Fysik Camp 2018

Faglige:

Christoffer Hansen (ansv.)	ch@unf.dk
Sofie Bruun	shb@unf.dk
Josefine Bjørndal Robl	jr@unf.dk
Jacob Osman Hjortlund	jo@unf.dk
Rasmus Berg Jensen	rbe@unf.dk
Esben Skovhus Ditlefsen	esd@unf.dk
Jeppe Sinkbæk Thomsen	jet@unf.dk
Emil Hoffmann Kozuch	ehk@unf.dk

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

Kolofon

Opgaver til UNF Fysik Camp 2018

Kompendiet er skrevet af Sofie Bruun, Josefine Bjørndal Robl, Jacob Osman, Rasmus Berg Jensen, Esben Skovhus Ditlefsen, Jeppe Sinkbæk Thomsen, Emil Hoffmann Kozuch og Christoffer Hansen. Kompendiet er trykt i juni 2018

Layout: Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen.
Ansvarlig: Christoffer Hansen.

Indholdsfortegnelse

Del I

Opgaver

Kapitel 1

Analytisk Mekanik

Koordinatsystemer

Opgave 1: • Gode koordinatsystemer
At få valgt et smart koordinatsystem er essentielt i mekanik.

1) Beskriv hvad der kendetegner et smart valgt koordinatsystem?

2) Hvorfor kan det smarte koordinatsystem identificeres ud fra symmetri?

3) Hvilket koordinatsystem er smartes for et problem med:
a) Plansymmetri
b) Cylindrisk symmetri
c) Sfærisk symmetri
og hvorfor?

Opgave 2: • Generaliserede koordinater
Betragt et objekt, der er fanget på en ring med centrum i origo, $(0, 0)$ og radius R. Opskriv objektets position er (x, y) i kartesiske koordinater.

1) Hvor mange af de kartesiske koordinater ændres, når objektet bevæger sig på ringen?

2) Definer et sæt polære koordinater: (r, φ) og skriv de kartesiske koordinater op med disse.

3) Hvor mange af de polære koordinater ændres, når objektet bevæger sig på ringen?

4) Hvor mange koordinater skal der bruges for at beskrive objektets bevægelse?

5) Hvad er det smarte koordinatvalg?

Opgave 3: •• Brint
Hydrogenisotopen ^{1}H består af en proton med massen m_p og ladningen e, samt en elektron med massen m_e og ladningen $-e$. Fra elektrodynamik oplyses det at kraften fra en punktladning Q_1 med stedvektor $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ på en punktladning Q_2 med stedvektor $\vec{\boldsymbol{r}}_2$ er

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1|^3}, \tag{1.1}$$

hvor ε_0 er en konstant.

1) Skitser situationen og indtegn systemets massemidtpunkt.

2) Hvad betyder $|\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|$ fysisk?

3) Indtegn kræfterne i tegningen.

4) Hvor er det smartest at placere origo?

Massemidtpunktet for et tolegemesystem er defineret som

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \vec{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \vec{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2} \tag{1.2}$$

5) Hvad bliver dette under approksimationen at $m_p \gg m_e$?

6) Opskriv kraften på elektronen i dette koordinatsystem.

Energi

Opgave 4: • Energibevarelse
Energi er altid bevaret. Den kan omdannes mellem forskellige former, men den forsvinder aldrig.

1) Opskriv nogle af de typer af energi, som du kan komme på.

2) Forklar i egne ord hvad en konservativ kraft er.

3) Summen af kinetisk og potentiel energi kaldes mekanisk energi, og er bevaret i et system, så længe det kun er påvirket af konservative kræfter. Angiv tre eksempler på systemer hvor den mekanisk energi er bevaret og tre hvor den ikke er.

4) Angiv, for hvert eksempel hvor den mekaniske energi ikke er bevaret, årsagen til dette.

Opgave 5: • Frit fald
Et legeme med massen m frigives fra hvile i en afstand h over Jordens overflade. Antag at tyngdeaccelerationen er konstant over alt og har værdien g.

1) Tegn et kraftdiagram for systemet.

2) Hvorfor er den mekaniske energi ikke bevaret i systemet?

3) Negliger nu den kraft, der ødelægger energibevarelsen, og bestem derved legemets fart i det øjeblik det rammer Jorden.

4) Diskuter hvor god en antagelse det er at negligere den "problematiske" kraft, og opstil et muligt kriterie for at det er en god antagelse.

Opgave 6: • Kollisioner
Når to legemer kolliderer kan det inddeles i to grupper: Elastiske og uelastiske kollisioner. Under kollisionen påvirker legemerne hinanden med en eller flere kræfter, og elastiske kollisioner defineres som kollisioner, hvor disse kræfter udelukkende er konservative. Der ses bort fra eventuelle ydre kræfter.

1) Hvorfor er størrelsen af den samlede kraft fra legeme 1 på legeme 2 den samme som den samlede kraft fra legeme 2 på legeme 1?

2) I hvilken retning går kraften på legeme 2 i forhold til kraften på legeme 1?

3) Benyt Newtons anden lov til at vise at systemets totale impuls er bevaret.

4) Er den kinetiske energi bevaret for en
a) Elastisk kollision?
b) Uelastisk kollision?

Opgave 7: •• Bevægelse omkring ligevægt
Det antages at en masse, m, er påvirket af den sfærisk symmetriske[1] potentielle energi

$$V(r) = V_0\left(\frac{r}{R} + \lambda^2\frac{R}{r}\right)$$

hvor V_0, R, λ alle er positive konstanter. Massens bevægelse omkring ligevægts punktet ønskes nu undersøgt.

1) Bestem den stedafledede af den potentielle energi

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = ?$$

2) Bestem afstanden r_0, hvor $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r = 0$.

[1] Sfærisk symmetri i den potentielle energi betyder her at det kun er massens afstand til nulpunktet, der betyder noget for den potentielle energi, men ikke hvor på sfæren med radius r den er.

3) Find den andenafledte:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}r^2} = ?$$

4) Argumenter for at r_0 er det punkt, hvor den potentielle energi er mindst, altså at potentialet stiger, hvis r afviger fra r_0.

5) Nu defineres x som afstanden fra r_0, det vil sige $x = r - r_0$. Udtryk den potentielle energi ved x

$$V(x) = ?$$

6) Vis at den potentielle energi, $V(x)$, har formen for en harmonisk oscillator (periodisk svingning) for små x.
Hint: Vis at en Taylorudvikling til anden orden giver en potentiel energi på formen

$$V(x) = c + \frac{1}{2}kx^2$$

hvor c og k er konstanter.

7) Bestemt vinkelfrekvensen for massens oscillationer under denne approksimation.
Hint: Under denne approksimation opfører systemet sig som en harmonisk oscillator analogt til klodsen på fjederen i afsnit 1.1.

Opgave 8: ●●● (Næsten) alt er en harmonisk oscillator
En harmonisk oscillator har potentiel energi på formen $V = c + \frac{1}{2}k^2$, hvor c og k er konstanter. Betragt nu et arbitrært, endimensionelt system med potentiel energi $V(x)$, hvor x er det generaliserede koordinat.

1) Med henvisning til tabel A.1 i kompendiet, opskriv Taylorrækken til 2. orden for V omkring punktet $x = 0$.

2) Hvad er kriteriet for at systemet til 2. orden er en hamonisk oscillator?

3) Giv eksempler på funktioner der opfylder dette kriterie.

I eksemplerne er det gentagende gange benyttet at nulpunktet for den potentielle energi kan vælges frit. Dette ville være smart at vise.
Lad nu den potentielle energi for samme system som før være $\tilde{V}(x) = V(x) + \lambda$, hvor λ er en konstant. I Newtons formulering af mekanikken bestemmer kræfter legemers bevægelse, hvor det i Lagrangeformalismen er Euler-Lagrangeligningen. I begge tilfælde er det de afledede med hensyn til sted, der bestemmer hvordan systemet opfører sig.

$$\text{Newton}: \qquad F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{1.3}$$

$$\text{Lagrange}: \qquad \begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \\ \Rightarrow &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.4}$$

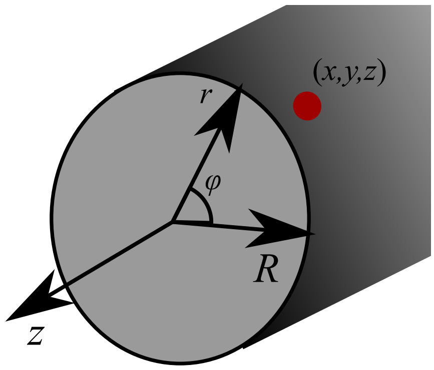
hvor implikationen gælder fordi den potentielle energi ikke afhænger af $\dot{x}$.

4) Vis at begge potentielle energier, $V(x)$ og $\tilde{V}(x)$, giver samme fysik, dvs. ligningerne er ens.

5) Brug dette til at vise at fysikken ikke ændrer sig ved at droppe 0. ordens ledet i Taylorrækken. Med andre ord vis at $V(x) \simeq c + \frac{1}{2}kx^2$ og $V(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2$ opfører sig ens overfor ligningerne (1.3) og (1.4).

Etlegemeproblemer

Opgave 9: ● Partikel på en cylinder
Vi ser på en partikel der kan bevæge sig frit på overfladen af en cylinder med radius R. Her er det



oplagt at bruge cylindrinske koordinater:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\varphi) \\
z &= z
\end{aligned}
$$

1) Brug de cylindriske koordinater som generaliserede koordinater. Hvilke ændres når partiklen bevæger sig?

2) Udregn $\dot{x}$, $\dot{y}$ og $\dot{z}$ i de nye koordinater.

3) Opstil den kinetiske energi, $K = \frac{1}{2}mv^2$.

4) Opstil Lagrangefunktionen. Den potentielle energi er altid nul.

5) Brug Euler-Lagrangeligningerne til at opstille anden ordens differentialligninger for de koordinater der ændres når partiklen bevæger sig.

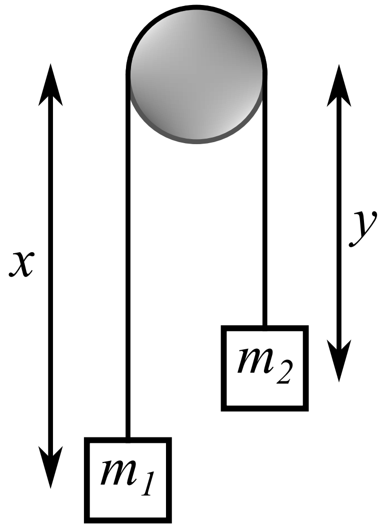
6) Hvordan bevæger partiklen sig?

Opgave 10: • **Atwoods faldmaskine**

I figur 1.1 ses en illustration af Atwoods faldmaskine hvori to loder hænges i hver sin ende af en snor med konstant længde l. I figuren er to koordinater også defineteret og de to loders masser er integnet.

1) Argumenter for at der kun er ét generaliseret koordinat, og udtryk y ved x.

2) Udtryk $\dot{y}$ ved $\dot{x}$.



Figur 1.1: Illustration af Atwoods faldmaskine, hvor to lod forbindes med en snor over en trisse.

3) Definer hhv. $x = 0$ og $y = 0$ som nulpunkt for den potentielle energi for hvert lod, og opskriv denne.

4) Opskriv den kinetiske energi som summen af den kinetiske energi for hver af de to loder.

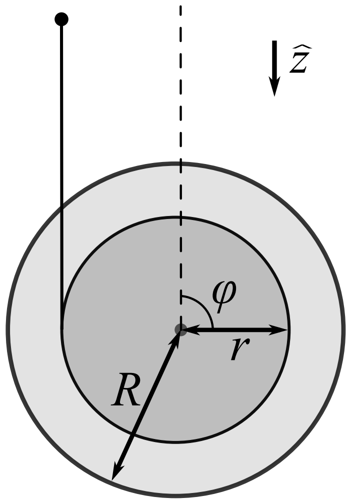
5) Vis at Lagrangefunktionen for systemet kan skrives på formen

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + g(m_1 - m_2)\,.$$

6) Vis ved brug af Euler-Lagrangeligningen at systemets bevægelsesligning er

$$\ddot{x} = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

7) Vis ud fra bevægelsesligningen, hvad fortegnet af $\ddot{x}$ er afhængigt af om $m_1 > m_2$ eller $m_2 > m_1$. Hvilken af de to lod vil falde ned (hvad betyder det for retningen af bevægelsen)?



Figur 1.2: Skitse af en simpel yoyomodel med radier r og R i et tyngdefelt med i nedadgående retning med styrken g.

8) Skrives bevægelsesligningen lidt om fås

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = a \\
\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x &= a\mathrm{d}t \\
\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \int a\,\mathrm{d}t \\
\Longrightarrow \mathrm{d}x &= \int a\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t \\
\Longrightarrow x(t) &= \iint a\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Dette trick kaldes separation af de variable, og det er ikke den mest matematisk stringente metode i verden[2], men den virker og den bruges i tide og utide på fysik. Bestem $x(t)$ ved ovenstående integral.

Opgave 11: • **Yoyo**

Betragt yoyoen i figur 1.2 med massen m og de fysiske dimensioner som vist i figuren. Tyngdekraften har størrelsen g i z-retningnen, $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{g}} = mg\hat{\mathbf{z}}$, og den ideelle snor sidder fast i afstanden r fra centrum. At snoren er ideel betyder at den anses som ustrækkelig, masseløs, og derudover er anses friktionen mellem snoren og yoyoen som værende så stor at yoyoen ikke glider. Det kan vises at yoyoens inertimoment i denne model er

$$I = \frac{1}{2}mR^2 .$$

Som generaliseret koordinat benyttes z, fordi z og φ er koblede.

1) Antagelsen at friktionen mellem snoren og yoyoen er tilpas stor gør at det punkt, hvor snoren slipper yoyoen står stille, hvilket betyder at rotationen lige præcis udligner bevægelsen fra at yoyoen falder nedad.[3] Det betyder at farten v i ligning (1.8) er lig med farten v_{CM} i ligning (1.14), hvor begge ligninger henviser til kompendiet. Brug disse ligninger til at vise at

$$K = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 .$$

2) Argumenter for at den potentielle energi kan skrives på formen $V = -mgz$.

3) Konkluder at Lagrangefunktionen for problemet er

$$L = \frac{1}{2}m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{z}^2 + mgz .$$

4) Bestem nu følgende afledede af Lagrangefunk-

[2] Differentialoperatoren $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ betragtes her som en brøk, hvor bestanddelene kan flyttes rundt lige så tosset man lyster.

[3] Dette kaldes ofte at yoyoen *ruller uden at glide*, hvilket er en meget almindelig antagelse i fysik.

tionen

$$\frac{\partial L}{\partial z} = ?$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = ?$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = ?$$

5) Brug Euler-Lagrangeligningen, ligning (1.50) i kompendiet, til at vise at

$$\ddot{z} = \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2} \,. \tag{1.5}$$

Det kan vises at løsningen til denne differentialligning er

$$z(t) = \frac{g}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]^{-1} t^2 + v_0 t + z_0 \,, \tag{1.6}$$

hvor v_0 er startfarten og z_0 er startstedkoordinatet. Ved indsættelse i ligning (1.5) kan de vises at ligning (1.6) er en løsning, eller det kan udledes med samme metode som i opgaverne 10 og 13.

6) Overvej hvilke fordele og ulemper, der er ved at benytte Lagrangemekanikken til at løse dette problem frem for Newtonsk mekanik.

Opgave 12: •• Klods på en fjeder

I starten af kapitlet blev det vist at bevægelsesligningen for en klods på en fjeder, figur 1.1 i kompendiet, er

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \,.$$

Til dette blev Newtons formulering af mekanikken brugt, men det samme kan også opnås med Lagrangeformalismen.

1) Opstil Lagrangefunktionen for problemet.

2) Benyt Euler-Lagrangeligningen til at komme frem til det samme.

Opgave 13: •• Cylinder på skråplan

En cylinder med massen m, radius R og inertimoment I placeres på et skråplan med vinklen α i forhold til vandret.

1) Skitser situationen.

2) Indtegn på skitsen det koordinatsystem, der giver færrest mulige antal frihedsgrader.

3) Opstil den potentielle energi, V, for systemet.

4) Udtryk den kinetiske energi, K, ved cylinderens fysiske parametre og tidsafledede af de valgte generaliserede koordinater.

5) Opskriv problemets Lagrangefunktion.

6) Vis at ved løsning af Euler-Lagrangeligningen fåes

$$\ddot{x} = -\frac{g \sin\alpha}{1 + I/mR^2} \,.$$

7) Argumenter for at accelerationen er konstant.

8) Lad nu accelerationen[4] være $\tilde{g}$ og vis at bevægelsesligningens løsning er

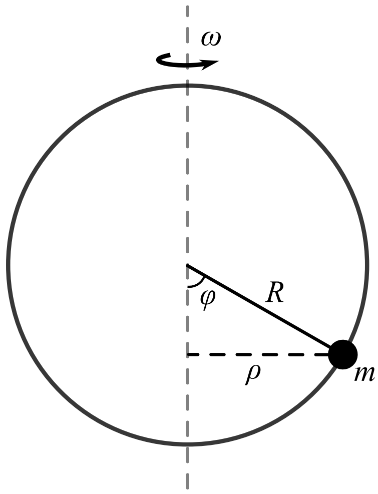
$$x(t) = \frac{1}{2}\tilde{g}t^2 + v_0 t + x_0 \,.$$

Opgave 14: ••• Masse på roterende ring

En masse, m, er placeret på en ring, hvorpå den kan bevæge sig friktionsløst, som i figur 1.3. Ringen har radius R, og den roterer om sin egen akse med vinkelhastigheden ω. Massen kan beskrives udelukkende ved det generaliserede koordinat φ, men for at indse dette gøre brug af koordinatet ρ.

1) I første omgang kigges på den potentielle energi. Udtryk den ved det generaliserede koordinat φ

[4] Grunden til at der ikke bare benyttes $\ddot{x}$ er at det ikke er god kutyme at have en stedfunktion, der afhænger af sin egen dobbeltafledede.



Figur 1.3: Illustration af situationen, hvor koordinater og andre parametre er indtegnet.

således at $V(\varphi = 0) = 0$.

2) Massens hastighed deles nu i en radiel og en tangentiel retning, hvilket svarer til hhv. ind i tegningen og langs ringen. Bestem disse komponenter udtrykt ved ω, φ og $\dot{\varphi}$, samt evt. geometriske parametre.

$$v_{\text{rad}} = ?$$
$$v_{\text{tan}} = ?$$

Hint: Benyt ligning (1.8) i kompendiet.

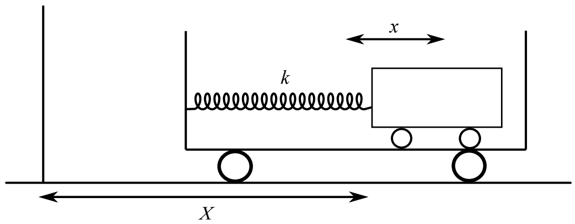
3) Brug dette til at bestemme den kinetiske energi og vis dermed at Lagrangefunktionen er

$$L = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2(\varphi)\right] - mgR\left[1 - \cos(\varphi)\right] .$$

4) Benyt Euler-Lagrangeligningen til at vise at bevægelsesligningen er

$$\ddot{\varphi} = \left[\omega^2\cos(\varphi) - \frac{g}{R}\right]\sin(\varphi) .$$

5) Hvad er kriteriet for henholdsvis et stabilt og ustabilt ligevægtspunkt fysisk og matematisk?



Figur 1.4: Illustration af problemet i opgave 15. X er stedkoordinatet for den store vogn og x er stedkoordinatet for den lille, hvor $x = 0$ defineres som midtpunktet i den store vogn.

6) Brug disse kriterier til at bestemme systemets ligevægtspunkter, og forklar hvad de fysisk svarer til.

7) Eksister alle ligevægtspunkter for et arbitrært "valg" af ω, R og g?

