu	177Lu	178Lu	179Lu	180Lu	181Lu	182Lu	183Lu	184Lu						
	170Yb	171Yb	172Yb	173Yb	174Yb	175Yb	176Yb	177Yb	178Yb	179Yb	180Yb	181Yb								
69	169Tm	170Tm	171Tm	172Tm	173Tm	174Tm	175Tm	176Tm	177Tm	178Tm	179Tm									
	100	102	104	106	108	110	112	114	N											

Figur 3.9: Et udsnit af kernekortet

Kapitel 4

Partikelfysik

4.1 Introduktion

Partikelfysik er den gren af fysikken, som beskæftiger sig med Universets mindste bestanddele og deres vekselvirkning med hinanden. Vi har indtil videre stiftet bekendtskab med en del allerede; elektronen, protonen, neutronen og neutrinoen, og du har måske selv hørt om partikler som muonen og Higgs-bosonen. Partikelfysikkens zoologiske have indeholder en bred vifte af partikler, hvoraf de mest fundamantale partikler er elementarpartiklerne – partikler, som man mener ikke kan deles. Heriblandt er elektronen, neutrinoen og kvarkerne. Kvarker i sammensætning udgør hadronerne, som protonerne og neutronerne er eksempler på. Dette kapitel vil give et kort overblik over partiklerne, deres egenskaber og fysikkens indtil videre bedste bud på et samlet billede af alt i verden, kaldet standardmodellen.

4.2 Standardmodellen

Standardmodellen er teorien om de elementare partikler og hvordan de fire fundamentale naturkræfter – tyngdekraften, den elektromagnetiske kraft og den stærke og svage kernekraft – vekselvirker.

Partikler og anti-partikler

Der arbejdes her med tre egenskaber for partiklerne: masse, ladning og *spin*. Spin er en kvantemekanisk egenskab for en partikel, som ikke har nogen analog i den makroskopiske fysiske verden¹, men det besidder altid en bestemt størrelse og en retning, og er vigtigt, hvis man vil regne kvantemekanisk på partiklerne. Alle partikler har en *antipartikel*. En antipartikel er ens i alle henseender med sin partikel bortset fra sin ladning (og andre tekniske egenskaber, som vi ikke vil komme ind på her). Den negativt ladede elektron, e^- , har antipartiklen kaldet positronen (også nogle gange kaldet anti-elektronen), e^+ . De to partikler har samme masse og spin, men modsatte ladninger. Hvis en elektronen og en positron "møder" hinanden, ophæver de hinanden og de eksisterer ikke længere. Dette kaldes for en *annihilation*.

¹Nogle bøger i gymnasiet beskriver en partikels spin, som at man kan forestille sig, at partiklen drejer om sig selv på samme måde som at Jorden roterer, men dette billede er fundamentalt forkert og skal slettes fra din bevidsthed så hurtigt som muligt.

På grund af energi- og impulsbevarelse, bliver der i en annihilation altid skabt partikler til at bære den overskydende energi væk. En annihilation mellem en fri elektron og en positron skaber to fotoner:

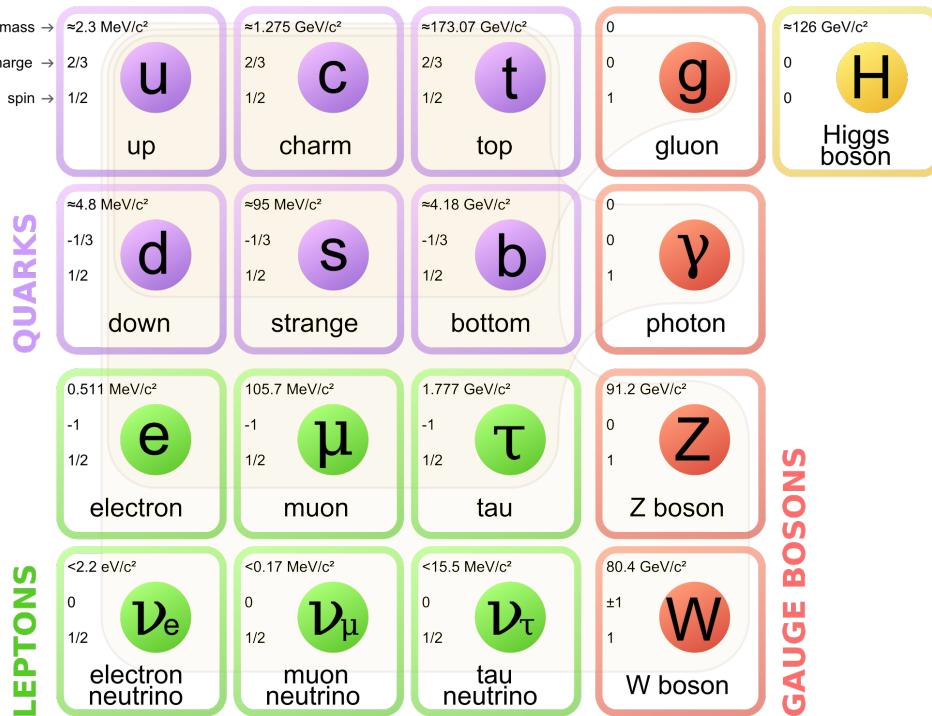
$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \quad (4.1)$$

Fotonerne har ingen masse, men får sin energi fra masserne af elektronen og positronen gennem Einsteins formel $E = mc^2$, der giver en ækvivalens mellem energi E og masse m , idet c blot er en naturkonstant (lysets fart i vakuum). For visse partikler gælder det, at de er sin egen antipartikel, fx fotonen. To fotoner kan eksempelvis annihilere i den omvendte reaktion:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+, \quad (4.2)$$

så længe reaktionen overholder energi- og impulsbevarelse.

Standardmodellens elementare partikler er vist skematisk i figur 4.1. De er leptonerne, kvarkerne (eng: *quarks*), de vekselvirkende eller kraftbærende partikler (kaldet *gauge-bosoner*) og Higgs-bosonen.



Figur 4.1: Standardmodellens elementarpartikler: leptonerne, kvarkerne, gauge-bosonerne og Higgs-bosonen. Til venstre i hver kasse ses partiklens masse, ladning og spin.

Leptoner

Leptonerne er en gruppe af elementare partikler, som ikke vekselvirker gennem den stærke kernekraft. Alle leptoner har spin $s = 1/2$, og er derfor det, der kaldes *fermioner*.

Leptonerne er overordnet delt ind i tre grupper, kaldet generationer. Én generation af leptoner består af en ladet partikel og en neutral partikel. Vi har allerede stiftet bekendtskab med én generation af leptoner, nemlig den ladede elektron, e^- og den neutrale (elektron)neutrino, ν_e . Næste generation af leptoner udgøres af *muonen* (skrevet som det græske bogstav 'mu', μ) og muon-neutrionen, ν_μ . Sidste generation af leptoner er den tunge partikel *tau* (skrevet som det græske bogstav, 'tau', τ) og tau-neutrinoen, ν_τ . Muonen og tau-partiklen, der er meget massive i forhold til elektronen, er ustabile og vil derfor hurtigt henfalde til elektroner. De kan på grund af deres høje masser kun dannes i høj-energi kollisioner, som dem der foregår i partikelacceleratorer eller reaktioner involverende kosmisk stråling (husk, at masser og energi er det samme i partikelfysikken, så det kræver meget energi at skabe tunge partikler).

Leptonerne, inklusiv antipartiklerne e^+ , $\bar{\mu}$, $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}_e$... kan påvirkes af tyngdekraften, den elektromagnetiske kraft og den svage vekselvirkning.

Kvarkerne

Kvarkerne er de partikler som kan sammensættes til blandt andet protonerne og neutronerne. En speciel egenskab for kvarkerne gør, at de aldrig kan findes isoleret, og kvarkerne kan derfor aldrig observeres direkte. De er spin 1/2-partikler ligesom leptonerne, og besidder forskellige brøkdele af elementarladningen, som det ses af figur 4.1.

De er navngivet up, down, charm, strange, top og bottom med symbolerne u, d, c, s, t og b. En vilkårlig kvark angives som q , og en antikvark som \bar{q} . Kvarkernes egenskaber og evidens for deres eksistens er opdaget ved at studere hadroner (altså de partikler, som kvarkerne er byggesten for, se afsnit 4.3), og de første kvarker blev studeret i slutningen af 1960'erne, mens den sidste og tungeste kvark, top-kvarken, blev opdaget i 1995.

Kvarkerne er de eneste partikler som kan vekselvirke gennem alle fire fundamentale kræfter.

De fundamentale kræfter og Gauge-bosoner

Standardmodellen arbejder med fire fundamentale kræfter. Tabel 4.1 viser de fire former for vekselvirkning, og deres styrke relativ til den stærkeste kraft, den stærke vekselvirkning.

