Opgaver til Fysik Camp 2017

Faglige:

Dorte Thrige Plauborg (ansv.)	dtp@unf.dk
Sofie Bruun	shb@unf.dk
Christoffer Hansen	ch@unf.dk
Jacob Osman Hjortlund	jo@unf.dk
Rasmus Berg Jensen	rbe@unf.dk
Esben Skovhus Ditflefsen	esd@unf.dk

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

Kolofon

Kompendie til UNF Fysik Camp 2017

Opgavekompendiet er skrevet af Niels Jakob Søe Loft, Nanna Bill Andersen, Sofie Bruun, Rasmus Berg Jensen, Christoffer Hansen, Jacob Osman Hjortlund, Esben Skovhus Ditlefsen og Dorte Thrige Plauborg. Opgavekompendiet er trykt i juli 2017 og teksten er copyright ©2017 af UNF og forfatterne. Gengivelse med kildehenvisning tilladt.
Layout: Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen.
Ansvarlig: Dorte Thrige Plauborg

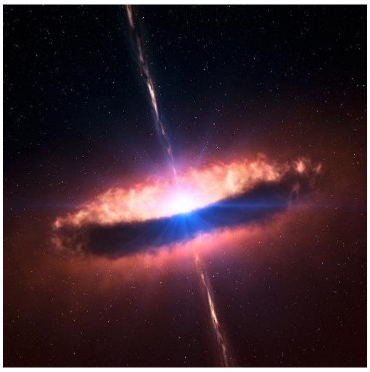
Indhold

Kapitel 1

Astrofysikopgaver

Astrofysik

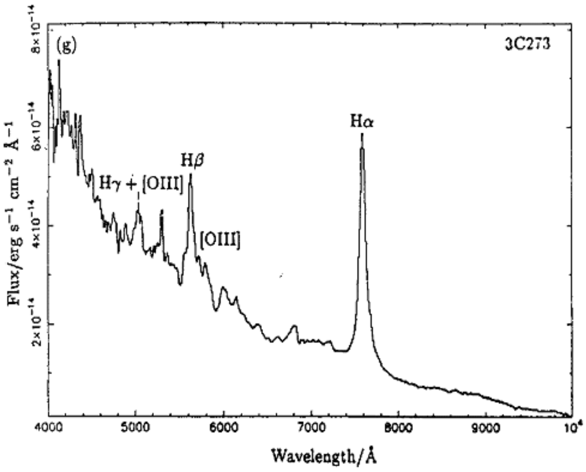
- **Opgave 1: Rødforskydning af kvasar**
Kvasarer (eng:"quasars" fra "quasi-stellar radio sources") er de mest energirige og fjerne medlemmer af objekterne kendt som aktive galaksekerner (eng:"AGN: Active Galactic Nuclei"). Kvasarer har siden deres opdagelse været omgivet af mystik, men der er nu opnået generel enighed om, at de er kompakte regioner i massive galakser, der indeholder det centrale supermassive sorte hul. De kæmpe mængder energi der bliver udstrålet af kvasarerne stammer fra al stoffet, som falder ind mod det sorte hul og bliver slynget ud. Et kvasar-spektrum er vist i Figur 1.2.
I Balmer-serien hopper en elektron til 2. orbital fra en mere exciteret tilstand. Den første af disse kaldes H-α og er faldet fra orbital 3 til 2. Den næste er H-β fra orbital 4 til 2 osv. Fotoner, der udsendes ved H-α-overgangen, har en bølgelængde på 656 nm. Ofte måler man i ångstrøm (Å) som er 10^{-10} m.



Figur 1.1: En kunstnerisk forestilling af en kvasar.

1) Ud fra din viden om H-α-overgangen, bevæger kvasaren sig så mod eller væk fra os?

2) Hvad er kvasarens radielle hastighed?



Figur 1.2

3) Man ser tit, at spektrallinjerne fra kvasarer er meget brede, fordi gassen bevæger sig hurtigt omkring det sorte hul, hvilket giver en Doppler-forbredning (lyset bliver både rød- og blåforskudt). Estimér bredden af H-α-linjen, $\Delta\lambda_{obs}$, og udregn gassens fart ved

$$v_{gas} = \frac{\Delta\lambda_{obs}}{2\lambda_0} c \tag{1.1}$$

Mål ca. halvvejs oppe, det behøver ikke være så præcist.

•• Opgave 2: Dopplerforskydning

Formlen for frekvensen ved Dopplerforskydning er

$$f_{obs} = \frac{c + v_{obs}}{c + v_{kilde}} f_{kilde}, \tag{1.2}$$

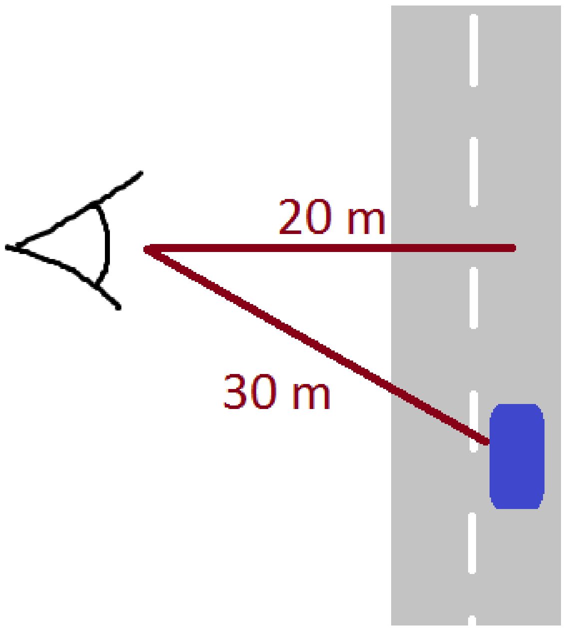
hvor c er lydens hastighed i mediet, f_{obs} er den observerede frekvens (udefra), f_{kilde} er den udsendte frekvens, v_{obs} er observatørens hastighed og v_{kilde} er kildens hastighed.

1) En politibil kører mod dig 30 meter væk, men er 20 meter fra centrum af vejen når du kigger ligeud (se skitsen på Figur 1.3). Tegn hastighedsvektoren og hastighedskomponenterne der peger henholdsvis parallelt med din synsvinkel og vinkelret på den. Tænk over om den radielle hastighed er positiv eller negativ.

2) Bilens speedometer viser, at den kører 50 km/t. Brug trigonometri til at beregne hvor stor en hastighedskomponent, der peger mod dig (radiel hastighed).

3) Politibilens sirene udsender lyd med en frekvens på 800 Hz. Du står stille, og det er en let kølig dag med 15 grader, hvor lydens fart i luft er 340 m/s. Ved hvilken frekvens hører du tonen?

• Opgave 3: Galaksen M87 i Virgohoben



Figur 1.3

Galaksen M87 ligger i centrum af den nærmeste store galaksehob Virgohoben. Rødforskydningen af lys fra M87 og dermed fra centrum af Virgohoben er målt til $z = 0.00436$. Vi antager en Hubblekonstant på $H_0 = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

1) Beregn afstanden til M87. Gør rede for dine antagelser.

På vores teleskoper på Jorden modtager vi en samlet flux fra M87 på $f_{\mathrm{M87}} = 3{,}68 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

2) Brug den information til at give et estimat over det totale antal stjerner i M87, idet vi antager, at de alle har samme luminositet som Solen, $L_\odot = 3{,}839 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$.

•• Opgave 4: Afstandsbedømmelse i nabolaget

En stjerne har en tilsyneladende magnitude på 17,5 og en absolut magnitude på -1,27.

1) Hvad er afstanden til stjernen?

Hvis lysmængden fra et himmellegeme reduceres undervejs mod jorden, vil det se ud til at være længere væk, end det faktisk er. Det ses ved at den observerede flux mindskes, og den tilsyneladende magnitude stiger. Der gælder her at

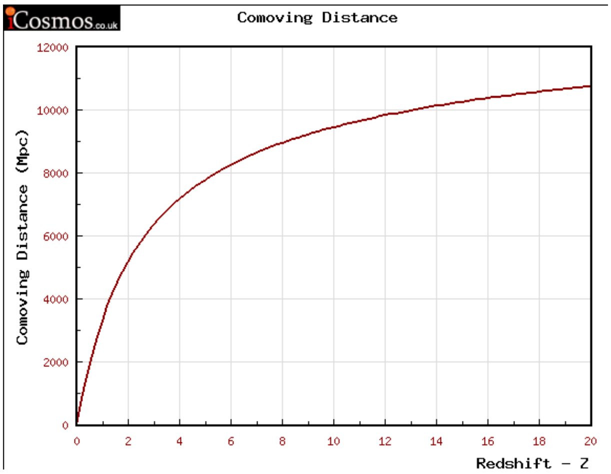
$$m_{faktisk} - m_{obs} = -2,5\log\left(\frac{f_{faktisk}}{f_{obs}}\right)$$

2) Det oplyses nu, at lyset på sin vej fra stjernen til os er blevet reduceret med 60% pga. udslukning fra interstellart støv. Hvad er den faktiske afstand til stjernen?

●● Opgave 5: Afstande

1) Opskriv luminositetsafstanden D_L som funktion af vinkelafstanden D_A.

2) I et fladt univers er $D_M = D_C$. D_C kaldes comoving distance, og med $\Omega_m = 0.3$ og $\Omega_\Lambda = 0.7$ opfører det sig som plottet på Figur 1.4. Hvor stor er D_L og D_A ved $z = 1$?
Hvad med ved $z = 9$? Giver ændringerne mening?



Figur 1.4

3) Hvor stor er den radielle hastighed for et objekt med $z = 10$? Oplys svaret som procent af lysets fart i vakuum. Dengang var universet for resten kun 478 mio. år gammelt.

●●● Opgave 6: Himmellegemers overfladetemperatur

Når et himmellegeme modtager stråling fra en nærliggende stjerne, vil noget af denne stråling reflekteres, og det bidrager derfor ikke til opvarmning af planeten. Albedoen A er et tal fra 0 til 1 som angiver andelen af lyset, der reflekteres fra et objekt. 1 angiver 100 % reflektion og derved at intet lys absorberes.

1) Vis først, at en planet eller måne med radius R_m i en afstand d (som luminositetsafstand) fra Solen og med en albedo-værdi på A vil absorbere energien

$$L_{\text{abs}} = \frac{R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 \pi R_m^2}{d^2} (1 - A), \tag{1.3}$$

hvor $R_\odot$ og $T_\odot$ er hhv. radius og temperatur af Solen. *Hint: man kan sige, at den del af planeten eller månen der er vendt mod Solen udgør et areal givet ved πR_m^2.*

2) Hvis en måne eller planet roterer hurtigt, udsender den energi givet ved luminositeten L_{uds} i ligning 1.25 i kompendiet. Solen er en stjerne i termisk ligevægt, så vi kan derfor skrive $L_{\text{abs}} = L_{\text{uds}}$. Vis, at temperaturen på overfladen af en planet eller måne, T_m, kan udtrykkes som

$$T_m = T_\odot \left(\frac{1-A}{4}\right)^{1/4} \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^{1/2} \tag{1.4}$$

Hint: start med at sætte $L_{abs} = L_{uds}$.

3) Saturns måne Mimas er placeret i en elliptisk bane omkring Saturn og massen af Mimas er $M_{\text{Mimas}} = 3{,}751 \cdot 10^{19}$ kg. Derudover er månens albedo $A_{Mimas} = 0,962$, mens Solens overfladetemperatur er $T_\odot = 5778$ K, Solens radius er $R_\odot = 6{,}955 \cdot 10^5$ km, og middelafstanden mellem Mimas og Solen er $d_{\text{Mimas}} = 1{,}43 \cdot 10^9$ km.
Beregn ud fra oplysningerne en teoretisk temperatur på overfladen af Mimas. Gøre rede for dine antagelser.

4) Cassini-rumsonden vurderede temperaturen på overfladen af Mimas til at være ca. 65 K - hvad kan forskellen mellem den teoretiske og den observede temperatur skyldes?

• Opgave 7: Skalafaktor

Temperaturen af den kosmiske mikrobølgebaggrund er i dag 2.73 K. Strålingen blev udsendt ved "rekombinationen", hvor universet var koldt nok til at elektroner kunne binde sig til atomerne. Det var en mindre exciteret tilstand, så atomerne udsendte energi som fotoner. Man kan måle, at det har krævet en temperatur på maks 3000 K. Brug at temperaturen udviklede sig som

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)} \tag{1.5}$$

til at finde ud af, ved hvilken rødforskydning rekombinationen fandt sted.

••• Opgave 8: Fladt univers med stof

Forestil dig et fladt univers kun med stof.

1) Opskriv densitetsparametrene.

2) Opskriv skalafaktoren som funktion af tid.

3) Du står i nutiden $t_0 = 13,8$ mia. år og kigger på himlen. For en galakse med $z = 1$, hvor længe skal du så observere den før rødforskydningen ændres med en 10^6.-del?

••• Opgave 9: Kosmologiske parametre

1) Opskriv Friedmannligningen, hvor du indsætter densiteterne af de forskellige komponenter. Se bort

fra $\frac{\Lambda}{3}$-leddet, nu hvor du inkluderer densiteten af kosmologisk konstant i stedet.
Hvad er H^2 som funktion af de nuværende værdier af parametrene?

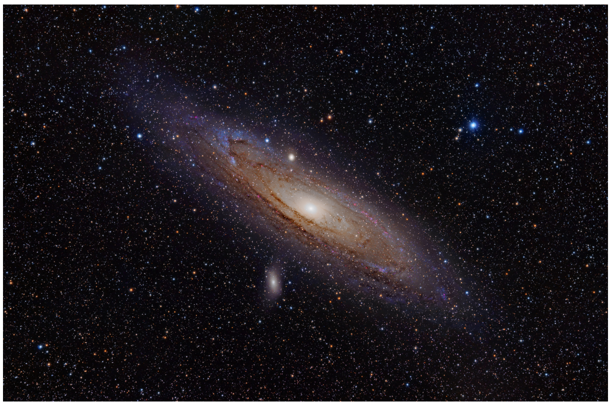
2) Betragt nu vores univers, der er fladt. Hvornår bestod universet 50 % af stråling og 50 % stof? Mørk energi var der så lidt af, at det kunne negliceres dengang. Antag at skalafaktoren kun udvikler sig baseret på mængden af stråling og at universets nuværende alder er 13, 8 mia. år.

3) I virkeligheden sluttede den strålingsdominerede periode 47.000 år efter big bang. Hvorfor giver forrige delopgave noget andet?

4) Hvor meget kosmologisk konstant ρ_Λ var der dengang?

Opgave 10: Andromeda-galaksen

Andromeda-galaksen eller Messier-31 (M31) er den nærmeste spiralgalakse, og den største galakse i den



Figur 1.5

Lokale Gruppe, som er en samling af ca. 50 galakser, heriblandt vores egen, Mælkevejen.

1) Ligesom Mælkevejen er Andromedagalaksen en spiralgalakse, hvor alting kan antages at bevæge sig rundt om centrum i en cirkelbevægelse. Fra målinger på galaksen vurderes rotationshastigheden $v_{rot}(r)$ at vokse i de inderste få kpc fra centrum, hvorefter den flader ud og bliver konstant $v_{rot}(r) = v_{rot,max}$. Det vurderes, at $v_{rot,max} = 230\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.
Giv et estimat af massen af Andromedagalaksen inden for radius $R = 100\,\mathrm{kpc}$ i enheder af Solens masse $M_\odot = 1{,}9891 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

2) Det observerede lys fra Andromeda har en rødforskyning på $z = -0.001$. Hvad er Hubbleafstanden til galaksen, fundet ved hjælp af Hubbles lov? Antag Hubblekonstanten er $H_0 = 70\mathrm{km\ s^{-1}Mpc^{-1}}$.

3) Gennem andre metoder har man fundet afstanden til 2,5 mio. lysår. Hvornår støder Andromeda og Mælkevejen sammen? Hvad tror du, det kommer til at betyde? Antag hastigheden er konstant, og Andromeda har direkte kurs mod os.

Opgave 11: Betelgeuse

Betelgeuse er en af de mest lysstærke stjerner på nattehimlen og findes i stjernebilledet Orion. Radius af Betelgeuse er målt til 1200 gange Solens radius, $R_\odot = 6{,}958 \cdot 10^5$ m, med en overfladetemperatur på $T_B = 3300$ K, mens Solens overfladetemperatur er $T_\odot = 5778$ K.

1) Bestem Solens og Betelgeuses luminositet i enheden W, og enheder af Solens luminositet i tilfældet Betelgeuse.

2) Afstanden fra jorden til Betelgeuse er $d_B = 642{,}5$ ly. Bestem fluxen på jorden fra Betelgeuse og gør rede for nødvendige antagelser.

3) Afstanden fra jorden til Solen er $d_\odot = 1$ AU. Hvor langt fra Betelgeuse er fluxen den samme, som fluxen fra solen er på jorden?

4) Voyager 1 satelitten er i dag $d_V = 139$ AU fra Solen og den stjerne, som er nærmest jorden, Proxima Centauri, befinder sig i afstanden $d_{PC} = 4{,}3$ ly. Hvordan er afstanden fra før sammenlignet med disse?

- **Opgave 12: Massen af Solsystemet**

Planeten Neptun, Solsystemets yderste planet, bevæger sig i en bane, der kan antages cirkulær, med en baneradius på $R = 30$ AU og en periode på $P = 164{,}8$ yr.

1) Bestem Neptuns gennemsnitlige banefart idet perioden er tiden det tager at gennemløbe cirkelbanen.

2) Estimer den totale masse af solsystemet og sammenlign med Solens masse.

Kapitel 2

Astrofysik Facitliste

Astrofysik

●● Opgave 1: Rødforskydning af kvasar

1) nm er $10^{-9}m = 10 \cdot 10^{-10}$, så H-$\alpha$-linjen er ved ca. 6560 Å. På figuren er det ved omkring 7600 Å, dvs. bølgelængden er blevet større, så lyset er rødforskudt. Altså må kvasaren bevæge sig væk fra os.

2) Den radielle hastighed er beskrevet af rødforskydningen. Rødforskydningen er

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{7600 - 6560}{6560} = 0,159. \tag{2.1}$$

Det er lavt, så vi approksimerer hastigheden til

$$v = z * c = 0,159 \cdot 3 \cdot 10^8 = 4,7 * 10^7 m/s \tag{2.2}$$

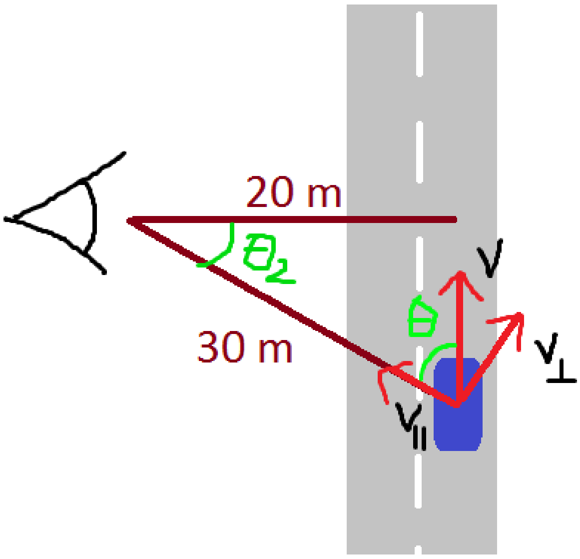
Regner du det præcist, giver det nogenlunde det samme.
3) $\Delta\lambda \approx 200$, så det giver $v = 0.015c = 4,5 * 10^6 m/s$.

● Opgave 2: Dopplerforskydning

1)
2) Den radielle hastighed er den parallele komponent med synsvinklen. Vi ser en retvinklet trekant og bruger

$$cos(\theta) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{v_{radiel}}{v} \tag{2.3}$$

$$v_{radiel} = vcos(\theta) \tag{2.4}$$



Der dannes også en retvinklet trekant af vejen, afstanden til vejen og afstanden til bilen. I grader giver det en vinkel på

$$cos(\theta_2) = \frac{20}{30} \tag{2.5}$$

$$\theta_2 = cos^{-1}\left(\frac{20}{30}\right) = 48 \tag{2.6}$$

De to vinkler indgår begge i en retvinklet trekant, så

$$180 = \theta + \theta_2 + 90 \tag{2.7}$$

$$\theta = 90 - \theta_2 = 42 \tag{2.8}$$

Vi indsætter og får

$$v_{radiel} = 50km/t * cos(42) = 50km/t * 0.74 = 37km/t \tag{2.9}$$

Hvis du ikke får det samme, så prøv at regne alt i radianer, da det er simplere.

3) Du står stille, så $v_{obs} = 0$. v_{kilde} er den radielle hastighed, som lige skal omregnes til km/t:

$$37km/t = 37\frac{10^3 m}{60 * 60s} = \frac{37}{3.6}m/s = 10,3m/s \tag{2.10}$$

Så indsætter vi i

$$f_{obs} = \frac{340m/s + 0}{340m/s - 10,3}800Hz = 825Hz \tag{2.11}$$

Bemærk hastigheden er negativ i forhold til observatøren.

Opgave 3: Galaksen M87 i Virgohoben

1) Hubble loven giver, under antagelse af at M87 bevæger sig væk fra jorden som følge af universets udvidelse, at

$$v = H_0 D$$

Idet $z << 1$ kan den ikke relativistiske approksimation benyttes

$$z \approx \frac{v}{c}$$

Komineres de to ligninger fås

$$D_{\mathrm{M87}} = \frac{zc}{H_0} = 18{,}7\,\mathrm{Mpc}$$

2) Under antagelse af at strålingen er udsendt isotropt fra M87, så den samlede luminositet

$$L_{\mathrm{M87}} = 4\pi D_{\mathrm{M87}}^2 \cdot f_{\mathrm{M87}}$$

Estimatet for antallet af stjerner i M87, N_{M87}, bliver så

$$N_{\mathrm{M87}} = \frac{L_{\mathrm{M87}}}{L_\odot} = 4{,}01 \cdot 10^{10}$$

Opgave 4: Afstandsbedømmelse i nabolaget

1) Vi ved at

$$m - M = 5\log\left(\frac{d_L}{\mathrm{pc}}\right) - 5$$

Og vi vil gerne bestemme d_L, så den isoleres.

$$\begin{aligned}
\frac{m - M + 5}{5} &= \log\left(\frac{d_L}{\mathrm{pc}}\right) \\
\Rightarrow 10^{\frac{m-M+5}{5}} &= 10^{\log\left(\frac{d_L}{\mathrm{pc}}\right)} \\
&= \frac{d_L}{\mathrm{pc}} \\
\Rightarrow d_L &= 10^{\frac{m-M+5}{5}} \\
&\approx 56754\ \mathrm{pc}
\end{aligned}$$

2) Hvis udslukningen er 60% vil kun 40 % af lyset nå os. Det betyder også at

$$
\begin{aligned}
0,40 f_{faktisk} &= f_{obs} \\
f_{faktisk} &= \frac{f_{obs}}{0,40}
\end{aligned}
$$

Vi har nu udtrykket

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$$

Hvor f_1 erstattes med med $f_{faktisk}$.

$$m_{faktisk} - m_{obs} = -2,5 \log\left(\frac{f_{obs}}{0,40 f_{obs}}\right)$$

Det betyder

$$
\begin{aligned}
m_{faktisk} &= -2,5 \log\left(\frac{1}{0,40}\right) + m_{obs} \\
&= 16,5
\end{aligned}
$$

En mindre magnitude betyder, at stjernen lyser klarere.
Så for at bestemme den faktisk afstand indsættes den faktiske tilsyneladende magnitude i udtrykket fra delopgave 1.

$$d_{faktisk} = 35809 \text{ pc}$$

- **Opgave 5: Afstande**

1) Isolér D_M i hvert udtryk.

$$D_M = \frac{D_L}{1+z} \tag{2.12}$$

$$D_M = D_A(1+z) \tag{2.13}$$

Resultaterne sættes lig hinanden

$$\frac{D_L}{1+z} = D_A(1+z) \tag{2.14}$$

$$D_L = D_A(1+z)^2 \tag{2.15}$$

2) Ved $z = 1$ er $D_C \approx 3200Mpc$ og derfor

$$D_L = D_M(1+z) = 3200Mpc \cdot 2 = 6400Mpc \tag{2.16}$$

$$D_A = \frac{D_M}{1+z} = 3200Mpc/2 = 1600Mpc. \tag{2.17}$$

Ved $z = 9$ er $D_C \approx 9200Mpc$, så

$$D_L = D_M(1+z) = 9200Mpc \cdot 10 = 92000Mpc \tag{2.18}$$

$$D_A = \frac{D_M}{1+z} = 9200Mpc/10 = 920Mpc. \tag{2.19}$$

Gamle objekter, der har bevæget sig fra os længere tid, har altså en større luminositetsafstand, men en lavere vinkelafstand ved høje rødforskydninger. Man skulle ellers tro objekter så mindre ud på himlen, jo længere væk de var, hvilket er rigtigt indtil omkring $z = 1,6$. I det tidlige univers var galakserne tættere på hinanden, så de fyldte meget på himlen for hinanden, og derfor er deres lys spredt ud over et stort område.

3) Hvis vi approksimerer $z \approx \frac{v}{c}$, får vi overlyshastigheder, så det går ikke.

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \tag{2.20}$$

$$(z+1)^2 = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \tag{2.21}$$

så vi skal løse et system på formen $y = \frac{1+x}{1-x}$, hvor $y = (z+1)^2$ og $x = \frac{v}{c}$. Man kan omformulere det til $x = \frac{y-1}{y+1}$. Derfor må

$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \tag{2.22}$$

$$v = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} c = \frac{(10+1)^2 - 1}{(10+1)^2 + 1} = 0,98c. \tag{2.23}$$

Så svaret er 98 % af lysets fart i vakuum.

Opgave 6: Himmellegemers overfladetemperatur

1) For at kunne komme frem til udtrykket starter vi med at se på fluxen, altså det lys, som vi modtager. Fluxen er givet ved

$$\begin{aligned} f &= \frac{L_\odot}{4\pi d^2} \\ &= \frac{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{4\pi d^2} \\ &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^2 \sigma T_\odot^4 \end{aligned}$$

Vi ser nu på den energi som planeten absorberer. Vi antager at vi har en jævn kugle, som energien fordeles jævnt udover. Derudover skal vi have albedoen i spil, i det den fortæller os hvor meget lys, der bliver reflekteret.

$$
\begin{aligned}
L_{\text{abs}} &= \pi R_m^2 f \,(1 - A) \\
&= \pi R_m^2 \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^2 \sigma T_\odot^4 \,(1 - A) \\
&= \frac{\pi R_m^2 R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{d^2} \,(1 - A)
\end{aligned}
$$

2) I det Solen er en stjerne i termisk ligevægt, det betyder at der bliver udsendt lige så meget energi som der bliver absorberet.

$$
L_{\text{uds}} = 4\pi R_m^2 \sigma T_m^4
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\text{uds}} &= L_{\text{abs}} \\
\Rightarrow 4\pi R_m^2 \sigma T_m^4 &= \frac{\pi R_m^2 R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{d^2} \,(1 - A) \\
\Rightarrow 4 T_m^4 &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^2 T_\odot^4 \,(1 - A) \\
\Rightarrow T_m^4 &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^2 \frac{(1 - A)}{4} T_\odot^4 \\
\Rightarrow T_m &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1 - A)}{4}\right)^{\frac{1}{4}} T_\odot
\end{aligned}
$$

3) Vi bruger udtrykket, som vi lige har fundet og bestemmer temperaturen på overfladen.

$$
T_m \approx 40\,\mathrm{K}
$$

4) Vi antager at Mimas roterer hurtigt. Det har den betydning, at vi antager at temperaturen er den samme på over det hele, der vil altså ikke være noget ”dag og nat”. Den teoretiske værdi er bestemt til 40 K og temperaturen er blevet vurderet til 65 K. Det tyder derfor på, at vores antagelse om hurtigt rotation muligvis ikke er så god. Hvis den roterer langsomt, vil det betyde at temperaturen ikke er den samme overalt, hvilket kan forklare hvorfor temperaturen er blevet vurderet til 65 K.