8) Diskuter om ligevægtspunkterne er stabile eller ustabile i alle tilfælde fra sidste spørgsmål.[5]

Flerlegemeproblemer

Opgave 15: ●● To koblede vogne

En lille vogn med massen m placeres i en større vogn og de to forbindes med den fjeder med fjederkonstant k. Den lille vogn antages at kunne bevæge sig friktionsløst ift. den store og den store ift. underlaget, og de generaliserede koordinater defineres som på figur 1.4. Den store vogn tvinges til simpel harmonisk bevægelse, dvs. $X = A\cos\omega t$, hvor A, ω er konstanter og derudover kaldes den lille vogns naturlige frekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

1) Argumenter for, at den lille vogns hastighed i forhold til underlaget kan skrives som

$$v = \dot{x} + \dot{X} ,$$

[5] Ligevægtspunkterne $\varphi_0 = 0, \pm\pi$ er ikke super kompliceret at vise stabiliteten af matematisk, men den sidste er svær, hvorfor dette bør tilgås med forsigtighed.

og brug dette til at indse at

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \dot{X}\right)^2 \ .$$

2) Argumenter for at den potentielle energi for den lille vogn er

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \, ,$$

og konkluder, at

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \dot{X}\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2 \ .$$

3) Brug dette til at vise at

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + \dot{X}) \, ,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \ .$$

4) Vis at

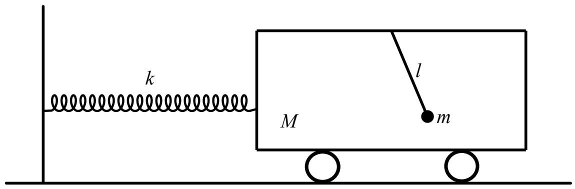
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - Am\omega^2 \cos \omega t \, ,$$

og konkluder, at

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = A\omega^2 \cos \omega t \ .$$

5) Fastholdes den store vogn nu i $X = 0$ bliver systemet i denne opgave ækvivalent til et system, uden den store vogn, hvor fjederen på den lille vogn er spændt fast på væggen, hvilket er en harmonisk oscillator. $X = 0$ kan realiseres ved at sætte $A = 0$. Vis at bevægelsesligningen i dette tilfælde reducerer til en harmonisk oscillator?

6) Hvorfor er det relevant at tjekke at systemet reducerer til en harmonisk oscillator i grænsen $A = 0$?



Figur 1.5: Pendul med massen m og længden l placeret i en vogn med massen M, der er fastgjort til en væg med en en fjeder med fjederkonstant k.

Opgave 16: ●●●● Pendul i en vogn

I figur 1.5 er der tegnet et pendul, ophængt i en vogn, der tilmed er fastspændt med en fjeder til en væg, og de relevante fysiske størrelser er indtegnet.

1) Identificer systemet generaliserede koordinater, indtegn enhedsvektorerne for et kartesisk koordinatsystem og definer origo.

2) Opskriv pendulets kartesiske koordinater, (X_p, Y_p), udtrykt ved de generaliserede koordinater, samt vognens kartesiske X-koordinat, X_v, og argumenter for Y_v er ubetydelig for problemet.

3) Bestem systemets potentielle energi.

4) Bestem systemets kinetiske energi og opskriv Lagrangefunktionen.

5) Vis at løsningen til Euler-Lagrangeligningen er de koblede differentialligninger

$$a) \quad M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin\varphi = -kx \, ,$$
$$b) \quad ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi = -mgl\sin\varphi \ .$$

6) Bestem Taylorudviklingen til 1. orden i φ af bevægelsesligningerne.

Nu kigges på grænserne

1. $k \rightarrow \infty$,
2. $M \gg m$.

7) Hvilken fysisk situation svarer hver grænse til?

8) Hvad forventes systemet at blive til i de ovenstående grænser?

9) Hvad bliver det til?

Fiktive Kræfter

Opgave 17: ●● Fysiske og fiktive kræfter
Nu betragtes systemet fra karruseleksemplet i afsnit 1.6, og der tilføjes en stedafhængig kraft til systemet med potentiel energi $V(x, y, z)$.

1) Hvorfor giver antagelserne at følgende er sandt?

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} V(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} V(x, y) = 0$$

2) Argumenter for at $V(x, y)$ ikke indgår i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ for $q_i = x, y$. Med andre ord, at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right).$$

3) Konkluder at bevægelsesligningerne for systemet er

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} + m\omega^2 x - \frac{\partial}{\partial x} V(x, y),$$
$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} + m\omega^2 y - \frac{\partial}{\partial y} V(x, y),$$

som kan skrives på formen

$$m\ddot{x} = F_x^{\mathrm{cor}} + F_x^{\mathrm{cf}} - \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z),$$
$$m\ddot{y} = F_y^{\mathrm{cor}} + F_y^{\mathrm{cf}} - \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z).$$

hvor superscriptet angiver hvilken af de to fiktive kræfter, der er tale om, og subscriptet angiver retningen.

4) Beskriv hvordan disse fiktive kræfter opfører sig overfor Newtons 2. lov og sammenlign med fysiske kræfter som for eksempel tyngdekraften.

Det vigtige i denne opgave er ikke at regne eksemplet igennem på ny, men at gennemgå argumenterne for de konklusioner der drages, for at give en forståelse for begrebet *fiktive kræfter*.

Opgave 18: ●●● To masser på en roterende stang
To legemer med masserne m_1 og m_2 fastspændes for enden af en stang. Denne stang monteres det er apparat, der gør sådan at stangen kan rotere omkring apparatet med konstant vinkelacceleration $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$, samtidig med at den kan bevæge sig friktionsløs frem og tilbage gennem apparatet. Afstanden fra legemerne til apparatet kaldes hhv. ρ_1 og ρ_2 og konsekvensen af antagelsene er at $l = \rho_1 + \rho_2$, hvor l er længden af stangen. Stangen antages også for stiv. Opstillingen kan ses på figur 1.6.

1) Identificer et logisk koordinatsystem at beskrive problemet i.

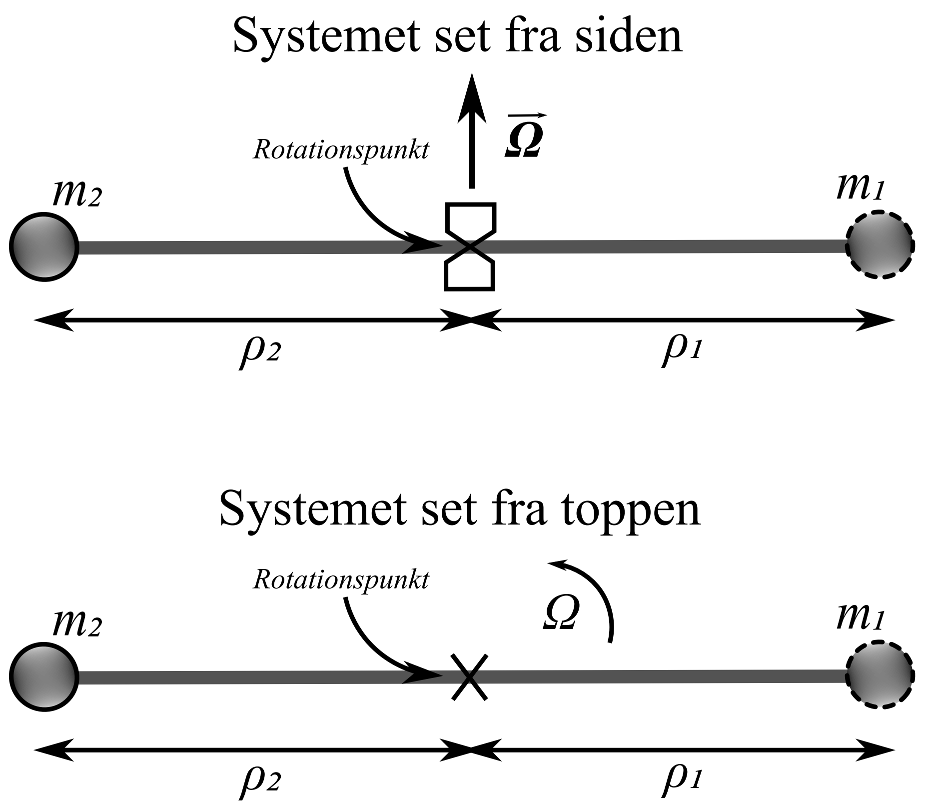
2) Identificer de(n) genereliserede koordinat(er) for hvert legeme.

3) Antagelserne giver en begrænsning af hvordan de to legemer kan bevæge sig ift. hinanden. Hvad er sammenhængen mellem de to legemers hastighed?

4) Med henvisning til ligning (1.90) i kompendiet bestem Coriolis og centrifugalkraften på hvert legeme, og inkluder begrænsningen på hastighederne.

5) Tegn kræfterne der virker på hvert legeme og beskriv hvilke antagelse tegningen bygger på.

6) Argumenter for at Corioliskraften er ubetydelig



Figur 1.6: Illustration af problemet, hvor stangen kan bevæge sig lineært gennem rotationspunktet udover at rotere med konstant vinkelhastighed Ω.

for problemet grundet antagelserne om situationerne.

7) Benyt at summen af kræfter på et legeme i ligevægt er nul, $\sum \vec{F} = \vec{0}$, til at bestemme et systemets ligevægtskonfiguration.

8) Hvordan forventes ligevægtskonfigurationen at se ud under antagelse af at $m_1 = m_2$.

9) Stemmer forventningen og det beregnede udtryk overens?

Opgave 19: ●●● Er fiktive kræfter trælse?
Betragt nu de fiktive kræfter, som givet i ligning (1.90) i kompendiet.

1) Afhænger hver af de fiktive kræfter af sted eller hastighed?

2) Det er bøvlet, hvis eksempelvis funktionen indgår som sig selv, samt sin første og anden afledede. Med tanke på hvad de kræfter, der er arbejdet mest med i kapitlet, giver nogle af de fiktive kræfter så anledning til differentialligninger, der er specielt vanskelige at løse?

3) Hvis differentialligningen kan skrives på formen

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} = k\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

kan den relativt simpelt løses. Hvorfor?

Perspektiverende Problemer

Opgave 20: ●●●● Tennis Racket Theorem

Indtil videre har vi kun kigget på rotationer om én akse, men ofte roterer ting om flere akser, hvilket komplicerer tingene en hel del. I denne opgave vil vi ikke forsøge at udlede bevægelsesligningerne for et sådant system, men forsøge at forstå hvilken information de kan give os. Det kan vises at bevægelsesligningerne for et stift legeme, der kan rotere om tre akser med hver sit inertimoment, er

$$\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x &= (I_y - I_z)\omega_y\omega_z\,, \\ I_y\dot{\omega}_y &= (I_z - I_x)\omega_z\omega_x\,, \\ I_z\dot{\omega}_z &= (I_x - I_y)\omega_x\omega_y\,, \end{aligned}$$

eller på vektorform

$$\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\ (I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Her er I_i og ω_i henholdsvis inertimomentet og vinkelhastigheden for rotation om den i'te akse og yderligere antages det at $I_x > I_y > I_z > 0$.

1) Antag at $\omega_y \approx \omega_z$ er meget små, og brug dette til at vise at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ (I_z - I_x)\dot{\omega}_z\omega_x \\ (I_x - I_y)\omega_x\dot{\omega}_y \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Hint: ω_y og ω_z er så små at andenordensled med dem er nul, mens førsteordensled ikke er.

2) Vis ved brug af ligningerne 1.7 og 1.8 at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x^2\omega_y(I_z - I_x)(I_x - I_y)/I_z \\ \omega_x^2\omega_z(I_x - I_y)(I_z - I_x)/I_y \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

3) Konkluder ud fra ligning 1.9 at fortegnet for $\ddot{\omega}_y$ og $\ddot{\omega}_z$ er modsat af henholdsvis ω_y og ω_z.

4) Antag nu at $\omega_x \approx \omega_z$ er meget små, analogt til spørgsmål 1), og brug helt samme metode til at vise at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \omega_y^2\omega_x(I_y - I_z)(I_x - I_y)/I_y \\ 0 \\ \omega_y^2\omega_z(I_x - I_y)(I_y - I_z)/I_y \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

5) Benyt nu ligning 1.10 til at konkludere at fortegnene for $\ddot{\omega}_x$ og ω_x er ens og ligeledes for ω_z.

6) Legemet sættes til at rotere om sin i'te akse, hvor vinkelhastigheden om de andre akser er små. Hvis legemet fortsætter med stort set kun at rotere om den i'te akse, da betragtes rotation om den i'te rotationsakse som stabil. Argumenter for at rotation om den i'te rotationsakse er stabil, hvis $\ddot{\omega}_j \propto -\omega_j \ \forall\, j \neq i$.

7) Ved analoge udregninger fås at $\ddot{\omega}_x > 0$ og $\ddot{\omega}_y > 0$. Konkluder at rotation om x- og z-aksen er stabil, mens rotation om y-aksen er ustabil. Dette resultat kaldes *Tennis Racket Theorem*, *Intermediate Axis Theorem* eller *Dzhanibekov Effect*[6] efter Dzhanibekov, der bemærkede det under en mission i rummet.

8) Den eneste antagelse, der er lavet, er at legemet er stift[7]. Brug dette til at undersøge dette fænomen med virkelige objekter, forklar hvilke rotationsakser, der er mulige for objektet, samt den relative størrelse af inertimomentet for rotation omkring de forskellige akser.

Opgave 21: ●●● Hamiltonfunktionen og et systems energi

Antag at et systems kinetiske energi kan skrives

[6] Løses differentialligningen i ligning 1.7 fås en bevægelse som denne: `https://www.youtube.com/watch?v=1n-HMSCDYtM`

[7] Det er også antaget at legemet ikke er påvirket af ydre kræfter i udledningen af ligning 1.7, men det betyder bare at konklusionen om stabilitet af rotationsakser ikke afhænger af nogle ydre kræfter.

på formen $K = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$, hvor $A(q)$ er en arbitrær funktion af q, som er det eneste generaliserede koordinat. Den potentielle energi kaldes $V(q)$ og der antages intet andet end at den er stedsafhængig.

1) Opskriv systemets Lagrangefunktion.

2) Bestem den generaliserede impuls ud fra dennes definition.

3) Udtryk $\dot{q}$ ved p og $A(q)$.

4) Benyt definitionen af Hamiltonfunktion til at bestemme denne.

5) Vis at hvis et systems kinetiske energi kan skrives på formen $K = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$ så er $H = E$.

6) Argumenter for at disse argumenter generaliserer til n generaliserede koordinater, hvor kinetisk energi på tilsvarende vis antages at være

$$K = \sum_i \frac{1}{2}A(q_i)\dot{q}_i^2 \,.$$

Opgave 22: ●●● Fra klassisk mekanik til kvantemekanik
Her vil sammenhængen mellem klassisk mekanik og kvantemekanik belyses gennem en metode til at opskrive Hamiltonoperatoren for et system, ved at starte med en klassisk analyse af problemet. Der kigges her på én partikel.

1) Antag at den generaliserede impuls kan skrives på formen $p = m\dot{q}$. Benyt dette til at opskrive den kinetiske energi udtrykt ved impulsen p.

2) Benyt resultatet fra opgave 21 til at opskrive systemets Hamiltonfunktion.

3) For at kunne beskrive systemet kvantemekanisk, skal Hamiltonfunktionen skrives om til en Hamiltonoperator. Hvilke elementer i Hamiltonfunktionen skal omkrives, for at stå på operatorform?

4) Omskriv de før angivet elementer til operatorform ved hjælp af tabel 2.1 i kompendiet, og bestem derved Hamiltonoperatoren.

Opgave 23: ●●●● Energibevarelse i Hamilton
I opgave 21 blev det vist at Hamiltionfunktionen i nogle tilfælde er lig med et systems energi. Det kunne derfor være interessant at undersøge under hvilke omstændigheder Hamiltonfunktionen er bevaret over tid.

1) Beskriv forskellen på den fuldstændige differentiation, f.eks. $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, og den partielle differentiation, eksempelvis $\partial/\partial t$. [8]

2) Opskriv den fuldstændigt tidsafledede af en generel Hamiltonfunktion af ét generaliseret koordinat, $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$, vha. kædereglen.

3) Benyt nu Hamiltons ligninger til at simplificere summen.

4) Konkluder at

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \,.$$

5) Under hvilke omstændigheder er Hamiltonfunktionen bevaret i tid?

6) Med henvisning til opgave 21, hvad betyder det fysisk for systemet at Hamiltonfunktionen er bevaret i tid?

7) Opskriv $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ for en generel Hamiltonfunktion af n generaliserede koordinater og vis at ovenstående er sandt for n generaliserede koordinater.

[8] Differentialoperatorerne er her skrevet med hensyn til tid, men det er bare for at give et eksempel. Der tænkes her på den generelle forskel.

Kapitel 2

Kvantemekanik

Uendeligt dyb brønd

Opgave 1: • Parabelformet bølgefunktion
Vi ser her på en partikel i en uendelig brønd i intervallet fra 0 til L. Lad bølgefunktionen være:

$$\psi = Nx(L - x)$$

1) Find N så bølgefunktionen er normeret?

2) Hvad er forventningsværdien for positionen: $\langle x \rangle$?

3) Find forventningsværdien for energien: $\langle E \rangle$ og sammenlign den fundne energi med grundtilstandsenergien: $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.

4) Er ψ en stationær tilstand?

Opgave 2: • Sammensatte bølgefunktioner
Find normeringskonstanten N og energien E for de følgende bølgefunktioner, der er sammensat af stationære tilstande for den uendelige brønd:

1) $N(\psi_1 + \psi_2)$

2) $N(\psi_1 - \psi_3)$

3) $N(\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3)$

(Hint: Udnyt at bølgefunktionerne er ortonormale)

Opgave 3: •• Den tidsafhængige bølgefunktion
I en uendelig brønd er bølgefunktionen til tiden $t = 0$:

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_1 + \psi_2)$$

1) Hvad er $\Psi(x, t)$? Du kan med fordel bruge $\omega = \frac{E_1}{\hbar} = \frac{\pi^2 \hbar}{2mL^2}$

2) Hvad er $\Psi^*(x, t)$?

3) Skriv $\Psi^* x \Psi$ så simpelt som muligt.

4) Hvad er $\langle x(t) \rangle$

Hint:$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, $\langle \psi_n | \, x \, | \psi_n \rangle = 0$ og $\langle \psi_1 | \, x \, | \psi_2 \rangle = \frac{-16L}{9\pi^2}$.

Opgave 4: ••• En partikel i et kvadrat
I to dimensioner er den tidsuafhængige Schrödingerligning i kartesiske koordinater.

$$E\psi(x, y) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + V(x, y)$$

Vi vil se på en kvadratisk brønd, i to dimensioner, med sidelængder på L. Her er potentialet nul når $0 \le x \le L$ og $0 \le y \le L$ Antag at man kan skrive bølgefunktionen som: $\psi(x, y) = X(x)Y(y) = XY$.

1) Indsæt $\psi = XY$ i Schrödingerligningen med $V = 0$ og isoler E.

2) Energien vil bestå af en bidrag fra X og Y. så $E = E_x + E_y$. Opstil differentialligninger i stil med ligning (2.20) i kompendiet for X og Y.

3) Find generelle løsninger til differentialligningerne, bølgefunktionen og de tilhørende energier. Bemærk at der vil være et kvantetal for hver af differentialligningerne.

4) Hvad er de fem laveste energier, og skitser bølgefunktioner med disse energier.

Opgave 5: ●●● En partikel i en boks
I tre dimensioner er den tidsuafhængige Schrödingerligning i kartesiske koordinater.

$$E\psi(x, y, z) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z)$$

Vi vil se på en kubisk boks med en sidelængde på L vil potentialet være nul når x, y og z alle er imellem 0 og L. Antag at man kan skrive bølgefunktionen som: $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) = XYZ$.

1) Indsæt $\psi = XYZ$ i Schrödingerligningen med $V = 0$ og isoler E.

2) Energien vil bestå af en bidrag fra X, Y og Z. så $E = E_x + E_y + E_z$. Opstil differentialligninger i stil med ligning (2.20) i kompendiet for X, Y og Z.

3) Find generelle løsninger til differentialligningerne, bølgefunktionen og de tilhørende energier. Bemærk at der vil være et kvantetal for hver af differentialligningerne.

4) Find de laveste 5 mulige energier udtrykt i $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ energien for en endimensionel uendelig brønd med samme brede som boksens sidelængde.

