# Fysik Camp 2018

*Faglige:*

| | |
|---|---|
| Christoffer Hansen (ansv.) | ch@unf.dk |
| Sofie Bruun | shb@unf.dk |
| Josefine Bjørndal Robl | jr@unf.dk |
| Jacob Osman Hjortlund | jo@unf.dk |
| Rasmus Berg Jensen | rbe@unf.dk |
| Esben Skovhus Ditlefsen | esd@unf.dk |
| Jeppe Sinkbæk Thomsen | jet@unf.dk |
| Emil Hoffmann Kozuch | ehk@unf.dk |

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

**Kolofon**

*Opgaver til UNF Fysik Camp* 2018

Opgaverne er udvalgt og formuleret af Sofie Bruun, Josefine Bjørndal Robl, Jacob Osman, Rasmus Berg Jensen, Esben Skovhus Ditlefsen, Jeppe Sinkbæk Thomsen, Emil Hoffmann Kozuch og Christoffer Hansen. Opgaverne er trykt i juli 2018 og teksten er copyright ©2018 af UNF og forfatterne. Gengivelse med kildehenvisning tilladt.
Layout: Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen.
Ansvarlig: Christoffer Hansen.

# Indholdsfortegnelse

# Del I

# Opgaver

# Kapitel 1

# Analytisk Mekanik

## Koordinatsystemer

**Opgave 1: • Gode koordinatsystemer**
At få valgt et smart koordinatsystem er essentielt i analytisk mekanik.

**1**) Beskriv hvad der kendetegner et smart valg af koordinatsystem?

**2**) Hvorfor kan det smarte koordinatsystem identificeres ud fra symmetri?

**3**) Hvilket koordinatsystem er smartes for et problem med:
a) Plansymmetri.
b) Cylindrisk symmetri.
c) Sfærisk symmetri.
Forklar hvorfor?

**Opgave 2: • Generaliserede koordinater**
Betragt et objekt der er fanget på en ring med centrum i origo, $(0, 0)$, og radius $R$.

**1**) Definer et sæt polære koordinater $(r, \varphi)$, og skriv de kartesiske koordinater op med disse.

**2**) Hvor mange af de kartesiske koordinater ændres, når objektet bevæger sig på ringen?

**3**) Hvor mange af de polære koordinater ændres, når objektet bevæger sig på ringen?

**4**) Hvor mange koordinater skal der bruges for at beskrive objektets bevægelse?

**5**) Hvad er det smarte koordinatvalg?

**Opgave 3: •• Brint**
Hydrogenisotopen $^1$H består af en proton med massen $m_p$ og ladningen $e$ (elementarladningen), samt en elektron med massen $m_e$ og ladningen $-e$. Fra elektrostatik[1] oplyses det, at kraften fra en punktladning $Q_1$ med stedvektor $\vec{r}_1$ på en punktladning $Q_2$ med stedvektor $\vec{r}_2$ er

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \tag{1.1}$$

hvor $\varepsilon_0$ er en konstant, der kaldes vakuumpermittiviteten. Punktladninger er ladninger uden udstrækning, hvorfor de eksisterer i ét punkt i rummet og kun det punkt. Elektroner og protoner er så små, at de kan beskrives som punktladninger, hvorfor ligning (1.1) kan benyttes.

**1**) Skitser situationen og indtegn systemets massemidtpunkt. Hint: Se formel (1.2) for definitionen af massemidtpunktet (på engelsk center of mass, forkortes CM).

**2**) Hvad betyder $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ fysisk?

**3**) Indtegn kræfterne på begge ladninger i jeres

[1] Elektrostatik er studiet af elektriske felter dannet af stillestående (statiske) elektriske ladninger.

tegning.

**4**) Hvor er det smartest at placere origo?

Massemidtpunktet for et tolegemesystem er defineret som

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2} . \tag{1.2}$$

**5**) Hvad bliver $\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{CM}}$ for vores system under approksimationen at $m_p \gg m_e$?

**6**) Opskriv kraften på elektronen i dette koordinatsystem.

## Energi

**Opgave 4: • Energibevarelse**
Energi er altid bevaret. Den kan omdannes mellem forskellige former, men den forsvinder aldrig.

**1**) Opskriv nogle af de typer af energi, som du kan komme på.

**2**) Forklar i egne ord hvad en konservativ kraft er.

**3**) Summen af kinetisk og potentiel energi kaldes mekanisk energi, og er bevaret i et system, så længe det kun er påvirket af konservative kræfter. Angiv tre eksempler på systemer, hvor den mekanisk energi er bevaret, og tre hvor den ikke er.

**4**) Angiv for hvert eksempel hvor den mekaniske energi ikke er bevaret, hvad årsagen er til dette.

**Opgave 5: • Frit fald**
Et legeme med massen $m$ frigives fra hvile i en afstand $h$ over Jordens overflade. Antag at tyngdeaccelerationen er konstant og har værdien $g$.

**1**) Tegn et kraftdiagram for systemet.

**2**) Hvorfor er den mekaniske energi ikke bevaret?

**3**) Negliger nu den kraft der ødelægger energibevarelsen, og bestem legemets fart i det øjeblik det rammer Jorden.

**4**) Diskuter hvor god en antagelse det er at negligere den "problematiske" kraft, og opstil et muligt kriterie for, at det er en god antagelse negligere denne.

**Opgave 6: • Kollisioner**
Når to legemer kolliderer kan det inddeles i to grupper: elastiske og uelastiske kollisioner. Under kollisionen påvirker legemerne hinanden med en eller flere kræfter, og elastiske kollisioner defineres som kollisioner, hvor disse kræfter udelukkende er konservative. Der ses bort fra eventuelle ydre kræfter.

**1**) Hvorfor er størrelsen af den samlede kraft fra legeme 1 på legeme 2, den samme som den samlede kraft fra legeme 2 på legeme 1?

**2**) I hvilken retning går kraften på legeme 2 i forhold til kraften på legeme 1?

**3**) Benyt Newtons anden lov til at vise, at systemets totale impuls er bevaret.

**4**) Er den kinetiske energi bevaret for en

a) Elastisk kollision?

b) Uelastisk kollision?

**Opgave 7: •• Bevægelse omkring ligevægt**
Det antages, at en masse $m$ er påvirket af den sfærisk symmetriske[2] potentielle energi

$$V(r) = V_0\left(\frac{r}{R} + \lambda^2\frac{R}{r}\right) ,$$

hvor $V_0$, $R$, $\lambda$ alle er positive konstanter. Massens bevægelse omkring ligevægtspunktet ønskes nu

[2] Sfærisk symmetri i den potentielle energi betyder her, at det kun er massens afstand til nulpunktet, der betyder noget for den potentielle energi, men ikke hvor på sfæren med radius $r$ den er.

undersøgt.

**1**) Bestem den afledede af den potentielle energi $V(r)$, i forhold til $r$. Dvs. $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$.

**2**) Bestem afstanden $r_0$, hvor $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r = 0$.

**3**) Find den andenafledede $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}r^2$.

**4**) Argumenter for at $r_0$ er det punkt, hvor den potentielle energi er mindst, altså at potentialet stiger, hvis $r$ afviger fra $r_0$.

**5**) Nu defineres $x$ som afstanden, regnet med fortegn, fra $r_0$, det vil sige $x = r - r_0$. Udtryk den potentielle energi ved $x$, altså $V(x)$.

**6**) Vis at den potentielle energi, $V(x)$, har formen for en harmonisk oscillator (periodisk svingning) for små $x$.
Hint: Vis at en Taylorudvikling til anden orden giver en potentiel energi på formen

$$V(x) = c + \frac{1}{2}kx^2,$$

hvor $c$ og $k$ er konstanter.

**7**) Bestemt vinkelfrekvensen for massens oscillationer under denne approksimation.
Hint: Under denne approksimation opfører systemet sig som en harmonisk oscillator analogt til klodsen på fjederen i afsnit 1.1 i kompendiet.

**Opgave 8: ••• (Næsten) alt er en harmonisk oscillator**

En harmonisk oscillator har potentiel energi på formen $f(x) = c + \frac{1}{2}kx^2$, hvor $c$ og $k$ er konstanter. Betragt nu et arbitrært, endimensionelt system med potentiel energi $V(x)$, hvor $x$ er det generaliserede koordinat. Det vil sige, at $V(x)$ er en ukendt funktion, vilkårlig funktion[3].

**1**) Med henvisning til tabel A.1 i kompendiet, opskriv Taylorpolynomiet til 2. orden for $V$ omkring punktet $x = 0$.

**2**) Hvad er kriteriet for, at systemet til 2. orden er en harmonisk oscillator?

**3**) Giv eksempler på funktioner der opfylder kriteriet.
I eksemplerne er det gentagende gange benyttet, at nulpunktet for den potentielle energi kan vælges frit. Dette vil være smart at vise.
Lad derfor $V(x)$ være den potentielle energi fra før, og $\tilde{V}(x) = V(x) + \lambda$, hvor $\lambda$ er en konstant, være en ny potentiel energi. I Newtons formulering af mekanikken bestemmer kræfter legemers bevægelse, hvor det i Lagrangeformalismen er Euler-Lagrangeligningen. I begge tilfælde er det de afledede med hensyn til sted, der bestemmer, hvordan systemet opfører sig.

$$\text{Newton}: \qquad F = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.3}$$

$$\text{Lagrange}: \qquad \begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \\ \Rightarrow &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.4}$$

**4**) Vis at begge potentielle energier $V(x)$ og $\tilde{V}(x)$, giver den samme fysik, dvs. ligningerne er ens.

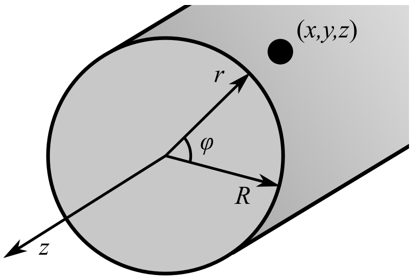
**5**) Brug dette til at vise at fysikken ikke ændrer sig ved at droppe 0. ordens ledet i Taylorpolynomiet. Med andre ord, vis at $V(x) \simeq c + \frac{1}{2}kx^2$ og $V(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2$ opfører sig ens overfor ligningerne (1.3) og (1.4).

## Etlegemeproblemer

**Opgave 9: • Partikel på en cylinder**

Vi ser på en partikel, der kan bevæge sig frit på overfladen af en cylinder med radius $R$, som det ses

[3] Dette skal forstås som at vi intet ved om den, fordi det resultat vi opnår så gælder for enhver funktion.




*Figur 1.1: Partikel på cylinder.*

på figur 1.1. Her er det oplagt at bruge cylindriske koordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi)\,, \\ y &= r\sin(\varphi)\,, \\ z &= z\,. \end{aligned}$$

**1**) Brug de cylindriske koordinater som generaliserede koordinater. Hvilke koordinater ændres, når partiklen bevæger sig?

**2**) Udregn $\dot{x}$, $\dot{y}$ og $\dot{z}$ i de nye koordinater.

**3**) Opstil den kinetiske energi, $K = \frac{1}{2}mv^2$.

**4**) Opstil Lagrangefunktionen. Den potentielle energi er altid nul.

**5**) Brug Euler-Lagrangeligningerne til at opstille anden ordens differentialligninger, for de koordinater der ændres, når partiklen bevæger sig.

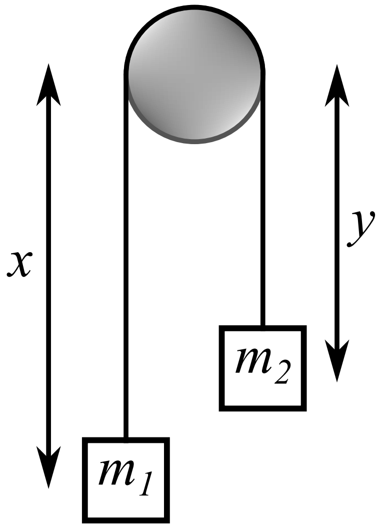
**6**) Hvordan bevæger partiklen sig?

**Opgave 10: • Atwoods faldmaskine**

I figur 1.2 ses en illustration af Atwoods faldmaskine, hvori to lodder hænges i hver sin ende af en snor med konstant længde $l$. I figuren er to koordinater også defineret, og de to lodders masser er indtegnet.

**1**) Argumenter for at der kun er ét generaliseret koordinat, og udtryk $y$ ved $x$.

**2**) Udtryk $\dot{y}$ ved $\dot{x}$.




*Figur 1.2: Illustration af Atwoods faldmaskine, hvor to lod forbindes med en snor over en trisse.*

**3**) Definer hhv. $x = 0$ og $y = 0$ som nulpunkt for den potentielle energi for hvert lod, og opskriv den totale potentielle energi[4].

**4**) Opskriv den kinetiske energi som summen af den kinetiske energi for hver af de to lodder.

**5**) Vis at Lagrangefunktionen for systemet kan skrives på formen

$$\begin{aligned} L(x,\dot{x},t) = &\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 \\ &+ g\Big(m_1 x + m_2(l - x - \pi R)\Big)\,. \end{aligned}$$

**6**) Vis ved brug af Euler-Lagrangeligningen, at systemets bevægelsesligning er

$$\ddot{x} = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

**7**) Vis ud fra bevægelsesligningen, hvad fortegnet af $\ddot{x}$ er afhængigt af om $m_1 > m_2$ eller $m_2 > m_1$.

[4] Har man svært ved at acceptere gyldigheden af at regne med negativ potentiel energi, kan man godt definere nulpunktet under faldmaskinen, hvilket gør at Lagrangefunktionen kommer til at indeholde nogle ekstra konstanter.

Hvilket af de to lodder vil falde ned (hvad betyder det for retningen af bevægelsen)?
Skrives bevægelsesligningen lidt om fås

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = a \\
\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) &= a \\
\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \int a \,\mathrm{d}t \\
\implies x(t) &= \iint a \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Det trick vi bruger her er, at integration og differentiation er hinandens omvendte operationer ligesom plus og minus er hinandens omvendte operationer.[5]

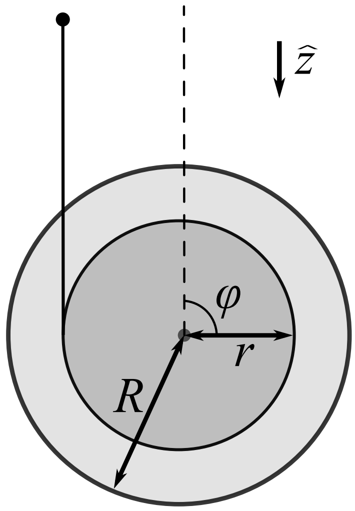
**8**) Bestem $x(t)$ ved ovenstående integral.
Hint: Regn det inderste integrale, så det yderste.

**Opgave 11: • Yoyo**
Betragt yoyoen i figur 1.3 med massen $m$ og de fysiske dimensioner som vist i figuren. Tyngdekraften har størrelsen $g$ i $z$-retningen, $\vec{\boldsymbol{F}}_\mathrm{g} = mg\hat{\mathbf{z}}$, og den ideelle snor sidder fast i afstanden $r$ fra centrum. At snoren er ideel betyder, at den anses som ustrækkelig, masseløs, og derudover anses friktionen mellem snoren og yoyoen som værende så stor, at yoyoen ikke glider. Det kan vises, at yoyoens inertimoment i denne model er

$$I = \frac{1}{2}mR^2 \,.$$

Som generaliseret koordinat benyttes $z$, fordi $z$ og $\varphi$ er koblede.

**1**) Antagelsen at friktionen mellem snoren og yoyoen er tilpas stor, gør at det punkt hvor snoren




*Figur 1.3: Skitse af en simpel yoyomodel med radier r og R i et tyngdefelt med i nedadgående retning med styrken g.*

slipper yoyoen står stille, hvilket betyder, at rotationen lige præcis udligner bevægelsen fra, at yoyoen falder nedad.[6] Det betyder, at farten $v$ i ligning (1.8) er lig med farten $v_\mathrm{CM}$ i ligning (1.14), hvor begge ligninger henviser til kompendiet. Brug disse ligninger til at vise at

$$K = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 \,.$$

**2**) Argumenter for at den potentielle energi kan skrives på formen $V = -mgz$.

**3**) Konkluder at Lagrangefunktionen for problemet er

$$L = \frac{1}{2}m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{z}^2 + mgz \,.$$

**4**) Bestem nu følgende afledede af Lagrangefunk-

[5] Faktisk har vi også antaget, at to integrationskonstanter er 0, men det er en mindre detalje.

[6] Dette kaldes ofte at yoyoen *ruller uden at glide*, hvilket er en meget almindelig antagelse i fysik.

tionen

$$\frac{\partial L}{\partial z} = ?$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = ?$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = ?$$

**5**) Brug Euler-Lagrangeligningen, ligning (1.50) i kompendiet, til at vise at

$$\ddot{z} = \frac{g}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2} \,. \tag{1.5}$$

Det kan vises at løsningen til denne differentialligning er

$$z(t) = \frac{g}{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]^{-1} t^2 + v_0 t + z_0 \,, \tag{1.6}$$

hvor $v_0$ er startfarten, og $z_0$ er startstedkoordinatet. Ved indsættelse i ligning (1.5) kan det vises, at ligning (1.6) er en løsning, eller det kan udledes med samme metode som i opgaverne 10 og 13.

**6**) Overvej hvilke fordele og ulemper der er, ved at benytte Lagrangemekanikken til at løse dette problem frem for Newtonsk mekanik.

**Opgave 12: ●● Klods på en fjeder**

I starten af kompendiets første kapitel blev det vist, at bevægelsesligningen for en klods på en fjeder, figur 1.1 i kompendiet, er

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \,.$$

Til dette blev Newtons formulering af mekanikken brugt, men det samme kan også opnås med Lagrangeformalismen.

**1**) Opstil Lagrangefunktionen for problemet.

**2**) Benyt Euler-Lagrangeligningen til at komme frem til det samme.

**Opgave 13: ●● Cylinder på skråplan**

En cylinder med massen $m$, radius $R$ og inertimoment $I$ placeres på et skråplan med vinklen $\alpha$ i forhold til vandret.

**1**) Skitser situationen.

**2**) Indtegn på skitsen det koordinatsystem, der giver det færrest mulige afhængige koordinater.

**3**) Opstil den potentielle energi $V$ for systemet, hvor der ses bort fra cylinderes udtrækning.

**4**) Udtryk den kinetiske energi $K$ ved cylinderens fysiske parametre og tidsafledede af de valgte generaliserede koordinater.

**5**) Opskriv problemets Lagrangefunktion.

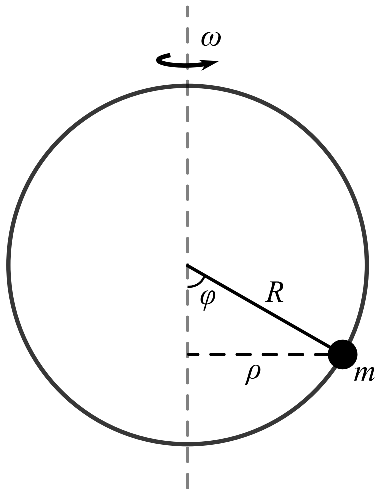
**6**) Vis at ved løsning af Euler-Lagrangeligningen fåes

$$\ddot{x} = -\frac{g\sin\alpha}{1+I/mR^2} \,.$$

**7**) Argumenter for at accelerationen er konstant.

**8**) Lad nu accelerationen være $\tilde{g}$, og vis at bevægelsesligningens løsning er

$$x(t) = \frac{1}{2}\tilde{g}t^2 + v_0 t + x_0 \,.$$




*Figur 1.4: Illustration af situationen, hvor koordinater og andre parametre er indtegnet.*

**Opgave 14: ●●● Masse på roterende ring**
Et lod med masse $m$ er placeret på en ring, hvorpå den kan bevæge sig friktionsløst, som i figur 1.4. Ringen har radius $R$, og den roterer om sin egen akse med vinkelhastigheden $\omega$. Massen kan beskrives udelukkende ved det generaliserede koordinat $\varphi$, men for at indse dette gøres brug af koordinatet $\rho$.

**1**) Udtryk den potentielle energi ved det generaliserede koordinat $\varphi$, således at $V(\varphi = 0) = 0$.

**2**) Massens hastighed deles nu op i to komponenter - en der svarer til ind i tegningen og en langs ringen. Disse kaldes henholdsvis $v_{\text{ring}}$, idet det er bevægelsen som følge af ringens rotation, og $v_{\text{lod}}$ idet det er lodets bevægelse på ringen. Bestem disse komponenter udtrykt ved $\omega$, $\varphi$ og $\dot{\varphi}$, samt eventuelle geometriske parametre.
Hint: Benyt ligning (1.8) i kompendiet.

**3**) Brug dette til at bestemme den kinetiske energi, og vis dermed at Lagrangefunktionen er

$$L = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2(\varphi)\right] - mgR\left[1 - \cos(\varphi)\right] .$$

**4**) Benyt Euler-Lagrangeligningen til at vise, at bevægelsesligningen er

$$\ddot{\varphi} = \left[\omega^2\cos(\varphi) - \frac{g}{R}\right]\sin(\varphi) .$$

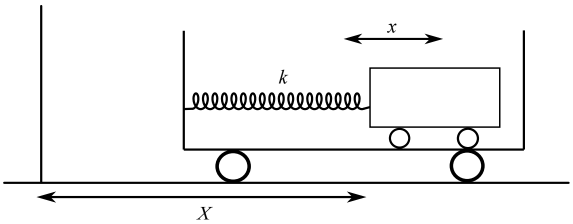
**5**) Hvad er kriteriet for henholdsvis et stabilt og ustabilt ligevægtspunkt fysisk og matematisk?

**6**) Brug kriterierne til at bestemme systemets ligevægtspunkter, og forklar hvad de betyder fysisk.

**7**) Eksister alle disse punkter for alle $\omega$, $R$ og $g$?

**8**) Diskuter om ligevægtspunkterne er stabile eller ustabile i alle tilfælde fra sidste spørgsmål.[7]

## Flerlegemeproblemer




*Figur 1.5: Illustration af problemet i opgave 15. $X$ er stedkoordinatet for den store vogn, og $x$ er stedkoordinatet for den lille, hvor $x = 0$ defineres som midtpunktet i den store vogn.*

**Opgave 15: ●● To koblede vogne**
En lille vogn med massen $m$ placeres i en større vogn, og de to forbindes med en fjeder med fjederkonstant $k$. Den lille vogn antages at kunne bevæge sig friktionsløst i forhold til den store og

[7] Ligevægtspunkterne $\varphi_0 = 0, \pm\pi$ er ikke super komplicerede at vise stabiliteten af matematisk, men det sidste er svært, hvorfor dette bør tilgås med forsigtighed. Det er dog vist i facitlisten, hvordan dette gøres, hvilket kan være en gennemlæsning værd.

den store i forhold til underlaget, og de generaliserede koordinater defineres som på figur 1.5. Den store vogn tvinges til simpel harmonisk bevægelse, det vil sige $X = A\cos(\omega t)$, hvor $A, \omega$ er konstanter, og derudover kaldes den lille vogns naturlige vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

**1**) Argumenter for at den lille vogns hastighed i forhold til underlaget kan skrives som

$$v = \dot{x} + \dot{X}\,,$$

og brug dette til at indse, at

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \dot{X}\right)^2\ .$$

**2**) Argumenter for at den potentielle energi for den lille vogn er

$$V = \frac{1}{2}kx^2\,,$$

og konkluder at

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \dot{X}\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2\ .$$

**3**) Brug dette til at vise, at

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + \dot{X})\,,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx\ .$$

**4**) Vis at

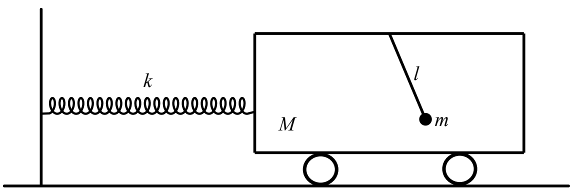
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - Am\omega^2\cos(\omega t)\,,$$

og konkluder at

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = A\omega^2\cos(\omega t)\ .$$

**5**) Fastholdes den store vogn nu i $X = 0$ bliver systemet i denne opgave ækvivalent til et system, uden den store vogn, hvor fjederen på den lille vogn er spændt fast på væggen, hvilket er en harmonisk oscillator. $X = 0$ kan realiseres ved at sætte $A = 0$. Vis at bevægelsesligningen i dette tilfælde reducerer til en harmonisk oscillator.

**6**) Hvorfor er det relevant at tjekke at systemet reducerer til en harmonisk oscillator i grænsen $A = 0$?




*Figur 1.6: Pendul med massen m og længden l placeret i en vogn med massen M, der er fastgjort til en væg med en en fjeder med fjederkonstant k.*

**Opgave 16:** ●●●● **Pendul i en vogn**

I figur 1.6 er der tegnet et pendul, ophængt i en vogn, der tilmed er fastspændt med en fjeder til en væg, og de relevante fysiske størrelser er indtegnet.

**1**) Identificer systemets generaliserede koordinater, indtegn enhedsvektorerne for et kartesisk koordinatsystem og definer origo.

**2**) Opskriv pendulets kartesiske koordinater, $(X_p, Y_p)$, udtrykt ved de generaliserede koordinater, samt vognens kartesiske $X$-koordinat, $X_v$, og argumenter for, at $Y_v$ er ubetydelig for problemet.

**3**) Bestem systemets potentielle energi.

**4**) Bestem systemets kinetiske energi og opskriv Lagrangefunktionen.

**5**) Vis at løsningen til Euler-Lagrangeligningen er de koblede differentialligninger

$$a) \quad M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -kx\,,$$
$$b) \quad ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi = -mgl\sin\varphi\,.$$

**6**) Bestem Taylorudviklingen til 1. orden i $\varphi$ af bevægelsesligningerne.

Nu kigges på grænserne

1. $k \to \infty\,,$
2. $M \gg m\,.$

**7**) Hvilken fysisk situation svarer hver grænse til?

**8**) Hvad forventes systemet at blive til i de ovenstående grænser?

**9**) Hvad bliver det til?

# Fiktive Kræfter

**Opgave 17: •• Fysiske og fiktive kræfter**

Nu betragtes systemet fra karruseleksemplet i afsnit 1.6, og der tilføjes en stedafhængig kraft til systemet med potentiel energi $V(x, y)$.

**1**) Hvorfor giver antagelserne at følgende er sandt?

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} V(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} V(x, y) = 0$$

**2**) Argumenter for at $V(x, y)$ ikke indgår i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ for $q_i = x, y$. Med andre ord, at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right)\,.$$

**3**) Konkluder at bevægelsesligningerne for systemet er

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} + m\omega^2 x - \frac{\partial}{\partial x} V(x, y)\,,$$
$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} + m\omega^2 y - \frac{\partial}{\partial y} V(x, y)\,,$$

som kan skrives på formen

$$m\ddot{x} = F_x^{\mathrm{cor}} + F_x^{\mathrm{cf}} - \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z)\,,$$
$$m\ddot{y} = F_y^{\mathrm{cor}} + F_y^{\mathrm{cf}} - \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z)\,.$$

hvor superscriptet angiver, hvilken af de to fiktive kræfter, der er tale om, og subscriptet angiver retningen.

**4**) Beskriv hvordan disse fiktive kræfter opfører sig overfor Newtons 2. lov og sammenlign med fysiske kræfter som for eksempel tyngdekraften.

Det vigtige i denne opgave er ikke at regne eksemplet igennem på ny, men at gennemgå argumenterne for de konklusioner der drages, for at give en forståelse for begrebet *fiktive kræfter*.

**Opgave 18: ●●● To masser på en roterende stang**
To legemer med masserne $m_1$ og $m_2$ fastspændes for enden af en stang. Denne stang monteres på et apparat, således at stangen kan rotere omkring apparatet med konstant vinkelhastighed $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$, samtidig med at den kan bevæge sig friktionsløs frem og tilbage gennem apparatet. Afstanden fra legemerne til apparatet kaldes hhv. $\rho_1$ og $\rho_2$, og da vil $l = \rho_1 + \rho_2$, hvor $l$ er længden af stangen. Opstillingen kan ses på figur 1.7.

**1**) Identificer et logisk koordinatsystem at beskrive problemet i.

**2**) Identificer de(n) generaliserede koordinat(er) for hvert legeme.

**3**) Antagelserne giver en begrænsning af hvordan de to legemer kan bevæge sig i forhold til hinanden. Hvad er sammenhængen mellem de to legemers hastighed?

**4**) Med henvisning til ligning (1.90) i kompendiet bestem Coriolis og centrifugalkraften på hvert legeme, og inkluder begrænsningen på hastighederne.

**5**) Tegn kræfterne der virker på hvert legeme, og beskriv hvilke antagelse tegningen bygger på.

**6**) Argumenter for at Corioliskraften er ubetydelig for problemet grundet antagelserne.

**7**) Benyt at summen af kræfter på et legeme i ligevægt er nul, $\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, til at bestemme et systemets ligevægtskonfiguration.

**8**) Hvordan forventes ligevægtskonfigurationen at se ud, under antagelse af at $m_1 = m_2$.

**9**) Stemmer forventningen og det beregnede udtryk overens?

**Opgave 19: ●●● Er fiktive kræfter trælse?**
Betragt nu de fiktive kræfter, som givet i ligning (1.90) i kompendiet.

**1**) Afhænger hver af de fiktive kræfter af sted eller hastighed?

**2**) Det er bøvlet, hvis eksempelvis funktionen indgår som sig selv, samt sin første og anden afledede. Med tanke på hvad de kræfter, der er arbejdet mest med i kapitlet, giver nogle af de fiktive kræfter så anledning til differentialligninger, der er specielt vanskelige at løse?

**3**) Hvis differentialligningen kan skrives på formen

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} = k \frac{\mathrm{d} f(t)}{\mathrm{d}t}$$

kan den relativt simpelt løses. Hvorfor?

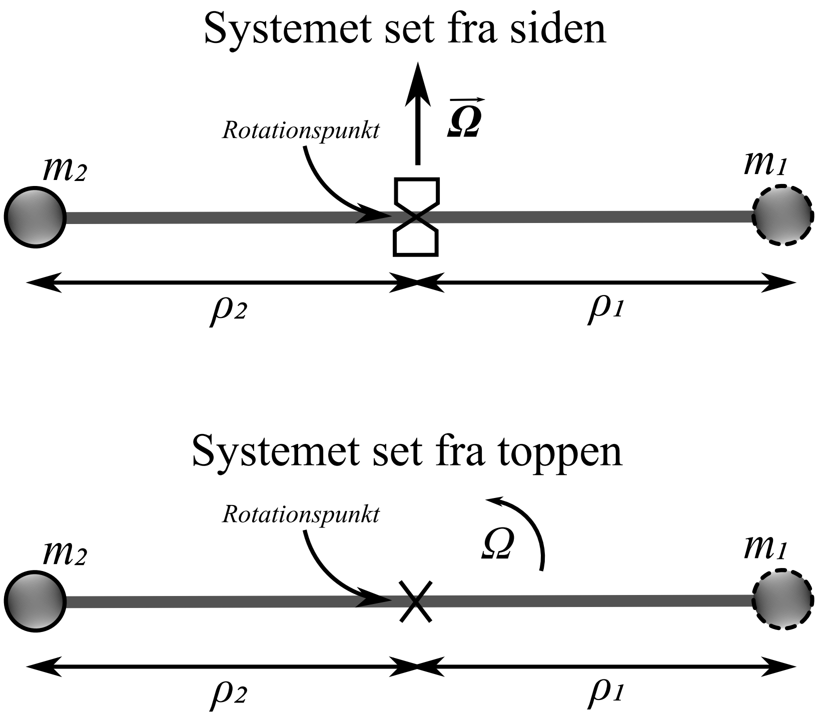
## Perspektiverende Problemer

**Opgave 20: ●●●● Tennis Racket Theorem**
Indtil videre har vi kun kigget på rotationer om én akse, men ofte roterer ting om flere akser, hvilket komplicerer tingene en hel del. I denne opgave vil vi ikke forsøge at udlede bevægelsesligningerne for et sådant system, men forsøge at forstå hvilken information de kan give os. Det kan vises at bevægelsesligningerne for et stift legeme, der kan rotere om tre akser med hver sit inertimoment er

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x &= (I_y - I_z)\omega_y \omega_z \, , \\ I_y \dot{\omega}_y &= (I_z - I_x)\omega_z \omega_x \, , \\ I_z \dot{\omega}_z &= (I_x - I_y)\omega_x \omega_y \, , \end{aligned}$$

eller på vektorform

$$\begin{bmatrix} I_x \dot{\omega}_x \\ I_y \dot{\omega}_y \\ I_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_y - I_z)\omega_y \omega_z \\ (I_z - I_x)\omega_z \omega_x \\ (I_x - I_y)\omega_x \omega_y \end{bmatrix} . \tag{1.7}$$




*Figur 1.7: Illustration af problemet, hvor stangen kan bevæge sig lineært gennem rotationspunktet udover at rotere med konstant vinkelhastighed* Ω*.*

Her er $I_i$ og $\omega_i$ henholdsvis inertimomentet og vinkelhastigheden for rotation om den $i$'te akse, og yderligere antages det at $I_x > I_y > I_z > 0$.

**1**) Antag at $\omega_y \approx \omega_z$ er meget små og brug dette til at vise, at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ (I_z - I_x)\dot{\omega}_z\omega_x \\ (I_x - I_y)\omega_x\dot{\omega}_y \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Hint: $\omega_y$ og $\omega_z$ er så små, at andenordensled med dem, dvs. led på formen $\omega_i\omega_j$ hvor $i = y, z$ og $j = y, z$, er nul, mens førsteordensled ikke er.

**2**) Vis ved brug af ligningerne (1.7) og (1.8), at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x^2\omega_y(I_z - I_x)(I_x - I_y)/I_z \\ \omega_x^2\omega_z(I_x - I_y)(I_z - I_x)/I_y \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

**3**) Konkluder ud fra ligning (1.9) at fortegnet for $\ddot{\omega}_y$ og $\ddot{\omega}_z$ er modsat af henholdsvis $\omega_y$ og $\omega_z$.

**4**) Antag nu at $\omega_x \approx \omega_z$ er meget små, analogt til spørgsmål 1), og brug helt samme metode til at vise, at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \omega_y^2\omega_x(I_y - I_z)(I_x - I_y)/I_z \\ 0 \\ \omega_y^2\omega_z(I_x - I_y)(I_y - I_z)/I_x \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

**5**) Benyt nu ligning (1.10) til at konkludere, at fortegnene for $\ddot{\omega}_x$ og $\omega_x$ er ens og ligeledes for $\omega_z$.

**6**) Legemet sættes til at rotere om sin $i$'te akse, hvor vinkelhastigheden om de andre akser er små. Hvis legemet fortsætter med stort set kun at rotere om den $i$'te akse, da betragtes rotation om den $i$'te rotationsakse som stabil. Argumenter for at rotation om den $i$'te rotationsakse er stabil, hvis $\ddot{\omega}_j \propto -\omega_j \, \forall \, j \neq i$.

**7**) Ved analoge udregninger fås, at $\ddot{\omega}_x \propto -\omega_x$ og $\ddot{\omega}_y \propto -\omega_y$ hvis $\omega_x \approx \omega_y$ er små. Konkluder at rotation om $x$- og $z$-aksen er stabil, mens rotation om $y$-aksen er ustabil. Dette resultat kaldes *Tennis Racket Theorem*, *Intermediate Axis Theorem* eller *Dzhanibekov Effect*[8] efter Dzhanibekov, der bemærkede det under en mission i rummet.

**8**) Den eneste antagelse der er lavet, er at legemet er stift[9]. Brug dette til at undersøge dette fænomen med virkelige objekter, forklar hvilke rotationsakser, der er mulige for objektet, samt den relative størrelse af inertimomentet for rotation omkring de forskellige akser.

### Opgave 21: ••• Hamiltonfunktionen og et systems energi

Antag at et systems kinetiske energi kan skrives på formen $K = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$, hvor $A(q)$ er en arbitrær funktion af $q$, som er det eneste generaliserede koordinat. Den potentielle energi kaldes $V(q)$, og der antages kun, at den er stedsafhængig.

**1**) Opskriv systemets Lagrangefunktion.

**2**) Bestem den generaliserede impuls ud fra dennes definition.

**3**) Udtryk $\dot{q}$ ved $p$ og $A(q)$.

**4**) Benyt definitionen af Hamiltonfunktion til at bestemme denne.

**5**) Vis at hvis et systems kinetiske energi kan skrives på formen $K = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$, så er $H = E$.

**6**) Argumenter for at disse argumenter generaliserer til $n$ generaliserede koordinater, hvor den kinetisk energi på tilsvarende vis antages at være

$$K = \sum_i \frac{1}{2}A(q_i)\dot{q}_i^2 \, .$$

### Opgave 22: ••• Fra klassisk mekanik til kvantemekanik

Her vil sammenhængen mellem klassisk mekanik og kvantemekanik belyses gennem en metode til at opskrive Hamiltonoperatoren for et system, ved at starte med en klassisk analyse af problemet. Der kigges her på én partikel.

**1**) Antag at den generaliserede impuls kan skrives på formen $p = m\dot{q}$. Benyt dette til at opskrive den kinetiske energi udtrykt ved impulsen $p$.

**2**) Benyt resultatet fra opgave 21 til at opskrive systemets Hamiltonfunktion.

**3**) For at kunne beskrive systemet kvantemekanisk, skal Hamiltonfunktionen skrives om til en Hamiltonoperator. Hvilke elementer i Hamiltonfunktionen skal omskrives, for at stå på operatorform?

**4**) Omskriv de før angivne elementer til operatorform ved hjælp af tabel 2.1 i kompendiet, og bestem derved Hamiltonoperatoren.

### Opgave 23: •••• Energibevarelse i Hamilton

I opgave 21 blev det vist at Hamiltonfunktionen i nogle tilfælde er lig med et systems energi. Det kunne derfor være interessant at undersøge, under hvilke omstændigheder Hamiltonfunktionen er bevaret over tid.

**1**) Beskriv forskellen på den fuldstændige differentiation, f.eks. $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, og den partielle differentiation, eksempelvis $\partial/\partial t$. [10]

**2**) Opskriv den fuldstændigt tidsafledede af en

[8] Løses differentialligningen i ligning 1.7 fås en bevægelse som denne: `https://www.youtube.com/watch?v=1n-HMSCDYtM`

[9] Det er også antaget at legemet ikke er påvirket af ydre kræfter i udledningen af ligning 1.7, men det betyder bare at konklusionen om stabilitet af rotationsakser ikke afhænger af nogle ydre kræfter.

[10] Differentialoperatorerne er her skrevet med hensyn til tid, men det er bare for at give et eksempel. Der tænkes her på den generelle forskel.

generel Hamiltonfunktion af ét generaliseret koordinat, $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$, vha. kædereglen.

**3**) Benyt nu Hamiltons ligninger til at simplificere summen.

**4**) Konkluder at

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \, .$$

**5**) Under hvilke omstændigheder er Hamiltonfunktionen bevaret i tid?

**6**) Med henvisning til opgave 21, hvad betyder det fysisk for systemet, at Hamiltonfunktionen er bevaret i tid?

**7**) Opskriv $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ for en generel Hamiltonfunktion af $n$ generaliserede koordinater, og vis at ovenstående er sandt for $n$ generaliserede koordinater.

# Kapitel 2

# Kvantemekanik

## Uendeligt dyb brønd

**Opgave 1: • Parabelformet bølgefunktion**
Vi ser her på en partikel i en uendelig brønd i intervallet fra 0 til $L$. Lad bølgefunktionen være:

$$\psi = Nx(L - x)$$

**1)** Find $N$ så bølgefunktionen er normeret.

**2)** Hvad er forventningsværdien for positionen $\langle x \rangle$?

**3)** Find forventningsværdien for energien $\langle E \rangle$ og sammenlign den fundne energi med grundtilstandsenergien: $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.

**4)** Er $\psi$ en stationær tilstand?

**Opgave 2: • Sammensatte bølgefunktioner**
Find normeringskonstanten $N$ og energien $E$ for de følgende bølgefunktioner, der er sammensat af stationære tilstande for den uendelige brønd.

**1)** $N(\psi_1 + \psi_2)$.

**2)** $N(\psi_1 - \psi_3)$.

**3)** $N(\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3)$.
Hint: Udnyt at bølgefunktionerne er ortonormale.

**Opgave 3: •• Den tidsafhængige bølgefunktion**
I en uendelig brønd er bølgefunktionen til tiden $t = 0$:

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_1 + \psi_2)$$

**1)** Hvad er $\Psi(x, t)$? Du kan med fordel bruge

$$\omega = \frac{E_1}{\hbar} = \frac{\pi^2 \hbar}{2mL^2} .$$

**2)** Hvad er $\Psi^*(x, t)$?

**3)** Skriv $\Psi^* x \Psi$ så simpelt som muligt.

**4)** Hvad er $\langle x(t) \rangle$?
Hint:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta ,$$
$$\langle \psi_n | \, x \, | \psi_n \rangle = \frac{L}{2} ,$$
$$\langle \psi_1 | \, x \, | \psi_2 \rangle = \frac{-16L}{9\pi^2} .$$

**Opgave 4: ••• En partikel i et kvadrat**
I to dimensioner er den tidsuafhængige Schrödingerligning i kartesiske koordinater:

$$E\psi(x, y) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + V(x, y)$$

Vi vil se på en kvadratisk brønd, i to dimensioner, med sidelængder på $L$. Her er potentialet nul, når $0 \leq x \leq L$ og $0 \leq y \leq L$. Antag nu at man kan skrive bølgefunktionen som:

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) = XY$$

**1)** Indsæt $\psi = XY$ i Schrödingerligningen med $V = 0$ og isoler $E$.

**2)** Energien vil bestå af en bidrag fra $X$ og $Y$, så $E = E_x + E_y$. Opstil differentialligninger i stil med ligning (2.20) i kompendiet for $X$ og $Y$.

**3)** Find generelle løsninger til differentialligningerne, bølgefunktionen og de tilhørende energier. Bemærk at der vil være et kvantetal for hver af differentialligningerne.

**4)** Hvad er de fem laveste energier? Skitser bølgefunktionerne med disse energier.

**Opgave 5: ••• En partikel i en boks**
I tre dimensioner er den tidsuafhængige Schrödingerligning i kartesiske koordinater:

$$E\psi(x, y, z) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z)$$

Vi vil se på en kubisk boks med en sidelængde på $L$, hvor potentialet er nul, når $x$, $y$ og $z$ alle er imellem 0 og $L$. Antag at man kan skrive bølgefunktionen som:

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) = XYZ$$

**1)** Indsæt $\psi = XYZ$ i Schrödingerligningen med $V = 0$ og isoler $E$.

**2)** Energien vil bestå af et bidrag fra $X$, $Y$ og $Z$, så $E = E_x + E_y + E_z$. Opstil differentialligninger i stil med ligning (2.20) i kompendiet for $X$, $Y$ og $Z$.

**3)** Find generelle løsninger til differentialligningerne, bølgefunktionen og de tilhørende energier. Bemærk at der vil være et kvantetal for hver af differentialligningerne.

**4)** Find de laveste 5 mulige energier udtrykt i $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ energien for en endimensionel uendelig brønd med samme brede som boksens sidelængde.

## Usikkerheder/Usikkerhedsrelationer

**Opgave 6: • Parabelformet bølgefunktion igen**
Denne opgave bygger videre på opgave 1, så det er en fordel at have lavet denne opgave først. Vi ser igen på en parabelformet bølgefunktion i en uendelig brønd:

$$\psi = Nx(L - x)$$

**1)** Hvad er $\sigma_x^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$?

**2)** Hvad er $\sigma_p^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2$?

**3)** Passer det med Heisenbergs usikkerhedsprincip?

**Opgave 7: •• Den frie partikel**
En fri partikel er en partikel, der ikke påvirkes af noget potentiale, så $V(x) = 0$ for alle $x$.

**1)** Hvad er $\hat{H}$?

**2)** Hvad er $[\hat{p}, \hat{H}]$?

**3)** Hvilke bølgefunktioner opfylder:

$$\hat{p}\psi_p = -i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = p\psi_p$$

OBS: $\hat{p}$ er en operator, og $p$ er et tal.

**4**) Hvad sker der, hvis man sætter $\psi_p$ ind i Schrödingerligningen?

**5**) Hvad er sammenhængen imellem $E$og $p$?

**6**) Hvad er $\sigma_p$ og $\sigma_E$?

**Opgave 8: ●●● En anden usikkerhedsrelation**

Da vi så på usikkerhedsrelationen, så vi primært på:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Så længe vi har to operatorer, kan vi opstille tilsvarende relationer. Der er en ofte anvendt tilsvarende relation for energi og tid:

$$\sigma_E \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$$

På trods af at de to relationer er næsten identiske, er det ikke muligt at udlede den sidste, på samme måde som vi gjorde med den første.[1]

Lad $\hat{Q}$ være en operator, der eksplicit afhænger af $x$, $p$ og $t$.

**1**) Vis at:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q \rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \middle| \hat{Q}\Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \hat{Q}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

**2**) Udnyt Schrödingerligningen:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

til at vise:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q \rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\hbar}\left\langle [\hat{H}, \hat{Q}] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

Operatorer der eksplicit afhænger af $t$ er ret sjældne, så fremover vil vi antage, at $\hat{Q}$ er uafhængig af $t$.