•• Opgave 7: Skalafaktor

1) Vi omskriver formlen og indsætter temperaturerne

$$a(t) = \frac{T_0}{T(t)} \tag{2.24}$$

$$a(t) = \frac{2.73K}{3000K} \approx 10^{-3} \tag{2.25}$$

Så kan denne formel bruges:

$$a(t) = \frac{1}{1+z} \tag{2.26}$$

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 \tag{2.27}$$

$$z = \frac{1}{10^{-3}} - 1 \approx 10^3 \tag{2.28}$$

Så rekombinationen skete ved $z \approx 1000$.

●● Opgave 8: Fladt univers med stof

1) Hvis universet er fladt, er $\Omega_{total} = 1$. Består det kun af stof, må $\Omega_m = 1$ og resten er 0.

2) Skalafaktoren er

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3\omega)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{2.29}$$

da $\omega = 0$ for stof.

3) En 10^6.-del af 1 er 10^{-6}. Baseret på $z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1$ kan ændring i rødforskydning opskrives

$$\Delta z = |\frac{a(t_0)}{a(t_0)} - \frac{a(t_0)}{a(t_1)}| = |1 - \frac{1}{a(t_1)}| \tag{2.30}$$

$$\tag{2.31}$$

hvor vi sætter $a(t_0) = 1$ og t_1 er tidspunktet, vi stopper med at observere. Det ligger efter t_0, så $|1 - \frac{1}{a(t_1)}| = 1 - \frac{1}{a(t_1)}$ Vi isolerer $a(t_1)$

$$a(t_1) = \frac{1}{1-\Delta z} = \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{2/3} \tag{2.32}$$

$$\frac{t_1}{t_0} = \left(\frac{1}{1-\Delta z}\right)^{3/2} \tag{2.33}$$

Vi indsætter ændringen i z

$$\frac{t_1}{t_0} = \left(\frac{1}{1-10^{-6}}\right)^{3/2} = 1.0000015 \tag{2.34}$$

Så vi skal vente til tidspunktet $t_1 = t_0 + \Delta t = 1.0000015 * t_0$, hvor t_0 er universets nuværende alder.

$$\Delta t = (1.0000015 - 1)t_0 = 0.0000015 t_0 = 0.0000015 * 13.8 * 10^9 \text{år} - = 20700 \text{år} \tag{2.35}$$

Opgave 9: Kosmologiske parametre

1)

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\kappa c^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.36}$$

bliver til

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_R + \rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{\kappa c^2}{a^2} \tag{2.37}$$

Så bruger vi $\rho_R = \rho_{R,0} a(t)^{-4}$, $\rho_m = \rho_{m,0} a(t)^{-3}$ og $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}$:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\frac{\rho_{R,0}}{a(t)^4} + \frac{\rho_{m,0}}{a(t)^3} + \rho_\Lambda) - \frac{\kappa c^2}{a^2} \tag{2.38}$$

2) Bidraget fra stråling skal være lige så stort som det for stof

$$\rho_R = \rho_m \tag{2.39}$$

$$\frac{\rho_{R,0}}{a(t)^4} = \frac{\rho_{m,0}}{a(t)^3} \tag{2.40}$$

$$\rho_{m,0} a(t) = \rho_{R,0} \tag{2.41}$$

$$a(t) = \frac{\rho_{R,0}}{\rho_{m,0}} = 0.000267 \tag{2.42}$$

Så bruger vi

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3\omega)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \tag{2.43}$$

$$t = a(t)^2 t_0 = 0.000267^2 \cdot 13.8 \cdot 10^9 \text{år} = 982 \text{år} \tag{2.44}$$

3) Det giver noget ca. 50 gange for lavt, da det er en dårlig approksimation at antage universets størrelse udvikler sig som om det består af stråling. Stof og mørk energi har enorm betydning for universets alder t_0.

4) Mængden af kosmologisk konstant er konstant.

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c = 0.6911 \cdot 8.6 \cdot 10^{-27} kg/m^3 = 5.9 \cdot 10^{-27} kg/m^3 \tag{2.45}$$

Opgave 10: Andromeda-galaksen ●●

1) Ligning 1.22 i kompendiet giver at

$$v^2 = \frac{GM(R)}{R}$$

Her isoleres $M(R)$ som er massen af af den del af Andromeda-galaksen, som ligger indenfor afstanden R fra centrum, og de opgivne værdier indsættes

$$M(R) = \frac{v^2 R}{G} = 2{,}45 \cdot 10^{42}\ \mathrm{kg} = 1{,}23 \cdot 10^{12}\ \mathrm{M}_\odot$$

2)

$$D_H = \frac{v}{H_0} \tag{2.46}$$

Vi skal bruge den radielle hastighed

$$v \approx zc = -0.001 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s = -3 \cdot 10^5 m/s \tag{2.47}$$

og omskriver Hubble-konstanten en lille smule

$$H_0 = 70kms^{-1}Mpc^{-1} = 7 \cdot 10^4 ms^{-1}Mpc^{-1}. \tag{2.48}$$

Vi indsætter

$$D_H = \frac{-3 \cdot 10^5 ms^{-1}}{7 \cdot 10^4 ms^{-1}Mpc^{-1}} = -3/7 \cdot 10Mpc = -4,2Mpc. \tag{2.49}$$

Så Hubble-afstanden bryder sammen og giver noget negativt.

3) Vi omregner lysår til meter

$$2.5 \cdot 10^6 \text{lysår} = 2.5 \cdot 10^6 \cdot 9,46 \cdot 10^1 5m = 23.7 \cdot 10^2 1m \tag{2.50}$$

$$\frac{23.7 \cdot 10^2 1m}{3 \cdot 10^5 m/s} = 7.9 \cdot 10^1 6s = 2,5 \cdot 10^9 \text{år} \tag{2.51}$$

Så det vil tage 2,5 mia. år, hvis vi ser bort fra accelerationen og andre effekter. I virkeligheden er det 4-5 mia. år. Stjernerne er ligger meget spredt i begge galakser, så vi kommer ikke til at støde ind i andre. Når gassen fra galakserne kolliderer varmes det op og vi vil se en masse ny stjernedannelse. Galakserne vil med tiden smelte sammen til en elliptisk galakse, der har opbrugt det meste gas, så der ikke dannes flere stjerner.

Opgave 11: Betelgeuse

1) Hvis vi antager at Betelgeuse er et sfærisk sortlegeme, der udsender sortlegemestråling kan vi beregne dens luminositet vha. formel (1.25) fra kompendiet

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 = 3{,}839 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$$
$$L_B = 4\pi R_B^2 \sigma T_B^4 = 5{,}886 \cdot 10^{31}\,\mathrm{W} = 1{,}533 \cdot 10^5\,\mathrm{L}_\odot$$

2) Fluxen fra et isotropt udstrålende stortlegeme er ved negligering af ekstinktion

$$f_B = \frac{L_B}{4\pi d_B^2} = 1{,}27 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

3) Fluxen fra solen på jorden, $L_\odot$ er, under samme antagelser som før, givet som

$$f_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2}$$

hvorfor

$$f_\odot = f \quad \Rightarrow \quad \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2} = \frac{L_B}{4\pi d^2}$$
$$\Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{L_B}{L_\odot}} d_\odot = 392\,\mathrm{AU}$$

4) Idet $d \approx 2.8 \cdot d_V$ ville man skulle næsten 3 gange længere væk fra Betelgeuse end Voyager 1 er fra Solen, hvilket er en afstand meget større end solsystemes radius, da Voyager 1 er omkring udkanten af solsystemet. Afstanden er dog ikke sammenlignelige med den til Proxima Centauri, fordi d ca. er 1.4‰af d_{PC}.

Opgave 12: Massen af Solsystemet

1) Idet Neptuns bane er antaget cirkulær er den tilbagelagte afstand, D, iløbet af én periode

$$D = 2\pi R$$

hvorved den gennemsnitlige banefart bliver

$$v = \frac{d}{P} = \frac{2\pi R}{P} = 5{,}42\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

2) For himmelegemer i cirkulære baner er

$$v^2 = \frac{GM(R)}{R}$$

hvorved massen af solsystemet approksimeres til

$$M(R) = \frac{Rv^2}{G} = \frac{4\pi^2 R^3}{GP^2} = 0{,}994\,\mathrm{M}_\odot$$

Kapitel 3

Laserfysik Opgaver

Rettelser til kompendiet: I ligning 2.40, 2.41 og i det første led i ligning 2.43 skal L i nævneren slettes!

• **Opgave 1: Lasere med Forskellige Farver**
Forestil dig at have to lasere, hvor den enes lys er rødt og den andens er grønt.

1) Hvad er forskellen mellem de atomer, der bruges til at genere hhv. rødt og grønt lys?

2) Hvilken af de to har den højeste frekvens?

•• **Opgave 2: Partikel–Bølge–Dualitet**
Man kan i et meget simpelt forsøg vise at lys også har bølgeegenskaber som en konsekvens af partikel–bølge–dualiteten. Eksperimentet hedder *dobbeltspalte eksperimentet*, og I har måske hørt om det før. I eksperimentet bruger man en plade med to spalter, hvorpå man lyser med en lyskilde (f.eks. en laser). Man ser at lyset efter pladen har spredt sig ud i forskellige ordner, man ser altså en række af lysprikker, et såkaldt inteferensmønster.

1) Hvorfor giver lysets bølgeegenskaber anledning til et inteferensmønster?

2) Hvordan vil du forvente at lyset ser ud på en væg efter det har været gennem pladen, hvis lyset kun har partikelegenskaber?

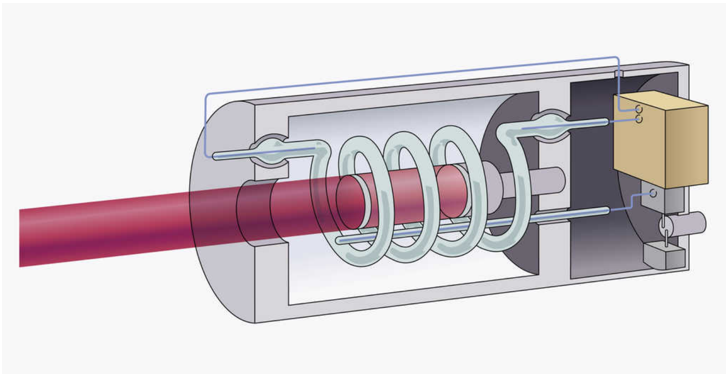
•• **Opgave 3: Populationinversion**
Som beskrevet i Laserfysik skal vi opnå populationinversion i lasersystemet, hvor størstedelen af atomerne befinder sig i en exiceret tilstand fremfor i grundtilstanden, således at stimuleret emission kan dominere.

1) Overbevis dig selv om, at de processerne stimuleret absorption og stimuleret emission er de inverse af hinanden (den modsatte proces)

2) Hvorfor kan man så ikke bruge et 2−niveau system for at lave en laser?

Opgave 4: Verdens Første Laser - Rubin Laseren

En rubinlaser – verdens første laser – er en krystallaser, som pumpes af en blitzlampe udenom krystallen. Krystallen består af aluminiumoxid (Al_2O_3), hvori der er tilsat en meget lille mængde krom-ioner (Cr^{3+}). Det er overgange i Cr^{3+}, som udsender laserens røde lys.



Figur 3.1: Skematisk tegning af en rubin-laser

1) Overvej, hvorfor lampen er formet som en spiral rundt om krystallen (se figur 3.1).

2) Figur 3.2 viser de relevante energi-niveauer for Cr^{3+}. Fotonerne fra blitzlampen pumper atomerne op i de højere energiniveauer E_3 og E_4, som henfalder til to niveauer, som ligger meget tæt på hinanden, samlet kaldet E_2. Levetiden af E_2-niveauet er længere end levetiden af atomet i E_3 og E_4, så antallet at atomer i E_2 kan blive højere end i de andre niveauer, inklusiv grundtilstanden pga. pumpningen fra blitzlampen. Derfor kan der udsendes fotoner ved hjælp af stimuleret emission fra E_2, som udsendes med to røde bølgelængder (se Figur 3.2). Hvilken energi bærer laserens udsendte fotoner (ca.)?

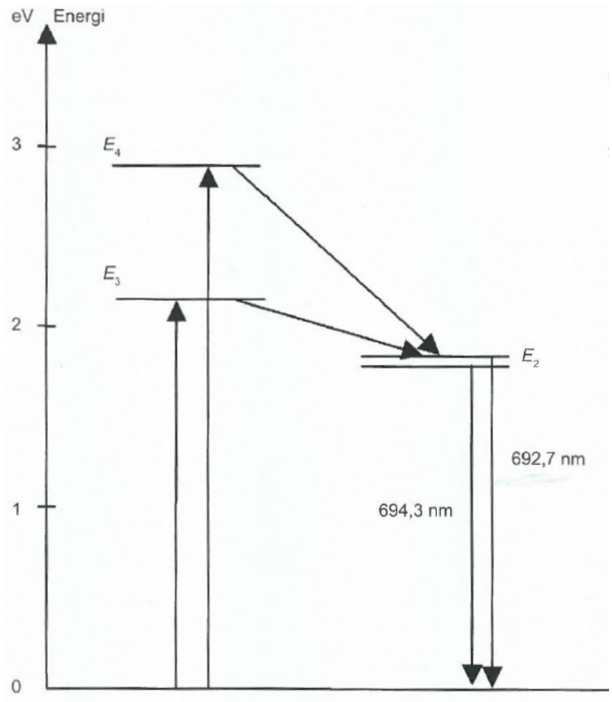
svar: $\approx 2,9 \cdot 10^{-19}$J

3) En lasers rubinkrystal har form som en cylinder med længde $L = 6$cm og diameter $D = 0,5$cm. I krystallen er $0,035‰$ af aluminiumatomerne udskiftet med Cr^{3+}. Hvor mange Cr^{3+}-atomer findes i krystallen? Du skal bruge følgende oplysninger: tætheden af aluminium er $\rho_{Al} = 2,7\text{g/cm}^3$, den molære vægt af aluminium er $M_{Al} = 27\text{g/mol}$ og man relaterer antallet af atomer per mol af et stof gennem Avogadros tal: $R_A = 6,022 \cdot 10^{23}\text{mol}^{-1}$. *Hint: find først antal aluminiumatomer indeholdt i cylinderens volumen.*

svar: $\approx 2,5 \cdot 10^{19}$

4) En rubinlaser bliver ofte for varm til at udsende lys kontinuert, og udsender derfor i stedet lyset i pulser. Forestil dig, at alle Cr^{3+}-atomerne i laseren fra sidste delopgave (se svaret nederst i opgaven) er pumpet så de nu befinder sig i E_2, hvorefter laseren udsender alle fotoner med én puls med varighed $2,5 \cdot 10^{-6}$s. Hvad er effekten af én laserpuls?

5) En rubinlaser har ingen spejle, men krystallens ender er slebet for at kunne reflektere fotonerne og



Figur 3.2: De relevante energi-niveauer i Cr^{3+}.

skabe stående bølger. Hvor mange hele antal bølgelængder svarer længden $L \approx 6$cm af en rubinkrystal til for laserlys med $\lambda = 694,4 \cdot 10^{-9}$m?. Hvor mange knudepunkter opstår i de stående bølger?

6) Kan du forestille dig, hvorfor det er vigtigt at holde en laser ved stabil temperatur?

•• Opgave 5: Approksimation af Gevinstkoefficient

Denne opgave kræver brug af opgave 8 fra matematik opgaverne.

Såfremt reflektiviteten af spejlene i en laserkavitet er stor, dvs. $r_1 r_2 > 0,9$ kan gevinstkoefficienten $g(\nu)$ (ligning 2.20) approksimeres til ligning 2.21.

1) Beregn hvordan ligning 2.20 approksimeres til ligning 2.21. *Hint: antag $r_1 r_2 \approx 1 - x$ og sæt $a = 0$.*

•• Opgave 6: Flere–Niveau systemer

I Laserfysik er et 3– og 4–niveau lasersystem præsenteret. Det gives at pumperaten ved tærskelværdien for systemerne er hhv.

$$(P_t)_3 = \frac{N_T + \Delta N_t}{N_T - \Delta N_t}\Gamma_{21} \quad \text{og} \quad (P_t)_4 = \frac{\Delta N_t}{N_T - \Delta N_t}\Gamma_{21}, \tag{3.1}$$

hvor N_T er den totale population og ΔN_t er $N_2 - N_1$ ved tærskelværdien.

1) Hvilket system kræver mindst pumpning? Og hvorfor ser vi på pumperaterne ved tærskelværdien?

2) Hvilket system ville du foretrække? Hvorfor?

• **Opgave 7: Kavitet**

Et medium har en længde på 10 cm og en gevinstkoefficient på $0,025\text{cm}^-1$. To spejle med samme reflektivitet placeres i enderne af mediet. Vi antager at tabene ved spejlene pga. absorption og spredning er så små, at de kan negligeres.

1) Beregn reflektiviteten, der er nødvendig for at lasing kan opnåes.

2) Hvad er transmissionskoefficienten?

3) Er det optimalt at have to spejle med samme reflektivitet i en laser system? Hvorfor, hvorfor ikke?

•• **Opgave 8: Foton Output**

En kavitet for en He-Ne laser(632,8 nm) er 50 cm med reflektivitet $r_1 = 1$ for det ene spejl og $r_2 = 0,98$ for det andet spejl. Vi antager at tabene er meget små. Effekten (output power) af laseren er $Pwr = 10$ mW.

1) Hvor mange fotoner udsendes pr. sekund?

2) Hvad er antallet af fotoner i kaviteten ved tærskelværdien?

• **Opgave 9: Pulserende eller Kontinuert?**

En laser, der bruges til at skære i elementer, som f.eks. plastik har en væsentlig større intensitet end en laserpointer, der bruges i undervisningen (heldigvis!).

1) Hvis du skulle bygge begge lasere, ville du så lave dem kontinuerte eller pulserende? Hvorfor?

Kapitel 4

Laserfysik Facitliste

• Opgave 1: Lasere med Forskellige Farver

1) Atomerne har forskellige overgangsenergier. Bølgelængden afhænger af energien, og da rødt og grønt lys ikke har samme bølgelængde, må overgangsenergierne derfor være forskellige for atomerne, der bruges til at lave hhv. rødt og grønt lys.

2) Rød har længere bølgelængde end grøn, og grøn har derfor en større frekvens, da bølgelængde og frekvens er omvendt proportionale.

•• Opgave 2: Partikel–Bølge–Dualitet

1) Bølger kan intefere, som vi kender det fra stående bølger på en snor. De kan inteferere konstruktivt eller destruktivt. Ved konstruktiv inteferens vil man se en lysplet, da to bølger "lægges sammen", hvor i mod man ved destruktiv inteferens ikke vil se en lys plet, da bølgerne her vil udslukke hinanden.

2) Hvis lyset kun har partikelegenskaber kan man tænke på lys som små kugler, og man vil derfor forvente kun at se to lysprikker, der vil opstå pga. de to spalter i pladen.

•• Opgave 3: Populationinversion

1) Se på billedet for stimuleret emission. Vend nu processen om, dvs. Elektronen nu ligger i grundtilstanden. I denne omvendte proces kommer der altså to fotoner ind, hvoraf en af dem absorberes af elektronen, således at den hopper op i den exciterede tilstand. Den anden foton fortsætter bare og har ingen effekt. Hvis du nu sætter en ekstra foton ind i billedet for stimuleret absorption er det præcis det samme billede, som lige beskrevet som den omvendte proces af stimuleret emission.

2) Da vi nu har argumenteret for, at stimuleret emission og stimuleret absorption er de omvendte processer af hinanden, må de også ske med samme sandsynlighed. Lige stor sandsynlighed for de to processer betyder at man kan sige at hver gang ét atom exciteres, så henfalder et andet atom. Derfor kan størstedelen af atomerne aldrig være i en exciteret tilstand, og stimuleret emission kan ikke dominere. Derfor kan 2-niveau-systemer ikke bruges til at skabe laserlys med.

Opgave 4: Verdens Første Laser – Rubin Laseren

1) Hvis lampen er formet rundt om kaviteten, så belyser den fra så mange retninger som muligt, hvilket effektivt kan pumpe systemet.

2) På figuren ses det, at de udsendte fotoner har bølgelængderne $\lambda = 692,7\text{nm}$ og $\lambda = 694,3\text{nm}$ (1nm = 1 nanometer = 10^{-9}m). Vi tager gennemsnittet af de to for at udregne den gennemsnitlige energi af en foton.

$$\begin{aligned} E_{\text{foton}} &= h \cdot \frac{c}{\lambda} && (4.1) \\ &= h \frac{c}{(692,7 \cdot 10^{-9}\text{m} + 694,3 \cdot 10^{-9}\text{m})/2} && (4.2) \\ &\approx 2,9 \cdot 10^{-19}\text{J} && (4.3) \end{aligned}$$

3) Hvis man vil finde antal aluminium-atomer i en volumen skal man bruge:

$$\#\text{ atomer} = (\rho_{\text{Al}} \cdot V)/M_{\text{Al}} \cdot R_A, \tag{4.4}$$

($\rho_{\text{Al}} \cdot V$ giver antal gram aluminium i cylinderen, og deler man med den molare masse, så ved man hvor mange mol, der findes i cylinderen. Ved at gange med Avogadros tal, R_A, så finder man antal atomer). Volumenet af cylinderen er $V = \pi(D/2)^2 \cdot L$. Antal aluminium-atomer er derfor

$$\#\text{ Al-atomer} \approx 7 \cdot 10^{22}. \tag{4.5}$$

Idet vi får at vide at $0,035\%$ af aluminium-atomerne er udskiftet med Cr^{3+}, så finder vi antal Cr-atomer som:

$$\begin{aligned} \#\text{Cr-atomer} &= \#\text{Al-atomer} \cdot \frac{0,035}{100} && (4.6) \\ &\approx 2,5 \cdot 10^{19}. && (4.7) \end{aligned}$$

4) Effekten er udsendt energi per sekund. Hvis alle Cr-atomerne udsender lys på én gang, så er den samlede puls-energi $E_{\text{puls}} = E_{\text{foton}} \cdot \#\text{Cr-atomer}$, hvor vi bruger at vi fandt energien af en foton i delopgave 2. Effekten findes:

$$\begin{aligned}
P_{\text{puls}} &= \frac{E_{\text{puls}}}{t_{\text{puls}}} && (4.8)\\
&= \frac{E_{\text{foton}} \cdot \#\text{Cr-atomer}}{t_{\text{puls}}} && (4.9)\\
&= \frac{2,9 \cdot 10^{-19}\text{J} \cdot 2,5 \cdot 10^{19}}{2,5 \cdot 10^{-6}\text{s}} && (4.10)\\
&= 2,9\text{MW} && (4.11)
\end{aligned}$$

5) For en krystal med længde $L = 6\text{cm}$ og $\lambda = 694,4 \cdot 10^{-9}\text{m}$ så er antal bølgelængder ca.

$$\frac{L}{\lambda} = 86406 \tag{4.12}$$

Vi ved at der opstår stående bølger i kaviteten, og at der derfor gælder:

$$\begin{aligned}
L &= n\frac{\lambda}{2} && (4.13)\\
\rightarrow n &= 2\frac{L}{\lambda} && (4.14)\\
&= 172812 && (4.15)
\end{aligned}$$

Ved f.eks. at kigge på figur 4.3 så ses det, at antal knudepunkter er givet ved $n + 1$. Antal knudepunkter er derfor 172813.

6) Hvis materialer opvarmes eller nedkøles vil de hhv. udvide og trække sig sammen, hvilket i værste fald kan resultere i, at længden af kaviteten ændres, sådan at der ikke kan opstå stående bølger.

•• Opgave 5: Approksimation af Gevinstkoefficient

1) Ligningen der skal approksimeres er

$$g_t = -\frac{1}{2L}\ln(r_1 r_2). \tag{4.16}$$

Vi følger hintet og sætter $r_1 r_2 = 1 - x$, så

$$g_t = -\frac{1}{2L}\ln(1 - x). \tag{4.17}$$

Vi ønsker nu at approksimere funktionen med en Taylor udvikling. Vi sætter startsbetingelsen $a = 0$ jævnfør hintet, og vi ser kun på de to første led. De andre led kan også beregnes, men de bidrager kun ganske lidt.

$$f(x) \approx f(0) + x\frac{df}{dx}_{x=0} = 0 + x \cdot \frac{-1}{1-0} = -x \tag{4.18}$$

g_t bliver derfor

$$g_t = -\frac{1}{2L}(-(1 - r_1 r_2)) = \frac{1}{2L}(1 - r_1 r_2). \tag{4.19}$$

•• Opgave 6: Flere-Niveau Systemer

1) Vi ser på forholdet mellem dem for at finde ud af hvilket system, der kræver mindst pumpning.

$$\frac{(P_t)_4}{(P_t)_3} = \frac{\Delta N_t}{N_T + \Delta N_t}. \tag{4.20}$$

Det totale antal af atomer i systemet må være større end populationinversionen, så

$$(P_t)_4 << (P_t)_3. \tag{4.21}$$

For at opnå lasing kræver et 3 system mere pumpning end et 4 system. Vi ser på pumperaterne ved tærskelværdien fordi det lige akkurat er ved denne at lasing kan opnåes.

2) Med et 4 system kan vi opnå lasing med en lavere pumperate, og det er derfor at foretrække.

• Opgave 7: Kavitet

1) Da man på forhånd ikke ved om spejlene opfylder $r_1 r_2 > 0,9$ er det ikke gangbart at bruge den approksimerede version af g_t. Vi skal altså bruge

$$g_t = -\frac{1}{2l}\ln(r_1 r_2). \tag{4.22}$$

Da reflektiviteterne antages at være ens, kan vi sætte $r_1 r_2 = r^2$, som derefter isoleres.

$$g_t = -\frac{1}{2l}\ln(r^2) \Rightarrow \tag{4.23}$$

$$-2l g_t = \ln(r^2) \Rightarrow \tag{4.24}$$

$$e^{-2l g_t} = r^2 \Rightarrow \tag{4.25}$$

$$r = \sqrt{e^{-2l g_t}} \tag{4.26}$$

Indsættes tallene fås nu

$$r = \sqrt{e^{-2l g_t}} = \sqrt{e^{-2\cdot 10\,\mathrm{cm}\cdot 0{,}025\,\mathrm{cm}^{-1}}} = 0,778 \tag{4.27}$$

2) Da s antages at være 0 gælder der $r + t = 1$. Transmissionskoefficienten fås da til

$$r + t = 1 \Rightarrow t = 1 - r = 1 - 0,778 = 0,222. \tag{4.28}$$

Det vil altså sige, at 77, 8% af lyset reflekteres og 22, 2% transmitteres når lyset rammer et af spejlene.

3) Det er ikke optimalt at have to spejle med samme reflektivitet da man kun ønsker, at laserlyset skal komme ud i den ene ende. Derudover kan man heller opnå at $r_1 r_2 > 0,9$ hvis begge reflektviteter er mindre end 1.

●● Opgave 8: Foton Output

1) Vi får givet effekten (power) af laserlyset. Effekt har enheden watt, som er defineret som energi pr. tid, dvs. $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$. Fra dette kan vi se, at det er nødvendigt at dividere med en energi for at få noget pr. sekund. Altså er antallet af udsendte fotoner pr. sekund

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathrm{Pwr}}{h\nu}, \tag{4.29}$$

hvor $h\nu$ er energien af én foton

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,\frac{3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{632,8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 3,14 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{4.30}$$

Vi får så at

$$\frac{dq}{dt} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}}{3,14 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 3,14 \cdot 10^{-16}\,\frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{4.31}$$

2) Vi bruger at

$$\frac{dq}{dt} = cg(\nu)q, \tag{4.32}$$

og da vi skal beregen antallet af fotoner ved tærskelværdien er $g(\nu) = g_t$. Vi får da

$$q = \frac{dq}{dt}\frac{1}{cg_t} = \frac{\mathrm{Pwr}}{h\nu}\frac{1}{cg_t}. \tag{4.33}$$

Da $r_1 r_2 > 0,9$ kan g_t beregnes til

$$g_t = \frac{1}{2 \cdot 0,5\,\mathrm{m}}(1 - 0,98) = 0,02\,\mathrm{m}^{-1}. \tag{4.34}$$

Antallet af fotoner bliver så

$$q = 3,14 \cdot 10^{-16}\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,\frac{1}{3 \cdot 10^{8}\mathrm{m/s} \cdot 0,02\,\mathrm{m}^{-1}} = 5,2 \cdot 10^{9} \tag{4.35}$$

Opgave 9: Pulserende eller Kontinuert

1) En pulserende laser pumpes oftest hårdere fordi det kræver mere at opnå populationinversion pga. alle tabene. En kontinuert laser pumpes ikke nær så hårdt da lasersystemet ikke lider af så store tab, som en pulserende laser gør. En større pumpning giver anledning til mere stimuleret emission, der så giver anledning til mere intenst lys. Intensiteten af en pulserende laser er derfor typisk større, da et sådant lasersystem pumpes hårdere.