Opgave 6: ● Parabelformet bølgefunktion igen
Denne opgave bygger videre på opgave 1, så det er en fordel at have lavet denne opgave først. Vi ser igen på en parabelformet bølgefunktion i en uendelig brønd:

$$\psi = Nx(L - x)$$

1) Hvad er $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$?

2) Hvad er $\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$?

3) Passer det med Heisenbergs usikkerhedsprincip?

Opgave 7: ●● Den frie partikel
En fri partikel er en partikel der ikke påvirkes af noget potentiale, så $V(x) = 0$ for alle x

1) Hvad er $\hat{H}$?

2) Hvad er $[\hat{p}, \hat{H}]$?

3) Hvilke bølgefunktioner opfylder: $\hat{p}\psi_p = -i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = p\psi_p$?

OBS: $\hat{p}$ er en operator og p er et tal.

4) Hvad sker der hvis man sætter ψ_p ind i Schrödingerligninen?

5) Hvad er sammenhængen imellem Eog p?

6) Hvad er σ_p og σ_E?

Opgave 8: ●●● En anden usikkerhedsrelation
Da vi så på usikkerhedsrelationen, så vi primært på:

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Så længe vi har to operatorer, kan vi opstille tilsvarende relationer. Der er en ofte anvendt tilsvarende relation for energi og tid:

$$\sigma_E\sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$$

På trods af at de to relationer er næsten identiske, er det ikke muligt at udlede den sidste på samme måde som vi gjorde med den første.[1]

Lad $\hat{Q}$ være en operator der explicit afhænger af x, p og t.

1) Vis at:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle \frac{\partial\Psi}{\partial t}\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle + \left\langle \Psi\middle|\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Psi\right\rangle + \left\langle \Psi\middle|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle$$

2) Udnyt Schrödingerligningen:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

til at vise:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{Q}]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle$$

Operatorer der explicit afhænger af t er ret sjældne, så fremover vil vi antage at $\hat{Q}$ er uafhængig af t.

3) Hvordan ændrer denne antagelse resultatet af de to foregående delopgaver?

4) Brug Den gennerelle usikkerhedsrelation til at vise:

$$\sigma_H\sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\langle\hat{Q}\rangle}{\mathrm{d}t}\right|$$

σ_t kan defineres som den tid der går før forventningsværdien af en vilkårlig observabel ændrer sig med en standardafvigelse. Som en formel er det:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_Q}{|\mathrm{d}\langle Q\rangle/\mathrm{d}t|}$$

5) Brug $\hat{H} = \hat{Q}$ til at finde tids energi usikkerhedsrelationen.

(Hint: $\hat{H} = \hat{H}^*$ og $\langle\hat{H}\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{H}\hat{Q}\Psi\rangle$)

[1] I den specielle relativitetsteori er position og to to sider af samme sag. Tilsvarende for impuls og energi. Det er muligt at kombinere specielrelativitet med kvantemekanikken, men så må vi finde en erstatning til Schrödingerligningen, der bestemt ikke ligestiller x og t.

Harmoniske oscillatorere

Opgave 9: • **Harmonisk oscillator med $\hat{a}_-\hat{a}_+$**
Færdiggør udledningen af den harmoniske oscillator. Hvis du havde problemer med denne udledning er denne opgave stærkt anbefalet.

1) Udregn $\hat{a}_-\hat{a}_+$.

2) Brug dette til at udlede ligning (2.60) i kompendiet.

3) Vis at hvis ψ_n er en løsning til Schrödingerligningen, så er $\hat{a}_-\psi_n$ det også.

4) Hvad er energien af $\hat{a}_-\psi_n$

Opgave 10: •• **Generering af nye tilstande.**
Start med grundtilstanden for den harmoniske oscilator ψ_0 og generer de første exciterede tilstande:

1) ψ_1

2) ψ_2

3) ψ_3

4) ψ_4

Opgave 11: •• **Det klassisk tilladte område.**
Vi vil her sammenligne den kvanteharmoniske oscillator med en klassisk harmonisk oscillator med samme V og $E = \frac{\hbar\omega}{2}$

1) Hvad er den maksimale værdi af x?

2) Hvad er sandsynligheden for at finde en partikel i ψ_0 tilstanden i intervallet fra $-x_{\max}$ til $x_{\max}$?

(Hint: $\int xe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-ax^2}}{2a} + k$.)

Opgave 12: •• **Sjov med operatorer**
Vi vil her komme ind på en af grundene til, at hæve-/sænkeoperatorerne er smarte. Udenyt at bølgefunktionerne er ortonormale.

1) Udtryk $\hat{x}$ og $\hat{p}$ med $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$.

2) Find $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$ for ψ_0, ψ_1 og ψ_n.

3) Gør det samme for $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$.

4) Hvad er σ_x og σ_p for ψ_n?

5) Hvor dan passer det med Heisenbergs usikkerhedsprincip?
Husk: $\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x})$

Opgave 13: •• Nu med tid
Til tiden $t = 0$ har vi bølgefunktionen:

$$\Psi(x, t = 0) = N(\psi_0 + \psi_1)$$

(Det kan være en fordel at have lavet opgave 12 først.)

1) Hvad er N?

2) Hvad er $\Psi(x, t)$?

3) Hvad er $\langle E \rangle$?

4) Hvad er $\langle x(t) \rangle$?

Opgave 14: •• Molekylære vibrationer
En god model for bindingen i et molekyle er Morsepotentialet:

$$V(r) = D\left(1 - e^{-1(r-R)}\right)^2$$

1) hvor er potentialet minimum(ligevægtsafstanden)?

2) Hvad er minimum værdien af potentialet?

3) Hvad er potentialet for meget store r.

4) Hvad er $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$ i ligevægt punktet. Dette er kraftkonstanten k.

5) Molekylet vil kunne vibrere omkring ligevægtspunktet. Hvad er ω?

6) Morse potentialet kan tilnærmes som en harmonisk oscillator. Hvad er grundtilstandsenergien for denne?

For et brintmolekyle er morse potentialet:

$$D = 7{,}24 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$
$$a = 3{,}93 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}$$
$$R = 7{,}40 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$$
$$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

7) Hvad er ω og E_0 for brintmolekylet.

Energibevarelse

Opgave 15: •• Energibevarelse i kvantetilstande
Vi skal i denne opgave se på hvordan energibevarelse kommer til udtryk i kvantemekaniske tilstande. Til enhver Hamilton $\hat{H}$ operator kan vi finde et sæt af løsninger som opfylder følgende ligning: $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$.

1) Udtryk en generel funktion $f(x)$ som en kombination af løsninger til Schrödinger ligningen.

2) Hvordan vil denne funktion udvikle sig over tid? (Hint: udtryk $f(x, t)$ som en kombination af løsninger til Schrödinger ligningen)

3) Udregn forventningsværdien af energien $\langle E \rangle$. Hvordan vil denne udvikle sig over tid?

Symmetri

Opgave 16: • Lige og ulige funktioner
En funktion så som $f(x) = x^2$ der opfylder kravet: $f(x) = f(-x)$ kaldes en lige funktion. Tilsvarende er funktioner som $f(x) = x$ der opfylder det ligende krav: $f(x) = -f(-x)$. Det vil sige at en

lige funktion er uændret hvis man spejler den i y-aksen, mens en ulige funktion skifter fortegn. Bemærk at de fleste funktioner er hverken lige eller ulige, og unikt er funktionen $f(x) = 0$ både lige og ulige. Afgør om følgende funktioner er lige eller ulige:

1) $\sin x$

2) e^{x^2}

3) $\cos x$

Opgave 17: • Mere om lige og ulige funktioner

Lad $f_g(x)$ være en lige funktion og $f_u(x)$ være en ulige funktion[2].

1) Vis at produktet af lige og ulige funktioner fungerer på samme måde som produktet af lige og ulige tal.

2) Er $\frac{1}{f_g(x)}$ lige eller ulige?

3) Hvad med :$\frac{1}{f_u(x)}$?

4) Hvad er regnereglen med division?

Opgave 18: •• Sammensætning af lige og ulige funktioner

Alle funktioner kan skrives som en unik sum af en lige og en ulige funktion: $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$.

1) Skriv $f(-x)$ ud fra $f_g(x)$ og $f_u(x)$.

2) Skriv $f_g(x)$ og $f_u(x)$ ud fra $f(x)$ og $f(-x)$.

3) Hvad er den lige og den ulige komposant af eksponentialfunktionen e^x?

Opgave 19: ••• Integraler af lige og ulige funktioner.

Vi vil her finde nogle meget praktiske regneregler for integraler af lige og ulige funktioner over et symmetrisk interval. Lad $f_g(x)$ være en lige funktion og $f_u(x)$ være en ulige funktion. Antag derudover at $\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x$ og $\int_0^a f_u(x)\,\mathrm{d}x$ er kendte.

1) Vis at $\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x$

2) Vis at $\int_{-a}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0$

3) Brug dette til at løse integralet:

$$\int_{-1}^{1} x\cos(x)\sin(x) + x^2 - x\exp(x^2)\,\mathrm{d}x$$

[2] g og u står for gerate og ungerate, de tyske ord for lige og ulige.

Kapitel 3

Exoplaneter

Opgave 1: • Jævn cirkelbevægelse
Til at estimere massen af en planet fundet med radialhastighedsmetoden blev ligning 3.12 i kompendiet benyttet. Den gælder under antagelse af jævn cirkelbevægelse.

1) Beskriv i ord hvad jævn cirkelbevægelse vil sige.

2) Vis at ligning 3.12 gælder for jævn cirkelbevægelse.

3) Benyt dette til at estimere Jordens fart i sin bane om Solen.

Opgave 2: • Den Beboelige Zone
Jordens albedo er $A = 0,306$.

1) Bestem den beboelige zone for en jordlignende planet:
a) I Solsystemet.
b) Om en anden stjerne, der er dobbelt så varm som Solen.
c) Om en tredje stjerne, hvis radius er 5 gange så stor som Solen.

2) Kommenter resultatet for a). Giver det fysisk mening? Hvis ikke, hvad kan det skyldes?

Opgave 3: • Gravitationelle linser
Ligning, hvor man beregner hvornår der fokuseres mest

1) Denne ting

2) Og nu denne ting. Wow. (Hint: Udnyt at noget andet gælder)

Opgave 4: •• Estimat af planetmasse
Vis med udgangspunkt i ligning (3.15) fra kompendiet at ligning (3.16) i kompendiet gælder.

Opgave 5: •• Overfladetemperatur på planeter
Et sortlegeme er et legeme som absorberer alt lys, det bliver ramt af og udsender det hele som varmestråling. Luminositeteten fra et sfærisk sortlegeme givet som

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \, .$$

hvor R og T er henholdsvis legemets radius og temperatur, og σ er Boltzmanns konstant.

1) Antag at stjerner opfører sig som sortlegemer og vis at en planet med radius R_p i en afstand D fra stjernen og med en albedo-værdi på A vil absorbere energien

$$L_{\text{abs}} = \frac{R_\star^2 \sigma T_\star^4 \pi R_p^2}{D^2}(1-A), \qquad (3.1)$$

hvor $R_\star$ og $T_\star$ er henholdsvis radius og temperatur af stjernen.
Hint: Man kan sige, at den del af planeten, der er vendt mod stjernen, udgør et areal givet ved πR_m^2.

Antag at en planet også opfører sig som et sortlegeme, og at det er i termisk ligevægt.

2) Hvad betyder det at planeten er i termisk ligevægt?

3) Vis at temperaturen på overfladen af en planet, T_p, kan udtrykkes som

$$T_p = T_\star \left(\frac{1-A}{4}\right)^{1/4} \left(\frac{R_\star}{D}\right)^{1/2}$$

4) Antag at Saturns måne Mimas roterer hurtigt, samt at albedoen på overfladen af Mimas er $A_{Mimas} = 0,962$. Desuden oplyses det, at temperaturen på overfladen af Solen er $T_\odot = 5778$ K, Solens radius er $R_\odot = 6{,}955 \cdot 10^5$ km, samt at middelafstanden mellem Mimas og Solen er $D_{\text{Mimas}} = 1{,}43 \cdot 10^9$ km.
Beregn ud fra oplysningerne en teoretisk temperatur på overfladen af Mimas. Gøre rede for dine antagelser. Cassini-rumsonden vurderede temperaturen på overfladen af Mimas til at være ca. 65 K. Hvad kan forskellen mellem den teoretiske og den observede temperatur skyldes?

Opgave 6: ••• Atmosfærekrav

For at en planet kan have en stabil atmosfære er den nød til at kunne holde simple molekyler fanget i dens tyngdefelt. Massen af O_2 er $m_{O_2} = 5{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg.

1) Benyt Newtons gravitationslov og Newtons 2. lov til at bestemme tyngdeaccelerationen på en planets overflade.

2) Er det legemes kinetiske energi præcis ligeså stor som dens gravitationelle potentielle energi, vil den kunne undslippe det tyngdefelt det befinder sig i. Vis at denne hastighed, kaldet undvigelseshastigheden fra en planet, er givet som

$$v_{\text{ecs}}^2 = \frac{2M_p G}{R_p}$$

3) Det oplyses nu fra kinetisk gasteori at

$$\frac{1}{2} m v_{av}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

hvor v_{av} er partiklerne i gassens gennemsnitlige fart, m er partiklernes masse, k_B er Boltzmanns konstant og T er temperaturen i Kelvin.
Vis at

$$\frac{M_p}{R_p} = \frac{3}{2} \frac{k_B T}{mG}$$

hvis $v_{\text{ecs}} = v_{av}$.

4) Er $v_{\text{ecs}} = v_{av}$ vil op mod halvdelen af molekyler med massen m forsvinde væk fra planeten. Konkluder at for at en exoplanet kan fastholde O_2 i sin atmosfære, skal der om planeten gælde at

$$\frac{M_p}{R_p} > \frac{3}{2} \frac{k_B T}{m_{O_2} G} \qquad (3.2)$$

5) Den gennemsnitlige temperatur på Jorden antages at være 16°. Opfylder Jorden ligning 3.2?

Opgave 7: • Gravitationslinser

I afsnit 3.2 i kompendiet om gravitationslinsemetode blev det nævnt at begivenheden skal observeres af flere forskellige målinger.

1) Hvorfor er 1 måling ikke nok?

2) Hvorfor er det usandsynligt at observere samme planet med gravitationslinsemetoden mere en én gang?

3) Hvordan medfører ovenstående at planeten skal kunne ses i flere forskellige uafhængige målinger, for at kunne kaldes en planet?

Opgave 8: ●●● Bose-Einsteinkondensat og laserkøling

For at lave Bose-Einstein kondensater i laboratoriet skal man have nogle lette partikler, der køles ekstremt meget ned.[1] Mere præcist køles atomer (ofte alkalimetaller) ned til 0,1 μK, hvilket gøres ved først laserkøling og senere fordampningskøling. Laserkøling fungerer ved at udnytte at fotoner har impuls. Rammes et atom af en foton, der bevæger sig i modsat retning af atomet, exciteres den til et højere energiniveau, men dens fart falder også en smule, for at bevare impulsen. Når atomet henfalder udsendes fotonen igen, og den accelereres en smule i en tilfældig retning. Sker dette mange gange går disse små accelerationer ud med hinanden over tid, hvorved atomet bremses og atomskyen køles. Det virker dog kun, hvis an kan sikre sig at atomer kun interagerer med fotoner, der bevæger sig i modsat retning af dem selv.

1) Hvad er sammenhængen mellem en fotons energi og bølgelængde?

2) Hvad sker der hvis et atom rammes af en foton med en energi, der ikke svarer til en (tilladt) atomar overgang? *Hint: Tænk på atomet kvantemekanisk.*

Ved laserkølings sendes laserstråler ind fra seks retninger (positiv og negativ retning af hver af de kartesiske akser). Nu simplificeres systemet ved kun at kigge på systemet i én dimension. Betragt nu to ens atomer, der bevæger sig i hver sin retning. Fotonerne kommer fra en laser, der står stille i laboratoriet.

3) Skiftes referencesystem til hvert atoms referenceramme, ser laseren ud til at bevæge sig. Hvorfor bevæger laseren sig ikke lige hurtigt i begge atomers referencesystem?

4) Eftersom laseren bevæger sig Dopplerforskydes lyset. Hvad betyder forskellen i bevægelse for Doppllerforskydningen?

5) Kan begge atomer exciteres af fotoner med samme bølgelængde?

6) Hvordan kan dette bruges til at bremse atomerne selektiv?

7) Er opgavetitlen clickbait?

[1] For den interesserede læser er et Bose-Einstein kondensat at atomernes bølgefunktioner udvider sig, som temperaturen falder, indtil de sidst overlapper så meget at du får samme bølgefunktion. De kan derfor betragtes som én stor partikel.

Opgave 9: ●● Masse af en planet

Det kan vises at massen af en planet med radius R og sfærisk symmetrisk densitet $\rho(r)$ er givet som

$$M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r \,. \tag{3.3}$$

Det oplyses nu at en planet har densitetsfunktionen

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) & , \quad r \leq R \\ 0 & , \quad r > R \end{cases}$$

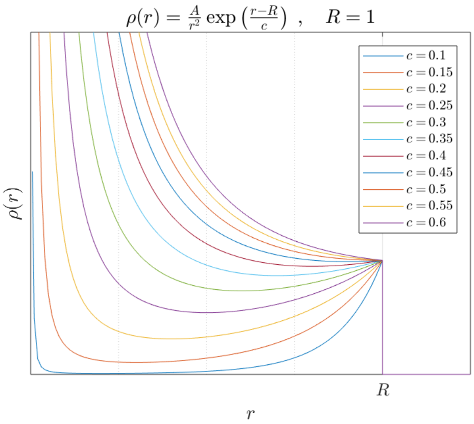
1) Tegn $\rho(r)$.

2) Hvad er planetens masse?

Opgave 10: ●●● Tyngdeacceleration indeni en planet

Ikke nok med at at en massetæthedsfuntion kan bruges til at bestemme hele massen af en planet, den kan også bruges til at bestemme tyngdeaccelerationen forskellige steder i planeten. Lad en planet med radius R have massefordelingen

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{A}{r^2} \exp\left(\frac{r-R}{c}\right) & , \quad r \leq R \\ 0 & , \quad r > R \end{cases}$$



Figur 3.1: Plot af $g(r)$ for nogle forskellige værdier af c, og en fastholdt værdi af R.

hvor r er afstanden fra centrum, samt at A og c er positive konstanter.

1) Bestem enheden for A, for at $\rho(r)$ har den korrekte enhed.

2) Forklar figur 3.1.

Ud fra Newtons gravitationslov kan det vises at

$$g(r) = G\frac{M(r)}{r^2},$$

hvor r er afstanden fra planetens centrum, M den indesluttet masse, der er massen af den del af planten, der befinder sig i afstanden r eller nærmere planetens centrum. Dette bygger også på antagelsen om sfærisk symmetri.

3) Benyt ligning (3.3) til at opskrive et udtryk for massen indenfor afstanden r.

4) Bestemt tyngdeaccelerationen $g(r)$ udtrykt ved r og eventuelle konstanter.

Kapitel 4

Atom- og Molekylefysik

Finstruktur

Opgave 1: • Finstruktur for en elektron
Vi vil i denne opgave se på tilstanden $n = 2$ for hydrogenatomet.

1) For $s = \frac{1}{2}$, $l = 1$, udregn β_l

2) Find alle værdier af J for $n = 2$ tilstanden.

3) Find energi opsplitningen for tilstandende $n = 2$, $l = 0$.

4) Find energi opsplitningen for tilstandende $n = 2$, $l = 1$.

Opgave 2: ••• Finstruktur for flere elektroner
Vi vil i denne opgave se på et system med 2 elektroner hvor de hver har n=2.

1) Find alle L og S værdier for $l_1 = 1$ og $l_2 = 1$, hvorfor er det ikke nødvendigt at specificere hvad s_1 og s_2 er?

2) Find alle J værdier for L og S fra forrige opgave.

3) Find alle energiopsplitningerne for de J, L og S tilstande vi fandt i de forrige opgaver.

Hyperinstruktur

Opgave 3: • Hyperfinstruktur for 21 cm linjen
Vi vil i denne opgave arbejde med den hyperfine struktur for en elektron i grundtilstanden af et brintatom.

1) Kernen er en proton med spin $\frac{1}{2}$, find alle værdier af F. Hvorfor er det ikke nødvendigt at kende l for elektronen?