**3**) Hvordan ændrer denne antagelse resultatet af de to foregående delopgaver?

**4**) Brug den generelle usikkerhedsrelation til at vise:

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\langle \hat{Q} \rangle}{\mathrm{d}t}\right|$$

$\sigma_t$ kan defineres som den tid der går, før forventningsværdien af en vilkårlig observable ændrer sig med en standardafvigelse. Skrevet som en formel er det:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_Q}{|\mathrm{d}\langle Q \rangle / \mathrm{d}t|}$$

**5**) Brug den nyligt fundne ulidelighed til at finde energi- tid usikkerhedsrelationen.
Hint: $\hat{H} = \hat{H}^*$ og $\langle \hat{H}\Psi | \hat{Q}\Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H}\hat{Q}\Psi \rangle$.

[1] I den specielle relativitetsteori er position og tid to sider af samme sag. Tilsvarende for impuls og energi. Det er muligt at kombinere speciel relativitet med kvantemekanikken, men så må vi finde en erstatning til Schrödingerligningen, der bestemt ikke ligestiller $x$ og $t$.

# Harmoniske oscillatorer

**Opgave 9: ● Harmonisk oscillator med $\hat{a}_-\hat{a}_+$**

Færdiggør udledningen af den harmoniske oscillator. Hvis du havde problemer med denne udledning er denne opgave stærkt anbefalet.

**1**) Udregn $\hat{a}_-\hat{a}_+$.

**2**) Brug dette til at udlede ligning (2.60) i kompendiet.

**3**) Vis at hvis $\psi_n$ er en løsning til Schrödingerligningen, så er $\hat{a}_-\psi_n$ det også.

**4**) Hvad er energien af $\hat{a}_-\psi_n$

**Opgave 10: ●● Sjov med operatorer**

Vi vil her komme ind på en af grundene til, at hæve-/sænkeoperatorerne er smarte. Udnyt at bølgefunktionerne er ortonormale, og husk at

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x}).$$

**1**) Udtryk $\hat{x}$ og $\hat{p}$ ved $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$.

**2**) Find $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$ for $\psi_0$, $\psi_1$ og $\psi_n$.

**3**) Gør det samme for $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$.

**4**) Hvad er $\sigma_x$ og $\sigma_p$ for $\psi_n$?

**5**) Hvordan passer det med Heisenbergs usikkerhedsprincip?

**Opgave 11: ●● Nu med tid**

Til tiden $t = 0$ har vi bølgefunktionen:

$$\Psi(x, t = 0) = N(\psi_0 + \psi_1)$$

(Det kan være en fordel at have lavet opgave 11 først.)

**1**) Hvad er $N$?

**2**) Hvad er $\Psi(x, t)$?

**3**) Hvad er $\langle E \rangle$?

**4**) Hvad er $\langle x(t) \rangle$?

**Opgave 12: ●● Molekylære vibrationer**

En god model for bindingen i et molekyle er Morsepotentialet:

$$V(r) = D\left(1 - e^{-(r-R)}\right)^2$$

**1**) Hvor er potentialets minimum (ligevægtsafstanden)?

**2**) Hvad er minimumsværdien af potentialet?

**3**) Hvad er potentialet for meget store $r$.

**4**) Hvad er $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$ i ligevægtspunktet. Dette er kraftkonstanten $k$ analogt med for en fjeder.

**5**) Molekylet vil kunne vibrere omkring ligevægtspunktet. Hvad er $\omega$?

**6**) Morse potentialet kan tilnærmes som en harmonisk oscillator. Hvad er grundtilstandsenergien for denne?

For et brintmolekyle er Morsepotentialet givet ved:

$$\begin{aligned} D &= 7{,}24 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,, \\ a &= 3{,}93 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}\,, \\ R &= 7{,}40 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}\,, \\ m_p &= 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,. \end{aligned}$$

**7**) Hvad er $\omega$ og $E_0$ for brintmolekylet.

# Energibevarelse

**Opgave 13: ●●● Energibevarelse i kvantetilstande**

Vi skal i denne opgave se på, hvordan energibevarelse kommer til udtryk i kvantemekaniske tilstande. Til enhver Hamilton operator $\hat{H}$, kan vi finde et sæt af løsninger som opfylder følgende ligning:

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$$

**1**) Udtryk en generel funktion $f(x)$ som en kombination af løsninger til Schrödingerligningen.

**2**) Hvordan vil denne funktion udvikle sig over tid?
Hint: udtryk $f(x, t)$ som en kombination af løsninger til Schrödingerligningen.

**3**) Udregn forventningsværdien af energien $\langle E \rangle$. Hvordan vil denne udvikle sig over tid?

# Symmetri

**Opgave 14: • Lige og ulige funktioner**
En funktion så som $f(x) = x^2$ der opfylder kravet, $f(x) = f(-x)$, kaldes en lige funktion. En funktion som $f(x) = x$ der opfylder det lignende krav, $f(x) = -f(-x)$, kaldes for en ulige funktion. Det vil sige, at en lige funktion er uændret, hvis man spejler den i $y$-aksen, mens en ulige funktion skifter fortegn ved den samme spejling. Bemærk at de fleste funktioner er hverken lige eller ulige, og unikt er funktionen $f(x) = 0$ både lige og ulige. Afgør om følgende funktioner er lige eller ulige.

**1**) $\sin x$.

**2**) $e^{x^2}$.

**3**) $\cos x$.

**Opgave 15: • Mere om lige og ulige funktioner**
Lad $f_g(x)$ være en lige funktion og $f_u(x)$ være en ulige funktion.[2]

**1**) Vis at produktet af lige og ulige funktioner fungerer på samme måde som produktet af lige og ulige tal, i forhold til hvorvidt produktet er lige eller ulige.

**2**) Er $1/f_g(x)$ lige eller ulige?

**3**) Hvad med $1/f_u(x)$?

**4**) Hvad er reglen for division af lige og ulige funktioner?

**Opgave 16: •• Sammensætning af lige og ulige funktioner**
Alle funktioner kan skrives som en unik sum af en lige og en ulige funktion:

$$f(x) = f_g(x) + f_u(x)$$

[2] $g$ og $u$ står for gerate og ungerate, de tyske ord for lige og ulige.

**1**) Skriv $f(-x)$ ud fra $f_g(x)$ og $f_u(x)$.

**2**) Skriv $f_g(x)$ og $f_u(x)$ ud fra $f(x)$ og $f(-x)$.

**3**) Hvad er den lige og den ulige del af eksponentialfunktionen $e^x$?

**Opgave 17: ••• Integraler af lige og ulige funktioner.**
Vi vil her finde nogle meget praktiske regneregler for integraler af lige og ulige funktioner over et symmetrisk interval. Lad $f_g(x)$ være en lige funktion og $f_u(x)$ være en ulige funktion. Antag derudover at integralerne

$$\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad \int_0^a f_u(x)\,\mathrm{d}x$$

er kendte.

**1**) Vis at

$$\int_{-a}^a f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

**2**) Vis at

$$\int_{-a}^a f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

**3**) Brug dette til at løse integralet:

$$\int_{-1}^1 x\cos(x)\sin(x) + x^2 - x\exp(x^2)\,\mathrm{d}x$$

# Kapitel 3

# Exoplaneter

**Opgave 1: • Stjernernes spektre**
Spektralklasser er et system, der opdeler stjerner efter deres temperatur. Figuren i dette link[1] viser forskellige spektraltyper, og visse absorptionslinjer er angivet.

**1**) Solen har spektralklasse G2V, men i dette tilfælde kan vi godt tilnærme den til en G0-type. Hvad er nogle eksempler på stoffer, som kan ses i dens atmosfære?

**2**) Hvilke forskelle er der på stjernespektret fra en G0-type og de to M-typer?

**3**) Stjerner af typerne M0 og M2 har en temperatur på 3000 K. Hvordan kan dette bruges til at forklare forskellen mellem M- og G-stjerner?

**Opgave 2: • Planetkandidater**
Spektralklasserne er bestemt ud fra temperaturen som i tabel 3.1.

**1**) Hvilke stjernetyper er mest interessante at lede efter planter ved?

**2**) Hvordan kan man identificere disse stjernetyper ud fra deres spektre?

[1] https://scienceruls.weebly.com/uploads/5/1/7/4/51741831/448172290.jpg

| Spektraltype | Temperatur |
|---|---|
| O | 40 000 K |
| B | 20 000 K |
| A | 9000 K |
| F | 7000 K |
| G | 5500 K |
| K | 4500 K |
| M | 3000 K |
| L | 2000 K |
| T | 1300 K |

*Tabel 3.1: Spektralklassifikation og temperaturer.*

**Opgave 3: • Stjernespektre og temperatur**
For sortlegemer gælder Wiens forskydningslov

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \cdot 10^6 \,\mathrm{nm\,K}}{T},$$

hvor $T$ er sortlegemets temperatur, og $\lambda_{\max}$ er bølgelængden for lyset med størst intensitet fra sortlegemet.

**1**) Ved hvilke bølgelængder skal en stjernes intensitetsmaksima ligge, for at være interessant at kigge efter planeter med liv omkring, under antagelse af at stjerner kan beskrives som sortlegemer?

**2**) Kan dette lys ses med det menneskelige øje, og hvilken farve har det i så fald?

**Opgave 4: • Jævn cirkelbevægelse**
Til at estimere massen af en planet fundet med radialhastighedsmetoden blev ligning (3.12) i kompendiet benyttet. Den gælder under antagelse af jævn cirkelbevægelse.

**1**) Beskriv i ord hvad jævn cirkelbevægelse vil sige.

**2**) Vis at ligning (3.12) gælder for jævn cirkelbevægelse.

**3**) Benyt dette til at estimere Jordens fart i sin bane om Solen.

**Opgave 5: • Den Beboelige Zone**
Jordens albedo er $A = 0,306$.

**1**) Bestem den beboelige zone for en jordlignende planet:
a) I Solsystemet.
b) Om en anden stjerne, der er dobbelt så varm som Solen.
c) Om en tredje stjerne, hvis radius er 5 gange så stor som Solen.

**2**) Kommenter resultatet for a). Giver det fysisk mening? Hvis ikke, hvad kan det skyldes?

**Opgave 6: • Gravitationslinser**
I afsnit 3.2 i kompendiet om gravitationslinsemetoden blev det nævnt, at begivenheden skal observeres af flere forskellige målinger.

**1**) Hvorfor er én måling ideelt set ikke nok?

**2**) Hvorfor er det usandsynligt at observere samme planet med gravitationslinsemetoden mere end én gang?

**3**) Hvordan medfører ovenstående, at planeten skal kunne ses i flere forskellige uafhængige målinger for at kunne kaldes en planet?

**Opgave 7: •• Estimat af planetmasse**
Vis med udgangspunkt i ligning (3.15) fra kompendiet, at ligning (3.16) i kompendiet gælder.

**Opgave 8: •• Overfladetemperatur på planeter**
Et sortlegeme er et legeme, som absorberer alt lys det bliver ramt af, og udsender det hele som varmestråling. Luminositeten fra et sfærisk sortlegeme givet som

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 ,$$

hvor $R$ og $T$ er henholdsvis legemets radius og temperatur, og $\sigma$ er Boltzmanns konstant.

**1**) Antag at stjerner opfører sig som sortlegemer, og vis at en planet med radius $R_p$ i en afstand $D$ fra stjernen og med en albedo-værdi på $A$ vil absorbere energien

$$L_{\text{abs}} = \frac{R_\star^2 \sigma T_\star^4 \pi R_p^2}{D^2} (1 - A) , \tag{3.1}$$

hvor $R_\star$ og $T_\star$ er henholdsvis radius og temperatur af stjernen.
Hint: Man kan sige, at den del af planeten, der er vendt mod stjernen, udgør et areal givet ved $\pi R_m^2$.

Antag at en planet også opfører sig som et sortlegeme, og at det er i termisk ligevægt.

**2**) Hvad betyder det at planeten er i termisk ligevægt?

**3**) Vis at temperaturen på overfladen af en planet, $T_p$, kan udtrykkes som

$$T_p = T_\star \left( \frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left( \frac{R_\star}{D} \right)^{1/2} .$$

**4**) Antag at Saturns måne Mimas roterer hurtigt, samt at albedoen på overfladen af Mimas er $A_{Mimas} = 0,962$. Desuden oplyses det, at temperaturen på overfladen af Solen er $T_\odot = 5778\,\text{K}$,

Solens radius er $R_\odot = 6{,}955 \cdot 10^5$ km, samt at middelafstanden mellem Mimas og Solen er $D_{\text{Mimas}} = 1{,}43 \cdot 10^9$ km.
Beregn ud fra oplysningerne en teoretisk temperatur på overfladen af Mimas. Gøre rede for dine antagelser. Cassini-rumsonden vurderede temperaturen på overfladen af Mimas til at være ca. 65 K. Hvad kan forskellen mellem den teoretiske og den observede temperatur skyldes?

| **Funktionel gruppe** | **Absorbtionslinje** |
|---|---|
| OH (Alkohol) | (2,74-2,94) µm |
| OH (Carboxylsyre) | (3,24-4,00) µm |
| C=O (Keton) | (5,62-5,99) µm |

*Tabel 3.2: Absorbtionslinjer for udvalgte organiske funktionelle grupper.*

**Opgave 9: ●● Spektre af planetatmosfærer**
Ligesom individuelle atomer har specifikke spektre, så har molekyler det også, selvom dette er noget mere komplekst. Man bruger kemisk set typisk infrarød stråling, eftersom dette område giver de mest brugbare spektre. OH-gruppen i en alkohol ser anderledes ud en OH-gruppen i en carboxylsyre, fordi gruppens omgivelser er forskellige. Fælles for dem er dog, at de giver stærke brede absorptionslinjer, hvorfor de er relativt tydelige. Yderligere giver ketoner smalle, men stærke, absorptionslinjer. Tegninger af de forskellige funktionelle grupper ses i figur 3.1, og deres absorptionslinjer ses i i tabel 3.2.

**1**) Hvordan kan dette bruges i forbindelse med undersøgelsen af exoplaneter?

**2**) Hvilke begrænsninger er der ved disse metoder?

**Opgave 10: ●●● Atmosfærekrav**
For at en planet kan have en stabil atmosfære, er den nød til at kunne holde simple molekyler fanget i dens tyngdefelt. Massen af $O_2$ er $m_{O_2} = 5{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg.

**1**) Benyt Newtons gravitationslov og Newtons 2. lov til at bestemme tyngdeaccelerationen på en planets overflade.

**2**) Er et legemes kinetiske energi præcis ligeså stor som det gravitationelle potentielle energi, vil den kunne undslippe det tyngdefelt det befinder sig i. Vis at denne hastighed, kaldet undvigelseshastigheden fra en planet, er givet som

$$v_{\text{ecs}}^2 = \frac{2M_pG}{R_p}\,.$$

**3**) Det oplyses nu fra kinetisk gasteori, at

$$\frac{1}{2}mv_{av}^2 = \frac{3}{2}k_BT\,,$$

hvor $v_{av}$ er partiklerne i gassens gennemsnitlige fart, $m$ er partiklernes masse, $k_B$ er Boltzmanns konstant og $T$ er temperaturen i Kelvin.
Vis at

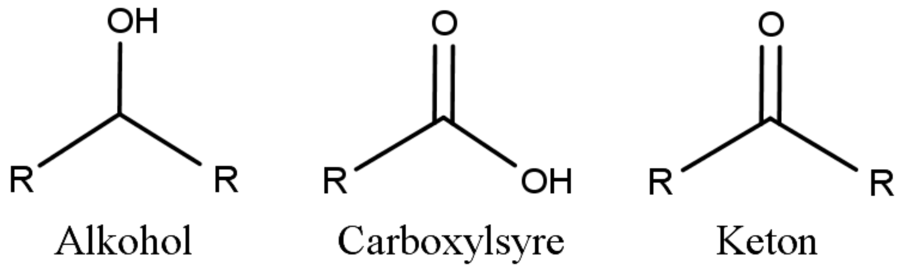
$$\frac{M_p}{R_p} = \frac{3}{2}\frac{k_BT}{mG}\,,$$

hvis $v_{\text{ecs}} = v_{av}$.

**4**) Er $v_{\text{ecs}} = v_{av}$ vil op mod halvdelen af molekyler med massen $m$ forsvinde væk fra planeten. Konkluder at for at en exoplanet kan fastholde $O_2$ i sin atmosfære, skal der om planeten gælde at

$$\frac{M_p}{R_p} > \frac{3}{2}\frac{k_BT}{m_{O_2}G} \tag{3.2}$$

**5**) Den gennemsnitlige temperatur på Jorden antages at være 16 °C. Opfylder Jorden ligning (3.2)?




*Figur 3.1: Illustration af tre funktionelle, organiske grupper, tegnet i standardnotationen for organisk kemi. Det vil sige at hver streg repræsenterer en binding, hver knæk repræsenterer et C-atom og R står for en arbitrær gruppe kaldet et radikal. Yderligere er ikke-funktionelle H-atomer underforstået, hvorfor OH skrives, mens CH ikke skrives, idet H'et i CH ikke er kemisk aktivt.*

**Opgave 11: ●●● Bose-Einsteinkondensat og laserkøling**

For at lave Bose-Einstein kondensater i laboratoriet, skal man have nogle lette partikler, der køles ekstremt meget ned.[2] Mere præcist køles atomer (ofte alkalimetaller) ned til 0,1 μK, hvilket gøres ved først laserkøling og senere fordampningskøling. Laserkøling fungerer ved at udnytte at fotoner har impuls. Rammes et atom af en foton, der bevæger sig i modsat retning af atomet, exciteres det til et højere energiniveau, men dets fart falder også en smule for at bevare impulsen. Når atomet henfalder udsendes fotonen igen, og den accelereres en smule i en tilfældig retning. Sker dette mange gange, går disse små accelerationer ud med hinanden over tid, hvorved atomet bremses og atomskyen køles. Det virker dog kun, hvis man kan sikre sig, at atomer kun interagerer med fotoner, der bevæger sig i modsat retning af dem selv.

**1**) Hvad er sammenhængen mellem en fotons energi og bølgelængde?

**2**) Hvad sker der, hvis et atom rammes af en foton med en energi, der ikke svarer til en (tilladt) atomar overgang?
Hint: Tænk på atomet kvantemekanisk.

Ved laserkølings sendes laserstråler ind fra seks retninger (positiv og negativ retning af hver af de kartesiske akser). Nu simplificeres systemet ved kun at kigge på systemet i én dimension. Betragt nu to ens atomer, der bevæger sig i hver sin retning. Fotonerne kommer fra en laser, der står stille i laboratoriet.

**3**) Skiftes referencesystem til hvert atoms referenceramme, ser laseren ud til at bevæge sig. Hvorfor bevæger laseren sig ikke lige hurtigt i begge atomers referencesystem?

**4**) Eftersom laseren bevæger sig Dopplerforskydes lyset. Hvad betyder forskellen i bevægelse for Dopplerforskydningen?

**5**) Kan begge atomer exciteres af fotoner med samme bølgelængde?

**6**) Hvordan kan dette bruges til at bremse atomerne selektivt?

**7**) Er opgavetitlen clickbait?

[2] For den interesserede læser er et Bose-Einstein kondensat, at atomernes bølgefunktioner udvider sig, som temperaturen falder, indtil de tilsidst overlapper så meget, at du får en samlet bølgefunktion. De kan derfor betragtes som én stor partikel.

**Opgave 12: •• Masse af en planet**
Det kan vises at massen af en planet med radius $R$ og sfærisk symmetrisk densitet $\rho(r)$ (masse pr. volumen) er givet som

$$M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r \ . \tag{3.3}$$

Det oplyses nu, at en planet har densitetsfunktionen

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) & , \quad r \leq R \\ 0 & , \quad r > R \end{cases}$$

**1**) Tegn $\rho(r)$.

**2**) Hvad er planetens masse?

**Opgave 13: ••• Tyngdeacceleration indeni en planet**
Ikke nok med at en densitetsfunktion kan bruges til at bestemme hele massen af en planet, den kan også bruges til at bestemme tyngdeaccelerationen forskellige steder i planeten. Lad en planet med radius $R$ have densitetsfunktionen

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{A}{r^2} \exp\left(\dfrac{r-R}{c}\right) & , \quad r \leq R \\ 0 & , \quad r > R \end{cases}$$

hvor $r$ er afstanden fra centrum, og $A$, $c$ er positive konstanter.

**1**) Bestem enheden for $A$, for at $\rho(r)$ har den korrekte enhed.

**2**) Forklar figur 3.2.

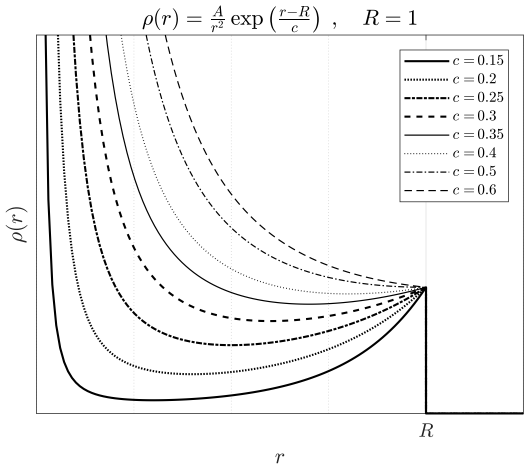
Ud fra Newtons gravitationslov kan det vises at

$$g(r) = G\frac{M(r)}{r^2} \ ,$$

hvor $r$ er afstanden fra planetens centrum, $M$ den indesluttede masse, der er massen af den del af planten, der befinder sig i afstanden $r$ eller nærmere planetens centrum. Dette bygger også på antagelsen om sfærisk symmetri.

**3**) Benyt ligning (3.3) til at opskrive et udtryk for massen indenfor afstanden $r$.

**4**) Bestemt tyngdeaccelerationen $g(r)$ udtrykt ved $r$ og eventuelle konstanter.




*Figur 3.2: Plot af $g(r)$ for nogle forskellige værdier af $c$ og en fastholdt værdi af $R$.*

# Kapitel 4

# Atom- og Molekylefysik

## Finstruktur

**Opgave 1: • Finstruktur for en elektron**
Vi vil i denne opgave se på tilstanden $n = 2$ for hydrogenatomet.

**1**) For $s = \frac{1}{2}$, $l = 1$, udregn $\beta_l$

**2**) Find alle værdier af $J$ for $n = 2$ tilstanden.

**3**) Find energiopsplitningen for tilstandende $n = 2$, $l = 0$.

**4**) Find energiopsplitningen for tilstandende $n = 2$, $l = 1$.

**Opgave 2: ••• Finstruktur for flere elektroner**
Vi vil i denne opgave se på et system med 2 elektroner, hvor de hver har $n = 2$.

**1**) Find alle $L$ og $S$ værdier for $l_1 = 1$ og $l_2 = 1$. Hvorfor er det ikke nødvendigt, at specificere hvad $s_1$ og $s_2$ er?

**2**) Find alle $J$ værdier for $L, S$ fra forrige opgave.

**3**) Find alle energiopsplitningerne for de $J$, $L$ og $S$ tilstande vi fandt i de forrige opgaver.

## Hyperfinstruktur

**Opgave 3: • Hyperfinstruktur for 21 cm linjen**
Vi vil i denne opgave arbejde med hyperfinstruktur for en elektron i grundtilstanden af et brintatom.

**1**) Kernen er her en proton med spin $\frac{1}{2}$. Brug dette til at finde alle mulige værdier af $F$. Hvorfor er det ikke nødvendigt at kende $l$ for elektronen?

**2**) Udregn konstanten $A$ for grundtilstanden.

**3**) Find energiopsplitningen mellem tilstandende.

**4**) Udregn bølgelængden af det lys som har en energi svarende til energiforskellen mellem de to tilstande.

**Opgave 4: •• Hyperfinstruktur for atomure**
Vi vil i denne opgave arbejde med et cæsium atom, som det er beskrevet i teksten. Spinnet for en cæsium kerne er $I = \frac{7}{2}$, og vi vil i denne opgave arbejde med $n = 6$ tilstanden.

**1**) Find alle $F$ tilstande for $l = 0$.

**2**) Udregn energiopsplitningen for tilstandende.

**3**) Udregn frekvensen af det lys der bliver udsendt fra denne overgang.

## Molekylefysik

### Opgave 5: • Diatomare molekyler

**1**) På figur 4.7 i kompendiet er tegnet molekyleorbitaldiagrammer for $O_2$ og $N_2$. Gør det samme for $C_2$, $F_2$ og $Ne_2$.

**2**) Hvad er bindingsordenen af de fem molekyler?

**3**) Hvilket vil I forvente er mest stabilt?

**4**) Hvilket forventer I er mest ustabilt?

**5**) Hvor mange af molekylerne har uparrede elektroner, og er dermed magnetiske?

### Opgave 6: •• Vand

Vi vil her konstruere en model for vandmolekylet ud fra et iltatom og et brintmolekyle. Vand består af et iltatom og to brintatomer, og det har form som et $V$. I vores model dannes vand ved at bevæge et brintmolekyle ind imod et iltatom, hvorefter brintmolekylet strækkes og bliver til de to grene af V'et.

Bemærk at ikke alle orbitaler indgår i bindingen.

**1**) Skitser molekyleorbitalerne for brint.

**2**) Skitser atomorbitalerne for ilt.

**3**) Hvilke af orbitalerne overlapper?

**4**) Opstil et molekyleorbitaldiagram.

**5**) Hvilke af de resulterende orbitaler er bindende, antibindende eller ikke bindende?

**6**) Hvad er bindingsordenen af molekylet?

### Opgave 7: ••• Benzen

Som meget kort nævnt i kompendiet kan $\pi$-bindinger medføre at elektronerne i et molekyle er delokaliserede, dvs. det er muligt at finde dem inden for et stort område (på molekylær skala). Dette sker blandt andet i benzenmolekylet. Benzen består af seks kulstof atomer i en sekskant, med et brintatom bundet til hver. $\sigma$-bindingerne i Benzen er ikke noget specielt, så vi vil udelukkende beskæftige os med $\pi$-bindingerne. Kulstof atomernes $p_z$-orbitaler, der danner $\pi$-bindingerne, er ikke egentilstande. Kulstof atomerne rundt langs ringen gives numre fra 1 til 6. Det giver orbitalerne $p_1$ til $p_6$.

**1**) Hvad er $p_7$?

Det viser sig at Hamiltonoperatoren på en af $p$ orbitalerne giver:

$$\hat{H}p_j = \alpha p_j + \beta p_{j+1} + \beta p_{j-1}$$

Her er $\alpha$ og $\beta$ konstanter. En bølgefunktion med mange knudeflader (knudepunkter i 3 dimensioner) vil normalt have højere energi end en med få knude flader.

**2**) Opstil og skitser en bølgefunktion $1\pi$, ud fra $p_z$-orbitalerne for kulstof, med så få knudeflader som muligt.

**3**) Opstil og skitser en bølgefunktion $6\pi$ med så mange knudeflader som muligt.

**4**) Afgør om $1\pi$ og $6\pi$ er egenfunktioner for $\hat{H}$ og find deres energi.

**5**) $\alpha$ er en positiv konstant, så hvad er fortegnet på $\beta$?

De resterende bølgefunktioner er:

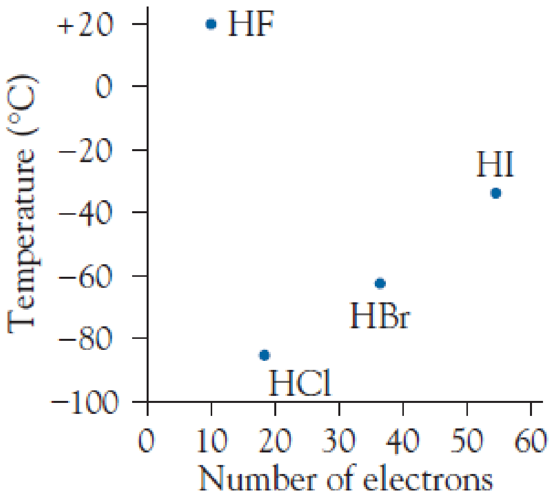
$$\begin{aligned}
2\pi &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(2p_1 + p_2 - p_3 - 2p_4 - p_5 + p_6) \\
3\pi &= \frac{1}{2}(p_2 + p_3 - p_5 - p_6) \\
4\pi &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(2p_1 - p_2 - p_3 + 2p_4 - p_5 - p_6) \\
5\pi &= \frac{1}{2}(p_2 - p_3 + p_5 - p_6)
\end{aligned}$$

**6**) Skitser også disse bølgefunktioner og find deres energi.

**7**) Lav et molekyleorbitaldiagram for $\pi$-systemet for Benzen.

| | H | He | Li | Be | B | C | N | O | F | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1*s* | -13,6 | -25,0 | -67,4 | -128,8 | -209,4 | -308,5 | -426,3 | -562,7 | -717,9 | -891,7 |
| 2*s* | | | -5,3 | -8,4 | -13,5 | -19,4 | -26,2 | -34,0 | -42,8 | -52,5 |
| 2*p* | | | | | -8,4 | -11,1 | -13,8 | -16,8 | -19,9 | -23,1 |

*Tabel 4.1: Energierne for de laveste atomorbitaler i de første ti grundstoffer.*




*Figur 4.1: Kogepunkterne for hydrogenhaliderne.*

**Opgave 8: ●●● Halogener og hydrogenbindinger**

Et vigtigt resultat der lægger grunden for en masse kemi, er at elektronkonfigurationer, hvor den yderste *s*- og *p*-orbital er fyldte er særligt stabile, hvilket leder til, hvad der i kemi kaldes "oktetreglen". Dette resultat har nogle interessante konsekvenser, der her vil undersøges.

**1**) Hvilken elektronkonfiguration har flour, $F$, der er grundstof nummer 9?

**2**) Flour står i 17. gruppe, der også kaldes halogenerne, som alle er karakteriseret ved at have samme elektronkonfiguration i deres yderste *s*- og *p*-orbitaler. Hvorfor er denne konfiguration speciel?

**3**) Ligesom hydrogen samler halogenerne sig i molekyler på formen $X_2$, hvor X er et vilkårlig halogen. Blandes en halogengas med hydrogengas forekommer følgende reaktion

$$H_2(g) + X_2(g) \longrightarrow 2HX(g)$$

Forklar med et molekylorbitaldiagram, hvorfor HF er mere stabilt end $H_2$ og $F_2$.

**4**) Hvilke atomorbitaler danner bindingen i HF, og hvilken type er det?

**5**) I eksemplet med $H_2$ er de to atomer ens, hvorfor orbitalen er symmetrisk omkring en akse midt imellem de to atomer. Hvis de to atomer er forskellige, eller det ikke er samme orbitaler der binder, er dette ikke nødvendigvis sandt. Hvorfor er molekylorbitalen for HF forskudt og imod hvilket atom?

**6**) Denne forskydning giver HF et dipolmoment[1], hvilket i denne sammenhæng fint kan tænkes som en ladningsforskydning, hvor alle elektronerne befinder sig tættere på det ene atom end det andet. Forklar hvorfor det betyder, at et HF-molekyle tiltrækkes af de andre, hvilket kaldes at de danner hydrogenbindinger?

**7**) HF er det eneste af hydrogenhaliderne, HX, der kan danne hydrogenbindinger, hvilket kan ses på

[1] Mere præcist kan det siges, at der er størst sandsynlighed for at de bindende elektroner befinder sig tættere på det ene atom end det andet, og ikke omvendt eller ligeligt fordelt. Det betyder at forventningsværdien, $\langle \vec{r} \rangle$, vil være forskudt mod det ene atom. Det siges derfor ladningen i gennemsnit samler sig hos dette atom, som så er partielt negativt ladet, mens det andet er partielt positivt ladet.

deres kogepunkter, figur 4.1. Hvorfor det?

Netop denne forskel gør flussyre, der er en vandig opløsning af HF, speciel. Den er i modsætning til de andre hydrogenhalider i stand til at opløse glas, hvorfor den ikke er så let at opbevare. Derudover kan den trænge igennem huden og opløse kroppen indefra, hvorfor eksempelvis saltsyre, HCl, oftere benyttes i laboratoriet.

## Spin

**Opgave 9: • Pauli princippet uden spin**
Lad $\hat{O}$ være ombytningsoperatoren. Som navnet antyder er det den operator, der får to elektroner til at bytte plads:

$$\hat{O}\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1)$$

Lad $\psi(x)$ være en én elektron tilstand, og $\Psi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$.

**1**) Hvad er $\hat{\Psi}(x_1, x_2)$?
For at en tilstand kan opfylde Pauli princippet, skal bølgefunktionen være antisymmetrisk under ombytning. Det vil sige $\Psi(x_1, x_2) = -\Psi(x_2, x_1)$.

**2**) Er $\Psi(x_1, x_2)$ tilladt ifølge Pauli?

**Opgave 10: •• Rumbølgefinktioner**
Lad os i stedet se på to elektroner i to forskellige tilstande $\psi_1$ og $\psi_2$. Her indikerer subscriptet på $\psi$ tilstanden, men subscripts på $x$ angiver hhv. elektron 1 og 2.
Lad nu

$$\Psi_{12}(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\,,$$
$$\Psi_{21}(x_1, x_2) = \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\,.$$

Udregn de følgende ombytninger.

**1**) $\hat{O}\Psi_{12}(x_1, x_2)$.

**2**) $\hat{O}\Psi_{21}(x_1, x_2)$.

**3**) $\hat{O}\Psi^S(x_1, x_2) = \hat{O}(\Psi_{12}(x_1, x_2) + \Psi_{21}(x_1, x_2))$.

**4**) $\hat{O}\Psi^A(x_1, x_2) = \hat{O}(\Psi_{12}(x_1, x_2) - \Psi_{21}(x_1, x_2))$.

**5**) Er bølgefunktionerne symmetriske, antisymmetriske eller ingen af delene.

**Opgave 11: ••• Pauli med spin**
Nu vil vi tage højde for spin. Det gøres ved at multiplicere bølgefunktionen med en spinfunktion. Elektronen kan have spin op eller spin ned. Det angives med $\alpha$ eller $\beta$. For at holde styr på hvilken partikel der har hvilket spin tilføjes et tal til spinfunktionen. Så har partikel 1 spin op og partikel 2 spin ned skrives det: $\chi = \alpha(1)\beta(2)$. Ombytningsoperatoren ombytter også, hvilken partikel der har hvilket spin. Hvad er:

**1**) $\hat{O}\alpha(1)\alpha(2)$.

**2**) $\hat{O}\beta(1)\beta(2)$.

**3**) $\hat{O}\alpha(1)\beta(2)$.

**4**) $\hat{O}\beta(1)\alpha(2)$.

**5**) Brug dette til at finde tre spinfunktioner, der er symmetriske under ombytning.

**6**) Find en spinfunktion der er antisymmetrisk under ombytning.

Tag nu højde for både spin- og rumdelen af den totale bølgefunktion.

**7**) Hvor mange muligheder er der, der er tilladt af Pauli princippet, når de to elektroner har samme tilstand?

**8**) Hvad er denne tilstand?

**9**) Hvor mange bølgefunktioner er tilladte, når de to elektrontilstande er forskellige.

# Kapitel 5

# Planetbevægelse

## Planetbaner og excentricitet

**Opgave 1: • Excentricitet og planetbaner**
Betragt formlen for afstanden mellem to objekter i bane omkring hinanden, ligning (5.7) i kompendiet.

**1)** Lad $\varepsilon = 0$. Hvad er $r(\varphi)$? Og hvilken geometrisk form er dette?

**2)** Lad $\varepsilon = 1$. Hvilket keglesnit fås? Hvad sker der med $r(\varphi)$, når $\varphi$ vokser mod $\pi$?

**3)** Lad $\varepsilon > 1$. Hvordan er dette tilfælde sammenlignet med det, hvor $\varepsilon = 1$? Beskriv forskellene mellem disse to.
Hint: Undersøg grænsebetingelser.

**Opgave 2: • Halleys komet**
Halleys komet, navngivet efter den angelske astronom Edmund Halley, kredser om Solen i en meget elliptiske bane med $\varepsilon = 0{,}967$. Den korteste afstand, som kommeten har til Solen, er $0{,}59$ AU.

**1)** Opstil et udtryk for den største afstand $r_{\text{maks}}$ som funktion af den korteste afstand $r_{\text{min}}$.

**2)** Beregn den største afstand til Solen.

**Opgave 3: • Excentricitet**

**1)** Find et udtryk for excentricitetet fra formlen udledt i opgave 2.

**2)** Hvad er den største og mindste værdi, som excentriciteten kan antage? Hvilke(n) type(r) bane(r) gør dette sig gældende for, og hvorfor?

## Tolegemeproblemet

**Opgave 4: • Ækvivalens i tolegemeproblemet**
I beskrivelsen af tolegemeproblemet blev det konkluderet, at den fælles afstand $r(\varphi)$ mellem de to objekter, kan beskrives som en ellipse, der er en funktion af vinklen $\varphi$ med brændpunkt i origo. Hvis vi kigger på et system bestående kun af Jorden og Solen, så betyder dette resultat, at det er lige så gyldigt at lægge solen i brændpunktet og se Jordens ellipsebevægelse omkring Solen, som at gøre det den anden vej rundt. Hvis Jorden lægges i brændpunktet, således at Jorden sættes til at stå stille, og Solens ellipsebane omkring Jorden observeres, hvordan vil massemidtpunktet så bevæge sig rent symbolsk?

**Opgave 5: • Ækvivalens i tolegemeproblemet II**
I opgave 4 blev Jorden sat som at være i brændpunktet. I denne opgave sættes massemidtpunktet i stedet i brændpunktet. Må man dette, og hvis ja, hvorfor? Hvordan vil Jordens og Solens bevægelse i dette tilfælde se ud?

## Bevægelsesligningerne

**Opgave 6: • Bevarelse af impulsmoment**
I afsnittet om bevarelse af impulsmoment i kompendiet argumenterede vi for, at det samlede impulsmoment for tolegemesystemet er bevaret.
I denne opgave skal det samme vises, men denne gang med udgangspunkt i hvert af legemerne for sig.

**1**) Lad origo være i massemidtpunktet for tolegemesystemet og tegn dette system, hvor legemerne (kaldet 1 og 2) er i apoapsis af deres bane, og indtegn disse baner, når der tages højde for deres relative excentricitet. Angiv også stedvektorerne for de to legemer. Tegn gerne stort, da der i senere spørgsmål skal tilføjes til denne tegning.

**2**) Indtegn de virkende kræfter og tag højde for deres relative længder.

Fra kapitlet om dynamik af roterende legemer i Analytisk Mekanik, udledte vi en ligning for kraftmomentet på et legeme, ligning (1.15)

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} \,,$$

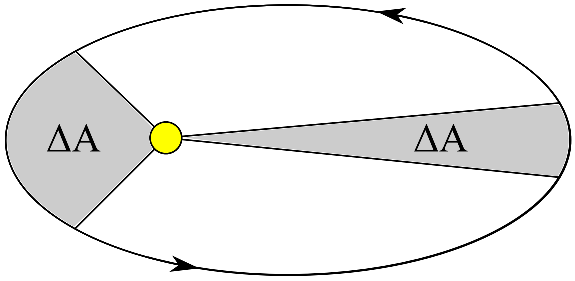
og for impulsmomentet, ligning (1.18)

$$\vec{\boldsymbol{\ell}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} \,.$$

**3**) Beregn kraftmomentet for hvert af legemerne.

**4**) Hvad fortæller de beregnede kraftmomenter om impulsmomenterne? Og hvad kan der herudfra konkluderes om systemets totale impulsmoment?

**5**) Indtegn retningen af det totale impulsmoment på tegningen, idet hvert af legemerne bevæger sig mod uret i deres respektive baner.




*Figur 5.1: Keplers 2. lov: I lige store tidsrum $\Delta t$ overstryger linjen mellem planeten og stjernen lige store arealer $\Delta A$.*

**Opgave 7: •• Keplers 3. lov**
Keplers 2. lov beskriver, at en planet bevæger sig i sin bane, således at linjen fra stjernen til planeten, som kredser om denne, overstryger lige store arealer i lige store tidsrum, se figur 5.1. Raten som linjen overstryger arealet med er dermed konstant, og den er givet ved

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{2\mu} \,,$$

hvor $\ell$ er impulsmomentet og $\mu$ er den reducerede masse. Det totale areal for en ellipse er givet ved

$$A = \pi a b \,,$$

hvor $a$ og $b$ er hhv. den halve stor- og lilleakse.
Perioden for planeten er givet ved

$$P = \frac{A}{\mathrm{d}A/\mathrm{d}t} \,.$$

**1**) Udled ved hjælp af ovenstående og nogle formler fra kompendiet Keplers 3. lov:

$$P^2 = \frac{4\pi}{G(m_1 + m_2)} a^3 .$$

**Opgave 8: ••• Energibevarelse og excentricitet**

For at finde en sammenhæng mellem excentricitet og energi betragtes en komet, der bevæger sig omkring et større objekt. Husk at energien, kompendiets ligning (5.40), er giver ved

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V_{\text{eff}}(r) .$$

I opgaven anvendes det at

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r} ,$$

hvor $\gamma = Gm_1 m_2$.

**1**) Hvad vil kometens hastighed være, når den er tættest på objektet, altså i en afstand $r_{min}$ fra det? Og hvad vil energien så være i dette tilfælde?
Hint: Til at bestemme hastigheden, prøv at overvej hvilken retning, den vil have lige før $r_{min}$ samt lige efter. Husk at der kigges på et endimensionelt problem. Overvej at tegne $r$ som funktion af vinklen.

**2**) Beregn $r_{\text{min}}$. Anvend definitionen af konstanten

$$c = \frac{\ell^2}{\gamma\mu} .$$

**3**) Indsæt værdien for $r_{\text{min}}$ i udtrykket for energie, $E(r_{\text{min}})$, og bestem et udtryk for energien ud fra excentriciteten. Anvend energibevarelse til at bestemme energien til alle steder på kometens bane.

**4**) Relater resultatet til de mulige baner. Hvis kometens totale energi er negativ, hvilken excentricitet kræves der så? Og hvordan bliver banen så? Hvad hvis energien er 0? Eller hvis den er positiv?

# Baneskift

**Opgave 9: • Boostfaktor**

En satellit er i kredsløb om Jorden i en cirkulær bane. Tegn den bane som fremkommer, når

**1**) $\lambda > 1$.

**2**) $1 > \lambda > 0$.

**3**) $0 > \lambda > -1$.

**4**) $\lambda < -1$.

**Opgave 10: •• Boostkraft**

En satellit boostes i punktet $P$ med en boostfaktor $\lambda$ for at skifte mellem to baner.

**1**) Vis at det tidslige gennemsnit af en kraft er givet ved

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{av} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{p}}}{\Delta t} .$$

**2**) Find størrelsen af boostkraften som satellitten skal påvirkes med i løbet af boostet, som foregår over et kort tidsrum $\Delta t$.
Hint: Brug forskellen i impulsmoment til at finde forskellen i impuls i punktet $P$.

**Opgave 11: •• Hohmannbane**

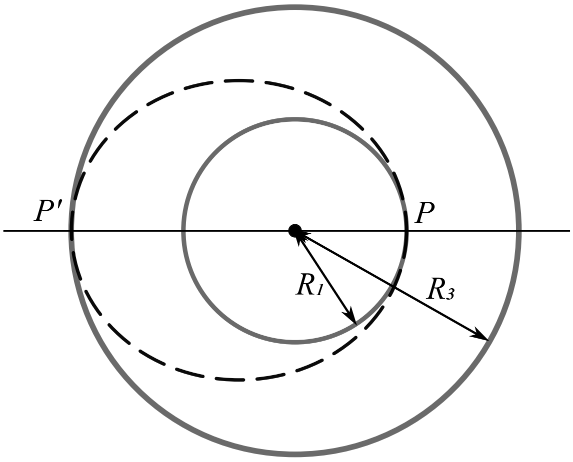
En måde at lave et baneskift er ved brug af en Hohmannbane. Denne bane er en ellipse, som har periapsis i den ene bane og apoapsis i den anden. I denne opgave betragtes en satellit, der benytter en Hohmannbane til at skifte mellem to cirkulære baner, figur 5.2, med radius $R_1$ og $R_3 = 2R_1$.

**1**) I hvilket punkt, $P$ eller $P'$, har Hohmann-banen hhv. periapsis og apoapsis.

**2**) Beregn boostfaktoren $\lambda$ for satellittens boost ved punktet $P$.
Hint: Opstil et udtryk for $R_3$ ved $R_1$.

**3)** Beregn boostfaktoren $\lambda'$ for satellittens boost ved punktet $P'$.
Hint: Betragt sammenfaldet mellem de to baner i $P'$.

**4)** Brug impulsmomentbevarelse til at udtrykke satelittens hastighed $v_3$ efter begge boosts ved dens hastighed $v_1$ før boostene.