Kapitel 5

Relativitetsteori Opgaver

- **Opgave 1: Det Galileiske Relativitetsprincip**
Det Galileiske Relativitetsprincip siger, at Newtons bevægelseslove er ens i alle inertielle referencesystemer.
Vi forestiller os nu et tog, der kører med en konstant hastighed v ift. sporet. En passager i toget tager så en sten og slipper den fra hvile.

  1) Brug Galileis relativitetsprincip til at beskrive stenens bevægelse set fra en observatør i toget.

  2) Brug Galilei-transformationen (3.1) til at give en beskrivelse af stenens bevægelse set fra en observatør på Jorden.

- **Opgave 2: Kombination af Galileiske transformationer**
To tog kører parallelt med hinanden i x-retningen, det ene med hastighed V og det andet med hastighed U, relativt til jorden. Lad det første tog være S' og det andet S'', med deres respektive koordinater. Jorden betegnes S.

  1) Hvad er den Galileiske transformation fra $S\ (x, y, z, t)$ til $S''\ (x'', y'', z'', t'')$?

  2) Hvad er den Galileiske transformation fra S' til S''?

  3) Hvad svarer størrelsen $(U - V)$ til?

- **Opgave 3: Løbetur i Regnvejr**
En dag hvor det regner, falder dråberne ned med 2 m/s. En person løber vandret af sted med 3 m/s. Ved hvilken vinkel ift. vandret skal personen holde sin paraply for bedst muligt at skærme for regnen? (hint: Kig på regndråbernes bevægelse set fra løberens referencesystem).

• **Opgave 4: Flyvetur i Blæsevejr**

En flyvemaskine kan flyve med 500 km/t, og der er en vindhastighed på 200 km/t fra vest mod øst.

1) Flyets pilot styrer flyet mod nord. I hvilken retning bevæger flyet sig, og hvad er flyets hastighed set fra en observatør på Jorden, som betegnes S? (hint: Kig på et referencesystem S', der bevæger sig med vinden og benyt hastighedstransformationerne (3.2) til at oversætte flyets bevægelse i dette system til S).

2) I hvilken retning skal piloten styre, hvis flyet skal flyve mod nord? Hvad er flyets hastighed set fra en observatør på Jorden i dette tilfælde?

•• **Opgave 5: Flodræset**

En flod er 20 m bred og vandet i floden strømmer af sted med en hastighed på 1 m/s. To svømmere Arthur og Barbara arrangerer et ræs. Arthur skal svømme 20 m ned af floden og tilbage, mens Barbara skal svømme lige over floden og tilbage. Både Arthur og Barbare kan svømme med 2 m/s.

1) I hvilken retning skal Barbara svømme, for at hun kommer lige over floden?

2) Hvem vinder ræset og med hvor meget?

• **Opgave 6: Hvornår er relativitetsteori virkelig nødvendig?**

Som det ses, så indgår γ meget ofte i relativitetsteori. Når γ er væsentligt større end 1, er det nødvendigt at bruge de relativistiske udtryk, frem for de Galileiske. For hvilken hastighed (i enheder af c) er værdien af γ:

1) 1% større end 1?

2) 10% større end 1?

3) 100% større end 1?

• **Opgave 7: Et lille tankeeksperiment**

De relativistiske effekter ses ikke i hverdagen, fordi c er så stor, sammenlignet med hastigheder vi oplever i hverdagen. Men hvad nu hvis lysets hastighed var meget mindre? Lad os se hvad der sker, hvis nu $c = 50$ km/t.

1) Usain Bolts topfart er 44,72 km/t. Hans hvilemasse er 94kg. Hvad er hans masse, når han når topfart?

• **Opgave 8: Muoner i Jordens atmosfære**

Muoner er ustabile sub-atomare partikler, der med en levetid på $2,2\,\mu$s ($2,2 \cdot 10^{-6}$s) henfalder til elektroner. Muoner produceres omkring 10km over Jordens overflade, hvor energirige partikler fra rummet rammer atmosfæren, og de rejser med en hastighed tæt på lysets i forhold til Jorden, lad os sige $v = 0,999c$.

1) Hvad er den længste afstand en muon kan nå at rejse i sin levetid på $2,2\ \mu$s?

2) Fra ovenstående lader det til, at muonerne aldrig vil nå os på overfladen. Ikke desto mindre detekterer vi dem! Men levetiden angivet er i muonens hvilesystem. Hvad er dens levetid målt for en observatør på Jorden?

3) Hvor langt vil muonen nå nu?

4) Fra muonens synspunkt lever den stadig kun $2,2\ \mu$s. Hvad er tykkelsen af 10km atmosfære, set fra muonens system?

• Opgave 9: Relativitet og rumfart

For nyligt valgte NASA at pensionere deres rumfærger. Indtil da var rumfærgen en forholdsvis billig måde at fragte udstyr og mennesker ud i rummet, fordi færgen og det meste af det man brugte til at sende den op med kunne genanvendes. Efter endt mission kunne rumfærgen lande som et fly.

En observatør på Jorden måler en landingsbane til at være 3600m. En rumfærge befinder sig i kredsløb om Jorden med en hastighed af $4,00 \cdot 10^7$m/s relativt til Jorden. Vi antager, at dens bane er en ret linje under hele opgaven, og at den flyver parallelt med landingsbanen.

1) Hvad er længden af landingsbanen målt af piloten på rumfærgen?

2) En observatør på Jorden måler tiden der går, fra rumfærgen er direkte over den ene ende af landingsbanen, og til den er over den anden ende. Hvor lang tid får vedkommende?

3) Piloten på rumfærgen måler den tid, det tager ham at flyve længden af landingsbanen. Hvilken værdi får han?

4) Rumfærgen har en vægt på godt 2000 tons. Hvad ville rumfærgen veje, hvis en observatør på Jorden kunne veje den, mens den var i kredsløb, dvs. hvad er dens relativistiske masse?

5) Rumfærgen er 60 meter lang og 10 meter høj i dens eget referencesystem. Hvor lang og høj er rumfærgen for en observatør på Jorden?

•• Opgave 10: Tvillinge-Paradokset - Her skal du bruge hovedet

Tvillinge-paradokset er et af de mest kendte paradokser inden for speciel relativitetsteori. Egentligt er det ikke et paradoks, da Einstein allerede løste det tilbage i 1905. I denne opgave skal I også løse det. Det kræver, at man lige tænker sig lidt om.

Barbara og Arthur er tvillinger. Arthur bliver på Jorden, mens Barbara rejser af sted med et rumskib, med hastighed nær c. På et tidspunkt vender rumskibet hurtigt, og flyver tilbage til Jorden. Da Barbara kommer tilbage, mødes hun med Arthur til en sammenligning. For Arthur har Barbara rejst ud og hjem igen med nær lysets hastighed. Derfor er tiden for hende gået langsommere, og hun vil derfor se yngre ud end Arthur. Men fra Barbaras synspunkt er det jo Arthur, som har bevæget sig i forhold til hende. Derfor bruger hun samme argument til at konkludere, at han vil se yngre ud end hende. Samtidigt er der jo ikke noget referencesystem, som er bedre end andre, så et argument der bygger på dette vil komme frem til, at alle resultater må være symmetriske mellem de to tvillinger. De er altså lige gamle.

1) Ud fra ovenstående lader det til, at der er tre muligheder, men kun en kan være rigtig. Hvilken mulighed er det?

2) Hvis en af tvillingerne er ældst, kan du så sige noget om, hvor lang tid der er gået for den yngste i forhold til den ældste?

•• Opgave 11: Lorentz-transformationens udledelse

I afsnit 3.7 udledte vi Lorentz-transformationen. I ligning 3.15 så vi på højresiden, hvor vi konkluderede at x's koefficient skulle være 1, og herved fandt frem til gamma-funktionen γ. Vi var dog ikke helt færdig med udledelsen i dette tilfælde.

1) I skal nu færdiggøre udledelsen af Lorentz-transformationen, ved at undersøge om højresiden af ligning 3.15 stemmer overens med ligning 3.11, når vi kender γ.

•• Opgave 12: Lorentz-transformationen på differens-form

Lad os betragte to begivenheder P_1 og P_2, som i inertialsystemet S har koordinaterne (x_1, y_1, z_1, t_1) og (x_2, y_2, z_2, t_2). Svarende hertil har vi de fire koordinatdifferencer

$$\Delta t = t_2 - t_1,\ \Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1,\ \Delta z = z_2 - z_1$$

1) I skal nu finde de tilsvarende størrelser, $\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z'$ i inertialsystemet S', som bevæger sig i forhold til S med hastigheden v, ved hjælp af Lorentz-transformationen.

•• Opgave 13: Tidsforlængelse og Længdeforkortelse vha. Lorenz-transformationen

I denne opgave skal I prøve at udlede formlen for tidsforlængelse og længdeforkortelse vha. Lorentz-transformationen. Det gøres ved at kigge på en proces set fra to referencesystemer S og S' i standard-konfigurationen. Processens start og slutning i tid og rum beskrives ved (x_1, t_1) og (x_2, t_2) i S og (x'_1, t'_1) og (x'_2, t'_2) i S'.

1) Udtrykket for $\Delta t'$ I fandt i opgave 12 indeholder både t_1, t_2 og x_1, x_2. Hvad må man kræve omkring processens start– og slutkoordinater x_1 og x_2 i S, for at udtrykket bliver lig udtrykket for tidsforlængelse?

2) Forklar hvorfor kravet fra 1) sikre, at vi kigger på en "ren"tidsforlængelse, hvor rum og tid ikke bliver blandet sammen.

3) Forklar hvordan udtrykket for $\Delta t'$ fra opgave 12, hvis man ikke bruger kravet fra 1), viser at rum og tid bliver blandet sammen i relativitetsteori.

4) Gennemgå de samme trin som I har gjort ovenfor, denne gang hvor I kigger på længdeforkortelse. Start derfor med $\Delta x'$, og undersøg hvad man må kræve omkring t_1 og t_2.

●● Opgave 14: Cæsars død og Kristi fødsel

Cæsar blev myrdet år 44 f.Kr., og afstanden fra Rom til Betlehem kan sættes til 2300 km.

1) Findes der nogen iagttager, for hvem Cæsars død og Kristi fødsel er samtidige? Hvorfor/hvorfor ikke?

●● Opgave 15: Samtidighed

To begivenheder har i inertialsystemet S koordinaterne $(t_1, x_1, y_1, z_1) = (L/c, L, 0, 0)$ og $(t_2, x_2, y_2, z_2) = (L/2c, 2L, 0, 0)$.

1) Der findes et inertialsystem, S', i hvilket disse begivenheder er samtidige. Find hastigheden af S' i forhold til S.

2) Hvad er den fælles tidskoordinat, t', for disse begivenheder i S'?

●● Opgave 16: En stangs hastighed

En stang med hvilelængde l_0 bevæger sig med jævn hastighed i sin længderetning. Set fra S tager det tiden τ for stangen at passere et fast punkt i S.

1) Find stangens hastighed som en brøkdel af lysets hastighed, c.

●● Opgave 17: Invarians af lyspuls bevægelse

Et referencesystem S' bevæger sig i x-retningen med hastigheden v relativt til et andet referencesystem S. Til tiden $t' = t = 0$ krydser de to referencesystemer hinanden (deres origo er samme sted), og i netop dette øjeblik udsendes en lyspuls fra origo i S'. Efter en tid t' er lyspulsens afstand x' i S' givet ved $x'^2 = c^2 t'^2$.

1) Vis at afstanden x i S er givet ved $x^2 = c^2 t^2$ (hint: Brug Lorentz transformationerne).

●●● Opgave 18: Referencesystemer - samme sted og samme tid

To begivenheder er observeret i et referencesystem S og kan beskrives ved (x_1, t_1) og (x_2, t_2). Et andet referencesystem S' bevæger sig langs x-aksen med en hastighed v, således at de to begivenheder sker samme sted på x-aksen set fra S'.

1) Vis at tidsforskellen $\Delta t'$ mellem begivenhederne i S' er givet ved:

$$\Delta t' = \sqrt{(\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2}$$

(hint: Brug $x_1' = x_2'$ og Lorentz-transformationerne).

2) Brug ovenstående resultat til at vise, at såfremt $\Delta x > c\Delta t$, så vil der ikke eksistere et referencesystem S', hvor begivenhederne sker samme sted.

3) Hvis $\Delta x > c\Delta t$, så findes der i stedet et andet referencesystem S', hvor de to begivenheder sker samtidigt. Vis at afstanden $\Delta x'$ mellem de to begivenheder i dette referencesystem er givet ved:

$$\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 - c^2 (\Delta t)^2}$$

(hint: Brug $t_1' = t_2'$ og Lorentz-transformationerne).

4) Brug ovenstående resultat til at vise, at såfremt $c\Delta t > \Delta x$, så vil der ikke eksistere et referencesystem S', hvor begivenhederne sker samtidigt.

I de følgende to opgaver, vil det være nødvendigt at kigge på funktioner af to variable, og hvordan sådanne funktioner ændre sig, når begge variable ændre sig på samme tid. Forestil jer, at vi har en funktion z, der afhænger både af y og x. Dette skriver man typisk $z = f(x, y)$. Hvis man har en ændring Δx samt en ændring Δy kan man approksimere ændringen Δz på følgende måde:

$$\Delta z \approx \frac{dz}{dx} \cdot \Delta x + \frac{dz}{dy} \cdot \Delta y$$

Såfremt man lader ændringerne Δx og Δy gå mod nul, vil ovenstående ikke længere være en approksimation, og man skriver at:

$$dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy$$

hvor dz, dy og dx er infinitesimale (meget små) versioner af Δz, Δy og Δx.

●● Opgave 19: Lorentz-transformationen for hastighed

I denne opgave skal i prøve at udlede Lorentz-transformationen for hastighed. Dette kan gøres ved at finde et udtryk for dx' og dt', som det er beskrevet ovenfor. Da dx' og dt' vil være de øjeblikkelige ændringer i x' og t', må det derfor gælde at $v_x' = dx'/dt'$.

●●● Opgave 20: Lorentz-transformationen for acceleration

Lad S' være et referencesystem der bevæger sig med hastighed v i forhold til et andet referencesystem S. Et objekt bevæger sig relativt i forhold til S langs x-aksen med en øjeblikkelig hastighed v_x og øjeblikkelig acceleration a_x. Målet med de følgende trin er at finde et udtryk for accelerationen a'_x i referencesystemet S'.

1) Find et udtryk for dt'.

2) Find et udtryk for dv'_x.

Før det sidste trin er det værd at sikre jer, at i har fået de rigtige resultater. I skulle gerne have fundet at:

$$dt' = \gamma\left(dt - v dx/c^2\right)$$

$$dv'_x = \left(\frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v v_x/c^2)^2}\right) dv_x$$

3) Brug at $a'_x = dv'_x/dt'$, $a_x = dx/dt$ samt at $v_x = dx/dt$ til at vise, at a'_x er givet ved:

$$a'_x = a_x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{v v_x}{c^2}\right)^{-3}$$

●●● Opgave 21: Relativitet og Newtons 2. lov

I denne opgave skal i bruge den relativistiske impuls, p_{rel}, og den nye definition af Newtons 2. lov, $F = \frac{dp}{dt}$, til at vise udtrykket for den relativistiske kraft F_{rel}. I skal altså sætte ind og regne jer frem til resultatet.

Kapitel 6

Relativitetsteori Facitliste

- **Opgave 1: Det Galileiske Relativitetsprincip**
  Det Galileiske Relativitetsprincip siger, at Newtons bevægelseslove er ens i alle inertielle referencesystemer.
  Vi forestiller os nu et tog, der kører med en konstant hastighed v ift. sporet. En passager i toget tager så en sten og slipper den fra hvile.

  1) Brug Galileis relativitetsprincip til at beskrive stenens bevægelse set fra en observatør i toget.

  Da toget bevæger sig med konstant hastighed, er det et inertialsystem. Vi ved, at en sted falder lodret ned mod jorden i et inertialsystem, der er i hvile, og derfor må den også gøre det i toget. Newtons bevægelseslove er jo ens i alle inertialesystemer.

  2) Brug Galilei-transformationen (3.1) til at give en beskrivelse af stenens bevægelse set fra en observatør på Jorden.

  Lad x-aksen pege i den retning, som toget kører. Da stenen falder lodret nedad i toget, vil $x' = 0$ for alle tider t og t'. Fra Galilei-transformationen for x' får man da at:

$$0 = x - vt \quad \Rightarrow \quad x = vt$$

  Stenen falder altså ikke lodret ned set fra Jorden, da den har fået en vertikal hastighed på v.

- **Opgave 2: Kombination af Galileiske transformationer**
  To tog kører parallelt med hinanden i x-retningen, det ene med hastighed V og det andet med hastighed U, relativt til jorden. Lad det første tog være S' og det andet S'', med deres respektive koordinater. Jorden betegnes S.

1) Hvad er den Galileiske transformation fra $S\,(x, y, z, t)$ til $S''\,(x'', y'', z'', t'')$?

Her bruger man formlerne for de Galileiske transformationer (3.1). Man får at:

$$t'' = t$$
$$x'' = x - Ut$$
$$y'' = y$$
$$z'' = z$$

2) Hvad er den Galileiske transformation fra S' til S''?

Her bruger man formlerne for de Galileiske transformationer (3.1). Man får at:

$$t'' = t'$$
$$y'' = y'$$
$$z'' = z'$$

For at finde transformationen for x'', kan man først finde transformationen for x'. Den er fra (3.1): $x' = x - Vt$. Så kan man løse for x, hvilket giver: $x = x' + Vt$. Dette kan man så indsætte i udtrykket for x'', hvor man får:

$$x'' = x - Ut = x' + Vt - Ut = x' - (U - V)\,t = x' - (U - V)\,t'$$

hvor det er brugt at $t = t'$.

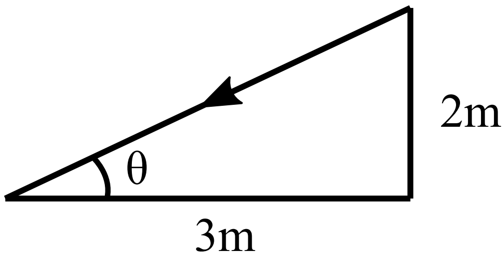
3) Hvad svarer størrelsen $(U - V)$ til?

$U - V$ er S'' systemets hastighed relativt til S' systemet.

- **Opgave 3: Løbetur i Regnvejr**

En dag hvor det regner, falder dråberne lodret ned med 2 m/s. En person løber vandret af sted med 3 m/s. Ved hvilken vinkel ift. vandret skal personen holde sin paraply for bedst muligt at skærme for regnen? (hint: Kig på regndråbernes bevægelse set fra løberens referencesystem).

Set fra løberens referencesystem falder regnen ikke lodret ned, da det har både en lodret hastighed (2 m/s) og en vandret hastighed (3 m/s). Kigger man på dråbens fald over 1 s, vil dråben bevæge sig langs hypotenusen i en trekanten nedenfor:



Man finder da θ:

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69°$$

- **Opgave 4: Flyvetur i Blæsevejr**
  En flyvemaskine kan flyve med 500 km/t, og der er en vindhastighed på 200 km/t fra vest mod øst.

  1) Flyets pilot styrer flyet mod nord. I hvilken retning bevæger flyet sig, og hvad er flyets hastighed set fra en observatør på Jorden, som betegnes S? (hint: Kig på et referencesystem S', der bevæger sig med vinden og benyt hastighedstransformationerne (3.2) til at oversætte flyets bevægelse i dette system til S).

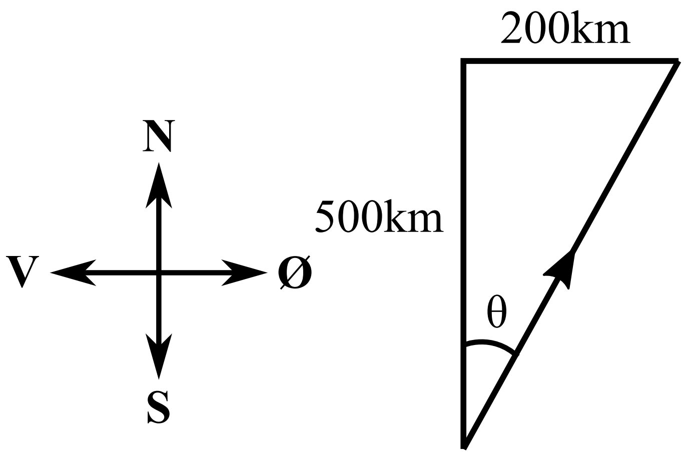
Lad y-aksen pege mod nord og x-aksen pege mod øst. Lad videre x- og x'-aksen være parallelle, og de to systemers origoer være sammenfaldende for $t = t' = 0$. Kigger man på flyet fra S', vil der ikke være nogen vind. Derfor flyver flyet direkte nord på set fra dette system. Det må betyde, at flyets hastigheder i de forskellige retninger er:

$$u'_y = 500\,\text{km/t} \qquad \text{og} \qquad u'_x = u'_z = 0$$

Kigger man på (3.2) får man da at $u_y = u'_y$ og $u_z = u'_z$. For u_x får man:

$$u'_x = 0 = u_x - v \quad \Rightarrow \quad u_x = v = 200\,\text{km/t}$$

da v jo er vindens hastighed her. For at finde den retning som flyet flyver i, set fra Jorden, kan man kigge på flyets bevægelse over 1 time:



Så findes θ:

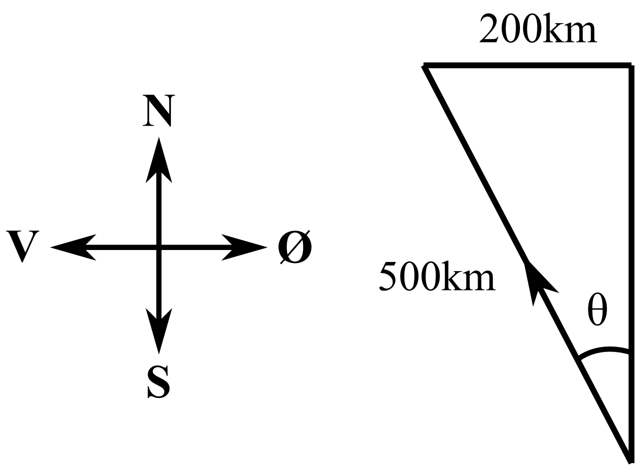
$$\theta = \arctan\left(\frac{200}{500}\right) = 21.80^\circ$$

Og Flyets hastighed set fra Jorden findes vha. Pythagoras:

$$v_{\text{fly}} = \sqrt{500^2 + 200^2}\,\text{km/t} = 538{,}52\,\text{km/t}$$

2) I hvilken retning skal piloten styre, hvis flyet skal flyve mod nord? Hvad er flyets hastighed set fra en observatør på Jorden i dette tilfælde?

Hvis flyet skal flyve mod nord, er det nødt til at have en hastighed $u_x = -200\,\text{km/t}$. Igen får man en trekant:



Man kan finde θ:

$$\sin\theta = \frac{200\,\text{km}}{500\,\text{km}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arcsin\left(\frac{200}{500}\right) = 23.58^\circ$$

Og hastigheden bliver:

$$v_{\text{fly}} = \sqrt{500^2 - 200^2}\,\text{km/t} = 458{,}26\,\text{km/t}$$

Opgave 5: Flodræset

En flod er 20 m bred og vandet i floden strømmer af sted med en hastighed på 1 m/s. To svømmere Arthur og Barbara arrangerer et ræs. Arthur skal svømme 20 m ned af floden og tilbage, mens Barbara skal svømme lige over floden og tilbage. Både Arthur og Barbare kan svømme med 2 m/s.

1) I hvilken retning skal Barbara svømme, for at hun kommer lige over floden?

Set fra et referencesystem der bevæger sig med strømmen, skal Barbaras hastighed opad være 1 m/s og hendes totale hastighed 2 m/s. Man kan lave en trekant, og finde at Barbara skal svømme med en vinkel θ ift. en lige linje over floden. Vinklen er:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30.0^\circ$$

2) Hvem vinder ræset og med hvor meget?

Kald bredten af floden for L. Barbara er praktisk talt nød til at svømme en længere tur. Længden hun svømmer hver vej er givet:

$$\cos\theta = \frac{L}{L_{\text{Bar}}} \qquad \Rightarrow \qquad L_{\text{Bar}} = \frac{L}{\cos\theta}$$

For Barbara tager hele turen altså:

$$t_{\text{Bar}} = \frac{2\cdot L_{\text{Bar}}}{2\,\text{m/s}} = \frac{2\cdot 20\,\text{m}}{\cos(30.0^\circ)\cdot 2\,\text{m/s}} = 23{,}09\,\text{s}$$

For Arthur kan man regne tiden for hver af de to ture:

$$t_{\text{Art,ned}} = \frac{20\,\text{m}}{3\,\text{m/s}} = 6{,}667\,\text{s}$$

$$t_{\text{Art,op}} = \frac{20\,\text{m}}{1\,\text{m/s}} = 20\,\text{s}$$

Det giver:

$$t_{\text{Art}} = t_{\text{Art,ned}} + t_{\text{Art,op}} = 26{,}667\,\text{s}$$

Barbara vinder altså ræset.

- **Opgave 6: Hvornår er relativitetsteori virkelig nødvendig?**
Som det ses, så indgår γ meget ofte i relativitetsteori. Når γ væsentligt større end 1, er det nødvendigt at bruge de relativistiske udtryk, frem for de Galileiske. For hvilken hastighed (i enheder af c) er værdien af γ:

1) 1% større end 1?

2) 10% større end 1?

3) 100% større end 1?

Her kan man opskrive følgende:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Så kan man ellers bare indsætte 1.01, 1.10 og 2.00 på x's plads, hvorved man finder at:

$$\gamma = 1.01 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 0.1404$$

$$\gamma = 1.10 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 0.4166$$

$$\gamma = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 0.8660$$

- **Opgave 7: Et lille tankeeksperiment**
De relativistiske effekter ses ikke i hverdagen, fordi c er så stor, sammenlignet med hastigheder vi oplever i hverdagen. Men hvad nu hvis lysets hastighed var meget mindre? Lad os se hvad der sker, hvis nu $c = 50$ km/t.

1) Usain Bolts topfart er 44, 72km/t. Hans hvilemasse er 94kg. Hvad er hans masse, når han når topfart?

Her bruger man (3.25), der giver den relativistiske masse. Det giver at:

$$m_{\text{rel}} = \frac{94\,\text{kg}}{\sqrt{1 - (44{,}72\,\text{km/t})^2/(50\,\text{km/t})^2}} = 210{,}2\,\text{kg}$$

Opgave 8: Muoner i Jordens atmosfære

Muoner er ustabile sub-atomare partikler, der med en levetid på $2,2\,\mu$s $(2,2\cdot 10^{-6}\text{s})$ henfalder til elektroner. Muoner produceres omkring 10km over Jordens overflade, hvor energirige partikler fra rummet rammer atmosfæren, og de rejser med en hastighed tæt på lysets i forhold til Jorden, lad os sige $v = 0,999c$.

1) Hvad er den længste afstand en muon kan nå at rejse i sin levetid på $2,2\,\mu$s?

Den er givet som:

$$L = v\cdot T_0 = 0.999\cdot 3.00\times 10^8\ \text{m/s}\cdot 2.2\times 10^{-6}\ \text{s} = 659{,}34\,\text{m}$$

2) Fra ovenstående lader det til, at muonerne aldrig vil nå os på overfladen. Ikke desto mindre detekterer vi dem! Men levetiden angivet er i muonens hvilesystem. Hvad er dens levetid målt for en observatør på Jorden?