2) Udregn konstanten A for grundtilstanden.

3) Find energiopsplitningen mellem tilstandende.

4) Udregn bølgelængden af det lys som har en energi svarende til energiforskellen mellem de to tilstande.

Opgave 4: •• Hyperfinstruktur for atomure
Vi vil i denne opgave arbejde med et cæsium atom, som det er beskrevet i teksten. Spinnet for et cæsium kerne er $I = \frac{7}{2}$ og vi vil i denne opgave arbejde med $n = 6$ tilstanden.

1) Find alle F tilstande for $l = 0$.

2) Udregn energiopsplitningen for tilstandende.

3) Udregn frekvensen af det lys der bliver udsendt fra denne overgang.

Molekylefysik

Opgave 5: • Diatomare molekyler

1) På figur 4.7 i kompendiet er tegnet molekyleorbitaldiagrammer for O_2 og N_2. Gør det samme for C_2, F_2 og Ne_2.

2) Hvad er bindingsordenen af de fem molekyler?

3) Hvilket vil I forvente er mest stabilt?

4) Hvilket forventer I er mest ustabilt?

5) Hvor mange af molekylerne har uparrede elektroner, og er dermed magnetiske.

Opgave 6: •• Vand

Vi vil her konstruere en model for vandmolekylet, ud fra et iltatom og et brintmolekyle. Vand består af et iltatom og to brintatomer i et V. I vores model dannes vand ved at bevæge et brintmolekyle ind imod et iltatom, hvorefter brintmolekylet strækkes, og bliver til de to grene af V'et.

Bemærk at ikke alle orbitaler indgår i bindingen.

1) Skitser molekyleorbitalerne for brint.

2) Skitser atomorbitalerne for ilt.

3) Hvilke af orbitalerne overlapper?

4) opstil et molekyleorbitaldiagram.

5) Hvilke af de resultarende orbitaler er bindende, antibindende eller ikke bindende.

6) Hvad er bindingsordenen af molekylet.

Opgave 7: ••• Benzen

Som meget kort nævnt i kompendiet Kan π-bindinger medføre at elektronerne i et molekyle er delokaliserede, d.v.s. det er muligt at finde dem inden for et stort (på molekylar skala) område. Dette sker blandt andet i benzen molekylet. Benzen består af seks kulstof atomer i en sekskant, med et brintatom bundet til hver. σ-bindingerne i benzen er ikke noget specielt, så vi vil udelukkende beskæftige os med π-bindingerne. Kulstof atomernes p_z-orbitaler, der danner π-bindingerne, er ikke egentilstande.

Kulstof atomerne rundt langs ringen gives numre fra 1 til 6. Det giver orbitalerne p_1 til p_6.

1) Hvad er p_7? Det viser sig at hamilton operatoren på en af p orbitalerne giver:

$$\hat{H} p_j = \alpha p_j + \beta p_{j+1} + \beta p_{j-1}$$

Her er α og β konstanter. En bølgefunktion med mange knudeflader (knudepunkter i 3 dimensioner) vil normalt have højere energi end en med få knude flader.

2) Opstil og skitser en bølgefunktion, 1π ud fra p_z-orbitalerne for kulstof med så få knudeflader som muligt.

3) Opstil og skitser en bølgefunktion, 6π med så mange knudeflader som mulugt.

4) Afgør om 1π og 6π er egenfunktioner til $\hat{H}$, og find deres energi.

5) α er en positiv konstant, hvad er fortegnet på β?

De resterende bølgefunktioner er:

$$
\begin{aligned}
2\pi &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(2p_1 - p_2 - p_3 - 2p_4 + p_5 + p_6) \\
3\pi &= \frac{1}{2}(p_2 + p_3 - p_5 - p_6) \\
2\pi &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(2p_1 - p_2 - p_3 + 2p_4 - p_5 - p_6) \\
3\pi &= \frac{1}{2}(p_2 - p_3 + p_5 - p_6)
\end{aligned}
$$

6) Skitser også disse bølgefunktioner, og find deres energi.

7) Lav et molekyleorbital diagram for π-systemet for benzen.

	H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
$1s$	-13,6	-25,0	-67,4	-128,8	-209,4	-308,5	-426,3	-562,7	-717,9	-891,7
$2s$			-5,3	-8,4	-13,5	-19,4	-26,2	-34,0	-42,8	-52,5
$2p$					-8,4	-11,1	-13,8	-16,8	-19,9	-23,1

Tabel 4.1: Energierne for de laveste atomorbitaler i de første ti grundstoffer.

Spin

Opgave 8: • Pauli princippet uden spin

Lad $\hat{O}$ være ombytningsoperatoren. Som navnet antyder er det den operator der for to elektroner til at bytte plads.

$$\hat{O}\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1)$$

Lad ψ være en en elektron tilstand, og $\Psi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$

1) Hvad er $\hat{\Psi}(x_1, x_2)$?

For at en tilstand skal opfylde Pauli princippet skal bølgefunktionen være antisymmetrisk under ombytning. Det vil sige $\Psi(x_1, x_2) = -\Psi(x_2, x_1)$.

2) Er $\Psi(x_1, x_2)$ tilladt ifølge Pauli?

Opgave 9: •• Rumbølgefinktioner

Lad os istedet se på to elektroner i to forskellige tilstande: ψ_1 og ψ_2. Lad $\Psi_{12}(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$ og $\Psi_{21}(x_1, x_2) = \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)$ Udregn de følgende ombytninger.

1) $\hat{O}\Psi_{12}(x_1, x_2)$

2) $\hat{O}\Psi_{21}(x_1, x_2)$

3) $\hat{O}\Psi^S(x_1, x_2) = \hat{O}(\Psi_{12}(x_1, x_2) + \Psi_{21}(x_1, x_2))$

4) $\hat{O}\Psi^A(x_1, x_2) = \hat{O}(\Psi_{12}(x_1, x_2) - \Psi_{21}(x_1, x_2))$

5) Er bølgefunktionerne symmetriske, antisymmetriske eller ingen af delene.

Opgave 10: ••• Pauli med spin

Nu vil vi tage højde for spin. Det gøres ved at multiplicere bølgefunktionen med en spinfunktion. Elektronen kan have spin op eller spin ned. Det angives med α eller β. For at holde styr på hvilken partikel der har hvilket spin tilføjes et tal til spinfunktionen. Så har partikel et spin op og partikel to spin ned skrives det: $\chi = \alpha(1)\beta(2)$. Ombytningsoperatoren ombytter også hvilken partikel der har hvilket spin. Hvad er:

1) $\hat{O}\alpha(1)\alpha(2)$

2) $\hat{O}\beta(1)\beta(2)$

3) $\hat{O}\alpha(1)\beta(2)$

4) $\hat{O}\beta(1)\alpha(2)$

5) Brug dette til at finde tre spinfunktioner der er symmetriske under ombytning.

6) Find en spinfunktion der er antisymmetrisk under ombytning.

Tag Højde for både spin og rum delen af den totale bølgefunktion.

7) Hvor mange muligheder er der der er tilladt af Pauli, når de to elektroner har samme tilstand?

8) Hvad er denne tilstand?

9) Hvor mange Paulitilladte bølgefunktioner er der når de to elektronbølgefunktioner er forskellige.

Kapitel 5

Planetbevægelse

Planetbaner og excentricitet

Opgave 1: • Excentricitet og planetbaner
Betragt formlen for afstanden mellem to objekter i bane omkring hinanden, ligning (5.7) i kompendiet.

1) Lad $\varepsilon = 0$. Hvad er $r(\varphi)$? Og hvilken geometrisk form er dette?

2) Lad $\varepsilon = 1$. Hvilket keglesnit fås? Hvad sker der med $r(\varphi)$, når φ vokser mod π?

3) Lad $\varepsilon > 1$. Hvordan er dette tilfælde sammenlignet med det, hvor $\varepsilon = 1$? Beskriv forskellene mellem disse to?
Hint: Undersøg grænsebetingelser.

Opgave 2: • Halleys komet
Halleys komet, navngivet efter den angelske astronom Edmund Halley, kredser om Solen i en meget elliptiske bane med $\varepsilon = 0,967$. Den korteste afstand, som kommeten har til Solen, er $0,59$ AU.

1) Opstil et udtryk for den største afstand r_{maks} som funktion af den korteste afstand r_{min}.

2) Beregn den største afstand til Solen.

Opgave 3: • Excentricitet

1) Find et udtryk for excentricitetet fra formlen udledt i opgave 2.

2) Hvad er den største og mindste værdi, som excentriciteten kan antage? Hvilke(n) type(r) bane(r) gør dette sig gældende for, og hvorfor?

Tolegemeproblemet

Opgave 4: • Ækvivalens i tolegemeproblemet
I beskrivelsen af tolegemeproblemet blev det konkluderet, at den fælles afstand $r(\varphi)$ mellem de to objekter, kan beskrives som en ellipse, der er en funktion af vinklen φ med brændpunkt i origo. Hvis vi kigger på et system bestående kun af Jorden og Solen, så betyder dette resultat, at det er lige så gyldigt at lægge solen i brændpunktet og se Jordens ellipsebevægelse omkring Solen, som det er at lægge Jorden i brændpunktet og se Solens ellipsebane omkring Jorden. Hvis Jorden lægges i brændpunktet, således at Jorden sættes til at stå stille, og Solens ellipsebane omkring Jorden observeres, hvordan vil massemindtpunktet så bevæge sig rent symbolsk?

Opgave 5: • Ækvivalens i tolegemeproblemet II
I opgave 4 blev Jorden sat som at være i brændpunktet. I denne opgave sættes massemidtpunktet i stedet i brændpunktet. Må man dette, og hvis ja, hvorfor? Hvordan vil Jordens og Solens bevægelse i dette tilfælde se ud?

Bevægelsesligningerne

Opgave 6: •• Keplers 3. lov
Keplers 2. lov beskriver, at en planet bevæger sig i sin bane, således at linjen fra stjernen, som planeten kredser om, til planeten overstryger lige store arealer i lige store tidsrum. Raten, som linjen overstryger arealet med, er dermed konstant, og den er givet ved

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{2\mu},$$

hvor ℓ er impulsmomentet og μ er den reducerede masse. Det totale areal for en ellipse er givet ved

$$A = \pi ab,$$

hvor a og b er den halve hhv. stor- og lilleakse. Perioden for planeten er givet ved

$$P = \frac{A}{\mathrm{d}A/\mathrm{d}t}.$$

1) Udled ved hjælp af ovenstående og nogle formler fra kompendiet Keplers 3. lov:

$$P^2 = \frac{4\pi}{G(m_1 + m_2)} a^3.$$

Opgave 7: ••• Energibevarelse og excentricitet
For at finde en sammenhæng mellem excentricitet og energi betragtes en komet, der bevæger sig omkring et større objekt. Husk at energien er (kompendiets ligning (5.40)

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V_{eff}(r).$$

I opgaven anvendes det at

$$V_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r},$$

hvor $\gamma = Gm_1m_2$.

1) Hvad vil kometens hastighed være, når den er tættest på objektet, altså i en afstand r_{min} fra det? Og hvad vil energien så være i dette tilfælde?
Hint: Til at bestemme hastigheden, prøv at overvej hvilken retning, den vil have lige før r_{min} samt lige efter. Husk at der kigges på et endimensionelt problem. Overvej at tegne r som funktion af vinklen.

2) Beregn r_{min}. Anvend definitionen af konstanten

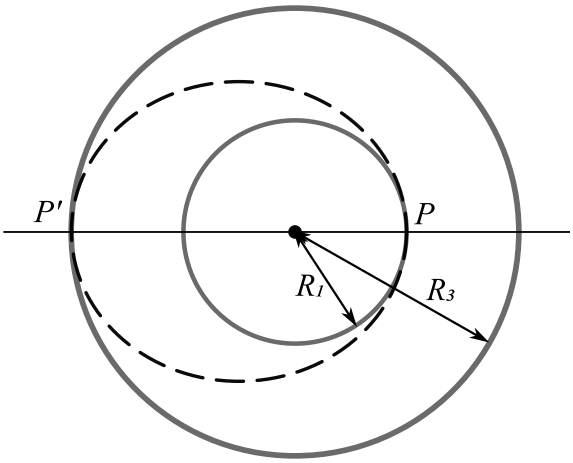
$$c = \frac{\ell^2}{\gamma\mu}.$$

3) Indsæt værdien for r_{min} i udtrykket for energien ved r_{min} og bestem et udtryk for energien ud fra excentriciteten. Anvend energibevarelse til at bestemme energien til alle steder på kometens bane.

4) Relatér resultatet til de mulige baner. Hvis kometens totale energi er negativ, hvilken excentricitet kræves der så? Og hvordan bliver banen så? Hvad hvis energien er 0? Eller hvis den er positiv?

Baneskift

Opgave 8: • Boostfaktor



Figur 5.1: To cirkulære baner (grå) og en Hohmann-bane (stiplet) til at skifte mellem banerne.

En satellit er i kredsløb om Jorden i en cirkulær bane. Tegn den bane, som fremkommer, når

1) $\lambda > 1$.

2) $1 > \lambda > 0$.

3) $0 > \lambda > -1$.

4) $\lambda < -1$.

Opgave 9: •• Boostkraft

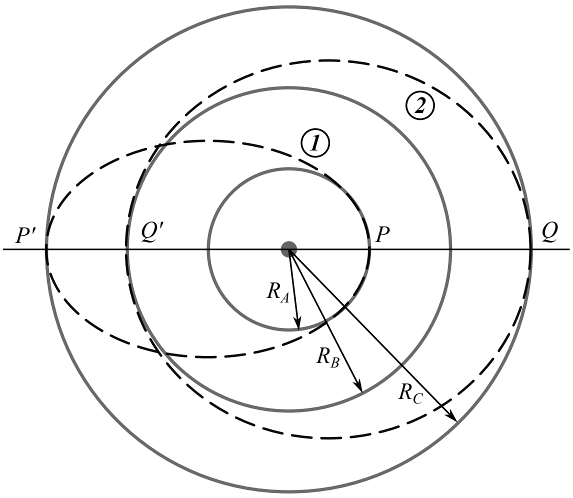
En satellit boostes i punktet P med en boostfaktor λ for at skifte mellem to baner.

1) Vis at det tidslige gennemsnit af en kraft er givet ved

$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} .$$

2) Find størrelsen af boostkraften som satellitten skal påvirkes med i løbet af boostet, som foregår over et kort tidsrum Δt.
Hint: Brug forskellen i impulsmoment til at finde forskellen i impuls i punktet P.

Opgave 10: •• Hohmannbane



Figur 5.2: Tre cirkulære baner (grå) og to Hohmann-baner (stiplede) til at skifte mellem banerne.

En måde at lave et baneskift er ved brug af en Hohmannbane. Denne bane er en ellipse, som har periapsis i den ene bane og apoapsis i den anden. I denne opgave betragtes en satellit, der benytter en Hohmannbane til at skifte mellem to cirkulære baner, figur 5.1, med radius R_1 og $R_3 = 2R_1$.

1) I hvilket punkt, P eller P', har Hohmann-banen hhv. periapsis og apoapsis.

2) Beregn boostfaktoren λ for satellittens boost ved punktet P.
Hint: Opstil et udtryk for R_3 ved R_1.

3) Beregn boostfaktoren λ' for satellittens boost ved punktet P'.
Hint: Betragt sammenfaldet mellem de to baner i P'.

4) Brug impulsmomentbevarelse til at udtrykke satelittens hastighed v_3 efter begge boosts ved dens hastighed v_1 før boostene.

Opgave 11: •• Hohmannbane II

En satellit vil nu gerne i to steps skifte mellem tre cirkulære baner. I første step skifter den fra bane A til C via Hohmannbanen 1, og i andet step skifter den fra bane C til bane B via Hohmannbanen 2. Se figur 5.2. Bane A har radius R_A, bane B har radius $R_B = 3R_A$ og bane C har radius $R_C = 1,5R_B = 4,5R_A$. Beregn følgende boostfaktorer

1) λ_1 i punktet P for at skifte fra bane A til Hohmannbanen 1.

2) λ_1' i punktet P' for at skifte fra Hohmannbanen 1 til bane C.

3) λ_2 i punktet Q for at skifte fra bane C til Hohmanbanen 2.

4) λ_2' i punktet Q' for at skifte fra Hohmannbanen 2 til bane B.

5) Hvad gør sig gældende for formen af boostfaktorerne λ_1 og λ_2 samt λ_1' og λ_2'?
Hint: Generaliser boostfaktorerne.

Kapitel 6

Matematik

Polære Koordinater, Cosinus og Sinus

Opgave 1: • **Koordinatskift**
Omskriv følgende punkter skrevet i kartesiske koordinater til polære koordinater. Dvs. find r og θ vha. de givne x og y. Lav også en lille skitse af punkterne i et xy-koordinatsystem, hvor r og θ indtegnes.

1) $x = 2$ og $y = 2$.

2) $x = 1$ og $y = -2$.

Opgave 2: • **Retvinklede trekanter**
En retvinklet trekant har to kateter a, b og en hypotenuse c. Vi antager at længderne af a og c er hhv. 5 og 13.

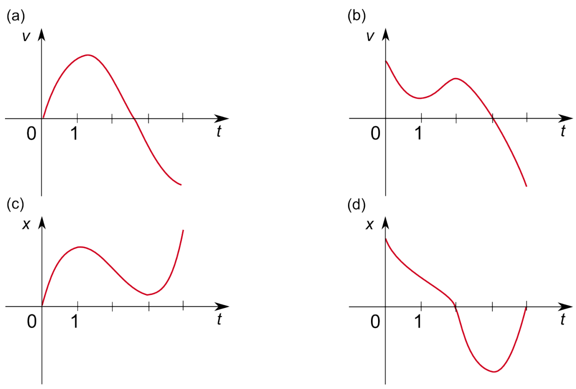
1) Bestem vinklen mellem side a og c.

2) Bestem længden af side b uden at bruge Pythagoras sætning.

3) Bestem vinklen mellem side b og c.

Differentialregning

Opgave 3: • **Hastighed og postion**



Figur 6.1: Hastighed og position som funktion af tiden.

1) Figur 5.1 (a) og (b) viser hastigheden af to objekter som funktion af tiden i sekunder. Hvornår sætter de to objekter hastigheden op, og hvornår sætter de hastigheden ned? Forklar dit svar.

2) Figur 5.1 (c) og (d) viser positionen af to objekter x som funktion af tiden i sekunder. Hvornår sætter de to objekter hastigheden op, og hvornår sætter de hastigheden ned? Forklar dit svar.

Opgave 4: • **Afledte og dobbeltafledte**
Find den afledte og dobbeltafledte med hensyn til x for følgende funktioner:

1) $f(x) = x^3$.

2) $f(x) = x^2 + 4x$.

3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

4) $f(x) = \cos(x)$.

5) $f(x) = \ln(x)$.

6) $f(x) = x\sin(x)$.

7) $f(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$.

Opgave 5: • Sammensatte funktioner
Skriv følgende udtryk som en sammensat funktion $f(g(x)$ (altså skal du identificere den indre funktion $g(x)$ og den ydre funktion $f(g)$). Beregn derefter $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

1) $f(x) = \sin(4x)$.

2) $f(x) = \sqrt{2x}$.

3) $f(x) = \sqrt{4x+5}$.

4) $f(x) = \sin(e^x)$.

5) $f(x) = \ln(\cos x)$.

Opgave 6: •• Funktioner af flere variable - partiel differentiering
I denne opgave skal vi kigge på partiel differentiering og kigger som et eksempel på funktioner af tre variable $f(x, y, z)$. For hver af de følgende funktioner skal I beregne den partielt afledte ift. både x, y og z.

1) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$.

2) $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{-z}$.

3) $f(x, y, z) = ze^{xyz}$.

4) $f(x, y, z) = \frac{x-y+5z}{x+y+z}$.

Opgave 7: •• Funktioner af flere variable - total differentiering
I denne opgave skal vi kigge på total differentiering og kigger som et eksempel på funktioner af fire variable $f(x, y, z, t)$. Vi antager at de tre første variable x, y, z afhænger af den fjerde t, altså $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$. I skal nu beregne den totalt differentierede $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ for følgende funktioner.
Hint: Brug formel (A.3) i matematikafsnittet og resultaterne fra forrige opgave i 2) og 3).