Vekselvirkning	Relativ styrke	Rækkevidde	Partikel
Stærk	1	kort (~ 1 fm)	gluon, g
Elektromagnetisk	$\frac{1}{137}$	lang ($1/r^2$)	foton, γ
Svag	$\sim 10^{-9}$	kort ($\sim 0,001$ fm)	W^\pm, Z^0
Gravitationel	$\sim 10^{-38}$	lang ($1/r^2$)	graviton

Tabel 4.1: De fire fundamentale kræfter og deres vekselvirkningspartikler, hvoraf gravitonen endnu ikke er eksperimentelt bekræftet.

Den elektromagnetiske vekselvirkning og tyngdekraften kendes fra klassisk fysik, som kræfter, hvis styrke afhænger af afstanden mellem de vekselvirkende objekter som $1/r^2$. Den stærke vekselvirkning, er ansvarlig for den stærke kernekraft, som holder nukleonerne i kernen sammen. Den har en kort

rækkevidde, typisk omkring udstrækningen af en kerne. I følgende afsnit skal vi lære, at kvarkerne vekselvirker med hinanden ved hjælp af den stærke vekselvirkning. Den svage vekselvirkning er ansvarlig for beta-henfald, og henfaldet af ustabile partikler såsom leptonerne.

Standardmodellen beskriver vekselvirkninger gennem de fundamentale kræfter som udvekslingen af en partikel kaldet en gauge-boson. Forestil dig to elektroner, som er på vej til at mødes. De vil frastøde hinanden på grund af deres ladning, men hvordan ved elektronerne at den anden elektron er til stede? Det ved de fordi der sker en udveksling af gauge-boson, i dette tilfælde fotonen.

I dette billede ”bærer” eksempelvis fotonen den elektromagnetiske vekselvirkning. Det betyder, at to partikler som interagerer elektromagnetisk, vil udveksle en foton. De andre gauge-bosoner er *gluonen*, g , som bærer den stærke vekselvirning og W- og Z-partiklerne, som udveksles i reaktioner involverende den svage kernekraft. Modsat gluonen og fotonen, har Z- og W-bosonerne masse (man siger, at de er massive). Z-bosonen er uden ladning, mens W-bosonen enten kan have positiv eller negativ ladning skrevet henholdsvis som W^+ og W^- .

Når en gauge-boson udveksles mellem to partikler – altså når to partikler vekselvirker gennem en fundamental kræft – siger man, at partiklen er *virtuel*. At en partikel er virtuel betyder, at den ”matematisk” er til stede, men ikke fysisk kan observeres. Gauge-bosoner har altid et heltalligt spin, $s = 0, 1, 2, \dots$

Standardmodellen er en uhyre god fysisk teori, og har gang på gang vist sig at give korrekte forudsigelser om forskellige eksperimenter. Desværre har den ét stort problem: Teorien indeholder ikke tyngdekræften, så standardmodellen indeholder faktisk kun tre ud af de fire fundamentale naturkræfter. Man kan fikse problemet ved at tilføje en hypotetisk graviton-partikel, der skulle bære den gravitationelle vekselvirkning. En komplet fysisk teori må naturligvis indeholde alle fire naturkræfter, og indtil videre er der ingen troværdig fysisk teori, der formår dette. Der findes dog eksotiske bud på sådanne komplette teorier, såsom strengteori og supersymmetri, men disse har andre store problemer, så der kun er få fysikere, der tror på dem.

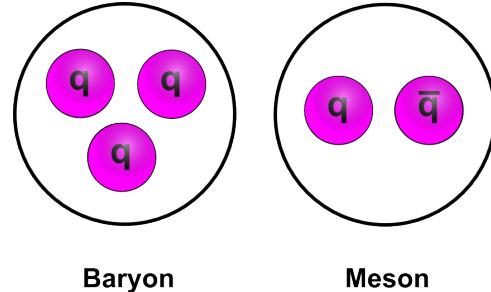
Higg-bosonen

Higgs-bosonen er en partikel, hvis eksistens var forudsagt inden den blev opdaget i 2013. Higgs-partiklen skaber et felt kaldet Higgs-feltet, fra hvilket massive partikler får deres masse fra. Higgs-feltet var en af mange teorier omkring, hvordan masse skabes, og kan forklare, hvorfor Z og W^\pm har masse, hvilket ellers ikke umiddelbart var forventet for gauge-bosoner. Higgs-partiklen er meget tung, og kræver derfor stor energi for at kunne skabes i partikelacceleratorer. Derfor er det også først for nyligt, at man kunne producere partiklen. Efter sin dannelse vil den meget hurtigt henfalde til lettere partikler.

4.3 Kvarker i sammensætning – hadroner

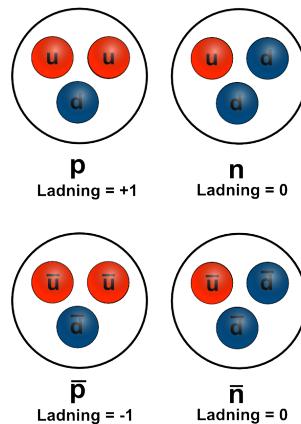
Vi lærte i forrige afsnit, at kvarker ikke kan eksistere i isolation. Kvarker bindes i stedet sammen via den stærke kernekraft i systemer og danner sammensatte partikler. De sammensatte partikler (eng: *composite particles*) kaldes samlet set for *hadroner*. Der eksisterer to typer hadroner: baryonerne og mesonerne. Baryonerne er sammensatte partikler bestående af tre kvarker, mens mesonerne består af et

kvark-antikvark-par. Dette er illustreret i figur 4.2. Protoner og neutroner er eksempler på baryoner.



Figur 4.2: Baryoner består af tre kvarker, mens mesoner består af en kvark og en antikvark, f.eks. pionen, π^+ , hvis kvarkindhold er én u-kvark og én anti-d-kvark, eller b-eta-mesonen, η_b , hvis kvark indhold er én b-kvark og én anti-b-kvark.

Deres sammensætning er vist i figur 4.3. En proton består af to u-kvarker og én d-kvark, mens neutronen



Figur 4.3: Protonen og neutronen består af hver tre kvarker. Deres antipartikler består af antikvarkerne.

består af to d-kvarker og én u-kvark. Vi kan forstå mange af deres egenskaber ved at se på deres kvarksammensætning. Den samlede ladning af kvarkerne i protonen kombineres til 1 elementarladning, mens kvarkerne i neutronen kombineres til ladning 0. Da forskere fandt ud af, at neutronen besad en magnetisk egenskab kaldet et *magnetisk moment*, var det en gåde for dem, hvordan det kunne lade sig gøre for en neutral partikel, men nu ser vi, hvordan dette skyldes de magnetiske egenskaber for neutronens individuelle kvarker, som jo netop har ladning. Vi ser også, hvordan masserne af protonen og neutronen (omkring $930 \text{ MeV}/c^2$) er meget større end massen af de individuelle up- og down-kvarker, der hver kun vejer $2,3 \text{ MeV}/c^2$ og $4,8 \text{ MeV}/c^2$, hvor den manglende masse kommer fra gluonfeltet, som binder kvarkerne sammen. Baryonernes og mesonernes antipartikler består simpelt af antikvarkerne i stedet for for kvarker (vist i figur 4.3).

4.4 Partikelreaktioner

Under udarbejdelsen af standardmodellen, så man, hvordan visse vekselvirkninger og henfald skete ofte, mens andre fandt sted med langt mindre sandsynlighed eller slet ikke – såkaldte *forbudte* reaktioner. Studiet af de forekommende reaktioner har ledt til en række bevarelseslove, som dikterer hvilke reaktioner, som kan forekomme, og hvilke der ikke kan. Der skal vanskeligt matematik til for at regne på reaktionerne, men de kan simpelt visualiseres ved brugen af såkaldte Feynman-diagrammer.

Bevarelseslove

I fysikken dикterer en bevarelseslov at en størrelse ikke ændrer sig over tid. De fleste har allerede stiftet bekendtskab med koncepter som energi-, impuls- og ladningsbevarelse, som også dикterer interaktioner mellem partikler. Ud over disse bevarelseslove er to andre størrelser i partikelfysikken bevarede, nemlig *baryon-tal* og *lepton-tal*. Disse tal kan ses lidt ligesom bevarelsen af den samlede ladning i en reaktion. Idéen er, at alle baryoner besidder baryontallet $B = 1$, mens deres antipartikler besidder $B = -1$. Alternativt kan man sige at kvarker har $B = 1/3$, mens antikvarker har $B = -1/3$. Alle partikler som ikke er dannet af kvarker har automatisk $B = 0$. Et eksempel kan være reaktionen:

$$p + n \rightarrow p + \mu^+ + \mu^-.$$

Ladningen er bevaret i denne reaktion, men baryon-tallet er ikke bevaret, idet vi på højresiden har $B = 1 + 1$, mens vi på venstresiden har $B = 1$, da muonerne begge har $B = 0$. Reaktionen vil altså ikke forekomme!