Levetiden som målt af en observatør på Jorden er givet ved:

$$T = \gamma T_0 = \frac{2.2\times 10^{-6}\text{s}}{\sqrt{1-0.999^2}} = 49.2058\times 10^{-6}\text{s} = 49.2058\mu\text{s}$$

3) Hvor langt vil muonen nå nu?

Mounen når nu en længde på

$$L = v\cdot T = 0.999\cdot 3.00\times 10^8\text{m/s}\cdot 49.2058\times 10^{-6} = 14746.98\text{m} = 14.74698\text{km}$$

4) Fra muonens synspunkt lever den stadig kun $2,2\,\mu$s. Hvad er tykkelsen af 10km atmosfære, set fra muonens system?

Set fra mounens system, vil atmosfæren have en tykkelse på

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = 10000\text{m}\cdot\sqrt{1-0.999^2} = 447.102\ \text{m}$$

Opgave 9: Relativitet og rumfart

For nyligt valgte NASA at pensionere deres rumfærger. Indtil da var rumfærgen en forholdsvis billig måde at fragte udstyr og mennesker ud i rummet, fordi færgen og det meste af det man brugte til at sende den op med kunne genanvendes. Efter endt mission kunne rumfærgen lande som et fly.

En observatør på Jorden måler en landingsbane til at være 3600m. En rumfærge befinder sig i kredsløb om Jorden med en hastighed af $4,00 \cdot 10^7$m/s relativt til Jorden. Vi antager, at dens bane er en ret linje under hele opgaven, og at den flyver parallelt med landingsbanen.

1) Hvad er længden af landingsbanen målt af piloten på rumfærgen?

Længden af landingsbanen som målt af piloten er

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = 3600\text{m} \cdot \sqrt{1 - \frac{16.00 \times 10^{14}\text{m/s}}{9.00 \times 10^{16}\text{m/s}}} = 3567.86\text{m}$$

2) En observatør på Jorden måler tiden der går, fra rumfærgen er direkte over den ene ende af landingsbanen, og til den er over den anden ende. Hvor lang tid får vedkommende?

Tiden er givet ved strækning divideret med hastigheden,

$$t = \frac{3600\text{m}}{4.00 \times 10^7\text{m/s}} = 9 \times 10^{-5}\text{s}$$

3) Piloten på rumfærgen måler den tid, det tager ham at flyve længden af landingsbanen. Hvilken værdi får han?

Denne opgave kan løses på to måder. Vi kan enten benytte os af den forkortede længde og bruge samme metode som tidligere,

$$t = \frac{3567.86\text{m}}{4.00 \times 10^7\text{m/s}} = 89.1965 \cdot 10^{-6}\text{s}$$

Alternativt kan man udregne tiden ved at benytte sig af længdeforkortelse, hvor tiden målt fra rumfærgen er T_0,

$$T_0 = \frac{T}{\gamma} = 9 \times 10^{-5}\text{s} \cdot \sqrt{1 - \frac{16.00 \times 10^{14}\text{m/s}}{9.00 \times 10^{16}\text{m/s}}} = 89.1965 \cdot 10^{-6}\text{s}$$

4) Rumfærgen har en vægt på godt 2000 tons. Hvad ville rumfærgen veje, hvis en observatør på Jorden kunne veje den, mens den var i kredsløb, dvs. hvad er dens relativistiske masse?

Rumfærgens relativistiske masse er givet ved

$$m_{\text{rel}} = \gamma m = \frac{2.00 \times 10^6}{\sqrt{1 - \frac{16.00 \times 10^{14}\text{m/s}}{9.00 \times 10^{16}\text{m/s}}}} = 2.018 \times 10^6\text{kg}$$

5) Rumfærgen er 60 meter lang og 10 meter høj i dens eget referencesystem. Hvor lang og høj er rumfærgen for en observatør på Jorden?

Højden vil ikke ændre sig, da længdeforkortelse kun har en effekt i bevægelsesretningen. Længden som målt af en observatør på Jorden er

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = 60\text{m} \cdot \sqrt{1 - \frac{16.00 \times 10^{14}\text{m/s}}{9.00 \times 10^{16}\text{m/s}}} = 49.464\text{m}$$

●● **Opgave 10: Tvillinge-Paradokset - Her skal du bruge hovedet**

Tvillinge-paradokset er et af de mest kendte paradokser inden for speciel relativitetsteori. Egentligt er det ikke et paradoks, da Einstein allerede løste det tilbage i 1905. I denne opgave skal I også løse det. Det kræver, at man lige tænker sig lidt om.

Barbara og Arthur er tvillinger. Arthur bliver på Jorden, mens Barbara rejser af sted med et rumskib, med hastighed nær c. På et tidspunkt vender rumskibet hurtigt, og flyver tilbage til Jorden. Da Barbara kommer tilbage, mødes hun med Arthur til en sammenligning. For Arthur har Barbara rejst ud og hjem igen med nær lysets hastighed. Derfor er tiden for hende gået langsommere, og hun vil derfor se yngre ud end Arthur. Men fra Barbaras synspunkt er det jo Arthur, som har bevæget sig i forhold til hende. Derfor bruger hun samme argument til at konkludere, at han vil se yngre ud end hende. Samtidigt er der jo ikke noget referencesystem, som er bedre end andre, så et argument der bygger på dette vil komme frem til, at alle resultater må være symmetriske mellem de to tvillinger. De er altså lige gamle.

1) Ud fra ovenstående lader det til, at der er tre muligheder, men kun en kan være rigtig. Hvilken mulighed er det?

Svaret ligger i at Barbaras rumskib bliver nød til at accelerere, når det vender for at flyve tilbage til jorden. Barbaras referencesystem vil altså ikke være et inertielt referencesystem, og den specielle relativitetsteori, vil derfor ikke gælde for hende. Det betyder således at problemet ikke er symmetrisk set fra de to tvillinger, og det rigtige svar er derfor, at Barbara er yngre end Arthur.

2) Hvis en af tvillingerne er ældst, kan du så sige noget om, hvor lang tid der er gået for den yngste i forhold til den ældste?

Tiden der er gået for den ældste tvilling er T. Vi kan så bruge formlen for tidsforlængelse til at finde den tid der er gået for den yngste,

$$T_0 = T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Opgave 11: Lorentz-transformationens udledelse

I afsnit 3.7 udledte vi Lorentz-transformationen. I ligning 3.15 så vi på højresiden, hvor vi konkluderede at x's koefficient skulle være 1, og herved fandt frem til gamma-funktionen γ. Vi var dog ikke helt færdig med udledelsen i dette tilfælde.

1) I skal nu færdiggøre udledelsen af Lorentz-transformationen, ved at undersøge om højresiden af ligning 3.15 stemmer overens med ligning 3.11, når vi kender γ.

Vi søger i denne opgave at omskrive højresiden af 3.15, $c^2\gamma^2t^2 - \gamma^2v^2t^2$, ved hjælp af γ funktionen, således at det stemmer overens med højresiden af 3.11, c^2t^2.

$$
\begin{aligned}
&c^2\gamma^2t^2 - \gamma^2v^2t^2 \\
&\downarrow \\
&c^2t^2\gamma^2(1 - v^2/c^2) \\
&\downarrow \\
&c^2t^2\frac{1}{1 - v^2/c^2} \\
&\downarrow \\
&c^2t^2
\end{aligned}
$$

Opgave 12: Lorentz-transformationen på differens-form

Lad os betragte to begivenheder P_1 og P_2, som i inertialsystemet S har koordinaterne (x_1, y_1, z_1, t_1) og (x_2, y_2, z_2, t_2). Svarende hertil har vi de fire koordinatdifferencer

$$\Delta t = t_2 - t_1,\ \Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1,\ \Delta z = z_2 - z_1$$

1) I skal nu finde de tilsvarende størrelser, $\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z'$ i inertialsystemet S', som bevæger sig i forhold til S med hastigheden v, ved hjælp af Lorentz-transformationen.

Da vi har $\Delta t = t_2 - t_1$, må den tilsvarende differens i S' være $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Vi kan herved finde et udtryk for denne differens ved at bruge Lorentz-transformationen,

$$\Delta t' = \gamma(t_2 - vx_2/c^2) - \gamma(t_1 - vx_1/c^2) = \gamma(t_2 - t_1 - vx_2/c^2 + vx_1/c^2) = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$

Man gør det samme for de tre andre størrelser:

$$\Delta x' = \gamma\left(x_2 - vt_2\right) - \gamma\left(x_1 - vt_1\right) = \gamma\left(x_2 - x_1 - vt_2 + vt_1\right) = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right)$$

$$\Delta y' = y_2' - y_1' = y_2 - y_1 = \Delta y \qquad \text{og} \qquad \Delta z' = z_2' - z_1' = z_2 - z_1 = \Delta z$$

•• Opgave 13: Tidsforlængelse og Længdeforkortelse vha. Lorenz-transformationen
I denne opgave skal I prøve at udlede formlen for tidsforlængelse og længdeforkortelse vha. Lorentz-transformationen. Det gøres ved at kigge på en proces set fra to referencesystemer S og S' i standard-konfigurationen. Processens start og slutning i tid og rum beskrives ved (x_1, t_1) og (x_2, t_2) i S og (x_1', t_1') og (x_2', t_2') i S'.

1) Udtrykket for $\Delta t'$ I fandt i opgave 12 indeholder både t_1, t_2 og x_1, x_2. Hvad må man kræve omkring processens start– og slutkoordinater x_1 og x_2 i S, for at udtrykket bliver lig udtrykket for tidsforlængelse?

Man må kræve at $x_1 = x_2$, således at man har $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v \cdot 0/c^2) = \gamma\Delta t$.

2) Forklar hvorfor kravet fra 1) sikre, at vi kigger på en "ren"tidsforlængelse, hvor rum og tid ikke bliver blandet sammen.

I tilfældet af at $\Delta t' = \gamma\Delta t$, kan vi se at tiden $\Delta t'$ kun afhænger af den relative hastighed og tidsforskellen Δt i S. Hvis vi ikke krævede at $\Delta x = 0$, ville udtrykket afhænge både af de forrige variable og begivenhedernes position.

3) Forklar hvordan udtrykket for $\Delta t'$ fra opgave 12, hvis man ikke bruger kravet fra 1), viser at rum og tid bliver blandet sammen i relativitetsteori.

Se opgave 13.2.

4) Gennemgå de samme trin som I har gjort ovenfor, denne gang hvor I kigger på længdeforkortelse. Start derfor med $\Delta x'$, og undersøg hvad man må kræve omkring t_1 og t_2.

I dette tilfælde vil $\Delta x'$ være hvilelængden. For at udtrykket for $\Delta x'$ skal stemme overens med udtrykket for længdeforkortelse, må vi kræve at $t_1 = t_2$, således at vi har

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v * 0)$$
$$\downarrow$$
$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

Vi ser her igen at kravet om at $\Delta t = 0$ resulterer i en "ren"længdeforkortelse, da udtrykket kun afhænger af den relative hastighed v og hvilelængden $\Delta x'$.

•• Opgave 14: Cæsars død og Kristi fødsel

Cæsar blev myrdet år 44 f.Kr., og afstanden fra Rom til Betlehem kan sættes til 2300 km.

1) Findes der nogen iagttager, for hvem Cæsars død og Kristi fødsel er samtidige? Hvorfor/hvorfor ikke?

Vi skal i denne opgave bruge den tidslige Lorentz-transformationen på differensform. Man kan så opstille to inertialsystemer S og S', hvor S' bevæger sig med hastigheden v i forhold til S. For at de to begivenheder sker samtidigt skal $\Delta t' = 0$, og man kan herved opstille en ligning og isolere den nødvendige hastighed v.

$$0 = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$$
$$\downarrow$$
$$0 = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$\downarrow$$
$$0 = \Delta t - v\Delta x/c^2$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\Delta t c^2}{\Delta x} = v$$

Vi indsætter de opgivet størrelser og udregner hastigheden,

$$v = \frac{1387584000s \cdot (3.00 \cdot 10^8)}{2300000m} = 5.430 \times 10^{19} \text{ m/s}$$

Vi kan herved konkludere at der ikke findes nogen iagttager, for hvem Cæsars død og Kristi fødsel er samtidige, da den nødvendige hastighed er langt større end lysets hastighed.

•• Opgave 15: Samtidighed

To begivenheder har i inertialsystemet S koordinaterne $(t_1, x_1, y_1, z_1) = (L/c, L, 0, 0)$ og $(t_2, x_2, y_2, z_2) = (L/2c, 2L, 0, 0)$.

1) Der findes et inertialsystem, S', i hvilket disse begivenheder er samtidige. Find hastigheden af S' i forhold til S.

I denne opgave skal vi benytte os af det samme udtryk som vi kom frem til i den forrige opgave. Denne gang er $\Delta t = \frac{L}{2c} - \frac{L}{c} = \frac{Lc}{2c^2} - \frac{Lc}{c^2} = -\frac{L}{2c}$ og $\Delta x = 2L - L = L$. Dette indsættes, og et udtryk for hastigheden udregnes,

$$v = -\frac{\frac{L}{2c}c^2}{L} = -\frac{\frac{Lc}{2}}{L} = -\frac{Lc}{2L} = -\frac{c}{2}$$

2) Hvad er den fælles tidskoordinat, t', for disse begivenheder i S'?

Da vi nu kender hastigheden v, kan vi finde et udtryk for den fælles tidskoordinat t' for de to begivenheder ved at bruge den tidslige Lorentz-transformation,

$$\begin{aligned}
&t' = \gamma(\frac{L}{c} + \frac{cL}{2c^2}) \\
&\downarrow \\
&t' = \gamma(\frac{2L}{2c} + \frac{L}{2c}) \\
&\downarrow \\
&t' = \gamma\frac{3L}{2c} \\
&\downarrow \\
&t' = \sqrt{\frac{4}{3}}\frac{3}{2}\frac{L}{c} \\
&\downarrow \\
&t' = \sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{9}{4}}\frac{L}{c} \\
&\downarrow \\
&t' = \sqrt{3}\frac{L}{c}
\end{aligned}$$

•• Opgave 16: En stangs hastighed

En stang med hvilelængde l_0 bevæger sig med jævn hastighed i sin længderetning. Set fra S tager det tiden τ for stangen at passere et fast punkt i S.

1) Find stangens hastighed som en brøkdel af lysets hastighed, c?

Ved brug af længdeforkortnings formlen, er stangens længde i S givet ved $L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Herudover kan vi beskrive længden i S ved $L = v\tau$. Vi kan herved bruge disse to udtryk til at finde stangens hastighed,

$$
\begin{aligned}
&v\tau = L_0\sqrt{(1 - v^2/c^2)} \\
&\downarrow \\
&v^2\tau^2 = L_0^2(1 - v^2/c^2) \\
&\downarrow \\
&v^2\frac{\tau^2}{L_0^2} = 1 - v^2/c^2 \\
&\downarrow \\
&\frac{v^2}{c^2}(\frac{\tau^2}{L_0^2} + 1) = 1 \\
&\downarrow \\
&\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\tau^2}{L_0^2} + 1}}
\end{aligned}
$$

●● **Opgave 17: Invarians af lyspuls bevægelse**

Et referencesystem S' bevæger sig i x-retningen med hastigheden v relativt til et andet referencesystem S. Til tiden $t' = t = 0$ krydser de to referencesystemer hinanden (deres origo er samme sted), og i netop dette øjeblik udsendes en lyspuls fra origo i S'. Efter en tid t' er lyspulsens afstand x' i S' givet ved $x'^2 = c^2t'^2$.

1) Vis at afstanden x i S er givet ved $x^2 = c^2t^2$ (hint: Brug Lorentz transformationerne).

Vi benytter os her af den Lorentz-transformationen for t' og x':

$$\gamma^2(x - vt)^2 = c^2\gamma^2(t - vx/c^2)^2$$
$$\downarrow$$
$$x - vt = c \cdot (t - vx/c^2)$$
$$\downarrow$$
$$x + vx/c = ct + vt$$
$$\downarrow$$
$$x(1 + v/c) = ct(1 + v/c)$$
$$\downarrow$$
$$x = ct$$
$$\downarrow$$
$$x^2 = c^2t^2$$

Opgave 18: Referencesystemer - samme sted og samme tid

To begivenheder er observeret i et referencesystem S og kan beskrives ved (x_1, t_1) og (x_2, t_2). Et andet referencesystem S' bevæger sig langs x-aksen med en hastighed v, således at de to begivenheder sker samme sted på x-aksen set fra S'.

1) Vis at tidsforskellen $\Delta t'$ mellem begivenhederne i S' er givet ved:

$$\Delta t' = \sqrt{(\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2}$$

(hint: Brug $x'_1 = x'_2$ og Lorentz-transformationerne).

$t'_1 = t'_2$ og Lorentz-transformationen bruges først til at opstille et udtryk for hastigheden v,

$$x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2$$
$$\downarrow$$
$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$
$$\downarrow$$
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Herefter bruger vi Lorentz-transformationen på $\Delta t' = t_2' - t_1'$,

$$\Delta t' = \gamma(t_2 - vx_2/c^2) - \gamma(t_1 - vx_1/c^2)$$
$$\downarrow$$
$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$\downarrow$$
$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2 c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2 c^2}}} \qquad \downarrow$$
$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2 c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2 c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta t^2}}{\sqrt{\Delta t^2}}$$
$$\downarrow$$
$$\Delta t' = \frac{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}}{\sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}}}$$
$$\downarrow$$
$$\Delta t' = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}}$$

2) Brug ovenstående resultat til at vise, at såfremt $\Delta x > c\Delta t$, så vil der ikke eksistere et referencesystem S', hvor begivenhederne sker samme sted.

Vi indser først at $\Delta x^2 > c^2\Delta t^2$ er det samme som $\Delta x > c\Delta t$. Vi kan så omskrive det forrige udtryk til

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2}{c^2}}$$

Hvis $\Delta x^2 > c^2\Delta t^2$ er gældende, vil $\Delta t'$ være imaginært. Medmindre du er Stephen Hawking, så er imaginær tid udefineret.

3) Hvis $\Delta x > c\Delta t$, så findes der i stedet et andet referencesystem S', hvor de to begivenheder sker samtidigt. Vis at afstanden $\Delta x'$ mellem de to begivenheder i dette referencesystem er givet ved:

$$\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 - c^2 (\Delta t)^2}$$

(hint: Brug $t_1' = t_2'$ og Lorentz-transformationerne).

$t'_1 = t'_2$ benyttes til at udregne hastigheden v,

$$\begin{aligned}
&t_1 - x_1 v/c^2 = t_2 - x_2 v/c^2 \\
&\downarrow \\
&\Delta t = \frac{\Delta x v}{c^2} \\
&\downarrow \\
&v = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Herefter bruger vi Lorentz-transformationen på $\Delta x' = x'_2 - x'_1$,

$$\begin{aligned}
&\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
&\downarrow \\
&\Delta x' = \frac{\Delta x - \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x}}{\sqrt{1 - \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}}} \\
&\downarrow \\
&\Delta x' = \frac{\Delta x - \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x}}{\sqrt{1 - \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\sqrt{\Delta x^2}} \\
&\Delta x' = \frac{\Delta x^2 - c^2\Delta t^2}{\sqrt{\Delta x^2 - c^2\Delta t^2}} = \sqrt{\Delta x^2 - c^2\Delta t^2}
\end{aligned}$$

4) Brug ovenstående resultat til at vise, at såfremt $c\Delta t > \Delta x$, så vil der ikke eksistere et referencesystem S', hvor begivenhederne sker samtidigt.

Ligesom i 18.2, så er $c^2\Delta t^2 > \Delta x^2$ ækvivalent med $c\Delta t > \Delta x$. I tilfældet af at $c^2\Delta t^2 > \Delta x^2$ er gældende, vil $\Delta x'$ ikke være reel.

I de følgende to opgaver, vil det være nødvendigt at kigge på funktioner af to variable, og hvordan sådanne funktioner ændre sig, når begge variable ændre sig på samme tid. Forestil jer, at vi har en funktion z, der afhænger både af y og x. Dette skriver man typisk $z = f(x, y)$. Hvis man har en ændring Δx samt en ændring Δy kan man approksimere ændringen Δz på følgende måde:

$$\Delta z \approx \frac{dz}{dx} \cdot \Delta x + \frac{dz}{dy} \cdot \Delta y$$

Såfremt man lader ændringerne Δx og Δy gå mod nul, vil ovenstående ikke længere være en approksimation, og man skriver at:

$$dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy$$

hvor dz, dy og dx er infinitesimale (meget små) versioner af Δz, Δy og Δx.

●● Opgave 19: Lorentz-transformationen for hastighed

I denne opgave skal i prøve at udlede Lorentz-transformationen for hastighed. Dette kan gøres ved at finde et udtryk for dx' og dt', som det er beskrevet ovenfor. Da dx' og dt' vil være de øjeblikkelige ændringer i x' og t', må det derfor gælde at $v'_x = dx'/dt'$.

Som det første bruger man at:

$$dx' = \frac{dx'}{dx} \cdot dx + \frac{dx'}{dt} \cdot dt = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$dt' = \frac{dt'}{dx} \cdot dx + \frac{dt'}{dt} \cdot dt = \frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Så finder man v'_x ved at dividere disse:

$$v'_x = dx'/dt' = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{dx/dt - v}{1 - vdx/dtc^2} = \frac{v_x - v}{1 - vv_x/c^2}$$

●●● Opgave 20: Lorentz-transformationen for acceleration

Lad S' være et referencesystem der bevæger sig med hastighed v i forhold til et andet referencesystem S. Et objekt bevæger sig relativt i forhold til S langs x-aksen med en øjeblikkelig hastighed v_x og øjeblikkelig acceleration a_x. Målet med de følgende trin er at finde et udtryk for accelerationen a'_x i referencesystemet S'.

1) Find et udtryk for dt'.

Dette findes som i forrige opgave.

$$dt' = \frac{dt'}{dx} \cdot dx + \frac{dt'}{dt} \cdot dt = \frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

2) Find et udtryk for dv'_x.

Da v'_x kun afhænger af en variabel v_x finder man at:

$$dv'_x = \frac{dv'_x}{dv_x} \cdot dv_x = \left(\frac{d(v_x - v)}{dv_x} \cdot \frac{1}{1 - vv_x/c^2} + \frac{d\frac{1}{1-vv_x/c^2}}{dv_x} \cdot (v_x - v) \right) dv_x$$

$$= \left(\frac{1}{1 - vv_x/c^2} + \frac{vv_x/c^2 - v^2/c^2}{(1 - vv_x/c^2)^2} \right) dv_x = \left(\frac{1 - vv_x/c^2}{(1 - vv_x/c^2)^2} + \frac{vv_x/c^2 - v^2/c^2}{(1 - vv_x/c^2)^2} \right) dv_x$$

$$= \left(\frac{1 - v^2/c^2}{(1 - vv_x/c^2)^2} \right) dv_x$$

Før det sidste trin er det værd at sikre jer, at i har fået de rigtige resultater. I skulle gerne have fundet at:

$$dt' = \gamma \left(dt - v dx/c^2 \right)$$

$$dv'_x = \left(\frac{1 - v^2/c^2}{(1 - vv_x/c^2)^2} \right) dv_x$$

3) Brug at $a'_x = dv'_x/dt'$, $a_x = dx/dt$ samt at $v_x = dx/dt$ til at vise, at a'_x er givet ved:

$$a'_x = a_x \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{vv_x}{c^2} \right)^{-3}$$

Her dividerer man de to udtryk med hinanden.

$$a'_x = dv'_x/dt' = dv_x \frac{(1 - v^2/c^2)/\left(1 - vv_x/c^2\right)^2}{\gamma \left(dt - v dx/c^2 \right)} = \frac{dv_x}{dt} \frac{(1 - v^2/c^2)/\left(1 - vv_x/c^2\right)^2}{\gamma \left(1 - v dx/dtc^2 \right)}$$

$$= a_x \frac{(1 - v^2/c^2)/\left(1 - vv_x/c^2\right)^2}{\gamma \left(1 - vv_x/c^2 \right)} = a_x \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{vv_x}{c^2} \right)^{-3}$$

●●● Opgave 21: Relativitet og Newtons 2. lov

I denne opgave skal i bruge den relativistiske impuls, p_{rel}, og den nye definition af Newtons 2. lov, $F = \frac{dp}{dt}$, til at vise udtrykket for den relativistiske kraft F_{rel}. I skal altså sætte ind og regne jer frem til resultatet.

Dette findes ved følgende beregning:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{dt} = \frac{dmv}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{d\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{dt} \cdot mv$$

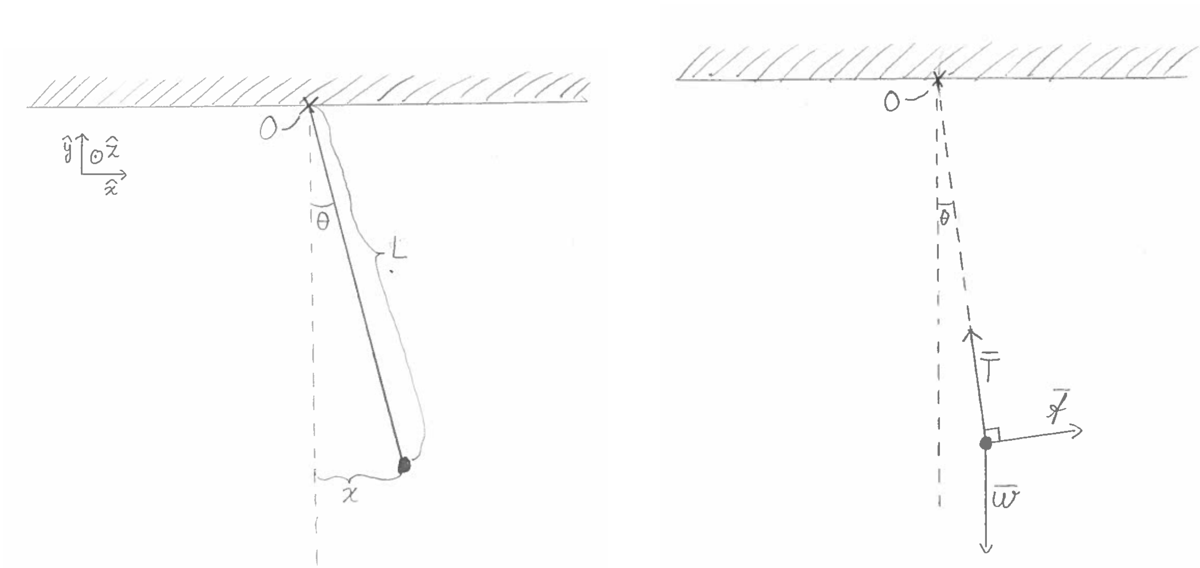
$$= \frac{ma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{mav^2/c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{ma\left(1 - v^2/c^2\right)}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} + \frac{mav^2/c^2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{ma}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}$$

Kapitel 7

Rotationel Mekanik Udledning

Her beskrives et fysisk pendul med masse m og inertimoment I, hvor friktion ikke negligeres, og slutteligt vises det, hvad visse simplificeringer resulterer i. Det er tiltænkt at deltagerne selv laver kraftanalysen og beslutter hvilke kræfter, de antager pendulet er påvirket af, selvom snoren bør antages masseløs. Fremgangsmåden er den samme, så alle specialtilfælde beskrives ikke i detajler her.

I første omgang identificeres de på pendullodet virkende kræfter og pendulets ophængningspunkt defineres som origo, se figurene 7.1a og 7.1b. Pendullodets position beskrives ved en retningsvektor **r**,



(a) Pendul med enhedsvektorer og stedvektor indtegnet til et arbitrært tidspunkt.

(b) Kraftanalyse af de på pendulloddet virkende kræfter, der alle antages at have angrebspunkt i massemidtpunktet.