1) $f(x, y, z, t) = xyz$.

2) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$.

3) $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{-z}$.

4) Diskuter hvad der sker i resultaterne for 1)-3), hvis variablene x, y, z ikke afhænger af t.

Integralregning

Opgave 8: • Integraler og arealer under funktioner
I matematikafsnittet i kompendiet nævnes det, at når man regner et ubestemt integrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

så er svaret det samme som arealet under grafen for $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ på x-aksen. Brug dette faktum til at diskutere den fysiske forståelse af følgende udsagn.

1) Hvis man integrerer en hastighed $v(t)$ ift. tiden t, så får man en position $x(t)$.

2) Hvis man integrerer en acceleration $a(t)$ ift. tiden t, så får man en hastighed $v(t)$.

Opgave 9: • Ubestemte integraler
Udregn det ubestemte integrale af følgende funktioner:

1) $f(x) = x^3$.

2) $f(x) = x^2 + 4x$.

3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

4) $f(x) = \cos(x)$.

5) $f(x) = \ln(x)$.

Opgave 10: •• **Integration ved substitution**
Udregn de følgende integraler vha. integration ved substitution:

1) $\int e^{-4x}\,\mathrm{d}x$.

2) $\int \sqrt{3x-2}\,\mathrm{d}x$.

3) $\int xe^{-3x^2}\,\mathrm{d}x$.

4) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Opgave 11: •• **Partiel integration**
Udregn følgende integrale vha. partiel integration:

1) $\int 4x\cos(2-3x)\,\mathrm{d}x$.

2) $\int (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\,\mathrm{d}x$.

3) $\int (3x+x^2)\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Differentialligninger

Opgave 12: • **Specialtilfælde af 1. og 2. ordens differentialligninger**
I denne opgave skal I vise, at nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger.

1) Vis at funktionen $f(t) = -7e^{3t}$ løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 3f(t)\,.$$

2) Vis at funktionen $g(t) = \frac{2}{3}e^t + e^{-2t}$ løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + 2g(t) = 2e^t\,.$$

3) Vis at funktionen $h(t) = 5\sin(3t) - 10\cos(3t)$ løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -9h(t)\,.$$

4) Tjek om funktionen $k(t) = 13\cos(8t+45)$ løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}t^2} = -64k(t)\,.$$

Opgave 13: •• **Generelle 1. ordens differentialligninger.**
I denne opgave skal I også vise, at nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger. Denne gang er funktionerne og differentialligningerne dog skrevet op på en mere generel form, dvs. at de kan indeholde arbitrære konstanter.

1) Vis at alle funktioner på formen

$$h(x) = \frac{1}{x+A}$$

løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -h(x)^2\,.$$

2) Vil at alle funktioner på formen

$$k(x) = \left(c - x^2\right)^{-1/2}$$

løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = xk(x)^3 \ .$$

3) Vis at alle funktioner på formen

$$g(x) = \frac{\ln(x) + C}{x}$$

løser differentialligningen

$$x^2 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + xg(x) = 1 \ .$$

4) Vis at alle funktioner på formen

$$f(x) = \frac{1 + ce^x}{1 - ce^x}$$

løser differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - 1\right) \ .$$

Opgave 14: ●● Differentialligninger med grænsebetingelser
brug pendul som eksempel

Taylorapproksimationer

Opgave 15: ● Approksimation af funktion
I denne opgave skal I prøve at kigge lidt nærmere på Taylorapproksimationer, og hvad det egentligt er for en størrelse. Dette skal gøres på baggrund af formel (A.7) fra matematikafsnittet i kompendiet.

1) Diskuter betydningen af de enkelte led i summen. Hvordan ser de ud som funktioner af x, og hvorfor bliver approksimationen bedre af at tage flere led med?

Opgave 16: ●● Taylorpolynomier for simple funktioner
I denne opgave skal I bestemme Taylorpolynomierne $T_0(x)$, $T_1(x)$ og $T_2(x)$ for følgende funktioner vha. formel (A.7) på side 135 i kompendiet.

1) $f(x) = \cos(x)$.

2) $f(x) = \sin(x)$.

3) $f(x) = e^x$.

4) Indsæt nu $a = 0$ i jeres resultater for $T_2(x)$ i 1)-3), og tjek om svaret stemmer med Taylorpolynomierne i tabel A.1 i matematikafsnittet i kompendiet.

Opgave 17: ●● Jordens form
Betragt nu funktionen

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

hvor R er en konstant.

1) Bestem Taylorpolynomierne for $f(x)$ til 0., 1. og 2. orden omkring $x = 0$.

2) Hvilke typer af funktioner giver hver approksimationsorden?

3) $f(x)$ er den del af cirklens ligning, der giver positive værdier af f. Den negative del fås ved at sætte et negativt fortegn på, dvs. $g(x) = -f(x)$. Skitser $f(x)$ og $g(x)$, samt approksimationerne af de to funktioner, for de værdier af x hvor $f(x)$ er positiv.

4) Antag at dette generaliserer til tre dimensioner, dvs. en funktion af to variable[1], hvilke geometriske objekter er der så tale om?

[1] Taylorrækken for en funktion af n variable kan i ord beskrives som en sum af n Taylorrækker, hvor der bruges partielt afledede. Det er super grimt at skrive op, men fungerer på samme måde som for én variabel.

5) Brug dette til, under antagelse af at Jorden kan beskrives som en perfekt sfære, at konkludere hvilke andre geometriske former Jorden kan anses for at have.

Komplekse tal

Opgave 18: • Den komplekse plan
Tegn følgende komplekse tal i den komplekse plan.

1) $z = 5$.

2) $z = -3i$.

3) $z = 4 + 7i$.

4) $z = -3 - 2i$.

Opgave 19: • Regning med komplekse tal
I denne opgave kigger vi på de komplekse tal $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -6+i$, $z_3 = 1-5i$ og $z_4 = -4+3i$.

1) Beregn $z_1 + z_2$ og $z_3 + z_4$.

2) Beregn $z_1 - z_2$ og $z_3 - z_4$.

3) Beregn $z_1 z_2$ og $z_3 z_4$.

4) Beregn z_1/z_2 og z_3/z_4.

5) Beregn $|z_1|$ og $|z_2|$ samt $|z_3 z_4|^2$.

Opgave 20: •• Regneregler for modulus og normkvadratet
I denne opgave skal vi kigge på de regneregler for modulus for komplekse tal samt normkvadratet præsenteret i matematikafsnittet på side 139.

1) Eftervis formlerne for modulus (A.16), (A.17) og (A.18).

2) Eftervis formlen for normkvadratet (A.19).

Opgave 21: •• Eulers formel
Her skal vi arbejde med Eulers formel og prøve at få lidt intuition for, hvordan funktionen e^{ix} opfører sig.

1) Tegn det komplekse tal e^{ix} vha. Eulers formel (A.21) fra matematikafsnittet for $x = 0,\ \pi/2,\ \pi, 3\pi/2$ (hvis ens lommeregner regner i grader for $\cos(x)$ og $\sin(x)$ skal man bruge $x = 0,\ 90,\ 180,\ 270$ i stedet). Hvilken vej bevæger e^{ix} sig rundt i det komplekse plan, når x vokser?

2) Ændres modulus af e^{ix}, hvis man ændre på x? Hint: Regn modulus af e^{ix} vha. Eulers formel.

3) Hvilken vej tror du, at e^{-ix} bevæger sig rundt i det komplekse plan, når x vokser?

4) Ændres modulus af e^{-ix}, hvis man ændre på x?

Vektorer

Opgave 22: • Længden af en vektor
Beregn længden af de to vektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Opgave 23: • Addition, subtraktion og skalarmultiplikation med vektorer
Her vil vi kigge på, hvordan man lægger/trækker vektorer til/fra hinanden, og hvordan man ganger en vektor med en skalar (et tal). I denne opgave genbruger vi de to vektorer fra forrige opgave

1) Bestem $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

2) Bestem $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

3) Bestem $5 \cdot \vec{v}_1$ og $5 \cdot \vec{v}_2$.

4) Bestem $5 \cdot \left(\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2\right)$ og sammenlign med $5 \cdot$

$\vec{v}_1 \pm 5 \cdot \vec{v}_2$. Konkluder fra dette, at der generelt gælder

$$a \cdot (\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2) = a \cdot \vec{v}_1 \pm a \cdot \vec{v}_2 \,.$$

Altså kan man gange ind i parenteser ved skalarmultiplikation ligesom vi kender det fra regning med tal: $a(b \pm c) = ab \pm ac$.

Opgave 24: •• Skalarproduktet
Nu skal vi kigge på, hvordan man ganger med vektorer, og starter med skalarproduktet. Igen bruger vi vektoren fra forrige opgave.

1) Bestem $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ og sammenlign med $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$. Har rækkefølgen af vektorerne i et skalarprodukt nogen betydning?

2) Tjek at formlen $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ holder for $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.

3) Brug formel (A.28) til at bestemme vinklem θ mellem $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.

4) Hvad betyder det for vinklen θ mellem to vektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, hvis skalarproduktet $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ og $|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2| \neq 0$?

Opgave 25: •• Krydsproduktet
Her skal vi kigge videre på, hvordan man ganger med vektorer, og går derfor videre til at kigge på krydsproduktet. Vi genbruger atter vektorerne fra tidligere.

1) Bestem $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ og sammenlign med $\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$. Har rækkefølgen af vektorerne i et krydsprodukt nogen betydning?

2) Bestem $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|$.

3) Brug formel (A.30) til at bestemme vinklen mellem $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$. Tjek at dit svar stemmer med resultatet du fandt i forrige opgave.

4) Hvad betyder det for vinklen θ mellem to vektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, hvis krydsproduktet $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$ og $|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2| \neq 0$?

Opgave 26: •• Regning med enhedsvektorer
I denne opgave vil vi kigge lidt på, hvordan man kan regne med vektorer $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, når disse skrives som enhedsvektorer. Vi vælger her at skrive vores vektorer på en generel form

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \end{bmatrix}.$$

1) Opskriv $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ vha. enhedsvektorerne $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

2) Tjek at

$$\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 = (v_{x_1} \pm v_{x_2})\hat{\mathbf{x}} + (v_{y_1} \pm v_{y_2})\hat{\mathbf{y}} + (v_{z_1} \pm v_{z_2})\hat{\mathbf{z}} \,.$$

3) Beregn de forskellige skalarprodukter mellem enhedsvektorerne $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$. Altså $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$ osv.

4) Brug resultaterne fra 3) til at beregne skalarproduktet vha. enhedsvektorer. Stemmer dit resultat med den normale formel for skalarproduktet?

5) Beregn de forskellige krydsprodukter mellem enhedsvektorerne $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$. Altså $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}$ osv.

6) Brug resultaterne fra 5) til at beregne krydsproduktet vha. enhedsvektorer. Stemmer dit resultat med den normale formel for krydsproduktet?

Ekstra Opgaver

Differentialregning

Opgave 27: • f som funktion af g
Udtryk $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ vha. den ukendte funktion $g(x)$ og dens differentierede $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ for følgende funktioner:

1) $f(x) = x^2 g(x)$

2) $f(x) = (g(x))^2$

3) $f(x) = g(x^2)$

Opgave 28: •• Harmonisk bevægelse
Hvis bevægelsen for et objekt er beskrevet vha. positionen

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

hvor A, ω og φ er konstanter, så siger man, at objektet undergår *simpel harmonisk bevægelse*.

1) Hvad er hastigheden af objektet til tiden t (som funktion af t)?

2) Hvornår er hastigheden 0?

Opgave 29: •• Cepheide-stjernen Delta Cephei
En Cepheide-stjerne er en bestemt type stjerne, hvis lysstyrke varierer periodisk. En bestemt Cepheide-stjerne har tiden 5,4 dage mellem hver maksimal lysstyrke. Den gennemsnitlige lysstyrke af stjernen er 4,0 med en ændring i lys på ± 0,35. Hvis t måles i dage, så kan lysstyrken B af denne Cephide-stjerne modelleres af følgende udtryk:

$$B(t) = 4,0 + 0,35\sin\left(\frac{2\pi t}{5,4}\right).$$

1) Hvad er raten for ændringen af lysstyrken (ændring af lysstyrke over ændring af tid) som funktion af antal dage t?

2) Hvor meget har lysstyrken ændret sig efter to dage?

Opgave 30: • Udvidelse af ballon
Der pumpes luft ind i en sfærisk ballon. Til enhver tid t er volumenet af ballonen $V(t)$, mens radius af ballonen er $r(t)$.

1) Hvad er betydningen af de afledte $\frac{dV}{dr}$ og $\frac{dV}{dt}$?

2) Udtryk $\frac{dV}{dt}$ som funktion af $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

Differentialligninger

Opgave 31: ••• Hvornår er det en løsning?
I denne opgave skal I finde ud af, hvornår nogle forskellige funktioner er løsninger til de givne differentialligninger. Sagt med andre ord skal I finde de specifikke værdier for nogle af de konstanter, der indgår i funktionerne, som gør at funktionerne løser differentialligningerne.

1) For hvilke værdier af k løser funktionen

$$f(y) = \cos(ky)$$

differentialligningen

$$4\frac{d^2 f}{dy^2} = -25 f(y)\ ?$$

2) Tjek for de værdier af k I fandt i 1), at funktionen $g(y) = A\sin(ky) + B\cos(ky)$ også løser differentialligningen

$$4\frac{d^2 g}{dy^2} = -25 g(y)$$

(hint: vent med at indsætte værdierne af k før til sidst).

3) For hvilke værdier af r løser funktionen

$$h(y) = e^{ry}$$

differentialligningen

$$2\frac{d^2 h}{dy^2} + \frac{dh}{dy} - h(y) = 0$$

4) Lad r_1 og r_2 være de konstanter du fandt i 3). Tjek at funktionen $k(y) = ae^{r_1 y} + be^{r_2 y}$ også løser differentialligningen

$$2\frac{d^2 k}{dy^2} + \frac{dk}{dy} - k(y) = 0$$

(hint: vent med at indsætte værdierne af r_1, r_2 før til sidst).

Del II

Facitlister

Kapitel 1

Analytisk Mekanik

Koordinatsystemer

Opgave 1: • **Gode koordinatsystemer**

1) Det gode koordinatsystem beskriver et problem så simpelt som muligt og det har det færrest mulige antal frihedsgrader.

2) Symmetrier mindsker antallet af frihedsgrader, fordi det restringerer koordinaterne, så de et eller flere koordinater ophører med at være frie.

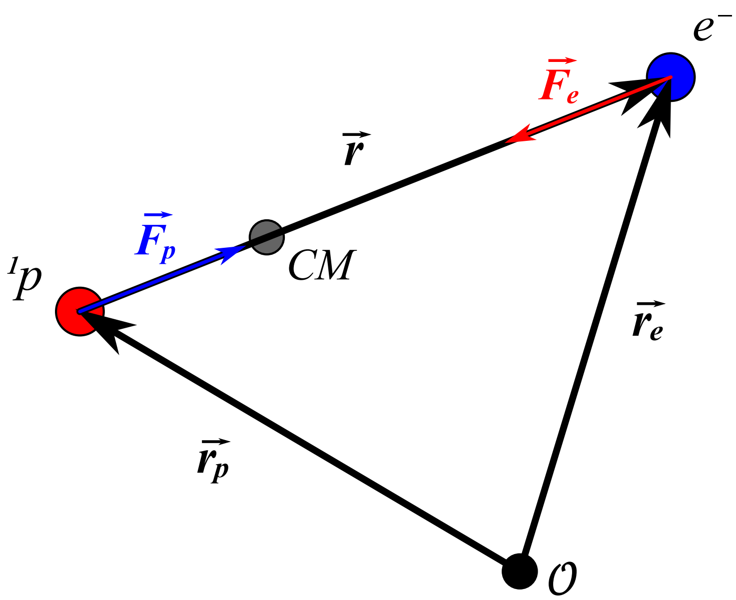
3) Det simpleste er at bruge det koordinatsystem, som beskriver symmetrien bedst.
a) Kartesisk koordinatsystem, idet planer beskrives ved et fastholdt kartesisk koordinat. Eksempelvis er xz-planet alle punkter hvor $y = 0$. Bemærk også at xy-planet er lige simpelt beskrevet i cylinderkoordinater.
b) Cylindrer er pænest beskrevet i cylinderkoordinater, hvorfor dette er det smarte valg, se opgave 9.
c) Sfærer er simplest i sfæriske koordinater, hvorfor det er lettest at bruge sfæriske koordinater. Sfærisk symmetri ser man ofte i problemer hvor det er afstanden mellem to objekter, der er afgørende, for eksempel den gravitationelle interaktion mellem to legemer.

Opgave 2: • **Generaliserede koordinater**

1) Når objektet bevæger sig ændres både x og y.

2) r er afstanden fra centrum og φ er en vinkel der beskriver hvor på cirkelen objektet er. Her er valgt vinkelen fra vandret. Lidt trigonometri giver at x og y er:

$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$



Figur 1.1: Illustration af brintatomet med arbitrært origo, O, og massemidtpunkt CM. Derudover er kraften fra protonen på elektronen, $\vec{F}_e$, indtegnet og farvet rød for at gøre den tydeligere, og ligeså for den blå kraft fra elektronen på protonen.

3) Afstanden til centrum er altid den samme så $r = R$ altid.

4) Da R er konstant er det nok at beskrive systemet med vores ene variabel φ

5) Vi vil gerne beskrive systemet så simpelt så muligt, derfor er det smartest at bruge polære koordinater.

Opgave 3: •• Brint

1) Eftersom $m_p \approx 2000 m_e$ er massemidtpunktet forskudt mod protonen således at at $\vec{r}_e$ er i størrelsesordenen $2000\vec{r}_p$. For at gøre tegningen overskuelig er massemidtpunktet angivet markant tættere på midten, se figur 1.1.

2) Afstanden mellem protonen og elektronen.

3) Se figur 1.1.

4) I massemidtpunktet, da problemet så reducerer til to generaliserede koordinater, idet der altid eksisterer en linje, som både protonen, elektronen og deres fælles massemidtpunkt befinder sig på.

5) Antagelsen giver mulighed for at benytte følgende approksimationer

$$a) \quad m_p + m_e \simeq m_p\,,$$
$$b) \quad \frac{m_e}{m_p} \simeq 0\,,$$

hvorved

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{CM}} &= \frac{m_e\vec{\boldsymbol{r}}_e + m_p\vec{\boldsymbol{r}}_p}{m_e + m_p} \\ &\simeq \frac{m_e\vec{\boldsymbol{r}}_e + m_p\vec{\boldsymbol{r}}_p}{m_p} \\ &= \frac{m_e}{m_p}\vec{\boldsymbol{r}}_e + \vec{\boldsymbol{r}}_p \\ &\simeq \vec{\boldsymbol{r}}_p \; .\end{aligned}$$

6) $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}_e}{r_e^3}$ idet $\vec{\boldsymbol{r}}_p = 0$ i dette koordinatsystem.

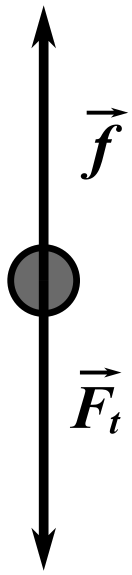
Energi

Opgave 4: • **Energibevarelse**

1) Det kunne være nogle af følgende:
- Kinetisk energi
- Potentiel energi
- Mekanisk energi
- Termisk energi
- Elektrisk energi
- Kemisk energi
- Bindingsenergi
- Masse
- Et cetera

2) Der er flere mulige forklaringer, men her er nogle forslag:
- En konservativ kraft er en kraft for hvilken arbejdet, den udfører, på et legeme under bevægelse fra et punkt til et andet, er uafhængig af vejen mellem de to punkter.
- En konservativ kraft er en kraft, der omsætter potentiel energi til kinetisk energi eller omvendt uden tab.
- En konservativ kraft er en kraft, der bevarer mekanisk energi.
- Hvis et legeme bevæger sig i en lukket bane og det totale arbejde fra en kraft et nul, da siges kraften at være konservativ.
- $\vec{\boldsymbol{F}}$ er konservativ, hvis

$$\oint \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0$$



Figur 1.2: Legemet er påvirket at en tyngdekraft $\vec{F}_t$ og en friktionskraft $\vec{f}$.