Lepton-tallet fungerer på samme måde. Her har alle medlemmer af lepton-familien (e^-, ν_e, μ^-, \dots) lepton-tal $L = 1$, mens deres antipartikler ($e^+, \bar{\nu}_e, \mu^+, \dots$) har $L = -1$. Man skelner også mellem lepton-tal for de forskellige generationer, skrevet L_e, L_μ, L_τ for henholdsvis elektronen, muonen og tau-partiklen og deres neutrinoer. Disse skal også være bevaret individuelt.² Et eksempel er henfaldet af en neutron:

$$n \rightarrow \bar{p} + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Neutrinoer interagerer så lidt med stof, at de er meget svære at detektere. Derfor kunne man, baseret på observationer, fristes til at tro, at reaktionen forløb som $n \rightarrow \bar{p} + e^-$, men dette passer ikke med den energi, som anti-protonen og elektronen besidder efter et sådant henfald. Der må være en tredje partikel til stede. Anti-neutrinoens tilstedeværelse bevarer både energi og lepton-tal i henfaldet af en neutron.

Feynman-diagrammer

Feynman-diagrammer, udviklet af den berømte amerikanske fysiker Richard Feynman (1918-1988), er visuelle repræsentationer af vekselvirkningen mellem partikler. Deres enkelhed gør dem til et must-have i alle partikelfysikeres værktøjskasse, og de kan anvendes og forstås uden kompliceret matematik. Dette afsnit gennemgår først fremgangsmåden for at konstruere et feynman-diagram, og dernæst den underliggende fysiske betydning. Reglerne er meget simple!

²Dette er faktisk en sandhed med modifikationer, fordi bevarelsen af de enkelte generationers leptontal kan brydes i visse tilfælde, men det er meget usandsynligt, så vi vil antage, at de altid er bevarede.

Basis konstruktion af feynman-diagrammer

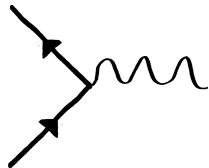
1. Først og fremmest arbejdes der med to slags symboler: den lige linje med en pil og den bugtede linje:



Pilen kan både pege den ene og den anden vej!

2. De to slags linjer kan forbindes, men kun hvis to linjer med pile forbindes med en enkelt bugtet linje.

Således:

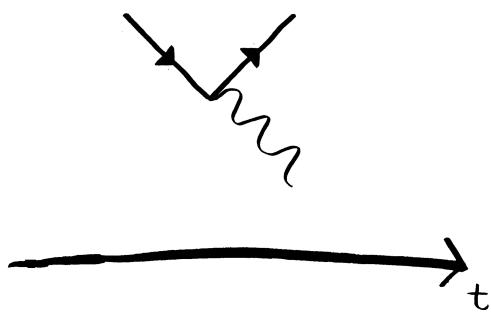


Det punkt, som kombinerer de tre linjer kaldes for et *vertex*. Læg mærke til retningen for pilene!

Det skal gøres således, at *hver gang en pil peger mod et vertex, skal der være en pil, som peger væk fra vertexet*.

Hvad betyder det, fysisk set? Hver linje i regel (1) er en partikel. Linjerne med pile er fermioner (elektroner, kvarker, osv.), mens den bugtede linje kan repræsentere en boson (fotonen, gluonen, osv.). Dog anvender man normalt forskellige symboler for de forskellige slags vekselvirkninger, mere om det i opgaveafsnittet. Vertexet (knudepunktet) er en vekselvirkning/interaktion. Virtuelle partikler eksisterer mellem to vertexer.

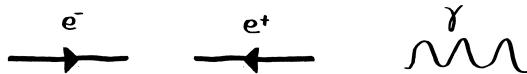
Diagrammerne fortæller en historie om partiklernes vekselvirkning. Vi læser dem fra venstre mod højre, som det er illustreret i figur 4.4. Normalt tegner man ikke aksen på, som det er gjort i figur 4.4, men



Figur 4.4: Feynman-diagrammer har tiden ad x-aksen.

det kan for nogle være en hjælp, så gør hvad du føler dig tryg ved. At det er vigtigt at være opmærksom

på, at feynman-diagrammer læses fra venstre mod højre kan illustreres i et eksempel. Vi kigger her på vekselvirkningen involverende tre partikler: en elektron, positron og en foton. Læg mærke til, at



Figur 4.5: Elektronen, positronen og en foton illustreret.

vi skelner mellem elektronen og dens antipartikel ved retningen på pilene: *partikler har pile i retning med tidsudviklingen og antipartikler har pile modsat tidsudviklingen*. Dette betyder ikke at anti-partikler bevæger sig bagud i tid, det er kun et spørgsmål om, hvordan man kan skelne mellem dem og partiklerne. Figur 4.6 illustrerer to forskellige scenarier. I situationen til højre udsender en elektron en foton og



Figur 4.6: Højre: elektron udsender foton. Venstre: positron absorberer en foton.

forsætter. I situationen til venstre absorberer en positron en foton og fortsætter. Kan du overbevise dig selv om, at det er det, der ses på figuren?

To nye situationer er vist i figur 4.7. I diagrammet til højre annihilerer en elektron og en positron, hvilket skaber en foton. I diagrammet til venstre sker en ”par-dannelse”: en foton bliver til en elektron og en positron. De fire viste feynman-diagrammer i figur 4.6 og 4.7 indeholder alle de samme elementer,



Figur 4.7: Højre: Elektron/positron annihilation. Venstre: En par-dannelsesproces.

men hvordan de er orienteret i diagrammet gør alligevel en stor forskel for den fysiske betydning!

En anden vigtig force ved feynman-diagrammer er, at de kan roteres. Når en partikel under en rotation af et feynman-diagram passerer grænsen mellem venstre side (de indgående partikler) og den

højre side (de udgående partikler) skifter den til sin anti-partikel. Det er utroligt brugbart at feynman-diagrammer der fungerer i én orientering, også fungerer når diagrammet er roteret, så længe man husker at skifte partiklerne ud med deres antipartikler, når de passerer grænsen mellem indgående og udgående partikler.

Vi husker på, at det, der befinner sig på venstre side af feynman-diagrammet er de indkommende partikler – de partikler som enten skal kolidere med hinanden, eller som skal til at lave noget interessant fysik, og de partikler, som ses til højre i diagrammet er de udgående partikler – de partikler man ville måle i sin partikelaccelerator. Pas på med ikke at tolke retningen på pilene som den retning, partiklerne rejser – pilenes retning angiver udelukkende om der er tale om en partikel eller en anti-partikel.

4.5 Opgaver

- **Opgave 1: Bevarelseslove**

1) Hvilke bevarelseslove gør sig gældende i partikelfysik?

2) Kig på følgende reaktioner og bestem, om de kan lade sig gøre eller ej.

1. $e^- \longleftrightarrow e^- + e^+ + e^+$
2. $p + n \longleftrightarrow e^- + e^+ + e^+$
3. $p + n + e^+ \longleftrightarrow n + p + \bar{\nu}_e$
4. $p \longleftrightarrow \mu^- + n + \bar{\nu}_\mu$
5. $p \longleftrightarrow \mu^+ + n + \nu_\mu$
6. $\bar{n} \longleftrightarrow \bar{p} + e^+ + \nu_e$
7. $e^- + \mu^+ \longleftrightarrow n$

Hint: tjek om bevarelseslovene er opfyldt.

- **Opgave 2: Dannelse af to muoner**

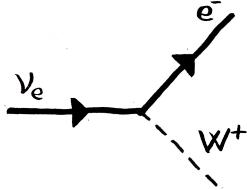
Tegn et feynman-diagram, hvor en foton danner muoner i en pardannelsesproces. Hvad er den minimalt krævede energi af fotonen?

- **Opgave 3: Reaktioner med W^\pm -partiklen**

W -partiklen er en af de bosoner, som bærer den svage vekselvirkning. De er f.eks. til stede i reaktioner hvor der enten udsendes eller absorberes neutrinoer. Dens ladning, som enten kan være +1 eller -1, skrevet som hhv. W^+ og W^- kommer an på ladningen af partiklerne i reaktionen. Betragt reaktionen i figur 4.8.

Det viser omdannelsen af en elektron-neutrino til en elektron under udsendelse af en W -partikel. For at der opnås ladningsbevarelse i reaktionen må ladningen af W være +1. For at skelne mellem de forskellige typer vekselvirkninger, er det normalt at bosonerne fra den svage vekselvirkning tegnes som en en stiplet streg, som det ses på figuren.

1) Rotér feynmandiagrammet mod uret så det viser en indkommende positron i stedet. Hvad slags neutrino produceres der? Hvad er nu ladningen af W -bosonen?



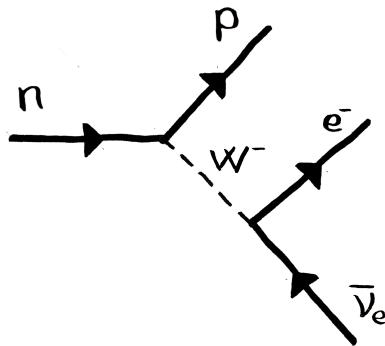
Figur 4.8: Udsendelse af en W^+ -boson.

2) Udskift positronen med en elektron. Hvad slags neutrino produceres der og hvad er ladningen af W -bosonen?