*Figur 5.2: To cirkulære baner (grå) og en Hohmann-bane (stiplet) til at skifte mellem banerne.*

**Opgave 12:** •• **Hohmannbane II**
En satellit vil nu gerne i to steps skifte mellem tre cirkulære baner. I første step skifter den fra bane A til C via Hohmannbanen 1, og i andet step skifter den fra bane C til bane B via Hohmannbanen 2. Se figur 5.3. Bane A har radius $R_A$, bane B har radius $R_B = 3R_A$ og bane C har radius $R_C = 1,5R_B = 4,5R_A$. Beregn følgende boostfaktorer.

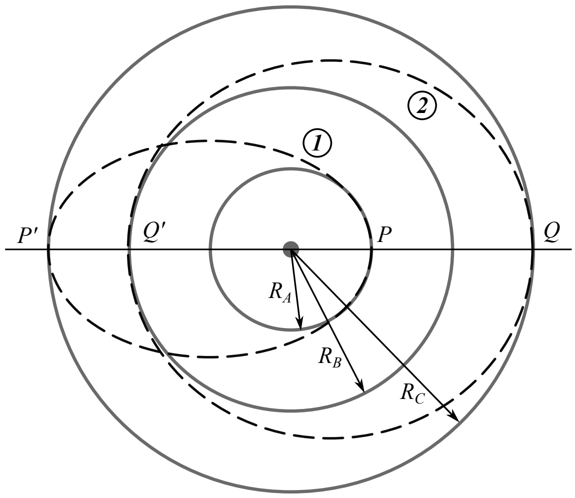
**1)** $\lambda_1$ i punktet $P$ for at skifte fra bane A til Hohmannbanen 1.

**2)** $\lambda_1'$ i punktet $P'$ for at skifte fra Hohmannbanen 1 til bane C.

**3)** $\lambda_2$ i punktet $Q$ for at skifte fra bane C til Hohmanbanen 2.

**4)** $\lambda_2'$ i punktet $Q'$ for at skifte fra Hohmannbanen 2 til bane B.

**5)** Hvad gør sig gældende for formen af boostfaktorerne $\lambda_1$ og $\lambda_2$ samt $\lambda_1'$ og $\lambda_2'$?
Hint: Generaliser boostfaktorerne.




*Figur 5.3: Tre cirkulære baner (grå) og to Hohmann-baner (stiplede) til at skifte mellem banerne.*

# Kapitel 6

# Matematik

## Polære Koordinater, Cosinus og Sinus

**Opgave 1: • Idiotformlen**
Man kalder oftest udtrykket $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ for idiotformlen, da man ofte glemmer den. Vis hvorfor dette udtryk er gældende ud fra definitionen af sinus og cosinus samt Pythagoras sætning.

**Opgave 2: • Tangens**
Vi betragter en retvinklet trekant med to kateter, den hosliggende katete $a$ og den modstående katete $b$, samt en hypotenuse $c$.

**1**) Vis hvorfor $\tan(\theta) = b/a$ ud fra definitionen af sinus og cosinus.

**2**) For $\tan(\theta) = 1$, find $\theta$.

**Opgave 3: • Retvinklede trekanter**
En retvinklet trekant har to kateter $a$, $b$ og en hypotenuse $c$. Vi antager at længderne af $a$ og $c$ er hhv. 5 og 13.

**1**) Bestem vinklen mellem $a$ og $c$ vha. cosinus.

**2**) Bestem længden af $b$ vha. tangens.

**3**) Bestem vinklen mellem $b$ og $c$ vha. sinus.

**Opgave 4: • Koordinatskift**
Omskriv følgende punkter skrevet i kartesiske koordinater til polære koordinater. Dvs. find $r$ og $\theta$ vha. de givne $x$ og $y$. Lav også en lille skitse af punkterne i et $xy$-koordinatsystem, hvor $r$ og $\theta$ indtegnes.

**1**) $x = 2$ og $y = 2$.

**2**) $x = 1$ og $y = -2$.
I 2) vælger man selv, om man vil regne $\theta$ som positiv (mod uret) eller negativ (med uret) ift. $x$-aksen.

**Opgave 5: • Koordinatskift 2**
Omskriv følgende punkter skrevet i polære koordinater til kartetiske koordinater, og lav en lille skitse af punkterne i et $xy$-koordinatsystem.

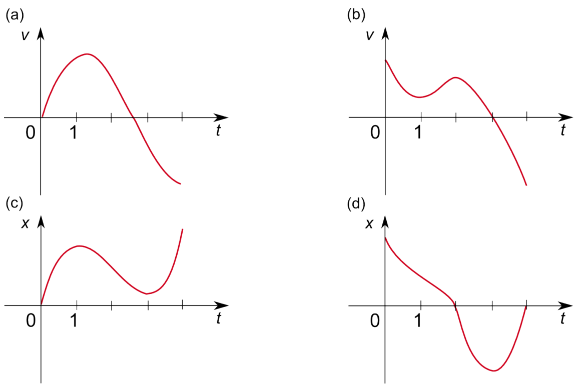
**1**) $r = 5$ og $\theta = \frac{\pi}{4}$.

**2**) $r = 5$ og $\theta = \frac{7\pi}{4}$.

**3**) $r = 13$ og $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

## Differentialregning

### Opgave 6: • Hastighed og postion




*Figur 6.1: Hastighed og position som funktion af tiden.*

**1)** Figur 6.1 (a) og (b) viser hastigheden af to objekter som funktion af tiden i sekunder. Hvornår sætter de to objekter hastigheden op, og hvornår sætter de hastigheden ned? Forklar dit svar.

**2)** Figur 6.1 (c) og (d) viser positionen af to objekter $x$ som funktion af tiden i sekunder. Hvornår sætter de to objekter hastigheden op, og hvornår sætter de hastigheden ned? Forklar dit svar.

### Opgave 7: • Afledede og dobbeltafledede

Find den afledede og dobbeltafledede med hensyn til $x$ for følgende funktioner:

**1)** $f(x) = x^3$.

**2)** $f(x) = x^2 + 4x$.

**3)** $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

**4)** $f(x) = \cos(x)$.

**5)** $f(x) = \ln(x)$.

**6)** $f(x) = x\sin(x)$.

**7)** $f(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$.

### Opgave 8: • Sammensatte funktioner

Skriv følgende udtryk som en sammensat funktion $f(g(x)$ (altså skal du identificere den indre funktion $g(x)$ og den ydre funktion $f(g)$). Beregn derefter $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

**1)** $f(x) = \sin(4x)$.

**2)** $f(x) = \sqrt{2x}$.

**3)** $f(x) = \sqrt{4x + 5}$.

**4)** $f(x) = \sin(e^x)$.

**5)** $f(x) = \ln(\cos x)$.

### Opgave 9: •• Funktioner af flere variable - partiel differentiering

I denne opgave skal vi kigge på partiel differentiering og kigger som et eksempel på funktioner af tre variable $f(x, y, z)$. For hver af de følgende funktioner skal I beregne den partielt afledede ift. både $x$, $y$ og $z$.

**1)** $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$.

**2)** $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{-z}$.

**3)** $f(x, y, z) = ze^{xyz}$.

**4)** $f(x, y, z) = \frac{x-y+5z}{x+y+z}$.

### Opgave 10: ••• Funktioner af flere variable - total differentiering

I denne opgave skal vi kigge på total differentiering og kigger som et eksempel på funktioner af fire variable $f(x, y, z, t)$. Vi antager at de tre første variable $x, y, z$ afhænger af den fjerde $t$, altså $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$. I skal nu beregne den totalt differentierede $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ for følgende funktioner.
Hint: Brug formel (A.3) i matematikafsnittet og resultaterne fra forrige opgave i 2) og 3).

**1)** $f(x, y, z, t) = xyz$.

**2)** $f(x, y, z, t) = x + y^2 + z^3$.

**3)** $f(x, y, z, t) = xy^2 + ye^{-z}$.

**4)** Diskuter hvad der sker i resultaterne for 1)-3), hvis variablene $x, y, z$ ikke afhænger af $t$.

# Integralregning

**Opgave 11: • Integraler og arealer under funktioner**
I matematikafsnittet i kompendiet nævnes det, at når man regner et bestemt integrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

så er svaret det samme som arealet under grafen for $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ på $x$-aksen. Brug dette faktum til at diskutere den fysiske forståelse af følgende udsagn.

**1)** Hvis man integrerer en hastighed $v(t)$ ift. tiden $t$, så får man en position $x(t)$.

**2)** Hvis man integrerer en acceleration $a(t)$ ift. tiden $t$, så får man en hastighed $v(t)$.

**Opgave 12: • Ubestemte integraler**
Udregn det ubestemte integrale af følgende funktioner:

**1)** $f(x) = x^3$.

**2)** $f(x) = x^2 + 4x$.

**3)** $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

**4)** $f(x) = \cos(x)$.

**5)** $f(x) = \ln(x)$.

**Opgave 13: •• Integration ved substitution**
Udregn de følgende integraler vha. integration ved substitution:

**1)** $\int e^{-4x}\,\mathrm{d}x$.

**2)** $\int \sqrt{3x-2}\,\mathrm{d}x$.

**3)** $\int xe^{-3x^2}\,\mathrm{d}x$.

**4)** $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

**Opgave 14: ••• Partiel integration**
Udregn de følgende integrale vha. partiel integration:

**1)** $\int 4x\cos(2-3x)\,\mathrm{d}x$.

**2)** $\int (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\,\mathrm{d}x$.

**3)** $\int (3x+x^2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

# Differentialligninger

**Opgave 15: • Specialtilfælde af 1. og 2. ordens differentialligninger**
I denne opgave skal I vise, at nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger.

**1)** Vis at funktionen $f(t) = -7e^{3t}$ løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 3f(t)\,.$$

**2)** Vis at funktionen $g(t) = \frac{2}{3}e^t + e^{-2t}$ løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + 2g(t) = 2e^t\,.$$

**3**) Vis at funktionen $h(t) = 5\sin(3t) - 10\cos(3t)$ løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = -9h(t)\,.$$

**4**) Tjek om funktionen $k(t) = 13\cos(8t + 45)$ løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}t^2} = -64k(t)\,.$$

**Opgave 16:** ●● **Generelle 1. ordens differentialligninger.**
I denne opgave skal I også vise, at nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger. Denne gang er funktionerne og differentialligningerne dog skrevet op på en mere generel form, dvs. at de kan indeholde arbitrære konstanter.

**1**) Vis at alle funktioner på formen

$$h(x) = \frac{1}{x + A}$$

løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -h(x)^2\ .$$

**2**) Vis at alle funktioner på formen

$$k(x) = \left(c - x^2\right)^{-1/2}$$

løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = xk(x)^3\ .$$

**3**) Vis at alle funktioner på formen

$$g(x) = \frac{\ln(x) + C}{x}$$

løser differentialligningen

$$x^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + xg(x) = 1\ .$$

**4**) Vis at alle funktioner på formen

$$f(x) = \frac{1 + ce^x}{1 - ce^x}$$

løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - 1\right)\ .$$

**Opgave 17:** ●●● **Hvornår er det en løsning?**
I denne opgave skal I finde ud af, hvornår nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger. Sagt med andre ord skal I finde de specifikke værdier for nogle af de konstanter, der indgår i funktionerne, som gør at funktionerne løser differentialligningerne.

**1**) For hvilke værdier af $k$ løser funktionen

$$f(y) = \cos(ky)$$

differentialligningen

$$4\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} = -25f(y)\,.$$

**2**) Tjek for de værdier af $k$ I fandt i 1), at funktionen $g(y) = A\sin(ky) + B\cos(ky)$ også løser differentialligningen

$$4\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = -25g(y)\,.$$

**3)** For hvilke værdier af $r$ løser funktionen

$$h(y) = e^{ry}$$

differentialligningen

$$2\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} - h(y) = 0\,.$$

**4)** Lad $r_1$ og $r_2$ være de konstanter du fandt i 3). Tjek at funktionen $k(y) = ae^{r_1 y} + be^{r_2 y}$ også løser differentialligningen

$$2\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} - k(y) = 0\,.$$

## Taylorapproksimationer

**Opgave 18: • Approksimation af funktion**
I denne opgave skal I prøve at kigge lidt nærmere på Taylorapproksimationer, og hvad det egentligt er for en størrelse. Dette skal gøres på baggrund af formel (A.7) fra matematikafsnittet i kompendiet.

**1)** Diskuter betydningen af de enkelte led i summen. Hvordan ser de ud som funktioner af $x$, og hvorfor bliver approksimationen bedre af at tage flere led med?

**Opgave 19: •• Taylorpolynomier for simple funktioner**
I denne opgave skal I bestemme Taylorpolynomierne $T_0(x)$, $T_1(x)$ og $T_2(x)$ for følgende funktioner vha. formel (A.7) i kompendiet.

**1)** $f(x) = \cos(x)$.

**2)** $f(x) = \sin(x)$.

**3)** $f(x) = e^x$.

**4)** Indsæt nu $a = 0$ i jeres resultater for $T_2(x)$ i 1)-3), og tjek om svaret stemmer med Taylorpolynomierne i tabel A.1 i matematikafsnittet i kompendiet.

**Opgave 20: ••• Jordens form**
Betragt nu funktionen

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\,,$$

hvor $x \in [-R, R]$ og $R$ er en positiv konstant.

**1)** Bestem Taylorpolynomierne for $f(x)$ til 0., 1. og 2. orden omkring $x = 0$.

**2)** Hvilke typer af funktioner giver hver approksimationsorden?

**3)** Funktionen $f(x)$ beskriver den øvre del af en cirkel med centrum i origo, $(0, 0)$, i et $xy$-koordinatsystem, hvor $y = f(x)$. Den nedre del fås ved at sætte et negativt fortegn på, dvs. $g(x) = -f(x)$. Skitser $f(x)$ og $g(x)$, samt approksimationerne af de to funktioner til 0., 1., og 2. orden for $x \in [-R, R]$.
Hint: Approksimationerne af $g(x)$ er de samme som for $f(x)$ men med det modsatte fortegn.

**4)** Antag at resultaterne fra 3) generaliserer til tre dimensioner, dvs. en funktion af to variable $f(x, y)$[1], der beskriver overfladen af den øvre halvdel af en sfære. Hvilke geometriske objekter får man da for hver af de 3 approksimationsordner, hvis der udvikles omkring $(x, y) = (0, 0)$?

**5)** Brug dette til, under antagelse af at Jorden kan beskrives som en perfekt sfære, at konkludere, hvilke andre geometriske former Jorden kan anses for at have, hvis man nu kun forstod verden til de lavere approksimationsordner.

[1] Taylorrækken for en funktion af $n$ variable kan i ord beskrives som en sum af $n$ Taylorrækker, hvor der bruges partielt afledede. Det er super grimt at skrive op, men fungerer på samme måde som for én variabel.

## Komplekse tal

**Opgave 21: • Den komplekse plan**
Tegn følgende komplekse tal i den komplekse plan.

**1)** $z = 5$.

**2)** $z = -3i$.

**3)** $z = 4 + 7i$.

**4)** $z = -3 - 2i$.

**Opgave 22: • Regning med komplekse tal**
I denne opgave kigger vi på de komplekse tal:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + 2i\,, \\ z_2 &= -6 + i\,, \\ z_3 &= 1 - 5i\,, \\ z_4 &= -4 + 3i\,. \end{aligned}$$

**1)** Beregn $z_1 + z_2$ og $z_3 + z_4$.

**2)** Beregn $z_1 - z_2$ og $z_3 - z_4$.

**3)** Beregn $z_1 z_2$ og $z_3 z_4$.

**4)** Beregn $z_1/z_2$ og $z_3/z_4$.

**5)** Beregn $|z_1|$ og $|z_2|$ samt $|z_3 z_4|^2$.

**Opgave 23: •• Regneregler for modulus og normkvadratet**
I denne opgave skal vi kigge på de regneregler for modulus samt normkvadratet for komplekse tal, der er præsenteret i matematikafsnittet.

**1)** Eftervis formlerne for modulus (A.16), (A.17) og (A.18).

**2)** Eftervis formlen for normkvadratet (A.19).

**Opgave 24: ••• Eulers formel og komplekse tal på polær form**
Her skal vi arbejde med Eulers formel og prøve at få lidt intuition for, hvordan funktionen $e^{ix}$ opfører sig. I 5) skal I videre kigge på det, der kaldes for den polære form for komplekse tal.

**1)** Tegn det komplekse tal $e^{ix}$ vha. Eulers formel (A.21) fra matematikafsnittet for $x = 0,\ \pi/2,\ \pi, 3\pi/2$ (hvis ens lommeregner regner i grader for $\cos(x)$ og $\sin(x)$ skal man bruge $x = 0,\ 90,\ 180,\ 270$ i stedet). Hvilken vej bevæger $e^{ix}$ sig rundt i den komplekse plan, når $x$ vokser?

**2)** Ændres modulus af $e^{ix}$, hvis man ændre på $x$? Hint: Regn modulus af $e^{ix}$ vha. Eulers formel.

**3)** Hvilken vej tror du, at $e^{-ix}$ bevæger sig rundt i den komplekse plan, når $x$ vokser?

**4)** Ændres modulus af $e^{-ix}$, hvis man ændre $x$?

**5)** Vis at ethvert komplekst tal $z = a + bi$ kan skrives på følgende form

$$z = |z|\, e^{i\theta}\,, \tag{6.1}$$

hvor $\theta = \arctan(b/a)$. Her er $\theta$ vinklen mellem den reelle akse og $z$ i det komplekse plan, og kaldes for $z$'s argument. I skal altså starte med $z = a + bi$ og omskrive, indtil i får noget på formen $|z|e^{i\theta}$. Denne måde at skrive et komplekst tal kaldes for den polære form.
Hint: Tegn $z$ i det komplekse plan og udtryk $a, b$ ved $|z|, \theta$ før I begynder at skrive om.

**Opgave 25: •• Komplekse ligninger**
Løs de følgende komplekse ligninger for $z$.

**1)** $\frac{z-2}{z+1} = 3i$.

**2)** $z + 3z^* = 5 - 6i$.

# Vektorer

**Opgave 26: • Længden af en vektor**
Beregn længden af de to vektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Opgave 27: • Addition, subtraktion og skalarmultiplikation med vektorer**
Her vil vi kigge på, hvordan man lægger/trækker vektorer til/fra hinanden, og hvordan man ganger en vektor med en skalar (et tal). I denne opgave genbruger vi de to vektorer fra forrige opgave

**1)** Bestem $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

**2)** Bestem $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

**3)** Bestem $5 \cdot \vec{v}_1$ og $5 \cdot \vec{v}_2$.

**4)** Bestem $5 \cdot \left(\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2\right)$ og sammenlign med $5 \cdot \vec{v}_1 \pm 5 \cdot \vec{v}_2$. Hvad betyder dette resultat?

**Opgave 28: •• Skalarproduktet**
Nu skal vi kigge på, hvordan man ganger med vektorer, og starter med skalarproduktet. Igen bruger vi vektorerne fra forrige opgave.

**1)** Bestem $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ og sammenlign med $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$. Har rækkefølgen af vektorerne betydning?

**2)** Tjek formlen $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ for $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.

**3)** Brug formel (A.28) til at bestemme vinklen $\theta$ mellem $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.

**4)** Hvad betyder det for vinklen $\theta$ mellem to vektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, hvis skalarproduktet $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ og $\left|\vec{v}_1\right|, \left|\vec{v}_2\right| \neq 0$?

**Opgave 29: •• Krydsproduktet**
Vi kigger nu på krydsproduktet og genbruger atter vektorerne fra tidligere.

**1)** Bestem $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ og sammenlign med $\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$. Har rækkefølgen af vektorerne i et krydsprodukt nogen betydning?

**2)** Bestem $\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|$.

**3)** Brug formel (A.30) til at bestemme vinklen mellem $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$. Tjek at dit svar stemmer med resultatet du fandt i forrige opgave.

**4)** Hvad betyder det for vinklen $\theta$ mellem to vektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, hvis krydsproduktet $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$ og $\left|\vec{v}_1\right|, \left|\vec{v}_2\right| \neq 0$?

**Opgave 30: •• Regning med enhedsvektorer**
I denne opgave vil vi kigge lidt på, hvordan man kan regne med vektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, når disse skrives vha. enhedsvektorer. Vi vælger her at skrive vores vektorer på en generel form

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \end{bmatrix}.$$

**1)** Opskriv $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ vha. enhedsvektorerne $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

**2)** Tjek at

$$\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 = (v_{x_1} \pm v_{x_2})\hat{\mathbf{x}} + (v_{y_1} \pm v_{y_2})\hat{\mathbf{y}} + (v_{z_1} \pm v_{z_2})\hat{\mathbf{z}}\,.$$

**3)** Beregn de forskellige skalarprodukter mellem enhedsvektorerne $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$. Altså $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$ osv.

**4)** Brug resultaterne fra 3) til at beregne skalarproduktet vha. enhedsvektorer. Stemmer dit resultat med den normale formel for skalarproduktet?

**5)** Beregn de forskellige krydsprodukter mellem enhedsvektorerne $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$. Altså $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}$ osv.

**6)** Brug resultaterne fra 5) til at beregne krydsproduktet vha. enhedsvektorer. Stemmer dit resultat?

## Fysiske Størrelser, Konstanter og Specielle Enheder

| **Konstant** | **Symbol** | **Værdi** | **Enhed** |
|---|---|---|---|
| Lysets fart i vakuum | $c$ | $2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}$ | $\mathrm{m\,s^{-1}}$ |
| Gravitationskonstanten | $G$ | $6{,}6742 \cdot 10^{-11}$ | $\mathrm{N\,m^{2}\,kg^{-2}}$ |
| Plancks konstant | $h$ | $6{,}626\,069\,3 \cdot 10^{-34}$ | $\mathrm{J\,s}$ |
| Reduceret Plancks konstant | $\hbar = h/(2\pi)$ | $1{,}054\,571\,8 \cdot 10^{-34}$ | $\mathrm{J\,s}$ |
| Boltzmanns konstant | $k_B$ | $1{,}380\,650\,6 \cdot 10^{-23}$ | $\mathrm{J\,K^{-1}}$ |
| Stefan-Boltzmanns konstant | $\sigma$ | $5{,}670\,373 \cdot 10^{-8}$ | $\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ |
| Avogadros tal | $N_A$ | $6{,}022\,141 \cdot 10^{23}$ | $\mathrm{mol^{-1}}$ |
| Gaskonstanten | $R = N_A k_B$ | $8{,}314\,459\,8$ | $\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ |
| Elementarladningen | $e$ | $1{,}602\,176\,565 \cdot 10^{-19}$ | $\mathrm{C}$ |
| Vakuumpermittiviteten | $\varepsilon_0$ | $8{,}854\,187\,817 \cdot 10^{-12}$ | $\mathrm{C^{2}\,N^{-1}\,m^{-2}}$ |
| Vakuumpermeabiliteten | $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}$ | $\mathrm{N\,A^{-2}}$ |

| **Størrelse** | **Symbol** | **Værdi** | **Enhed** |
|---|---|---|---|
| Bohrradius | $a_0$ | $5{,}291\,772\,106\,7 \cdot 10^{-11}$ | m |
| Jordens radius | $R_\oplus$ | $6{,}371 \cdot 10^{6}$ | m |
| Jordens masse | $M_\oplus$ | $5{,}972\,19 \cdot 10^{24}$ | kg |
| Solens radius | $R_\odot$ | $6{,}957\,00 \cdot 10^{8}$ | m |
| Solens masse | $M_\odot$ | $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ | kg |
| Solens overfladetemperatur | $T_\odot$ | $5{,}778 \cdot 10^{3}$ | K |
| Jupiters masse | $M_J = M_{\mathrm{Jup}}$ | $1{,}898 \cdot 10^{27}$ | kg |
| Protonens masse | $m_p$ | $1{,}672\,621\,898 \cdot 10^{-27}$ | kg |
| Neutronens masse | $m_n$ | $1{,}674\,927\,471 \cdot 10^{-27}$ | kg |
| Elektronens masse | $m_e$ | $9{,}109\,383\,56 \cdot 10^{-31}$ | kg |

| **Enhed** | **Symbol** | **Værdi** | **SI-Enhed** |
|---|---|---|---|
| Astronomisk enhed | AU | $1{,}495\,978\,707\,00 \cdot 10^{11}$ | m |
| Lysår | ly | $9{,}460\,528\,4 \cdot 10^{15}$ | m |
| Parsec | pc | $3{,}085\,677\,58 \cdot 10^{16}$ | m |
| Atomar masseenhed | u | $1{,}660\,539\,04 \cdot 10^{-27}$ | kg |
| Ångström | Å | $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ | m |
| Elektronvolt | eV | $1{,}602\,176\,62 \cdot 10^{-19}$ | J |
| År | yr | $31\,556\,925{,}445$ | s |

# Del II

# Facitlister

# Kapitel 1

# Analytisk Mekanik

## Koordinatsystemer

**Opgave 1:** • **Gode koordinatsystemer**

**1**) Det gode koordinatsystem beskriver et problem så simpelt som muligt, og det har det færrest mulige antal frihedsgrader.

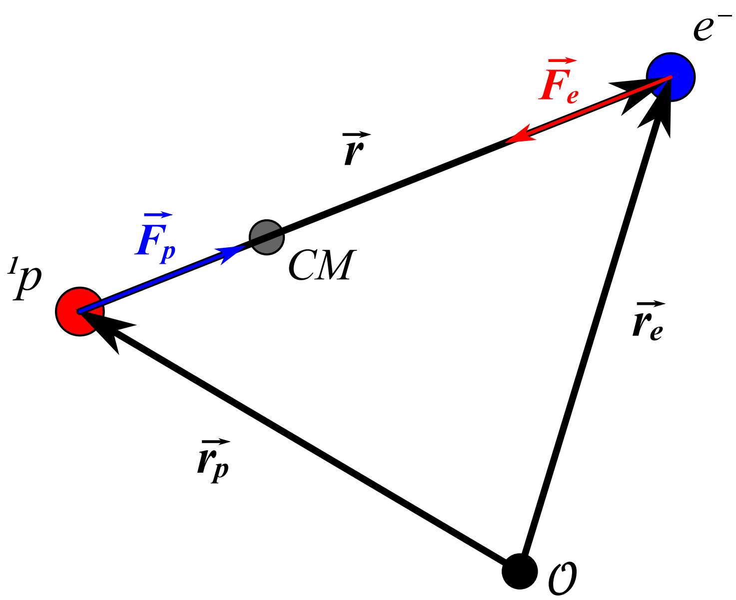
**2**) Symmetrier mindsker antallet af frihedsgrader, fordi det restringerer koordinaterne, således at et eller flere koordinater ophører med at være frie.

**3**) Det simpleste er at bruge det koordinatsystem, som beskriver symmetrien bedst.
a) Kartesisk koordinatsystem, idet planer beskrives ved et fastholdt kartesisk koordinat. Eksempelvis er $xz$-planet alle punkter hvor $y = 0$, men dette gælder også for ethvert andet plan i rummet. Bemærk også at $xy$-planet er lige simpelt beskrevet i cylinderkoordinater.
b) Cylindrer er pænest beskrevet i cylinderkoordinater, hvorfor dette er det smarte valg, se opgave 9.
c) Sfærer er simplest i sfæriske koordinater, hvorfor det er lettest at bruge sfæriske koordinater. Sfærisk symmetri ser man ofte i problemer hvor det er afstanden mellem to objekter, der er afgørende, for eksempel den gravitationelle interaktion mellem to legemer.

**Opgave 2:** • **Generaliserede koordinater**

**1**) $r$ er afstanden fra centrum og $\varphi$ er en vinkel der beskriver hvor på cirkelen objektet er. Her er valgt vinkelen fra vandret. Lidt trigonometri giver at $x$ og $y$ er:

$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$




*Figur 1.1: Illustration af brintatomet med arbitrært origo, $O$, og massemidtpunkt $CM$. Derudover er kraften fra protonen på elektronen, $\vec{F}_e$, indtegnet og farvet rød for at gøre den tydeligere, og ligeså for den blå kraft fra elektronen på protonen.*

**2**) Når objektet bevæger sig ændres både $x$ og $y$, hvorfor to koordinater ændres.

**3**) Afstanden til centrum er altid den samme så $r = R$ altid.

**4**) Da $R$ er konstant er det nok at beskrive systemet med vores ene variabel $\varphi$.

**5**) Vi vil gerne beskrive systemet så simpelt så muligt, derfor er det smartest at bruge polære koordinater.

**Opgave 3: •• Brint**

**1**) Eftersom $m_p \approx 2000 m_e$ er massemidtpunktet forskudt mod protonen således at at $\vec{r}_e$ er i størrelsesordenen $2000\vec{r}_p$. For at gøre tegningen overskuelig er massemidtpunktet angivet markant tættere på midten, se figur 1.1.

**2**) Afstanden mellem protonen og elektronen.

**3**) Se figur 1.1.

**4**) I massemidtpunktet, da problemet så reducerer til to generaliserede koordinater, idet der altid eksisterer en linje, som både protonen, elektronen og deres fælles massemidtpunkt befinder sig på.

**5**) Antagelsen giver mulighed for at benytte følgende approksimationer

$$\begin{aligned} a) &\quad m_p + m_e \simeq m_p\,, \\ b) &\quad \frac{m_e}{m_p} \simeq 0\,, \end{aligned}$$

hvorved

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{CM}} &= \frac{m_e \vec{\boldsymbol{r}}_e + m_p \vec{\boldsymbol{r}}_p}{m_e + m_p} \\
&\simeq \frac{m_e \vec{\boldsymbol{r}}_e + m_p \vec{\boldsymbol{r}}_p}{m_p} \\
&= \frac{m_e}{m_p} \vec{\boldsymbol{r}}_e + \vec{\boldsymbol{r}}_p \\
&\simeq \vec{\boldsymbol{r}}_p \ .
\end{aligned}
$$

**6**) $\vec{\boldsymbol{F}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_e}{r_e^3}$ idet $\vec{\boldsymbol{r}}_p = 0$ i dette koordinatsystem.

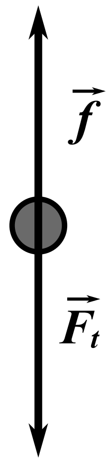
# Energi

**Opgave 4:** • **Energibevarelse**

**1**) Det kunne være nogle af følgende:
– Kinetisk energi
– Potentiel energi
– Mekanisk energi
– Termisk energi
– Elektrisk energi
– Kemisk energi
– Bindingsenergi
– Masse
– Et cetera

**2**) Der er flere mulige forklaringer, men her er nogle forslag:
– En konservativ kraft er en kraft for hvilken arbejdet, den udfører, på et legeme under bevægelse fra et punkt til et andet, er uafhængig af vejen mellem de to punkter.
– En konservativ kraft er en kraft, der omsætter potentiel energi til kinetisk energi eller omvendt uden tab.
– En konservativ kraft er en kraft, der bevarer mekanisk energi.
– Hvis et legeme bevæger sig i en lukket bane og det totale arbejde fra en kraft et nul, da siges kraften at være konservativ.
– $\vec{\boldsymbol{F}}$ er konservativ, hvis

$$
\oint \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0
$$




*Figur 1.2: Legemet er påvirket at en tyngdekraft $\vec{F}_t$ og en friktionskraft $\vec{f}$.*

– En konservativ kraft er udelukkende stedafhængig, og ethvert punkt i rummet kan derfor tildeles en potentiel energi.

**3**) Der er flere muligheder her. Til bevaret mekanisk energi kan det eksempelvis være:
– Bold i tyngdefelt i vakuum.
– Lod på fjeder, uden gnidning, små udsving.
– To ladede partikler.

Tre situationer, hvor mekanisk energi ikke er bevaret, kan eksempelvis være:
– Kugle skudt afsted under vand.
– Deformation af fjeder/andet materiale, over elastisk grænse.
– Uelastiske stød.

**4**) I de tre foreslåede eksempler:
– Kuglen påvirkes af vandmodstand.
– Der går energi til deformation af fjederen.
– Der går energi til deformation/sammensætning af de stødende legemer.

**Opgave 5:** • **Frit fald**

**1**) Se figur 1.2.

**2**) Friktion er ikke en konservativ kraft, idet den omsætter kinetisk energi til termisk energi i stedet for potentiel energi.

**3**) Negliceres friktion er der energibevarelse, hvorfor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + mg(0) \\ \xRightarrow{v_0=0} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

**4**) Hvis $h$ er meget stor er den en dårlig antagelse, idet legemet vil nå sin terminalhastighed, før den rammer Jorden. Negligeres friktionen ophører terminalhastigheden med at eksistere, hvilket gør antagelsen dårlig. Luftmodstand beskrives ofte på en af de to følgende former:

$$\vec{f} = \begin{cases} -c_1 v \\ -c_2 v^2 \end{cases}$$

hvor $v$ er hastigheden og $c_i$ er konstanter, som afhænger af legemets udformning. For at friktionskraften skal være negligibel, må konstanterne $c_i$ være relativt små, og $h$ skal være tilpas lille til at hastigheden ikke når at blive for stor, hvorfor et bud på et sæt af kriterier er

$$\begin{aligned} h &\ll 2g\,, \\ c_i &< 1\,. \end{aligned}$$

Der er ikke noget entydigt rigtigt svar, da problemet ikke skal analyseres grundigt nok til at gøre dette stringent, men der bør fremgå en fysisk forståelse for situationen af kriteriet.

**Opgave 6:** • **Kollisioner**

**1**) Newtons 3. lov.

**2**) Newtons 3. lov giver at kraften er lige stor og modsatrettet.

**3**) Af det ovenstående er

$$\vec{\boldsymbol{F}}_1 = -\vec{\boldsymbol{F}}_2\,,$$

hvorved Newtons 2. lov siger at den samlede kraft på systemet er

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2) \\ \vec{\boldsymbol{F}}_1 - \vec{\boldsymbol{F}}_1 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2) \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2)\,. \end{aligned}$$

Ergo er den totale impuls bevaret.

**4**) Af opgave 4 er et legemes mekaniske energi bevaret, hvis legemet kun er påvirket af konservative kræfter. Da der er set bort fra eventuelle ydre kræfter, er den potentielle energi i systemet $V = 0$, hvorfor den kinetiske energi er bevaret, hvis legemerne kun påvirker hinanden med konservative kræfter.
a) Af definitionen af et elastisk stød, er legemerne kun påvirket af konservative kræfter, hvorfor den kinetiske energi er bevaret.
b) Uelastiske kollisioner er alle kollisioner, hvor legemerne påvirker hinanden på en måde, der er ikke er konservativ, hvorfor den kinetiske energi ikke er bevaret.

**Opgave 7:** •• **Bevægelse omkring ligevægt**

**1**) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = V_0\left(\frac{1}{R} - \lambda^2\frac{R}{r^2}\right)$
**2**) Ligevægtspunktet bestemmes ved at sætte den afledede til nul og benytte nulreglen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,, \\ \Longrightarrow\quad \frac{1}{R} &= \lambda^2\frac{R}{r^2}\,, \\ \Longrightarrow\quad r_0 &= \lambda R\,. \end{aligned}$$

**3**) Den andenafledte er:

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2} = \frac{2V_0R\lambda^2}{r^3}\,.$$

**4**) Der er tale om et minimum, hvis den anden afledede evalueret i minimaet er positiv. Det gælder da alle konstanterne er antaget positive.

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=\lambda R} = \left.\frac{2V_0R\lambda^2}{r^3}\right|_{r=\lambda R} = \frac{2V_0}{\lambda R^2} > 0\,.$$

**5**) Først isoleres $r$ i definitionen af $x$ og derefter indsættes det i funktionen $V(r)$.

$$\begin{aligned} r &= x + r_0 \\ \Longrightarrow\quad V(x) &= V_0\left(\frac{x+r_0}{R} + \lambda^2\frac{R}{x+r_0}\right) \end{aligned}$$

**6**) Taylorudviklingen af en funktion $f(x)$ omkring $x = 0$ til anden orden er

$$f(x) \simeq f(0) + x\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} + x^2\,\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}\,.$$

I første omgang bestemmes potentialets minimum

$$\begin{aligned}V(x=0) &= V_0\left(\frac{\lambda R}{R} + \lambda^2\frac{R}{\lambda R}\right)\\ &= 2V_0\lambda\,.\end{aligned}$$

Herefter bestemmes den første afledede evaluerede i nul

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} &= \left[\frac{V_0}{R} - V_0\lambda^2\frac{R}{(x+r_0)^2}\right]_{x=0}\\ &= \frac{V_0}{R} - V_0\lambda^2\frac{R}{r_0^2}\\ &= \frac{V_0}{R} - V_0\lambda^2\frac{R}{(\lambda R)^2}\\ &= \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} = 0\,.\end{aligned}$$

Så den anden afledede

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} &= \left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\left(\frac{V_0}{R} - V_0\lambda^2\frac{R}{(x+r_0)^2}\right)\right]_{x=0}\\ &= \left.\frac{2V_0R\lambda^2}{(x+r_0)^3}\right|_{x=0}\\ &= \frac{2V_0Rr_0\lambda^2}{r_0^3}\\ &= \frac{2V_0R\lambda^2}{(R\lambda)^3}\\ &= \frac{2V_0}{\lambda R^2}\,.\end{aligned}$$

Dermed bliver den potentielle energi omkring ligevægtspunktet $r_0$

$$V(x) \simeq 2V_0\lambda + \frac{1}{2}\frac{2V_0}{\lambda R^2}x^2 = c + \frac{1}{2}kx^2\,,$$

hvor $c$ og $k$ er defineret som

$$\begin{aligned}c &= 2V_0\lambda\,,\\ k &= \frac{2V_0}{\lambda R^2}\,.\end{aligned}$$

Supplerende kan de siges at nulpunktet for potentiel energi er arbitrært, hvorfor $V = (1/2)kx^2$ er lige så validt et potential at benytte.

**7**) Vinkelfrekvensen for den harmoniske oscillator er

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left(\frac{2V_0}{m\lambda R^2}\right)^{1/2}\,.$$

Er det ikke oplagt at vinkelfrekvensen for en harmonisk oscillator opfylder at $\omega^2 = k/m$, så kan der henvises til de forskellige beskrivelser af pendulet, det vil sige afsnittene 1.3 og 1.6 i kompendiet.

**Opgave 8:** ••• **(Næsten) alt er en harmonisk oscillator**

**1**) Potentialet er arbitrært, så det indsættes bare i ligning (A.7) i kompendiet analogt til eksemplet med $e^x$

$$V(x) \simeq V(x=0) + x \left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} + \frac{1}{2}x^2 \left.\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} . \tag{1.1}$$

Der kan ikke gøres mere, da $V(x)$ er ukendt.

**2**) Sammenlignes ligning (1.1) med med den harmoniske oscillator, $f(x)$, i opgaven, ses det at

$$c = V(x=0)\,,$$

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} ,$$

idet de afledede bliver en konstant, når de evalueres i et punkt. Ledet $x \left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ passer dog ikke ind, og kriteriet må derfor være at dette er nul for alle værdier af $x$, hvorfor differentialet må være nul:

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0 \ \ \forall\ x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

**3**) Det kunne være følgende funktioner, hvor store bogstaver er konstanter

$$\begin{aligned}
\text{Parabel uden førstegradsled:}\quad & f(x) = A + Bx^2 \\
\text{Gaussfunktion:}\quad & f(x) = -Ae^{-Bx^2} \\
\text{Cirkel:}\quad & f(x) = \frac{\pm A}{\sqrt{1-x^2}} \\
\text{Morsepotentiale:}\quad & f(x) = A\left(1-e^{-Bx}\right)^2 \\
\text{Potentialet fra opgave 7:}\quad & f(x) = A\left(\frac{x}{B} + C^2\frac{B}{x}\right) \\
\text{Effektivt potentiale for planetbevægelse:}\quad & f(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} \\
\text{Trigonometrisk:}\quad & f(x) = A\cos(Bx+C) + D \\
\text{Hyperbolsk cosinus:}\quad & f(x) = A\left(e^{(Bx)} + e^{(-Bx)}\right) = 2A\cosh(Bx) \\
\text{Og så videre:}\quad & f(x) = \ldots
\end{aligned}$$

Cosinus og den hyperbolske cosinus kræver dog at de evalueres i et punkt, hvor henholdsvis sinus og sinus hyperbolsk er nul. Dermed kan sinus (hyperbolsk) også bruges under samme betingelser.

**4**) $V(x)$ og $\tilde{V}(x)$ opfører sig ens hvis deres afledede er ens

$$\frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \overset{\partial\lambda/\partial x = 0}{=\!=\!=\!=} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \,,$$

da $\lambda$ er en konstant.

**5**) Eftersom $c$ er en konstant gælder det samme for den, som for $\lambda$, hvorfor den kan lægges til med modsat fortegn. Derfor vælges $\lambda = -c$, hvorved den harmoniske oscillators potentielle energi kan skrives som

$$\tilde{V}(x) = V(x) - c = \frac{1}{2}kx^2 \,.$$

# Etlegemeproblemer

**Opgave 9:** • **Partikel på en cylinder**

**1**) Siden partiklen er fastlåst på overfladen af cylinderen er $r$ koordinatet altid lig radien af cylinderen:

$$r = R$$

Resten er frie.

**2**) Lad os starte med den letteste: $z$. Der er det samme i kartesiske og cylindriske koordinater.

$$\dot{z} = \dot{z}$$

De to andre afhænger kun af $\varphi$, så efter kædereglen følger:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ \dot{y} &= R\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{aligned}$$

**3**) I kartesiske koordinater er:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Vi kan her bruge Pythagoras sætning for enhedstrekanten:

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

Så den kinetiske energi er:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi) + R^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \,. \end{aligned}$$

**4**) Siden potentialet er nul er Lagrangefunktionen:

$$L = K = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

**5**) Generelt er en Euler-Lagrangeligning på formen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Igen lad os starte med $z$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Det giver Euler-Lagrangeligningen for $z$:

$$m\ddot{z} = 0$$

Tilsvarende for $\varphi$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mR^2\ddot{\varphi}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Det giver Euler-Lagrangeligningen for $\varphi$:

$$mR^2\ddot{\varphi} = 0$$

Begge differentialligninger kan reduceres så vi ender med:

$$\ddot{z} = 0\,,$$
$$\ddot{\varphi} = 0\,.$$

**6**) Begge differentialligninger giver bevægelse med konstant hastighed. For $z$ er det konstant hastighed langs cylinderaksen. For $\varphi$ er det cirkulær bevægelse omkring aksen. Kombineret giver det en spiralbevægelse. Som en bonus er løsningen til bevægelsesligningerne:

$$z(t) = v_z t + z_+0$$
$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$
$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t + \varphi_0)$$

**Opgave 10:** • **Atwoods faldmaskine**

**1**) Snorlængden er konstant, og af tegningen, figur 1.2, fremgår det at længden af snoren kan udtrykkes som

$$l = x + y + \pi R\,.$$

Da $R$ og $l$ er konstanter kan $y$ udtrykkes ved $x$ som

$$y = l - x - \pi R\,. \tag{1.2}$$

**2**) Differentieres (1.2) med hensyn til tid fås

$$\dot{y} = -\dot{x}\,, \tag{1.3}$$

idet $l$, $\pi$, $R$ er konstanter.

**3**) Den potentielle energi findes ved at bruge formlen $V = mgh$ hvor $h$ er forskydningen fra nulpunktet. Hvert lod er forskudt henholdsvis $x$ og $y$ i negativ retning, hvorfor

$$V = -g(m_1 x + m_2 y)\,. \tag{1.4}$$

Dette skyldes at nulpunktet for den potentielle energi for hvert lod er valgt til henholdsvis $x = 0$ og $y = 0$. Den potentielle energi skal så falde, når for hvert lod skal så falde, når henholdsvis $x$ og $y$ bliver mindre, hvilket giver fortegnet i ligning (1.4).

Er man stor modstander af konceptet om negativ potentiel energi, så kan man definere nulpunktet i afstanden $H$ under faldmaskinen. Derved bliver den højde, $h$, der er relevant for den potentielle energi henholdsvis

$$h_1 = H - x$$

og

$$h_2 = H - y\,,$$

hvor subscribtet angiver hvilket lod, der er tale om.

**4**) For kinetisk energi kastes ind i formlen $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$, så der fås

$$K = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2) = \ .$$

**5**) Lagrangefunktionen er pr. definition $L = K - V$. Bruges dette samt ligninger (1.2) og (1.3) fås

$$\begin{aligned} L &= K - V \\ &= \frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{y}) - (-g)(m_1x + m_2y) \\ &= \frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2 + m_2(-\dot{x})^2) + g\Big[m_1x + m_2(l - x - \pi R)\Big] \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + g\Big[m_1x + m_2(l - x - \pi R)\Big] . \end{aligned}$$

Havde man placeret nulpunktet for den potentielle energi afstanden $H$ under faldmaskinen, ville Lagrangefunktionen blive

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - g\Big[m_1(H - x) + m_2(H - l + x + \pi R)\Big] .$$

Den eneste forskel på de to Lagrangefunktioner er konstanter, og de forsvinder alligevel ved differentiation. Dette bruger konceptet at enhver Langrangefunktion, der giver den rigtige bevægelse, er en gyldig Lagrangefunktion, hvilket opgave 8 også illustrerer.