– En konservativ kraft er udelukkende stedafhængig, og ethvert punkt i rummet kan derfor tildeles en potentiel energi.

Opgave 5: • **Frit fald**

1) Se figur 1.2.

2) Friktion er ikke en konservativ kraft, idet den omsætter kinetisk energi til termisk energi i stedet for potentiel energi.

3) Negliceres friktion er der energibevarelse, hvorfor

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + mg(0) \\
\overset{v_0=0}{\Longrightarrow} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \\
v &= \sqrt{2gh}
\end{aligned}$$

4) Hvis h er meget stor er den en dårlig antagelse, idet legemet vil nå sin terminalhastighed, før den rammer Jorden. Negligeres friktionen ophører terminalhastigheden med at eksistere, hvilket gør antagelsen dårlig. Luftmodstand beskrives ofte på en af de to følgende former:

$$\vec{f} = \begin{cases} -c_1 v \\ -c_2 v^2 \end{cases}$$

hvor v er hastigheden og c_i er konstanter, som afhænger af legemets udformning. For at friktionskraften skal være negligibel, må konstanterne c_i være relativt små, og h skal være tilpas lille til at hastigheden ikke når at blive for stor, hvorfor et bud på et sæt af kriterier er

$$\begin{aligned} h &\ll 2g\,, \\ c_i &< 1\,. \end{aligned}$$

Der er ikke noget entydigt rigtigt svar, da problemet ikke skal analyseres grundigt nok til at gøre dette stringent, men der bør fremgå en fysisk forståelse for situationen af kriteriet.

Opgave 6: • **Kollisioner**

1) Newtons 3. lov.

2) Modsat af Newtons 3. lov.

3) Af det ovenstående er

$$\vec{\boldsymbol{F}}_1 = -\vec{\boldsymbol{F}}_2\,,$$

hvorved Newtons 2. lov siger at den samlede kraft på systemet er

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2) \\ \vec{\boldsymbol{F}}_1 - \vec{\boldsymbol{F}}_1 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2) = 0\,. \end{aligned}$$

Ergo er den totale impuls bevaret.

4) Af opgave 4 er et legemes mekaniske energi bevaret, hvis legemet kun er påvirket af konservative kræfter. Da der er set bort fra eventuelle ydre kræfter, er den potentielle energi i systemet $V = 0$, hvorfor den kinetiske energi er bevaret, hvis legemerne kun påvirker hinanden med konservative kræfter.
a) Af definitionen af et elastisk stød, er legemerne kun påvirket af konservative kræfter, hvorfor den kinetiske energi er bevaret.
b) Uelastiske kollisioner er alle kollisioner, hvor legemerne påvirker hinanden på en måde, der er ikke er konservativ, hvorfor den kinetiske energi ikke er bevaret.

Opgave 7: •• **Bevægelse omkring ligevægt**

1) $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = V_0\left(\frac{1}{R} - \lambda^2\frac{R}{r^2}\right)$

2) Ligevægtspunktet bestemmes ved at sætte den afledede til nul

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \\ \implies \frac{1}{R} &= \lambda^2 \frac{R}{r^2} \\ \implies r_0 &= \lambda R \end{aligned}$$

3) Den andenafledte er:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=\lambda R} = \left.\frac{V_0 R \lambda^2}{2r^3}\right|_{r=\lambda R} = \frac{V_0}{2\lambda R^2} > 0$$

4) Der er tale om et minimum, hvis den anden afledede evalueret i minimaet er positiv. Det gælder da alle konstanterne er antaget positive.

5) Først isoleres r i definitionen af x og derefter indsættes det i funktionen $V(r)$.

$$\begin{aligned} r &= x + r_0 \\ \implies V(x) &= V_0 \left(\frac{x + r_0}{R} + \lambda^2 \frac{R}{x + r_0} \right) \end{aligned}$$

6) Taylorudviklingen af en funktion $f(x)$ omkring $x = 0$ til anden orden er

$$f(x) \simeq f(0) + \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} x^2$$

I første omgang bestemmes potentialets minimum

$$\begin{aligned} V(x = 0) &= V_0 \left(\frac{\lambda R}{R} + \lambda^2 \frac{R}{\lambda R} \right) \\ &= 2V_0\lambda \end{aligned}$$

Derfor bestemmes den første afledede evaluerede i nul

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} &= \left[\frac{V_0}{R} - V_0\lambda^2 \frac{R}{(x + r_0)^2} \right]_{x=0} \\ &= \frac{V_0}{R} - V_0\lambda^2 \frac{R}{r_0^2} \\ &= \frac{V_0}{R} - V_0\lambda^2 \frac{R}{(\lambda R)^2} \\ &= \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} = 0 \end{aligned}$$

så den anden afledede

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} &= \left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\left(\frac{V_0}{R} - V_0\lambda^2\frac{R}{(x+r_0)^2}\right)\right]_{x=0} \\ &= V_0 R\lambda^2 \left.\frac{2x+r_0}{2(x+r_0)^3}\right|_{x=0} \\ &= \frac{V_0 R r_0 \lambda^2}{2r_0^3} \\ &= \frac{V_0 R\lambda^2}{2(R\lambda)^2} \\ &= \frac{V_0}{2R}\end{aligned}$$

Dermed bliver den potentielle energi omkring ligevægtspunktet r_0

$$\begin{aligned}2V_0\lambda + \frac{1}{2}\frac{V_0}{2R}x^2 \\ = c + \frac{1}{2}kx^2\end{aligned}$$

hvor c og k er defineret som

$$\begin{aligned}c &= 2V_0\lambda \\ k &= \frac{V_0}{2R}\end{aligned}$$

Supplerende kan de siges at nulpunktet for potentiel energi er arbitrært, hvorfor $U = (1/2)kx^2$ er lige så validt et potential at benytte

7) Vinkelfrekvensen for den harmoniske oscillator er

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left(\frac{U_0}{2mR}\right)^{1/2}$$

Er det ikke oplagt at vinkelfrekvensen for en harmonisk oscillator opfylder at $\omega^2 = k/m$, så kan der henvises til de forskellige beskrivelser af pendulet, det vil sige afsnittene 1.3 og 1.6 i kompendiet.

Opgave 8: ●●● (Næsten) alt er en harmonisk oscillator

1) Potentialet er arbitrært, så der indsættes bare i ligning (A.7) i kompendiet analogt til eksemplet med e^x

$$V(x) \simeq V(x=0) + \left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} x \tag{1.1}$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} x^2 \tag{1.2}$$

2) Sammenlignes ligning (1.1) med med den harmoniske oscillator i opgaven, ses det at

$$c = V(x = 0)$$
$$k = \left.\frac{\mathrm{d}^2 V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

mens ledet $\left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} x$ ikke passer ind. Kriteriet må derfor være at dette er nul for alle værdier af x, hvorfor differentialet må være nul

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0$$

3) Det kunne være følgende funktioner, hvor store bogstaver er konstanter

$$\begin{aligned}
\text{Trigonometrisk:} \quad & f(x) = A\cos(Bx + C) + D \\
\text{Hyperbolsk cosinus:} \quad & f(x) = A\left(e^{(Bx)} + e^{(-Bx)}\right) \\
\text{Parabel:} \quad & f(x) = A + Bx^2 \\
\text{Gaussfunktion:} \quad & f(x) = -Ae^{-Bx^2} \\
\text{Cirkel:} \quad & f(x) = \frac{-A}{\sqrt{1 - x^2}} \\
\text{Morsepotentiale:} \quad & f(x) = A\left(1 - e^{-Bx}\right)^2 \\
\text{Potentialet fra opgave 7:} \quad & f(x) = A\left(\frac{x}{B} + C^2\frac{B}{x}\right) \\
\text{Effektivt potentiale for planetbevægelse:} \quad & f(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} \\
\text{Og så videre:} \quad & f(x) = \ldots
\end{aligned}$$

4) $V(x)$ og $\tilde{V}(x)$ opfører sig ens hvis deres afledede er ens

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{V}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$$

da λ er en konstant.

5) Eftersom c er en konstant gælder det samme for den, som for λ, hvorfor den kan lægges til med modsat fortegn. Derfor kan den harmoniske oscillators potentielle energi skrives som

$$\tilde{V}(x) = V(x) - c = \frac{1}{2}kx^2$$

Etlegemeproblemer

Opgave 9: • **Partikel på en cylinder**
Vi ser på en partikel der kan bevæge sig frit på overfladen af en cylinder med radius R. Her er det oplagt at bruge cylindrinske koordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}$$

1) Siden partiklen er fastlåst på overfladen af cylinderen er r koordinatet altid lig radien af cylinderen:

$$r = R$$

Resten er frie.
2) Lad os starte med den letteste: z. Der er det samme i kartesiske og cylindriske koordinater.

$$\dot{z} = \dot{z}$$

De to andre afhænger kun af φ, så efter kædereglen følger:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ \dot{y} &= R\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{aligned}$$

3) I kartesiske koordinater er:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Vi kan her bruge pythagoras sætning for enhedstrekanten:

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

Så den kinetiske energi er:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi) + R^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned}$$

4) Siden potentialet er nul er lagrange:

$$L = K = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

5) Generelt er en Euler-Lagrange ligning på formen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Igen lad os starte med z.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) &= m\ddot{z}\\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Det giver Euler-Lagrangeligningen for z:

$$m\ddot{z} = 0$$

Tilsvarende for φ

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mR^2\dot{\varphi}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= mR^2\ddot{\varphi}\\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

Det giver Euler-Lagrangeligningen for φ:

$$mR^2\ddot{\varphi} = 0$$

Begge differentialligninger kan reduceres så vi ender med:

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= 0\\ \ddot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

6) Begge differentialligninger giver bevægelse med konstant hastighed. For z er det konstant hastighed langs cylinderaksen. For φ er det cirkulær bevægelse omkring aksen. Kombineret giver det en spiralbevægelse. Som en bonus er løsningen til bevægelsesligningerne:

$$\begin{aligned}z(t) &= v_z t + z_+0\\ r(t) &= \omega t + \varphi_0\\ x(t) &= R\cos(\omega t + \varphi_0)\\ y(t) &= R\sin(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

Opgave 10: • **Atwoods faldmaskine**

1) Snorlængden er konstant, og af tegningen, figur 1.1, fremgår det at længden af snoren kan udtrykkes som

$$l = x + x' + \pi R$$

Da R og l er konstanter kan x' udtrykkes ved x som

$$x' = l - x - \pi R \tag{1.3}$$

2) Differentieres (1.3) med hensyn til tid fås

$$\dot{x}' = -\dot{x} \tag{1.4}$$

3) Den potentielle energi findes ved at bruge formlen $V = mgh$ hvor h er forskydningen fra nulpunktet. Hvert lod er forskudt x_i i negativ retning, hvorfor

$$V = -g(m_1 x + m_2 x')$$

4) For kinetisk energi kastes ind i formlen $K = \sum_i (1/2) m_i v_i^2$, så der fås

$$K = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{x}')$$

5) Lagrangefunktionen er pr. definition $L = K - V$. Bruges dette samt ligninger (1.3) og (1.4) fås

$$\begin{aligned}
L &= K - V \\
&= \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{x}') - (-g)(m_1 x + m_2 x') \\
&= \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}^2 + m_2 (-\dot{x})^2) + g[m_1 x + m_2(l - x - \pi R)] \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + g[m_1 x + m_2(l - x - \pi R)]
\end{aligned}$$

6) For at benytter Euler-Lagrangeligninger skal følgende differentialer bruges

$$\frac{\partial L}{\partial x} = g(m_1 - m_2) \tag{1.5}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} \tag{1.6}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} \tag{1.7}$$

Bruges Euler-Lagrangeligningen, ligning 1.50 i kompendiet, til at sætte første og sidste udtryk i ligning (1.5) fås

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{x} &= g(m_1 - m_2)\\ \ddot{x} &= g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}$$

7) Både g og $m_1 + m_2$ er positive led, hvorfor fortegnet er bestemt af tælleren.

$$\begin{aligned}m_1 > m_2 : &\quad m_1 - m_2 > 0 \implies \ddot{x} > 0\\ m_2 > m_1 : &\quad m_1 - m_2 < 0 \implies \ddot{x} < 0\end{aligned}$$

Dette stemmer overens med det forventede.

8) Udføres integralet fås

$$\begin{aligned}x(t) &= \iint a\mathrm{d}t\mathrm{d}t\\ &= \int at + v_0\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0\\ &= \frac{1}{2}g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}t^2 + v_0t + x_0\end{aligned}$$

Opgave 11: • **Yoyo**

De ligninger, der henvises til siger at

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\\ v &= r\dot{\varphi} = r\omega\end{aligned}$$

1) Fra opgaven er $v = v_{\text{CM}} = \dot{z}$ da yoyoen kun bevæger sig translatorisk i z-retningen. Kombineres alt dette med informationen om intertimomentet fås

$$\begin{aligned} K &\overset{v=r\omega}{=\!=\!=} \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ &\overset{v=v_{\text{CM}}=\dot{z}}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 \\ &\overset{I=\frac{1}{2}mR^2}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 \end{aligned}$$

2) Den potentielle gravitationelle energi er $V = mgh$, hvor h er den afstanden til nulpunktet i tyngdekraftens retning. Defineres nulpunktet sådan at $V(z = 0) = 0$ er $z = -h$, fordi V skal blive mindre, når z bliver større, hvorved $V = -mgz$.

3) Benyttes definitionen af Lagrangefunktionen inden der sættes udenfor parentes fås

$$\begin{aligned} L &= K - V \\ &= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 - (-mgz) \\ &= \frac{1}{2}m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{z}^2 + mgz \end{aligned}$$

4) De afledede af Lagrangefunktionen er

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} &= mg \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\dot{z} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) &= m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\ddot{z} \end{aligned}$$

5) Euler-Lagrangeligningen siger at det første og sidste differentiale er lig hinanden[1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) \\ mg &= m\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\ddot{z} \\ g &= \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\ddot{z} \\ \ddot{z} &= \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2} \end{aligned}$$

[1] Lighedstegnet vendes om tilsidst, da det ser pænest ud.

Med Newtonsk mekanik ville man være nød til at bestemme summen af kræfter og summen af kraftmomenter, der begge vil afhænge af snorkraften i snoren, S. Denne er ukendt, og derfor besværlig at regne med. Derudover ville man skulle bruge både Newtons 2. lov og Newtons 2. lov for roterende bevægelse og så kæde det sammen gennem den ukendte snorkraft, hvilket er ret så omstændigt, sammenlignet med hvor elegant det er at benytte Lagrangemekanikken.

Opgave 12: ●● Klods på en fjeder

Lagrangeformalismen bygger på systemets energier, hvorfor disse bestemmes først

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$V = \frac{1}{2}kx^2 \,.$$

1) Dermed bliver Lagrangefunktionen

$$L = K - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

2) For at stoppe ind i Euler-Lagrangeligningen skal nogle differentialer bestemmes

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = -kx$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{x}} = m\dot{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

Dette stoppes ind i Euler-Lagrangeligningen

$$m\ddot{x} = -kx$$

hvilket er magen til ligning (1.3) i kompendiet.

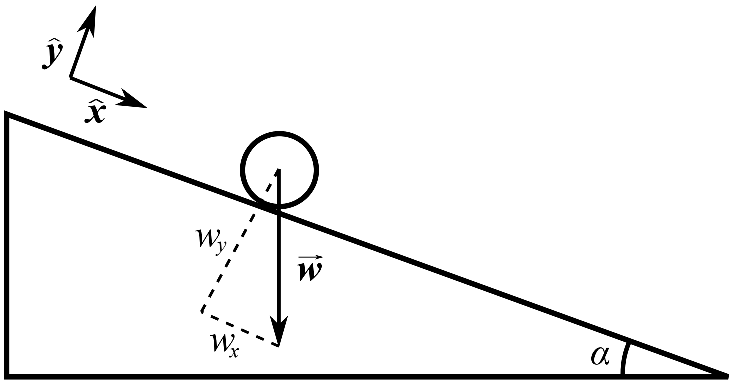
Opgave 13: ●● Cylinder på skråplan

1) Se figur 1.3.

2) Fremgår ligeså af figuren.

3) Den potentielle energi opskrives i de to koordinater x, y, velvidenede at y forbliver konstant i tid, hvorfor den ikke er et generaliseret koordinat.

$$V = mg(x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))$$



Figur 1.3: Eksempel på bevarelse af opg. 1 i 13. Vinklen α skal lokaliseres, x skal defineres parallelt med skråplanet og identificeres som generaliseret koordinat.

4) Den kinetiske energi er

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}m\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2
\end{aligned}
$$

5) Den potentielle energi er

$$
\begin{aligned}
L &= K + V \\
&= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2 - mg(x\sin\alpha + y\cos\alpha)
\end{aligned}
$$

6) Der differentieres og dividres først med parentesen og til sidst på dele af brøken med m

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -mgx\sin\alpha \\
\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x}
\end{aligned}
$$

Differentialerne løses i rækkefølge som

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}x^2 &= x\\ \frac{\partial}{\partial x}x &= 1\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x} &= \ddot{x}\end{aligned}$$

Nu stoppes ind i Euler-Lagrangeligningen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x}\\ \implies \ddot{x} &= -\frac{g\sin\alpha}{1+I/mR^2}\end{aligned}$$

7) Bevægelsesligningen afhænger ikke t, x, $\dot{x}$, hvorfor der ikke sker nogen ændring i accelerationen mens tiden går.

8) Bevægelsesligningen skrives på formen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \tilde{g} &\implies \mathrm{d}x^2 = \tilde{g}\mathrm{d}t^2\\ \implies x &= \int\int \mathrm{d}x^2 = \int\int \tilde{g}\mathrm{d}t^2\\ &= \int \tilde{g}t + v_0\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\tilde{g}t^2 + v_0t + x_0\end{aligned}$$

Opgave 14: ●●● Masse på roterende ring

Dette problem har mange paralleller til pendulet, hvorfor det kan være relevant at referere til afsnit 1.6 i kompendiet.