W -partiklen kendes bedst for sin rolle i kernehenfald, som f.eks. i tilfældet med beta-minus-henfald. Her er reaktionen som bekendt at en neutron henfalder til en proton, elektron og en antineutrino:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Men W -bosonen er til stede i denne reaktion som en virtuel partikel. Faktisk udsender neutronen under sin omdannelse til en proton en W -partikel, som efterfølgende henfalder til en elektron og en antineutrino. Feynman-diagrammet for et beta-minus-henfald er vist i figur 4.9. Det ses, at W -bosonen



Figur 4.9: Beta-minus-henfald.

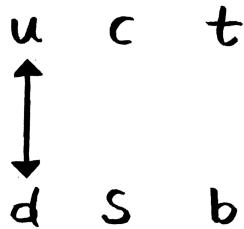
er en virtuel partikel, idet den eksisterer mellem to vertexer.

Nu er det din tur!

3) Tegn feynman-diagrammet for et beta-plus-henfald: $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$.

4) Tegn feynman-diagrammet for en elektron-indfangning: $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$.

Vi husker på, at neutronen og protonen ikke er elementære partikler, men faktisk består af kvarker. W -bosonen kan ændre kvarker af bestemt en type, kaldet smage (*eng: flavour*). Kvarkerne kan omdannes ved hjælp af W -bosonen således at de ændrer deres ladning med enten ± 1 , f.eks. $u \longleftrightarrow d$. På figur 4.10 er der en oversigt over kvarkerne. Pilen mellem u - og d -kvarken betyder, at W -bosonen kan ændre disse



Figur 4.10: *W-bosonen kan ændre kvarker til en anden type så længe ladningen ændres med ± 1*

kvarker til hinanden.

- 5) Indtegn på figur 4.10 pile mellem alle de kvarker, som W kan omdanne.
- 6) En t -kvark omdannes til en b -kvark under udsendelse af en W -partikel. Tegn feynman-diagrammet. Hvad er ladningen af W ?
- 7) En s -kvark og en anti- c kvark annihilerer og skaber en W -partikel. Tegn feynman-diagrammet. Hvad er ladningen af W ?
- 8) Tegn feynmandiagrammet for et beta-minus-henfald, men denne gang tegn neutronens og protonens kvarker som en del af reaktionen. *Hint: partikler kan sagtens optræde uændret i et feynman-diagram.*

••• Opgave 4: Feynman-diagrammer: en sand kunstart

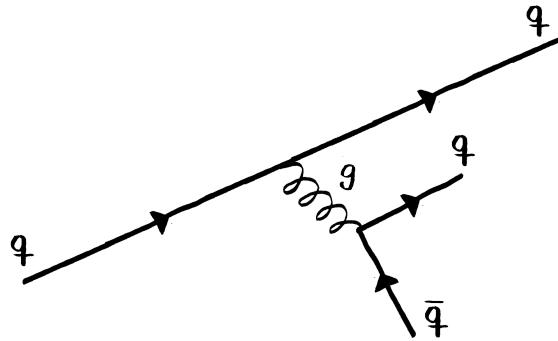
NB: det er en god idé at lave opgave 3 inden denne opgave.

Før vi er helt klar til at give os i kast med en masse feynman-diagrammer, skal gluonen (g) introduceres. Gluonen, som bærer den stærke vekselvirkning, virker ved at ændre en egenskab ved kvarkerne kaldet *farve*. Feltet som beskæftiger sig med dette kaldes for kvantekromodynamik, og det er det, som beskriver hvorfor kvarkerne kun kan eksistere i grupper af tre (hadronerne) og to (mesonerne). Kvantekromodynamik er dog en anelse ud over niveauet for denne camp, men det forhindrer os ikke i at gøre brug af gluonen i vores feynman-diagrammer. Figur 4.11 viser en typisk vekselvirkning med gluonen, som normalt tegnes som en fjederform. Heri udsender en vilkårlig kvark en gluon og fortsætter. Kvarktypen ændrer sig ikke under udsendelse af en gluon (kun dens farve, men igen, det behøver vi ikke tage højde for). Gluonen henfalder til et vilkårligt kvark-antikvark-par. Gluonens energi afgør, hvilket kvark-antikvark-par der kan dannes, men u - og d -kvarken er de mindst energirige (mindst massive) og kan derfor altid dannes med høj sandsynlighed. Det betyder, at det er "gratis" at introducere en gluon i dit feynman-diagram, som enten henfalder til et $u\bar{u}$ - eller $d\bar{d}$ -par.

Nu skal vi sætte vores nylærte egenskaber til prøve med henfald af sammensatte partikler. Som eksempel kigger vi på henfaldet:

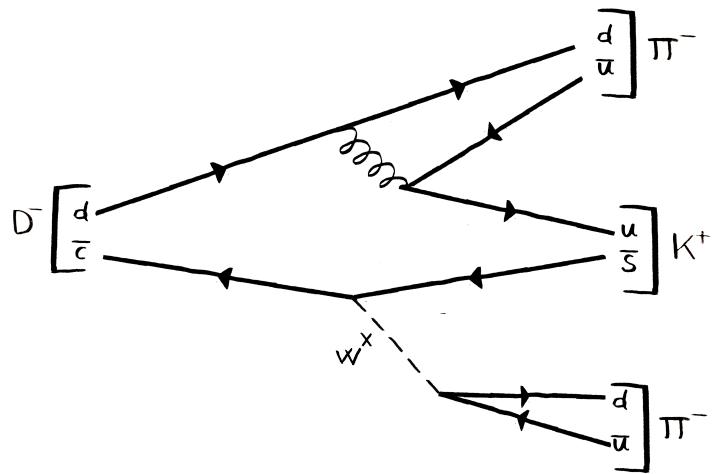
$$D^- \rightarrow K^+ + \pi^- + \pi^-.$$

Dette er henfaldet af D^- -mesonen (kvarksammensætning: $d\bar{c}$) til mesonerne K^+ ($u\bar{s}$), og to π^- ($d\bar{u}$). Et sådant henfald er vist i figur 4.12. Læg mærke til, at man kan sætte klammer om de kvarker, der



Figur 4.11: Reaktion med gluonen g .

hører sammen i en partikel. Udfordringen består i at lave et feynman-diagram som er så overskueligt



Figur 4.12: Henfaldet af D^- .

som muligt (f.eks. uden krydsende pile) og som gør brug af *mindst mulige vertexer og derved virtuelle partikler*. Fysisk set betyder færre vertexer = større sandsynlighed.

- 1) Hvad er ladningen af W -bosonen i figur 4.12?
- 2) Beskriv med ord hvad der sker med hver af kvarkerne i D^- -mesonen.
- 3) Prøv at lave et feynman-diagram for henfaldet: $D^- \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^-$. Hint: start med at finde kvarksammensætningen af partiklerne.

•• Opgave 5: Relativistiske partikler

Partikelacceleratorer gør brug af, at partikler kan opnå kæmpe energi ved at blive accelereret op i nærheden af lysets hastighed c . Hvis en observatør mælte massen af en partikel med hastigheden v , ville han måle en større masse end den massive partiklen har, hvis den er i hvile. Man kan vise, at den massive som observatøren mæler (kaldet den relativistiske masse, m_{rel}) er relateret til partiklens hvilemasse m og hastighed v gennem:

$$m_{\text{rel}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.3)$$

1) I en bestemt accelerator accelereres elektroner ($m = 0,511\text{Mev}/c^2$) op sådan at deres energi bliver $E = 580\text{Mev}$. Brug $E = m_{\text{rel}}c^2$ til at finde elektronernes hastighed i enheder af lysets hastighed c .

2) Hvad er elektronernes relativistiske masse?

•• Opgave 6: Flere feynman-diagrammer

NB: det er en god idé at du har lavet opgave 4 inden denne opgave.

Tegn feynman-diagrammer for følgende henfald. Husk at gøre brug af mindst mulige vertexer.

1) $B^- (b\bar{u}) \rightarrow D^0(c\bar{u}) + \rho^-(d\bar{u})$

2) $\Sigma^-(dds) \rightarrow \Lambda^0(uds) + e^- + \bar{\nu}_e$

3) $\Delta^0(udd) \rightarrow p + \pi^-(d\bar{u})$

4) $D_s^+(c\bar{s}) \rightarrow \phi(s\bar{s}) + \rho^+(u\bar{d})$

5) $\Omega^-(sss) \rightarrow \Xi^-(dss) + \pi^0(u\bar{u})$

Kapitel 5

Klimafysik

Klimafysik er en undergren af det, vi kalder for geofysik. Geofysik er Jordens fysik – den jord, der ligger under os, men også atmosfærens og oceanernes fysik. Klimafysik dækker derfor over den del af meteorologi, oceanografi og iskerneglaciologi, der er altafgørende for at forstå fysikken bag jordens klimasystem. Dette kapitel omhandler iskerneglaciologi, hvor både kemiske og fysiske analyser af is på jorden beskrives, og hvordan dette kan bruges til at forstå fortidens klima. Motivationen for at forstå fortidens klima er jo netop at det er den eneste måde, hvorpå vi kan forstå det nuværende klimasystem samt igangværende forandringer.