Figur 7.1: Tegning af pendulet, der bl.a. viser det valgte koordinatsystem og de virkende kræfter.

der går fra ophængningspunktet til lodet. Der er en tyngdekraft, $\mathbf{w}$, en snorkraft, $\mathbf{T}$, og en friktionskraft, $\mathbf{f}$. Tyngdekraften virker til alle tider, t, i negativ y-retning og skrives derfor som

$$\mathbf{w} = -mg\hat{\mathbf{y}}$$

hvor g er tyngdeaccelerationen, og $\hat{\mathbf{y}}$ er en enhedsvektor i y-retningen. Defineres $\hat{\mathbf{r}}$ som en enhedsvektor parallelt med pendulets retningsvektor, kan snorkraften beskrives som

$$\mathbf{T} = -T\hat{\mathbf{r}}$$

hvor T er størrelsen på snorkraften. Friktionskraften virker antiparallelt med pendulets hastighed, $\mathbf{v}$, hvorfor den kan beskrives med en skalering b som

$$\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$$

Idet snoren antages masseløs kan pendulet beskrives som et lod med masse, m, der roterer omkring ophængningspunktet, og har ved denne rotation inertimomentet I. Snorens længde kaldes L og alle kræfter antages at virke på loddets massemidtpunkt, hvorfor alle kræfters arm kan beskrives som

$$\mathbf{r} = L\hat{\mathbf{r}}$$

hvilket også et pendulloddets stedvektor. Nu kan kraftmomentet for alle de virkende kræfter bestemmes idet $\mathbf{r} \perp \mathbf{v} \ \forall t$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_w &= \mathbf{r} \times \mathbf{w} = -mgL \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{y}} = -mgL\sin(\theta)\hat{\mathbf{z}} \\
\boldsymbol{\tau}_f &= \mathbf{r} \times \mathbf{f} = -bL \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = -bLv\hat{\mathbf{z}} = -bL^2\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{z}} \\
\boldsymbol{\tau}_T &= \mathbf{r} \times \mathbf{T} = -TL \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

hvor subscriptet indikerer hvilken kraft, der behandles. Det samlede kraftmoment bliver derved

$$\sum \boldsymbol{\tau} = -\hat{\mathbf{z}}\left(bL^2\frac{d\theta}{dt} + mgL\sin\theta\right)$$

Antages pendulets usvingsvinkel at være lille bliver det samlede kraftmomentets størrelse

$$\sum \tau \approx -\left(bL^2\frac{d\theta}{dt} + mgL\theta\right)$$

hvor Newtons anden lov for rotationel bevægelse giver differentialligningen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{I}\left(bL^2\frac{d\theta}{dt} + mgL\theta\right)$$

som har løsningen

$$\theta(t) = A\exp\left(-\frac{bL^2}{2I}t\right)\cos\left(\omega t + \phi\right), \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgL}{I} - \frac{b^2L^4}{4I^2}}$$

hvilket medfører at pendulets periode bliver

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{mgL}{I} - \frac{b^2L^4}{4I^2}\right)^{-1/2}$$

Slutteligt kan pendulets x-koordinat beskrives som

$$x(t) = L\sin\theta(t) \approx L\theta(t)$$

Simplificerende antagelser

Matematisk pendul med friktion

Antages lodet at være en punktmasse bliver dets inertimoment

$$I = mL^2$$

hvorved bevægelsesligningen bliver

$$\theta(t) = A\exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)\cos(\omega t + \phi), \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

og perioden bliver nu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{g}{L} - \frac{b^2}{4m^2}\right)^{-1/2}$$

Fysisk pendul uden friktion

Negligeres friktionen bliver differentialligningen noget simplere, idet pendulet nu vil være i simpel harmonisk bevægelse

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I}\theta$$

som giver bevægelsesligningen

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi), \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

og således bliver pendulets periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Matematisk pendul uden friktion

Negligeres friktion og antages pendulets masse at befinde sig i ét punkt kan intertimomentet sættes til $I = mL^2$ i ligningerne fra det fysiske pendul uden friktion

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi), \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

hvilket giver en periode på

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Kapitel 8

Kerne– og Partikelfysik Opgaver

Kernefysik

• **Opgave 1: Alfa-henfald**
Alfa-henfald, hvor der udsendes en heliumkerne er en almindelig type henfald. F.eks. følgende henfald af Uran-238

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{232}_{90}\mathrm{Th} + ^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

1) Hvorfor tror du netop udsendelsen af en alfa-partikel er en favoriseret type henfald?

2) Hvad er reaktionens Q-værdi? Ville denne reaktion forekomme naturligt? Du kan anvende følgende atomare masser:

$$\begin{aligned} M(^{238}\mathrm{U}) &= 238,05079 \text{ u} \\ M(^{234}\mathrm{Th}) &= 234,04360 \text{ u} \\ M(^{4}\mathrm{He}) &= 4,002602 \text{ u} \end{aligned}$$

.

•• **Opgave 2: Berylliums isotoper**
Det lette grundstof beryllium har i alt otte isotoper, hvoraf kun Be-9 er stabil.

1) Sammenlign den atomare masse af Be-8 med massen af to He-4. Hvad kan man konkludere herfra?

2) Sammenlign også den atomare masse af Be-9 med massen af ^{7}Li og ^{2}H. Hvad fortæller dette dig?

Du kan anvende følgende masser:

$$M(^2\text{H}) = 2,014102 \text{ u}$$
$$M(^4\text{He}) = 4,002602 \text{ u}$$
$$M(^7\text{Li}) = 7,016003 \text{ u}$$
$$M(^8\text{Be}) = 8,005305 \text{ u}$$
$$M(^9\text{Be}) = 9,012174 \text{ u}$$

••• **Opgave 3: Kerners tæthed**

En atomkerne kan antages at være en kugle, sådan at volumen er givet som $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Vis, at tætheden af en kerne ikke afhænger af grundstoffet, altså at tætheden er ens for alle kerner. *Hint: anvend at massen af en kerne i atomare masseenheder ca. er lig massetallet for kernen, altså at $m \approx A$.*

• **Opgave 4: Den stærkest bundne kerne**

^{62}Ni har den højeste bindingsenergi per nukleon af alle kerner.

1) Hvor meget energi skal der til for at splitte kernen ad? Anvend at den atomare masse af ^{62}Ni er 61, 928349 u.

• **Opgave 5: Splittelsen af en kerne**

Antag følgende reaktion:

$$^{28}_{14}\text{Si} + \gamma \rightarrow ^{24}_{12}\text{Mg} + X,$$

hvor X er en kerne.

1) hvad er A og Z for X?

2) hvis vi antager at energien af fotonen ikke går til kinetisk energi for $^{24}_{12}$Mg og X, hvad er så dens energi? Anvend at massen af et Si-28-atom er 27, 976927 u og at massen af et Mg-24-atom er 23, 985042 u

•• **Opgave 6: Fusion i Solen**

Stjerner som Solen skinner på grund af den fusion som foregår i deres kerner. Temperaturen i stjernernes kerner er så høje, at elektronerne er frie, altså ikke bundet til atomer. I Solen omdannes 4 protoner gennem en række skridt (kaldet pp-kæden) til én ^{4}He-kerne. Helt overordnet kan reaktionen skrives som:

$$4p \rightarrow \alpha + 2e^+ + 2\nu_e + E,$$

Dvs. der bliver desuden dannet to positroner og 2 elektronneutrinoer samt en mængde energi.

1) Hvor meget energi dannes i ovenstående reaktion? Antag at elektronneutrinoens masse er 0. Du kan anvende *den atomare masse* af helium: $M(^4\text{He}) = 4,002602$ u.

2) pp-kæden starter ved at to protoner mødes. Men i kraft af deres ladning vil de frastøde hinanden, og de skal derfor have tilstrækkelig bevægelsesenergi for at det kan lade sig gøre. Det elektriske potential (barrieren) mellem to ladede partikler er givet ved:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}. \tag{8.1}$$

Potentialet U er i joule, hvis ladningerne af partiklerne angives i coulomb. Antag at den stærke kernekraft overvinder den elektriske frastødning når de to protoner kommer i afstanden af $1,4 \cdot 10^{-15}$m fra hinanden. Hvad er den samlede minimale energi af protonerne?

3) Det er kun muligt for atomer og partikler at have så høje energier ved virkelig høje temperaturer. Den gennemsnitlige energi af partikler og temperaturen af det medie, de befinder sig i, er relateret til hinanden via:

$$E = \frac{3}{2}kT, \tag{8.2}$$

hvor k er Boltzmanns konstant og T er temperaturen i grader Kelvin. Hvad er temperaturen svarende til energien du fandt i foregående opgave? Solens kernetemperatur er ca. $1,5 \cdot 10^7$K. Hvordan sammenlignes det med dit resultat?

4) NB: sjov opgave! Vi kan prøve at antage, at al energien der bliver produceret i ovenstående reaktion bliver båret væk af neutrinoer. Lad os også antage at al Solens udstråling bliver skabt ved ovenstående reaktion. Ved Jordens overflade modtages Solens udstråling (kaldet solkonstanten S_0) ved værdien: $S_0 = 1,362 \cdot 10^3 Jm^{-2}s^{-1}$. Hvor mange neutrinoer fra Solen rammer en kvadratcentimeter af Jordens overflade hvert sekund? Hvor mange solneutrinoer rammer spidsen af din finger hvert sekund?

•• Opgave 7: Dannelse af tunge grundstoffer i en supernova: r- og s-proces

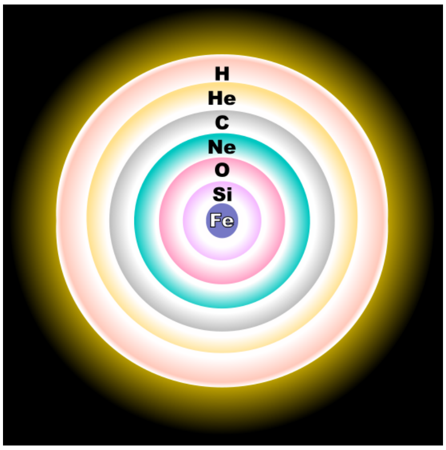
Stjerner kan kun fusionere grundstoffer op til jern. Figur 8.1 viser tværsnittet af en tung stjerne som befinder sig i slutningen af dens levetid.

1) Forklar løgstruktur-udseendet af stjernen. Hvad er grunden til at stjerner ikke kan danne elementer tungere end jern ved fusion?

Elementer tungere end jern må da være dannet andetsteds end i stjernernes indre. Et miljø, hvor der dannes tunge grundstoffer er de energirige supernova-eksplosioner. Her bliver grundstofferne ikke dannet ved fusion, men ved neutron-indfangning og senere β^--henfald af kernen. Det kunne f.eks. foregå på følgende måde:

$$^A_Z\text{X}_N + n \rightarrow ^{A+1}_Z \text{X}_{N+1} \rightarrow ^{A+1}_{Z+1} \text{Y}_N + e^- + \overline{\nu}_e$$

I en supernova-eksplosion skabes en kæmpe mængde neutroner, som gør neutron-indfangning muligt. Men kerner med ekstra neutroner er ustabile og vil henfalde ved hjælp af β^--henfald. Derfor



Figur 8.1: Skalstruktur i stjerner

kan man sige, at neutron-indfangningen og henfaldene konkurrerer med hinanden. Hvis neutron-indfangningen kan ske hurtigere end kernen kan nå henfalde kaldes det for en r-proces ("r"for *eng: rapid* - hurtig). Hvis kernen når at henfalde inden den kan indfange en ny neutron kaldes det for en s-proces ("s"for *eng: slow* - langsom).

Figur 8.2 viser et udsnit af kernekortet omkring $N \sim 100$ og $Z \sim 70$.

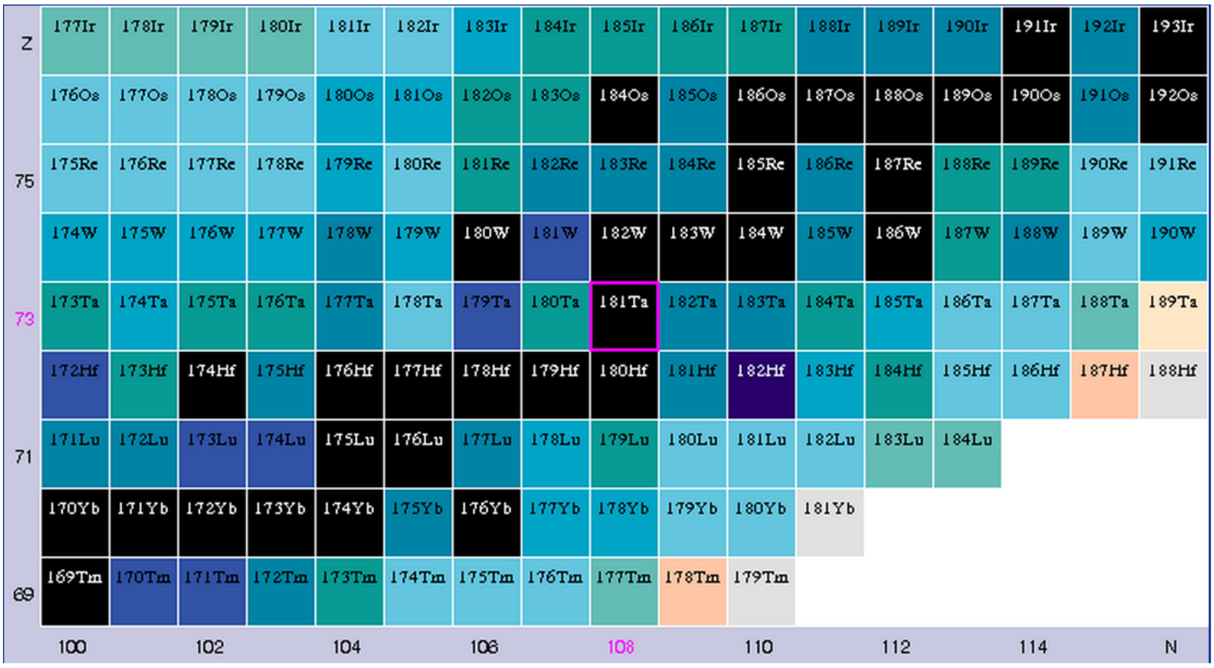
De sorte firkanter repræsenterer kerner som er stabile, og derfor ikke kan undergå henfald.

2) Hvordan ændrer en kerne sig på kortet hvis den fanger én neutron? Hvordan ændrer en kerne sig på kortet hvis den undergår β^{-}-henfald?

3) Start ved kernen 181-Ta. Antag at kernen undergår 5 neutron-indfangninger ved r-proces. Hvilken kerne bliver dannet (til sidst?)

4) Antag nu at kernen undergår 5 neutron-indfangninger ved s-proces. Hvilken kerne bliver dannet?

5) Kan kernen 180-Ta dannes ved neutronindfangning? Forklar dit svar.



Figur 8.2: Et udsnit af kernekortet

Partikelfysik

Opgave 8: Bevarelseslove

1) Hvilke bevarelseslove gør sig gældende i partikelfysik?

2) Kig på følgende reaktioner og bestem, om de kan lade sig gøre eller ej.

1. $e^- \longleftrightarrow e^- + e^+ + e^+$
2. $p + n \longleftrightarrow e^- + e^+ + e^+$
3. $p + n + e^+ \longleftrightarrow n + p + \overline{\nu}_e$
4. $p \longleftrightarrow \mu^- + n + \overline{\nu}_\mu$
5. $p \longleftrightarrow \mu^+ + n + \nu_\mu$
6. $\overline{n} \longleftrightarrow \overline{p} + e^+ + \nu_e$
7. $e^- + \mu^+ \longleftrightarrow n$

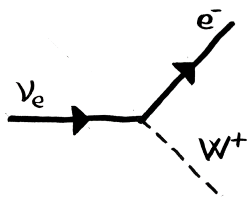
Hint: tjek om bevarelseslovene er opfyldt.

Opgave 9: Dannelse af to muoner •

Tegn et feynman-diagram, hvor en foton danner muoner i en pardannelsesproces. Hvad er den minimalt krævede energi af fotonen?

•• **Opgave 10: Reaktioner med $W^{\pm}$-partiklen**

Betragt reaktionen i Figur 8.3.

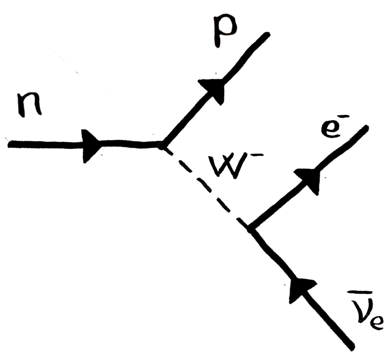


Figur 8.3: Udsendelse af en W^+-boson.

1) Rotér feynmandiagrammet mod uret så det viser en indkommende positron i stedet. Hvad slags neutrino produceres der? Hvad er nu ladningen af W-bosonen?

2) Udskift positronen med en elektron. Hvad slags neutrino produceres der og hvad er ladningen af W-bosonen?

Feynman–diagrammet for et beta–minus–henfald er vist i Figur 8.4.

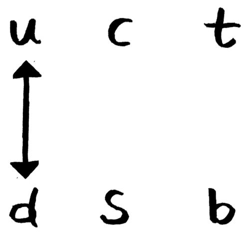


Figur 8.4: Beta-minus-henfald.

3) Tegn feynman-diagrammet for et beta-plus-henfald: $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$.

4) Tegn feynman-diagrammet for en elektron-indfangning: $p + e^- \to n + \nu_e$.

Som nævnt i kompendiet består neutronen og protonen af kvarker, som kan omdannes ved hjælp af W-bosonen, så deres ladningen ændres med enten ± 1, f.eks. u⟷ d. Figur 8.5 viser en oversigt over kvarkerne, hvor pilen mellem u– og d– kvarken betyder, at W-bosonen kan ændre disse kvarker til hinanden.



Figur 8.5: W-bosonen kan ændre kvarker til en anden type så længe ladningen ændres med ± 1

5) Indtegn på figur 8.5 pile mellem alle de kvarker, som W kan omdanne.

6) En t-kvark omdannes til en b-kvark under udsendelse af en W-partikel. Tegn feynman-diagrammet. Hvad er ladningen af W?

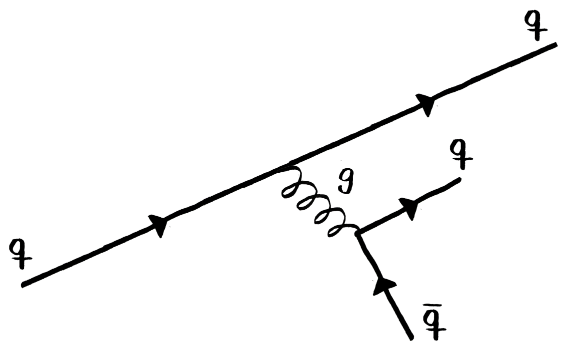
7) En s-kvark og en anti-c kvark annihilerer og skaber en W-partikel. Tegn feynman-diagrammet. Hvad er ladningen af W?

8) Tegn feynmandiagrammet for et beta-minus-henfald, men denne gang tegn neutronens og protonens kvarker som en del af reaktionen. *Hint: partikler kan sagtens optræde uændret i et feynman-diagram.*

Opgave 11: Feynman-diagrammer: en sand kunstart

NB: det er en god idé at lave opgave 10 inden denne opgave.

Før vi er helt klar til at give os i kast med en masse feynman-diagrammer, skal gluonen (g) introduceres. Gluonen, som bærer den stærke vekselvirkning, virker ved at ændre en egenskab ved kvarkerne kaldet *farve*. Feltet som beskæftiger sig med dette kaldes for kvantekromodynamik, og det er det, som beskriver hvorfor kvarkerne kun kan eksistere i grupper af tre (hadronerne) og to (mesonerne). Kvantekromodynamik er dog en anelse ud over niveauet for denne camp, men det forhindrer os ikke i at gøre brug af gluonen i vores feynman-diagrammer. Figur 8.6 viser en typisk vekselvirkning med gluonen, som normalt tegnes som en fjederform. Heri udsender en vilkårlig kvark en gluon og fortsætter. Kvarktypen ændrer sig ikke under udsendelse af en gluon (kun dens farve, men igen, det behøver vi ikke tage højde for). Gluonen henfalder til et vilkårligt kvark-antikvark-par. Gluonens energi afgør, hvilket kvark-antikvark-par der kan dannes, men u- og d-kvarken er de mindst energirige (mindst massive) og kan derfor altid dannes med høj sandsynlighed. Det betyder, at det er "gratis" at introducere en gluon i dit feynman-diagram, som enten henfalder til et u$\overline{\text{u}}$- eller d$\overline{\text{d}}$-par.

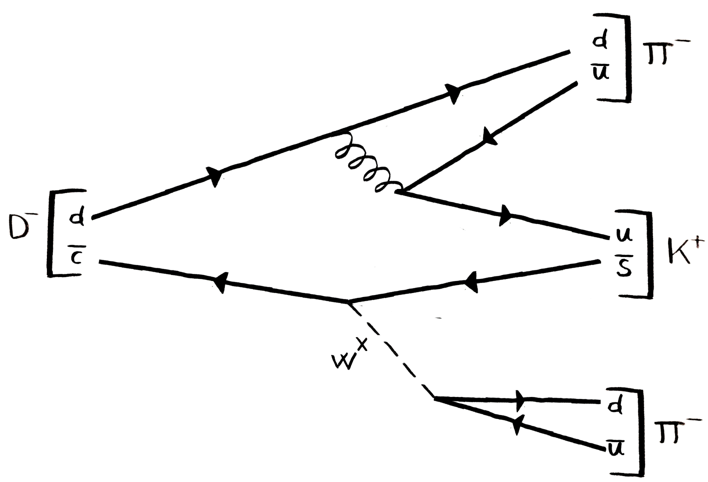


Figur 8.6: Reaktion med gluonen g.

Nu skal vi sætte vores nylærte egenskaber til prøve med henfald af sammensatte partikler. Som eksempel kigger vi på henfaldet:

$$D^{-} \rightarrow K^{+} + \pi^{-} + \pi^{-}.$$

Dette er henfaldet af D^{-}-mesonen (kvarksammensætning: $d\bar{c}$) til mesonerne K^{+} ($u\bar{s}$), og to π^{-} ($d\bar{u}$). Et sådant henfald er vist i figur 8.7. Læg mærke til, at man kan sætte klammer om de kvarker, der hører sammen i en partikel. Udfordringen består i at lave et feynman-diagram som er så overskueligt som



Figur 8.7: Henfaldet af D^{-}.

muligt (f.eks. uden krydsende pile) og som gør brug af *mindst mulige vertexer og derved virtuelle partikler.* Fysisk set betyder færre vertexer = større sandsynlighed.

1) Hvad er ladningen af W-bosonen i figur 8.7?

2) Beskriv med ord hvad der sker med hver af kvarkerne i D^{-}-mesonen.

3) Prøv at lave et feynman-diagram for henfaldet: $D^{-} \rightarrow K^{-} + \pi^{+} + \pi^{-}$. *Hint: start med at finde* *kvarksammensætningen af partiklerne.*

•• Opgave 12: Relativistiske partikler

Partikelacceleratorer gør brug af, at partikler kan opnå kæmpe energi ved at blive accelereret op i nærheden af lysets hastighed c. Hvis en observatør målte massen af en partikel med hastigheden v, ville han måle en større masse end den masse partiklen har, hvis den er i hvile. Man kan vise, at den masse som observatøren måler (kaldet den relativistiske masse, m_{rel}) er relateret til partiklens hvilemasse m og hastighed v gennem:

$$m_{\text{rel}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{8.3}$$

1) I en bestemt accelerator accelereres elektroner ($m = 0,511\text{Mev/c}^2$) op sådan at deres energi bliver $E = 580\text{Mev}$. Brug $E = m_{\text{rel}}c^2$ til at finde elektronernes hastighed i enheder af lysets hastighed c.

2) Hvad er elektronernes relativistiske masse?

•• Opgave 13: Flere feynman-diagrammer

NB: det er en god idé at du har lavet opgave 11 inden denne opgave.

Tegn feynman-diagrammer for følgende henfald. Husk at gøre brug af mindst mulige vertexer.

1) $B^-(b\overline{u}) \longrightarrow D^0(c\overline{u}) + \rho^-(d\overline{u})$

2) $\Sigma^-(dds) \longrightarrow \Lambda^0(uds) + e^- + \overline{\nu}_e$

3) $\Delta^0(udd) \longrightarrow p + \pi^-(d\overline{u})$

4) $D_s^+(c\overline{s}) \longrightarrow \phi(s\overline{s}) + \rho^+(u\overline{d})$

5) $\Omega^-(sss) \longrightarrow \Xi^-(dss) + \pi^0(u\overline{u})$

Kapitel 9

Kerne– og Partikelfysik Facitliste

Kernefysik

• Opgave 1: Alfa-henfald

$$^{238}_{92}\text{U} \rightarrow^{234}_{90} \text{Th} +^{4}_{2} \text{He}.$$

1) Alfa-partiklen har både magiske tal $Z = 2$ og $N = 2$, og er derfor utroligt stabil. Det er særligt energimæssigt favorabelt at henfalde til en kerne og en alfa-partikel end f.eks. to arbitrære kerner.

2) Reaktionens Q-værdi udregnes som $Q = (M_i - M_f)c^2$. Her er $M_i = M(^{238}_{92}\text{U})$ og $M_f = M(^{232}_{90}\text{Th} + M(^{4}_{2}\text{He}))$. Med masserne opgivet i atomare masse-enheder anvendes det, at der omregnes til energi gennem $1u = 931,49406\text{MeV}/\text{c}^2$. Dette giver:

$$Q = 4,273695 \text{ MeV}$$

Q-værdien er positiv, så reaktionen kan forekomme naturligt.

•• Opgave 2: Berylliums isotoper

1) Den atomare masse af Be-8 sammenlignes med massen af to He-4. Be-8 er tungere end to He-4 med:

$$\begin{aligned}\Delta m &= 8,005305 \text{ u} - 2 \cdot 4,002602 \text{ u} \\ &= 1,01 \cdot 10^{-4}\text{u}\end{aligned}$$

og det er derfor energimæssigt favorabelt for Be-8 at opsplitte i to He-4.
Evaluering: Det er også det der observeres eksperimentelt. Processen udløser $0,0941 \text{ MeV}/\text{c}^2$ i energi.

2) Forskellen mellem massen af Be-9 og masserne af ^{7}Li og ^{2}H er:

$$\begin{aligned}\Delta m &= 9,012174\ \text{u} - (7,016003\ \text{u} + 2,014102\ \text{u})\\ &= -1,80 \cdot 10^{-2}\ \text{u}.\end{aligned}$$

Altså er massen af Li-7 og H-2 større end massen af Be-9.
Det betyder at opsplittelsen af en Be-9-kerne til en Li-7- og H-2-kerne ikke kan forekomme.
Evaluering: Isotopen Be-9 er rigtig nok stabil.

••• Opgave 3: Kerners tæthed

Tætheden er massen delt med volumen, $\rho = \frac{m}{V}$. Volumen for en kerne, hvis den antages at være kugleformet, er $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Radius af en kerne er $R = R_0 A^{1/3}$. Anvendes $m \approx A$, ses det, at tætheden af en atomkerne kan siges at være:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{V}\\ &\approx \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A}\\ &= \frac{3}{4\pi R_0^3}\end{aligned}$$

Massetallet A optræder ikke ovennævnte ligning, og tætheden er derfor uafhængig af, hvilken type kerne man har med at gøre, og er derfor ens for alle kerner.

• Opgave 4: Den stærkest bundne kerne

Den energi der skal til for at splitte ^{62}Ni ($A = 62$, $Z = 28$ og $N = 34$) er bindingsenergien, E_B. Den udregnes ved:

$$\begin{aligned}E_B &= (-\Delta M)c^2\\ &= -(M(62,28) - 28(m_p + m_e) - 34m_n)c^2\\ &= 0,585\ \text{u}c^2\\ &= 544,92\ \text{MeV}\end{aligned}$$

Det er den energi, det kræver at splitte Ni-62. **Evaluering:** med bindingsenergien per nukleon på ca. 8, 8 er Ni-62 den stærkest bundne kerne.

• Opgave 5: Splittelsen af en kerne

$$^{28}_{14}\text{Si} + \gamma \rightarrow ^{24}_{12}\text{Mg} + X,$$

1) Det ses, at A for X må være $28 - 24 = 4$ og $Z = 14 - 12 = 2$. X er derfor ${}^{4}_{2}$He.