1) Gravitationel potentiel energi er på formen mgh, og helt ækvivalent til pendulet defineres nulpunktet i $\varphi = 0$, hvorved

$$V(\varphi) = mgR\big[1-\cos(\varphi)\big]$$

2) Ligning (1.8) i kompendiet siger at $v = r\dot{\varphi}$, men den skal lige vendes rigtigt, for at kunne bruges her. Den er udledt for cylinderkoordinater, men gælder generelt for cirkelbevægelser, hvorfor de rigtige cirkler skal identificeres. Den radielle hastighed er hastigheden langs ringen, hvorfor radius bliver R og vinkelhastigheden bliver $\dot{\varphi}$

$$v_{\text{rad}} = R\dot{\varphi}$$

Den anden cirkel kræver lidt mere at forestille sig. Forestiller man sig at massen fastholdes samme sted på ringen, vil den være i jævn cirkelbevægelsen i planet ortogonalt på tegningen. Denne cirkelbevægelse har vinkelhastighed ω og radius ρ, og trigonometri kan bruges til at udtrykke ρ ved φ.

$$v_{\tan} = \rho\omega \overset{\rho=R\sin(\varphi)}{=\!=\!=\!=\!=} R\omega\sin(\varphi)$$

3) Den totale kvadrerede hastighed bliver nu summen af kvardraterne på komponenterne

$$\begin{aligned} v^2 &= v_{\text{rad}}^2 + v_{\tan}^2 \\ &= R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\omega^2\sin^2(\varphi) \\ &= R^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2(\varphi)\right] \end{aligned}$$

Ganges dette med $m/2$ fås den kinetiske energi

$$K = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2(\varphi)\right]$$

og trækkes den potentielle energi fra fås

$$L = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2(\varphi)\right] - mgR\left[1 - \cos(\varphi)\right]$$

4) For at benytte Euler-Lagrangeligningen til at bestemme bevægelsesligningen bestemmes følgende differentialer

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= mR^2\dot{\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) &= mR^2\ddot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= mR^2\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - mgR\sin(\varphi) \end{aligned}$$

hvor kædereglen skal huskes til differentiation af $\sin^2(\varphi)$ i det sidste differential. Euler-Lagrangeligningen siger så at de to sidste differentialer er ens, hvorfor

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial\varphi} \\ mR^2\ddot{\varphi} &= mR^2\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - mgR\sin(\varphi) \\ \ddot{\varphi} &= \left[\omega^2\cos(\varphi) - \frac{g}{R}\right]\sin(\varphi) \end{aligned} \tag{1.8}$$

5) Fysisk set er et ligevægtspunkt et sted, hvor et objekt bliver, hvis det placeres der med farten 0. Stabiliteten kan undersøges ved at placere objektet der med hastigheden nul, og så puffe en smule til det. Accelereres objektet tilbage mod ligevægtspunktet, er ligevægtspunktet stabilt, men accelereres det væk fra er det ustabilt. Som eksempel kan tænkes på en boldt i et bakket område. Placeres bolden præcis på toppen af en bakke, så bliver den der, men skubbes der en smule til den, triller den ned af bakken. Derfor er bakketoppen et ustabilt ligevægtspunkt. Placeres bolden dog midt i en bakkedal uden fart, bliver bolden der også, men puffes der til den, vil den rulle lidt op ad bakken inden den ruller ned igen og tilbage til ligevægtspunktet. Derfor er dette punkt stabilt.
Kaldes et ligevægtspunkt φ_0, så kan disse kriterier udtrykkes matematisk ved at $\ddot{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, hvis $\dot{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0} = 0$ og $\varphi = \varphi_0$. For at undersøge stabilliteten lader man $\dot{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0}$ være positiv, og hvis $\ddot{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0}$ så også er positiv, er ligevægtspunktet stabilt. Hvis $\ddot{\varphi}|_{\varphi=\varphi_0} < 0$ så er ligevægtspunktet ustabilt.
6) Af ovenstående sættes $\ddot{\varphi} = 0$

$$
\begin{aligned}
0 = \ddot{\varphi} &= \left[\omega^2\cos(\varphi) - \frac{g}{R}\right]\sin(\varphi) \\
\implies 0 &= \begin{cases} \omega^2\cos(\varphi_0) - \dfrac{g}{R} \\ \sin(\varphi_0) \end{cases} \\
\implies \varphi_0 &= \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\pm\arccos\left(\dfrac{g}{R\omega^2}\right)\right] \\ \arcsin(0) = 0, \pm\pi \end{cases} \\
\varphi_0 &= \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\pm\arccos\left(\dfrac{g}{R\omega^2}\right)\right] \\ 0 \\ \pm\pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

Det med at tage realdelen af $\pm\arccos(g/(R\omega^2)$ er en smule pedantisk, men det skyldes at det kun er realdelen, der giver fysisk mening, da fysiske størrelser ikke kan være imaginære. Dette bliver vigtigt senere.

Det simpleste ligevægtspunkt er $\varphi_0 = 0$, hvilket svarer til at massen er i bunden af ringen.
$\varphi_0 = \pm\pi$ svarer til at massen er i ringens toppunkt.
Det sidste ligevægstpunkt er en smule sværere at forestille sig, men det er essentielt set et punkt hvor det at ringen roterer, presser massen opad. Man kan tænke det på samme måde som det at man kan få et pendul til svinge i pæne cirkler.
7) Der en to eller fire ligevægtspunkter alt efter fortegnet for differencen $\omega^2 - g/r$, fordi det øverstående ligevægtspunkt ikke altid eksisterer. Dette kan forklares ud fra bevægelsesligningen. Kigges på differentialligningen fås dette ligevægtspunkt ved ligningen

$$0 = \omega^2\cos(\varphi_0) - \frac{g}{R} \tag{1.9}$$

Da $\cos(\varphi)$ altid giver værdier mellem -1 og 1, ligegyldig hvilket φ, der vælges, kan dette ligevægtspunkt kun eksistere, hvis $\omega^2 > g/R$, eftersom ligningen ikke har nogen løsning for $g/R > \omega^2$.

8) Intuitivt set er $\varphi_0 = \pm\pi$ ustabil, da tyngdekraften jo vil trække massen ned, hvis den flyttes bare en smule væk fra toppunktet, hvilket gør punktet ustabilt. Matematisk set så bliver $\cos(\varphi)$ negativ, hvis $\varphi \approx \pm\pi$, hvorfor hele parentesen i ligning (1.8) er negativ. $\sin(\pm\pi) = 0$, hvis $\varphi < \pi$ er $\sin(\varphi) > 0$, og omvendt for $\varphi < -\pi$. Skubbes massen nu fra $\varphi = \pi$ i retningen så φ bliver mindre, så bliver $\sin(\varphi) > 0$, men da frontfaktoren er negativ, så vil den accelereres i negativ retning. Helt analogt sker det samme hvis massen var blevet skubbet til den anden side, hvorfor ligevægtspunktet er ustabilt.

Umiddelbart ville man tro at $\varphi_0 = 0$ og $\varphi_0 = \mathrm{Re}\big[\pm \arccos(g/(R\omega^2))\big]$ er stabile begge to, men det viser sig at $\varphi_0 = 0$ er ustabil i nogle tilfælde. Dette kan vises ved en Taylorudvikling til første orden omkring 0. Her bliver bevægelsesligningen

$$\ddot{\varphi} \simeq \left[\omega^2 - \frac{g}{R}\right]\varphi = k\varphi$$

hvor k bare er kort notation for alt det i parentesen. Placeres massen i $\varphi = 0$ med hastighed $\dot{\varphi} = 0$ er $\ddot{\varphi} = 0$, hvorefter der puffes en smule til massen, så $\varphi > 0$, får $\ddot{\varphi}$ samme fortegn som k, hvilket betyder at $\varphi_0 = 0$ er stabilt, hvis $k < 0$, hvilket betyder at $\omega^2 < g/R$. Med andre ord ringen roterer langsomt. Hvis ringen roterer hurtigt, er $k > 0$, hvorfor $\varphi_0 = 0$ bliver ustabilt, men til gengæld skaber dette de to nye ligevægtspunkter.

Ligevægtspunktet $\varphi_0 = \mathrm{Re}\big[\pm \arccos(g/(R\omega^2))\big]$ er stabilt, hvilket kan vises ved en lettere træls Taylorudvikling til 1. orden. Dette forventes ikke at deltagerne kan gøre, men for de interesserede, gøres det således. Først omkrives bevægelsesligning således at nulpunktet flyttes til ligevægtspunktet - dvs. $\varphi \longrightarrow \varphi_0 + \varepsilon$, hvor ε er en lille forskydning. φ_0 er defineret som en konstant, hvorfor $\ddot{\varphi} = \ddot{\varepsilon}$, og derved bliver

$$\ddot{\varepsilon} = \left[\omega^2 \cos(\varphi_0 + \varepsilon) - \frac{g}{R}\right]\sin(\varphi_0 + \varepsilon)$$

Dette Taylorudvikles omkring $\varepsilon = 0$, hvilket giver

$$\ddot{\varepsilon} \simeq \left[\omega^2\Big(\cos(\varphi_0) - \varepsilon\sin(\varphi_0)\Big) - \frac{g}{R}\right][\sin(\varphi_0) + \varepsilon\cos(\varphi_0)] \tag{1.10}$$

Dette skyldes at følgende Taylorudviklinger benyttes

$$\cos(\varphi_0 + \varepsilon) \simeq \cos(\varphi_0) - \varepsilon\sin(\varphi_0)$$
$$\sin(\varphi_0 + \varepsilon) \simeq \sin(\varphi_0) + \varepsilon\cos(\varphi_0)$$

Det virker måske lidt mærkeligt at faktorerne $\cos(\varphi_0)$ og $\sin(\varphi_0)$ er med her, men det skyldes at når differentialerne i Taylorrækken evalueres, så fås $\cos(\varphi_0 + 0) = \cos(\varphi_0)$ i stedet for $\cos(0) = 1$.

Tricket er at udvikle til laveste orden, der giver et brugbart resultat, hvilket her er 1. orden. Derfor udvikles sinus og cosinus udviklet til 1. orden, og herefter negligeres eventuelle led af højere orden. Nu benyttes definitionen af φ_0, der kan skrives som i ligning (1.9), til at reducere ligning (1.10).

$$\begin{aligned}
\ddot{\varepsilon} &\simeq \left[\omega^2\Big(\cos(\varphi_0) - \varepsilon\sin(\varphi_0)\Big) - \frac{g}{R}\right]\Big[\sin(\varphi_0) + \varepsilon\cos(\varphi_0)\Big] \\
&= -\omega^2\varepsilon\Big[\sin(\varphi_0) + \varepsilon\cos(\varphi_0)\Big] \\
&\simeq -\omega^2\sin(\varphi_0)\varepsilon
\end{aligned}$$

Andenordensledet kastes væk idet der udvikles til 1. orden, og det ses nu at ε opfører sig som en harmonisk oscillator til første orden.

Flerlegemeproblemer

Opgave 15: ●● To koblede vogne

1) Først opskrives den lille vogns stedkoordinat, der kaldes r

$$r = x + X$$

Dette differentieres

$$\dot{r} = \dot{x} + \dot{X}$$

hvorved

$$K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{X})^2$$

Navngivningen af koordinatet r er arbitrært og har ingen betydning for opgaven.

2) Den store vogn drives til harmonisk oscillation på en måde vi ikke bekymrer os om. Den eneste kobling fra den lille vogn til omverdenen er igennem fjereden, da den bevæger sig friktionsløst, hvorfor den potentielle energi er den for en fjeder, altså

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

Da $L = K - V$ er Lagrangefunktionen

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{X})^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

3) Nu differentieres på samme måde som i opgave 13

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m(2\dot{x} + 2\dot{X}) = m(\dot{x} + \dot{X})$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

4) Nu løses differentieres i bund

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(\ddot{x} + \ddot{X})$$

Nu bestemmes $\ddot{X}$ ved at differentiere cosinus to gange

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} A\cos\omega t \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-A\omega\sin\omega t) = -A\omega^2\cos\omega t\end{aligned}$$

5) Nu stoppes ind i Euler-Lagrangeligningen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \\ \implies m(\ddot{x} - A\omega^2\cos\omega t) &= -kx \\ \implies \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= A\omega^2\cos\omega t)\end{aligned}$$

6) Indsættes $A = 0$ i bevægelsesligningen fås

$$\begin{aligned}\implies \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0\cdot\omega^2\cos\omega t = 0 \\ \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x\end{aligned}$$

hvilket er en simpel harmonisk oscillator.

7) Det er relevant at tjekke denne grænse, da det fungerer som en konsistens kontrol, der er meget almindelig i fysik. Når der er regnet noget kompliceret, så kigges på en grænse, hvori bevægelsesligningen bør reducere til noget kendt. I tilfældet her er det "kendte tilfælde"en vogn på en fjeder.

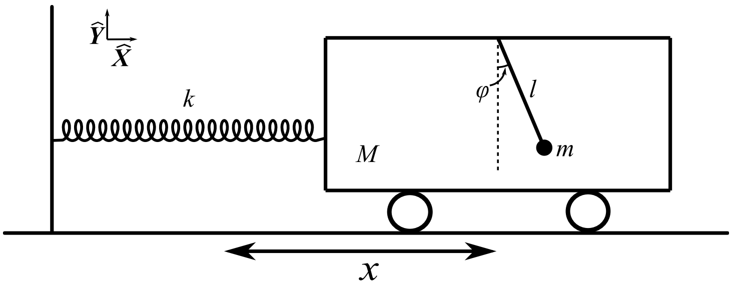
Perspektiverende: I elektromagnetisme bruger man ofte at hvis man er tilpas langt væk nogle ladninger, så ligner de bare en punktladning, hvorfor man tjekker grænsen $r \to \infty$ hvor r er afstanden til et defineret nulpunkt tæt på ladningerne og i denne grænse bare er afstanden til ladningerne.

Opgave 16: •••• **Pendul i en vogn**

1) Origo defineres som ophængningspunktet for pendulet for $X = 0$, og koordinatsystemet placeres således at tyngdekraften er i Y-retningen og fjederkraften er i X-retningen.

2) De kartesiske koordinater for pendullodets position er

$$\begin{aligned}X_p &= x + l\sin\varphi \\ Y_p &= l\cos\varphi\end{aligned}$$



Figur 1.4: Illustration af situationen med indtegnet kartesisk koordinatsystem og genereliserede koordinater.

og for vognet er Y_v uændret, da den kun kan bevæge sig langs $\hat{X}$, hvorfor den som sådan er arbitrær. Slutteligt er

$$X_v = x$$

3) Vognens forskydning er den eneste, som betyder noget for fjederen, og pendullodets vertikale position bruges til den gravitationelle den, hvorved

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mgl(1 - \cos\varphi)$$

4) Differentieres de kartesiske koordinater fås

$$\begin{aligned} \dot{X}_p &= \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{Y}_p &= l\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{X}_v &= \dot{x} \end{aligned}$$

Det ses at idiotformlen kan anvendes ved kvadrering, hvorved der opnås

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right]$$

hvorfor Lagrangefunktionen er

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}M\dot{x} + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right] \\ -\frac{1}{2}kx^2 + mgl(1 - \cos\varphi) \end{aligned}$$

5) Differentialerne for x bestemmes

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \end{aligned}$$

hvilket giver løsningen

$$M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -kx$$

Differentialerne for φ bestemmes

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{x}\cos\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= -ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - mgl\sin\varphi \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) &= ml^2\ddot{\varphi} - ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + ml\ddot{x}\cos\varphi\end{aligned}$$

så løsningen bliver

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x}\cos\varphi = -mgl\sin\varphi$$

6) Til første orden er $\cos\varphi \simeq 1$, mens $\sin\varphi \simeq \varphi$ hvorved

$$\begin{aligned}&a) \quad M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \simeq -kx \\ &b) \quad \ddot{\varphi} + \frac{\ddot{x}}{l} \simeq -\frac{g}{l}\varphi\end{aligned}$$

7) Den svarer til følgende scenarier
1. $k \to \infty$ betyder at modstanden i fjederen bliver uendelig stor.
2. Vognen er meget tungere end pendulet, som med andre ord betyder at vognen bevæger som om pendulet ikke var der.

8) I de optalte grænser reducerer systemet til følgende situationer
1. Modstanden i fjederen er så stor at vognen bevægelse bliver negligibel, hvorfor det forventes at pendulet opfører sig på sædvanlig vis, dett vil sige SHB.
2. Pendulets masse er så lille at dettes eksistens er ubetydelig for vognen, der så vil opføre sig som en vogn på en fjeder, altså SHB. Det betyder for pendulet at dets ophængningspunkt vil oscillere harmonisk, hvorfor der forventes en drevet svingning af pendulet.

9) Kigges på bevægelsesligningerne gøres følgende observationer 1. Da k er uendelig stor må x være uendelig lille for at opfylde bevægelsesligningen og ligning a mister herved betydning. Dette skal gælde til alle tider, så derfor må de tidsaflede af x også være meget små, hvorfor de negligeres i b. Den eneste bevægelsesligning med betydning bliver derfor

$$\begin{aligned}b) \quad \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi = -\omega_1^2\varphi \\ \varphi &= A\cos(\omega_1 t + \delta)\end{aligned}$$

hvor A og δ begge er konstanter bestemt af startbetingelserne.
2. Pendulets masse er negligibel ift. vognen, hvorfor led med m negligeres fra bevægelsesligning a.

$$a) \quad \ddot{x} = -\frac{k}{M}x = -\omega_2^2 x$$
$$x = A\cos(\omega_2 t + \delta_1)$$

hvor A og δ_1 igen er konstanter bestemt af startbetingelserne. Indsættes dette i bevægelsesligning b fås

$$b) \quad \ddot{\varphi} + \omega_1^2\varphi = \frac{A\omega_2^2}{l}\cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

hvor δ_2 også er en konstant. Løsningen til denne differentialligning er træls, men det er en drevet harmonisk svingning.

Konkluderende kan det siges at bevægelsesligningerne reducerer pænt til forventelige resultater i nogle udvalgte grænser, hvilket er en god indikator for deres validitet.

Fiktive Kræfter

Opgave 17: ●● Fysiske og fiktive kræfter

1) Det antages at systemet er stedafhængigt, hvilket vil sige at der udelukkende indgår variable i sted, hvilket eksempelvis kunne være de kartesiske koordinater (x, y, z), og konstanter i den potentialle energi. $V(x, y, z)$ er dermed konstant overfor hastigheder $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, hvorfor de partielt afledede er 0.

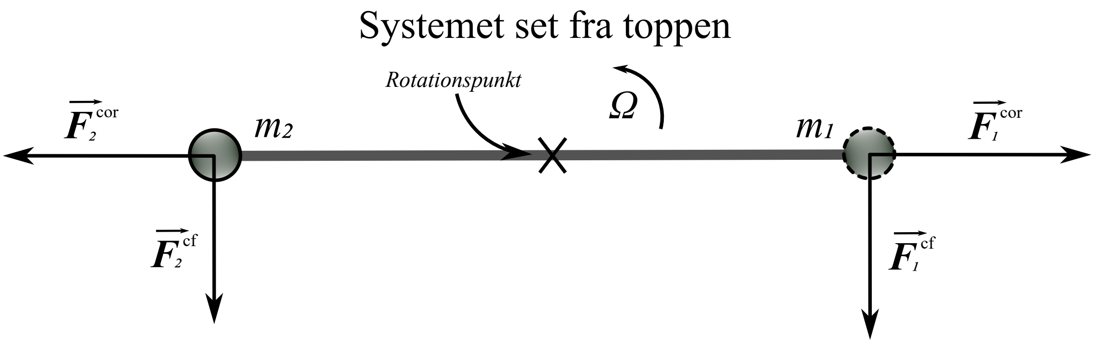
2) Af opgaven ovenfor er det led den potentielle energi bidrager til ledet $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ med 0, hvis tidsafledede også er nul. Dermed er $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$, hvilket giver den efterspurgte konklusion.

3) Eftersom den potentielle energi kun bidrager med et additivt led til delen af Euler-Lagrangeligningen, der er den genereliserede kraft tilføjes differentialerne med negativt fortegn på den side af lighedstegnet, grundet defintionen på Lagrangefunktionen.

4) Venstre side af lighedstegnene er masse gange acceleration, og summen af fysiske kræfter kan udtrykkes som den negative gradient af den samlede potentielle energi. Det betyder at hvis de fiktive kræfter betragtes som kræfter, så er ligningerne fra Newtons 2. lov i to forskellige dimensioner. Defineres de fiktive kræfter som i eksemplet opfører de sig dermed overfor Newtons 2. lov som enhver anden fysisk kraft.

Opgave 18: ●●● To masser på en roterende stang

1) Systemet roterer i et plan omkring et fast punkt, hvorfor cylindrisk polære koordinater er oplagt.



Figur 1.5: De fiktive kræfter er her indtegnet hvor m, Ω *og* $\dot{\rho}_1$ *er antaget positive.*

2) Da stangen er antaget stiv, kan loddernes bevægelse i φ-retningen kun komme fra stangens rotation, som er antaget konstant. Derfor er de generaliserede koordinater ρ_1 og ρ_2.

3) Da stangens længde er konstant er

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} &= \dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2 \\
\dot{\rho}_1 &= -\dot{\rho}_2
\end{aligned}
$$

4) Ligning (1.90) i kompendiet siger at

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{cor}} &= 2m\dot{\vec{\boldsymbol{r}}} \times \vec{\boldsymbol{\Omega}} \\
\vec{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{cf}} &= m(\vec{\boldsymbol{\Omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}) \times \vec{\boldsymbol{\Omega}}
\end{aligned}
$$

hvor de generaliserede koordinater på vektorform er

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\rho}}_1 &= \rho_1 \hat{\mathbf{r}} \\
\vec{\boldsymbol{\rho}}_2 &= -\rho_2 \hat{\mathbf{r}} \\
\dot{\vec{\boldsymbol{\rho}}}_1 &= \dot{\rho}_1 \hat{\mathbf{r}} \\
\dot{\vec{\boldsymbol{\rho}}}_2 &= -\dot{\rho}_2 \hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$

Stangen roterer omkring z-aksen, hvorfor $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$. Derfor bliver de fiktive kræfter[2]

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}_1^{\text{cor}} &= 2m_1\dot{\rho}_1\Omega\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{z}} \\
&= -2m_1\dot{\rho}\Omega\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
\vec{\boldsymbol{F}}_1^{\text{cf}} &= m_1\rho_1\Omega^2(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{z}} \\
&= m_1\rho_1\Omega^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{z}}) \\
&= m_1\rho_1\Omega^2\hat{\mathbf{r}} \\
\vec{\boldsymbol{F}}_2^{\text{cor}} &= 2m_2(-\dot{\rho}_2)\Omega\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{z}} \\
&= 2m_2\dot{\rho}_2\Omega\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= -2m_2\dot{\rho}_1\Omega\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
\vec{\boldsymbol{F}}_2^{\text{cf}} &= m_2(-\rho_2)\Omega^2(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{z}} \\
&= -m_2\rho_2\Omega^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{z}}) \\
&= -m_2\rho_2\Omega^2\hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

5) Antages m, Ω og $\dot{\rho}_1$ for at være positive fås figur 1.5.