**6**) For at benytter Euler-Lagrangeligninger skal følgende differentialer bruges

$$\frac{\partial L}{\partial x} = g(m_1 - m_2) \tag{1.5}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} \tag{1.6}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} \tag{1.7}$$

Bruges Euler-Lagrangeligningen, ligning 1.50 i kompendiet, til at sætte første og sidste udtryk i ligning (1.5) fås

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} &= g(m_1 - m_2) \\ \ddot{x} &= g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

**7**) Både $g$ og $m_1 + m_2$ er positive led, hvorfor fortegnet er bestemt af tælleren.

$$\begin{aligned} m_1 > m_2 : &\quad m_1 - m_2 > 0 \implies \ddot{x} > 0 \\ m_2 > m_1 : &\quad m_1 - m_2 < 0 \implies \ddot{x} < 0 \end{aligned}$$

Dette stemmer overens med det forventede, idet $\ddot{x} > 0$ betyder at accelereres i positiv $x$-retningen, hvilket betyder at $m_1$ falder ned, mens $m_2$ trækkes op. Dette sker lige netop når $m_1 > m_2$, hvilket også giver fysisk mening, idet det tungeste lod burde falde ned, og trække det letteste med sig. Der gælder det omvendte, hvis $m_2 > m_1$.

**8**) Udføres integralet fås

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \iint a\mathrm{d}t\mathrm{d}t \\
&= \int at + v_0\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\
&= \frac{1}{2}g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}t^2 + v_0 t + x_0 \,.
\end{aligned}
$$

**Opgave 11: • Yoyo**

De ligninger, der henvises til siger at

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \,, \\
v &= r\dot{\varphi} = r\omega \,.
\end{aligned}
$$

**1**) Fra opgaven er $v = v_{\text{CM}} = \dot{z}$ da yoyoen kun bevæger sig translatorisk i $z$-retningen. Kombineres alt dette med informationen om intertimomentet fås

$$
\begin{aligned}
K &\overset{v=r\omega}{=\!=\!=} \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 \\
&\overset{v=v_{\text{CM}}=\dot{z}}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 \\
&\overset{I=\frac{1}{2}mR^2}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 \,.
\end{aligned}
$$

**2**) Den potentielle gravitationelle energi er $V = mgh$, hvor $h$ er den afstanden til nulpunktet i tyngdekraftens retning. Defineres nulpunktet sådan at $V(z = 0) = 0$ er $z = -h$, fordi $V$ skal blive mindre, når $z$ bliver større, hvorved $V = -mgz$. Her kan igen gøres det samme med at definere $V(x) = 0$ til et sted langt nede, og dermed indføre en konstant i den potentielle energi, som senere forsvinder ved differentiation.

**3**) Benyttes definitionen af Lagrangefunktionen inden der sættes udenfor parentes fås

$$
\begin{aligned}
L &= K - V \\
&= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 - (-mgz) \\
&= \frac{1}{2}m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{z}^2 + mgz \,.
\end{aligned}
$$

**4**) De afledede af Lagrangefunktionen er

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} &= mg\,, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{z}\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) &= m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\ddot{z}\,. \end{aligned}$$

**5**) Euler-Lagrangeligningen siger at det første og sidste differentiale er lig hinanden[1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) \\ mg &= m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\ddot{z} \\ g &= \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\ddot{z} \\ \ddot{z} &= \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2}\,. \end{aligned}$$

**6**) Med Newtonsk mekanik ville man være nød til at bestemme summen af kræfter og summen af kraftmomenter, der begge vil afhænge af snorkraften i snoren, $S$. Denne er ukendt, og derfor besværlig at regne med. Derudover ville man skulle bruge både Newtons 2. lov og Newtons 2. lov for roterende bevægelse, og så kæde det sammen gennem den ukendte snorkraft, hvilket er ret så omstændigt, sammenlignet med hvor elegant det er at benytte Lagrangemekanikken.

### Opgave 12: •• Klods på en fjeder

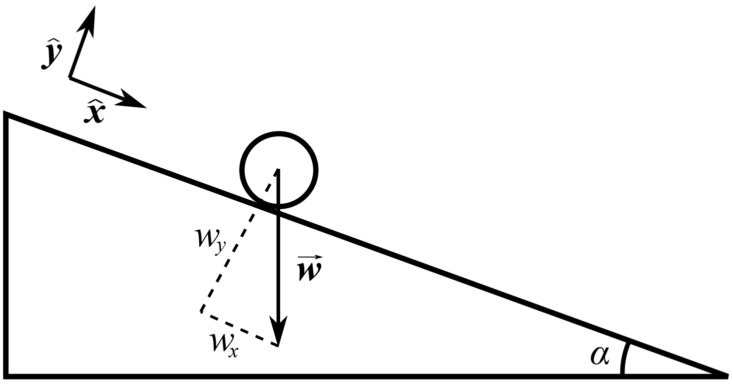
Lagrangeformalismen bygger på systemets energier, hvorfor disse bestemmes først

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ V &= \frac{1}{2}kx^2\,. \end{aligned}$$

**1**) Dermed bliver Lagrangefunktionen

$$L = K - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\,.$$

[1] Lighedstegnet vendes om tilsidst, da det ser pænest ud.




*Figur 1.3: Eksempel på bevarelse af spørgsmålene 1 og 2 i opgave 13. Vinklen $\alpha$ skal lokaliseres, $x$ skal defineres parallelt med skråplanet og identificeres som generaliseret koordinat.*

**2**) For at stoppe ind i Euler-Lagrangeligningen skal nogle differentialer bestemmes

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = -kx\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{x}} = m\dot{x}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}\,.$$

Dette stoppes ind i Euler-Lagrangeligningen

$$m\ddot{x} = -kx\,,$$

hvilket er magen til ligning (1.3) i kompendiet.

**Opgave 13:** •• **Cylinder på skråplan**

**1**) Se figur 1.3.

**2**) Fremgår ligeså af figuren.

**3**) Den potentielle energi opskrives ud fra højden over bunden af skråplanet $h = x\sin(\alpha)$. Dermed bliver den potentielle energi

$$V = mg\sin(\alpha)x\,.$$

**4**) Den kinetiske energi er

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}m\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2 \,,
\end{aligned}
$$

analogt til spørgsmål 1 i opgave 11.

**5**) Den potentielle energi er

$$
L = K + V = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2 - mg\sin(\alpha)x \,.
$$

**6**) Der differentieres

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x} \,, \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -mg\sin(\alpha)x \,, \\
\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} \,.
\end{aligned}
$$

Differentialerne løses i rækkefølge som

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}x^2 &= x \,, \\
\frac{\partial}{\partial x}x &= 1 \,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x} &= \ddot{x} \,.
\end{aligned}
$$

Nu stoppes ind i Euler-Lagrangeligningen og divideres først med parentesen og til sidst forkortes brøken med $m$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \\
\implies \ddot{x} &= -\frac{g\sin\alpha}{1 + I/mR^2} \,.
\end{aligned}
$$

**7**) Bevægelsesligningen afhænger ikke $t$, $x$, $\dot{x}$, hvorfor der ikke sker nogen ændring i accelerationen mens tiden går.

**8**) Bevægelsesligningen skrives på formen

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= \tilde{g} \\
\implies x &= \int\int \tilde{g}\mathrm{d}t^2 \\
&= \int \tilde{g}t + v_0\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}t^2 + v_0 t + x_0 \: .
\end{aligned}
$$

**Opgave 14: ●●● Masse på roterende ring**

Dette problem har mange paralleller til pendulet, hvorfor det kan være relevant at referere til afsnit 1.6 i kompendiet.

**1**) Gravitationel potentiel energi er på formen $V = mgh$, og helt ækvivalent til pendulet defineres nulpunktet i $\varphi = 0$, hvorved

$$V(\varphi) = mgR\big[1 - \cos(\varphi)\big] \; .$$

**2**) Ligning (1.8) i kompendiet siger at $v = r\dot{\varphi}$, men den skal lige vendes rigtigt, for at kunne bruges her. Den er udledt for cylinderkoordinater, men gælder generelt for cirkelbevægelser, hvorfor de rigtige cirkler skal identificeres. Hastigheden for lodets bevægelse langs ringen, har radius bliver $R$ og vinkelhastighed $\dot{\varphi}$, hvorfor

$$v_{\text{lod}} = R\dot{\varphi} \; .$$

Den anden cirkel kræver lidt mere at forestille sig. Forestiller man sig at massen fastholdes samme sted på ringen, vil den være i jævn cirkelbevægelsen i planet ortogonalt på tegningen. Denne cirkelbevægelse har vinkelhastighed $\omega$ og radius $\rho$, og trigonometri kan bruges til at udtrykke $\rho$ ved $\varphi$.

$$v_{\text{ring}} = \rho\omega \overset{\rho = R\sin(\varphi)}{=\!=\!=\!=\!=} R\omega\sin(\varphi) \; .$$

**3**) Den totale kvadrerede hastighed bliver nu summen af kvardraterne på komponenterne

$$
\begin{aligned}
v^2 &= v_{\text{lod}}^2 + v_{\text{ring}}^2 \\
&= R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\omega^2\sin^2(\varphi) \\
&= R^2\big[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2(\varphi)\big] \; .
\end{aligned}
$$

Ganges dette med $m/2$ fås den kinetiske energi

$$K = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2(\varphi)\right] .$$

og trækkes den potentielle energi fra fås

$$L = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2(\varphi)\right] - mgR\left[1 - \cos(\varphi)\right] .$$

**4**) For at benytte Euler-Lagrangeligningen til at bestemme bevægelsesligningen bestemmes følgende differentialer

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mR^2\dot{\varphi} , \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= mR^2\ddot{\varphi} , \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= mR^2\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - mgR\sin(\varphi) .
\end{aligned}$$

hvor kædereglen skal huskes til differentiation af $\sin^2(\varphi)$ i det sidste differential. Euler-Lagrangeligningen siger så at de to sidste differentialer er ens, hvorfor

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \\
mR^2\ddot{\varphi} &= mR^2\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - mgR\sin(\varphi) \\
\ddot{\varphi} &= \left[\omega^2\cos(\varphi) - \frac{g}{R}\right]\sin(\varphi) .
\end{aligned} \tag{1.8}$$

**5**) Fysisk set er et ligevægtspunkt et sted, hvor et objekt bliver, hvis det placeres der med farten 0. Stabiliteten kan undersøges ved at placere objektet der med hastigheden nul, og så puffe en smule til det. Accelereres objektet tilbage mod ligevægtspunktet, er ligevægtspunktet stabilt, men accelereres det væk fra er det ustabilt. Som eksempel kan tænkes på en bold i et bakket område. Placeres bolden præcis på toppen af en bakke, så bliver den der, men skubbes der en smule til den, triller den ned af bakken. Derfor er bakketoppen et ustabilt ligevægtspunkt. Placeres bolden dog midt i en bakkedal uden fart, bliver bolden der også, men puffes der til den, vil den rulle lidt op ad bakken inden den ruller ned igen og tilbage til ligevægtspunktet. Derfor er dette punkt stabilt.
Kaldes et ligevægtspunkt $\varphi_0$, så kan disse kriterier udtrykkes matematisk ved at $\ddot{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, hvis $\dot{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0} = 0$ og $\varphi = \varphi_0$. For at undersøge stabiliteten lader man $\varphi$ være forskudt både lidt i positiv og i negativ, og hvis $\ddot{\varphi}$ så også er har modsat fortegn af forskydningen, er ligevægtspunktet stabilt. Hvis ikke er ligevægtspunktet ustabilt.

**6**) Af ovenstående sættes $\ddot{\varphi} = 0$

$$
\begin{aligned}
0 = \ddot{\varphi} &= \left[\omega^2 \cos(\varphi) - \frac{g}{R}\right] \sin(\varphi) \\
\implies 0 &= \begin{cases} \omega^2 \cos(\varphi_0) - \dfrac{g}{R} \\ \sin(\varphi_0) \end{cases} \\
\implies \varphi_0 &= \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\pm \arccos\left(\dfrac{g}{R\omega^2}\right)\right] \\ \arcsin(0) = 0, \pm\pi \end{cases} \\
\varphi_0 &= \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\pm \arccos\left(\dfrac{g}{R\omega^2}\right)\right] \\ 0 \\ \pm\pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

Det med at tage realdelen af $\pm \arccos(g/(R\omega^2)$ er en smule pedantisk, men det skyldes at det kun er realdelen, der giver fysisk mening, da fysiske størrelser ikke kan være imaginære. Dette bliver vigtigt senere. Yderligere er både den positive og negative løsning gyldig, hvorfor de begge skal tages med.

Det simpleste ligevægtspunkt er $\varphi_0 = 0$, hvilket svarer til at massen er i bunden af ringen.
$\varphi_0 = \pm\pi$ svarer til at massen er i ringens toppunkt.
Det sidste ligevægstpunkt er en smule sværere at forestille sig, men det er essentielt set et punkt hvor det at ringen roterer, presser massen opad. Man kan tænke det på samme måde som det at man kan få et pendul til svinge i pæne cirkler.

**7**) Der en to eller fire ligevægtspunkter alt efter fortegnet for differencen $\omega^2 - g/r$, fordi det øverstående ligevægtspunkt ikke altid eksisterer. Dette kan forklares ud fra bevægelsesligningen. Kigges på differentialligningen fås dette ligevægtspunkt ved ligningen

$$0 = \omega^2 \cos(\varphi_0) - \frac{g}{R} \,. \tag{1.9}$$

Da $\cos(\varphi)$ altid giver værdier mellem $-1$ og 1, ligegyldig hvilket $\varphi$, der vælges, kan dette ligevægtspunkt kun eksistere, hvis $\omega^2 > g/R$, eftersom ligningen ikke har nogen løsning for $g/R > \omega^2$.

**8**) Intuitivt set er $\varphi_0 = \pm\pi$ ustabil, da tyngdekraften jo vil trække massen ned, hvis den flyttes bare en smule væk fra toppunktet, hvilket gør punktet ustabilt. Matematisk set så bliver $\cos(\varphi)$ negativ, hvis $\varphi \approx \pm\pi$, hvorfor hele parentesen i ligning (1.8) er negativ. $\sin(\pm\pi) = 0$, hvis $\varphi < \pi$ er $\sin(\varphi) > 0$, og omvendt for $\varphi < -\pi$. Skubbes massen nu fra $\varphi = \pi$ i retningen så $\varphi$ bliver mindre, så bliver $\sin(\varphi) > 0$, men da frontfaktoren er negativ, så vil den accelereres i negativ retning. Helt analogt sker det samme hvis massen var blevet skubbet til den anden side, hvorfor ligevægtspunktet er ustabilt.

Umiddelbart ville man tro at $\varphi_0 = 0$ og $\varphi_0 = \mathrm{Re}\big[\pm \arccos(g/(R\omega^2))\big]$ er stabile begge to, men det viser sig at $\varphi_0 = 0$ er ustabil i nogle tilfælde. Dette kan vises ved en Taylorudvikling til første orden omkring 0. Her bliver bevægelsesligningen

$$\ddot{\varphi} \simeq \left[\omega^2 - \frac{g}{R}\right] \varphi = k\varphi \,.$$

hvor $k$ bare er kort notation for alt det i parentesen. Placeres massen i $\varphi = 0$ med hastighed $\dot{\varphi} = 0$ er $\ddot{\varphi} = 0$, hvorefter der puffes en smule til massen, så $\varphi > 0$, får $\ddot{\varphi}$ samme fortegn som $k$, hvilket betyder at $\varphi_0 = 0$ er stabilt, hvis $k < 0$. Dette er tilfældet hvis $\omega^2 < g/R$, med andre ord hvis ringen roterer langsomt. Hvis ringen roterer hurtigt, er $k > 0$, hvorfor $\varphi_0 = 0$ bliver ustabilt, men til gengæld skaber dette de to nye ligevægtspunkter.

Ligevægtspunktet $\varphi_0 = \mathrm{Re}\Big[\pm \arccos(g/(R\omega^2))\Big]$ er stabilt, hvilket kan vises ved en lettere træls Taylorudvikling til 1. orden. Dette forventes ikke at deltagerne kan gøre, men for de interesserede, gøres det således. Først omkrives bevægelsesligning således at nulpunktet flyttes til ligevægtspunktet - dvs. $\varphi \longrightarrow \varphi_0 + \varepsilon$, hvor $\varepsilon$ er en lille forskydning. $\varphi_0$ er defineret som en konstant, hvorfor $\ddot{\varphi} = \ddot{\varepsilon}$, og derved bliver

$$\ddot{\varepsilon} = \left[\omega^2 \cos(\varphi_0 + \varepsilon) - \frac{g}{R}\right] \sin(\varphi_0 + \varepsilon)\,.$$

Dette Taylorudvikles omkring $\varepsilon = 0$, hvilket giver

$$\ddot{\varepsilon} \simeq \left[\omega^2\Big(\cos(\varphi_0) - \varepsilon\sin(\varphi_0)\Big) - \frac{g}{R}\right] [\sin(\varphi_0) + \varepsilon\cos(\varphi_0)]\ . \tag{1.10}$$

Dette skyldes at følgende Taylorudviklinger benyttes

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_0 + \varepsilon) &\simeq \cos(\varphi_0) - \varepsilon\sin(\varphi_0)\,,\\ \sin(\varphi_0 + \varepsilon) &\simeq \sin(\varphi_0) + \varepsilon\cos(\varphi_0)\,.\end{aligned}$$

Det virker måske lidt mærkeligt at leddene $\cos(\varphi_0)$ og $\sin(\varphi_0)$ er med her, men det skyldes at når differentialerne i Taylorrækken evalueres, så fås $\cos(\varphi_0 + 0) = \cos(\varphi_0)$ i stedet for $\cos(0) = 1$.

Tricket er at udvikle til laveste orden, der giver et brugbart resultat, hvilket her er 1. orden. Derfor udvikles sinus og cosinus til 1. orden, og herefter negligeres eventuelle led af højere orden. Nu benyttes definitionen af $\varphi_0$, der kan skrives som i ligning (1.9), til at reducere ligning (1.10).

$$\begin{aligned}\ddot{\varepsilon} &\simeq \left[\omega^2\Big(\cos(\varphi_0) - \varepsilon\sin(\varphi_0)\Big) - \frac{g}{R}\right]\Big[\sin(\varphi_0) + \varepsilon\cos(\varphi_0)\Big]\\ &= -\omega^2\varepsilon\Big[\sin(\varphi_0) + \varepsilon\cos(\varphi_0)\Big]\\ &\simeq -\omega^2\sin(\varphi_0)\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Andenordensledet kastes væk idet der udvikles til 1. orden, og det ses nu at $\varepsilon$ opfører sig som en harmonisk oscillator til første orden. Det med at kaste andenordensledet væk er en formel ting, idet man ikke kan vide noget om dette, da man ikke har taget andenordensledene med for sinus og cosinus, hvorfor der kommer til at mangle noget for at have en korrekt udvikling til 2. orden. Havde man udviklet til første orden og fundet ud af at approksimationen ikke giver en nogen brugbar information, så kan man ikke bare tage eventuelle negligerede højereordensled med igen. Det eneste rigtige er så at beslutte sig for en højere orden at approksimere til, og så starte forfra med approksimationen. Man er ofte interesseret i bevægelsen omkring et stabilt ligevægtspunkt, hvorfor denne type beregning er relativt almindelig.

# Flerlegemeproblemer

### Opgave 15: •• To koblede vogne

**1**) Først opskrives den lille vogns stedkoordinat, der kaldes $r$

$$r = x + X\,.$$

Dette differentieres

$$\dot{r} = \dot{x} + \dot{X}\,,$$

hvorved

$$K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{X})^2\,.$$

Navngivningen af koordinatet $r$ er arbitrært og har ingen betydning for opgaven.

**2**) Den store vogn drives til harmonisk oscillation på en måde vi ikke bekymrer os om. Den eneste kobling fra den lille vogn til omverdenen er igennem fjereden, da den bevæger sig friktionsløst, hvorfor den potentielle energi er den for en fjeder, altså

$$V = \frac{1}{2}kx^2\,.$$

Da $L = K - V$ er Lagrangefunktionen

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{X})^2 - \frac{1}{2}kx^2\,.$$

**3**) Nu differentieres på samme måde som i opgave 13

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m(2\dot{x} + 2\dot{X}) = m(\dot{x} + \dot{X})\,,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx\,,$$

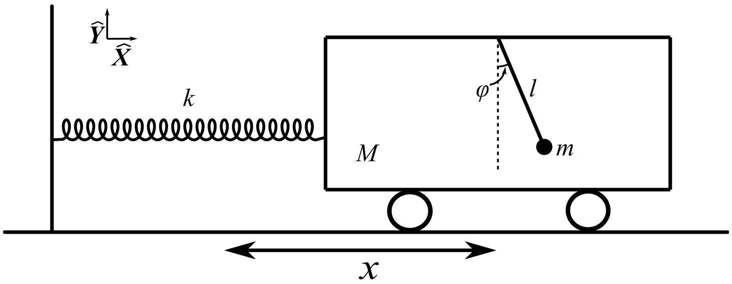
hvor det første kan løses enten ved kædereglen, eller ved at bruge 1. kvadratsætning inden der differentieres.

**4**) Nu løses differentieres i bund

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(\ddot{x} + \ddot{X})\,,$$

hvorefter $\ddot{X}$ bestemmes ved at differentiere cosinus to gange med kædereglen

$$\ddot{X} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}A\cos(\omega t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-A\omega\sin(\omega t)) = -A\omega^2\cos(\omega t)\,.$$




*Figur 1.4: Illustration af situationen med indtegnet kartesisk koordinatsystem og genereliserede koordinater.*

Dette stoppes ind i Euler-Lagrangeligningen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x}\\ \implies m(\ddot{x} - A\omega^2\cos(\omega t)) &= -kx\\ \implies \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= A\omega^2\cos(\omega t)\\ \implies \ddot{x} + \omega_0^2 x &= A\omega^2\cos(\omega t)\ .\end{aligned}$$

**5**) Indsættes $A = 0$ i bevægelsesligningen fås

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_0 x &= 0 \cdot \omega^2 \cos\omega t = 0\\ \ddot{x} &= -\omega_0 x\ .\end{aligned}$$

hvilket er en simpel harmonisk oscillator.

**6**) Det er relevant at tjekke denne grænse, da det fungerer som en konsistens kontrol, der er meget almindelig i fysik. Når der er regnet noget kompliceret, så kigges på en grænse, hvori bevægelsesligningen bør reducere til noget kendt. I tilfældet her er det "kendte tilfælde" en vogn på en fjeder.

**Perspektiverende:** I elektromagnetisme bruger man ofte at hvis man er tilpas langt væk fra nogle ladninger, så ligner de bare en punktladning, hvorfor man tjekker grænsen $r \longrightarrow \infty$ hvor $r$ er afstanden til et defineret nulpunkt tæt på ladningerne og i denne grænse bare er afstanden til ladningerne.

**Opgave 16:** ●●●● **Pendul i en vogn**

**1**) Origo defineres som ophængningspunktet for pendulet for $X = 0$, og koordinatsystemet placeres således at tyngdekraften er i $Y$-retningen og fjederkraften er i $X$-retningen, se figur 1.4.

**2**) De kartesiske koordinater for pendullodets position er

$$\begin{aligned} X_p &= x + l\sin\varphi\,, \\ Y_p &= l\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

og for vognet er $Y_v$ uændret, da den kun kan bevæge sig langs $\hat{X}$, hvorfor den er ubetydelig. Slutteligt er

$$X_v = x\,.$$

**3**) Vognens forskydning er den eneste, som betyder noget for fjederen, og pendullodets vertikale position bruges til den gravitationelle den, hvorved

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mgl(1-\cos\varphi)\,.$$

**4**) Differentieres de kartesiske koordinater fås

$$\begin{aligned} \dot{X}_p &= \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\,, \\ \dot{Y}_p &= l\dot{\varphi}\sin\varphi\,, \\ \dot{X}_v &= \dot{x}\,. \end{aligned}$$

Det ses at idiotformlen kan anvendes ved kvadrering, analogt til ligning (1.8) i kompendiet, hvorved der opnås

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right]\,.$$

hvorfor Lagrangefunktionen bliver

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right] - \frac{1}{2}kx^2 + mgl(1-\cos\varphi)\,.$$

**5**) Differentialerne for $x$ bestemmes

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi\,, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\,, \end{aligned}$$

hvilket giver differentialligningen

$$a) \qquad M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -kx\,.$$

Differentialerne for $\varphi$ bestemmes

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} &= ml^2\dot\varphi + ml\dot x\cos\varphi\,,\\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -ml\dot x\dot\varphi\sin\varphi - mgl\sin\varphi\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) &= ml^2\ddot\varphi - ml\dot x\dot\varphi\sin\varphi + ml\ddot x\cos\varphi\,,\end{aligned}$$

så differentialligningen bliver

$$b)\qquad ml^2\ddot\varphi + ml\ddot x\cos\varphi = -mgl\sin\varphi\,.$$

**6**) Til første orden er $\cos\varphi \simeq 1$, mens $\sin\varphi \simeq \varphi$ hvorved

$$\begin{aligned} a)&\quad M\ddot x + m\ddot x + ml\ddot\varphi \simeq -kx\\ b)&\quad \ddot\varphi + \frac{\ddot x}{l} \simeq -\frac{g}{l}\varphi\end{aligned}$$

**7**) Den svarer til følgende scenarier
1. $k \longrightarrow \infty$ betyder at modstanden i fjederen bliver uendelig stor.
2. Vognen er meget tungere end pendulet, som med andre ord betyder at vognen bevæger som om pendulet ikke var der.

**8**) I de optalte grænser reducerer systemet til følgende situationer
1. Modstanden i fjederen er så stor at vognen bevægelse bliver negligibel, hvorfor det forventes at pendulet opfører sig på sædvanlig vis, det vil sige en harmonisk oscillator[2].
2. Pendulets masse er så lille at dettes eksistens er ubetydelig for vognen, der så vil opføre sig som en vogn på en fjeder, altså en harmonisk oscillator. Det betyder for pendulet at dets ophængningspunkt vil oscillere harmonisk, hvorfor der forventes en drevet svingning af pendulet.

**9**) Kigges på bevægelsesligningerne gøres følgende observationer
1. Da $k$ er uendelig stor må $x$ være uendelig lille for at opfylde bevægelsesligningen og ligning $a$ mister herved betydning. Dette skal gælde til alle tider, så derfor må de tidsaflede af $x$ også være meget små, hvorfor de negligeres i $b$. Den eneste bevægelsesligning med betydning bliver derfor

$$\begin{aligned} b)\quad \ddot\varphi &= -\frac{g}{l}\varphi = -\omega_1^2\varphi\\ \varphi &= A_1\cos(\omega_1 t + \delta_1)\end{aligned}$$

hvor $A_1$ og $\delta_1$ begge er konstanter bestemt af startbetingelserne.
2. Pendulets masse er negligibel ift. vognen, hvorfor led med $m$ negligeres fra bevægelsesligning $a$.

$$\begin{aligned} a)\quad \ddot x &= -\frac{k}{M}x = -\omega_2^2 x\\ x &= A_2\cos(\omega_2 t + \delta_2)\end{aligned}$$

[2]Den harmoniske oscillator kaldes også engang imellem simpel harmonisk bevægelse, forkortet SHB.

hvor $A_2$ og $\delta_2$ igen er konstanter bestemt af startbetingelserne. Indsættes dette i bevægelsesligning $b$ fås

$$b) \quad \ddot{\varphi} + \omega_1^2 \varphi = \frac{A\omega_2^2}{l} \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

hvor $\delta_2$ også er en konstant. Løsningen til denne differentialligning er træls, men det er en drevet harmonisk svingning.

Konkluderende kan det siges at bevægelsesligningerne reducerer pænt til forventelige resultater i nogle udvalgte grænser, hvilket er en god indikator for deres validitet.

# Fiktive Kræfter

### Opgave 17: •• Fysiske og fiktive kræfter

**1**) Det antages at systemet er stedafhængigt, hvilket vil sige at der udelukkende indgår variable i sted, hvilket eksempelvis kunne være de kartesiske koordinater $(x, y)$, og konstanter i den potentielle energi. $V(x, y)$ er dermed konstant overfor hastigheder $(\dot{x}, \dot{y})$, hvorfor de partielt afledede mht. disse er 0.

**2**) Af spørgsmål 1 er det led den potentielle energi bidrager til ledet $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ med 0, hvis tidsafledede også er nul. Dermed er $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$, hvilket giver den efterspurgte konklusion.

**3**) Eftersom den potentielle energi kun bidrager med et additivt led til delen af Euler-Lagrangeligningen, der er den generaliserede kraft, tilføjes differentialerne med negativt fortegn på den side af lighedstegnet, grundet på Lagrangefunktionen.

**4**) Venstre side af lighedstegnene er masse gange acceleration, og summen af fysiske kræfter kan udtrykkes som den negative gradient af den samlede potentielle energi. Det betyder at hvis de fiktive kræfter betragtes som kræfter, så er ligningerne fra Newtons 2. lov i to forskellige dimensioner. Defineres de fiktive kræfter som i eksemplet opfører de sig dermed overfor Newtons 2. lov som enhver anden fysisk kraft.

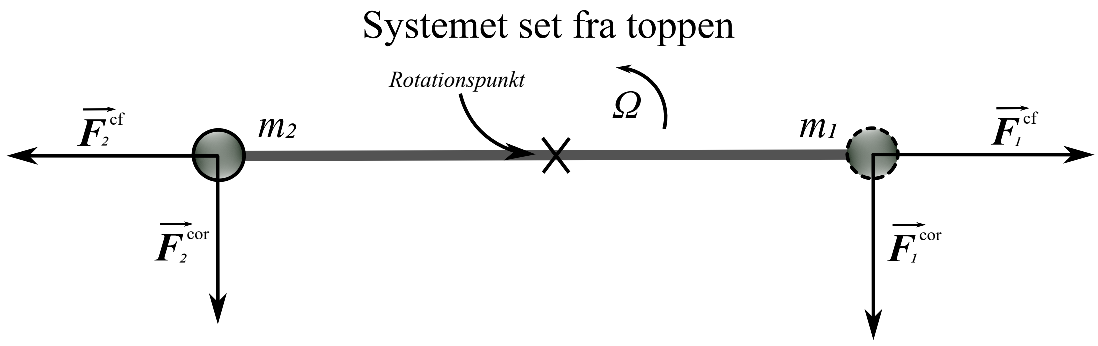
### Opgave 18: ••• To masser på en roterende stang

**1**) Systemet roterer i et plan omkring et fast punkt, hvorfor cylindrisk polære koordinater er oplagt.

**2**) Da stangen er antaget stiv, kan loddernes bevægelse i $\varphi$-retningen kun komme fra stangens rotation, som er antaget konstant. Da $\rho_1$ og $\rho_2$ er koblede er det generaliserede koordinat derfor enten $\rho_1$ eller $\rho_2$, og her vælges $\rho_1$.

**3**) Da stangens længde er konstant er

$$0 = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2$$
$$\dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$$




*Figur 1.5: De fiktive kræfter er her indtegnet hvor m, $\Omega$ og $\dot{\rho}_1$ er antaget positive.*

**4**) Ligning (1.90) i kompendiet siger at[3]

$$\begin{aligned}\vec{F}^{\text{cor}} &= 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\boldsymbol{\Omega}}\,,\\ \vec{F}^{\text{cf}} &= m(\vec{\boldsymbol{\Omega}} \times \vec{r}) \times \vec{\boldsymbol{\Omega}}\,.\end{aligned}$$

hvor de generaliserede koordinater på vektorform er

$$\begin{aligned}\vec{\rho}_1 &= \rho_1\hat{\mathbf{r}}\,,\\ \vec{\rho}_2 &= \rho_2\hat{\mathbf{r}} = (l-\rho_1)\hat{\mathbf{r}}\,,\\ \dot{\vec{\rho}}_1 &= \dot{\rho}_1\hat{\mathbf{r}}\,,\\ \dot{\vec{\rho}}_2 &= \dot{\rho}_2\hat{\mathbf{r}} = -\dot{\rho}_1\hat{\mathbf{r}}\,.\end{aligned}$$

Stangen roterer omkring $z$-aksen, hvorfor $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$. Derfor bliver de fiktive kræfter

$$\begin{aligned}\vec{F}_1^{\text{cor}} &= 2m_1\dot{\rho}_1\Omega\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}}\\ &= -2m_1\dot{\rho}_1\Omega\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,,\\ \vec{F}_1^{\text{cf}} &= m_1\rho_1\Omega^2(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{z}}\\ &= m_1\rho_1\Omega^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\mathbf{z}})\\ &= m_1\rho_1\Omega^2\hat{\mathbf{r}}\,,\\ \vec{F}_2^{\text{cor}} &= 2m_2(-\dot{\rho}_2)\Omega\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}}\\ &= 2m_2\dot{\rho}_2\Omega\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ &= -2m_2\dot{\rho}_1\Omega\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,,\\ \vec{F}_2^{\text{cf}} &= m_2\rho_2\Omega^2(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{z}}\\ &= m_2\rho_2\Omega^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\mathbf{z}})\\ &= m_2\rho_2\Omega^2\hat{\mathbf{r}}\\ &= m_2(l-\rho_1)\Omega^2\hat{\mathbf{r}}\,.\end{aligned}$$

[3] cor/cf står som superscript og ikke subscript for at gøre det mere overskueligt. Der er ikke anden grund.

**5**) Antages $m$, $\Omega$ og $\dot{\rho}_1$ for at være positive fås figur 1.5.

**6**) Corioliskraften virker på begge legemer i $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$-retningen, men stangen er antaget stiv, hvorfor den påvirker legemerne med en ligestor og modsatrettet normalkraft, hvilket er samme argument som for at $\varphi$ ikke er et generaliseret koordinat.

**7**) I systemets ligevægtskonfiguration er de to centrifugalkræfters vektorsum nul

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{cf}} + \vec{\boldsymbol{F}}_2^{\mathrm{cf}} &= \vec{\boldsymbol{0}} \\ \implies m_1\rho_1\Omega^2 &= m_2\rho_2\Omega^2 \\ \implies \frac{m_1}{m_2} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{l}{\rho_1} - 1\,. \end{aligned}$$

Vektoren $\hat{\mathbf{r}}$ peger i hver sin retning for de to masser, hvorfor fortegnene passer. Af tegningen fremgår det at de er modsatrettet, og deres størrelser skal så være ens, hvilket er benyttet her.

**8**) Hvis masserne er ens forventes legemerne at placere sig lige langt fra rotationspunktet, dvs. $\rho_1 = \rho_2$.

**9**) Indsættes de forventede omstændigheder fås

$$\frac{m_1}{m_1} = \frac{\rho_1}{\rho_1} \quad \checkmark$$

**Opgave 19: ●●● Er fiktive kræfter trælse?**

**1**) Corioliskraften afhænger af hastighed, mens centrifugalskaften afhænger af position.

**2**) Typisk er kræfter stedafhængige, hvilket gælder f.eks. gravitation, fjederkræfter og elektriske kræfter. Derfor giver centrifugalkraften "bare" en ekstra stedafhængighed, hvilket ikke er helt umuligt, mens hastighedsafhængigheden af Corioliskraften gør den bøvlet at arbejde med.

**3**) Denne differentialligning minder ret så meget om

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = kg(t)$$

Den minder faktisk så meget om, at de er ens hvis $g(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right) = k\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right),$$

hvorfor løsningen af denne differentialligningen kan bruges

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = g(t) = A\exp(kt)\,,$$

hvor separation af de variable kan benyttes

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= A\exp(kt)\mathrm{d}t \\ \int \mathrm{d}f &= \int A\exp(kt)\mathrm{d}t \\ f(t) &= \frac{A}{k}\exp(kt) + B\ . \end{aligned}$$

Her er konstanterne fra begge ubestemte integraler lagt ind i konstanten $B$.

## Perspektiverende Problemer

**Opgave 20: ●●●● Tennis Racket Theorem**

Det vigtige her er først at forstå antagelsen om de små vinkelaccelerationer. Eksempelvis er $\omega_y$ ikke lille nok til at se bort fra alle led, der indeholder $\omega_y$, men den er lille nok til at $\omega_y^2 \approx 0$, hvorfor alle led der indeholder $\omega_y^2$, $\omega_z^2$ eller $\omega_y\omega_z$ kan negligeres.

**1**) Derved er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_x\dot{\omega}_x\right) \simeq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(I_y - I_z)(0)\right] = 0\ .$$

Generelt set er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_i\omega_j) = \dot{\omega}_i\omega_j + \omega_i\dot{\omega}_j\ .$$

Vi har dog lige argumenteret for at $\dot{\omega}_x \simeq 0$, hvilket betyder led, der afhænger af $\dot{\omega}_x$ negligeres. Herved opnås ligning (1.8) ved at differentiere den anden vinkelhastighed.

**2**) I ligning (1.7) isoleres de relevante førsteafledede og så indsættes det i ligning (1.8).

**3**) Eftersom $I_x > I_y$ er $I_x - I_y > 0$, mens $I_z < I_x$, hvorfor $I_z - I_x < 0$. Vinkelhastighederne er reelle, hvorfor

$$\omega_x^2(I_z - I_x)(I_x - I_y) < 0\ .$$

Idet inertimomenterne er positive størrelser, ændres fortegnet ikke at at dividere med $I_y$ eller $I_z$, hvilket betyder at $\ddot{\omega}_i \propto -\omega_i$ for $i = y, z$, hvilket er den ønskede konklusion.

**4**) I første omgang differentieres, hvor det huskes at andenordensled i $\omega_x$ og $\omega_z$ negligeres

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_y - I_z)\omega_y\dot{\omega}_z \\ 0 \\ (I_x - I_y)\dot{\omega}_x\omega_y \end{bmatrix}\ .$$

Bruges ligning (1.7) her til at substituere i de enkeltafledede fås ligning (1.10).

**5**) Analogt til spørgsmål 3) fås at $(I_y - I_z)$ og $(I_x - I_y)$ er positive, hvorfor

$$\omega_y^2(I_x - I_y)(I_y - I_z) > 0\,,$$

hvor fortegnet igen ikke ændres af at dividere med $I_x$ eller $I_z$.

**6**) Hvis rotationen skal være stabil, så må legemet ikke bevæge sig ret meget omkring de andre akser. Har $\ddot{\omega}_j$ samme fortegn som $\omega_j$ så vil vinkelhastigheden øges eksponentielt i tiden, hvorfor legemets rotation om den $j$'te akse øges kraftigt, hvis den ikke starter med en startvinkelhastighed $\omega_j = 0$. Dette betyder at legemets rotation vil starte en rotation om de sekundære[4] akser, hvorfor rotationen er ustabil. Har $\omega_j$ og $\ddot{\omega}_j$ modsat fortegn så vil vinkelhastighed oscillere omkring 0. Det betyder at legemets rotation får vinklen ved de sekundære akser til at holde sig omkring deres startværdi grunden antagelsen om små vinkelhastigheder.

**7**) Fra spørgsmål 3) og spørgsmål 5) samt opgaveteksten til spørgsmål 7 har vi at rotationen om de sekundære akser accelereres, hvis $y$-aksen er den primære rotationsakse, mens der induceres en oscillation omkring de sekundære akser, hvis $x$ eller $z$ er den primære akser. Derved er $y$-aksen ustabil, mens de andre to er stabile.

**8**) For en kasse, bog eller andet rektangulært objekt er det således

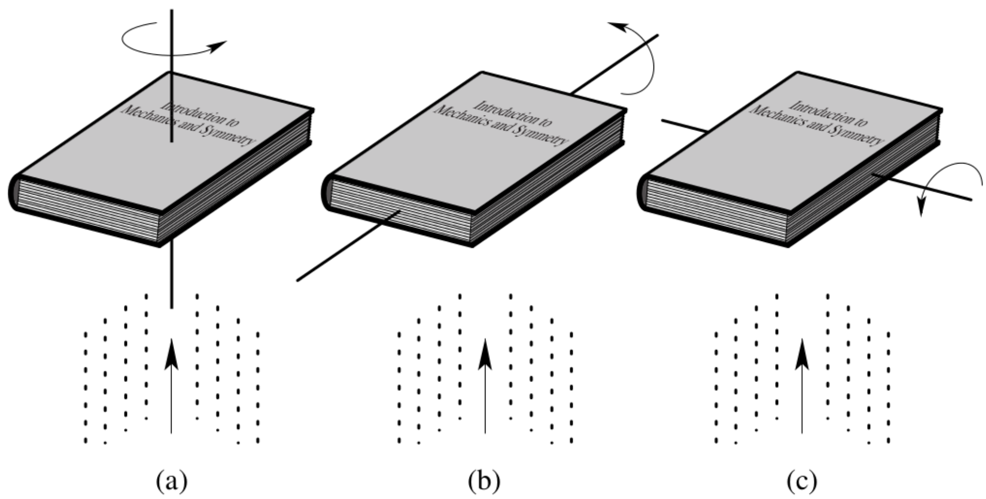



FIGURE 1.7.2. If you toss a book into the air, you can make it spin stably about its shortest axis (a), and its longest axis (b), but it is unstable when it rotates about its middle axis (c).

*Figur 1.6: Illustration af en bog, der roterer med forskellige primærakser, samt en beskrivelse af deres stabilitet.*

[4] Den primære rotationsakse er den akse med ikke-lille startværdi af vinkelhastigheden, mens de sekundære akser er dem, hvor startrotationen er lille.

**Opgave 21:** ●●● **Hamiltonfunktionen og et systems energi**

**1**) $L = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2 - V(q)$.
**2**) $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A(q)\dot{q}$.
**3**) $\dot{q} = \frac{p}{A(q)}$.
**4**) $H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{A(q)} - \left(\frac{p^2}{2A(q)} - V(q)\right) = \frac{p^2}{2A(q)} + V(q)$.
**5**) Der er to måder at vise dette på. Den mest stringente er at starte med energien, udtrykt ved sted og impuls er

$$E = K + V = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2 + V(q) = \frac{p^2}{2A(q)} + V(q) = H\ .$$

Den anden metode er følgende: Pr. antagelse er $K = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$. Dette omskrives nu ved den generaliserede impuls fra spørgsmål 3)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2 \\ &= \frac{1}{2}A(q)\left(\frac{p}{A(q)}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{2A(q)}\ . \end{aligned}$$

Indsættes det i Hamiltonfunktionen fra spørgsmål 4) fås definitionen på total energi

$$H = \frac{p^2}{2A(q)} + V(q) = K + V = E\ .$$

**6**) Taleargumentet lyder på at ingen af disse argumenter bygger på andet end antagelsen om formen af energierne. Derfor ændres intet når der tilføjes flere koordinater og der summeres.
Et mere matematisk argument er at den kinetiske energi nu skrives på formen

$$K = \sum_i \frac{1}{2}A(q_i)\dot{q}_i^2\ ,$$

mens den potentielle energi er $V(q_1, q_2, ..., q_n)$. Derfor er Lagrangefunktionen

$$L = \sum_i \frac{1}{2}A(q_i)\dot{q}_i^2 - V(q_1, q_2, ..., q_n)\ .$$

Benyttes definitionen af generaliseret impuls, samt det faktum at der ingen krydsled er i den del af Lagrangefunktionen, der afhænger af $\dot{q}_i$, fås at

$$q_i = \frac{p_i}{A(q_i)}\ .$$

Den kinetiske energi kan nu skrives på formen

$$K = \sum_i \frac{p_i^2}{2A(q_i)} ,$$

og sættes disse to ligninger ind i definitionen på Hamiltonfunktionen fås

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i q_i - L \\ &= \sum_i p_i \frac{p_i}{A(q_i)} - \left( \sum_i \frac{p_i^2}{2A(q_i)} - V(q_1, q_2, ..., q_n) \right) \\ &= \frac{p_i^2}{2A(q_i)} + V(q_1, q_2, ..., q_n) \\ &= K + V = E \ . \end{aligned}$$

Som bonusinformation kan det siges, at selvom Hamiltonfunktionen har den omtalte form, så er det ikke nødvendigvis den mest logiske måde at definere systemets energi på. I nogle tilfælde giver det mere mening at definere energien anderledes, hvilket er muligt, da det absolutte energi ikke har den store betydning i sig selv, da det er ændringer i energien, som har betydning for systemets opførsel. Dette benyttes eksempelvis i afsnit 1.6 i kompendiet om beskrivelsen af pendulet i Lagrangeformalismen, hvor den potentielle energi defineres til at være 0 i pendulets ligevægtspunkt.

**Opgave 22:** ●●● **Fra klassisk mekanik til kvantemekanik**

Kvantemekanikken bygger på Hamiltonformalismen, hvorfor idéen med denne opgave er at introducere Hamiltonfunktionen, der omskrives til Hamiltonoperatoren, $\hat{H}$, som kan betragtes som grundstenen for kvantemekanikken, fordi den tidsuafhængige eller stationære Schrödingerligning kan skrives som egenværdiproblemet

$$\hat{H}\psi = E\psi \ . \tag{1.11}$$

Her går $\psi$'erne ikke ud med hinanden, da dette er formuleret ved hjælp af den gren af matematikken, der hedder lineær algebra, hvilket gør matematikken meget lettere, når først man har styr på denne matematik[5]. Hamiltonoperatoren kan opskrives ud fra den klassiske Hamiltonfunktion.