5.1 Starten på iskerneforskning

Efter 2. verdenskrig får det biofysiske laboratorium i København del i Marshallhjælpen fra USA, der skal være med til at få landet på føde igen. Laboratoriet besluttede sig for at investere i et massespektrometer, et måleinstrument, der kan separere partikler med forskellig masse og adskille et grundstofs isotoper. Den danske fysiker Willi Dansgaard bliver sat på den opgave at finde ud af, hvad instrumentet helt nøjagtig kan bruges til. Han spekulerer på, hvorvidt regnvand fra byger altid har den samme isotopiske sammensætning, eller om der kan være forskel alt efter temperaturen, da nedbøren faldt. Han beslutter sig for lave et mindre hjemmeeksperiment, hvor han samler nedbør over nogle dage og derefter analyserer dette i massespektrometeret. Han fik et gennembrud ved at finde en sammenhæng mellem forholdet af lette og tungere vandisotoper i nedbøren og temperaturen fra det tidspunkt nedbøren faldt. Senere fik han den idé, at han ville teste dette på iskerner, som netop kunne give ham et godt estimat for en temperaturkurve mange tusinde år tilbage i tiden. Dette skyldes, at isen jo i bund og grund er sammenpresset sne, der er faldet fra år til år. Ved at bore en iskerne ned gennem hele iskappen, får man derved adgang til den årlige nedbør mange tusinde år tilbage i tiden, som ligger i lag under hinanden. Bare tolv år efter hans gennembrud, fik han fingrene i en iskerne fra Grønland, som blev analyseret for isotopforholdet af de stabile vandisotoper. Analysen viste sig at blive en stor succes. Siden dengang er det blevet til mange flere iskerneboringer på Grønland, Antarktis samt andre steder.



Figur 5.1: Willi Dansgaards forskning blev indledte sin forskning med at samle nedbørsprøver i haven i 1952.

5.2 Stabile vandisotoper

I havvand er forholdet mellem almindeligt vand $H_2^{16}O$, og de tungere isotoper $H_2^{18}O$ og $HD^{16}O$, hhv.: 0,9977 : 0,0020 : 0,0003. Som man kan se, er der tale om forholdsvis små forekomster af de tungere isotoper. Forekomsten af $HD^{18}O$ er ikke en noteret, da den kun forekommer i meget små mængder. Forholdet, der er noteret ovenfor, er andelen af tungt vand i standard havvand, der betegnes Standard Mean Ocean Water (SMOW). Skal man tale om mængden af tunge isotoper i en given vandprøve, angiver man ikke denne værdi direkte i antal, men man angiver det i stedet i en δ -værdi.

δ -værdi

Da et givet antal tunge isotoper ikke i sig selv siger noget om vandets isotopsammensætning, er det nødvendigt at sammenholde tallet med enten SMOW eller VSMOW (Vienna Standard Mean Ocean Water), en mere officiel standard. Da denne relation stort set altid vil være nødvendig, er det normalt at oplyse en vis vandmængdes isotopforhold enten som $\delta^{18}O$ eller δD . Denne værdi udregnes ud fra formlen:

$$\delta = \frac{R_i - R_{st}}{R_{st}} \cdot 1000 \text{ ‰} = \left(\frac{R_i}{R_{st}} - 1 \right) \cdot 1000 \text{ ‰} \quad (5.1)$$

hvor R_i er det relative isotopindhold i en vandprøve (for $\delta^{18}O$ er det $R = n^{18}O/n^{16}O$), og R_{st} er det relative isotopindhold i en vandstandard (f.eks. VSMOW). Deltaværdien angives i promille.

Fraktionering

Tager man en afmålt mængde vanddamp med n_0 mol ”let” vand, og n_j mol ”tungt” vand, vil forholdet i vanddampen være $R_v = n_j/n_0$ (v for vapour). Lader man noget af denne homogene vanddamp kondensere, og betragter den mængde vand, der forlader skyen i form af nedbør, vil man grundet Rayleigh-destillationen få et nyt forhold af tunge isotoper kaldet R_p (p for precipitation). Denne forskydning fra R_v kaldes fraktionering.

Efter delvis kondensering vil det nye isotopforhold, R_p have følgende sammenhæng med R_v :

$$R_p = R_v \cdot \alpha \Leftrightarrow 1 + \delta_p = \alpha \cdot (\delta_v + 1) \quad (5.2)$$

hvor α kaldes fraktioneringsfaktoren, der sædvanligvis er et tal lidt over 1. Over spændet af temperaturer forekommende på Jorden, varierer α fra omkring 1,008 til 1,025 for fraktionering af ^{18}O , og 1,07 til 1,25 for deuterium. Fraktioneringsfaktoren (α) afhænger desuden også af, om kondensatet i skyen samles som vanddråber eller iskristaller. Er der tale om is, vil fraktioneringssfaktoren stige med omkring 10 %, for ^{18}O og 30 % for deuterium. Under kondensation er forholdet mellem ændringen i mængden af tungt (dn_j) og almindeligt (dn_o) vand, der forlader skyen:

$$dn_j = R_p \cdot dn_o = \alpha \cdot R_v \cdot dn_o \quad (5.3)$$

Da $R_v = n_j/n_o$ opnås følgende formel:

$$\frac{dn_j}{n_j} = \alpha \frac{dn_o}{n_o} \quad (5.4)$$

At α bliver større ved lave temperaturer medfører, at der ved lave temperaturer sker et større relativt frafald af tunge isotoper fra vanddamp end ved varmere omstændigheder, såfremt alle øvrige faktorer er de samme.

Rayleigh-destillation

Når det fordampede havvand transporteres fra subtropiske områder til Arktis, vil det gennemgå en nedkøling, der forårsages af en adiabatisk ekspansion, når den varme luft stiger op til områder med lavere tryk. Når temperaturen når dugpunktet, altså punktet hvor luftfugtigheden når 100%, kondenserer vanddampen for at opfylde den termodynamiske ligevægt, og dette vil forsage en form for nedbør. Dette forekommer kun ved antagelsen om, at vanddampen forlader skyen i det øjeblik, den kondenserer. En ændring i temperaturen har derfor en stor betydning for kondensering og luftfugtighed, da en stigning i eller stabilisering af temperaturen vil stoppe kondenseringen, da luftfugtigheden vil falde. Vi kan betragte en form for ”pakke af luft” af det fordampede havvand. Denne pakke vil ”rejse” i en bane til nordlige områder og kontinenter, og der vil falde nedbør fra denne luftmasse, som vanddampen undervejs kondenserer. De tungere vandisotoper kondenserer hurtigere end de lettere, grundet forskellen i damptrykket (vandets partialtryk) for de forskellige isotoper samt masseforskellen, og derfor vil koncentrationen af de tungere vandisotoper H_2^{18}O og HD^{16}O undervejs falde i forhold til de lettere vandisotoper H_2^{16}O . Forholdet mellem koncentrationen af de tungere- og lettere vandisotoper i løbet af kondenseringen i denne bane, kan beskrives ved en model kaldet Rayleigh-destillationrelationen.

δO^{18} og overfladetemperaturen

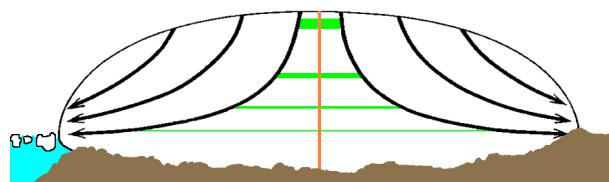
Dansgaard fandt i 1973 en sammenhæng mellem δO^{18} -værdier og den årlige middel overfladetemperatur ved borestedet, som kan beskrives matematisk ved:

$$\delta\text{O}^{18} = 0,62T - 15,25\% \quad (5.5)$$

hvor T er den årlige middel overfladetemperatur i grader Celsius.