2) Hvis vi antager at energien af fotonen ikke går til kinetisk energi for ${}^{24}_{12}$Mg og X, så er dens energi præcis tilsvarende masseforskellen mellem kernerne på hver side af reaktionstegnet. Vi kender massen af et He-atom til at være 4, 002602 u, mens de andre masser er givet. Energien af fotonen må være:

$$\begin{aligned} E_\gamma &= (M(24,12) + M(4,2) - M(28,14))c^2 \\ &= 0,011\ \mathrm{u}c^2 \\ &= 10,25\ \mathrm{MeV} \end{aligned}$$

.

•• Opgave 6: Fusion i Solen

$$4p \to \alpha + 2e^+ + 2\nu_e + E,$$

Dvs. der bliver desuden dannet to positroner og 2 elektronneutrinoer samt en mængde energi.

1) Som overslag kan bruges, at massen af en alfa-partikel + massen af to positroner er den atomare masse af He-4, $M(4,2) = 4,002602$ u. Den energi der dannes er Q-værdien:

$$\begin{aligned} Q &= E_i - E_f \\ &= (4m_p - 4,002602\ \mathrm{u})c^2 \\ &= 24,7\ \mathrm{MeV}. \end{aligned}$$

Ovenstående svar er godtaget. Men hvis man har kendskab til annihilation skal man medtage, at de to positroner vil annihilere med elektronerne i plasmaet. Dette giver (minimum) energien svarende til 4 gange elektronens hvilemasse (idet $2e^+ + 2e^- \to \gamma$). Dette giver ekstra 2 MeV.

2) For at få enhederne til at stemme skal ladningerne af protonerne angives i coloumb, $1e = 1,60217 \cdot 10^{-19}$ C Den minimale energi krævet af protonerne er givet ved:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(1,602176565 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\right)^2}{1,4 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}} \\ &= 1,648 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

Svaret kan angives i både eV eller J, men vi skal bruge størrelsen i J i næste opgave.

3) Energien fundet i foregående opgave indsættes i formlen:

$$E = \frac{3}{2}kT.$$

Temperaturen findes ved:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{3}\frac{E}{k} \\ &\approx 8 \cdot 10^9 \text{ K}. \end{aligned}$$

Det er temperaturen det kræver før protonerne besidder energien fundet i foregående opgave. Solens kernetemperatur er ca. $1,5 \cdot 10^7$K - altså meget lavere end den temperatur vi har fundet!

Evaluering: Fusionen af to protoner finder alligevel sted i Solens indre, til trods for den "lave"temperatur. Temperaturen af protonerne følger en fordeling, som topper ved temperaturen $1,5 \cdot 10^7$K. Det betyder at størstedelen af protonerne har denne temperatur. Men det er muligt for protonerne at have både højere og lavere temperaturer end dette - derfor kan fusionen foregå. Det sker bare med meget lavere sandsynlighed. Det er bl.a. det der afgør hvorfor stjerner som Solen har lang levetid!

4) Solkonstanten er energi i joule der rammer hver kvadratmeter af Jordens overflade per sekund. Omregning fra joule til MeV:

$$\begin{aligned} \text{J} &= \frac{1}{1,60217 \cdot 10^{-19}}\text{eV} \\ &= \frac{1}{1,60217 \cdot 10^{-19}}\text{eV} \cdot 10^{-6} \text{ MeV/eV} \end{aligned}$$

Vi starter med at omregne til kvadratcentimeter og MeV:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1,362 \cdot 10^3 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^{-1} \\ &= 1,362 \cdot 10^7 \text{ Jcm}^{-2}\text{s}^{-1} \\ &= 1,362 \cdot 10^7 \text{ Jcm}^{-2}\text{s}^{-1} \cdot \frac{1}{1,60217 \cdot 10^{-19}}\text{eV/J} \cdot 10^{-6} \text{ MeV/eV} \\ &\approx 8,5 \cdot 10^{19} \text{ MeVcm}^{-2}\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Hvis al energi fra Solen dannes af ovenstående reaktion, forekommer der S_0/E reaktioner per sekund, hvor E er energien udløst i reaktionen regnet i foregående opgave. Der dannes to neutrinoer per reaktion, så fluxen af neutrioner per kvadratcentimeter per sekund på Jordens overflade er:

$$\begin{aligned} \Phi_\nu &= 2\frac{S_0}{E} \\ &= 2\frac{8,5 \cdot 10^{19} \text{ MeVcm}^{-2}\text{s}^{-1}}{24,7 \text{ MeV}} \\ &\approx 7 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

En fingerspids har ca. areal på 1 cm^2. Antal neutrinoer som rammer en fingerspids per sekund er da:

$$\begin{aligned} \text{antal:} &= \Phi/\text{areal} \\ &\approx 7 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Evaluering: Dette tal er stærkt overvurderet idet vi antog, at *al* Solens energi blev båret væk af neutrinoer.

Opgave 7: Dannelse af tunge grundstoffer i en supernova: r- og s-proces ••

1) I kernen fusioneres lettere elementer til tungere. Dette skaber løgstruktur i stjernen med lette elementer yderst og tunge elementer inderst. Bindingsenergien for jern er så høj, at stjernen ikke vinder energi ved at omdanne lettere grundstoffer til jern. Derfor stopper fusionen, når stjernen har opnået en jern-kerne.

2) Hvis en kerne fanger én neutron, ændrer N sig med +1. Det svarer til at tage ét skridt til højre på kernekortet. Hvis kernen undergår beta-minus-henfald, så falder N med 1 og Z stiger med 1. Det svarer til at tage ét skridt skråt tilbage på kernekortet.

3) Ved fem r-proces neutronindfangninger svarer det til at gå fem skridt mod højre på kernekortet. Her ender man ved kernen 186-Ta. Herefter henfalder kernen ved beta-minus indtil den når en stabil kerne, dvs. man går skråt tilbage på kernekortet til man rammer en sort firkant. Man ender ved 186-W.

4) Ved fem s-proces skal der tages et skridt skråt tilbage efter hvert skridt til højre, hvis kernen er ustabil. Her ender man ved 186-Os.

5) Kernen 180-Ta kan ikke dannes ved neutronindfangning, da den befinder sig på den anden side af stabilitetslinjen.

Partikelfysik

- **Opgave 8: Bevarelseslove**

1) Følgende bevarelseslove gør sig gældende:

- Lepton-tal
- Baryon-tal
- Energi
- Impuls
- Ladning

For at tjekke om en reaktion kan lade sig gøre, tjekkes der for bevarelse af lepton-tal, baryon-tal og ladningsbevarelse.

2)

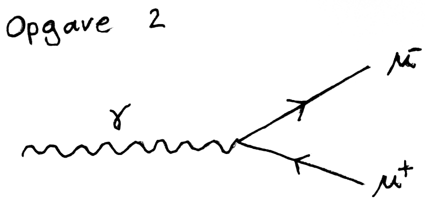
1. $e^- \longleftrightarrow e^- + e^+ + e^+$ (ikke tilladt, ladning og lepton-tal)
2. $p + n \longleftrightarrow e^- + e^+ + e^+$ (ikke tilladt, baryon-tal og lepton-tal)
3. $p + n + e^+ \longleftrightarrow n + p + \overline{\nu}_e$ (ikke tilladt, ladning)
4. $p \longleftrightarrow \mu^- + n + \overline{\nu}_\mu$ (ikke tilladt, ladning)
5. $p \longleftrightarrow \mu^+ + n + \nu_\mu$ (tilladt)
6. $\overline{n} \longleftrightarrow \overline{p} + e^+ + \nu_e$ (tilladt)
7. $e^- + \mu^+ \longleftrightarrow n$ (ikke tilladt, baryon-tal og lepton-tal)

.

- **Opgave 9: Dannelse af to muoner**

Feynman-diagram, hvor en foton danner muoner i en pardannelsesproces: En muon har hvilemassen 105, 7 MeV/c^2. Energien for at danne et par er derfor givet ved:

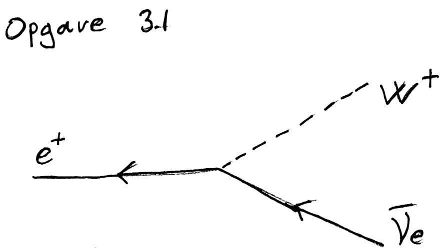
$$\begin{aligned} E &= 2m_\mu c^2 \\ &= 211,4 \text{ MeV} = 3,38\ 10^{-17}\text{J} \end{aligned}$$



Figur 9.1: Muon pardannelse

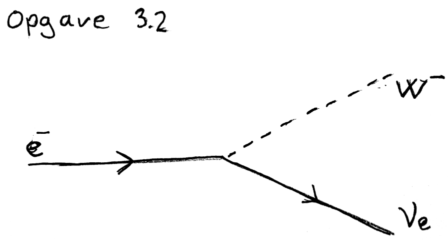
Opgave 10: Reaktioner med $W^{\pm}$-partiklen ●●

1) Se figur 9.2. Elektronen bliver til en positron og elektronneutrinoen bliver til en anti-elektronneutrino.



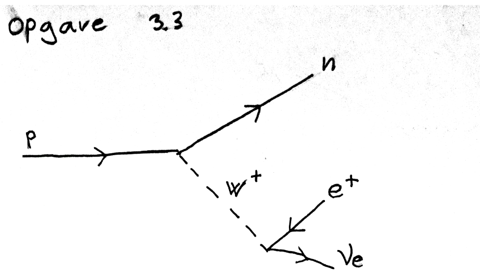
Figur 9.2: Rotation af Feynmandiagram.

2) Se figur 9.3. Positronen bliver til en electron og anti-elektronneutrinoen bliver til en elektronneutrino.



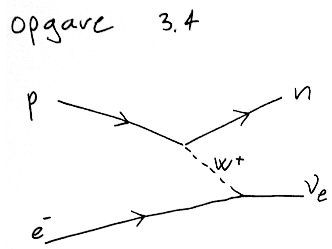
Figur 9.3: Elektron i stedet for positron som indgang.

3) Feynman-diagrammet for et beta-plus-henfald: $p \rightarrow n + e^{+} + \nu_e$. Se figur 9.4. Protonen bliver til en neutron under udsendelse af en W^{+}-partikel, der henfalder til et positron-elektronneutrino-par.



Figur 9.4: Beta plus henfald

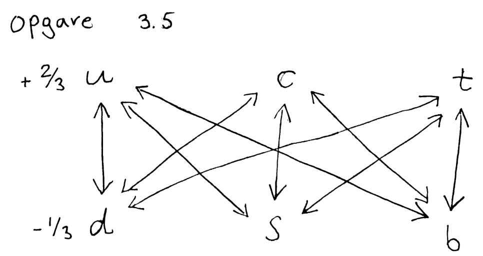
4) Tegn feynman-diagrammet for en elektron-indfangning: $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Se figur 9.5. Processen sker



Figur 9.5: Elektron-indfangning

i to trin: udsendelsen af en W-boson fra protonen under omdannelse til en neutron. W-bosonen kan møde elektronen og danne en elektron-neutrino.

5) Indtegn på figur 8.5 pile mellem alle de kvarker, som W kan omdanne. Se figur 9.6.

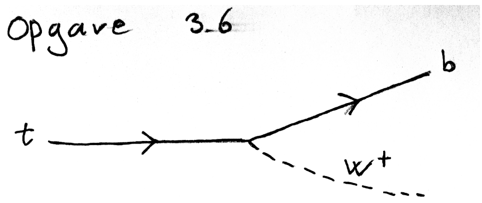


Figur 9.6: Kvarkomdannelser, som W kan lave.

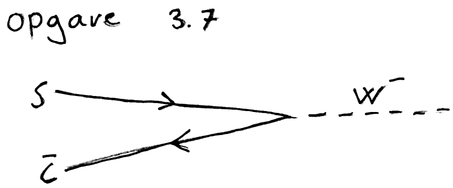
6) Se figur 9.7. Ladningen af W er +1.

7) Se figur 9.8. Ladningen af W er -1.

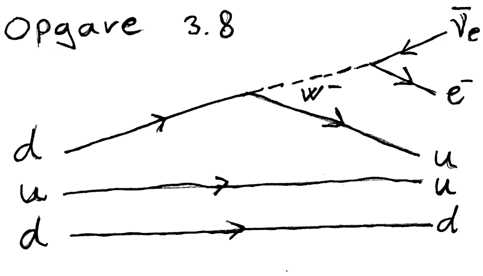
8) Se figur 9.9.



Figur 9.7: t-kvark omdannes til b-kvark.



Figur 9.8: s-kvark og anti-c kvark annihilerer.



Figur 9.9: Beta minus henfald.

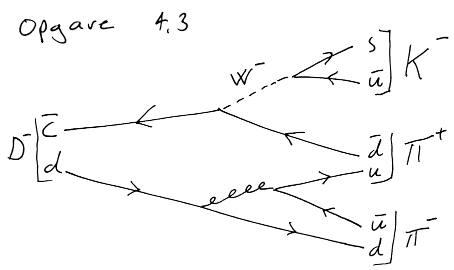
Opgave 11: Feynman-diagrammer: en sand kunstart ●●●

1) Ladningen af W er -1.

2) Den ene kvark udsender en gluon og passerer derefter uændret. Gluonen henfalder til et kvark/anti-kvark-par. Den anden kvark i D^--mesonen ændres under udsendelse af en W^-1. Denne W^- henfalder og skaber to nye kvarker.

3) Se figur 9.10.

●● Opgave 12: Relativistiske partikler



Figur 9.10: Feynmandiagram for henfald af D^--mesonen.

1)

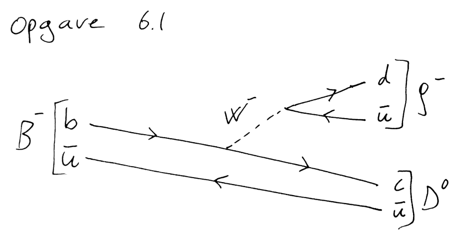
$$
\begin{aligned}
E &= m_{\text{rel}} c^2 \\
E &= \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2 \\
v/c &= \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} \\
&= 0,99999961
\end{aligned}
$$

2) Den relativistiske masse er allerede givet af opgaven gennem Einsteinś formel $E = mc^2$:

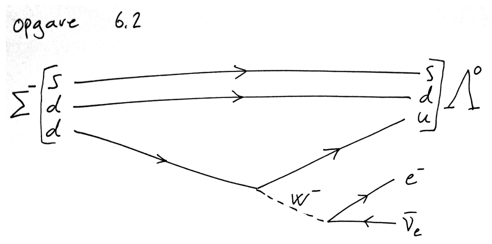
$$m_{\text{rel}} = 580 \text{ MeV/c}^2 = 1,03\ 10^{-27} \text{ kg}$$

•• Opgave 13: Flere feynman-diagrammer

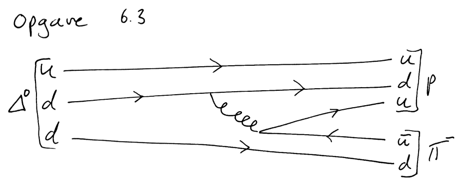
1) $B^-(b\overline{u}) \longrightarrow D^0(c\overline{u}) + \rho^-(d\overline{u})$ Se figur 9.11.



Figur 9.11: Feynmandiagram for henfald af B^-.



Figur 9.12: Feynmandiagram for henfald af Σ^-.

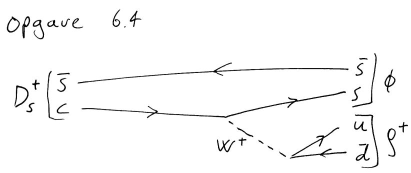


Figur 9.13: Feynmandiagram for henfald af Δ^0.

2) $\Sigma^-(dds) \longrightarrow \Lambda^0(uds) + e^- + \overline{\nu}_e$ Se figur 9.12.

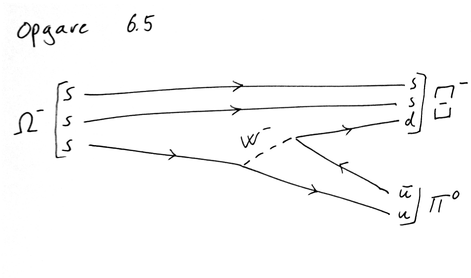
3) $\Delta^0(udd) \longrightarrow p + \pi^-(d\overline{u})$ Se figur 9.13.

4) $D_s^+(c\overline{s}) \longrightarrow \phi(s\overline{s}) + \rho^+(u\overline{d})$ Se figur 9.14.



Figur 9.14: Feynmandiagram for henfald af D_s^+.

5) $\Omega^-(sss) \longrightarrow \Xi^-(dss) + \pi^0(u\overline{u})$ Se figur 9.15.



Figur 9.15: Feynmandiagram for henfald af Ω^-.

Kapitel 10

Elektromagnetiske Bølger Opgaver

træningsmatematik

- **Opgave 1: Gradient**
  Find gradienten (∇f) af følgende funktioner:
  1) $f(x, y) = x$
  2) $f(x, y) = x^2 - y^2$
  3) $f(x, y) = xy + \cos(xy)$
  4) $f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + xyz$
  5) $f(x, y, z) = \frac{\cos(x)+\sin(y)}{z}$

- **Opgave 2: Divergens**
  Find divergensen ($\nabla \cdot \mathbf{F}$) af følgende funktioner:
  1) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}}$
  2) $\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 y \\ -xy^2 \end{bmatrix}$
  3) $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin(x)\hat{\mathbf{x}} + \cos(y)\hat{\mathbf{y}}$
  4) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}} - e^z$
  5) $\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2\cos(y) \\ y^2\cos(z) \\ z^2\cos(x) \end{bmatrix}$
  6) $\mathbf{F}(x, y) = e^z(y^2\hat{\mathbf{x}} + x^2\hat{\mathbf{y}})$

- •• **Opgave 3: Rotation**

Find rotationen ($\nabla \times \mathbf{F}$) af følgende funktioner:

1) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}}$

2) $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 y \\ -xy^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

3) $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin(x)\hat{\mathbf{x}} + \cos(y)\hat{\mathbf{y}}$

4) $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\hat{\mathbf{x}} + x^2\hat{\mathbf{y}} - \mathrm{e}^z$

5) $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2\cos(y) \\ y^2\cos(z) \\ z^2\cos(x) \end{bmatrix}$

6) $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathrm{e}^z(y^2\hat{\mathbf{x}} + x^2\hat{\mathbf{y}})$

●● Opgave 4: Bølgeligningen

Er de følgende funktioner løsninger til bølgeligningen:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

1) $f(z, t) = z^2 + t^2$

2) $g(z, t) = \cos(kz - \omega t) + \sin(2kz + 2\omega t)$

3) $h(z, t) = \cos(kz)\cos(\omega t)$

4) $i(z, t) = \cos(zt)$

● Opgave 5: Gange matrix med vektor

Givet matricen **A** og en vektor **v**, hvad er **Av** for forskellige **v**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

6) Er der noget særligt ved nogle af vektorerne?

• **Opgave 6: Matrix multiplikation**

Udregn følgende matrix regnestykker.

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4$

5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$

6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

•• **Opgave 7: Genereliserede vektorer (Bonus)**

Vi har indtil vidre brugt vektorer til at beskrive størrelser der har en retning og en længde. Dette er en vigtig egenskab ved vektorer, men matematisk er alt der lægges sammen og ganges med skalarer som vektorer også vektorer. Blandt andet gælder det for polynomier (og alle andre funktioner). Det er derfor muligt at oversætte polynomier til koordinatvektorer. Vi vil her se på andengradspolynomier oversat til 3-diminsionelle vektorer.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv p_2(x) = x^2 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv p_1(x) = x \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv p_0(x) = 1 \tag{10.1}$$

1) Hvad bliver parabelen $f(x) = ax^2 + bx + c$ som koordinatvektor.

2) Differentier p_2, p_1 og p_0, og brug det til at opstille matricen $\mathbf{D}$ der beskriver differentiering.

3) Find dobbelt differentialet D^2 og tripelt differenitalet D^3 med matrix multiplikation. Stemmer det overens med hvad du ville forvente?

Spejer man grafen i y-aksen svarer det til at skifte fortegn på inputtet af funktionen: $f(x)$ bliver $f(-x)$. Dette kaldes også for paritet.

4) Find den matrix $\mathbf{P}$ der beskriver paritets transformationen af en parabel.

5) Find $\mathbf{DP}$ og $\mathbf{PD}$. Har det en betydning om man tager paritet før man differentierer eller efter.

Bemærk: Man ganger 3-dimensionelle matricer sammen på samme måde som 2-dimensionelle.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1 + bv_2 + cv_3 \\ dv_1 + ev_2 + fv_3 \\ gv_1 + hv_2 + iv_3 \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1d_2 + c_1g_2 & a_1b_2 + b_1e_2 + c_1h_2 & a_1c_2 + b_1f_2 + c_1i_2 \\ d_1a_2 + e_1d_2 + f_1g_2 & d_1b_2 + e_1e_2 + f_1h_2 & d_1c_2 + e_1f_2 + f_1i_2 \\ g_1a_2 + h_1d_2 + i_1g_2 & g_1b_2 + h_1e_2 + i_1h_2 & g_1c_2 + h_1f_2 + i_1i_2 \end{bmatrix} \tag{10.3}$$

• Opgave 8: En elektrisk ladet plade

En elektrisk ladet plade med tykkelse l ligger i xy-planen. Det elektriske felt er $E_z = A$ ovenover pladen, $E_z = Bz$ inde i pladen og $E_z = C$ under pladen.

$$E_z = \begin{cases} A \text{ for } z \geq \frac{l}{2} \\ Bz \text{ for } \frac{l}{2} \geq z \geq \frac{-l}{2} \\ C \text{ for } \frac{-l}{2} \geq z \end{cases}$$

1) Hvis den elektriske feltstyrke skal være kontinuert, Hvad er A og C udtryk i B

2) Brug Gauss lov til at finde ladningstætheden langs z-aksen i de tre intervaller.

•• Opgave 9: Tre dimmensionelle ladningsfordelinger

Brug Gauss lov til at finde ladningsfordelingerne der giver de følgende felter:

1) $\mathbf{E} = A\hat{\mathbf{z}}$

2) $\mathbf{E} = \frac{A}{3}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$

3) $\mathbf{E} = Az^2\hat{\mathbf{z}}$

4) $\mathbf{E} = Ay^3\hat{\mathbf{y}}$

5) $\mathbf{E} = A(z^2\hat{\mathbf{z}} + y^3\hat{\mathbf{y}})$

6) $\mathbf{E} = \frac{A}{xy}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$

Opgave 10: Integralformen af Gauss lov

Vi ser på samme plade som i opgave 8. Flux er et mål for hvor meget et f.eks. elektrisk felt der går igennem en overflade:

$$\Phi_E = \iint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iint E \cos\theta \mathrm{d}a$$

θ er vinkelen imellem feltet og overfladens normalvektor. Gauss lov kan også skrives med integraler:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \tag{10.4}$$

Det betyder at fluxen ud igennem en lukket (p.g.a. cirkelen i integraltegnet) overflade er proportional med ladningen inden for overfladen.

1) Find fluxen igennem et kvadrat med sidelængde s inde i pladen der er parallelt med den.

2) Find Find fluxen igennem et kvadrat med sidelængde s inde i pladen der er vinkelret på den.

3) Find fluxen ud igennem en kube med sidelængde s, som summen af fluxen igennem kuben sider.

4) Burg integral formen af Gauss lov til at finde den gennemsnitlige ladningstæthed i kuben.

(Hint: Integralet af en konstant er konstanten gange det område der er blevet integreret over, for dobbelte integraler er det et areal.)

Opgave 11: Faradays lov

Et varierende magnetisk felt skaber et elektrisk felt $\mathbf{E} = Ay\omega\cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$.

1) Brug Faradays lov til at finde $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

2) Hvad er $\mathbf{B}$.

(Hint: $\int \cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a} + k$)

Opgave 12: Frekvens og bølgelængde

Find frekvensen af den elektromagnetiske stråling for de forskellige bølgelængder:

1) Mikrobølger: $\lambda = 12{,}2$ cm

2) Rødt lys: $\lambda = 632$ nm

3) Röntgenstråling: $\lambda = 1{,}54$ Å $= 0{,}154$ nm

4) γ-stråling: $\lambda = 1{,}87$ pm

Opgave 13: Lineært Polariseret Lys

Lav en skitse af en opstilling der består af en horisontal polarisator og vertikal polarisator. Vi sender nu upolariseret lys ind i opstillingen.

1) Ser du noget lys efter den horisontale polarisator? Hvorfor? Hvorfor ikke?

2) Hvorfor ser du ikke noget lys efter den vertikale polarisator?

3) Hvilken lineær polarisator skal du så sætte ind for at kunne se lys efter den vertikale polarisator? Hvor skal den placeres?

• Opgave 14: Forskellige måder at regne med Jones Matricer

I denne opgave skal I se, hvordan man kan finde den resulterende Jones vektor for polariseret lys, der sendes igennem et lineært polariseringsfilter med horisontal TA efterfulgt af en rotator, på to forskellige måder. I skal også se, at rækkefølgen er vigtig, når man regner med Jones matricer.

1) Tag den generelle Jones vektor for polariseret lys og gang denne med Jones matricen for filteret. Tag herefter den resulterende vektor og gang denne med Jones matricen for en rotator.

2) Tag de to Jones matricer fra 1), gang dem sammen (husk rigtig rækkefølge) og gang så den resulterende matrix på den generelle Jones vektor. Sammenlign resultatet med det du fik i 1). Stemmer det med hvad du forventede? Hvorfor? Hvorfor ikke?

3) Gentag 2) men prøv denne gang at bytte rundt på rækkefølgen af Jones matricerne. Sammenlign med resultatet fra 1) og 2). Stemmer det med hvad du forventede? Hvorfor? Hvorfor ikke?

••• Opgave 15: Lineære Polarisatorer

I denne opgave skal vi kigge på transmission af lineært polariseret lys efter det har rejst gennem lineære polarisatorer. Først introduceres intensiteten af lyset som afhænger af det elektriske felt, E.

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\mathbf{E}\mathbf{E}^*, \tag{10.5}$$

hvor $\mathbf{E}^*$ er den *kompleks konjugerede* matrix af $\mathbf{E}$. Man kompleks konjugerer en matrix ved at transponere den og skifte fortegn i de komplekse indgange (indgange, der indeholder i). I tilfælde, hvor matricen ikke er kompleks, transponerer man blot matricen. Hvis $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ (som ikke er kompleks!), er

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}. \tag{10.6}$$

Derudover er $\mathbf{E}^*\mathbf{E} = |\mathbf{E}_t|^2$. Transmissionen er forholdet mellem hvor meget intensitet, der kommer ud og hvor meget, der kommer ind, altså

$$T = \frac{I_\mathrm{t}}{I_\mathrm{i}} = \frac{\mathbf{E}_\mathrm{t}\mathbf{E}_\mathrm{t}^*}{\mathbf{E}_\mathrm{i}\mathbf{E}_\mathrm{i}^*}, \tag{10.7}$$

hvor subcript t er for *transmitteret* intensitet/elektrisk felt og subscript i er for *indkommende* intensitet/elektrisk felt. For lineært polariseret lys er det indkommende elektriske felt, som tidligere nævnt, givet ved

$$\mathbf{E}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, \tag{10.8}$$

hvor α er vinklen i forhold til polariseringsaksen.

1) Linært polariseret lys rejser gennem en lineær polarisator med horisontal TA. Beregn transmissionen som funktion af α, $T(\alpha)$.

2) Skitsér $T(\alpha)$. Hvad fortæller den?

Der bruges nu tre lineære polarisatorer. En med vertikal TA, en med horisontal TA og en med en 45° TA. Det oplyses at $\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Beregn Jones Matricen for den lineære polarisator med en 45° TA.

4) Beregn $T(\alpha)$ når lineært polariset lys rejser gennem Horisontal polarisator → 45° polarisator → vertikal polarisator.

••• Opgave 16: Faseforskydere

Et andet optisk element er en såkaldt *faseforskyder*. Halvbølge plader og kvartbølge plader er eksempler på faseforskydere. Som navnet antyder påvirker en faseforskyder fasen i det elektriske felt.