**1**) Den generaliserede impuls kan skrives på formen $p = m\dot{q}$, hvorfor $\dot{q} = p/m$. Derved bliver den kinetiske energi

$$K = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m} \ . \tag{1.12}$$

[5] Der er lidt fyldtekst fra tid til anden idet dette oprindelig var skrevet som en del af kompendiet, og det bliver beholdt, da det ikke er dårlig indformation, selvom det dog ikke er nødvendigt for at løse opgave.

**2**) Derved giver ligning (1.97) i kompendiet at

$$H = K + V = \frac{p^2}{2m} + V \,. \tag{1.13}$$

**3**) Sted og impuls skal omskrives til operatorer, mens masse er en partikelegenskab, og ikke en observabel, med tilhørende operator.

**4**) Benyttes impulsoperatoren fra tabel 2.1 i kompendiet nu, samt definitionen på tallet $i$, nemlig at $i^2 = -1$ fås Hamiltonoperatoren fra samme tabel

$$\hat{x} = x \Rightarrow \hat{V} = V \tag{1.14}$$

$$\hat{p}^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{1.15}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \tag{1.16}$$

Der er hermed dannet en bro mellem klassisk mekanik og kvantemekanik, og målet med dette er at vise at en sådan bro eksisterer fremfor en rigid gennemgang af Hamiltonformalismen og dens klassiske mangfoldigheder.

Konkluderende kan det siges at metoden til at analysere et kvantemekanisk system er at opskrive systemets kinetiske[6] og potentielle energi, for derefter at opstille systemets Hamiltonfunktion. Denne omskrives til en Hamiltonoperator, som giver mening for systemet, og derefter løses den staionære Schrödingerligning. Dette kan lyde relativt simpelt, men der kan komme en del komplikationer i forbindelse med eksempelvis skridtet med at omskrive Hamiltonfunktionen til en passende Hamiltonoperator.

## Opgave 23: •••• Energibevarelse i Hamilton

**1**) Ved partiel differentiation, f.eks. $\partial/\partial t$, betragtes alt andet end den variabel der differentieres med hensyn til som konstanter og der tages dermed ikke højde for at nogle variable kan afhænge af den variabel, der differentieres med hensyn til. Den fuldstændige tidsaflede tager højde for eventuelle implicitte afhængigheder og kædereglen benyttes til at udtrykke disse. Som eksempel kan bruges et generaliseret koordinat $q$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q} \,,$$

[6] Der er stort set aldrig krydsled i den kinetiske energi, hvorfor dette ofte er trivielt.

og det illustreres endnu tydeligere ved $q^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q^2}{\partial t} &= 0\,, \\
\frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial q^2}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = (2q)\dot{q} = 2q\dot{q}\,.
\end{aligned}$$

**2**) Kædereglen benyttes til at skrive den fuldstændigt tidsafledede af en generel Hamiltonfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(q,p,t) = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial t}\,. \tag{1.17}$$

Dette gøres da en generel éndimensionel Hamiltonfunktion afhænger eksplicit af tid, det generaliserede koordinat og den dertilhørende generaliserede impuls, og med den fuldstændige tidsafledede skal der tages højde for at de to sidstnævnte kan være tidsafhængige.

**3**) Hamiltonsligninger siger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q} &= -\dot{p}\,, \\
\frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q}\,.
\end{aligned}$$

Indsættes det i ligning (1.17) fås

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= -\dot{p}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dot{q}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial t}\,, \\
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= -\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t}\,.
\end{aligned}$$

**4**) Dette følger trivielt fra ovenstående spørgsmål

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

**5**) Hamiltonfunktionen er bevaret i tid, hvis den ikke ændrer sig i tid, hvilket skrives matematisk som $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$, og det er opfyldt hvis $H$ ikke er eksplicit tidsafhængig, altså $\partial H/\partial t = 0$. Da Lagrangefunktionen og Hamiltonfunktionen har samme eksplicitte tidsafhæninghed medfører dette at Hamiltonfunktionen også er bevaret i tid, hvis $\partial L/\partial t = 0$. Dermed er systemets energi bevaret, hvis systemet opfylder at Hamiltonfunktionen er systemets energi og at denne ikke er eksplicit tidsafhængig.

**6**) Dette gøres ved at tilføje $i$'er på $q$ og $p$ og summe over disse led

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

Præcis samme fremgangsmåde benyttes da ingen af argumenterne er specifikke på en sådan måde så de ikke gælder for et arbitrært koordinat.

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left[ -\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} \right] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \,,$$

da indholdet af parentesen er nul for alle $i$

$$-\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} = 0 \;\; \forall \, i \,.$$

Konklusionen er derfor den samme: Hvis Hamilton-/Lagrangefunktionen ikke er eksplicit tidsafhængig, så er systemets energi bevaret.

# Kapitel 2

# Kvantemekanik

**Opgave 1:** • **Parabelformet bølgefunktion**
Vi ser her på en partikel i en uendelig brønd i intervallet fra 0 til $L$. Lad bølgefunktionen være:

$$\psi = Nx(L-x)$$

**1**) Find $N$ så bølgefunktionen er normeret?
En normeret bølgefunktion opfylder kravet:

$$\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x = \langle \psi \,| \psi \rangle = 1$$

Siden bølgefunktionen er nul uden for brønden skal vi kun integrere inde i brønden.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^L |\psi|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^L |N|^2 \, x^2 (L-x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \int_0^L x^4 - 2Lx^3 + x^2L^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^4L}{2} + \frac{x^3L^2}{3} \right]_0^L \\
&= |N|^2 \, L^5 \left( \frac{6}{30} - \frac{15}{30} + \frac{10}{30} \right) \\
&= \frac{|N|^2 \, L^5}{30}
\end{aligned}$$

Herefter kan $|N|^2$ isoleres.

$$|N|^2 = \frac{30}{L^5}$$

Denne ligning har mere end en løsning. Selv hvis vi begrenser os til reele tal vil der være både en positiv og en negativ løsning, men $N$ er et komplekst tal. Der er derfor en hel cirkel i det komplekse plan med samme normkvadrat. For en vilkårlig fase $\theta$vil den gennerelle løsning være:

$$N = \sqrt{\frac{30}{L^5}} e^{i\theta}$$

Heldigvis har fasen ikke nogen fysisk betydning, så vi vælger blot den positive løsning:

$$N = \sqrt{\frac{30}{L^5}}$$

**2**) Hvad er forventningsværdien for positionen: $\langle x \rangle$?

For at finde forventingsværdien bruges ligning (2.7) i kompendiet.

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_0^L \psi^* x \psi \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \int_0^L x^3 (L-x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \int_0^L x^5 - 2x^4 L + x^3 L^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \left[ \frac{x^6}{6} - \frac{2x^5 L}{5} + \frac{x^4 L^2}{4} \right]_0^L \\
&= |N|^2 L^6 \left( \frac{10}{60} - \frac{24}{60} + \frac{15}{60} \right) \\
&= |N|^2 \frac{L^6}{60} = \frac{30}{L^5} \frac{L^6}{60} = \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Det er altså mest sandsynligt at finde partiklen i midten af bønden. Dette er ikke overraskende siden brønden er symmetrisk, og der derfor ikke er nogen grund til at den skulle være i den ene side frem for den anden.

**3**) Find forventningsværdien for energien: $\langle E \rangle$ og sammenlign den fundne energi med grundtilstandsenergien: $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.

Forventingsværdien for energien er forventinigsværdien af hamiltonoperatoren.

$$
\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \int_0^L \psi^* \hat{H}\psi \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-\hbar^2 |N|^2}{2m}\int_0^L x(L-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xL-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\hbar^2 |N|^2}{m}\int_0^L xL - x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\hbar^2 |N|^2}{m}\left[\frac{x^2L}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^L \\
&= \frac{\hbar^2 |N|^2 L^3}{6m} = \frac{30}{L^5}\frac{\hbar^2 L^3}{6m} = \frac{10\hbar^2}{2mL^2}
\end{aligned}
$$

Der hvor der er et $\pi^2$ i grundtilstands energien er der 10 i $\langle E\rangle$. Da $\pi^2 \approx 9,87$ er $\langle E\rangle$ en anelse større end $E_1$.

**4**) Er $\psi$ en stationær tilstand?

Der er (mindst) to fremgangsmåder her. Den første er at sætte $\psi$ ind i den stationære schrödingerligning og se om det går op.

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\psi &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \\
&= \frac{-\hbar^2 N}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xL-x^2) \\
&= \frac{\hbar^2 N}{m} \neq E\psi
\end{aligned}
$$

Da $\psi$ ikke opfylder den stationære schrödingerligning er det ikke en stationær tilstand.

Den anden metode bygger på at vi allerede kender de stationære tilstandes energier. De er på formen:

$$
E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}
$$

Alle stationære tilstande vil have deres energi som forventningsværdi for energien:

$$
\langle E_n\rangle = \int_0^L \psi_n^* \hat{H}\psi_n \,\mathrm{d}x = E_n \int_0^L |\psi|^2 \,\mathrm{d}x = E_n
$$

Forventningsværdien for energien af $\psi$ er ikke på denne form så $\psi$ kan ikke være en stationær tilstand.

**Opgave 2:** • **Sammensatte bølgefunktioner**

Find normeringskonstanten $N$ og energien $E$ for de følgende bølgefunktioner, der er sammensat af stationære tilstande for den uendelige brønd:

**1**) $N(\psi_1 + \psi_2)$ Normeringskravet giver:

$$\begin{aligned}
1 &= |N|^2 \int_0^L (\psi_1 + \psi_2)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \int_0^L \psi_1^2 + \psi_2^2 + 2\psi_1\psi_2 \,\mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \left( \int_0^L \psi_1^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^L \psi_2^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_0^L \psi_1\psi_2 \,\mathrm{d}x \right) \\
&\text{Siden } \psi_1 \text{ og } \psi_2 \text{ er ortonormale er de to første} \\
&\text{integraler lig en og det sidste nul.} \\
&= 2\,|N|^2
\end{aligned}$$

Vælges $N$ reelt og positivt er $N = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**2**) $N(\psi_1 - \psi_3)$

I de to andre delopgaver er fremgangsmåden den samme, men det ser dog lidt pænere ud i braket notation.

$$\begin{aligned}
1 &= \langle N(\psi_1 - \psi_3) \,|\, N(\psi_1 - \psi_3) \rangle \\
&= |N|^2 \langle \psi_1 - \psi_3 \,|\, \psi_1 - \psi_3 \rangle \\
&= |N|^2 \left( \langle \psi_1 - \psi_3 \,|\, \psi_1 \rangle - \langle \psi_1 - \psi_3 \,|\, \psi_3 \rangle \right) \\
&= |N|^2 \left( \langle \psi_1 \,|\, \psi_1 \rangle - \langle \psi_3 \,|\, \psi_1 \rangle - \langle \psi_1 \,|\, \psi_3 \rangle + \langle \psi_3 \,|\, \psi_3 \rangle \right) \\
&= 2\,|N|^2
\end{aligned}$$

Igen vælges den reelt positive løsning så $N = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**3**) $N(\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3)$

Siden krydsledene altid giver nul kan de ingnoreres

$$\begin{aligned}
1 &= \langle N(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) \,|\, N(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) \rangle \\
&= |N|^2 \langle \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 \,|\, \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 \rangle \\
&= |N|^2 \left( \langle \psi_1 \,|\, \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 \,|\, \psi_2 \rangle + \langle \psi_3 \,|\, \psi_3 \rangle \right) \\
&= 3\,|N|^2
\end{aligned}$$

På samme måde som før for vi altså her $N = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**Opgave 3:** •• **Den tidsafhængige bølgefunktion**
I en uendelig brønd er bølgefunktionen til tiden $t = 0$:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_1 + \psi_2)$$

**1**) Hvad er $\Psi(x,t)$? Du kan med fordel bruge $\omega = \frac{E_1}{\hbar} = \frac{\pi^2\hbar}{2mL^2}$ Tidsudviklingen findes som summen af de stationære tilstande gange deres relevante tidsbølgefunktion $\varphi(t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$. Udtrykt i $\omega$ har de stationæretilstande energierne: $\omega\hbar$ og $4\omega\hbar$. Det giver en tidsafhængig bølgefunktion:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_1 e^{-i\omega t} + \psi_2 e^{-4i\omega t})$$

**2**) Hvad er $\Psi^*(x,t)$? De stationære tilstande reele, så det er kun tidsudvikligen der skal komplekskonjugeres. Det sker ved at erstatte alle $i$ med $-i$.

$$Psi^* = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2 e^{4i\omega t})$$

**3**) Skriv $\Psi^* x \Psi$ så simpelt som muligt. Først indsættes $\Psi$ og $\Psi^*$ som vi allerede har fundet:

$$\begin{aligned}
&\Psi^* x \Psi \\
&= \frac{1}{5}(2\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2 e^{4i\omega t})x(2\psi_1 e^{-i\omega t} + \psi_2 e^{-4i\omega t}) \\
&= \frac{x}{5}(2\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2 e^{4i\omega t})(2\psi_1 e^{-i\omega t} + \psi_2 e^{-4i\omega t})
\end{aligned}$$

Husk at når man ganger eksponentialfunktioner lægger man eksponenterne sammen. Derudover får vi nu brug for vores første hint.

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{5}(4\psi_1^2 + \psi_2^2 + 2\psi_1\psi_2(e^{3i\omega t} + e^{-3i\omega t})) \\
&= \frac{x}{5}(4\psi_1^2 + \psi_2^2 + 4\psi_1\psi_2\cos(3\omega t))
\end{aligned}$$

Det bliver ikke pænere end dette.

**4**) Hvad er $\langle x(t)\rangle$ Vi har lige fundet indmaden til det integral vi skal løse, så det indsættes her:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_0^L \Psi^* x \Psi \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\int_0^L 4x\psi_1^2 + x\psi_2^2 + 4x\psi_1\psi_2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5}\int_0^L \psi_1^* x\psi_1 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_0^L \psi_2^* x\psi_2 \, \mathrm{d}x \\
&+ \frac{4\cos(3\omega t)}{5}\int_0^L \psi_1^* x\psi_2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5}\langle\psi_1|\, x\, |\psi_1\rangle + \frac{1}{5}\langle\psi_2|\, x\, |\psi_2\rangle + \frac{4}{5}\cos(3\omega t)\langle\psi_1|\, x\, |\psi_2\rangle
\end{aligned}$$

Det er ikke ligefrem pæne integraler, så det er godt vi ikke skal løse dem.

$$\langle x\rangle = \frac{4L}{10} + \frac{L}{10} + \frac{4}{5}\cos(3\omega t)\frac{-16L}{9\pi^2} = \frac{L}{2} - \frac{64L}{45\pi^2}\cos(3\omega t)$$

Så forventningsværdien bevæger sig med en simpel harmonisk bevægelse og en vinkelfrekvens på $3\omega$.

Bemærk at der er en fejl i hintet til denne opgave.

$$\langle\psi_n|\, \hat{x}\, |\psi_n\rangle = \frac{L}{2}$$

**Opgave 4:** ●●● **En partikel i et kvadrat**

I to dimensioner er den tidsuafhængige Schrödingerligning i kartesiske koordinater.

$$E\psi(x,y) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + V(x,y)$$

Vi vil se på en kvadratisk brønd, i to dimensioner, med sidelængder på $L$. Her er potentialet nul når $0 \le x \le L$ og $0 \le y \le L$ Antag at man kan skrive bølgefunktionen som: $\psi(x,y) = X(x)Y(y) = XY$.

**1**) Indsæt $\psi = XY$ i Schrödingerligningen med $V = 0$ og isoler $E$.

$Y$ kan betragtes som konstant for $x$ differentialet og omvendt, så Schrödingerligningen bliver:

$$\begin{aligned}
E\psi &= \hat{H}XY \\
&= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 XY}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 XY}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right) \\
&\text{Herefter deles med } XY \text{ på begge sider.} \\
E &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

**2**) Energien vil bestå af en bidrag fra $X$ og $Y$. så $E = E_x + E_y$. Opstil differentialligninger i stil med ligning (2.20) i kompendiet for $X$ og $Y$.

På den ene side af lighedstegnet er kun energien, så denne side er konstant. På den anden side er der en sum af to led der kun afhænger af en af vores variable. Den eneste mulige måde hvorpå dette kan gå op er hvis begge led er konstante. Disse konstanter kaldes $E_x$ og $E_y$. Det giver differentialligningerne:

$$\begin{aligned}
E_x X &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \\
E_y Y &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

**3**) Find generelle løsninger til differentialligningerne, bølgefunktionen og de tilhørende energier. Bemærk at der vil være et kvantetal for hver af differentialligningerne.

Ligningerne er de samme som dem vi løste for den uendelige brønd, og løsningerne er de samme. Givet kvantetallene $n_x$ og $n_y$ vil $X$ være:

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \quad E_x = \frac{n_x^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Tilsvarende for $Y$.

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \quad E_y = \frac{n_y^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Det giver bølgefunktioner $\psi_{n_x n_y}$ på formen:

$$\begin{aligned}
\psi_{n_x n_y}(x, y) &= \frac{2}{L}\sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \\
E_{n_x n_y} &= E_x + E_y = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2)
\end{aligned}$$

**4**) Hvad er de fem laveste energier, og skitser bølgefunktioner med disse energier.

De laveste energier kan findes ved at starte med $n_x = n_y = 1$ og gradvist gøre dem større. Med $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ Er energierne:

$$
\begin{aligned}
E_{11} &= 2E_1 \\
E_{21} &= E_{12} = 5E_1 \\
E_{22} &= 8E_1 \\
E_{31} &= E_{13} = 10E_1 \\
E_{32} &= E_{23} = 13E_1
\end{aligned}
$$

**Opgave 5: ●●● En partikel i en boks**

I tre dimensioner er den tidsuafhængige Schrödingerligning i kartesiske koordinater.

$$E\psi(x, y, z) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z)$$

Vi vil se på en kubisk boks med en sidelængde på $L$ vil potentialet være nul når $x$, $y$ og $z$ alle er imellem 0 og $L$. Antag at man kan skrive bølgefunktionen som: $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) = XYZ$.

Fremgangsmåden er nøjagtigt den samme som for opgave 4.

**1**) Indsæt $\psi = XYZ$ i Schrödingerligningen med $V = 0$ og isoler $E$.

$$
\begin{aligned}
EXYZ &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)XYZ \\
&= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}YZ + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}Z + XY\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) \\
\iff E &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
$$

**2**) Energien vil bestå af en bidrag fra $X$, $Y$ og $Z$. så $E = E_x + E_y + E_z$. Opstil differentialligninger i stil med ligning (2.20) i kompendiet for $X$, $Y$ og $Z$.

Her er differentialligningerne:

$$
\begin{aligned}
E_x X &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \\
E_y Y &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \\
E_z Z &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

**3**) Find generelle løsninger til differentialligningerne, bølgefunktionen og de tilhørende energier. Bemærk at der vil være et kvantetal for hver af differentialligningerne.

Løsningerne til de separerede differentialligninger har løsninger der svarer til dem for den uendelige brønd.

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)$$
$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right)$$
$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

**4**) Find de laveste 5 mulige energier udtrykt i $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ energien for en endimensionel uendelig brønd med samme brede som boksens sidelængde.

De 5 laveste energier er:

$$E_{111} = 3E_1$$
$$E_{112} = E_{121} = E_{211} = 6E_1$$
$$E_{122} = E_{212} = E_{221} = 9E_1$$
$$E_{113} = E_{131} = E_{311} = 11E_1$$
$$E_{222} = 12E_1$$

**Opgave 6:** • **Parabelformet bølgefunktion igen**

Denne opgave bygger videre på opgave 1, så det er en fordel at have lavet denne opgave først. Vi ser igen på en parabelformet bølgefunktion i en uendelig brønd:

$$\psi = Nx(L - x)$$

**1**) Hvad er $\sigma_x^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$?

Vi kender allerede $\langle x \rangle$ og $|N|^2$ fra opgave 1.

$$\langle x \rangle = \frac{L}{2}$$
$$|N|^2 = \frac{30}{L^5}$$

For at finde $\left\langle x^2 \right\rangle$ bruges sandwichen:

$$\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle &= |N|^2 \int_0^L x^3(L-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{30}{L^5} \int_0^L x^5 - 2x^4 L + x^3 L^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{30}{L^5} \left[ \frac{x^6}{6} - \frac{2x^5 L}{5} + \frac{x^6}{6} \right]_0^L \\
&= 30L^2 \left( \frac{15}{60} - \frac{24}{60} + \frac{10}{60} \right) \\
&= \frac{L^2}{2}
\end{aligned}$$

Nu er usikkerheden:

$$\sigma_x^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{2}$$

og

$$\sigma_x = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

**2**) Hvad er $\sigma_p^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2$? Her skal vi bruge at $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Så bliver sandwichen:

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= -i\hbar\, |N|^2 \int_0^L x(L-x) \frac{\partial}{\partial x} \left( x(L-x) \right) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-30i\hbar}{L^5} \int_0^L x(L-x)(L-2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-30i\hbar}{L^5} \int_0^L xL^2 - 3x^2 L + 2x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-30i\hbar}{L^5} \left[ \frac{x^2 L^2}{2} - x^3 L + \frac{x^4}{2} \right]_0^L \\
&= \frac{-30i\hbar}{L} \left( \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Tilsvarende for $\langle p^2 \rangle$, hvor $opp^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= |N|^2 \int_0^L x(L-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( x(L-x) \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{-30\hbar^2}{L^5} \int_0^L x(L-x)(-2) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{60\hbar^2}{L^5} \int_0^L xL - x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{60\hbar^2}{L^5} \left[ \frac{x^2 L}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^L \\
&= \frac{60\hbar^2}{L^5} \left( \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right) \\
&= \frac{60\hbar^2}{L^2} \left( \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \right) \\
&= \frac{10\hbar^2}{L^2}
\end{aligned}$$

Så usikkerheden er:

$$\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle = \frac{10\hbar^2}{L^2}$$

og:

$$\sigma_p = \frac{\hbar\sqrt{10}}{L}$$

**3**) Passer det med Heisenbergs usikkerhedsprincip?

Sættes $\sigma_x$ og $\sigma_p$ ind i Heisenbers usikkerhedsprincip findes:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{L}{\sqrt{2}} \frac{\hbar\sqrt{10}}{L} = \hbar\sqrt{5} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Heisenberg er tilfreds ⌣̈

**Opgave 7: ●● Den frie partikel**

En fri partikel er en partikel der ikke påvirkes af noget potentiale, så $V(x) = 0$ for alle $x$

**1**) Hvad er $\hat{H}$?

Der er ikke noget potentiale så:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

**2**) Hvad er $[\hat{p}, \hat{H}]$?

Bemærk at operatorer altid kommuterer med sig selv, så:

$$\begin{aligned}[\hat{p}, \hat{H}] &= \hat{p}\hat{H} - \hat{H}\hat{p} \\ &= \frac{\hat{p}^3}{2m} - \frac{\hat{p}^3}{2m} \\ &= 0\end{aligned}$$

**3**) Hvilke bølgefunktioner opfylder: $\hat{p}\psi_p = -i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = p\psi_p$?

Omskrives dette findes differentialligningen:

$$\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}$$

Løsningen til denne differentialligning er blot en eksponentialfunktion. Imaginærfaktoren ændrer ikke dette, så:

$$\psi_p = e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

**4**) Hvad sker der hvis man sætter $\psi_p$ ind i Schrödingerligninen?

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_p &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2} \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2\psi_p \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{-p^2}{\hbar^2}\psi_p \\ &= \frac{p^2}{2m}\psi_p\end{aligned}$$

**5**) Hvad er sammenhængen imellem $E$og $p$?

Energien er:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

**6**) Hvad er $\sigma_p$ og $\sigma_E$?

Først findes $\langle p\rangle$, $\left\langle p^2\right\rangle$, $\langle E\rangle$ og $\left\langle E^2\right\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \left\langle \psi_p \middle| \hat{p}\psi_p \right\rangle \\ &= p\left\langle \psi_p \middle| \psi_p \right\rangle \\ &= p\end{aligned}$$

Dette er en konsekvens af at det er en egentilstand. Udregningen er tilsvarende for de andre.

$$\left\langle p^2 \right\rangle = p^2$$
$$\langle E \rangle = E$$
$$\left\langle E^2 \right\rangle = E^2$$

Det gør det muligt at finde usikkerhederne:

$$\sigma_p = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2 = 0$$
$$\sigma_E = \left\langle E^2 \right\rangle - \langle E \rangle^2 = 0$$

Man kan godt kende $p$og $E$ på samme tid for den frie partikel, og det er ved $\psi_p$ tilstandene.

**Opgave 8:** ●●● **En anden usikkerhedsrelation**

**1**) Vis at:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q \rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \middle| \hat{Q}\Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

Først skal det bemærkes at $\langle Q \rangle$ dækker over et integral:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi \,\mathrm{d}x$$

Siden integralet er i forhold til $x$ og differentialet er i forhold til $t$ kan differential operatoren flyttes ind i integralet. Herefter anvendes kæderegelen.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\langle Q \rangle}{\mathrm{d}t} &= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi^* \hat{Q} \psi \,\mathrm{d}x \\ &= \int \left( \frac{\mathrm{d}\Psi^*}{\mathrm{d}t} \hat{Q}\Psi + \Psi^* \frac{\mathrm{d}\hat{Q}}{\mathrm{d}t} \Psi + \Psi^* \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Hverken $x$ eller $p$ afhænger af $t$, så den totale afledte er lig den delviste. Herefter kan integralet splittes op, og bringes på braket form (man kan sagtan lave hele denne opgave på braket form, men det kan være en hælp at se integralerne). Bemærk at rækkefølgen af differentiering og komplekskonjugering er underordnet.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \int \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* \hat{Q}\Psi \,\mathrm{d}x + \int \Psi^* \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \,\mathrm{d}x + \int \Psi^* \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \,\mathrm{d}x \\ &= \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \middle| \hat{Q}\Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \hat{Q} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

Som vi ville vise

**2**) Vis at:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{Q}]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\langle Q\rangle}{\partial t}\right\rangle$$

Først isoleres $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ i Schrödingerligningen.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\Psi$$

Kompleksekonjugeres på begge sider findes:

$$\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = \frac{-1}{i\hbar}\hat{H}\Psi^*$$

I første led indsættes fra Schrödingerligningen.

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle &= \int\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\hat{Q}\Psi\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{i\hbar}\int\hat{H}\Psi^*\hat{Q}\Psi\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{i\hbar}\left\langle\hat{H}\Psi\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle \\
&= \frac{-1}{i\hbar}\left\langle\Psi\middle|\hat{H}\hat{Q}\Psi\right\rangle
\end{aligned}$$

I sidste skridt udnyttede vi hintet. For det tredje led er fremgangsmåden den samme, så det giver:

$$\left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\hat{H}\Psi\right\rangle$$

Kombineres de to led fåes:

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle &= \frac{-1}{i\hbar}\left(\left\langle\Psi\middle|\hat{H}\hat{Q}\Psi\right\rangle - \left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\hat{H}\Psi\right\rangle\right) \\
&= \frac{-1}{i\hbar}\left\langle\Psi\middle|(\hat{H}\hat{Q}-\hat{Q}\hat{H})\Psi\right\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{Q}]\right\rangle
\end{aligned}$$

Det andet led indentificeres blot som forventningsværdien af ændrinen i operatoren.

$$\left\langle\Psi\middle|\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Psi\right\rangle = \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle$$

Det giver det udtryk vi søgte:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{Q}]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\langle Q\rangle}{\partial t}\right\rangle$$

**3**) Hvordan ændrer antagelsen om at $\hat{Q}$ er uafhængig af $t$ de to tidligere resultater? Hvis $\hat{Q}$ er afhængig af $t$ er:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = 0$$

så

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \middle| \hat{Q}\Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \hat{Q}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

Med kun første og tredje led tilbage bliver resultatet af anden delopgave kun kommutatoren:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\left\langle [\hat{H},\hat{Q}] \right\rangle \tag{2.1}$$

**4**) Vis:

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right|$$

Den gennerelle usikkerhedsrelation er:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left\langle [\hat{A},\hat{B}] \right\rangle\right)^2$$

Sættes $\hat{A}$ og $\hat{B}$ som $\hat{H}$ og $\hat{Q}$ får vi:

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left\langle [\hat{H},\hat{Q}] \right\rangle\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_H \sigma_Q \geq \left|\frac{1}{2i}\left\langle [\hat{H},\hat{Q}] \right\rangle\right|$$

Nu insdætter vi fra ligning (2.1).

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \left|\frac{1}{2i}\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right|$$

**5**) Find tids energi usikkerhedsrelationen. Vi er givet:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_Q}{\left|\mathrm{d}\langle Q\rangle/\mathrm{d}t\right|}$$

Uligheden vi fandt før kan omarangeres til:

$$\frac{\sigma_Q}{\left|\mathrm{d}\langle Q\rangle/\mathrm{d}t\right|} \geq \frac{\hbar}{2\sigma_H}$$

Den givne formel indsættes hvilket giver:

$$\sigma_t \geq \frac{\hbar}{2\sigma_H} \iff \sigma_t \sigma_E \geq \frac{\hbar}{2}$$

**Opgave 9:** • **Harmonisk oscillator med $\hat{a}_-\hat{a}_+$**
Færdiggør udledningen af den harmoniske oscillator. Hvis du havde problemer med denne udledning er denne opgave stærkt anbefalet.

**1**) Udregn $\hat{a}_-\hat{a}_+$.

$\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$ kan findes i ligning (2.57) og (2.58). Husk at operatorer ikke kommuterer. Det udnyttes at $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_-\hat{a}_+ &= \frac{1}{2\hbar\omega m}(i\hat{p} + m\omega\hat{x})(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 - im\omega(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2\right) - \frac{i}{2\hbar}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**2**) brug dette til at udlede ligning (2.60).

Denne ligning omarangeres så:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)$$

**3**) Vis at hvis $\psi_n$ er en løsning til Schrödingerligningen, så er $\hat{a}_-\psi_n$ det også. Hamliton operatoren anvendes på $\hat{a}_-\psi_n$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\hat{a}_-\psi_n) &= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)\hat{a}_-\psi_n \\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+\hat{a}_- - \frac{1}{2}\hat{a}_-\right)\psi_n \\
&= \hbar\omega\hat{a}_-\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2} - 1\right)\psi_n \\
&= \hat{H}\psi_n - \hbar\omega\psi_n \\
&= (E_n - \hbar\omega)\psi_n
\end{aligned}$$

**4**) Hvad er energien af $\hat{a}_-\psi_n$

Vi fandt energien da vi satte $\hat{a} - \psi_n$ ind i schrödingerligningen. Den er:

$$E = E_n - \hbar\omega$$

**Opgave 10: •• Det klassisk tilladte område.**
Vi vil her sammenligne den kvanteharmoniske oscillator med en klassisk harmonisk oscillator med samme $V$ og $E = E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$

**1**) Hvad er den maksimale værdi af $x$?

Den maksimale værdi findes hvor alt energien er potentiel energi.

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} = V = \frac{m\omega^2 x}{2}$$
$$\iff x_{\max} = \frac{\hbar}{m\omega}$$

**2**) Hvad er sandsynligheden for at finde en partikel i $\psi_0$ tilstanden i intervallet fra $-x_{\max}$ til $x_{\max}$?

Sandsynlighedstætheden er givet $|\psi|^2$. Dette integreres imellem $-x_{\max}$ og $x_{\max}$. Her er $\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$.

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-x\max}^{x_{\max}} |\psi_0|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{\hbar}{2m\omega} \left[\exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}x^2\right)\right]_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}x_{\max}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} e^{-1}
\end{aligned}$$

(Hint: $\int x e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{-ax^2}}{2a} + k$.)

**Opgave 11: •• Sjov med operatorer**
Vi vil her komme ind på en af grundene til, at hæve-/sænkeoperatorerne er smarte. Udenyt at bølgefunktionerne er ortonormale.

**1**) Udtryk $\hat{x}$ og $\hat{p}$ med $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$.

Summen af de to operatorer er:

$$\begin{aligned}\hat{a}_+ + \hat{a}_- &= \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x} + i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\ &= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\hat{x}\end{aligned}$$

Isoleres $\hat{x}$ findes:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)$$

Tilsvarende for differensen:

$$\begin{aligned}\hat{a}_+ - \hat{a}_- &= \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x} - i\hat{p} - m\omega\hat{x}) \\ &= -i\frac{2}{\sqrt{\hbar m\omega}}\hat{p} \\ \Longleftrightarrow \quad \hat{p} &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_- - \hat{a}_+)\end{aligned}$$

**2**) Find $\langle x\rangle$ og $\langle p\rangle$ for $\psi_0$, $\psi_1$ og $\psi_n$. Har man fundet svaret for $\psi_n$ kan man bare indsætte tallene bagefter. Husk på at $\hat{a}_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$ og $\hat{a}_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int \psi_n^*\hat{x}\psi_n \,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int \psi_n^*(\hat{a}_+\psi_n + \hat{a}_-\psi_n)\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int \psi_n^*\sqrt{n+1}\psi_{n+1} + \sqrt{n}\psi_{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Bigg(\sqrt{n+1}\int \psi_n\psi_n^*\psi_{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &+ \sqrt{n}\int \psi_n^*\psi_{n-1}\,\mathrm{d}x\Bigg) \\ &= 0\end{aligned}$$

Siden denne metode frigør os fra at løse et eneste integral kan vi lige så godt bruge braket notation.

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \langle \psi_n | \, \hat{p} \, | \psi_n \rangle \\
&= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle \psi_n \, | (\hat{a}_- \psi_n - \hat{a}_+ \psi_n \rangle \\
&= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\sqrt{n} \langle \psi_n \, | \psi_{n-1} \rangle - \sqrt{n+1} \langle \psi_n \, | \psi_{n+1} \rangle) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Så forventningsværdien er nul for alle stationære tilstande.

**3**) Gør det samme for $\left\langle x^2 \right\rangle$ og $\left\langle p^2 \right\rangle$.

Først skal vi finde $\hat{x}^2$ og $\hat{p}^2$ udtrykt med $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$. Husk at operatorer ikke kommuterer

$$\begin{aligned}
\hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)^2 = \frac{\hbar}{m\omega}(\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^2 + \hat{a}_-\hat{a}_+ + \hat{a}_+\hat{a}_-) \\
\hat{p}^2 &= \frac{-\hbar m\omega}{2}(\hat{a}_- - \hat{a}_+)^2 = -\hbar m\omega(\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^2 - \hat{a}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{a}_-)
\end{aligned}$$

Nu er det muligt at finde $\left\langle x^2 \right\rangle$ og $\left\langle p^2 \right\rangle$.

$$\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \psi_n \middle| \hat{a}_+^2 + \hat{a}_- + \hat{a}_+\hat{a}_- + \hat{a}_-\hat{a}_+ \middle| \psi_n \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \psi_n \, \middle| \hat{a}_+^2\psi_n + \hat{a}_-^2\psi_n + \hat{a}_-\hat{a}_+\psi_n + \hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \psi_n \, \middle| \sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2} + \sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2} \right\rangle \\
&+ \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \psi_n \, | (n+1)\psi_n + n\psi_n \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) \langle \psi_n \, | \psi_n \rangle \\
&= \frac{\hbar(2n+1)}{2m\omega}
\end{aligned}$$

Bemærk at kun når der er lige mange hæve og sænke operatorer at ledene bidrager med andet end nul. Dette gælder ikke generelt.

$$\begin{aligned}
\left\langle p^2 \right\rangle &= \frac{\hbar m\omega}{2} \left\langle \psi_n \middle| \hat{a}_+\hat{a}_- + \hat{a}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+^2 - \hat{a}_-^2 \middle| \psi_n \right\rangle \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2} \langle \psi_n \, | \hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n + \hat{a}_-\hat{a}_+\psi_n \rangle \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2} \langle \psi_n \, | n\psi_n + (n+1)\psi_n \rangle \\
&= \frac{\hbar m\omega(2n+1)}{2}
\end{aligned}$$

**4**) Hvad er $\sigma_x$ og $\sigma_p$ for $\psi_n$?

Siden $\sigma_A^2 = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2$ er:

$$\sigma_x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar(2n+1)}{m\omega}}$$
$$\sigma_p = \sqrt{\left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega(2n+1)}{2}}$$

**5**) Hvor dan passer det med Heisenbergs usikkerhedsprincip?

Indsætter vi $\sigma_x$ og $\sigma_p$ i Heisenbergs usikkerheds princip finder vi:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar(2n+1)}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Heisenberg er altid opfyldt, og når $n = 0$ er det en lighed.

**Opgave 12:** •• **Nu med tid**

Til tiden $t = 0$ har vi bølgefunktionen:

$$\Psi(x, t = 0) = N(\psi_0 + \psi_1)$$

(Det kan være en fordel at have lavet opgave 11 først.)

**1**) Hvad er $N$?

Det udnyttes at bølgefunktionerne er ortonormale.

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \Psi \,|\, \Psi \rangle \\ &= |N|^2 \langle \psi_0 + \psi_1 \,|\, \psi_0 + \psi_1 \rangle \\ &= |N|^2 \left( \langle \psi_0 \,|\, \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 \,|\, \psi_1 \rangle + \langle \psi_1 \,|\, \psi_0 \rangle + \langle \psi_1 \,|\, \psi_1 \rangle \right) \\ &= 2\,|N|^2 \\ \Rightarrow |N| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

I princippet kan vi ikke sige mere om $N$. Her vælges $N = \frac{1}{\sqrt{2}}$ uden tab af generealitet.

**2**) Hvad er $\Psi(x, t)$?

Begge de stationære tilstande får en $\exp(\frac{-i\hbar E t}{\hbar})$ faktor.

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_0 e^{-i\omega t/2} + \psi_1 e^{-3i\omega t/2} \right)$$

**3**) Hvad er $\langle E \rangle$?

En måde at finde $\langle E\rangle$ er at udnytte at vi ved hvordan hamiltonoperatoren virker på de stationære tilstande, og kun afhænger af bølgefunktionens rumafhængighed. Det kan udnyttes at $\left\langle e^{i\theta}\,\middle|\,e^{i\theta}\right\rangle = 1$ og at de stationære tilstande er ortonormale.

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \left\langle \Psi\right| \hat{H} \left|\Psi\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{H}\psi_0 e^{-i\omega/2} + \hat{H}\psi_1 e^{-3i\omega/2}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \Psi \,\middle|\, \frac{\hbar}{2}\psi_0 e^{-i\omega/2} + \frac{3\hbar\omega}{2}\psi_1 e^{-3i\omega/2}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \psi_0 e^{-i\omega t/2} + \psi_1 e^{-3i\omega t/2} \,\middle|\, \frac{\hbar}{2}\psi_0 e^{-i\omega/2} + \frac{3\hbar\omega}{2}\psi_1 e^{-3i\omega/2}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{2}\left\langle \psi_0 \,|\, \psi_0\right\rangle + \frac{3\hbar\omega}{2}\left\langle \psi_1 \,|\, \psi_1\right\rangle\right) \\
&= \hbar\omega
\end{aligned}$$

**4**) Hvad er $\langle x(t)\rangle$? Først skrives forventningsværdien som flere mindre integraler:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \langle \Psi| \, x \, |\Psi\rangle \\
&= |N|^2 \left\langle \psi_0 e^{-i\omega t/2} + \psi_1^{-3i\omega t/2} \right| x \left| \psi_0 e^{-i\omega t/2} + \psi_1^{-3i\omega t/2}\right\rangle \\
&= |N|^2 \left\langle \psi_0 + \psi_1 e^{-i\omega t}\right| x \left|\psi_0 + \psi_1 e^{-i\omega t}\right\rangle \\
&= |N|^2 \left( \langle \psi_0| \, x \, |\psi_0\rangle + \left\langle \psi_1 e^{-i\omega t}\right| x \left|\psi_1 e^{-i\omega t}\right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \psi_0\right| x \left|\psi_1 e^{-i\omega t}\right\rangle + \left\langle \psi_1 e^{-i\omega t}\right| x \left|\psi_0\right\rangle \right) \\
&= |N|^2 \left( \langle \psi_0| \, x \, |\psi_0\rangle + \langle \psi_1| \, x \, |\psi_1\rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \psi_0| \, x \, |\psi_1\rangle \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)\right)
\end{aligned}$$

Nu udregnes de enkelte integraler seperat. Det kan udnyttes at $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n| \, x \, |\psi_n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \psi_n| \, \hat{a}_+ + \hat{a}_- \, |\psi_n\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\langle \psi_n \,\middle|\, \sqrt{n+1}\psi_{n+1} + \sqrt{n}\psi_{n-1}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n+1}\,\langle \psi_n \,|\, \psi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}\,\langle \psi_n \,|\, \psi_{n-1}\rangle\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dermed er både $\langle\psi_0|\, x\, |\psi_0\rangle$ og $\langle\psi_1|\, x\, |\psi_1\rangle$ lig nul.

$$\begin{aligned}\langle\psi_0|\, x\, |\psi_1\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\psi_0|\, a_+ + a_-\, |\psi_1\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\left\langle\psi_0\middle|\sqrt{2}\psi_2\right\rangle + \langle\psi_0\,|\,\psi_0\rangle\right) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\psi_0\,|\,\psi_0\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\end{aligned}$$

Nu er det muligt at sætte ind og finde $\langle x\rangle$.

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\cos(\omega t)$$

## Energibevarelse

**Opgave 13: ●●● Energibevarelse i kvantetilstande**
Vi skal i denne opgave se på hvordan energibevarelse kommer til udtryk i kvantemekaniske tilstande. Til enhver Hamilton $\hat{H}$ operator kan vi finde et sæt af løsninger som opfylder følgende ligning: $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$.

**1**) Udtryk en generel funktion $f(x)$ som en kombination af løsninger til Schrödinger ligningen.

Alle funktion kan skrives som en som af egentilstande, da disse løsninger danner en komplet basis:

$$f(x) = \sum_n c_n\psi_n$$

Man kunne finde koefficienterne $c_n$ med ligning (2.30) men deres præcise form er underordnet

**2**) Hvordan vil denne funktion udvikle sig over tid? (Hint: udtryk $f(x,t)$ som en kombination af løsninger til Schrödinger ligningen)

Tidsudviklingen af $f(x)$ kan findes ved at multiplicere hvert led i summen med den tilsvarende faktor $\exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right)$. Det giver:

$$f(x,t) = \sum_n c_n\psi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

**3**) Udregn forventningsværdien af energien $\langle E\rangle$. Hvordan vil denne udvikle sig over tid?

Forventingsværdien er givet:

$$\langle E\rangle = \left\langle f(x,t)\right|\hat{H}\left|f(x,t)\right\rangle$$

Hamiltonoperatoren kan flyttes ind i summen til højre, og anvendes på de individuelle tilstande.

$$= \left\langle \sum_n c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \middle| \hat{H} \middle| \sum_m c_m \psi_m e^{-iE_m t/\hbar} \right\rangle$$
$$= \left\langle \sum_n c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \middle| \sum_m c_m \hat{H} \psi_m e^{-iE_m t/\hbar} \right\rangle$$
$$= \left\langle \sum_n c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \middle| \sum_m c_m E_m \psi_m e^{-iE_m t/\hbar} \right\rangle$$

Istedet for at have sumtegnene inde i braketten, kan de flyttes udenfor, så det bliver en dobbelt sum.

$$= \sum_n \sum_m \left\langle c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \middle| c_m E_m \psi_m e^{-iE_m t/\hbar} \right\rangle$$
$$= \sum_n \sum_m c_n^* c_m E_m \left\langle \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \middle| \psi_m e^{-iE_m t/\hbar} \right\rangle$$
$$= \sum_n \sum_m c_n^* c_m E_m e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle \psi_n | \psi_m \rangle$$

Når man tager en dobbelt sum vil man lægge alle kombinationer af $n$ og $m$ sammen. Siden løsningerne til schrödingerligningen er ortonormale vil braketten enten være et når $n = m$ og nul ellers. Det betyder at kun ledene hvor $n$ og $m$ er ens skal tælles med og vi kan reducere den dobbelte sum til en enkelt sum.

$$= \sum_n c_n^* c_n E_n E^{i(E_n - E_n)t/\hbar} \langle \psi_n | \psi_n \rangle$$
$$= \sum_n |c_n|^2 E_n$$

Her fosvandt tidsafhængigheden, så energiens forventningsværdi er konstant.

**Opgave 14:** • **Lige og ulige funktioner**

En funktion så som $f(x) = x^2$ der opfylder kravet: $f(x) = f(-x)$ kaldes en lige funktion. Tilsvarende er funktioner som $f(x) = x$ der opfylder det ligende krav: $f(x) = -f(-x)$. Det vil sige at en lige funktion er uændret hvis man spejler den i $y$-aksen, mens en ulige funktion skifter fortegn. Bemærk at de fleste funktioner er hverken lige eller ulige, og unikt er funktionen $f(x) = 0$ både lige og ulige. Afgør om følgende funktioner er lige eller ulige:

**1**) $\sin x$ En af egenskaberne vid sinus er at $\sin(x) = -\sin(-x)$, så $\sin x$ er ulige.

**2**) $e^{x^2}$ $x^2 = (-x)^2$ ligegyldigt hvilken funktion der får en lige funktion som input ender med at være lige.

**3**) $\cos x$ Cosinus har egenskaben $\cos(x) = \cos(-x)$

**Opgave 15:** • **Mere om lige og ulige funktioner**

Lad $f_g(x)$ være en lige funktion og $f_u(x)$ være en ulige funktion[1].