5.3 Is på dynamisk skala

Når man betragter Grønland på et kort eller satellitbillede, forekommer det måske oplagt at se isen, som udgør størstedelen af Grønland, som noget statisk og stabilt over tid. I virkeligheden minder gletsjere og iskapper dog mere om en brøddej på en tiltet bageplade, så man kan altså tale om at isen deformeres og kryber, også selvom grundfjeldet under isen ikke engang hælder. Igen kan man bruge brøddejs-analogien, da en dej vil flyde ud, hvis man hælder den direkte fra skålen og ud på bordet. Isen på Grønland vil, nøjagtig som brøddejen, være påvirket af tyngdekraften. På grund af tyngdekraften opstår der spændinger inde i isen, og det er netop afvigelser i disse spændinger, der gør formændringer mulige – altså deformering. På en iskappe som Grønland vil der hele tiden blive tilført et nyt lag sne på overfladen, og den nye tilførte masse vil derfor på grund af tyngdekraften blive trukket ned mod grundfjeldet, der gør, at lagene af sne under vil blive trykket sammen vertikalt og trukket ud horisontalt. På samme måde som optælling af årringene på et træ, vil man derfor kunne optælle alderen af disse lag af sne oven på hinanden, som på grund af trykket fra det overliggende sne vil blive omdannet til is. Dog er dette ikke så simpelt, da Grønland er 3 km er tyk på midten, og årlagene derfor bliver utroligt tynde og svære at skelne fra hinanden med det blotte øje. Derfor kan man ved at analysere de stabile isotoper for en hel iskerne få en kurve over δO^{18} -værdierne, hvor man kan se variationer i værdierne for nedbøren fra henholdsvis sommer og vinter grundet temperaturforskellen, og derved kan man tælle årlagene. Som det ses på figuren herunder vil isen flyde ud mod siderne, og derfor kun nedad på midten af den idealiserede iskappe, hvilket ligger til grund for, at iskerne bores tæt på midten af iskappen, som også kaldes for isdeleren. Der opstilles teoretiske modeller for isens flydning ud fra observationer samt forståelse af generel flydning, så man derved kan regne på hvor sneen eller isen længere nede stammer fra, og kan ligesom ”spole tiden tilbage” skridtvist for at forstå hvornår og under hvilke forhold sneen faldt. Figuren viser dog en meget idealiseret model, da man i mere komplicerede modeller tager hensyn til at bundtopografien, smelting, dræningssystemer af smeltevand inde i gletsjeren og et utal af andre faktorer, der påvirker flydningen af isen.

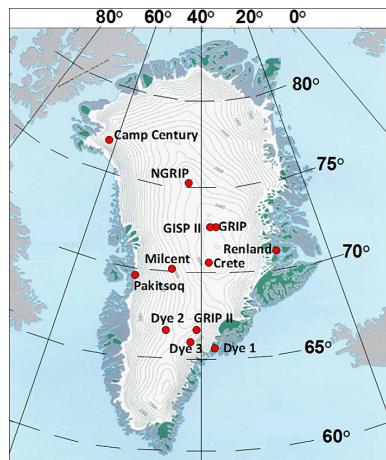


Figur 5.2: Simpel flydemodel for en idealiseret gletsjer. De sorte linjer angiver isens flydning, og de grønne linjer viser årlagene.

5.4 Iskerneboringer på Grønland

Den første lange iskerne der blev boret hele vejen ned til grundfjeldet på Grønland var foretaget af den amerikanske hær på Camp Century-basen i årene 1963-66. Netop denne iskerne var den første Willi Dansgaard fik fingrene i og testede sine isotopmålinger på. Ved analysen af kernen fandt man oplysninger om isotopsammensætningen og derved temperaturen helt tilbage til den foregående istid

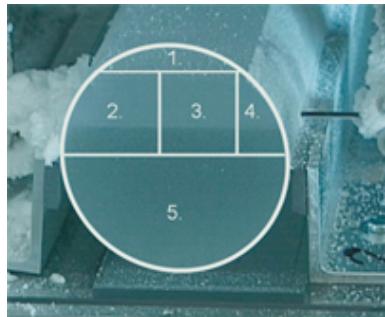
kaldet Weichsel (115.000-9.600 f.v.t). Efter dette gennembrud begyndte Willi Dansgaard og hans kollegaer selv at udvikle boreteknikker, der kunne gøre det muligt at foretage nye iskerneboringer overalt på Grønland. I dag bliver dette videreført på Center for Is og Klima, der var hjemsted for Dansgaards forskning. Det er blevet til mange iskerneboringer siden 1960'erne, og det er nu ikke længere kun stabile isotoper man er interesseret i, men mange flere proxier, der kan give mere information omkring fortidens klima. For alle borestederne er det gældende, at man ønsker at få endnu ældre is med op, så man kan forstå klimaet endnu længere tilbage. North Greenland Ice core Project (NGRIP) er navnet på en iskerne boret i det nordlige Grønland i årene 1995 til 2004, og er endnu den iskerne, hvor man har fundet den ældste is på Grønland, som er dateret til en alder omkring 120.000 år.



Figur 5.3: Kort over Grønland, hvor borestederne for de forskellige iskerner er markeret.

5.5 Analyse af iskerner

Efter iskernerne er blevet taget op fra borehullet, bliver de skåret i mindre stykker af 55 cm på langs, og hvert stykke bliver kørt gennem linescanneren for at dokumentere synlige lag i isen. Efterfølgende bliver hvert af stykkerne opdelt i fem stykker, som er vist på figuren nedenfor og der bliver analyseret på forskellig vis. Stykke 1 bruges til at analysere isens fysiske egenskaber såsom krystalstruktur. Stykke 2 pakkes og sendes til målinger i gaslaboratoriet hjemme på Center for Is og Klima. Stykke 3 overføres direkte til CFA-laboratoriet, hvor isen bliver smeltet, så der kan foretages en kemisk analyse af urenhederne, der er tilstede i isen. Stykke 4 bruges til at analysere forholdet i de stabile isotoper, som netop er en proxy for fortidens overfladetemperatur ved borestedet. Stykke 5 bruges til at lave målinger af isens elektriske ledningsevne. Hvorvidt isen kan lede strøm siger noget om isens surhed, og ledningsevnen er derfor et mål for syreindhold, der kan skyldes f.eks. vulkanudbrud, der overfører store mængder af sulfatsyre til sneen på Grønland. Denne type målinger kaldes ECM-målinger (electrical conductivity measurement). Stykke 4 pakkes herefter ned, og bliver lagret som en slags reserve i en kæmpe stor fryser, der er indstillet på -25 grader celsius.



Figur 5.4: Tværsnit af iskernen og dens opdelinger for forskellige analyser.

Målinger af stabile isotoper

Isotopmålingerne foretages som oftest i en opløsning på 5 cm, hvilket svarer til, at mere end 60.000 prøver fra en ca. 3 km lang iskerne skal pakkes i små nummererede poser og sendes til isotoplaboratoriet, hvor målingerne foretages i enten et massespektrometer eller ved hjælp af laserabsorption.

Ved målinger, hvor man bruger af et massespektrometer, bruges et teknik kaldet »Ligevægtsteknikken«, hvor man smelter hver prøve i små beholdere, pumper kuldioxid (CO_2) gas ind i beholderen og bringer gassen i isotopisk ligevægt med vandet, så man kan måle $\text{O}^{18}/\text{O}^{16}$ -forholdet i gassen ved hjælp af massespektrometeret.

Gasserne fanget i isen

Isen på Grønland er som tidligere nævnt dannet ved at sneen er blevet sammenpresset tilstrækkeligt på grund af trykket fra den overliggende sne. I løbet af denne proces vil luftbobler, bestående af den atmosfæriske luft, blive fanget i isen. Den atmosfæriske luft fanget i luftboblerne er derfor stadig fanget i når man tager iskernerne op, og ved at smelte disse kan man derfor udvinde gassen og analysere atmosfærrens sammensætning flere hundre tusinde år tilbage i tiden. Ved disse analyser kan man både måle koncentrationer af for eksempel drivhusgasser, men også opnå viden omkring processer, der fører til ændringer i de atmosfæriske koncentrationer ved hjælp af isotopforhold.

Urenheder i isen

Gletsjeris er utroligt rent i forhold til det vand, der kommer ud af vores vandhaner her i landet. Dog forekommer der stadig urenheder i isen, men i meget små mængder på typisk kun milliontedele af isprøvens størrelse. Urenhederne i isen har mange forskellige kilder, som blandt andet kan være syre fra vulkanudbrud, støv fra kontinenterne, salte fra havets overflade, gasser udledt til atmosfæren på grund af biologisk aktivitet blandt mange andre. Fælles for de nævnte eksempler er, at alle urenhederne transportereres til isen via atmosfæren, og nogle er endda omdannet i atmosfæren. Når man skal foretage en kemisk analyse af de utroligt små mængder af urenheder i isen, må man da sørge for, at isen er så ren så mulig, da man ellers kun måler på den forurening, man selv laver under behandling af isen. Grunden til, at det er det midterste stykke af iskernen bliver brugt til dette (stykke 3), er fordi det er

den mindst forurenede del af isen - så lidt mulig kontakt med omgivelser som muligt. Analysen af isen bliver foretaget ved at stykkerne bliver smeltet kontinuerligt på en smelteenhed, og kun den inderste, og derved den mindst forurenede del af isen, bliver sendt via plastiskslanger igennem et Continuous Flow Analysis system (CFA), hvor koncentrationer af forskellige ioner og kationer såsom NH_4^+ , Ca^{2+} , NO_3^- , Na^+ og SO_4^{2-} bliver målt ved for eksempel spektroskopi.

Urenhederne i isen bidrager på forskellig vis til analysen af iskernen og forståelsen af fortidens klima. Målinger af nogle urenheder såsom Ca^{2+} , der bruges til at identificere årlag. Målinger af SO_4^{2-} kan vise når der har været et vulkanudbrud i nærheden. Dette kan være med til at lave en stratigrafisk tidshorisont for iskernen, ved at man sporer oprindelsesvulkanen og finder historiske kilder, der giver et mere nøjagtigt tidspunkt for vulkanudbruddet. Generelt fortæller typen samt mængden af urenheder både noget om naturlige og astropogene kilder, og hvordan atmosfæren har virket som transportsystem mange hundrede tusinde år tilbage i tiden.