Det elektriske felt $E = E_0 \cos(kz - \omega t)$ starter i (0,0), men det kan ændres ved at tilføje en fase, ϕ. Fasen forskyder således startpunktet for bølgen, som det elektriske felt kan beskrives ved. Med fasen er $E = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi)$. Afstanden mellem to toppe i en cosinus funktion svarer til 2π i radianer, og man angiver derfor altid fasen som et tal gange π. Det elektrisk felt er her skrevet på sin reelle form, men i mange fysiske sammenhænge er det nemmere at skrive feltet på sin komplekse form. Den komplekse funktion $e^{iA} = \cos(A) + i\sin(A)$, hvor det første led er den real–delen og det sidste led er imaginær–delen. I arbejde med elektriske felter er blot et redskab, så den imaginære del af det elektriske felt har ingen fysisk betydning. Feltets komplekse form er givet ved

$$E = E_0 e^{i(kz - \omega t + \phi)}, \tag{10.9}$$

og da det elektriske felt består af en x– og y–komponent er

$$\mathbf{E} = E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \hat{\mathbf{x}} + E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \phi_y)} \hat{\mathbf{y}} = \left[E_{0x} e^{i\phi_x} \hat{\mathbf{x}} + E_{0y} e^{i\phi_y} \hat{\mathbf{y}}\right] e^{i(kz - \omega t)}. \tag{10.10}$$

En faseforskyder transformerer så

$$E_{0x} e^{i\phi_x} \quad \text{til} \quad E_{0x} e^{i(\phi_x + \varepsilon_x)} \tag{10.11}$$

og

$$E_{0y} e^{i\phi_y} \quad \text{til} \quad E_{0y} e^{i(\phi_y + \varepsilon_y)}, \tag{10.12}$$

hvor ε_x og ε_y kaldes for *slow axis* og *fast axis*, og de er altså en ekstra fase. Jones Matricen for en faseforskyder er derfor

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}. \tag{10.13}$$

En faseforskyder kan f.eks. være enten en halvbølge plade eller kvartbølge plade. Differencen mellem ε_x og ε_y er det, der afgør, om det er den ene eller anden. Hvis $|\varepsilon_x - \varepsilon_y| = \pi$ er den en halvbølgeplade, mens den er en kvartbølge plade når $|\varepsilon_x - \varepsilon_y| = \frac{\pi}{2}$.

Vi skal nu se på en opstilling, der i rækkefølge består af en kvartbølgeplade og en lineær polaristor med vertikal TA. Lyset er til at starte med horisontalt lineært polariseret.

Vi ønsker at kunne rotere kvartbølge pladen med en vinkel θ og dermed bestemme transmissionen af lyset som funktion af denne vinkel. Jones Matricen for kvartbølgepladen M er derfor ikke nok, da den ikke tager højde for, at kvartbølgepladen og skal rotere. Jones Matricen for en roterende kvartbølge plade er derfor

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{R}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1}, \tag{10.14}$$

hvor $\mathbf{R}$ er rotator matricen og

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{10.15}$$

1) Beregn $\tilde{\mathbf{M}}$ for en kvartbølgeplade.

2) Beregn $T_v(\theta)$ for når lyset er rejst gennem opstillingen. *Hint:* $i^2 = -1$. Skitsér $T_v(\theta)$.

3) Beregn $T_h(\theta)$ for samme opstilling, men hvor den vertikale lineær polarisator nu er skiftet ud med en horisontal lineær polarisator. Skitser $T_h(\theta)$

4) Beregn $\tilde{\mathbf{M}}$ for en halvbølge plade og gentag beregning er $T_{v/h}(\theta)$ for opstillingen når den indeholder en vertikal lineære polarisator og når den indeholder en horisontal lineær polarisator. Skitsér $T_v(\theta)$ og $T_h(\theta)$.

Kapitel 11

Elektromagnetiske bølger Facitliste

- **Opgave 1: Gradient**

1) $f(x,y) = x \quad \nabla f(x,y) = \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $f(x,y) = x^2 - y^2 \quad \nabla f(x,y) = x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

3) $f(x,y) = xy + \cos(xy) \quad \nabla f(x,y) = (y - x\sin(xy))\hat{\mathbf{x}} + (x - y\sin(xy))\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y - x\sin(xy) \\ x - y\sin(xy \end{bmatrix}$

4) $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xyz \quad \nabla f(x,y) = (3x^2 + y^2 + yx)\hat{\mathbf{x}} + (2xy + xz)\hat{\mathbf{y}} + xy\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 3x^2 + y^2 + yz \\ 2xy + xz \\ xy \end{bmatrix}$

5) $f(x,y,z) = x \quad \nabla f(x,y) = \frac{-\sin(x)}{z}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\cos(y)}{z}\hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{z^2}\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{z}\begin{bmatrix} -\cos(x) \\ \sin(y) \\ -1/z \end{bmatrix}$

- **Opgave 2: Divergens**
Find divergensen ($\nabla \cdot \mathbf{F}$) af følgende funktioner:

1) $\mathbf{F}(x,y) = x^2\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}} \quad \nabla \cdot F = 2x + 2y$

2) $\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2y \\ -xy^2 \end{bmatrix} \quad \nabla \cdot F = 2xy - 2xy = 0$

3) $\mathbf{F}(x,y,z) = \sin(x)\hat{\mathbf{x}} + \cos(y)\hat{\mathbf{y}} \quad \nabla \cdot F = \cos(x) - \sin(y)$

4) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}} - \mathrm{e}^z \quad \nabla \cdot F = 2x + 2y + \mathrm{e}^z$

5) $\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2\cos(y) \\ y^2\cos(z) \\ z^2\cos(x) \end{bmatrix} \quad \nabla \cdot F = 2x\cos(y) + 2y\cos(z) + 2z\cos(x)$

6) $\mathbf{F}(x, y) = \mathrm{e}^z(y^2\hat{\mathbf{x}} + x^2\hat{\mathbf{y}}) \quad \nabla \cdot F = 0$

•• Opgave 3: Rotation

Find rotationen ($\nabla \times \mathbf{F}$) af følgende funktioner:

1) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}} \quad \nabla \times F = \mathbf{0}$

2) $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 y \\ -xy^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla \times F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x^2 - y^2 \end{bmatrix}$

3) $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin(x)\hat{\mathbf{x}} + \cos(y)\hat{\mathbf{y}} \quad \nabla \times F = \mathbf{0}$

4) $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\hat{\mathbf{x}} + x^2\hat{\mathbf{y}} - \mathrm{e}^z \quad \nabla \times F = 2x + 2y$

5) $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2\cos(y) \\ y^2\cos(z) \\ z^2\cos(x) \end{bmatrix} \quad \nabla \times F = xyzy^2\sin(z) - z^2\sin(x) - x^2\sin(y)$

6) $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathrm{e}^z(y^2\hat{\mathbf{x}} + x^2\hat{\mathbf{y}}) \quad \nabla \times F = \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^z x^2 \\ -\mathrm{e}^z y^2 \\ 2\mathrm{e}^z(x - y) \end{bmatrix}$

•• Opgave 4: Bølgeligningen

Er de følgende funktioner løsninger til bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Man differentierer funktionen dobbelt til både t og z. Er der kun en faktor til forskel er det en løsning.

1)

$$f(z,t) = z^3 + t^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} == 6z$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = 3t$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 6t$$

Det er ikke en løsning.

2) Her bruges kædereglen til differentiere funktionerne.

$$
\begin{aligned}
g(z,t) &= \cos(kz - \omega t) + \sin(2kz + 2\omega t) \\
\frac{\partial g}{\partial z} &= -k\cos(kz - \omega t) + 2k\cos(2kz - 2\omega t) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= -k^2\sin(kz - \omega t) - 4k^2\sin(2kz - 2\omega t) \\
\frac{\partial g}{\partial t} &= \omega\sin(kz - \omega t) - 2\omega\cos(2kz - 2\omega t) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= -\omega^2\cos(kz - \omega t) - 4\omega^2\cos(2kz - 2\omega t) \\
-k^2\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} &= -\omega^2\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \quad \text{Gælder, så det er en løsning.} \\
v &= \frac{\omega}{k} \quad \text{Er bølgens hastighed.}
\end{aligned}
$$

Bølgeligningen hører til en kategori af velopdragne differentialligninger hvor summen af to løsninger også er en løsning. De kaldes lineære differentialligninger.

3)

$$
\begin{aligned}
h(z,t) &= \cos(kz)\cos(\omega t) \\
\frac{\partial h}{\partial z} &= -k\sin(kz)\cos(\omega t) \\
\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} &= -k^2\cos(kz)\cos(\omega t) \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= -\omega\cos(kz)\sin(\omega t) \\
\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= -\omega^2\cos(kz)\cos(\omega t) \\
-k^2\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} &= -\omega^2\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad \text{Det er en løsning} \\
v &= \frac{\omega}{k} \quad \text{er hastigheden af bølgen}
\end{aligned}
$$

Dette er iøvrigt en stående bølge. Den kan også meskrives som to bølger med den halve amplitude og rejsende i hver sin retning.

4)

$$
\begin{aligned}
i(z,t) &= \cos(zt) \\
\frac{\partial i}{\partial z} &= -t\sin(zt) \\
\frac{\partial^2 i}{\partial^2 z} &= -t^2\cos(zt) \\
\frac{\partial i}{\partial t} &= -z\sin(zt) \\
\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= -z^2\cos(zt)
\end{aligned}
$$

Det er ikke en løsning.

- **Opgave 5: Gange matrix med vektor**
Givet matricen **A** og en vektor **v**, hvad er **Av** for forskellige **v**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

4) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{Av} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

5) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$

6) Er der noget særligt ved nogle af vektorerne? $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer for **A**. De giver sigselv gange en faktor.

- **Opgave 6: Matrix multiplikation**
Udregn følgende matrix regnestykker.

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 8\\0 & 9\end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -4\\1 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & -14\\3 & 15\end{bmatrix}$

•• Opgave 7: Genereliserede vektorer

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ bliver $ap_2(x) + bp_1(x) + cp_0(x) = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$.

2) $\frac{d}{dx}p_2(x) = 2x = 2p_1(x)$
$\frac{d}{dx}p_1(x) = 1 = p_0(x)$
$\frac{d}{dx}p_0(x) = 0$
De differentierede koordinatvektorer sættes ind som søjler i matricen.
$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

3) $\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\mathbf{D}^3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

4) Samme fremgangsmåde som opgave 1
$p_2(-x) = (-x)^2 = x^2 = p_2(x)$
$p_1(-x) = -x = -p_1(x)$
$p_0(-x) = 1 = p_1(x)$
$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

5) $\mathbf{DP} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}$

$$\mathbf{PD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Opgave 8: En elektrisk ladet plade

1) Hvis feltet skal være kontinuert vil $E_z\left(\frac{l}{2}\right) = A = B\frac{l}{2}$ på oversiden og tilsvarende: $E_z\left(\frac{-l}{2}\right) = -B\frac{l}{2} = C$.

2) $\rho = \nabla\mathbf{E}\varepsilon_0 = \frac{\partial E_z}{\partial z}\varepsilon_0$. På begge sider af pladen er det nul. inde i pladen er det: $\rho = B\varepsilon_0$

•• Opgave 9: Tre dimmensionelle ladningsfordelinger

Brug Gauss lov til at finde ladningsfordelingerne der giver de følgende felter:

1) $\mathbf{E} = A\hat{\mathbf{z}} = 0$

2) $\mathbf{E} = \frac{A}{3}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) = 0$

3) $\mathbf{E} = Az^2\hat{\mathbf{z}} = 2Az$

4) $\mathbf{E} = Ay^3\hat{\mathbf{y}} = 3Ay^2$

5) $\mathbf{E} = A(z^2\hat{\mathbf{z}} + y^3\hat{\mathbf{y}}) = A(2z + 3y)$

6) $\mathbf{E} = \frac{A}{xy}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) = -A\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy^2}\right)$

••• Opgave 10: Integralformen af Gauss lov

1) Siden kvadratet er parallelt med pladen ligge hele kvadratet i samme z. **E**-feltet er vinkelret på pladen så, med hjælp fra hintet er fluxen:

$$\Phi_E(z) = \iint E_z \mathrm{d}a = E_z s^2 = Bzs^2$$

2) Er kvadratet vinkelret på pladen vil $\cos\theta = 0$ derfor er fluxen det også.

3) Husk at man måler fluxen ud af kuben. Toppen og bunden af kuben er parallelle med pladen, så de bidrager med Bzs^2 resten af siderne er vinkelrette så de bidrager ikke. Placeres kuben med centrum i en højde z_0 bliver den fluxen ud igennem den:

$$\Phi_E = \Phi_E(z_0 + \tfrac{l}{2}) - \Phi_E(z_0 - \tfrac{l}{2}) = Bs^3$$

Ud fra integralformen af Gauss lov findes den indesluttede ladning.

$$Q_{\mathrm{encl}} = Bs^3\varepsilon_0$$

Derefter findes ladningstætheden ved at dele med rumfanget af kuben

$$\rho_{\text{gns}} = \frac{Q_{\text{encl}}}{s^3} = B\varepsilon_0$$

Dette virker kun fordi ladningstætheden er konstant, men gøres s mindre vil man opnå et gradvist bedre resultat.

•• Opgave 11: Faradays lov

1) Man tager rotationenaf **E**-feltet og bruger Faradays lov til at finde $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = -A\omega\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}}$$

2) Siden integration er det modsatte af diffentiation indsættes det i det givne integral.

$$\mathbf{B} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathrm{d}t = -A\omega\hat{\mathbf{x}} \int \cos(\omega t)\mathrm{d}t = -A\hat{\mathbf{x}}\sin(\omega t)$$

Der kan egentligt også være en konstant del af **E**-feltet, men vi kan ikke vide noget om den og antager derfor at den er nul.

• Opgave 12: Frekven og bølgelængde

Brug sammenhængen $c = \nu\lambda \iff \nu = \frac{c}{\lambda}$.

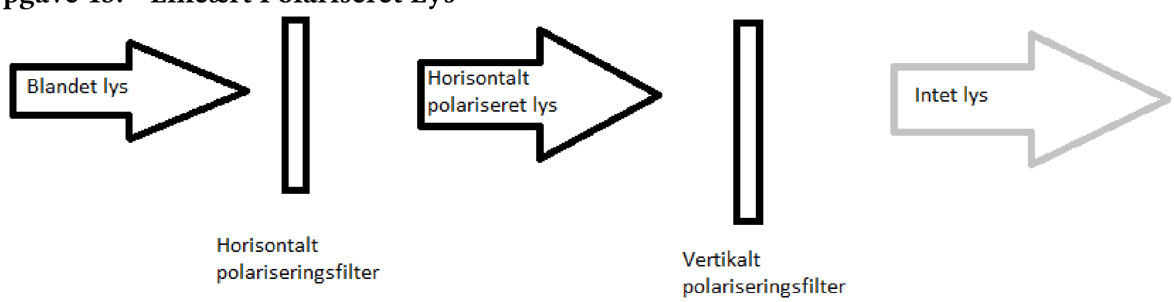
1) Mikrobølger: $\lambda = 12,2$ cm $\quad \nu = 2,46\text{GHz} = 2,46 \cdot 10^9\text{Hz}$

2) Rødt lys: $\lambda = 632$ nm $\quad \nu = 474\text{THz} = 4,74 \cdot 10^{12}\text{Hz}$

3) Röntgenstråling: $\lambda = 1,54$ Å $= 0,154$ nm $\quad \nu = 1,95\text{EHz} = 2,46 \cdot 10^{18}\text{Hz}$

4) γ-stråling: $\lambda = 1,87$ pm $\quad \nu = 160\text{EHz} = 2,46 \cdot 10^{20}\text{Hz}$

• Opgave 13: Lineært Polariseret Lys



1) Siden upolariseret lys består af en blanding af alle polariseringer vil noget af det komme igennem polariseringsfilteret.

2) Efter det horisontale polariseringsfilter er lyset horisontalt polariseret, derfor kan intet komme igennem det vertikale polariseringsfilter.

3) Indsættes et diagonalt polariseringsfilter imellem de to oprindelige filtre, vil det diagonale filter tillade noget af det horisontalt polariserede lys at passere, men bagefter er det være diagonalt polariseret, så noget af det kommer også igennem.

- **Opgave 14: Forskellige måder at regne med Jones Matricer**

Generelt polariseret lys har Jones vektoren: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$. Polariseringsfilteret har Jones matricen: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Rotatoren har Jones matricen: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

1) Filteret gange vektoren er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denne vektor gange rotatoren bliver:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

Hvis man vil kan man bruge trigonometriske identiteter til at omskrive det, men det bliver ikke pænere af det.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

2) Ganger man matricerne sammen får man:

$$\mathbf{RP} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ganges denne matrix på vektoren fåes

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

Rækkefølgen har ingen betydning. Dette gælder generelt for matricer og vektorer. Det kaldes den distributive lov.$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

3) I den anden rækkefølge bliver det:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Rv}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ganges matricerne samme først bliver det.

$$\mathbf{P}(\mathbf{Rv}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bemærk at rækkefølgen af matricerne har betydning.

Opgave 15: Lineære Polarisatorer

1) Den horisontale polarisator har Jones matricen $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det transmiterede lys har Jones vektoren:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{H}\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nu kan intensiteterne findes ud fra Jones vektorerne. Til I_i anvendes Pythagoras sætning for en trekant i enhedscirkelen.

$$|\mathbf{E}_i|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$|\mathbf{E}_t|^2 = \cos^2\alpha$$

Transmitansen er dermed:

$$T(\alpha) = \frac{|\mathbf{E}_t|^2}{|\mathbf{E}_i|^2} = \cos^2\alpha$$

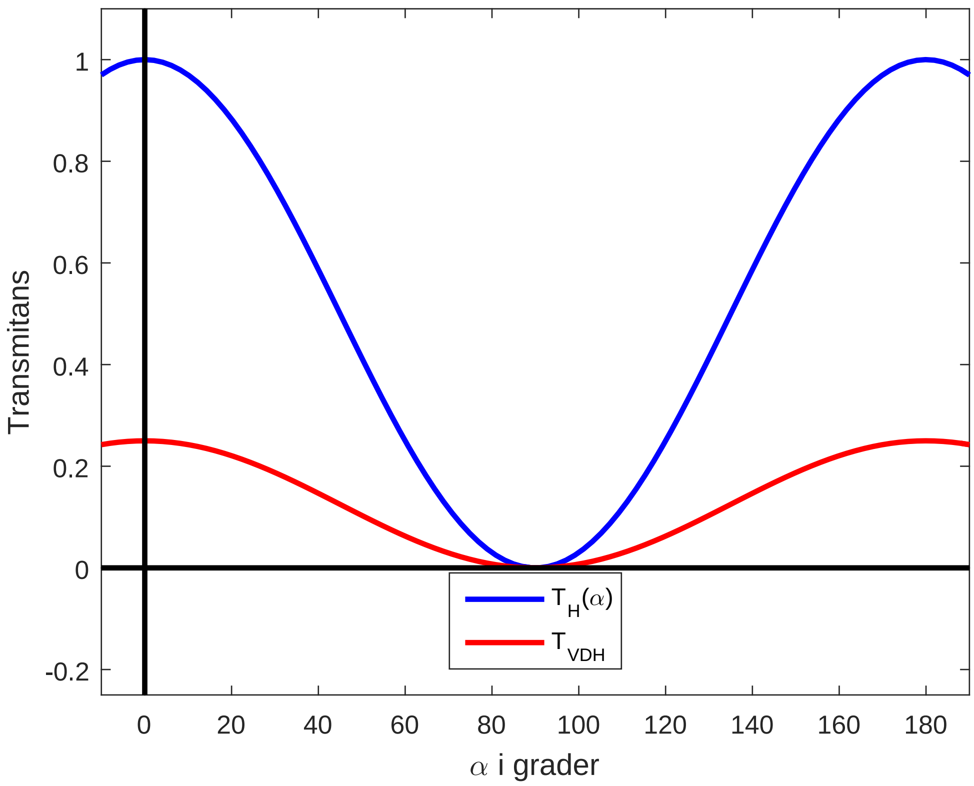
2) Den blå graf på figuren er $T(\alpha)$

3) Den generelle form for et lineært polariseringsfilter findes i kompendiet ligning (6.28). Den er:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Indsættes $\theta = 45°$ bliver alle indgangene $\frac{1}{2}$.

$$\mathbf{P}(45°) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



4) Der er to måder at løse denne opgave på. Man kan enten gange de relevante Jones matricer på vektoren en af gangen, eller man kan gange matricerne sammen og derefter gange med vektoren. Her demonstreres kun den anden metode. De relvante matricer er:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemærk rækkefølgen af matricerne, da lyset først passerer den horisontale polarisator er den tilsvarende. Den endelige Jones matrix er dermed:

$$\mathbf{M} = \mathbf{VDH} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu kan $\mathbf{E}_t$ findes

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{ME}_i = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Så kan $T(\alpha)$ findes

$$T(\alpha) = \frac{|\mathbf{E}_t|^2}{|\mathbf{E}_i|^2} = \frac{1}{4}\cos^2\alpha$$

Intensiteten mindskes med en faktor 4 og det resulterende lys er vandret polariseret.

Opgave 16: Faseforskydere

1) $\tilde{\mathbf{M}}$ bliver

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x}\cos^2\theta + e^{i\varepsilon_y}\sin^2\theta & \left(e^{i\varepsilon_x} - e^{i\varepsilon_y}\right)\cos\theta\sin\theta \\ \left(e^{i\varepsilon_x} - e^{i\varepsilon_y}\right)\cos\theta\sin\theta & e^{i\varepsilon_x}\sin^2\theta + e^{i\varepsilon_y}\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

2) Først bestemmes Jones matricen for kvartbølgepladen. Hvis faseforskyderen skal fungere som en kvartbølge skal der gælde at $|\varepsilon_x - \varepsilon_y| = \frac{\pi}{2}$. Så længe det er opfyldt kan ε_x og ε_y vælges frit. Et godt valg er:

$$\varepsilon_x = 0 \qquad \text{og} \qquad \varepsilon_y = \frac{pi}{2}$$

Så bliver eksponential funktionerne:

$$e^{i\varepsilon_x} = 1 \qquad \text{og} \qquad e^{\varepsilon_y} = i$$

Dette indsættes i $\tilde{\mathbf{M}}$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\text{kvart}} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + i\sin^2\theta & (1-i)\cos\theta\sin\theta \\ (1-i)\cos\theta\sin\theta & i\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Er polarisatoren vertikal er den transmiterede Jones matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\tilde{\mathbf{M}}_{\text{kvart}}\mathbf{E}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\theta + i\sin^2\theta & (1-i)\cos\theta\sin\theta \\ (1-i)\cos\theta\sin\theta & i\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1-i)\cos\theta\sin\theta & i\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (1-i)\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transmission bliver da

$$T_v(\theta) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = (1-i)(1+i)\cos^2\theta\sin^2\theta = 2\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{11.1}$$

Kommer man her til er det fint. De to relationer: $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos(2u))$ og $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1-\cos 2u$ kan bruges til at reducere resultatet yderligere.

$$\begin{aligned} T_v(\theta) &= \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))(1-\cos(2\theta) \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos^2(2\theta)) \\ &= \frac{1}{4}(2-1-\cos(4\theta)) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(4\theta) \end{aligned}$$

Er polarisatoren horiontal bliver Jones vektoren:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{M}}_{\text{kvart}}\mathbf{E}_i &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos^2\theta + i\sin^2\theta & (1-i)\cos\theta\sin\theta\\ (1-i)\cos\theta\sin\theta & i\cos^2\theta+\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos^2\theta + i\sin^2\theta & (1-i)\cos\theta\sin\theta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos^2\theta + i\sin^2\theta\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Nu findes $T_h(\theta)$ som normkvadratet af $\mathbf{E}_i$.

$$\begin{aligned}T_h(\theta) &= (\cos^2\theta + i\sin^2\theta)(\cos^2\theta - i\sin^2\theta)\\ &= \cos^4\theta + \sin^4\theta\end{aligned}$$

Igen er det helt fint at stoppe her, men det er muligt at fortsætte:

$$\begin{aligned}T_h(\theta) &= \frac{1}{4}(1+\cos(2\theta))^2(1-\cos(2\theta))^2\\ &= \frac{1}{4}(1+\cos^2(2\theta)+2\cos(2\theta)+1+\cos^2(2\theta)-2\cos(2\theta))\\ &= \frac{1}{4}(2+2\cos(2\theta))\\ &= \frac{1}{4}(2+1+\cos(4\theta))\\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(4\theta)\end{aligned}$$

Bemærk at summen af de to transmitanser er konstant, det betyder at upolariseret lys passerer opstillingen uafhængigt af vinkelen.
Et andet godt valg er:

$$\varepsilon_x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{og} \qquad \varepsilon_y = \frac{-\pi}{4}$$

Fremgangsmåden er den samme, og man finder:

$$\begin{aligned}e^{i\varepsilon_x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\\ e^{i\varepsilon_y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\\ \tilde{\mathbf{M}}_{\text{kvart}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1+i(\cos^2\theta-\sin^2\theta) & 2i\cos\theta\sin\theta\\ 2i\cos\theta\sin\theta & 1-i(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\end{bmatrix}\\ \mathbf{V}\tilde{M}_{\text{kvart}}\mathbf{E}_i &= \begin{bmatrix}0\\ \sqrt{2}i\cos\theta\sin\theta\end{bmatrix}\\ \mathbf{H}\tilde{M}_{\text{kvart}}\mathbf{E}_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1+i(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ 0\end{bmatrix}\\ T_v(\theta) &= 2\cos\theta\sin\theta T_h(\theta) \qquad = \frac{1}{2}(1+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2)\end{aligned}$$

De to T_h ser godt no ikke ens ud, men de er lig hinanden. De samme trigonometriske relationer kan bruges her til at reducere udtrykket.

$$\begin{aligned}
T_h(\theta) &= \frac{1}{2}(1 + \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta) - 1 + \cos(2\theta))\right)^2) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \cos^2(2\theta)) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4\theta)
\end{aligned}$$

3) For en halvbølge plade skal $|\varepsilon_x - \varepsilon_y| = \pi$ og derfor sætter vi

$$\varepsilon_x = 0 \quad \text{og} \quad \varepsilon_y = \pi \tag{11.2}$$

og dermed bliver

$$e^{i\varepsilon_x} = 1 \quad \text{og} \quad e^{i\varepsilon_y} = -1, \tag{11.3}$$

så Jones matricen for halvbølge pladen bliver så

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\text{halv}} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Udregningen af den resulterende Jones vektor er den samme som i opgave **2**). Hvis polarisatoren er vertikal bliver det transmitterede elektriske felt

$$\mathbf{E_t} = 2\cos\theta\sin\theta, \tag{11.5}$$

så transmission bliver

$$T_v(\theta) = 4\cos^2\theta\sin^2\theta. \tag{11.6}$$

Hvis polarisatoren derimod er horisontal bliver

$$\mathbf{E_t} = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \tag{11.7}$$

og

$$T_h(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta - 2\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{11.8}$$

Igen er det fint at stoppe her, men hvis man har reduceret helt i opgave **2**) kan resultaterne herfra bruges til at reducere her.

$$\begin{aligned}
T_v(\theta) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4\theta) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(4\theta) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\theta) \\
T_h(\theta) &= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(4\theta)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\theta)
\end{aligned}$$

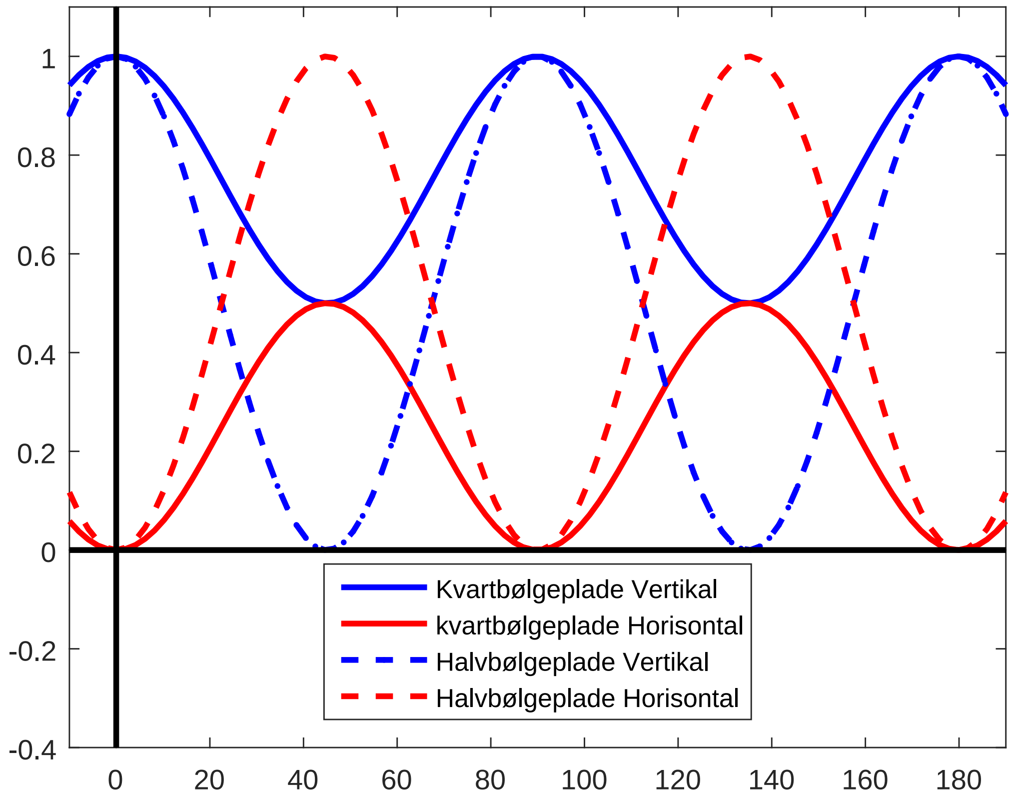
Man kan også bruge:

$$\varepsilon_x = \frac{\pi}{2} \quad \text{og} \quad \varepsilon_y = \frac{-\pi}{2}$$

Her for man:

$$e^{i\varepsilon_x} = i \quad \text{og} \quad e^{i\varepsilon_y} = -i$$

Udregningen er præcis den samme, bortset fra en faktor i der forsvinder når man tager normkvadratet.