[1] $g$ og $u$ står for gerate og ungerate, de tyske ord for lige og ulige.

**1**) Vis at produktet af lige og ulige funktioner fungerer på samme måde som produktet af lige og ulige tal.

Produktet af to lige funktioner er:

$$(f_g g_g(-x) = f_g(-x)g_g(-x) = f_g(x)g_g(x)$$

Så $f_g g_g$ er lige.

Produktet af en lige og en ulige funktion er:

$$f_u g_g(-x) = f_u(-x)g_g(-x) = -f_u(x)g_g(x)$$

Så $f_u g_g$ er ulige.

Produktet af to ulige funktioner er:

$$f_u g_u(-x) = f_u(-x)g_u(-x) = (-f_u(x))(-g_u(x)) = f_u(x)g_u(x)$$

Så $f_u g_u$ er lige.

**2**) Er $\frac{1}{f_g(x)}$ lige eller ulige?

$$\frac{1}{f_g(-x)} = \frac{1}{f_g(x)}$$

En over ene lige funktion er også lige

**3**) Hvad med :$\frac{1}{f_u(x)}$?

$$\frac{1}{f_u(-x)} = \frac{1}{-f_u(x)} = \frac{-1}{f_u(x)}$$

En over en ulige funktion er også ulige.

**4**) Hvad er regnereglen med division?

**Opgave 16: •• Sammensætning af lige og ulige funktioner**

Alle funktioner kan skrives som en unik sum af en lige og en ulige funktion: $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$.

**1**) Skriv $f(-x)$ ud fra $f_g(x)$ og $f_u(x)$.

$$f(-x) = f_g(-x) + f_u(-x) = f_g(x) - f_u(x)$$

**2**) Skriv $f_g(x)$ og $f_u(x)$ ud fra $f(x)$ og $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f_g(x) &= \frac{1}{2}(f_g(x) + f_u(x) + f_g(x) - f_u(x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ f_u(x) &= \frac{1}{2}(f_g(x) + f_u(x) - f_g(x) + f_u(x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{aligned}$$

**3**) Hvad er den lige og den ulige komposant af eksponentialfunktionen $e^x$?

Vi kan her udnytte at vi allerede har den generelle løsning. Den type funktioner vi finder kaldes hyperbolske funktioner.

$$\begin{aligned}(e^x)_g &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \\ (e^x)_u &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh x\end{aligned}$$

**Opgave 17: ●●● Integraler af lige og ulige funktioner.**

Vi vil her finde nogle meget praktiske regneregler for integraler af lige og ulige funktioner over et symmetrisk interval. Lad $f_g(x)$ være en lige funktion og $f_u(x)$ være en ulige funktion. Antag derudover at $\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x$ og $\int_0^a f_u(x)\,\mathrm{d}x$ er kendte.

**1**) Vis at $\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x$

Integralet kan spilttes op i to intervaller:

$$\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f_g(x)\,\mathrm{d}x$$

Nu behandles andet integral med substitution, her vælges $u = -x$

$$\int_{-a}^{0} f_g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f_g(-u)\,\mathrm{d}u$$

Nu ombyttes grenserne, hvilket skifter fortegn. Præcis hvad vi kalder integrationsvariablen er ikke relevant, så den kan kaldes $x$ igen.

$$\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f_g(x)\,\mathrm{d}x$$

Så hele integralet er:

$$\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x$$

Hvilket vi ville vise.

**2**) Vis at $\int_{-a}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Her er fremgangsmåden præcis den samme.

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f_u(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_{-a}^{0} f_u(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{a}^{0} f_u(-u)\,\mathrm{d}u \\
&= (-1)^2 \int_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_{-a}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

**3**) Brug dette til at løse integralet:

$$\int_{-1}^{1} x\cos(x)\sin(x) + x^2 - x\exp(x^2)\,\mathrm{d}x$$

Enten ved at bruge regnereglerne for produkter af lige og ulige funktioner, eller ved at finde den lige og ulige komposant er det muligt at vise at $x\cos(x)\sin(x) - x\exp(x^2)$ er ulige og $x^2$ er lige. Så integralet er:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x\cos(x)\sin(x) + x^2 - x\exp(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{x}{2}\right]_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

# Kapitel 3

# Exoplaneter

**Opgave 1:** • **Stjernernes spektre**

**1**) For at se hvilke grundstoffer, der er i atmosfæren, skal du se for hvilke grundstoffer, der er absorptionslinjer. Vi kan derfor se, at der er eksempelvis er hydrogen, calcium og jern i atmosfæren.

**2**) Generelt set er der mange flere absorptionslinjer for stjerner af type M end G. G0 og G5 er karakteriseret ved stærke $Ca^{2+}$-linjer, og svage til mellemstærke hydrogenlinjer, hvor $Ca^{2+}$-linjerne også ses i klasse M. Hydrogenlinjerne ses ikke på samme måde for M-stjernerne.

**3**) Når en stjerne er kold, slås molekylerne ikke så let i stykker, og derfor kan vi finde molekyler som MgH og TiO i dens atmosfære. Dette skyldes, at varme hænger sammen med molekylernes kinetiske energi, hvorfor de intermolekylære kollisioner er voldsommere desto varmere stjernen er.
Desuden ses absorptionslinjerne ikke når stofferne er så varme at de er ioniserede.
Der er dog ikke færre tunge stoffer i de varme, unge stjerner - tværtimod er der normalt flere. De gamle stjerner opstod nemlig dengang det interstellare medium ikke var lige så beriget med stoffer dannet i f.eks. supernovaer og kilonovaer.

**Opgave 2:** • **Planetkandidater**

**1**) Som udgangspunkt er det mest oplagt at lede efter stjernesystemer, der minder om vores eget Solsystem, da vi ved det giver de rette betingelser for liv som vi kender det. Solens spektralklasse er G, hvorfor det er mest oplagt at lede efter stjerner i denne spektralklasse og dem tæt på. Varmere stjerner giver ikke livet lang tid til at udvikle sig, og koldere har kraftige solvinde. Men det er selvfølgelig også spændende at analysere planeter om alle andre stjerner.

**2**) I figuren fra opgave 1 ses det at spektraltyperne G0 og G5 er karakteriseret ved bl.a. stærke $Ca^{2+}$-linjer og svage til mellemstærke hydrogenlinjer. Derudover adskiller de sig også fra K og M ved fraværret af linjer for metaller som Fe, Mg og Ti. De varmeste stjerner har kraftige hydrogenlinjer, så dem kan man prøve at undgå. Desuden kan man kigge på spektrets samlede form og se hvor dets toppunkt ligger.

**Opgave 3:** • **Stjernespektrer og temperaturer**

**1**) Benyttes Wiens forskydningslov med temperaturene $5500\,\mathrm{K} \leq T \leq 6000\,\mathrm{K}$, idet Solen ligger i det temperaturinterval, fås

$$483\,\mathrm{nm} \leq \lambda_{\max} \leq 527\,\mathrm{nm}$$

Det præcise tal er ikke vigtigt, men det skal gerne fremkomme at tallet skal være omkring $\sim 500\,\mathrm{nm}$. Intervallets størrelse afhænger af hvor optimistisk man er på livets vegne.

**2**) Lys med bølgelængde omkring 500 nm ses af mennesker som værende et sted mellem blå og grøn. Solen ser dog ikke grøn ud grundet dens andre bølgelængder og hvordan det menneskelige øje fungerer.

**Opgave 4:** • **Jævn cirkelbevægelse**

**1**) En jævn cirkelbevægelse er en idealiseret bevægelsesform, hvor et legeme bevæger sig i en bane formet som en perfekt cirkel, hvor farten (og afstanden) er den samme hele vejen rundt. Hastigheden ændrer sig dog, da bevægelsesretningen ændres (derfor må der ske en acceleration, og den peger indad mod centrum).

**2**) Perioden er defineret som den tid det tager at bevæge sig en omgang, hvilket kan skrives som

$$P = \frac{x}{v}\,,$$

hvor $v$ er farten og $x$ er den i omløbet tilbagte distance. Eftersom den tilbagelagte distance er en cirkel med radius $r$, så er

$$x = 2\pi r\,,$$

hvorved

$$P = \frac{2\pi r}{v}$$

**3**) Jordens afstand til Solen er nogenlunde $r_\oplus = 1{,}0\,\mathrm{AU}$ og perioden er 1,0 yr. Dermed bliver Jordens banehastighed under antagelse af jævn cirkelbevægelse

$$v = \frac{2\pi r_\oplus}{P_\oplus} = \frac{2\pi \cdot 1{,}0\,\mathrm{AU}}{1{,}0\,\mathrm{yr}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}{3{,}156 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}} = 29{,}8\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

Bruger man approksimationen at $1{,}0\,\mathrm{yr} \simeq \pi \cdot 10^7\,\mathrm{s}$ fås

$$v = \frac{2\pi r_\oplus}{P_\oplus} \simeq \frac{2\pi \cdot 1{,}0\,\mathrm{AU}}{\pi \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}} = \frac{2\,\mathrm{AU}}{1 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{AU/s} = 29{,}9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

**Opgave 5:** • **Den Beboelige Zone**

Afstanden isoleres i ligning 3.19 i kompendiet:

$$T_p = T_\star \left(\frac{1-A}{4}\right)^{1/4} \left(\frac{R_\star}{r}\right)^{1/2} \Rightarrow rT_p^2 = T_\star^2 \left(\frac{1-A}{4}\right)^{1/2} R_\star \Rightarrow r = R_\star \left(\frac{T_\star}{T_p}\right)^2 \left(\frac{1-A}{4}\right)^{1/2}$$

**1**) Nu bestemmes $r$ for temperaturene $T_p = (273{,}15 - 373{,}15)\,\mathrm{K}$

a) $T_\star = T_\odot,\ R_\star = R_\odot \Rightarrow r_{\mathrm{BZ}} = (6{,}9 \cdot 10^{10} - 12{,}9 \cdot 10^{10})\,\mathrm{m} = (0{,}46 - 0{,}86)\,\mathrm{AU}$

b) $T_\star = 2T_\odot,\ R_\star = R_\odot \Rightarrow r_{\mathrm{BZ}} = (2{,}77 \cdot 10^{11} - 12{,}9 \cdot 10^{10})\,\mathrm{m} = (1{,}85 - 3{,}46)\,\mathrm{AU}$

c) $T_\star = T_\odot,\ 5R_\star = R_\odot \Rightarrow r_{\mathrm{BZ}} = (3{,}47 \cdot 10^{11} - 6{,}47 \cdot 10^{11})\,\mathrm{m} = (2{,}32 - 4{,}32)\,\mathrm{AU}$

**2**) Afstanden mellem Jorden og Solen er 1 AU, hvilket er udenfor den estimerede beboelige zone. Dette betyder at Jorden ikke opfylder antagelserne som ligning 3.19 bygger på, fordi Jorden har en varm jernkerne, som gør at Jorden ikke er i termisk ligevægt. Ofte estimerer man dog zonen antaget en jordlignende planet. Det er i det hele taget en kompliceret sag, og normalt antages Jorden at ligge i den indre kant af den beboelige zone om Solen. Desuden burde man ændre på stjernens temperatur, når man ændrer radius og vice verca, antaget at den er i ligevægt.

**Opgave 6:** • **Gravitationslinser**

I afsnit 3.2 i kompendiet om gravitationslinsemetode blev det nævnt at begivenheden skal observeres af flere forskellige målinger.

**1**) Kigges der ud i verdensrummet er der mange ting der kan ses. En lyskurve, som beskrevet i afsnittet, kan også skyldes andre fænomener, en fejl i målingerne, eller bare et statistisk udsving. Flere målinger kan være med til at øge den samlede sandsynlighed for at der faktisk er en planet. Man vil typisk sætte et krav som fx at signalet fra planeten skal være 5 gange stærkere end støjen, når man kombinerer dataen. Det kan også opnå med en enkelt måling, men det er sværere.

**2**) Gravitationslinsemetoden kræver en meget specifik situation, netop at en stjerne med tilhørende planet bevæger sig ind foran en anden stjerne langs Jordens synslinje. Det er derfor meget muligt at begivenheden kun forekommer én gang.

**3**) Hvis man kun har ét tidsrum til at observere begivenheden, og vil optimere sandsynligheden for at signalet er en planet (eller vise det ikke er), så må man tage gode målinger mens man kan. Det kan gøres ved ideelt at observere begivenheden med forskelligt udstyr. På den måde får man et stort nok datasæt selvom tidsperioden er kort.

**Opgave 7:** •• **Estimat af planetmasse**
Til dette benyttes ligningerne (3.11) og (3.15) i kompendiet. Først indsættes ligning (3.11) i ligning (3.15)

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{G(M_p+M_\star)} &= \left(\frac{2\pi r_\star \sin(i)}{v_{||}}\right)^3 \left(P_\star r^3\right)^{-1} \\ \implies \frac{4\pi^2}{G(M_p+M_\star)} &= \left(\frac{2\pi r_\star \sin(i)}{v_{||}}\right)^3 \left(P_\star r_\star^3 \left(\frac{M_\star+M_p}{M_p}\right)^3\right)^{-1} . \end{aligned}$$

Herefter er det "bare" oprydning, hvor det første der gøres er at skrive det hele ud ved at opløse parenteserne

$$\frac{4\pi^2}{G(M_p+M_\star)} = \frac{8\pi^3 r_\star^3 \sin^3(i)}{v_{||}^3} \frac{M_p^3}{P_\star r_\star^3 (M_\star+M_p)^3} .$$

Så forkortes ting ud

$$\frac{1}{G} = \frac{2\pi \sin^3(i)}{v_{||}^3} \frac{M_p^3}{P_\star (M_\star+M_p)^2} ,$$

og slutteligt isoleres $M_p^3 \sin^3 i$ for at opnå resultatet

$$M_p^3 \sin^3(i) = \frac{P_\star v_{||}^3 (M_\star+M_p)^2}{2\pi G} .$$

**Opgave 8:** •• **Overfladetemperatur på planeter**

**1**) For at kunne komme frem til udtrykket starter vi med at se på fluxen, altså det lys, som vi modtager. Fluxen er givet ved

$$F = \frac{L_\star}{4\pi D^2} = \frac{4\pi R_\star^2 \sigma T_\star^4}{4\pi D^2} = \left(\frac{R_\star}{D}\right)^2 \sigma T_\star^4 .$$

Vi ser nu på den energi som planeten absorberer. Vi antager at vi har en jævn kugle, som energien fordeles jævnt udover. Derudover skal vi have albedoen i spil, i det den fortæller os hvor meget lys, der bliver reflekteret.

$$L_{\text{abs}} = \pi R_p^2 F\,(1-A) = \pi R_p^2 \left(\frac{R_\star}{D}\right)^2 \sigma T_\star^4\,(1-A) = \frac{\pi R_p^2 R_\odot^2 \sigma T_\star^4}{d^2}\,(1-A) .$$

**2**) Termisk ligevægt betyder at temperaturen er konstant. Derfor er mængden af termisk energi (varme), planeten optager fra sine omgivelser, den samme som mængde af termisk energi, den afgiver til omgivelserne.

**3**) Idet planeten er antaget som værende et sortlegeme er

$$L_{\text{uds}} = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 \,.$$

Planeten er også i termisk ligevægt, hvorfor den udsender lige så meget energi, som den absorberer.

$$\begin{aligned}
L_{\text{uds}} &= L_{\text{abs}} \\
\Rightarrow 4\pi R_m^2 \sigma T_m^4 &= \frac{\pi R_m^2 R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{d^2}(1-A) \\
\Rightarrow 4T_m^4 &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^2 T_\odot^4 (1-A) \\
\Rightarrow T_m^4 &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^2 \frac{(1-A)}{4} T_\odot^4 \\
\Rightarrow T_m &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^{1/2} \left(\frac{(1-A)}{4}\right)^{1/4} T_\odot
\end{aligned}$$

**4**) Vi bruger udtrykket, som vi lige har fundet og bestemmer temperaturen på overfladen.

$$T_p \approx 40\,\text{K} \,.$$

Vi antager at den roterer hurtigt. Det har den betydning, at vi antager at temperaturen er den samme på over det hele, der vil altså ikke være noget "dag og nat". Den teoretiske værdi siger 40 K og temperaturen er blevet vurderet til 65 K. Det tyder derfor på, at vores antagelse om hurtigt rotation muligvis ikke er så god. Hvis den roterer langsomt, vil det betyde at temperaturen ikke er den samme overalt, hvilket kan forklare hvorfor temperaturen er blevet vurderet til 65 K.

### Opgave 9: •• Spektre af planetatmosfærer

**1**) Absorptionslinjerne fra OH-grupper og ketoner er meget karakteristiske for hvor i spektret de ligger. Specielt OH-grupper da linjen er ekstremt bred og næsten ligner en parabel. Eftersom vand har to O-H-bindinger vil vand give en meget kraftig linje, der vil ligne en alkohol, men den ville kunne kendes fra andre alkoholer ved det komplette fraværd af linjer fra C-H-bindinger. Vand er en ekstremt vigtig biomarkør, og kan vand ses i spektret fra en planets atomsfære er det en meget værdifuld information. Ketonlinjen vil kunne ses i eksempelvis $CO_2$, og den vil kunne kendes fra andre ketoner ved manglen på C-H-bindinger. Carbondioxid er også en vigtig biomarkør, hvorfor dette er af interesse. Carboxylsyren er ikke en ligeså vigtig biomarkør, men den vil dog være meget karakteristisk i spektret, idet man vil se en karakteristisk linje for C=O-bindingen og en karakteristisk linje fra O-H-bindingen. Yderligere vil OH-linjen være meget markant forskudt, sammenlignet med dens placering, hvis den ikke havde været i nærheden af ketonen. Grunden til at carboxylsyren er så karakteristisk er at oxygen er et meget elektrontiltrækkende atom, hvorfor de to O'er vil "trække" meget i det enlige carbons elektroner. Denne polarisering af bindingerne påvirker spektret idet det ændrer på energien i bindingen. Denne ændring er meget svær at beskrive, da den afhænger af mange faktorer, og det er også derfor de forskellige funktionelle gruppers absorptionslinjer kan være så relativt mange forskellige steder.

**2**) Den største udfordring er, at man er nødt til at kende et absorptionsspektrum fra planetens atmosfære, og sikre sig at det faktisk er det man har målt på. Det er beskrevet i kompendiet, hvordan dette i grove træk kan lade sig gøre. Spektret vil også være Dobblerforskudt og på andre måder forstyrret, hvorfor der er en masse bearbejdning inden man overhovedet kan gå i gang med at fortolke spektret. Fx kan dele af lyset være absorberet af gas på dets rejse mod Jorden. Det næste problem er, at hele spektret kommer samtidig. Det spektrum man ser, er resultatet af alle absorptionerne fra alle atomer og molekyler i atmosfæren, hvilket gør spektret meget mere komplekst. Godt nok er en alkohol eller carboxylsyre meget karakteristisk i IR-spektret fra en prøve af et enkelt stof i kemilaboratoriet på Jorden, men hvis spektret består af absorptioner fra mange forskellige molekyler, risikerer man at opløsningen ikke er god nok til at skelne linjerne fra hinanden. Linjerne har en bredde grundet bl.a. forskellige hastigheder af molekylerne, så de Dopplerforskydes lidt forskelligt.

**Opgave 10: ••• Atmosfærekrav**

For at en planet kan have en stabil atmosfære er den nød til at kunne holde simple molekyler fanget i dens tyngdefelt. Massen af $O_2$ er $m_{O_2} = 5{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg.

**1**) Newtons gravitationslov siger at tyngdekraften mellem legemer i afstand $r$ er

$$F_G = G\frac{mM}{r^2} \,.$$

Bruges Newtons anden lov er

$$mg = G\frac{mM}{r^2} \,,$$
$$g = G\frac{M}{r^2} \,,$$

hvor $g$ er tyngdeaccelerationen.

**2**) Fra mekanik er de omtalte energier

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \,,$$
$$V = mgh \,,$$

hvor $h$ er afstanden fra nulpunktet. Defineres planetens centrum som nulpunktet er $h = R_p$, og sættes de to energi lig hinanden fås

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR_p \,.$$

Isoleres $v^2$ før tyngdeaccelerationen fra før indsættes, fås

$$v_{\text{ecs}}^2 = \frac{2M_pG}{R_p} \,.$$

**3**) I ligningen fra kinetisk gasteori isoleres $v_{av}^2/2$

$$\frac{1}{2}v_{av}^2 = \frac{3}{2}\frac{k_B T}{m}\ .$$

Kombineres dette med undvigelseshastigheden fås

$$\frac{3}{2}\frac{k_B T}{m} = \frac{M_p G}{R_p}$$
$$\implies \frac{M_p}{R_p} = \frac{3}{2}\frac{k_B T}{mG}\ .$$

**4**) Udtrykket på venstre side af lighedstegnet er egenskaber ved selve planten, mens udtrykket på højre side er egenskaber ved plantens atmosfære, der udtrykker partiklerne i atmosfærens hastighed. Hvis planeten skal kunne fastholde atmosfæren må den hastighed ikke overskride undvigelseshastigheden, hvorfor uligheden må være

$$\frac{M_p}{R_p} > \frac{3}{2}\frac{k_B T}{m_{O_2} G}\ . \tag{3.1}$$

**5**) For Jorden er forholdet mellem masse og radius

$$\frac{M_\oplus}{R_\oplus} = \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6371\,\mathrm{m}} = 9{,}3737 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}\ .$$

Sættes tallene ind i højresiden fås

$$\frac{3}{2}\frac{k_B T}{m_{O_2} G} = \frac{3 \cdot 1{,}380\,65 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} \cdot (273,15 + 16)\mathrm{K}}{2 \cdot 5{,}31 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 6{,}6742 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}} = 1{,}6886 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}\ .$$

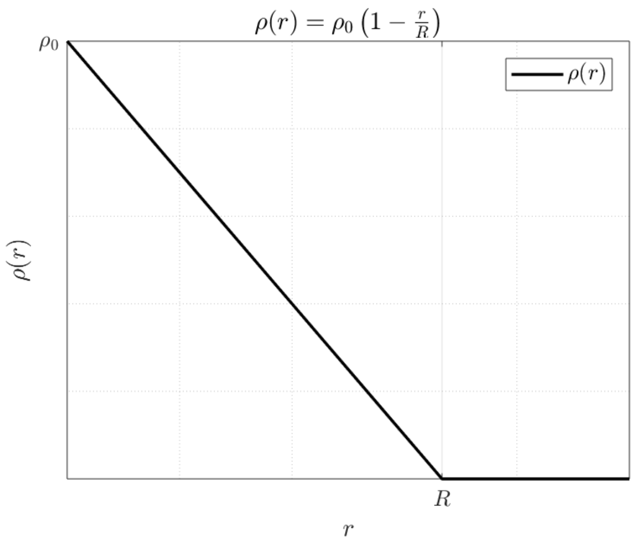
Ergo er ligningen opfyldt for Jorden.

### Opgave 11: •• Bose-Einstein kondensat og laserkøling

**1**) $E = \frac{hc}{\lambda}$ hvor $h$ og $c$ er konstanter, hvorfor energien bliver større, hvis bølgelængden bliver kortere.

**2**) Ingenting, da atomets energiniveauer er kvantiseret, hvorfor der ikke kan ske noget, hvis ikke fotonens energi er lige præcis nok til at flytte elektronen fra ét energiniveau til et andet - medmindre energien er høj nok til at frigøre elektronen helt og dermed ionisere atomet.

**3**) For at holde styr på atomerne kaldes den der bevæger sig mod laseren (1), og den der bevæger sig væk fra (2). Kaldes retningen af atom (1) for den positive retning, gælder følgende:
(1) Laseren bevæger sig mod atomet, og altså i negativ retning.
(2) Laseren bevæger sig væk fra atomet, og altså i positiv retning.




*Figur 3.1: Tegning af funktionen $\rho(r)$ for $r \geq 0$.*

**4**) Der kigges nu på samme foton fra de to referencesystemer.
(1) Fotonen er udsendt fra en kilde, der bevæger sig mod atomet, hvorfor fotonen er blåforskydt.
(2) Fotonen er udsendt fra en kilde, der bevæger sig væk fra atomet, hvorfor fotonen er rødforskydt.

**5**) De to atomer ser ikke fotonen, som havende samme bølgelængde, og dermed ikke samme energi. Da atomerne er ens, har de samme energiniveauer, men da atomerne oplever fotonen forskelligt, så passer fotonen ikke med en overgang i begge atomer.

**6**) Atomet skal gerne holdes samlet i midten af den fælde, hvori de holdes. De atomer, der bevæger sig væk fra fælden mod laseren ser laseren som blåforskudt. Vælges laseren til at have en bølgelængde, der er lidt længere end den, der svarer til overgangen hvis atomet står stille, kan kun atomer på vej ud af fælden mod laseren opleve lyset, som værende Dopplerforskudt på den måde, der gør det muligt for atomet at interagere med lyset. Derved kan man sikre sig at man kun påvirker de rigtige atomer, og derved køler gassen.

**7**) Dette kan opgavens forfatter ikke besvare. Ifølge JR er svaret entydigt "ja"!

**Opgave 12: •• Masse af en planet**

**1**) Se figur 3.1.

**2**) Funktionen indsættes i integralet, som derefter løses

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 \mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2 - \frac{r^3}{R}\mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{3}r^3 - \frac{r^4}{4R}\right]_0^R = 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{4}R^3\right] = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3 \,.$$

**Opgave 13:** ●●● **Tyngdeaccelerationen indeni en planet**

**1**) Densitet har enheden $\mathrm{kg\,m^{-3}}$, mens $r$ har enheden m, hvorfor

$$[A] = [\rho r^2] = \mathrm{kg\,m^{-1}}\ .$$

**2**) For at forstå sådanne funktioner kan det være værd at kigge på hvilket dele af funktionen, der er størst i hvilke områder:
– $\lim_{r\to 0}(1/r^2) = \infty$, mens $\exp(-R/c) < \infty$, hvorfor $1/r^2$ dominerer for små $r$. Ergo opfører $\rho(r)$ sig som $1/r^2$ for små værdier af $r$.
– Eksponentialfunktionen er aftagende idet eksponenten er negativt på hele definitionsmængden, hvorfor den kun bliver dominerende, hvis den aftager tilpas meget langsommere end $1/r^2$. Jo mindre $c$ bliver, desto større bliver $(r-R)/c$, hvorfor eksponentialfunktionen dominerer mest for små værdier af $c$. Eksponenten går mod 0, for $r \to R$ uanset hvad $c$ er, hvorfor betydningen af $c$ må blive mindre jo større $r$ bliver.
– Planetens radius er $R$, hvorfor $\rho(r) = 0$ for $r > R$, hvilket ses ved at funktionen brat går i nul og bliver der.
– Af figurens ses det at $\rho(r) \xrightarrow{r\to 0} \infty$ uanset hvad værdien af $c$ er.
– Det ses også at $\rho(r)$ først begynder at afvige drastisk fra $1/r^2$, når $c < 0,5$. For alle værdier af $c$ bliver grafen godt nok næsten flad eller voksende når $r$ nærmer sig $R$, men det sker meget sent for de største værdier af $c$.
– For de mindste værdier af $c$ bliver eksponenten så stor at den meget hurtigt begynder at dominere, hvorfor $1/r^2$ delen kun ses for meget små $r$.

– Alt i alt er størstedelen af planetens masse samlet tæt på centrum, og interessant nok er der ikke ret meget masse omkring $r = R/2$, hvis $c$ er tilpas lille.
– Hvorvidt denne funktion overhoved kan modellere massen af en planet skal være usagt, men som teoretisk eksempel er den ganske interessant.

**3**) Det er bare integralets grænse, der skal ændres, og formelt set bør man også ændre integrationsvariablen så

$$M(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi(r')^2\mathrm{d}r'\ .$$

**4**) Nu er det bare at kombinere formlerne og løse integralet.

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{G}{r^2}\int_0^r \rho(r')4\pi(r')^2\mathrm{d}r' = \frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r \frac{A}{(r')^2}\exp\left(\frac{r'-R}{c}\right)4\pi(r')^2\mathrm{d}r' \\ &= \frac{4\pi AG}{r^2}\int_0^r \exp\left(\frac{r'-R}{c}\right)\mathrm{d}r'\ . \end{aligned}$$

For at løse dette integral benyttes en substitution

$$u = \frac{r' - R}{c} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r'} = \frac{1}{c} \Rightarrow \mathrm{d}r' = c\mathrm{d}u \ .$$

Yderligere skal grænserne ændres

$$u(0) = -\frac{R}{c} \quad , \quad u(r) = \frac{r - R}{c} \, ,$$

hvorved det substituerede integral bliver

$$g(r) = \frac{4\pi AG}{r^2} \int_{-R/c}^{(r-R)/c} \exp{(u)}\, c\mathrm{d}u = \frac{4\pi cAG}{r^2} \Big[ \exp(u) \Big]_{-R/c}^{(r-R)/c} = \frac{4\pi cAG}{r^2} \left[ \exp\left(\frac{r-R}{c}\right) - \exp\left(-\frac{R}{c}\right) \right] \ .$$

# Kapitel 4

# Atom- og Molekylefysik

**Opgave 1:** • **Finstruktur for en elektron**

Vi vil i denne opgave se på tilstanden n=2 for hydrogenatomet.

**1**) For $s = \frac{1}{2}$ l=1, udregn $\beta_l$

$$\beta_1 = \frac{g_s 1^3 e^8 m_e}{c^2 2^3 \hbar^4 4^5 \pi^4 \varepsilon_0^4} \frac{1}{1(1+0.5)(1+1)}$$

**2**) Find alle værdier af J for n=2 tilstanden.

$$J = |l+s|, |l+s-1|, .., |l-s|$$

hvilket giver $J = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

**3**) Find energi opsplitningen for tilstandende n=2,l=0.

$$\langle \hat{s} \cdot \hat{l} \rangle = \frac{1}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))$$

hvis l=0, er j=s, hvilket giver:

$$\langle \hat{s} \cdot \hat{l} \rangle = \frac{1}{2}(j(j+1) - s(s+1)) = 0$$

dvs. for l=0 $H_{s-o} = 0$

**4**) Find energi opsplitningen for tilstandende n=2,l=1.

$$\langle \hat{s} \cdot \hat{l} \rangle = \frac{1}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))$$

for $j = \frac{3}{2}$

$$\langle \hat{s} \cdot \hat{l} \rangle = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - 1(1+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \frac{1}{2}(\frac{15}{4} - \frac{8}{4} - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$$

for $j = \frac{1}{2}$

$$\langle \hat{s} \cdot \hat{l} \rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - 1(1+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \frac{1}{2}(-1(1+1)) = -1$$

dvs. at energiforskellen er givet ved: $\Delta E = E_{j=\frac{3}{2}} - E_{j=\frac{1}{2}} = \frac{\beta_1}{2} - (-\beta_1) = \frac{3}{2}\beta_1$

**Opgave 2: ••• Finstruktur for flere elektroner**

Vi vil i denne opgave se på et system med 2 elektronerhvor de hver har n=2.

**1**) Find alle L og S værdier for $l_1 = 1$ og $l_2 = 1$,hvorfor er det ikke nødvendigt at specificere hvad $s_1$ og $s_2$ er?

Der er ikke nødvendigt at specificere hvad $s_1$ og $s_2$ er, da elektroner er fermioner og de har pr. definitions altid spin $\frac{1}{2}$

$$L = |l_1 + l_2|, |l_1 + l_2 - 1|, .., |l_1 - l_2|$$

hvilket giver $L = 2, 0$

$$S = |s_1 + s_2|, |s_1 + s_2 - 1|, .., |s_1 - s_2|$$

hvilket giver $S = 1, 0$

**2**) Find alle J værdier for L og S fra forrige opgave.

$$J = |L + S|, |L + S - 1|, .., |L - S|$$

Her skal man kombinere begge værdier af L med begge værdier af S, hvilket giver:
$J = 3, 2, 1, 0$

**3**) Find alle energiopsplitningerne for de J, L og S tilstande vi fandt i de forrige opgaver.
Her skal vi først tænke os om. Den eneste måde vi kan få

**Opgave 3: • Hyperfinstruktur for 21 cm linjen**

Vi vil i denne opgave arbejde med den hyperfinestruktur for en elektron i grundtilstanden af et brin-tatom.

**1**) Kernen er en proton med spin $\frac{1}{2}$, find alle værdier af F. Hvorfor er det ikke nødvendigt at kende $l$ for elektronen?
Da vi arbejder med grundtilstanden er $l = 0$, altid!.
$J, I = \frac{1}{2}$, dvs:

$$F = |J + I|, |J + I - 1|, .., |J - I|$$

Hvilket giver F=1,0.

**2**) Udregn konstanten A for grundtilstanden. Bemærk at $g_I = 5,58569468$

$$A = \frac{2}{3}\mu_0 g_s \mu_B g_I \mu_N \frac{Z^3}{\pi a_o^3} = 9{,}428 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{J} =$$

**3**) Find energiopsplitningen mellem tilstandende.
Da energien er givet ved $E = A\left\langle \hat{J} \cdot \hat{I} \right\rangle$, får vi energien for de to forskellige tilstande af F til:
For F=1

$$\left\langle \hat{J} \cdot \hat{I} \right\rangle = \frac{1}{2}(1(1+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

så $E_{F=1} = \frac{A}{4}$
For F=0

$$\left\langle \hat{J} \cdot \hat{I} \right\rangle = \frac{1}{2}(0(0+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \frac{1}{2}(\frac{-6}{4}) = \frac{-3}{4}$$

$E_{F=0} = \frac{-3}{4}A$ Energiforskellen mellem de to tilstande bliver derfor:

$$\Delta E = E_{F=1} - E_{F=0} = \frac{1}{4}A - \frac{-3}{4}A = A$$

**4**) Udregn bølgelængden af det lys som har en energi svarende til energiforskellen mellem de to tilstande.

$$E_{lys} = h \cdot f$$

$$c = \lambda \cdot f$$

så:

$$E_{lys} = \frac{h \cdot c}{\lambda} = A$$

Hvilket giver:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{A} = 21{,}07\,\mathrm{cm}$$

**Opgave 4: •• Hyperfinstruktur for atomure**

Vi vil i denne opgave arbejde med et cæsium atom, som det er beskrevet i teksten. Spinnet for et cæsium kerne er I=$\frac{7}{2}$ og vi vil i denne opgave arbejde med n=6 tilstanden.

**1**) Find alle F tilstande for l=0.

$$F = |J + I|, |J + I - 1|, .., |J - I|$$

Hvilket giver F=4,3.

**2**) Udregn energiopsplitningen for tilstandende.
For F=4

$$\left\langle \hat{J} \cdot \hat{I} \right\rangle = \frac{1}{2}(4(4+1) - \frac{7}{2}(\frac{7}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \frac{7}{4}$$

For F=3

$$\left\langle \hat{J} \cdot \hat{I} \right\rangle = \frac{1}{2}(3(3+1) - \frac{7}{2}(\frac{7}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \frac{-9}{4}$$

Dvs. at energiforskellen mellem tilstandene er:

$$\Delta E = E_{F=4} - E_{F=3} = \frac{7}{4}A_n - \frac{-9}{4}A_n = 4A_n$$

Da $A_n = A_1\frac{1}{n^3}$ så da n=6 får vi den samlede energiforskel til at være:

$$\Delta E = \frac{4}{6^3}A_1$$

Hvor $A_1$ er værdien af A vi fandt i opgaven om hyperfin opsplitningen for grundtilstandsenergien.

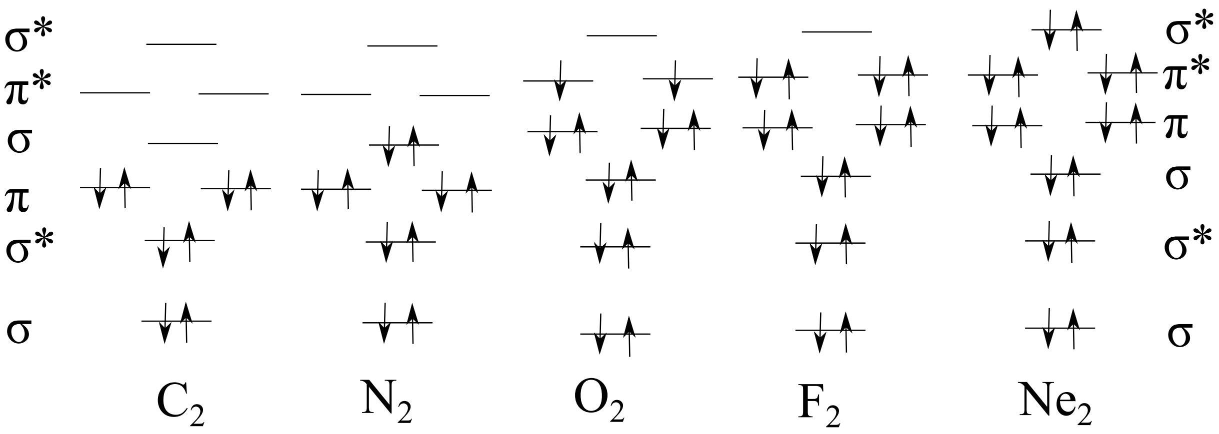
**3**) Udregn frekvensen af det lys der bliver udsendt fra denne overgang.

$$E_{lys} = h \cdot f = \Delta E$$

$$\frac{4}{6^3} A_1 = h \cdot f$$

$$f = \frac{4}{6^3} \frac{A_1}{h}$$

**Opgave 5:** • **Diatomare molekyler**




*Figur 4.1: Molekyleorbitaldiagrammer of diatomare molekyler.*

**1**) Diatomare molekyler lettere end $N_2$ har samme struktur af orbitaler som $N_2$. De tungere har samme struktur som $O_2$.

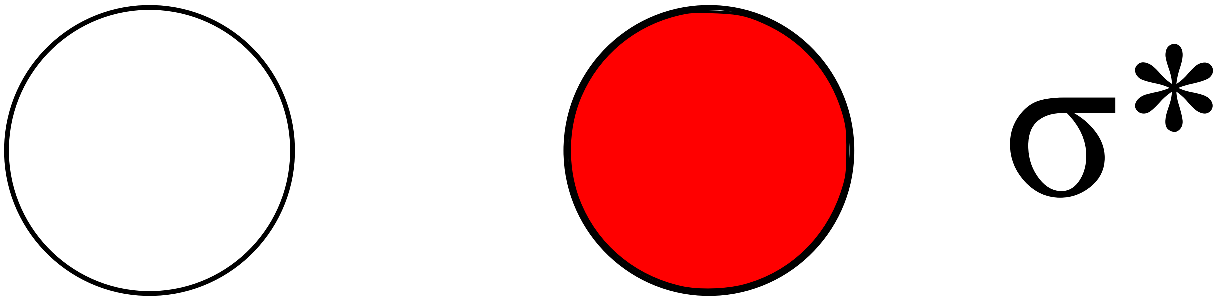
**2**) Bindingsorden er antallet af fyldte bindende orbitaler minus antallet af fyldte antibindende orbitaler, så:

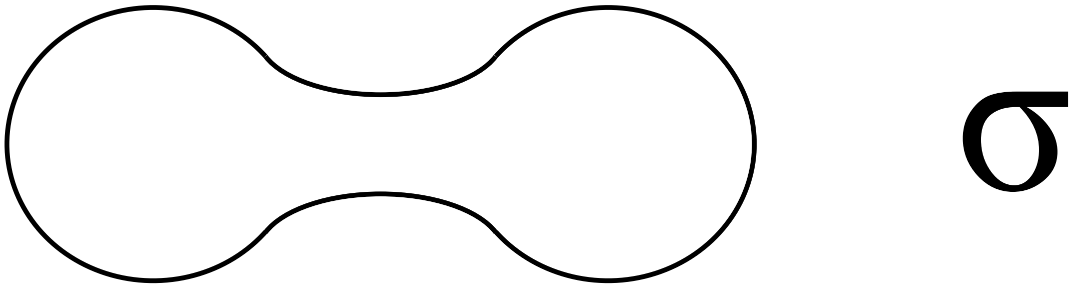
| | $C_2$ | $N_2$ | $O_2$ | $F_2$ | $Ne_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 |

**3**) $N_2$ vil være det mest ustabile, da det har den laveste bindingsorden, og ganske rigtigt Findes $Ne_2$ ikke. $C_2$ forekommer hellerikke, men det er fordi kulstof kan danne andre strukturer så som diamant og grafit, der er mere stabile.

**4**) Kun $O_2$ har uparrede elektroner, så det er det eneste af molekylerne der er magnetisk.

**Opgave 6:** •• **Vand**





**1**) Brintmolekylet har den bindende og den anti bindende $\sigma$ orbital.

**2**) Det frie ilt har $1s$, $2s$ og $2p$ orbitalerne, men $1s$ ligger meget lavere end de andre og indgår ikke i bindingen.

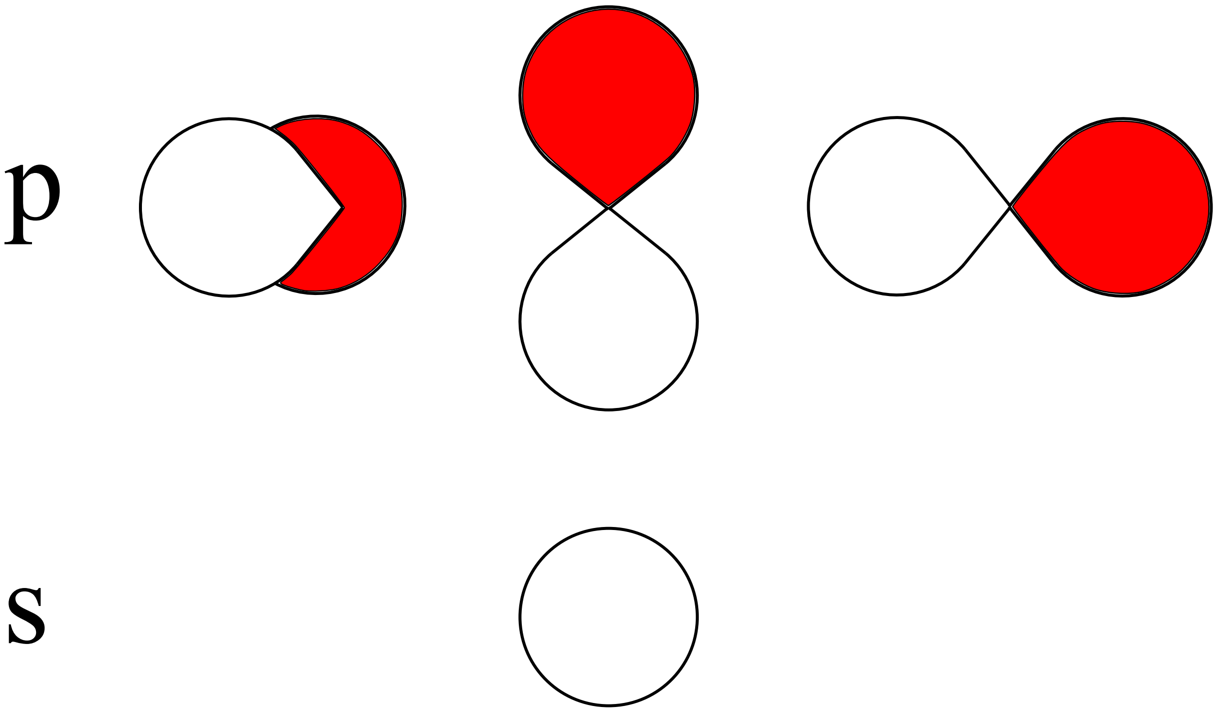
**3**) Lægges bindingsaksen for $H_2$ langs $y$-aksen og føres ind imod O-atomet langs $z$-aksen. Så vil orbitalerne overlappe hvis de kan have fælles fortegn i hele kontaktområdet. Det betyder at $p_x$ ikke overlapper med nogle da den kan en knudeflade i $yz$-planen, som ingen andre orbitaler har. $p_y$ overlapper med $\sigma^*$. Derudover overlapper $\sigma$ med både $s$ og $p_z$.

**4**) For at opstille molekyleorbitaldiagrammet ser man på tabel 4.1 for energien af O orbitalerne. $H_2$ orbitalerne er en slat lavere end $1s$ for brintatomet, for $\sigma$ og højere for $\sigma^*$. $p_x$ forbliver uændret, da den ikke har noget overlap. $\sigma^*$ og $p_y$ viser sig at give en stor opsplitning. Disse orbitaler kaldes af grunde vi desværre ikke var i stand til at dække $1b_2$ og $2b_2$. De spøjse navne stammer fra en måde at kategorisere molekylers symmetri, baseret på gruppeteori. De sidste tre orbitaler har en hævet, en imidten og en lav. disse kaldes $4a_1$, $3a_1$ og $2a_1$. På figuren kalds den uændrede $p_x$-orbital også for $b_1$

Det vigtige er at vide hvilke orbitaler der interagerer og hvordan det fører til opsplitning, graden af opsplitning er ikke super essentiel, da det ikke er muligt at udregne med de værktøjer vi har præsenteret her.

Elektroner indsættes efter Aufbau princippet nedefra.