Bilag A

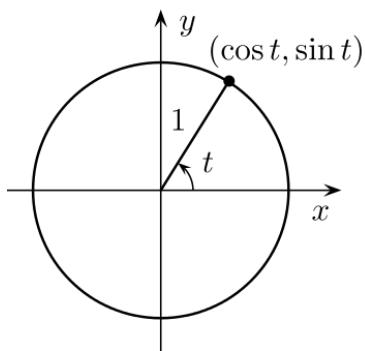
Matematik

Her vil vi forklare noget af den matematik, man skal bruge for at regne opgaverne. Det meste vil alle møde i løbet af gymnasietiden, men da jeres – deltagernes – faglige forudsætning er vidt forskellige, vil det være nyt for nogen og en genopfriskning for andre.

A.1 Trigonometriske funktioner

På figur A.1 ses en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius 1. En sådan cirkel kaldes enhedscirklen. Den nemmeste måde at beskrive punkter på enhedscirklen er ud fra vinkel t med x -aksen. Vi definerer de trigonometriske funktioner *cosinus* og *sinus* til vinklen t , så punktet (x, y) på enhedscirklen svarende til vinklen t er

$$\begin{aligned}\cos(t) &= x \\ \sin(t) &= y\end{aligned}$$



Figur A.1: Enhedscirklen.

Da omkredsen af enhedscirklen er 2π er det oplagt at angive vinklen t i radianer i stedet for grader. I radianer går der 2π på en hel cirkel, hvorimod der i grader går 360° . Men har man da en vinkel t , vil

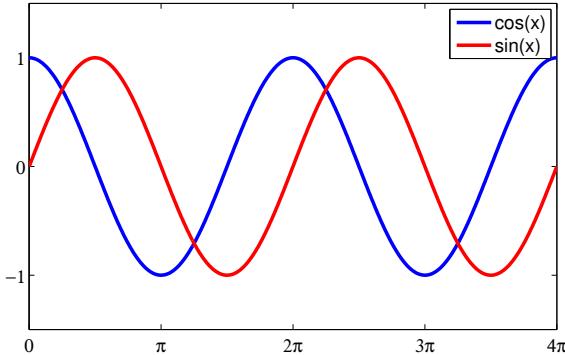
det ikke ændre noget at lægge 2π til vinklen, for dette svarer jo til at gå en hel gang rundt i cirklen, hvorefter man er tilbage, hvor man startede. Man kan også gå den modsatte vej i cirklen, hvorfor det at trække 2π fra vinklen heller ikke ændrer noget. Dette kan man gøre lige så mange gange man vil, så for en vilkårlig vinkel t gælder, at

$$t + n2\pi = t, \text{ hvor } n \text{ er et helt tal.} \quad (\text{A.1})$$

Indsættes dette i de trigonometriske funktioner ser vi, at

$$\cos(t) = \cos(t + n2\pi) \text{ og } \sin(t) = \sin(t + n2\pi), \quad (\text{A.2})$$

hvilket igen udtrykker, at uendeligt mange vinkler kan bruges til at udtrykke det samme punkt på enhedscirklen. Hvis vi tænker på $\cos(t)$ og $\sin(t)$ som funktioner af variablen t betyder (A.2), at graferne gentager sig selv, hver gang vi lægger $n2\pi$ til argumentet, hvilket man også kan se på figur A.2. Man siger, at $\cos(t)$ og $\sin(t)$ er *periodiske* med en periode på 2π . Prøv at følg punktet på figur A.1 hele vejen rundt på enhedscirklen, og se, at graferne på figur A.2 stemmer overens med x - og y -koordinaten for punktet.



Figur A.2: Graferne for de trigonometriske funktioner.

Fra figur A.1 kan vi se, at nogle simple punkter beskrevet vha. de trigonometriske funktioner er

$$\begin{aligned} (1, 0) &= (\cos(0), \sin(0)) \\ (0, 1) &= (\cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})) \\ (-1, 0) &= (\cos(\pi), \sin(\pi)) \\ (0, -1) &= (\cos(\frac{3\pi}{2}), \sin(\frac{3\pi}{2})) \end{aligned}$$

Ved at benytte (A.2) med $t = 0$, finder vi, at

$$\cos(n2\pi) = 1 \text{ og } \sin(n2\pi) = 0 \text{ for alle heltal } n.$$

Man kan vise mange nyttige regneregler for $\cos(t)$ og $\sin(t)$, men det vil vi ikke gå ind på her.

A.2 Vektorer

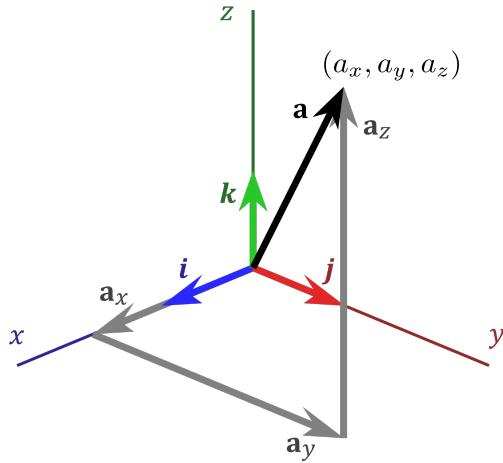
Vores verden er tre-dimensionel, så for at kunne beskrive fysiske fænomener i vores verden, er det vigtigt at forstå matematik, der foregår i tre dimensioner. Man kan tænke på et tal (også kaldet en *skalar*) som et punkt på en x -akse, dvs. et punkt i én dimension. Tilføjer man en ny akse (y -aksen), der er vinkelret på den første, kan man beskrive punkter i to dimensioner. Hertil skal man bruge to tal, én til at angive x -værdien og én til at angive y -værdien, og punktet betegnes (x, y) . Dette burde læseren være helt bekendt med. Herfra er det let at gå til tre dimensioner, vi tilføjer en z -akse, som er vinkelret på x -og y -aksen, og punkter (x, y, z) i tre dimensioner beskrives nu vha. tre tal.

Lad os i første omgang starte med at definere en *vektor* \mathbf{a} i tre dimensioner som en samling af tre tal a_x, a_y og a_z samlet i en søjle¹:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix},$$

Lad (x_0, y_0, z_0) være et punkt i det tre-dimensionelle rum. Vi vil repræsentere vektoren \mathbf{a} som pilen, der peger fra (x_0, y_0, z_0) til $(x_0 + a_x, y_0 + a_y, z_0 + a_z)$. Hvis vi vælger vores startpunkt til at være origo, dvs. vælger $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, så tegner vi vektoren \mathbf{a} som pilen, der peger fra origo til (a_x, a_y, a_z) som vist på figur A.3. Men vi kan også vælge at tegne \mathbf{a} mellem to andre punkter, så længe *retningen* og *længden* er de samme. Ved at bruge Pythagoras' sætning kan man vise (prøv evt. selv), at længden af vektoren \mathbf{a} , hvilket vi skriver som $|\mathbf{a}|$, er givet som kvadratroden af summen af komponenterne i anden:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (\text{A.3})$$



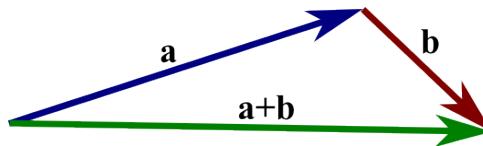
Figur A.3: En vektor i tre dimensioner.

¹Oftest ser man også vektorer angivet med en pil \vec{a} , og når man skriver vektorer i hånden vil man altid lave en pil.

Før vi forklarer resten af figur A.3 vil vi lige definere, hvordan vi adderer to vektorer og multiplicerer en vektor med en skalar. Har vi to vektorer **a** og **b** adderer vi dem ved at addere komponenterne i hver af de tre indgang hver for sig:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Rent grafisk kan vi forestille os at flytte startpunktet for vektoren **b** hen til endepunktet for vektoren **a**. Da er **a + b** den vektor, der går fra startpunktet for **a** til endepunktet for **b** som vist på figur A.4.



Figur A.4: Addition af to vektorer.

Vi ganger en skalar k på en vektor **a** ved at gange k på hver indgang:

$$k\mathbf{a} = k \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Dette ændrer ikke retningen af vektoren, men længden ganges med k (vi *skalerer* så at sige vektoren med en faktor k).