Kapitel 12

Matematik Opgaver

Differentialregning

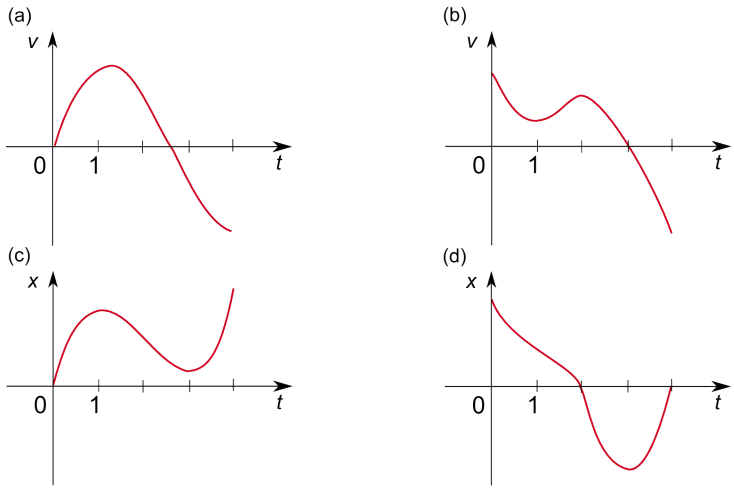
- **Opgave 1: Afledte og dobbeltafledte**
  Find den afledte og dobbeltafledte med hensyn til x for følgende funktioner:
  1) $f(x) = x^3$
  2) $f(x) = x^2 + 4x$
  3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
  4) $f(x) = \cos x$
  5) $f(x) = \ln x$

- **Opgave 2: Sammensatte funktioner**
  Skriv følgende udtryk som en sammensat funktion ($f(g(x))$. (Altså skal du identificere den indre funktion $g(x)$ og den ydre funktion $f(g)$). Udregn herefter $\frac{df}{dx}$.
  1) $f(x) = \sin(4x)$
  2) $f(x) = \sqrt{2x}$
  3) $f(x) = \sqrt{4x + 5}$
  4) $f(x) = \sin(e^x)$

- **Opgave 3: f som funktion af g**
  Udtryk $\frac{df}{dx}$ vha. den ukendte funktion $g(x)$ og dens differentierede $\frac{dg}{dx}$ for følgende funktioner:
  1) $f(x) = x^2 g(x)$
  2) $f(x) = (g(x))^2$

3) $f(x) = g(x^2)$

• Opgave 4: Hastighed og postion



Figur 12.1: Hastighed og position som funktion af tiden.

1) Figur 13.1 (a) og (b) viser farten af to objekter som funktion af tiden i sekunder. Hvornår sætter de to objekter farten op og hvornår sætter de farten ned? Forklar dit svar.

2) Figur 13.1 (c) og (d) viser positionen af to objekter x som funktion af tiden i sekunder. Hvornår sætter de to objekter farten op og hvornår sætter de farten ned? Forklar dit svar.

•• Opgave 5: Harmonisk bevægelse

Hvis bevægelsen for et objekt er beskrevet vha. positionen

$$x = A\cos(\omega t + \phi),$$

hvor A, ω og ϕ er konstanter, så siger man, at objektet undergår *simpel harmonisk bevægelse.*

1) Hvad er hastigheden af objektet til tiden t (som funktion af t)?

2) Hvornår er hastigheden 0?

•• Opgave 6: Cepheide-stjernen Delta Cephei

En Cepheide-stjerne er en bestemt type stjerne, hvis lysstyrke varierer periodisk. En bestemt Cepheide-stjerne har tiden 5,4 dage mellem hver maksimal lysstyrke. Den gennemsnitlige lysstyrke af stjernen er

4,0 med en ændring i lys på ± 0,35. Hvis t måles i dage, så kan lysstyrken B af denne Cephide-stjerne modelleres af følgende udtryk:

$$B(t) = 4,0 + 0,35 \sin\left(\frac{2\pi t}{5,4}\right).$$

1) Hvad er raten for ændringen af lysstyrken (ændring af lysstyrke over ændring af tid) som funktion af antal dage t?

2) Hvor meget har lysstyrken ændret sig efter to dage?

•• Opgave 7: Udvidelse af ballon

Der pumpes luft ind i en sfærisk ballon. Til enhver tid t er volumet af ballonen $V(t)$, mens radius af ballonen er $r(t)$.

1) Hvad er betydningen af de afledte $\frac{dV}{dr}$ og $\frac{dV}{dt}$?

2) Udtryk $\frac{dV}{dt}$ som funktion af $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

••• Opgave 8: Approksimation af funktion

En vilkårlig funktion $f(x)$ kan muligvis være kompliceret, men i fysik er vi ofte kun interesseret i, hvordan $f(x)$ i et bestemt område af x-værdier, f.eks. når x er lille. Heldigvis findes der en metode til at approksimere en funktion $f(x)$ omkring et bestemt punkt a. Når $x \approx a$ kan vi approksimere funktionen $f(x)$ som:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} + \tfrac{1}{2}(x-a)^2\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=a} + \tfrac{1}{3!}(x-a)^3\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=a} + \dots$$

Jo flere led, man tager med i summen, jo bedre bliver approksimationen af $f(x)$. Ofte er det nok at tage de første 2 eller 3 led med for at få en god beskrivelse af $f(x)$ for $x \approx a$.

1) Diskuter betydningen af de enkelte led i summen. Hvordan ser de ud som funktioner af x, og hvorfor bliver approksimationen bedre af at tage flere led med?

2) Vis, at når $x \approx 0$, er $\sin x \approx x$ og $\cos x \approx 1$ ved kun at medtage de to første led i summen. Hvad bliver approksimationerne for $\sin x$ og $\cos x$, hvis du også medtager det tredje led?

3) Vis, at når $x \approx 1$, er $\ln x \approx x - \frac{1}{2}x^2$.

4) Vis, at når $x \approx 0$, er $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

5) Vis, at når $x \approx 0$, er approksimationen for et polynomie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ givet ved leddene i polynomiet selv. Prøv evt. at beregne de enkelte led i approksimationen for et andengradspolynomie.

6) Vis, at når $x \approx 0$, er $(1+x)^a \approx 1 + ax$.

Differentialligninger

Opgave 9: Specialtilfælde af 1. og 2. Ordens Differentialligninger •
I denne opgave skal I vise, at nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger.

1) Vis at funktionen $f(t) = -7e^{3t}$ løser differentialligningen $\frac{df}{dt} = 3f(t)$.

2) Vis at funktionen $g(t) = \frac{2}{3}e^{t} + e^{-2t}$ løser differentialligningen $\frac{dg}{dt} + 2g(t) = 2e^{t}$.

3) Vis at funktionen $h(t) = 5\sin(3t) - 10\cos(3t)$ løser differentialligningen $\frac{d^2h}{dt^2} = -9h(t)$.

4) Tjek om funktionen $k(t) = 13\cos(8t + 45)$ løser differentialligningen $\frac{d^2k}{dt^2} = -64k(t)$.

•• **Opgave 10: Generelle 1. Ordens Differentialligninger.**
I denne opgave skal I også vise, at nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger. Denne gang er funktionerne og differentialligningerne dog skrevet op på en mere generel form, dvs. at de kan indeholde arbitrære konstanter.

1) Vis at alle funktioner på formen $h(x) = 1/(x + A)$ løser differentialligningen $\frac{dh}{dx} = -h(x)^2$.

2) Vil at alle funktioner på formen $k(x) = \left(c - x^2\right)^{-1/2}$ løser differentialligningen $\frac{dk}{dx} = xk(x)^3$.

3) Vis at alle funktioner på formen $g(x) = (\ln x + C)/x$ løser differentialligningen $x^2\frac{dg}{dx} + xg(x) = 1$.

4) Vis at alle funktioner på formen $f(x) = (1 + ce^{x})/(1 - ce^{x})$ løser differentialligningen $\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - 1\right)$.

••• **Opgave 11: Hvornår er det en løsning?**
I denne opgave skal I finde ud af, hvornår nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger. Sagt med andre ord skal I finde de specifikke værdier for nogle af de konstanter, der indgår i funktionerne, som gør at funktionerne løser differentialligningerne.

1) For hvilke værdier af k løser funktionen $f(y) = \cos(ky)$ differentialligningen $4\frac{d^2f}{dy^2} = -25f(y)$?

2) Tjek for de værdier af k I fandt i 1), at funktionen $g(y) = A\sin(ky) + B\cos(ky)$ også løser differentialligningen $4\frac{d^2g}{dy^2} = -25g(y)$ (hint: vent med at indsætte værdierne af k før til sidst).

3) For hvilke værdier af r løser funktionen $h(y) = e^{ry}$ differentialligningen $2\frac{d^2h}{dy^2} + \frac{dh}{dy} - h(y) = 0$?

4) Lad r_1 og r_2 være de konstanter du fandt i 3). Tjek at funktionen $k(y) = ae^{r_1y} + be^{r_2y}$ også løser differentialligningen $2\frac{d^2k}{dy^2} + \frac{dk}{dy} - k(y) = 0$ (hint: vent med at indsætte værdierne af r_1, r_2 før til sidst).

Kapitel 13

Matematik Facitliste

Differentialregning

- **Opgave 1: Afledte og dobbeltafledte**

1) $f(x) = x^3$:

$$\frac{df}{dx} = 3x^2, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = 6x$$

2) $f(x) = x^2 + 4x$:

$$\frac{df}{dx} = 2x + 4, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = 2$$

3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^{-1} + x^{-2}$:

$$\frac{df}{dx} = -x^{-2} - 2x^{-3}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = 2x^{-3} + 6x^{-4}$$

4) $f(x) = \cos x$:

$$\frac{df}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -\cos x$$

5) $f(x) = \ln x$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -x^{-2}$$

Opgave 2: Sammensatte funktioner

$g(x)$ og $f(g)$ findes. $\frac{df}{dx}$ findes vha. kædereglen: $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}$.

1) $f(x) = \sin(4x)$:

$$g(x) = 4x, \quad f(g) = \sin(g)$$
$$\rightarrow \frac{df}{dx} = 4\cos(4x)$$

2) $f(x) = \sqrt{2x}$:

$$g(x) = 2x, \quad f(g) = \sqrt{g}$$
$$\rightarrow \frac{df}{dx} = 2\frac{1}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

3) $f(x) = \sqrt{4x+5}$

$$g(x) = 4x+5, \quad f(g) = \sqrt{g}$$
$$\rightarrow \frac{df}{dx} = 4\frac{1}{2\sqrt{4x+5}} = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$$

4) $f(x) = \sin(e^x)$

$$g(x) = e^x, \quad f(g) = \sin(g)$$
$$\rightarrow \frac{df}{dx} = e^x\cos(e^x)$$

Opgave 3: f som funktion af g

Udtryk $\frac{df}{dx}$ vha. den ukendte funktion $g(x)$ og dens differentierede $\frac{dg}{dx}$ for følgende funktioner:

1) $f(x) = x^2 g(x)$. Produktreglen anvendes:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dx^2}{dx} \cdot g(x) + x^2\frac{dg}{dx} = 2xg(x) + x^2\frac{dg}{dx}$$

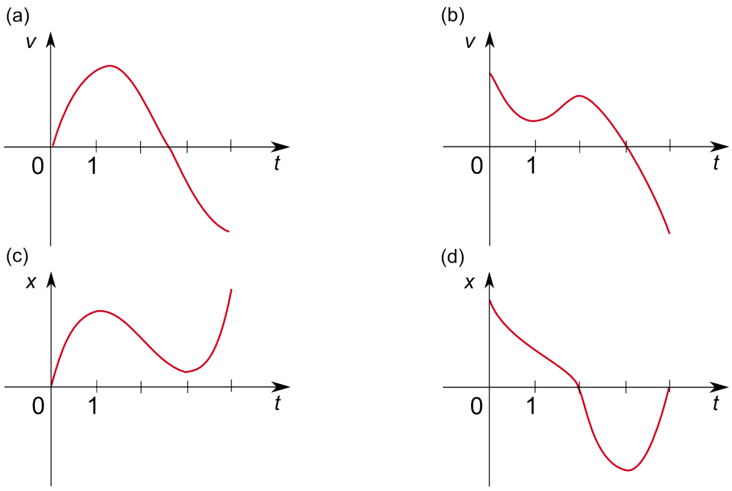
2) $f(x) = (g(x))^2$. Produktreglen anvendes:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx}g(x) + g(x)\frac{dg}{dx} = 2g(x)\frac{dg}{dx}$$

3) $f(x) = g(x^2)$. Kædereglen anvendes:

$$\frac{df}{dx} = 2x\frac{dg}{dx^2}$$

Opgave 4: Hastighed og postion



Figur 13.1: Hastighed og position som funktion af tiden.

1) Da grafen simpelt viser v som funktion af tiden kan man bare aflæse på figuren. for (a):

- $t = 0 \rightarrow 1,5$: sætter farten op
- $t = 1,5 \rightarrow 4$: sætter farten ned

for (b):

- $t = 0 \rightarrow 1$: sætter farten ned
- $t = 1 \rightarrow 2$: sætter farten op
- $t = 2 \rightarrow 4$: sætter farten ned

.

2) Her ses i stedet positionen som funktion af tiden. For at svare på, hvordan hastigheden opfører sig, så skal vi derfor kigge på *hældningen* af grafen. for (c):

- $t = 0 \rightarrow 1$: positiv hældning $\rightarrow$ hastigheden øges

- $t = 1 \to 3$: negativ hældning $\to$ hastigheden sænkes
- $t = 3 \to 4$: positiv hældning $\to$ hastigheden øges

for (d):

- $t = 0 \to 2$: negativ hældning $\to$ hastigheden sænkes
- $t = 2 \to 3$: negativ hældning $\to$ hastigheden sænkes - og hældningen er større, så der bremses hårdere.
- $t = 3 \to 4$: positiv hældning $\to$ hastigheden øges

.

Opgave 5: Harmonisk bevægelse

$$x = A\cos(\omega t + \phi),$$

hvor A, ω og ϕ er konstanter.

1) For at finde hastigheden ($\dot{x}$), så ses det at udtrykket er en sammensat funktion ($g = \omega t + \phi$, $f = A\cos g$). Bruges kædereglen får man:

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

2) Hvis det antages at alle konstanter er > 0, så er $\dot{x} = 0$, når $\sin(\omega t + \phi) = 0$. Det er opfyldt for $\omega t + \phi = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Fysisk set er $v = 0$ i yderpunkterne af svingningen, som forekommer periodisk.

Opgave 6: Cepheide-stjernen Delta Cephei

$$B(t) = 4,0 + 0,35\sin\left(\frac{2\pi t}{5,4}\right).$$

1) Raten er $\frac{dB}{dt} = \dot{B}$. Funktionen er en sammensat funktion ($u = \frac{2\pi t}{5,4}$, $g = 0,4 + 0,35\sin u$).

$$\dot{B} = 0,35 \cdot \frac{2\pi}{5,4}\cos\left(\frac{2\pi t}{5,4}\right)$$

2) For at finde ændringen i lysstyrke udregnes forskellen:

$$\begin{aligned} &B(t = 2 \text{ dage}) - B(t = 0 \text{ dage}) \\ &\qquad = 4,0 + 0,35\sin\left(\frac{2\pi}{5,4}\cdot 2\right) - 4,0 - 0,35\sin\left(\frac{2\pi}{5,4}\cdot 0\right) \\ &\qquad = 0,25 \end{aligned}$$

Husk at regne i radianer og ikke i grader.

•• Opgave 7: Udvidelse af ballon

1) $\frac{dV}{dr}$ er ændring af volumen afhængig af radius, mens $\frac{dV}{dt}$ er ændring af volumen afhængig af tiden.
2) Volumenet af en sfærisk ballon er $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$. Det er en sammensat funktion med $u = r(t)$ og $g = \frac{4}{3}\pi u^3$. Det giver:

$$\dot{V} = \frac{4}{3}2\pi \cdot 3r^2(t)\dot{r}$$

••• Opgave 8: Approksimation af funktion

$$f(x) = f(a) + (x-a)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} + \tfrac{1}{2}(x-a)^2\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=a} + \tfrac{1}{3!}(x-a)^3\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=a} + \ldots$$

1) Første led er en konstant, mens andet led afhænger linært af x, og tredje led kvadratisk af x osv. Forfaktoren bliver mindre og mindre for hvert led, så ledene bliver mindre og mindre.
2) For $x \approx 0$, er $\sin x$ med de første to led:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(0) + (x-0)\left.\frac{d\sin x}{dx}\right|_{x=0} \\ &= 0 + x\cos(0) \\ &= x\end{aligned}$$

Idet $\sin(0) = 0$ og $\cos(0) = 1$. For $x \approx 0$, er $\cos x$ med de første to led:

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos(0) + (x-0)\left.\frac{d\sin x}{dx}\right|_{x=0} \\ &= 1 - x\sin(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

Hvis man medtager det 3. led, så bliver $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x + \frac{1}{2}(x-0)^2\left.\frac{d^2\sin(x)}{dx^2}\right|_{x=0} \\ &= x - \frac{x^2}{2}\sin(0) \\ &= x\end{aligned}$$

Hvis man medtager det 3. led, så bliver $\cos(x)$:

$$
\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-0)^2 \left.\frac{d^2\cos(x)}{dx^2}\right|_{x=0} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2}\cos(0) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

3) For $x \approx 1$, er $\ln x$ for de tre første to led:

$$
\begin{aligned}
\ln x &= \ln(1) + (x-1)\left.\frac{d\ln x}{dx}\right|_{x=1} + \frac{1}{2}(x-1)^2 \left.\frac{d^2\ln x}{dx^2}\right|_{x=1} \\
&= 0 + (x-1)\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\left(x^2+1-2x\right)\left.\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right|_{x=1} \\
&= x - 1 + \frac{1}{2}\left(x^2+1-2x\right)\left.\left(-1x^{-2}\right)\right|_{x=1} \\
&= x - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + x \\
&= -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Idet den differentierede at $\ln x = \frac{1}{x}$ og $\ln 1 = 0$.

4) For $x \approx 0$, er $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ for de første tre led:

$$
\begin{aligned}
e^x &= e^0 + (x-0)\left.\frac{de^x}{dx}\right|_{x=0} + \frac{1}{2}(x-0)^2\left.\frac{d^2e^x}{dx^2}\right|_{x=0} \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2,
\end{aligned}
$$

Idet den differentierede af e^x er e^x og $e^0 = 1$.

5) For $x \approx 0$, vises det, at approksimationen for et polynomie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ er givet ved leddene i polynomiet selv. Vi regner ét led af gangen:

$$\begin{aligned}
\text{Første led} &= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 \\
&= a_0 \\
\text{Andet led} &= (x-0)\ \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right)\Big|_{x=0} \\
&= x \cdot \ (a_1 + 2a_2 x))|_{x=0} \\
&= a_1 x \\
\text{Tredje led} &= \frac{1}{2}\ (x-0)^2\ \frac{d^2}{dx^2}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right)\Big|_{x=0} \\
&= \frac{1}{2}x^2\ \frac{d}{dx}\ (a_1 + 2a_2 x)\Big|_{x=0} \\
&= \frac{1}{2}x^2\ (2a_2)|_{x=0} \\
&= a_2 x^2 \\
&\rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2
\end{aligned}$$

Og det er hermed vist at approksimationen af et polynomie er givet ved leddene i polynomiet.

6) For små værdier af x ($x \approx 0$), vises det, at $(1+x)^a \approx 1 + ax$.:

$$\begin{aligned}
(1+x)^a &= (1+0)^a + (x-0)\ \frac{d(1+x)^a}{dx}\Big|_{x=0} \\
&= 1 + \left(a(1+x)^{a-1}\right)\Big|_{x=0} \\
&= 1 + ax,
\end{aligned}$$

hvor $(1+x)^a$ er blevet differentieret som en sammensat funktion med $u = 1 + x$ og $g = u^a$.

Differentialligninger

• Opgave 9: Specialtilfælde af 1. og 2. Ordens Differentialligninger

1) $f(t) = -7e^{3t}$ og $\frac{df}{dt} = 3f(t)$.

$$\frac{df}{dx} = -7\frac{d}{dt}e^{3t} = -7 \cdot 3e^{3t} = 3\left(-7e^{3t}\right) = 3f(t)$$

2) $g(t) = \frac{2}{3}e^{t} + e^{-2t}$ og $\frac{dg}{dt} + 2g(t) = 2e^{t}$.

$$\frac{dg}{dt} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}e^{t} + \frac{d}{dt}e^{-2t} = \frac{2}{3}e^{t} - 2e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{dt} + 2g(t) = \frac{2}{3}e^{t} - 2e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{t} + 2e^{-2t} = \frac{6}{3}e^{t} = 2e^{t}$$

3) $h(t) = 5\sin(3t) - 10\cos(3t)$ og $\frac{d^2h}{dt^2} = -9h(t)$.

$$\frac{dh}{dt} = 3 \cdot 5\cos(3t) + 3 \cdot 10\sin(3t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2h}{dt^2} = (-9) \cdot 5\cos(3t) + 9 \cdot 10\sin(3t) = -9h(t)$$

4) $k(t) = 13\cos(8t + 45)$ og $\frac{d^2k}{dt^2} = -64k(t)$.

$$\frac{dk}{dt} = (-8) \cdot 13\cos(8t + 45) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2k}{dt^2} = (-64) \cdot 13\cos(8t + 45) = -64k(t)$$

•• Opgave 10: Generelle 1. Ordens Differentialligninger

1) $h(x) = 1/(x + A)$ og $\frac{dh}{dx} = -h(x)^2$.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}(x + A)^{-1} = -(x + A)^{-2}\frac{d}{dx}(x + A) = -\frac{1}{(x + A)^2} = -h(x)^2$$

2) $k(x) = \left(c - x^2\right)^{-1/2}$ og $\frac{dk}{dx} = xk(x)^3$.

$$\frac{dk}{dx} = -\frac{1}{2}\left(c - x^2\right)^{-3/2}\frac{d}{dx}\left(c - x^2\right) = x\left(c - x^2\right)^{-3/2} = xk(x)^3$$

3) $g(x) = (\ln x + C)/x$ og $x^2 \frac{dg}{dx} + xg(x) = 1$.

$$\frac{dg}{dx} = \left[\frac{d}{dx}(\ln x + C)\right]\frac{1}{x} + (\ln x + C)\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + C}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2\frac{dg}{dx} + xg(x) = 1 - (\ln x + C) + (\ln x + C) = 1$$

4) $f(x) = (1 + ce^x)/(1 - ce^x)$ og $\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - 1\right)$.

$$\frac{df}{dx} = \left[\frac{d}{dx}(1 + c^x)\right]\frac{1}{1 - ce^x} + (1 + ce^x)\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{1 - ce^x}\right] = \frac{ce^x}{1 - ce^x} + \frac{(1 + ce^x)(-1)(-ce^x)}{(1 - ce^x)^2}$$

$$= ce^x\left[\frac{1}{1 - ce^x} + \frac{1 + ce^x}{(1 - ce^x)^2}\right] = ce^x\frac{1 - ce^x + 1 + ce^x}{(1 - ce^x)^2} = \frac{2ce^x}{(1 - ce^x)^2}$$

$$f(x)^2 - 1 = \frac{(1 + ce^x)^2}{(1 - ce^x)^2} - \frac{(1 - ce^x)^2}{(1 - ce^x)^2} = \frac{(1 + ce^x)^2 - (1 - ce^x)^2}{(1 - ce^x)^2} = \frac{4ce^x}{(1 - ce^x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - 1\right)$$

••• Opgave 11: Hvornår er det en løsning?

1) Find k så $f(y) = \cos(ky)$ løser $4\frac{d^2f}{dy^2} = -25f(y)$.

$$\frac{df}{dy} = -k\sin(ky) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2f}{dy^2} = -k^2\cos(ky) = -k^2 f(y)$$

Så sætter man ind:

$$4\frac{d^2f}{dy^2} = -25f(y) \quad \Rightarrow \quad -4k^2 f(y) = -25f(y) \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \pm\frac{5}{2}$$

2) For de fundne k fra 1), vis at $g(y) = A\sin(ky) + B\cos(ky)$ løser $4\frac{d^2g}{dy^2} = -25g(y)$.

$$\frac{dg}{dy} = kA\cos(ky) - kB\sin(ky) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2g}{dy^2} = -k^2A\sin(ky) - k^2B\cos(ky) = -k^2g(y)$$

Det giver:

$$-4k^2 g(y) = -25g(y)$$

Som er opfyldt for $k = \pm\frac{5}{2}$.

3) Find r så $h(y) = e^{ry}$ løser $2\frac{d^2h}{dy^2} + \frac{dh}{dy} - h(y) = 0$.

$$\frac{dh}{dy} = re^{ry} = rh(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2h}{dy^2} = r^2e^{ry} = r^2h(y)$$

Så sætter man ind:

$$2\frac{d^2h}{dy^2} + \frac{dh}{dy} - h(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2h(y) + rh(y) - h(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 + r - 1 = 0$$

Løses andengradsligningen får man:

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad r_2 = -1$$

4) For de fundne r_1, r_2 i 3), vis at $k(y) = ae^{r_1 y} + be^{r_2 y}$ løser $2\frac{d^2k}{dy^2} + \frac{dk}{dy} - k(y) = 0$.

$$\frac{dk}{dy} = ar_1e^{r_1y} + br_2e^{r_2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2k}{dy^2} = ar_1^2e^{r_1y} + br_2^2e^{r_2y}$$

Så sætter man ind:

$$2\frac{d^2k}{dy^2} + \frac{dk}{dy} - k(y) = 2\left(ar_1^2e^{r_1y} + br_2^2e^{r_2y}\right) + (ar_1e^{r_1y} + br_2e^{r_2y}) - (ae^{r_1y} + be^{r_2y})$$

$$= \left(2ar_1^2 + ar_1 - a\right)e^{r_1y} + \left(2br_2^2 + br_2 - b\right)e^{r_2y} = 0 \cdot e^{r_1y} + 0 \cdot e^{r_2y} = 0$$