**5**) At afgøre om orbitaler er bindende, antibindende eller ikke bindende er ikke helt så simpelt som for homoatomare diatomiske molekyler, men det gøres lettest ved at sammenligne hver orbital med de tilsvarende i det ubundne molekyle. Det giver at de to nederste to orbitaler, $2a_1$ og $1b_2$, er bindende, $3a_1$




og $1b_1$ er ikke bindende og $4a_1$ og $2b_2$ er antibindende.

**6**) Der er to fyldte bindende orbitaler og to ikke bindende, så bindingsordenen er 2, svarende til to enkeltbindinger.

**Opgave 7: ••• Benzen**

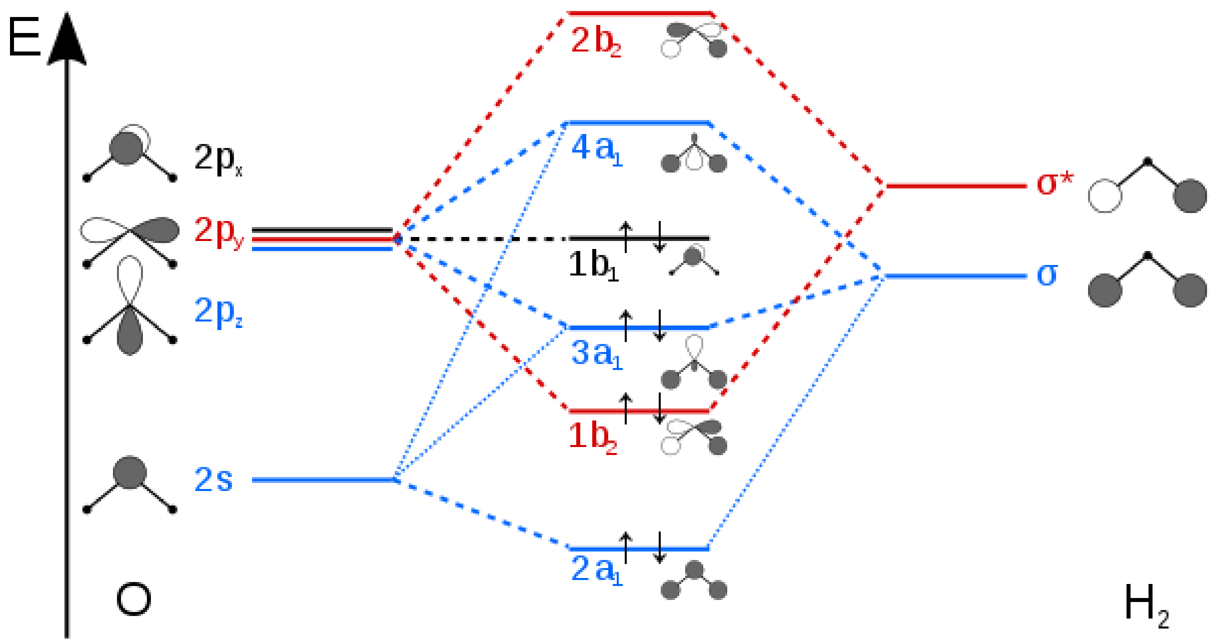
**1**) Index viser hvor langt rundt langs ringen det tilhørende atom er, så $p_7$ svarer til $p_1$.

**2**) $p$-orbitalerne giver allerede en knudeflade i ringens plan. Ønskes så få som muligt vil alle $p$ orbitalerne med samme fortegn give ingen nye knudeflader.

$$1\pi = \sum_{i=1}^{6} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$$

**3**) Gives de alternerende forgen kommer der tre knudeflader imellem alle atomerne.

$$6\pi = \sum_{i=1}^{3} (p_{2i} - p_{2i+1}) = p_1 + p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - p_6$$



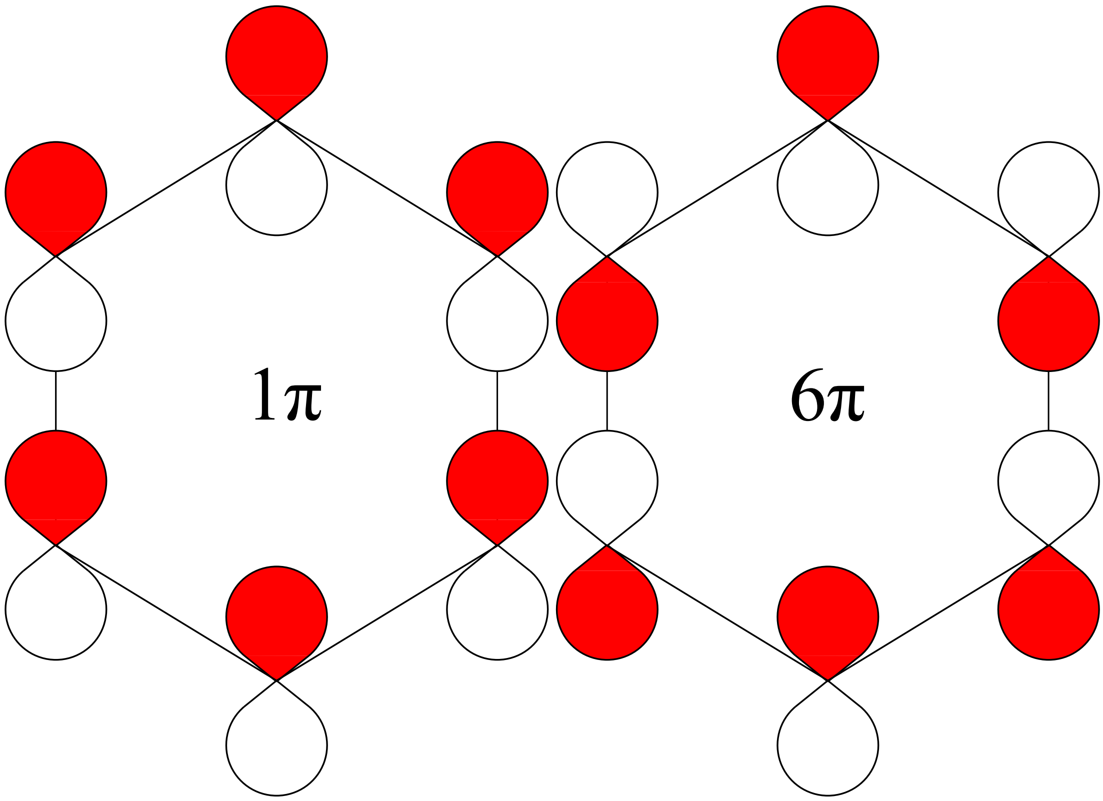

*Figur 4.2: Molekyleorbitaldiagrammet for vand.*

**4**) For $1\pi$ er sum notation et godt værktøj.

$$
\begin{aligned}
\hat{H}1\pi &= \hat{H}\sum_{i=1}^{6} \\
&= \sum_{i=1}^{6} \hat{H}p_i \\
&= \sum_{i=1}^{6}(\alpha p_i + \beta p_{i-1} + \beta p_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \alpha p_i + \sum_{i=1}^{6} \beta p_{i-1} + \sum_{i=1}^{6} \beta p_{i+1} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{6} p_i + 2\beta \sum_{i=1}^{6} p_i \\
&= (\alpha + 2\beta)1\pi
\end{aligned}
$$

Så energien er:

$$E = \alpha + 2\beta$$




*Figur 4.3: De to tilstande $1\pi$(til venstre) og $6\pi$(til højre).*

For $6\pi$ har vi:

$$\begin{aligned}
\hat{H}6\pi &= \hat{H}\sum_{i=1}^{3}(p_{2i} - p_{2i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\alpha p_{2i} + \beta p_{2i-1} + \beta p_{2i+1} - \alpha p_{2i+1} - \beta_{2i} - \beta p_{2i+2}) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{3}(p_{2i} - p_{2i+1}) + \beta\sum_{i=1}^{3}(p_{2i-1} + p_{2i+1} - p_{2i} - p_{2i+2}) \\
&= \alpha 6\pi + \beta\sum_{i=1}^{3}(p_{2i-1} - p_{2i}) + (p_{2i+1} - p_{2i+2}) \\
&= \alpha 6\pi - \beta\left(\sum_{i=1}^{3}(p_{2i} - p_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{3}(p_{2i+2} - p_{2i+1}\right) \\
&= (\alpha - 2\beta)6\pi
\end{aligned}$$

Så energien er:

$$\alpha - 2\beta$$

**5**) $1\pi$ skal have den mindste energi, så $\beta$ må være negativ.

**6**) Der er fejl i denne opgave, første $2\pi$ skulle have været:

$$2\pi = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2p_1 + p_2 - p_3 - 2p_4 - p_5 + p_6)$$

Desuden skulle den anden $2\pi$ have været $4\pi$ & anden $3\pi$ have været $5\pi$.

**7**) For at opstille molekyleorbitaldiagrammet er det nødvendigt at kende de sidste bølgefunktioners energi. Energien findes ved at anvende Hamiltonoperatoren på de fire tilstande.

$$\begin{aligned}
\hat{H}2\pi &= \hat{H}\frac{1}{2\sqrt{3}}(2p_1 + p_2 - p_3 - 2p_4 - p_5 + p_6)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha(2p_1 + p_2 - p_3 - 2p_4 - p_5 + p_6) + \beta(2p_6 + p_1 - p_2 - 2p_3 - p_4 + p_5) + \beta(2p_2 + p_3 - p_4 - 2p_5 - p_6 + p_1))\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha(2p_1 + p_2 - p_3 - 2p_4 - p_5 + p_6) + \beta(2p_1 + p_2 - p_3 - 2p_4 - p_5 + p_6)\\
&= (\alpha + \beta)2\pi\\
\hat{H}3\pi &= \hat{H}\frac{1}{2}(2p_2 + p_3 - p_5 - p_6)\\
&= \frac{1}{2}(\alpha((2p_2 + p_3 - p_5 - p_6) + \beta((2p_1 + p_2 - p_4 - p_5) + \beta((2p_3 + p_4 - p_6 - p_1))\\
&= \frac{1}{2}(\alpha(2p_2 + p_3 - p_5 - p_6) + \beta(2p_2 + p_3 - p_5 - p_6)\\
&= (\alpha + \beta)3\pi\\
\hat{H}4\pi &= \hat{H}\frac{1}{2\sqrt{3}}(2p_1 - p_2 - p_3 + 2p_4 - p_5 - p_6)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha(2p_1 - p_2 - p_3 + 2p_4 - p_5 - p_6) + \beta(2p_6 - p_1 - p_2 + 2p_3 - p_4 - p_5) + \beta(2p_2 - p_3 - p_4 + 2p_5 - p_6 - p_1))\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha(2p_1 - p_2 - p_3 + 2p_4 - p_5 - p_6) + \beta(-2p_1 + p_2 + p_3 - 2p_4 + p_5 + p_6))\\
&= (\alpha - \beta)4\pi\\
\hat{H}5\pi &= \hat{H}\frac{1}{2}(p_2 - p_3 + p_5 - p_6)\\
&= \frac{1}{2}(\alpha(p_2 - p_3 + p_5 - p_6) + \beta(p_1 - p_2 + p_4 - p_5)\beta(p_3 - p_4 + p_6 - p_1))\\
&= \frac{1}{2}(\alpha(p_2 - p_3 + p_5 - p_6) + \beta(-p_1 + p_2 - p_5 + p_6))\\
&= (\alpha - \beta)5\pi
\end{aligned}$$

Nu hvor vi kender energien kan vi opstille et molekyleorbitaldiagram.

**Opgave 8: ●●● Halogener og hydrogenbindinger**

**1**) Se figur 4.6

**2**) Fra forgående spørgsmål ses det at flour mangler 1 elektron for at have sin yderste $p$-orbital fuld, og dermed opnå den stabile tilstand af en fuld yderste $s$- og $p$-orbital, hvilket gælder for alle halogenerne.

**3**) De to $s$-orbitaler deltager ikke i bindingen, hvorfor de ikke tegnes. I figur 4.7 ses det at elektronerne er i en lavere energitilstand, hvis de to atomer bindes til hinanden, end hvis de holder sig hver for sig.

**4**) Bindingen er en $\sigma$-binding, da den er mellem en $s$- og en $p$-orbital.

**5**) Hydrogen findes ofte som $^1$H, hvilket vil sige at det består af en proton og en elektron, men ingen neutroner. En proton er stabil som sig selv, mens flour meget gerne vil have en elektron til at fylde sin sidste $p$-orbital. Flour trækker derfor meget mere i $\sigma$-orbitalen end hydrogen, hvilket forskyder orbitalen mod flour, som illustreret i figur 4.8.

**6**) Eftersom H i gennemsnit "mangler"sine elektroner, er det en "åben proton". Der er ikke noget, der skærmer den i retningen væk fra flour, hvorfor den tiltrækker alt hvad der er negativt. Det gælder både det flouratom, den er bundet til, hvorfor bindingslængden er ekstremt kort, men det gælder også flouratomer i andre HF-molekyler. Derfor tiltrækker den negative del af et HF-molekyle den positive del af et andet HF-molekyle, hvilket er hvad der kaldes en hydrogenbinding. I nogle tilfælde er hydrogenbindingen faktisk så stærk, at orbitalerne fra to tilstødende molekyler begynder at overlappe, hvilket gør at båndet får kovalent karakter, fremfor at opføre sig rent som en intermolekylær kraft.

**7**) Tages chlor som eksempel, så er $Cl$ grundstof nummer 17, hvilket betyder at orbitalerne $1s$, $s2$, $2p$ og $3s$ er fyldte, mens det er $3p$-orbitalen, der mangler en elektron, for at være fuld. Det betyder at der er markant flere elektroner omkring chlor, og elektroner frastøder hinanden, hvorfor chlor ikke kan trække så meget i det bindende elektronpar. Man siger at kernen er skærmet og har en mindre effektiv kerneladning. Chloratomet kan derfor ikke trække elektronparet ligeså tæt på sig som flour kan, og det befinder sig derfor tættere på H. Derudover kommer H ikke så tæt på Cl, som det kan komme på F, hvorfor ladningsforskydningen eller dipolmomentet ikke er stort nok til at danne hydrogenbindinger. Da både brom og iod er større end chlor gælder dette også for dem. Det er netop det at HF($aq$) er så svært at styrre, og det forklarer også hvorfor de andre hydrogenhalider er stærkere syrer end flussyre.

## Spin

**Opgave 9: ● Pauli princippet uden spin**

Der er en fejl i denne opgave, første del skulle have været $\hat{O}\Psi(x_1, x_2)$

**1**)

$$\hat{O}\Psi(x_1, x_2) = \hat{O}(\psi(x_1)\psi(x_2))\psi(x_2)\psi(x_1) = \Psi(x_1, x_2)$$

**2**) Siden $\hat{O}\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_1, x_2)$ er bølgefunktionen symmetrisk, og dermed ikke antisymetrisk. Den er forbudt ifølge Pauli. Bølgefunktionen representerer to partikler i den samme tilstand, hvilket ikke kan lade sig gøre hvis spin ikke var en ting.

### Opgave 10: •• Rumbølgefinktioner

**1**)

$$\hat{O}\Psi_{12} = \hat{O}(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)) = \psi_1(x_2)\psi_2(x_1) = \Psi_{21}$$

**2**)

$$\hat{O}\Psi_{21} = \hat{O}(\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)) = \psi_2(x_2)\psi_1(x_1) = \Psi_{12}$$

**3**)

$$\hat{O}\Psi^S = \hat{O}\Psi_{12} + \hat{O}\Psi_{21} = \Psi_{21} + \Psi_{12} = \Psi^S$$

**4**)

$$\hat{O}\Psi^A = \hat{O}\Psi_{12} - \hat{O}\Psi_{21} = \Psi_{21} - \Psi_{12} = -\Psi^A$$

**5**) $\Psi_{12}$ og $\Psi_{21}$ er ikke symmetriske under ombytning, $\Psi^S$ er symetrisk og $\Psi^A$ er antisymmetrisk. Det er da også symmetrisk og antisymmetrisk som $S$ og $A$ står for.

### Opgave 11: ••• Pauli med spin

**1**)

$$\hat{O}\alpha(1)\alpha(2) = \alpha(2)\alpha(1)$$

**2**)

$$\hat{O}\beta(1)\beta(2) = \beta(2)\beta(1)$$

**3**)

$$\hat{O}\alpha(1)\beta(2) = \alpha(2)\beta(1)$$

**4**)

$$\hat{O}\beta(1)\alpha(2) = \beta(2)\alpha(1)$$

**5**) Vi har allerede fundet to symmetriske spinbølgefunktioner, den sidste bølgefunktioner kan konstrueres på samme måde som $\Psi^S$.

$$\begin{aligned}\chi_{\alpha\alpha} &= \alpha(1)\alpha(2)\\ \chi_{\beta\beta} &= \beta(1)\beta(2)\\ \chi^S_{\alpha\beta} &= \alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)\end{aligned}$$

**6**) Tilsvarende kan en antisymetrisk spin bølgefunktion konstrueres på samme måde som $\Psi^A$.

$$\chi^A_{\alpha\beta} = \alpha(1)\beta - \beta(1)\alpha(2)$$

**7**) Når elektronerne er i samme rum tilstand kan de kun have en symmetrisk bølgefunktion, hvis den totale bølgefunktion skal være antisymmetrisk må spin bølgefunktionen være antisymmetrisk. Da der kun er en mulighed:

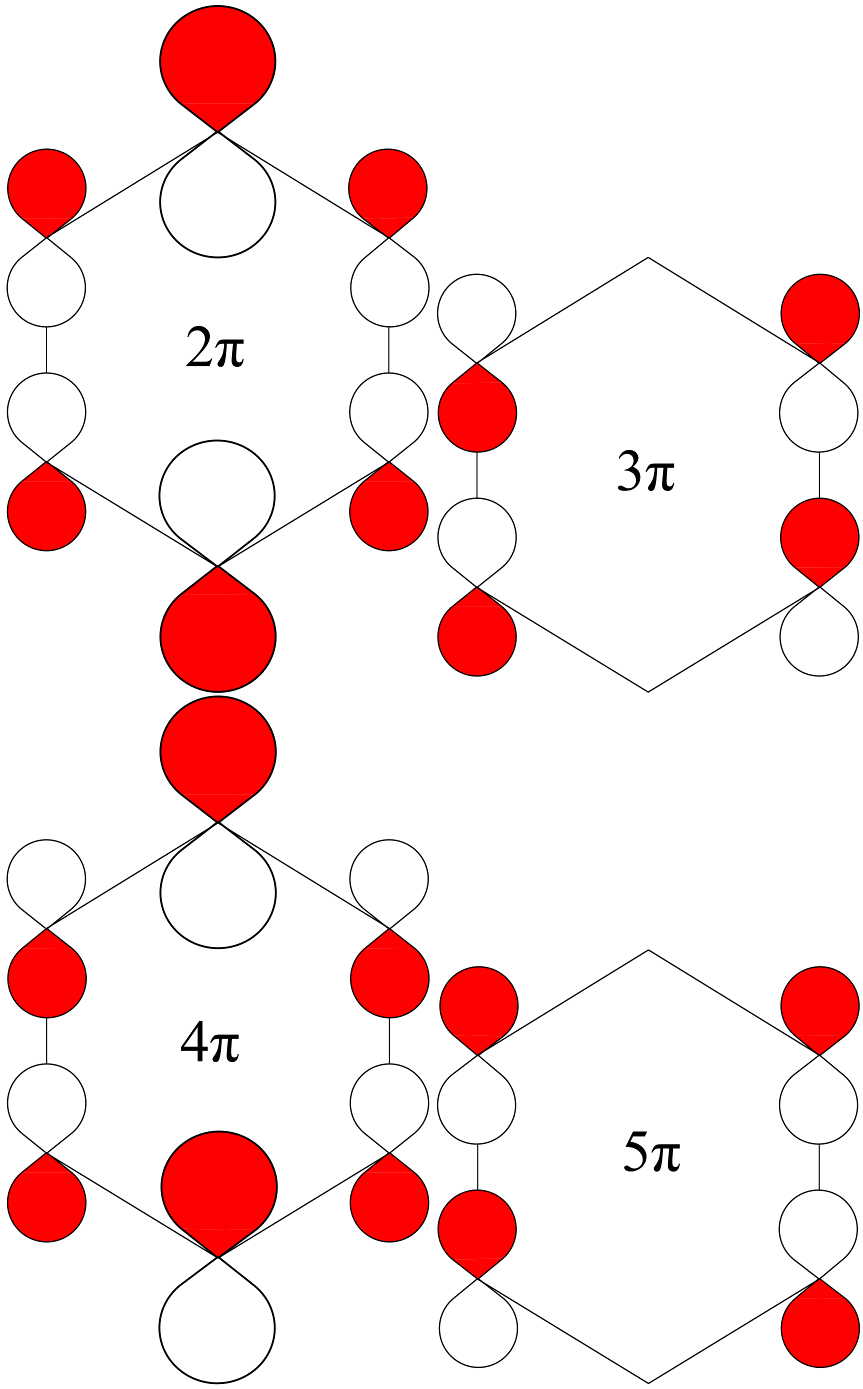
**8**)

$$\Psi = \Psi_{11}\chi^A_{\alpha\beta}$$

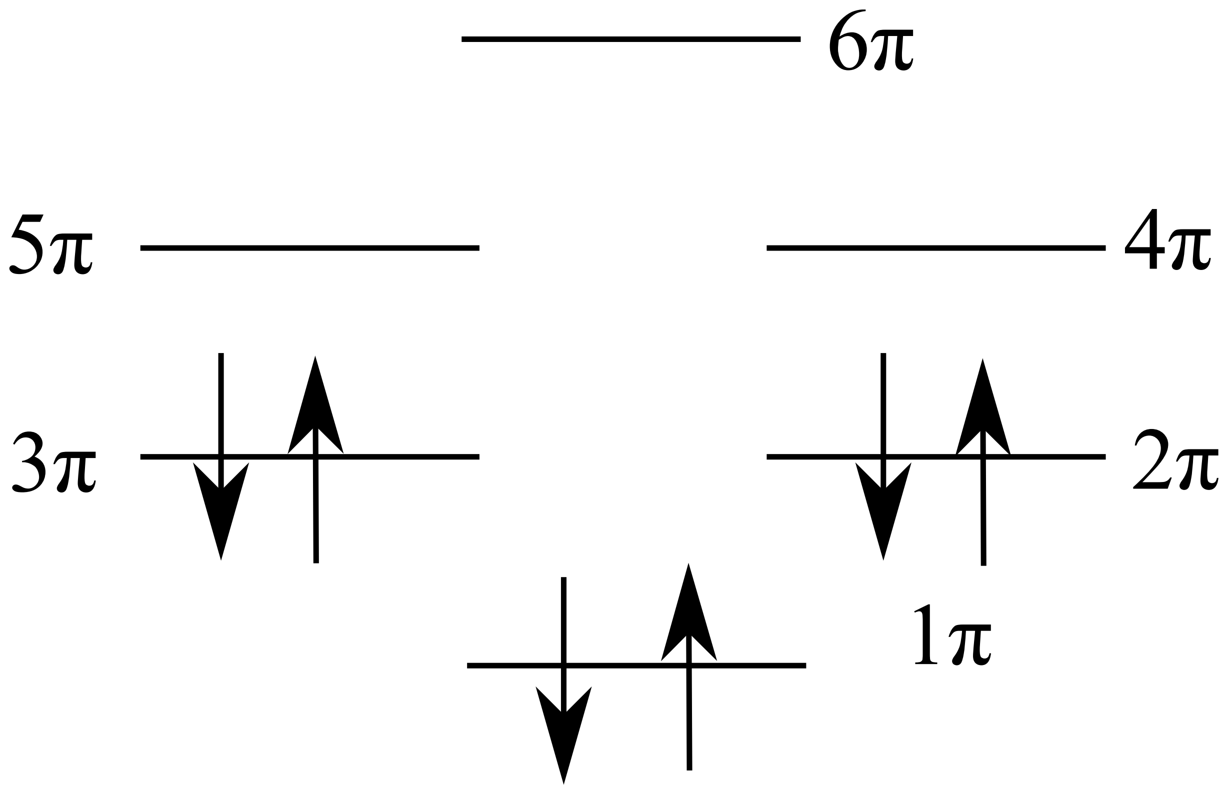
Dette kaldes en singlet tilstand.

**9**) For elektroner i forskellige tilstande er der to muligheder for den rummelige bølgefunktion: $\Psi^S$ og $\Psi^A$. For at opfylde Pauli må $\Psi^S$ kombineres med $\chi^A_{\alpha\beta}$ og $\Psi^A$ kombineres med en af de 3 andre. Det giver 4 ialt.

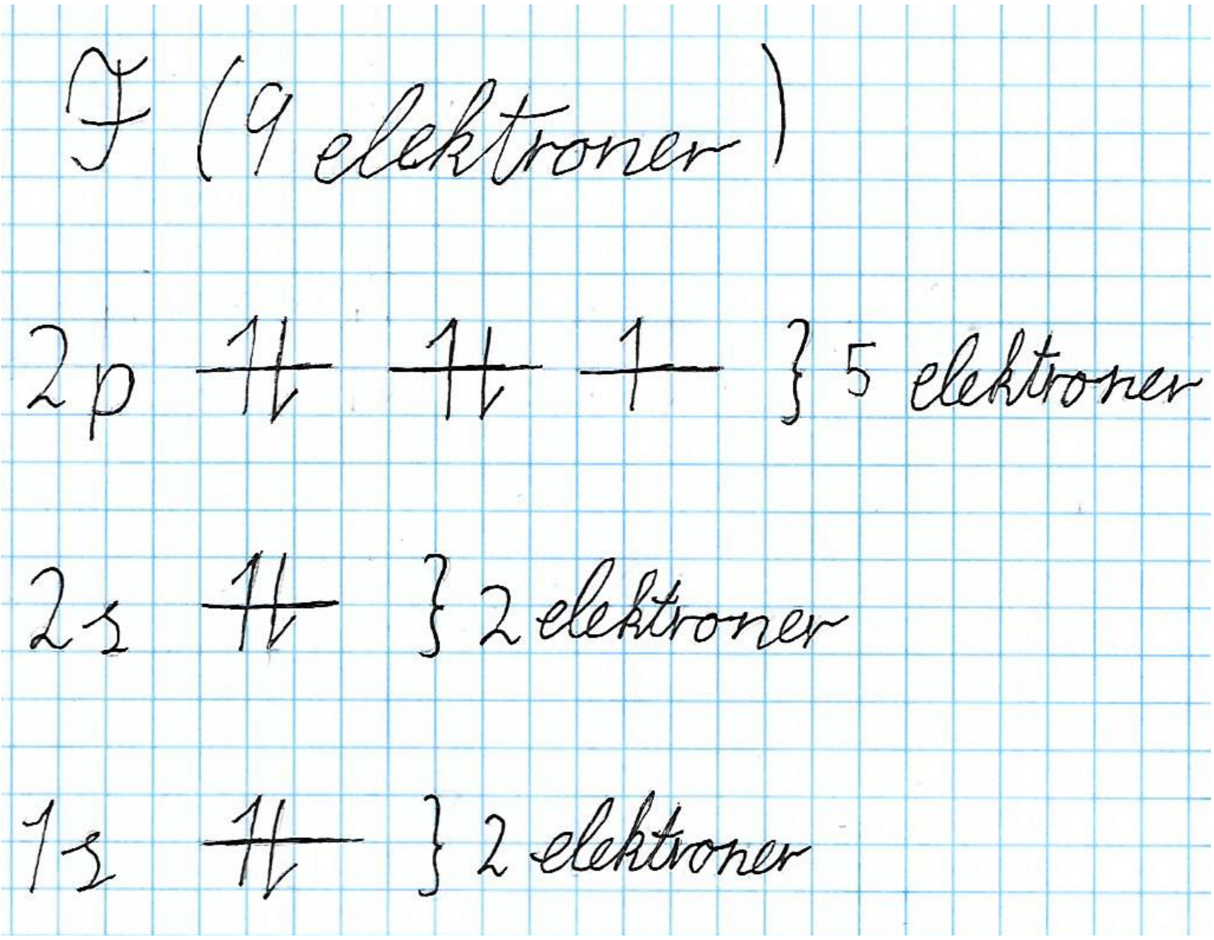
$$\begin{gathered}\Psi^S\chi^A_{\alpha\beta}\\ \Psi^A\chi_{\alpha\alpha}\\ \Psi^A\chi_{\beta\beta}\\ \Psi^A\chi^S_{\alpha\beta}\end{gathered}$$



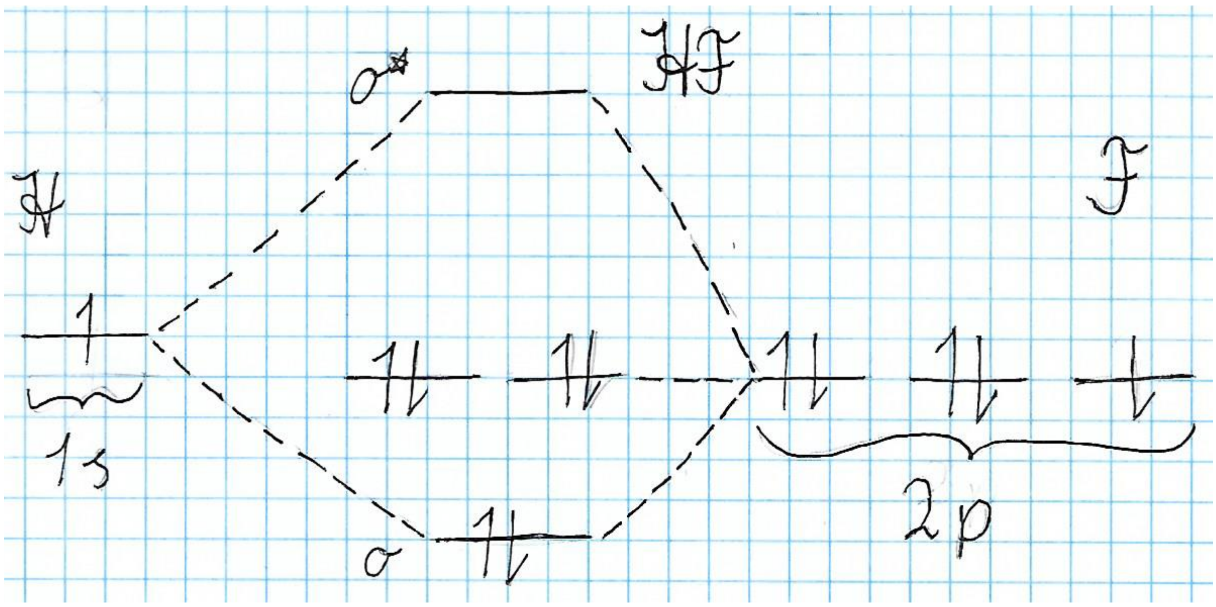

*Figur 4.4: Skitser af de fire mellemste π-orbitaler*



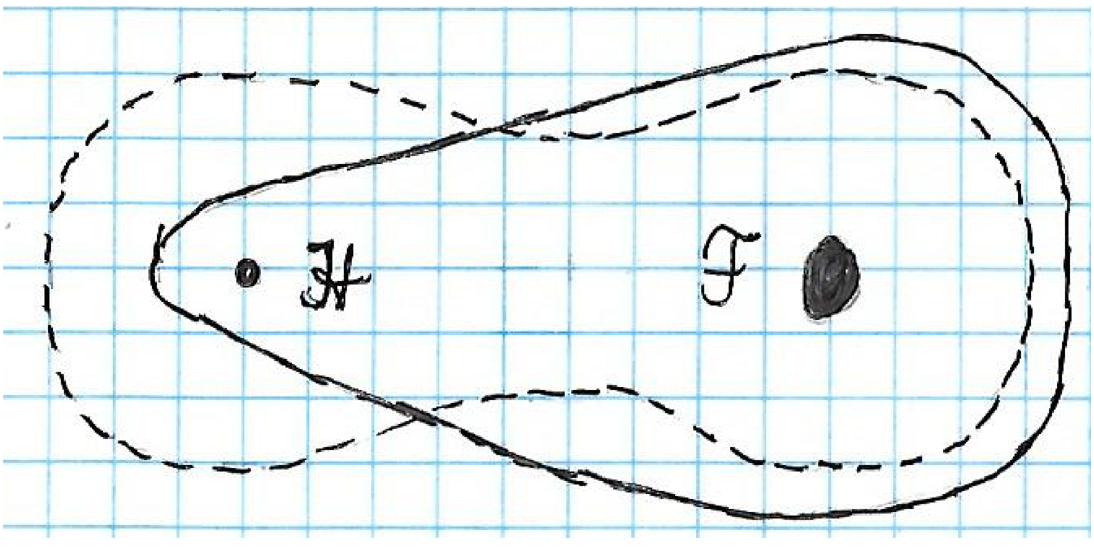

*Figur 4.5: Molekyleorbitaldiagram for benzens π system.*




*Figur 4.6: Elektronstrukturen for F.*




*Figur 4.7: Elektronstrukturen for HF, hvor de to midterste er ikke-bindende p-orbitaler. Bemærk at $\sigma^*$-orbitalen er tom, samt at alle elektronerne befinder sig i en tilstand med samme eller lavere energi end før.*




*Figur 4.8: Skitse den bindende sigma-orbital for HF, hvor den stiplede linje indikerer hvordan den ville se ud, hvis man ikke tager højde for forskellene mellem H og F, mens den fuldtoptrukne tager denne forskel i betragtning.*

# Kapitel 5

# Planetbevægelse

## Planetbaner og excentricitet

**Opgave 1:** • **Excentricitet og planetbaner**

**1**) Når $\varepsilon = 0$:

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} = \frac{c}{1} = c\ .$$

Afstanden er altså ens til alle vinkler. Af denne grund må den geometriske form være en cirkel, da der altid er samme afstand fra centrum til cirklen.

**2**) Når $\varepsilon = 1$:

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} = \frac{c}{1 + \cos(\varphi)}\ .$$

Idet $\varphi$ går mod $\pi$, da går afstanden mellem objekterne mod $\infty$:

$$r(\pi) = \frac{c}{1 + \cos(\pi)} = \frac{c}{1 - 1} = \frac{c}{0} = \infty\ .$$

Da banen er endelig i alle andre punkter end $\varphi = \pi$, da vil der være tale om en parabelbane.

**3**) For $\varepsilon > 1$ vil $r(\varphi) = \infty$, men dette vil ske til en vinkel $\varphi < \pi$ til forskel fra tilfælde med $\varepsilon = 1$. Denne vinkel vil være givet ved

$$-1 = \varepsilon\cos(\varphi) \Rightarrow \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\ .$$

Idet funktionen for afstanden mellem de to objekter vil stige hurtigere, når $\varepsilon > 1$ end når $\varepsilon = 1$, da vil der være tale om en hyperbel i tilfældet $\varepsilon > 1$.

**Opgave 2:** • **Halleys komet**

**1**) Fra kompendiets ligning (5.62):

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} \ .$$

Idet afstanden mellem Solen og kometen er mindst, så befinder kometen sig i periapsis, hvor $\varphi = 0$:

$$r_{\text{min}} = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(0)} = \frac{c}{1 + \varepsilon} \ .$$

Idet afstanden mellem Solen og kometen er størst, så befinder kometen sig i apoapsis, hvor $\varphi = \pi$:

$$r_{\text{maks}} = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\pi)} = \frac{c}{1 - \varepsilon} \ .$$

Isoleres i begge disse ligninger konstanten $c$ fås:

$$\begin{aligned} r_{\text{min}} &= \frac{c}{1+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad c = r_{\text{min}}(1+\varepsilon) \, , \\ r_{\text{maks}} &= \frac{c}{1-\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad c = r_{\text{maks}}(1-\varepsilon) \ . \end{aligned}$$

Da $c$ er samme konstant i de to ligninger sættes disse to lig hinanden:

$$\begin{aligned} r_{\text{maks}}(1-\varepsilon) &= r_{\text{min}}(1+\varepsilon) \\ \Rightarrow r_{\text{maks}} &= \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} r_{\text{min}} \ . \end{aligned}$$

**2**)

$$r_{\text{maks}} = \frac{1 + 0,967}{1 - 0,967} \cdot 0,59 \ \text{AU} = \frac{1,967}{0,033} \cdot 0,59 \ \text{AU} = 35 \ \text{AU} \ .$$

**Opgave 3:** • **Excentricitet**

**1**) I opgave 2 blev det fundet at

$$r_{\text{min}}(1+\varepsilon) = r_{\text{maks}}(1-\varepsilon) \ .$$

Excentriciteten kan isoleres på følgende måde:

$$\begin{aligned} r_{\text{min}} + \varepsilon r_{\text{min}} &= r_{\text{maks}} - \varepsilon r_{\text{maks}} \\ \Rightarrow r_{\text{maks}} - r_{\text{min}} &= \varepsilon r_{\text{maks}} + \varepsilon r_{\text{min}} = (r_{\text{maks}} + r_{\text{min}})\varepsilon \\ \Rightarrow \varepsilon &= \frac{r_{\text{maks}} - r_{\text{min}}}{r_{\text{maks}} + r_{\text{min}}} \ . \end{aligned}$$

**2**) Den mindste værdi, som $\varepsilon$ kan antage, er 0, hvilket sker når $r_{\text{min}} = r_{\text{maks}}$.
Den største værdi, som $\varepsilon$ kan antage, er matematisk set 1, hvilket sker når $r_{\text{min}} = 0$, men dette tilfælde giver ikke mening fysisk set, da objektet så i periapsis vil befinde sig i centrum af det objekt, som det kredser om. En anden grund til, at den største værdi af epsilon ikke kan være 1 er, at der gøres brug af $r_{\text{maks}}$, og denne værdi findes kun idet, at der er tale om en bunden bane, da objektet i en ubunden bane aldrig vil nå en maksimal afstand.
Idet $0 \leq \varepsilon < 1$ vil der være tale om ellipsebaner.

## Tolegemeproblemet

**Opgave 4:** • **Ækvivalens i tolegemeproblemet**

$$R = \frac{m_\odot r + m_\oplus \cdot 0}{m_\odot + m_\oplus} = r\frac{m_\odot}{M}$$

Hvis $r = c/(1+\varepsilon\cos(\varphi))$, så er $R = A/(1+\varepsilon\cos(\varphi))$, hvor $A = cm_\odot/M$. Dette betyder, at massemidtpunktet vil lave en ellipsebevægelse med samme excentricitet som Solen, men med en reduceret halv storakse (reduceret med $m_\odot/M$). Her er $\odot$ og $\oplus$ astrofysisk notation for henholdsvis Solen og Jorden.

**Opgave 5:** • **Ækvivalens i tolegemeproblemet II**
Vi har

$$R = \frac{m_\odot \cdot r_\odot + m_\oplus \cdot r_\oplus}{M} = 0$$

og

$$r = r_\oplus - r_\odot = \frac{c}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

(de to er antiparallelle). Så

$$m_\odot \cdot r_\odot = -m_\oplus \cdot r_\oplus$$

eller

$$r_\odot = -r_\oplus \frac{m_\oplus}{m_\odot}$$

samt

$$r_\oplus = r + r_\odot$$

$$
\begin{aligned}
r_\odot &= -\frac{m_\oplus}{m_\odot}(r + r_\odot) \\
r_\odot\left(1 + \frac{m_\oplus}{m_\odot}\right) &= -\frac{m_\oplus}{m_\odot} r \\
r_\odot &= -\frac{m_\oplus}{m_\odot + m_\oplus} r \\
&= -\frac{m_\oplus}{M} r
\end{aligned}
$$

Tilsvarende for Jorden:

$$
\begin{aligned}
r_\oplus &= -\frac{m_\odot}{m_\oplus} r_\odot \\
r_\odot &= r_\oplus - r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_\oplus &= -\frac{m_\odot}{m_\oplus}(r_\oplus - r) \\
r_\oplus\left(1 + \frac{m_\odot}{m_\oplus}\right) &= \frac{m_\odot}{m_\oplus} r \\
r_\oplus &= \frac{m_\odot}{M} r
\end{aligned}
$$

## Bevægelsesligningerne

**Opgave 6:** • **Bevarelse af impulsmoment**

**1**) Se figur 5.1a.
Banernes excentricitet skal være ens, mens banernes halve storakse blot er skaleret efter forholdet mellem de to legemers afstande til massemidtpunktet.

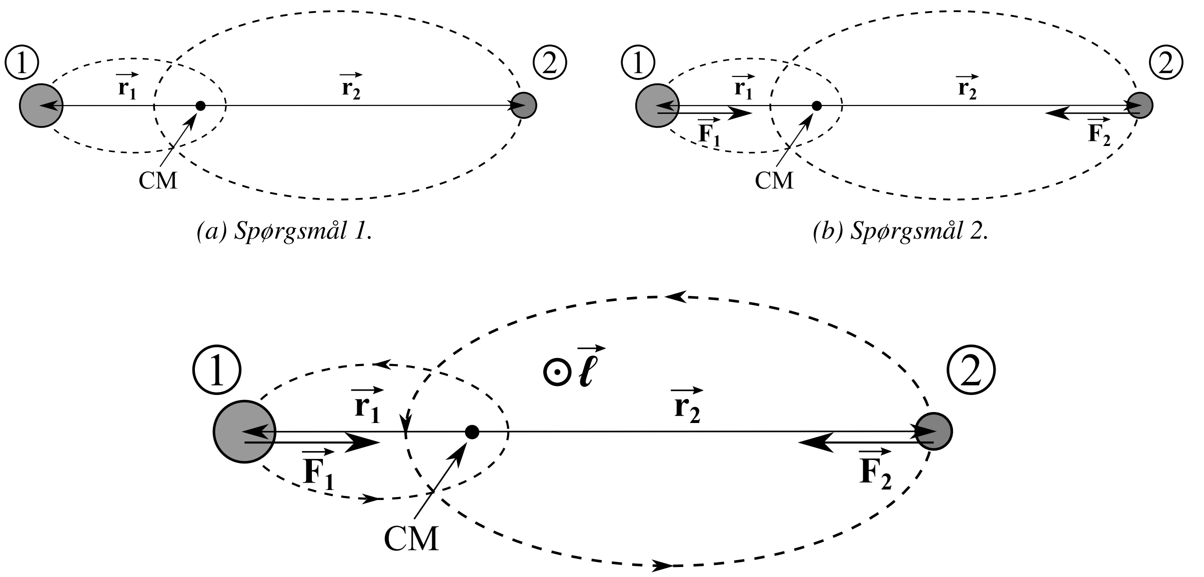
**2**) Se figur 5.1b.
Ifølge Newtons 3. lov skal de to kræfter være lige store og modsatrettede.

**3**) Kraftmomentet er givet ved

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} ,$$

men siden det for begge legemer gør sig gældende, at $\vec{\boldsymbol{r}}_i \parallel \vec{\boldsymbol{F}}_i$ , $\forall\, i = 1, 2$, da vil krydsproduktet mellem disse to vektorer give 0, hvorfor

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_i = \vec{\boldsymbol{0}} , \quad \forall\, i = 1, 2 .$$




*(a) Spørgsmål 1.* *(b) Spørgsmål 2.*

*(c) Spørgsmål 5.*

*Figur 5.1: Grafiske besvarelser til opgave 6. Kræfterne er på disse tegning tegnet lidt under massemidtpunktet af hvert legeme for at gøre figuren mere overskuelig.*

**4**) Af kompendiets ligning (1.21) vides det at

$$\vec{\tau}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_i}{\mathrm{d}t} \,,$$

og siden det blev fundet, at $\vec{\tau}_i = \vec{\mathbf{0}}$, da betyder det, at den tidsafledede af impulsmomentet er $\vec{\mathbf{0}}$, hvilket gør sig gældende, hvis impulsmomenter er konstant.
Idet at hvert af impulsmomenterne er konstant, da vil det også betyde, at det totale impulsmoment er konstant.

**5**) Se figur 5.1c.
Impulsmomentet er givet ved

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \,,$$

hvortil højrehåndsreglen benyttes til at finde retningen af hvert af impulsmomenterne, da retningen af afstandsvektoren $\vec{r}$ og hastigheden $\vec{v}$, og dermed impulsen $\vec{p}$, kendes. Retningen af de to impulsmomenter vil være den samme, hvorfor det totale impulsmoment også vil gå i denne retning.