Lad os nu prøve at forstå betydningen af komponenterne i en vektor. Til dette definerer vi *basisvektorerne* **i**, **j** og **k** givet ved

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hvis vi vælger origo som startpunktet for basisvektorerne, ligger de som vist på figur A.3 ud af hver sin akse med længde 1. Bemærk, at basisvektorerne er vinkelrette på hinanden. Vi siger, at de udspænder det tre-dimensionelle koordinatsystem. Bemærk nu, at vi kan bruge (A.4) og (A.5) til at skrive **a** som

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = a_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Med andre ord har vi splittet vektoren **a** op i en sum af tre dele, én for hver af x -, y - og z -retningen. Hvis vi kalder den del af **a**, der peger i x -retningen for $\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{i}$ og såfremdeles for y og z , så kan vi skrive **a** som en sum af tre på hinanden vinkelrette vektorer, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$. Dette er også vist på figur A.3. Prøv at brug vektoraddition som vist på figur A.4 til at overbevise dig selv om, at $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$. I fysik kan man ofte gøre sit liv lettere ved at opsplitte sine vektorer i en sum af vinkelrette dele, idet det ofte viser sig, at nogle af er nul, hvis man vælger sit koordinatsystem klogt.

Skalarproduktet

Almindelige skalarer kan man addere og multiplicere, og vi har allerede set, hvordan vi adderer to vektorer. Man kan med rette spørge, om man også kan definere en form for multiplikation af to vektorer. Det viser sig, at man kan gøre det på to måder. Den første måde kaldes *skalarproduktet* mellem to vektorer **a** og **b** fordi det giver en skalar (altså et tal):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \quad (\text{A.6})$$

Fordi man skriver skalarproduktet med en prik mellem vektorerne, kaldes det også for prikproduktet. Modsat et gangetegn mellem to skalarer som man ofte ikke skriver, så skal man altid skrive prikken i skalarproduktet. Bemærk, at skalarproduktet er symmetrisk i den forstand, at hvis man bytter om på **a** og **b**, så ændrer det ikke på skalarproduktet mellem dem, dvs. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. Hvis du ikke kan se det direkte fra (A.6), så prøv med et eksempel med to konkrete vektorer. Bemærk også, at længden af en vektor **a** givet ved (A.3) er kvadratroden af skalarproduktet af **a** med sig selv, dvs. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$. Prøv at skriv det ud, hvis du ikke kan se det direkte.

Den vigtigste egenskab ved skalarproduktet er, at det kan afgøre, om to vektorer er *ortogonale* (også kaldet vinkelrette). Der gælder nemlig, at **a** og **b** er ortogonale på hinanden hvis og kun hvis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Du kan selv tjekke, at **i**, **j** og **k** virkelig er ortogonale ved at beregne $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$ og $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}$.

Vektorproduktet

Det andet produkt, man kan definere mellem to vektorer, kaldes *vektorproduktet* fordi det giver en vektor:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} . \quad (\text{A.7})$$

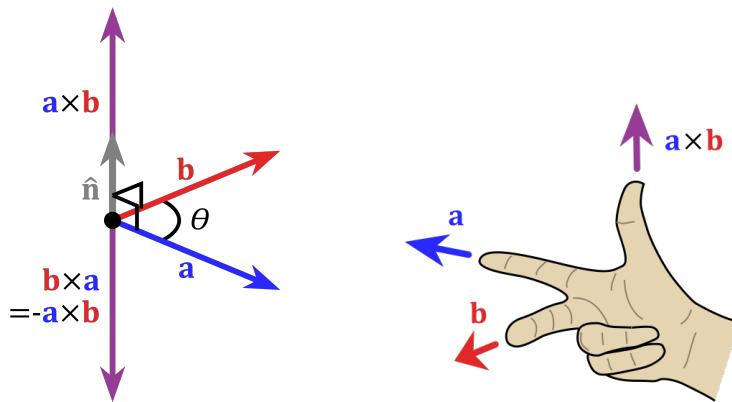
Fordi man skriver vektorproduktet med et kryds mellem vektorerne, kaldes det også for krydsproduktet. Bemærk, at vektorproduktet (modsat skalarproduktet) er antisymmetrisk i den forstand, at hvis man bytter om på **a** og **b**, så skifter vektorproduktet fortegn i hver indgang, dvs. $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Igen kan det hjælpe med et konkret eksempel, hvis du ikke kan se det direkte fra (A.7). Da $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er en vektor, kan vi tegne den som en pil i rummet, se figur A.5.

Vi kan nemt vise, at den er ortogonal på både **a** og **b** ved at beregne skalarproduktet:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \\ &= a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z) + a_z(a_x b_y - a_y b_x) = 0 . \end{aligned}$$

En lignende beregning viser, at $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$. Man kan også vise, at længden af vektorproduktet er givet ved

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta ,$$



Figur A.5: Vektorproduktet mellem to vektorer og højrehåndsreglen.

hvor θ er vinklen mellem \mathbf{a} og \mathbf{b} . Bemærk, at når \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale, er $\sin \theta = 1$, hvilket ofte er tilfældet i fysik. Når \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle, er $\sin \theta = 0$ og vektorproduktet bliver en vektor med længde 0 (den såkaldte *nulvektor* med 0 på alle tre indgange, der heller ikke har en retning).

Vi kender nu længden af $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ og ved, at den er orthogonal på \mathbf{a} og \mathbf{b} , så man skulle tro, at dette afgjorde, hvordan vektoren ser ud. Men der er stadig en tvetydighed, for man kan nemlig tegne to vektorer, der opfylder disse krav! Forestil dig, at du har tegnet en vektor med den rigtige længde, der er orthogonal på \mathbf{a} og \mathbf{b} . Da er det let at se, at vektoren med modsat fortegn også er en mulig kandidat for $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Så hvilken vektor er den rigtige? Svaret er den, der opfylder *højrehåndsreglen*, vist på figur A.5: Tag din højre hånd, læg pegefingeren langs \mathbf{a} og langefingeren langs \mathbf{b} , så peger $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ langs tommelfingeren. (Der findes flere varianter af denne regel, der alle giver det samme svar.) Du kan nemt bruge definitionen (A.7) til at vise, at $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ og tjekke at højrehåndsreglen giver det samme svar for retningen. Tjek også, at $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ som forventet idet vektorproduktet er antisymmetrisk.

Da vi mest skal lave vektorprodukter mellem *ortogonale* vektorer, opsummerer vi reglen for at lave dette: Lad \mathbf{a} ligge langs din højre pegefinger og lad \mathbf{b} ligge langs højre langefinger, så har vektorproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ retning langs din højre tommelfinger (orthogonal på både \mathbf{a} og \mathbf{b}) og har længde $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$.

Vektorfelter

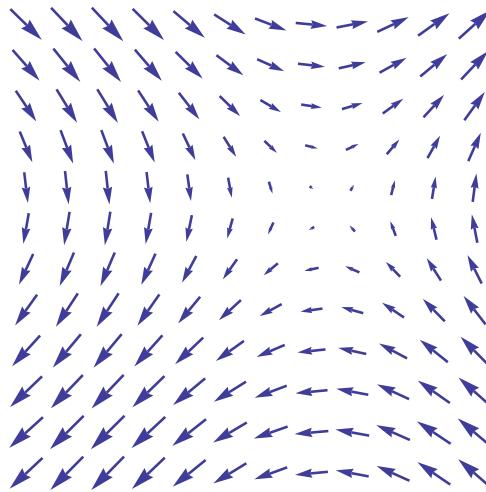
Til sidst vil vi nævne, hvad et *vektorfelt* er. Forestil dig, at vi til ethvert punkt i rummet knytter en vektor. Samlingen af alle disse (uendeligt mange) vektorer udgør et vektorfelt. Da vektoren knyttet til et bestemt punkt (x, y, z) kun afhænger af x , y og z , kan vi tænke på vektorfeltet som en funktion af disse koordinater: $\mathbf{F}(x, y, z)$. Hvis du kommer med et sæt koordinater x , y og z , er $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektoren knyttet til disse koordinater. Når man skal illustrere vektorfelter tegner man blot vektorerne for nogle udvalgt koordinater. På figur A.6 kan du se en tegning af et simpelt vektorfelt, som kun afhænger af to koordinater:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} \sin y \\ \sin x \end{bmatrix} .$$

Indsætter vi f.eks. $x = 1$ og $y = -2$ får vi vektoren for dette punkt:

$$\mathbf{F}(1, -2) = \begin{bmatrix} \sin(-2) \\ \sin(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.909 \\ 0.841 \end{bmatrix},$$

så den peger skråt opad mod venstre. Hvor er den ca. på tegningen? Hvad er $\mathbf{F}(0, 0)$? Kan du finde den på tegningen?



Figur A.6: Et vektorfelt.

Vektorfelter spiller en stor rolle i fysikken. F.eks. kan vi tænke på vinden som et vektorfelt: I ethvert punkt har vinden en retning og en størrelse, dvs. vi kan tænke på vinden i et bestemt punkt som en vektor. Dette vind-vektorfelt afhænger ikke kun af sted-koordinater, men også af tiden. Et andet eksempel er hastigheden af en væske. Hvis du smider en korkprop i en flod, vil den blive taget af strømmen. Retningen og farten vil afhænge af, hvor korkproppen befinder sig, og dette illustrerer igen et vektorfelt. På campen skal vi først og fremmest bruge vektorfelter, fordi *elektriske* og *magnetiske* felter er vektorfelter. Læs mere herom i kapitel 2.