**Opgave 7: ●● Keplers 3. lov**

**1**) Vi ved at

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{A}{\mathrm{d}A/\mathrm{d}t} = \frac{\pi ab}{\left(\frac{\ell}{2\mu}\right)} \\
\Rightarrow P^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu^2}{\ell^2} \,.
\end{aligned}
$$

Fra kompendiets ligning (5.6) vides det at

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{c}{1-\varepsilon^2} \\
b &= \frac{c}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \,,
\end{aligned}
$$

og udtrykkes $b^2$ ved $a^2$ bliver det

$$
b^2 = a^2 \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{1-\varepsilon^2} = a^2(1-\varepsilon^2) \,,
$$

hvilket kan indsættes i udtrykket for $P^2$:

$$
P^2 = \frac{4\pi^2 a^2 a^2 (1-\varepsilon^2)\mu^2}{\ell^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu^2}{\ell^2} \,.
$$

Hernæst vides det fra kompendiet, at

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{\ell^2}{G m_1 m_2 \mu} \\
\Rightarrow \ell^2 &= G m_1 m_2 \mu c \,,
\end{aligned}
$$

hvorfor $P^2$ bliver

$$
P^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu^2}{G m_1 m_2 \mu c} = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu}{G m_1 m_2 c} \,.
$$

Hernæst indsættes et udtryk for $c$ fået fra ligningen for $a$,

$$
c = a(1-\varepsilon^2) \,,
$$

i udtrykket for $P^2$

$$
P^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu}{G m_1 m_2 a (1-\varepsilon^2)} = \frac{4\pi^2 a^3 \mu}{G m_1 m_2} \,.
$$

Sidst indsættes udtrykket for den reducerede masse,

$$
\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \,,
$$

i $P^2$:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}{G m_1 m_2 a (1-\varepsilon^2)} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3 .$$

**Opgave 8: ●●● Energibevarelse og excentricitet**

**1**) Hastigheden skifter fortegn, når kometen passerer $r_{\text{min}}$. Derved må $v(r_{\text{min}}) = 0$. Af dette bliver energien i $r_{\text{min}}$:

$$E(r_{\text{min}}) = V_{eff}(r_{\text{min}}) = \frac{\ell^2}{2\mu r_{\text{min}}^2} - \frac{\gamma}{r_{\text{min}}} = \frac{1}{2r_{\text{min}}}\left(\frac{\ell^2}{\mu r_{\text{min}}} - 2\gamma\right) .$$

**2**) Fra kompendiets ligning (5.62) har vi, at

$$r = \frac{c}{1+\varepsilon\cos(\varphi)} ,$$

hvilket for $r_{\text{min}}$ bliver

$$r_{\text{min}} = \frac{c}{1+\varepsilon\cos(0)} = \frac{c}{1+\varepsilon} .$$

Ved at indsætte den givne værdi for $c$ fås

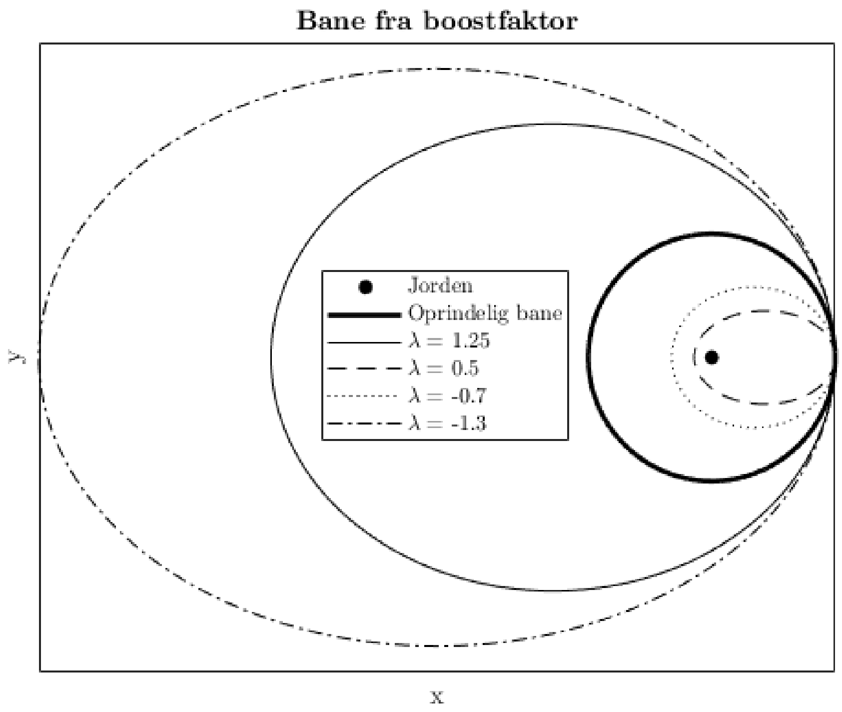
$$r_{\text{min}} = \frac{\ell^2}{\gamma\mu(1+\varepsilon)} .$$

**3**) Her indsættes resultatet fra spørgsmål 2 i resultatet fra spørgsmål 1:

$$E = \frac{\gamma\mu(1+\varepsilon)}{2\ell^2}(\gamma(1+\varepsilon) - 2\gamma) = \frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2}(\varepsilon+1)(\varepsilon-1) = (\varepsilon^2-1)\frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2} .$$

Da der er energibevarelse må denne energi være den samme, som den til en vilkårligt andet tidspunkt eller sted i banen.

**4**) Hvis energien skal være negativ kræves, at $\varepsilon^2 < 1$, altså $0 \leq \varepsilon < 1$. Dette er excentriciteten for en ellipsebane (eller cirkelbane hvis $\varepsilon = 0$), hvilket stemmer fint overens med at kometen er i en bunden bane, når den potentielle energi er større end den kinetiske.
Hvis energien er 0 kræves, at $\varepsilon^2 = 1$, altså $\varepsilon = 1$. Dette er svarende en parabelbane, hvor kometen netop undslipper, men dette sker så langsomt som muligt, da den kinetiske energi netop opvejer den potentielle energi.
Hvis energien er positiv, da må $\varepsilon^2 > 1$, altså $\varepsilon > 1$, hvorfor der må være tale om en hyperbelbane.




*Figur 5.2: Baner fundet fra forskellige boostfaktorer.*

# Baneskift

**Opgave 9: • Boostfaktor**
Se figur 5.2. Her er forskellige værdier af de positive og negative boostfaktorer valgt, da fortegnet for boostfaktoren blot vender bevægelsesretningen.

**Opgave 10: •• Boostkraft**

**1**)

$$\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}} \overset{\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}{=\!=\!=} m\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} \overset{\vec{p}=m\vec{a}}{=\!=\!=} \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{p}}}{\Delta t}\,.$$

**2**) Først finds impulsmomentet i $P$ før og efter boostet, hhv. $\ell_1$ og $\ell_2$:

$$\ell_1 = mv_1r_1\,,$$
$$\ell_2 = mv_2r_2 \overset{\lambda=\frac{v_2}{v_1}}{=\!=\!=} m\lambda v_1 r_2\,,$$

hvor $m$ er satellittens masse, som antages ikke at ændre sig under boostet, $v$ er hastigheden og $r$ er afstanden mellem Jorden og satellitten. Forskellen i impulsmoment findes:

$$\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1 = m\lambda v_1 r_2 - m v_1 r_1 \overset{r_1(P)=r_2(P)}{=\!=\!=\!=} m v_1 r_1(\lambda - 1)\,,$$

Da impulsmomentet findes som

$$\ell = rp\,,$$

så bliver ovenstående

$$\Delta\ell = r_1 \Delta p\,,$$

hvor

$$\Delta p = m v_1(\lambda - 1)\,.$$

Boostkraften bliver dermed

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m v_1}{\Delta t}(\lambda - 1)\,.$$

**Opgave 11: •• Hohmannbane**

**1**) Hohmannbanen har apsis i de to baner med radius hhv. $R_1$ og $R_3 = 2R_1$. Da $R_3 > R_1$, må Hohmannbanen havde apoapsis i $P'$ og periapsis i $P$.

**2**) Da bane 1 er cirkulær, så vil excentriciteten af denne bane være $\varepsilon_1 = 0$. Ved brug af kompendiets ligning (5.63) kan det ses, at $R_1 = c_1$:

$$R_1 = \frac{c_1}{1 + \varepsilon_1 \cos(\varphi - \delta)} \overset{\varepsilon_1=0}{=\!=} \frac{c_1}{1} = c_1\,.$$

Excentriciteten af Hohmannbanen kan nu findes ved kompendiets ligning (5.69):

$$\varepsilon_2 = \lambda^2\varepsilon_1 + (\lambda^2 - 1) \overset{\varepsilon_1=0}{=\!=} \lambda^2 - 1\,.$$

Idet satelitten er i apoapsis i Hohmannbanen ($P'$) skal $r_2(P') = R_3$. Der gøres her igen brug af kompendiets ligning (5.63):

$$R_3 = r_2(P') = \frac{c_2}{1 + \varepsilon_2\cos(\pi)} = \frac{c_2}{1 - \varepsilon_2} \overset{\varepsilon_2=\lambda^2-1}{=\!=\!=} \frac{c_2}{1 - (\lambda^2 - 1)} = \frac{c_2}{2 - \lambda^2}\,.$$

$c_2$ kan ved kompendiets ligning (5.68):

$$c_2 = \lambda^2 c_1 \overset{c_1=R_1}{=\!=} \lambda^2 R_1\,.$$

Indsættes dette i udtrykket for $R_3$ fra tidligere fås:

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{\lambda^2 R_1}{2-\lambda^2} \\ \Rightarrow \frac{R_1}{R_3} &= \frac{2-\lambda^2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - 1 \\ \Rightarrow \frac{2}{\lambda^2} &= \frac{R_1}{R_3} + 1 = \frac{R_1+R_3}{R_3} \\ \Rightarrow \lambda^2 &= \frac{2R_3}{R_1+R_3} \\ \Rightarrow \lambda &= \sqrt{\frac{2R_3}{R_1+R_3}} \overset{R_3=2R_1}{=\!=\!=} \sqrt{\frac{2\cdot 2R_1}{R_1+2R_1}} = \sqrt{\frac{4R_1}{3R_1}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\,. \end{aligned}$$

Altså vil boostfaktoren i punktet $P$ være $\lambda = \sqrt{4/3}$.

**3**) Da bane 1 er cirkulær, så vil excentriciteten af denne bane være $\varepsilon_3 = 0$. Ved brug af kompendiets ligning (5.63) kan det ses, at $R_3 = c_3$:

$$R_3 = \frac{c_3}{1+\varepsilon_3\cos(\varphi-\delta)} \overset{\varepsilon_3=0}{=\!=\!=} \frac{c_3}{1} = c_3\,.$$

$c_3$ kan nu beskrives ved kompendiets ligning (5.68):

$$c_3 = \lambda'^2 c_2 \overset{c_2=\lambda^2 c_1}{=\!=\!=\!=} \lambda'^2\lambda^2 c_1 \overset{c_1=R_1}{=\!=\!=} \lambda'^2\lambda^2 R_1\,.$$

Heri isoleres nu for at finde $\lambda'$:

$$\begin{aligned} \lambda'^2 &= \frac{c_3}{\lambda^2 R_1} \overset{c_3=R_3}{=\!=\!=} \frac{R_3}{\lambda^2 R_1} \overset{\lambda=\sqrt{\frac{2R_3}{R_1+R_3}}}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{R_3}{\frac{2R_3}{R_1+R_3}R_1} = \frac{R_3}{\left(\frac{2R_1R_3}{R_1+R_3}\right)} = R_3\frac{R_1+R_3}{2R_1R_3} = \frac{R_1+R_3}{2R_1} \\ \lambda' &= \sqrt{\frac{R_1+R_3}{2R_1}} \overset{R_3=2R_1}{=\!=\!=} \sqrt{\frac{R_1+2R_1}{2R_1}} = \sqrt{\frac{3R_1}{2R_1}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,. \end{aligned}$$

Altså vil boostfaktoren i punktet $P'$ være $\lambda' = \sqrt{3/2}$.

**4**) Da der er impulsmomentbevarelse, da vil følgende gøre sig gældende for Hohmannbanen:

$$mv_2(P)r_2(P) = mv_2(P')r_2(P')\,,$$

hvor $m$ er satellittens masse, som antages konstant under hele baneskiftet, hvorfor denne går ud. Herudover vides det, at $r_2(P) = R_1$ og $r_2(P') = R_3$, hvorfor ligningen bliver

$$v_2(P)R_1 = v_2(P')R_3\,.$$

Af formlen for boostfaktoren, kompendiets ligning (5.66), fås

$$\lambda = \frac{v_2(P)}{v_1(P)} \qquad\qquad \lambda' = \frac{v_3(P')}{v_2(P')}$$
$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$
$$v_2(P) = \lambda v_1 \qquad\qquad v_2(P') = \frac{v_3}{\lambda'}$$

hvilket indsættes i ligningen ovenfor:

$$\lambda v_1 R_1 = \frac{v_3}{\lambda'} R_3 \,,$$

og $v_3$ isoleres

$$v_3 = \frac{\lambda' \lambda v_1 R_1}{R_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{4}{3}}\frac{v_1 R_1}{R_3} = \sqrt{\frac{12}{6}}\frac{v_1 R_1}{R_3} \overset{R_3=2R_1}{=\!=\!=} \sqrt{2}\frac{v_1 R_1}{2R_1} \overset{\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}}{=\!=\!=} \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \,.$$

Altså er hastigheden af satellitten i den nye bane udtrykt ved hastigheden i begyndelsesbanen $v_3 = v_1/\sqrt{2}$.

**Opgave 12: •• Hohmannbane II**

Fra opgave 11 blev det fundet, at boostfaktoren for et skift mellem fra en startbane til en Hohmannbane er givet ved

$$\lambda = \sqrt{\frac{2R_{\text{efter}}}{R_{fr} + R_{\text{efter}}}} \,, \tag{5.1}$$

og boostfaktoren for et skift mellem Hohmannbanen og slutbanen er givet ved

$$\lambda' = \sqrt{\frac{R_{\text{før}} + R_{\text{efter}}}{2R_{\text{før}}}} \,, \tag{5.2}$$

hvor $R_{\text{før}}$ er radius af den første bane, altså banen inden skiftet til Hohmannbanen, og $R_{\text{efter}}$ er radius af den sidste bane, altså banen der kommer af skiftet fra Hohmannbanen.

**1**) Der er tale om et skift fra en cirkulær bane (A) til en Hohmannbane (1), hvorfor ligning (5.1) bruges. Her er $R_{\text{før}} = R_A$ og $R_{\text{efter}} = R_C = (9/2)R_A$:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{2\cdot\frac{9}{2}R_A}{R_A + \frac{9}{2}R_A}} = \sqrt{\frac{9R_A}{\frac{11}{2}R_A}} = \sqrt{\frac{18R_A}{11R_A}} = \sqrt{\frac{18}{11}} \,.$$

**2**) Der er tale om et skift fra en Hohmannbane (1) til en cirkulær bane (C), hvorfor ligning (5.2) bruges. Her er $R_{\text{før}} = R_A$ og $R_{\text{efter}} = R_C = (9/2)R_A$:

$$\lambda_1' = \sqrt{\frac{R_A + \frac{9}{2}R_A}{2R_A}} = \sqrt{\frac{\frac{11}{2}R_A}{2R_A}} = \sqrt{\frac{11}{4}\frac{R_A}{R_A}} = \sqrt{\frac{11}{4}} \,.$$

**3**) Der er tale om et skift fra en cirkulær bane (C) til en Hohmannbane (2), hvorfor ligning (5.1) bruges. Her er $R_{\text{før}} = R_C = (3/2)R_B$ og $R_{\text{efter}} = R_B$:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{2R_B}{\frac{3}{2}R_B + R_B}} = \sqrt{\frac{2R_B}{\frac{5}{2}R_B}} = \sqrt{\frac{4R_B}{5R_B}} = \sqrt{\frac{4}{5}}\,.$$

**4**) Der er tale om et skift fra en Hohmannbane (2) til en cirkulær bane (B), hvorfor ligning (5.2) bruges. Her er $R_{\text{før}} = R_C = (3/2)R_B$ og $R_{\text{efter}} = R_B$:

$$\lambda_2' = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}R_B + R_B}{2\cdot\frac{3}{2}R_B}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{2}R_B}{3R_B}} = \sqrt{\frac{5}{6}\frac{R_B}{R_B}} = \sqrt{\frac{5}{6}}\,.$$

**5**) Boostfaktorerne $\lambda_1$ og $\lambda_2$ er på samme form, formen fra ligning (5.1), mens boostfaktorerne $\lambda_1'$ og $\lambda_2'$ er på samme form, formen fra ligning (5.2).

# Kapitel 6

# Matematik

## 6.1 Polære Koordinater, Cosinus og Sinus

**Opgave 1:** • **Idiotformlen**

Brug at $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$ er hhv. den hosliggende og modstående katete i en retvinklet trekant med hypotenuselængde 1 pr. deres definition. Tegn det evt. i enhedscirklen. Det giver da fra Pythagoras sætning at

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1^2 = 1 \,.$$

**Opgave 2:** • **Tangens**

**1**) Fra definitionen af tangens har man, at $\tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta)$. Men i matematikafsnittet er det også introduceret, at $\cos(\theta)$ er givet som længden af den hosliggende katete divideret med længden af hypotenusen, og at $\sin(\theta)$ er givet som længden af den modstående katete divideret med længden af hypotenusen. For trekanten i denne opgave har man altså

$$\cos(\theta) = \frac{a}{c} \quad \text{og} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{c} \quad \Longrightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}\,.$$

**2**) Man finder at: $\quad \tan(\theta) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 45°.$

**Opgave 3:** • **Retvinklede trekanter**

**1**) Det vides, at $\cos(\theta)$ er givet som længden af den hosliggende katete divideret med længden af hypotesen. Det giver her at

$$\cos(\theta_{ac}) = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_{ac} = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 1,176 \approx 67,38^\circ .$$

**2**) Ideen er her, at man for trekanten i denne opgave kan skrive $\tan(\theta_{ac}) = b/a$. Da $\theta_{ac}$ kendes fra 1) og $a$ er opgivet i opgaven, kan man nu finde $b$. Det giver

$$b = a\tan(\theta_{ac}) = 5 \cdot \tan\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right) = 12 .$$

**3**) Det vides, at $\sin(\theta)$ er givet som længden af den modstående katete divideret med længden af hypotesen. Det giver her at

$$\sin(\theta_{bc}) = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \approx 0,395 \approx 22,62^\circ .$$

**Opgave 4:** • **Koordinatskift**

Her bruges formlerne i (A.1) fra kompendiet, altså $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $\theta = \arctan(y/x)$.

**1**) Man får

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ .$$

**2**) Man får

$$r = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{-2}{1}\right) \approx -1,107 \approx -63,43^\circ .$$

Det positive svar findes ved at ligge $2\pi$ radianer eller $360^\circ$ til det negative resultat.

**Opgave 5:** • **Koordinatskift 2**

Her bruges formlerne i (A.1) fra kompendiet, altså $x = r\cos(\theta)$ og $y = r\sin(\theta)$.

**1**) Man får

$$x = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad y = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}} .$$

**2**) Man får

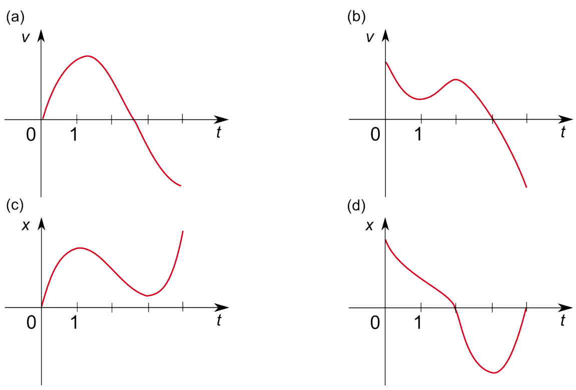
$$x = 5 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad y = 5 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

**3**) Man får

$$x = 13 \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = 13 \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -13 \cdot \frac{1}{2}.$$

## Differentialregning

**Opgave 6:** • **Hastighed og postion**




**1**) Da graferne simpelt viser $v$ som funktion af tiden, kan man bare aflæse på figuren. For (a) har man:

- $t = 0 \longrightarrow 1,5$: sætter hastigheden op
- $t = 1,5 \longrightarrow 4$: sætter hastigheden ned

For (b) har man:

- $t = 0 \longrightarrow 1$: sætter hastigheden ned
- $t = 1 \longrightarrow 2$: sætter hastigheden op
- $t = 2 \longrightarrow 4$: sætter hastigheden ned

.

**2**) Her ses i stedet positionen som funktion af tiden. For at svare på hvordan hastigheden ændres med tiden, skal man derfor kigge på *ændringen* i hældningen af grafen. For (c) har man:

- $t = 0 \to 3$: hældningen bliver mindre/aftager → sætter hastigheden ned
- $t = 3 \to 4$: hældningen bliver større/vokser → sætter hastigheden op

For (d) har man:

- $t = 0 \to 1$: hældningen bliver meget lidt større/vokser → sætter hastigheden op
- $t = 1 \to 2$: hældningen bliver meget lidt mindre/aftager → sætter hastigheden ned
- $t = 2$: hældningen bliver meget mindre/aftager lige ved punktet 2 → sætter hastigheden hurtigt ned
- $t = 2 \to 4$: hældningen bliver større/vokser → sætter hastigheden op

.

**Opgave 7:** • **Afledede og dobbeltafledede**

**1**) $f(x) = x^3$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 3x^2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 6x\,.$$

**2**) $f(x) = x^2 + 4x$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x + 4\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 2\,.$$

**3**) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^{-1} + x^{-2}$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -x^{-2} - 2x^{-3}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 2x^{-3} + 6x^{-4}\,.$$

**4**) $f(x) = \cos(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\cos(x)\,.$$

**5**) $f(x) = \ln(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} = x^{-1}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -x^{-2}\,.$$

**6**) $f(x) = x\sin(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \sin(x) + x\cos(x)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 2\cos(x) - x\sin(x)\,.$$

**7**) $f(x) = \frac{1}{x}\ln(x) = x^{-1}\ln(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = x^{-2} - x^{-2}\ln(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -3x^{-3} + 2x^{-3}\ln(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}\,.$$

**Opgave 8:** • **Sammensatte funktioner**

Først findes $g(x)$ og så $f(g)$. Den afledede $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ findes vha. kædereglen: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}$.

**1**) $f(x) = \sin(4x)$:

$$g(x) = 4x\,, \quad f(g) = \sin(g)\,, \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 4\cos(4x)\,.$$

**2**) $f(x) = \sqrt{2x}$:

$$g(x) = 2x\,, \quad f(g) = \sqrt{g}\,, \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2\frac{1}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}\,.$$

**3**) $f(x) = \sqrt{4x+5}$:

$$g(x) = 4x+5\,, \quad f(g) = \sqrt{g}\,, \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 4\frac{1}{2\sqrt{4x+5}} = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}\,.$$

**4**) $f(x) = \sin(e^x)$:

$$g(x) = e^x\,, \quad f(g) = \sin(g)\,, \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = e^x\cos(e^x)\,.$$

**5**) $f(x) = \ln(\cos(x))$:

$$g(x) = \cos(x)\,, \quad f(g) = \ln(g)\,, \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (-\sin(x))\,\frac{1}{\cos(x)}\,.$$

**Opgave 9:** •• **Funktioner af flere variable - partiel differentiering**

**1)** $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2\,.$$

**2)** $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{-z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^{-z}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -ye^{-z}\,.$$

**3)** $f(x, y, z) = ze^{xyz}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz^2e^{xyz}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2e^{xyz}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{xyz} + xyze^{xyz}\,.$$

**4)** $f(x, y, z) = \frac{x-y+5z}{x+y+z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2(y-2z)}{(x+y+z)^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2(x+3z)}{(x+y+z)^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{4x+6y}{(x+y+z)^2}\,.$$

**Opgave 10:** ••• **Funktioner af flere variable - total differentiering**

**1)** $f(x, y, z, t) = xyz$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = yz\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + xz\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + xy\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$

**2)** $f(x, y, z, t) = x + y^2 + z^3$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 3z^2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$

**3)** $f(x, y, z, t) = xy^2 + ye^{-z}$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = y^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (2xy + e^{-z})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ye^{-z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$

**4)** Da vil $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Da $f(x, y, z, t)$ ikke afhænger eksplicit af $t$, får man da, at $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t = 0$ for 1)-3).

## Integralregning

**Opgave 11:** • **Ubestemte integraler**

**1**) $f(x) = x^3$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C\,.$$

**2**) $f(x) = x^2 + 4x$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C\,.$$

**3**) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^{-1} + x^{-2}$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \ln(x) - x^{-1} + C\,.$$

**4**) $f(x) = \cos(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C\,.$$

**5**) $f(x) = \ln(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C\,.$$

**Opgave 12:** • **Integration ved substitution**

Udregn de følgende integraler vha. integration ved substitution:

**1**) $\int e^{-4x}\mathrm{d}x$:

$$\int e^{-4x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C\,.$$

**2**) $\int \sqrt{3x-2}\mathrm{d}x$:

$$\int \sqrt{3x-2}\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\cdot(3x-2)^{\frac{3}{2}} + C\,.$$

**3**) $\int xe^{-3x^2}\mathrm{d}x$:

$$\int xe^{-3x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C\,.$$

**4)** $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-5)\,.$$

**Opgave 13: •• Partiel integration**
Udregn de følgende integrale vha. partiel integration:
**1)** $\int 4x\cos(2-3x)\mathrm{d}x$:

$$\int 4x\cos(2-3x)\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\cos(2-3x) - \frac{4}{3}x\sin(2-3x) + C\,.$$

**2)** $\int (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\mathrm{d}x$:

$$\int (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\mathrm{d}x = (15x-39)e^{\frac{1}{3}x} + C\,.$$

**3)** $\int (3x+x^2)\sin(2x)\mathrm{d}x$:

$$\int (3x+x^2)\sin(2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(3x+x^2)\cos(2x) + \frac{1}{4}\Big[(3+2x)\sin(2x)+\cos(2x)\Big] + C\,.$$

## Differentialligninger

**Opgave 14: • Specialtilfælde af 1. og 2. Ordens Differentialligninger**

**1)** $f(t) = -7e^{3t}$ og $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 3f(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{3t} = -7\cdot 3e^{3t} = 3\left(-7e^{3t}\right) = 3f(t)\,.$$

**2)** $g(t) = \frac{2}{3}e^t + e^{-2t}$ og $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + 2g(t) = 2e^t$.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-2t} = \frac{2}{3}e^t - 2e^{-2t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + 2g(t) = \frac{2}{3}e^t - 2e^{-2t} + \frac{4}{3}e^t + 2e^{-2t} = \frac{6}{3}e^t = 2e^t\,.$$

**3**) $h(t) = 5\sin(3t) - 10\cos(3t)$ og $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -9h(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 3\cdot 5\cos(3t) + 3\cdot 10\sin(3t) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = (-9)\cdot 5\cos(3t) + 9\cdot 10\sin(3t) = -9h(t)\,.$$

**4**) $k(t) = 13\cos(8t+45)$ og $\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}t^2} = -64k(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = (-8)\cdot 13\cos(8t+45) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}t^2} = (-64)\cdot 13\cos(8t+45) = -64k(t)\,.$$

**Opgave 15:** •• **Generelle 1. Ordens Differentialligninger**

**1**) $h(x) = 1/(x+A)$ og $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -h(x)^2$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+A)^{-1} = -(x+A)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+A) = -\frac{1}{(x+A)^2} = -h(x)^2\,.$$

**2**) $k(x) = \left(c-x^2\right)^{-1/2}$ og $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = xk(x)^3$.

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}\left(c-x^2\right)^{-3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c-x^2\right) = x\left(c-x^2\right)^{-3/2} = xk(x)^3\,.$$

**3**) $g(x) = (\ln(x)+C)/x$ og $x^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + xg(x) = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x + C)\right]\frac{1}{x} + (\ln x + C)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + C}{x^2}$$
$$\Rightarrow x^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + xg(x) = 1 - (\ln(x)+C) + (\ln(x)+C) = 1\,.$$

**4**) $f(x) = (1+ce^x)/(1-ce^x)$ og $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(f(x)^2-1\right)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+c^x)\right]\frac{1}{1-ce^x} + (1+ce^x)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-ce^x}\right] = \frac{ce^x}{1-ce^x} + \frac{(1+ce^x)(-1)(-ce^x)}{(1-ce^x)^2}$$
$$= ce^x\left[\frac{1}{1-ce^x} + \frac{1+ce^x}{(1-ce^x)^2}\right] = ce^x\frac{1-ce^x+1+ce^x}{(1-ce^x)^2} = \frac{2ce^x}{(1-ce^x)^2}\,.$$

$$f(x)^2 - 1 = \frac{(1+ce^x)^2}{(1-ce^x)^2} - \frac{(1-ce^x)^2}{(1-ce^x)^2} = \frac{(1+ce^x)^2 - (1-ce^x)^2}{(1-ce^x)^2} = \frac{4ce^x}{(1-ce^x)^2} = 2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,.$$

**Opgave 16: ●●● Hvornår er det en løsning?**

**1**) Find $k$ så $f(y) = \cos(ky)$ løser $4\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} = -25f(y)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -k\sin(ky) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} = -k^2\cos(ky) = -k^2 f(y)\,.$$

Så sætter man ind:

$$4\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} = -25f(y) \quad \Rightarrow \quad -4k^2 f(y) = -25f(y) \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \pm\frac{5}{2}\,.$$

**2**) For de fundne $k$ fra 1), vis at $g(y) = A\sin(ky) + B\cos(ky)$ løser $4\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = -25g(y)$.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = kA\cos(ky) - kB\sin(ky) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = -k^2A\sin(ky) - k^2B\cos(ky) = -k^2 g(y)\,.$$

Det giver:

$$-4k^2 g(y) = -25g(y)\,.$$

Som er opfyldt for $k = \pm\frac{5}{2}$.

**3**) Find $r$ så $h(y) = e^{ry}$ løser $2\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} - h(y) = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} = re^{ry} = rh(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}y^2} = r^2e^{ry} = r^2h(y)\,.$$

Så sætter man ind:

$$2\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} - h(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2h(y) + rh(y) - h(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 + r - 1 = 0\,.$$

Løses andengradsligningen får man:

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad r_2 = -1\,.$$

**4)** For de fundne $r_1, r_2$ i 3), vis at $k(y) = ae^{r_1 y} + be^{r_2 y}$ løser $2\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} - k(y) = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = ar_1 e^{r_1 y} + br_2 e^{r_2 y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}y^2} = ar_1^2 e^{r_1 y} + br_2^2 e^{r_2 y}\,.$$

Så sætter man ind:

$$\begin{aligned} 2\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} - k(y) &= 2\left(ar_1^2 e^{r_1 y} + br_2^2 e^{r_2 y}\right) + (ar_1 e^{r_1 y} + br_2 e^{r_2 y}) - (ae^{r_1 y} + be^{r_2 y}) \\ &= \left(2ar_1^2 + ar_1 - a\right) e^{r_1 y} + \left(2br_2^2 + br_2 - b\right) e^{r_2 y} \\ &= a\left(2r_1^2 + r_1 - 1\right) e^{r_1 y} + b\left(2r_2^2 + r_2 -\right) e^{r_2 y} = 0 \cdot e^{r_1 y} + 0 \cdot e^{r_2 y} = 0\,. \end{aligned}$$

## Taylorapproksimationer

**Opgave 17:** •• **Taylorpolynomier for simple funktioner**

**1)** $f(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos(a)\,, \\ T_1(x) &= \cos(a) - \sin(a)(x-a)\,, \\ T_2(x) &= \cos(a) - \sin(a)(x-a) - \frac{1}{2}\cos(a)(x-a)^2\,. \end{aligned}$$

**2)** $f(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \sin(a)\,, \\ T_1(x) &= \sin(a) + \cos(a)(x-a)\,, \\ T_2(x) &= \sin(a) + \cos(a)(x-a) - \frac{1}{2}\sin(a)(x-a)^2\,. \end{aligned}$$

**3**) $f(x) = e^x$:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= e^a\,, \\ T_1(x) &= e^a + e^a(x-a)\,, \\ T_2(x) &= e^a + e^a(x-a) + \frac{1}{2}e^a(x-a)^2\,. \end{aligned}$$

**Opgave 18:** •• **Jordens form**

I første omgang differentieres funktionen to gange vha. kædereglen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}\left[R^2-x^2\right]^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\,, \\ \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right) = -\frac{1}{2}(-x)\left[R^2-x^2\right]^{-3/2}(-2x) - \left[R^2-x^2\right]^{-1/2} \\ &= \frac{-x^2}{(R^2-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\,. \end{aligned}$$

Evalueres disse differentialer i $x = 0$ fås

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} &= \left[\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_{x=0} = \frac{-0}{\sqrt{R^2-0^2}} = 0\,, \\ \left.\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} &= \left[\frac{-x^2}{(R^2-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_{x=0} = \frac{-0^2}{(R^2-0^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2-0^2}} \\ &= 0 - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R}\,. \end{aligned}$$

**1**) Indsættes det i ligning (A.7) fra kompendiet fås

$$T_2(x) = f(0) + x\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} + \frac{1}{2}x^2\left.\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = R + 0 - \frac{1}{R}x^2 = R - \frac{1}{2R}x^2\,.$$

hvilket er Taylorpolynomiet til 2. orden. Til nulte og første orden er det

$$T_0(x) = R\,, \qquad T_1(x) = R + 0 = R\,.$$

**2**) Da $T_0(x) = T_1(x)$ betragtes de herfra sammen.

- $T_1$ er en vandret linje for alle værdier af $x$.
- $T_2(x)$ er en parabel, hvor "benene", vender nedad, grundet fortegnet på 2.ordensleddet.

.

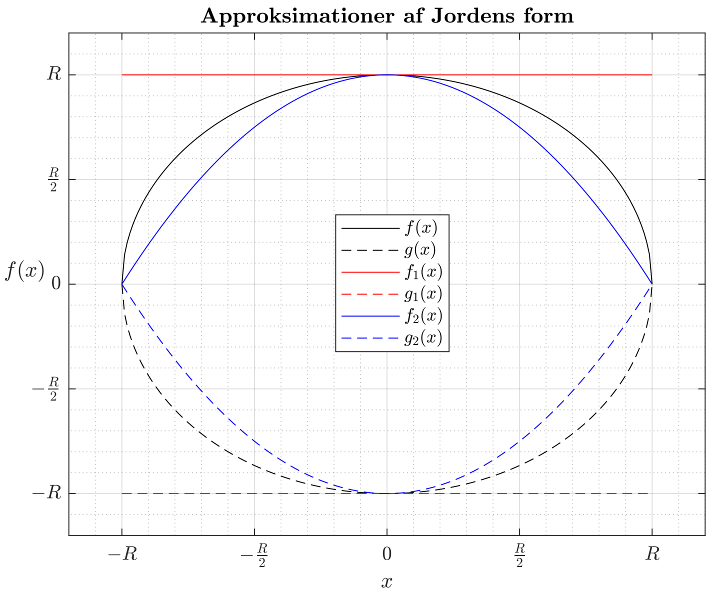
**3**) Se figur 6.1.

**4**) Der er tale om:

- Til 0. og 1. orden får man et plan.
- Til 2. får man en elliptisk paraboloid, dvs. den figur der fremkommer ved at dreje en parabel 180° rundt om $y$-aksen. Af denne figur er taget de positive værdier og spejlet i $x$-aksen. Denne forklaring giver ikke super meget mening, hvorfor det er bedre bare at tænke det som et øje.

.

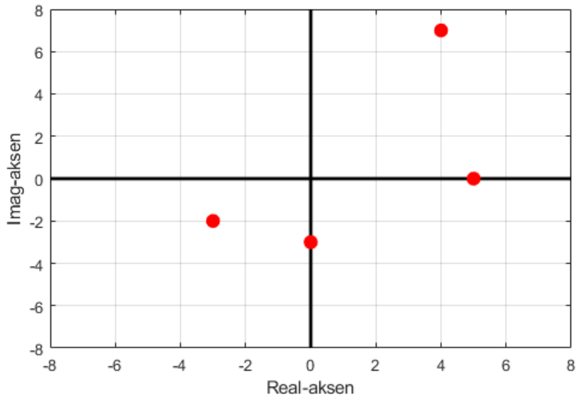
**5**) På baggrund af dette er det acceptable approksimationer at se Jorden som enten flad eller et gigantisks øje. Som figuren dog viser er det begrænset, i hvor stort et område disse approksimationer er valide.




*Figur 6.1: Plot af $f(x)$, $g(x)$, samt approksimationer af disse.*

## 6.2 Komplekse tal

**Opgave 19:** • **Den komplekse plan**
Tallene er indtegnet på følgende billede.




**Opgave 20:** • **Regning med komplekse tal**
Her bruges $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -6 + i$, $z_3 = 1 - 5i$, $z_4 = -4 + 3i$.

**1**) Man får $z_1 + z_2 = -3 + 3i$ og $z_3 + z_4 = -3 - 2i$.
**2**) Man får $z_1 - z_2 = 9 + i$ og $z_3 - z_4 = 5 - 8i$.
**3**) Man får $z_1 z_2 = -20 - 9i$ og $z_3 z_4 = 11 + 23i$.
**4**) Man får $z_1/z_2 = -(16/37) - (15/37)i$ og $z_3/z_4 = -(19/25) + (17/25)i$.
**5**) Man får $|z_1| = \sqrt{13}$ og $|z_2| = \sqrt{37}$. Endeligt får man, at $|z_3 z_4| = |z_3|\,|z_4| = 5 \cdot \sqrt{26}$.

**Opgave 21:** •• **Regneregler for modulus og normkvadratet**

**1**) Regnereglerne tages en af gangen. Lad $z_1 = a + bi$ og $z_2 = c + di$.

Først (A.16):

$$|z_1| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |a - bi| = \left|z_1^*\right| .$$

Så (A.17):

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(ac - bd) + (ad + bc)\,i| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} \\ &= \sqrt{\left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(c^2 + d^2\right)} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = |z_1|\,|z_2| \ . \end{aligned}$$

Endeligt (A.18). Her bemærker man først at

$$\left|z_1^n\right| = \left|\left(z_1^{n-1}\right) z_1\right| = \left|z_1^{n-1}\right| |z_1| \ ,$$

hvor (A.17) er brugt i den anden lighed. Man kan da lave samme trick for $z_1^{n-1}$

$$\left|z_1^{n-1}\right| = \left|\left(z_1^{n-2}\right) z_1\right| = \left|z_1^{n-2}\right| |z_1| \ ,$$

hvilket viser at

$$\left|z_1^n\right| = \left|z_1^{n-1}\right| |z_1| = \left|z_1^{n-2}\right| |z_1| \, |z_1| \ .$$

Ideen er da blot at fortsætte på samme vis, hvilket giver det ønskede resultat. Streng taget burde dette laves som et *induktionsbevis*, hvis det skulle være helt matematisk korrekt, men metoden her er mere intuitiv og illustrerer ideen i beviset.

**2**) Her vises formel (A.20). Lad $z = a + bi$.

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 = (a + bi)\,(a - bi) = zz^* \ .$$

### Opgave 22: ●●● Eulers formel og komplekse tal på polær form

**1**) De komplekse tal for de forskellige værdier af $x$ bliver:

$$e^{i\cdot 0} = 1 \,, \qquad e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = i \,, \qquad e^{i\cdot\pi} = -1 \,, \qquad e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = -i \ .$$

Altså bevæger $e^{ix}$ sig rundt mod uret i den komplekse plan, når $x$ vokser.

**2**) Fra Eulers formel har man at

$$\left|e^{ix}\right| = |\cos(x) + i\sin(x)| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \sqrt{1} = 1 \ .$$

Altså er modulus af $e^{ix}$ konstant og ændres derfor ikke, når man ændrer $x$.

**3**) Her kan man bruge de samme $x$ som fra 1). Det giver

$$e^{-i\cdot 0} = 1 \,, \qquad e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}} = -i \,, \qquad e^{-i\cdot\pi} = -1 \,, \qquad e^{-i\cdot\frac{3\pi}{2}} = i \ .$$

Altså bevæger $e^{-ix}$ sig rundt med uret i den komplekse plan, når $x$ vokser.

**4**) Fra Eulers formel har man at

$$\left|e^{-ix}\right| = |\cos(-x) + i\sin(-x)| = |\cos(x) - i\sin(x)| = \sqrt{\cos^2(x) + (-\sin(x))^2} = \sqrt{1} = 1 \,,$$

hvor det er benyttet at $\cos(-x) = \cos(x)$ og at $\sin(-x) = -\sin(x)$. Dette skyldes at cosinus er en lige funktion, mens sinus er en ulige funktion. Altså er modulus af $e^{-ix}$ konstant og ændres derfor ikke, når man ændrer $x$.

**5**) Først bemærkes det, hvis man tegner $z = a + bi$ i den komplekse plan, at man vha. $z$'s modulus, $|z|$, og argument, $\theta$, kan skrive $a$ og $b$ som følger

$$a = |z|\cos(\theta) \qquad \text{og} \qquad b = |z|\sin(\theta) \ .$$

Bruger man da Eulers formel, får man at

$$z = a + bi = |z|\cos(\theta) + i\,|z|\sin(\theta) = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|\,e^{i\theta}\,.$$

**Opgave 23: •• Komplekse ligninger**

**1**) Der løses for $z$ som i en normal ligning.

$$\frac{z-2}{z+1} = 3i \quad\Longrightarrow\quad z - 2 = 3i\,(z+1) = 3i\cdot z + 3i \quad\Longrightarrow\quad z - 3i\cdot z = 2 + 3i$$
$$\Longrightarrow\quad z\,(1-3i) = 2 + 3i \quad\Longrightarrow\quad z = \frac{2+3i}{1-3i} = -\frac{7}{10} + \frac{9}{10}i\,.$$

**2**) Her bruges en anden metode end i 1), for at vise at komplekse ligninger kan løses på forskellige måder. Ideen er at skrive $z = a + bi$, hvor man ikke kender $a$ og $b$ endnu. Dette indsættes i venstresiden af ligningen, og der reduceres

$$z + 3z^{*} = a + bi + 3(a - bi) = 4a - 2bi\,.$$

Sammenligner man da med højresiden af ligningen, $5 - 6i$, giver dette to normale ligninger, da realdelen af venstresiden må være lig med realdelen af højresiden og ligeledes for imaginærdelene. Altså får man ligningerne:

$$4a = 5 \qquad \text{og} \qquad -2b = -6\,.$$

Disse ligninger har løsningerne $a = 5/4$ og $b = 3$, og løsningen af den komplekse ligning er da

$$z = \frac{5}{4} + 3i\,.$$

## Vektorer

**Opgave 24: • Længden af en vektor**

$$\left|\vec{v}_1\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}\,,$$
$$\left|\vec{v}_2\right| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{41}\,.$$

**Opgave 25:** • **Addition, subtraktion og skalarmultiplikation med vektorer**

**1**) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\5\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-4\\2+5\\3+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\7\\3\end{bmatrix}.$$

**2**) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4\\5\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+4\\2-5\\3-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-3\\3\end{bmatrix}.$$

**3**) $5 \cdot \vec{v}_1$ og $5 \cdot \vec{v}_2$:

$$5 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1\\5\cdot 2\\5\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\10\\15\end{bmatrix},$$
$$5 \cdot \begin{bmatrix}-4\\5\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\cdot 4\\5\cdot 5\\5\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20\\25\\0\end{bmatrix}.$$

**4)** $5 \cdot (\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2)$ og $5 \cdot \vec{v}_1 \pm 5 \cdot \vec{v}_2$:

$$5 \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1-4 \\ 2+5 \\ 3+0 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 35 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$5 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2-5 \\ 3-0 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -15 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$5 \cdot \vec{v}_1 + 5 \cdot \vec{v}_2 = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 35 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$5 \cdot \vec{v}_1 - 5 \cdot \vec{v}_2 = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -15 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Dette resultat betyder, at man ved skalarmultiplikation kan gange ind i parenteser, ligesom man kender det for normale tal. Altså

$$a \cdot \left(\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2\right) = a \cdot \vec{v}_1 \pm a \cdot \vec{v}_2, \qquad \text{ligesom} \qquad a\,(b+c) = ab + ac\,.$$

**Opgave 26: •• Skalarproduktet**

**1)** $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = -4 + 10 = 6\,.$$

**2)** Der tjekkes kun for $\vec{v}_1$. Man får

$$\left|\vec{v}_1\right| = \sqrt{14}, \qquad \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \left|\vec{v}_1\right|\,.$$

**3)**

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\left|\vec{v}_1\right| \cdot \left|\vec{v}_2\right|}\right) = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{41}}\right) \approx 1,318 \approx 75{,}5^\circ\,.$$

**Opgave 27: •• Krydsproduktet**

**1)** $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ og $\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -15 \\ -12 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Altså har man at $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$.

**2)** $\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|$:

$$\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right| = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + 13^2} = \sqrt{538}\,.$$

**3)**

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}{\left|\vec{v}_1\right|\left|\vec{v}_2\right|}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{538}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{41}}\right) \approx 1,318 \approx 75{,}5°\,.$$

**Opgave 28: •• Regning med enhedsvektorer**

**1)**

$$\vec{v}_1 = v_{x1}\hat{\mathbf{x}} + v_{y1}\hat{\mathbf{y}} + v_{z1}\hat{\mathbf{z}}\,, \qquad \vec{v}_2 = v_{x2}\hat{\mathbf{x}} + v_{y2}\hat{\mathbf{y}} + v_{z2}\hat{\mathbf{z}}\,.$$

**2)** Det passer.

**3)**

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 1\,, \quad \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = 0\,, \quad \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0\,, \quad \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = 1\,, \quad \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0\,, \quad \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1\,.$$

Resten regnes på samme måde.

**4)** Det giver det samme.

**5**) Her skrives nulvektoren $\vec{\mathbf{0}}$, altså vektoren hvor alle indgange er nul.

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

Resten regnes på samme måde.

**6**) Det giver det samme.