6) Corioliskraften virker på begge legemer i $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$-retningen, men stangen er antaget stiv, hvorfor den påvirker legemerne med en ligestor og modsatrettet normalkraft, hvilket er samme argument som for at φ ikke er et generaliseret koordinat.

7) I systemets ligevægtskonfiguration er de to centrifugalkræfters vektorsum nul

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}_1^{\text{cf}} + \vec{\boldsymbol{F}}_2^{\text{cf}} &= \vec{\mathbf{0}} \\
\implies m_1\rho_1\Omega^2\hat{\mathbf{r}} &= -(-m_2\rho_2\Omega^2\hat{\mathbf{r}}) \\
\implies \frac{m_1}{m_2} &= \frac{\rho_2}{\rho_1}
\end{aligned}$$

8) Hvis masserne er ens forventes legemerne at placere sig lige langt fra rotationspunktet, dvs. $\rho_1 = \rho_2$.

9) Indsættes de forventede omstændigheder fås

$$\frac{m_1}{m_1} = \frac{\rho_1}{\rho_1} \quad \checkmark$$

Opgave 19: ●●● Er fiktive kræfter trælse?

1) Corioliskraften afhænger af hastighed, mens centrifugalskaften afhænger af position.

[2] cor/cf står som superscript og ikke subscript for at gøre det mere overskueligt. Der er ikke anden grund.

2) Typiske er kræfter stedafhængige, hvilket gælder f.eks. gravitation, fjederkræfter og elektriske kræfter. Derfor giver centrifugalkraften "bare"en ekstra stedafhængighed, hvilket ikke er helt umuligt, mens hastighedsafhængigheden af Corioliskraften gør den bøvlet at arbejde med.

3) Denne differentialligning minder ret så meget om

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = kg(t)$$

Den minder faktisk så meget om at de er ens hvis $g(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right) = k\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

hvorfor løsningen af denne differentialligningen kan bruges

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = g(t) = A\exp(kt) + B$$

hvor separation af de variable kan benyttes

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f' &= (A\exp(kt) + B)\,\mathrm{d}t' \\ \int_0^f \mathrm{d}f' &= \int_0^t A\exp(kt) + B\mathrm{d}t' \\ f(t) &= \frac{A}{k}\exp(kt) + Bt + C\end{aligned}$$

Perspektiverende Problemer

Opgave 20: ●●●● Tennis Racket Theorem

Det vigtige her er først at forstå antagelsen om de små vinkelaccelerationer. Eksempelvis er ω_y ikke lille nok til at se bort fra alle led, der indeholder ω_y, men den er lille nok til at $\omega_y^2 \approx 0$, hvorfor alle led der indeholder ω_y^2, ω_z^2 eller $\omega_y\omega_z$ kan negligeres.

1) Derved er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_x\dot{\omega}_x) \simeq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(I_y - I_z)(0)\right] = 0$$

Generelt set er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_i\omega_j) = \dot{\omega}_i\omega_j + \omega_i\dot{\omega}_j$$

Vi har dog lige argumenteret for at $\ddot{\omega}_x \simeq 0$, hvilket betyder led, der afhænger af $\ddot{\omega}_x$ negligeres. Herved opnås ligning 1.8 ved at differentiere den anden vinkelhastighed.

2) I ligning 1.7 isoleres de relevante førsteafledede og så indsættes det i ligning 1.8.

3) Eftersom $I_x > I_y$ er $I_x - I_y > 0$, mens $I_z < I_x$, hvorfor $I_z - I_x < 0$. Vinkelhastighederne er reelle, hvorfor

$$\omega_x^2(I_z - I_x)(I_x - I_y)/I_z < 0$$

4) I første omgang differentieres, hvor det huskes at andenordensled i ω_x og ω_z negligeres

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} I_x\dot{\omega}_x \\ I_y\dot{\omega}_y \\ I_z\dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_y - I_z)\omega_y\dot{\omega}_z \\ 0 \\ (I_x - I_y)\dot{\omega}_x\omega_y \end{bmatrix}$$

Bruges ligning 1.7 her til at substituere i de enkeltafledede fås ligning 1.10.

5) Analogt til spørgsmål 3) fås at $(I_y - I - z)$ og $(I_x - I_y)$ er positive, hvorfor

$$\omega_y^2(I_x - I_y)(I_y - I_z)/I_y > 0$$

6) Hvis rotationen skal være stabil, så må legemet ikke bevæge sig ret meget omkring de andre akser. Har $\ddot{\omega}_j$ samme fortegn som ω_j så vil vinkelhastigheden øges eksponentielt i tiden, hvorfor legemets rotation om den j'te akse øges kraftigt, hvis den ikke starter med en startvinkelhastighed $\omega_j = 0$. Dette betyder at legemets rotation vil starte en rotation om de sekundære[3] akser, hvorfor rotationen er ustabil. Har ω_j og $\ddot{\omega}_j$ modsat fortegn så vil vinkelhastighed oscillere omkring 0. Det betyder at legemets rotation får vinklen ved de sekundære akser til at holde sig omkring deres startværdi.

7) Fra spørgsmål 3) og spørgsmål 5) har vi at rotationen om de sekundære akser accelereres, hvis y-aksen er den primære rotationsakse, mens der induceres en oscillation omkring de sekundære akser, hvis x eller z er den primære akser.

8) For en kasse er det således

Opgave 21: ●●● Hamiltonfunktionen og et systems energi

1) $L = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2 + V(q)$

2) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A(q)\dot{q}$

3) $\dot{q} = \frac{p}{A(q)}$

4) $H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{A(q)} - \left(\frac{p^2}{2A(q)} - V(q)\right) = \frac{p^2}{2A(q)} + V(q)$

[3] Den primære rotationsakse er den akse med ikke-lille startværdi af vinkelhastigheden, mens de sekundære akser er dem, hvor startrotationen er lille.

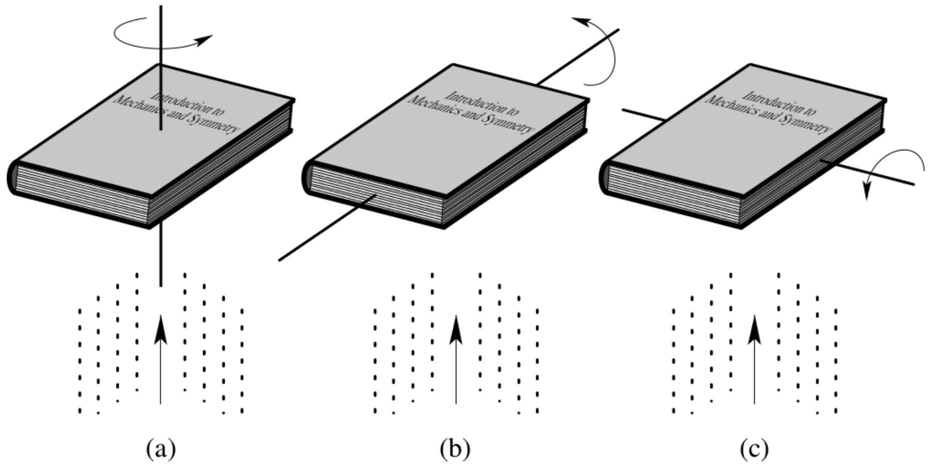


FIGURE 1.7.2. If you toss a book into the air, you can make it spin stably about its shortest axis (a), and its longest axis (b), but it is unstable when it rotates about its middle axis (c).

5) Pr. antagelse er $K = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2$. Dette omskrives nu ved dengeneraliserede impuls fra spørgsmål 3)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2 \\ &= \frac{1}{2}A(q)\left(\frac{p}{A(q)}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{2A(q)} \end{aligned}$$

Indsættes det i Hamiltonfunktionen fra spørgsmål 4) fås definitionen på total energi

$$H = \frac{p^2}{2A(q)} + V(q) = K + V = E$$

6) Taleargumentet lyder på at ingen af disse argumenter bygger på andet end antagelsen om formen af energierne. Derfor ændres intet når der tilføjes flere koordinater og der summeres.
Et mere matematisk argument er at den kinetiske energi nu skrives på formen

$$K = \sum_i \frac{1}{2}A(q_i)\dot{q}_i^2$$

mens den potentielle energi er $V(q_1, q_2, ..., q_n)$. Derfor er Lagrangefunktionen

$$L = \sum_i \frac{1}{2}A(q_i)\dot{q}_i^2 - V(q_1, q_2, ..., q_n)$$

Benyttes definitionen af generaliseret impuls samt det faktum at der ingen krydsled er i den del af Lagrangefunktionen, der afhænger af $\dot{q}_i$, fås at

$$q_i = \frac{p_i}{A(q_i)}$$

Den kinetiske energi kan nu skrives på formen

$$K = \sum_i \frac{p_i^2}{2A(q_i)}$$

og sættes disse to ligninger ind i definitionen på Hamiltonfunktionen fås

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i q_i - L \\ &= \sum_i p_i \frac{p_i}{A(q_i)} - \left(\sum_i \frac{p_i^2}{2A(q_i)} - V(q_1, q_2, ..., q_n) \right) \\ &= \frac{p_i^2}{2A(q_i)} + V(q_1, q_2, ..., q_n) \\ &= K + V = E \end{aligned}$$

Som bonusinformation kan det siges at selvom Hamiltonfunktionen har den omtalte form, så er det ikke nødvendigvis den mest logiske måde at definere systemets energi på. I nogle tilfælde giver det mere mening at definere energien anderledes, hvilket er muligt, da det absolutte energi ikke har den store betydning i sig selv, da det er ændringer i energien, som har betydning for systemets opførsel. Dette benyttes eksempelvis i afsnit 1.6 i kompendiet om beskrivelsen af pendulet i Lagrangeformalismen, hvor den potentielle energi defineres til at være 0 i pendulets ligevægtspunkt.

Opgave 22: ●●● Fra klassisk mekanik til kvantemekanik

Kvantemekanikken bygger på Hamiltonformalismen, hvorfor idéen med denne afsnit er at introducere Hamiltonfunktionen, der omskrives til Hamiltonoperatoren, $\hat{H}$, som kan betragtes som grundstenen for kvantemekanikken, fordi den tidsuafhængige eller stationære Schrödingerligning kan skrives som egenværdiproblemet

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{1.11}$$

Her går ψ'erne ikke ud med hinanden, da dette er formuleret ved hjælp af den gren af matematikken, der hedder lineær algebra, hvilket gør matematikken meget lettere, når først man har styr på denne matematik. Hamiltonoperatoren kan opskrives ud fra den klassiske Hamiltonfunktion.

1) Den generaliserede impuls kan skrives på formen $p = m\dot{q}$, hvorfor $\dot{q} = p/m$. Derved bliver den kinetiske energi

$$K = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \tag{1.12}$$
$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 \tag{1.13}$$
$$= \frac{p^2}{2m} \tag{1.14}$$

2) Derved giver ligning (1.97) i kompendiet at

$$H = K + V = \frac{p^2}{2m} + V \tag{1.15}$$

3) På operatorform er

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \tag{1.16}$$

idet masse er en partikelegenskab, som ikke er en operator.

4) Benyttes impulsoperatoren fra tabel 2.1 i kompendiet nu, samt definitionen på tallet i, nemlig at $i^2 = -1$ fås Hamiltonoperatoren fra samme tabel

$$\hat{p}^2 = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{1.17}$$
$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V} \tag{1.18}$$

Der er hermed dannet en bro mellem klassisk mekanik og kvantemekanik, og målet med dette er at vise at en sådan bro eksisterer fremfor en rigid gennemgang af Hamiltonformalismen og dens klassiske mangfoldigheder.

Konkluderende kan det siges at metoden til at analysere et kvantemekanisk system er at opskrive systemets kinetiske og potentielle energi, for derefter at opstille systemets Hamiltonfunktion. Denne omskrives til en Hamiltonoperator, som giver mening for systemet, og derefter løses den staionære Schrödingerligning. Dette kan lyde relativt simpelt, men der kan komme en del komplikationer i forbindelse med eksempelvis skridtet med at omskrive Hamiltonfunktionen til en passende Hamiltonoperator.

Opgave 23: •••• Energibevarelse i Hamilton

1) Ved partiel differentiation, f.eks. $\partial/\partial t$, betragtes alt andet end den variabel der differentieres med hensyn til som konstanter og der tages dermed ikke højde for at nogle variable kan afhænge af den variabel, der differentieres med hensyn til. Den fuldstændige tidsaflede tager højde for eventuelle implicitte afhængigheder og kædereglen benyttes til at udtrykke disse. Som eksempel kan bruges et generaliseret koordinat q

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}$$

og det illustreres endnu tydeligere ved q^2

$$\frac{\partial q^2}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial q^2}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = (2q)\dot{q} = 2q\dot{q}$$

2) Kædereglen benyttes til at skrive den fuldstændigt tidsafledede af en generel Hamiltonfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(q,p,t) = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.19}$$

Dette gøres da en generel éndimensionel Hamiltonfunktion afhænger eksplicit af tid, det generaliserede koordinat og den dertilhørende generaliserede impuls, og med den fuldstændige tidsafledede skal der tages højde for at de to sidstnævnte kan være tidsafhængige.

3) Hamiltonsligninger siger

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

indsættes det i ligning (1.19) fås

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\dot{p}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dot{q}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial t}$$
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

4) Dette følger trivielt fra ovenstående spørgsmål

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

5) Hamiltonfunktionen er bevaret i tid, hvis den ikke ændrer sig i tid, hvilket skrives matematisk som $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$, og det er opfyldt hvis H ikke er eksplicit tidsafhængig, altså $\partial H/\partial t = 0$. Da Lagrangefunktionen og Hamiltonfunktionen har samme eksplicitte tidsafhæninghed medfører dette at Hamiltonfunktionen også er bevaret i tid, hvis $\partial L/\partial t = 0$.

6) Dette gøres ved at tilføje i'er på q og p og summe over disse led

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Præcis samme fremgangsmåde benyttes da ingen af argumenterne er specifikke på en sådan måde så de ikke gælder for et arbitrært koordinat.

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_i [-\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p}] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

da indholdet af parentesen er nul for alle i

$$-\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} = 0 \;\; \forall i$$

Konklusionen er derfor den samme: Hvis Hamilton-/Lagrangefunktionen ikke er eksplicit tidsafhængig, så er systemets energi bevaret.

Kapitel 2

Kvantemekanik

Opgave 1: • **Parabelformet bølgefunktion**
Vi ser her på en partikel i en uendelig brønd i intervallet fra 0 til L. Lad bølgefunktionen være:

$$\psi = Nx(L - x)$$

1) Find N så bølgefunktionen er normeret?
En normeret bølgefunktion opfylder kravet:

$$\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x = \langle \psi \, | \psi \rangle = 1$$

Siden bølgefunktionen er nul uden for brønden skal vi kun integrere inde i brønden.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^L |\psi|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^L |N|^2 \, x^2 (L - x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \int_0^L x^4 - 2Lx^3 + x^2 L^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4 L}{2} + \frac{x^3 L^2}{3} \right]_0^L \\
&= |N|^2 \, L^5 \left(\frac{6}{30} - \frac{15}{30} + \frac{10}{30} \right) \\
&= \frac{|N|^2 \, L^5}{30}
\end{aligned}$$

Herefter kan $|N|^2$ isoleres.

$$|N|^2 = \frac{30}{L^5}$$

Denne ligning har mere end en løsning. Selv hvis vi begrenser os til reele tal vil der være både en positiv og en negativ løsning, men N er et komplekst tal. Der er derfor en hel cirkel i det komplekse plan med samme normkvadrat. For en vilkårlig fase θvil den gennerelle løsning være:

$$N = \sqrt{\frac{30}{L^5}} e^{i\theta}$$

Heldigvis har fasen ikke nogen fysisk betydning, så vi vælger blot den positive løsning:

$$N = \sqrt{\frac{30}{L^5}}$$

2) Hvad er forventningsværdien for positionen: $\langle x \rangle$?

For at finde forventingsværdien bruges ligning (2.7) i kompendiet.

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_0^L \psi^* x \psi \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \int_0^L x^3 (L - x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \int_0^L x^5 - 2x^4 L + x^3 L^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \left[\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5 L}{5} + \frac{x^4 L^2}{4} \right]_0^L \\
&= |N|^2 L^6 \left(\frac{10}{60} - \frac{24}{60} + \frac{15}{60} \right) \\
&= |N|^2 \frac{L^6}{60} = \frac{30}{L^5} \frac{L^6}{60} = \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Det er altså mest sandsynligt at finde partiklen i midten af bønden. Dette er ikke overraskende siden brønden er symmetrisk, og der derfor ikke er nogen grund til at den skulle være i den ene side frem for den anden.

3) Find forventningsværdien for energien: $\langle E \rangle$ og sammenlign den fundne energi med grundtilstandsenergien: $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.

Forventingsværdien for energien er forventinigsværdien af hamiltonoperatoren.

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \int_0^L \psi^* \hat{H}\psi \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-\hbar^2 |N|^2}{2m} \int_0^L x(L-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xL - x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\hbar^2 |N|^2}{m} \int_0^L xL - x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\hbar^2 |N|^2}{m} \left[\frac{x^2 L}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^L \\
&= \frac{\hbar^2 |N|^2 L^3}{6m} = \frac{30}{L^5}\frac{\hbar^2 L^3}{6m} = \frac{10\hbar^2}{2mL^2}
\end{aligned}$$

Der hvor der er et π^2 i grundtilstands energien er der 10 i $\langle E\rangle$. Da $\pi^2 \approx 9{,}87$ er $\langle E\rangle$ en anelse større end E_1.

4) Er ψ en stationær tilstand?

Der er (mindst) to fremgangsmåder her. Den første er at sætte ψ ind i den stationære schrödingerligning og se om det går op.

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \\
&= \frac{-\hbar^2 N}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xL - x^2) \\
&= \frac{\hbar^2 N}{m} \neq E\psi
\end{aligned}$$

Da ψ ikke opfylder den stationære schrödingerligning er det ikke en stationær tilstand.

Den anden metode bygger på at vi allerede kender de stationære tilstandes energier. De er på formen:

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Alle stationære tilstande vil have deres energi som forventningsværdi for energien:

$$\langle E_n\rangle = \int_0^L \psi_n^* \hat{H}\psi_n \,\mathrm{d}x = E_n \int_0^L |\psi|^2 \,\mathrm{d}x = E_n$$

Forventningsværdien for energien af ψ er ikke på denne form så ψ kan ikke være en stationær tilstand.

Opgave 2: • **Sammensatte bølgefunktioner**

Find normeringskonstanten N og energien E for de følgende bølgefunktioner, der er sammensat af stationære tilstande for den uendelige brønd:

1) $N(\psi_1 + \psi_2)$ Normeringskravet giver:

$$\begin{aligned}
1 &= |N|^2 \int_0^L (\psi_1 + \psi_2)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \int_0^L \psi_1^2 + \psi_2^2 + 2\psi_1\psi_2 \, \mathrm{d}x \\
&= |N|^2 \left(\int_0^L \psi_1^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^L \psi_2^2 \, \mathrm{d}x + 2 \int_0^L \psi_1\psi_2 \, \mathrm{d}x \right) \\
&\text{Siden } \psi_1 \text{ og } \psi_2 \text{ er ortonormale er de to første} \\
&\text{integraler lig en og det sidste nul.} \\
&= 2\,|N|^2
\end{aligned}$$

Vælges N reelt og positivt er $N = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) $N(\psi_1 - \psi_3)$

I de to andre delopgaver er fremgangsmåden den samme, men det ser dog lidt pænere ud i braket notation.

$$\begin{aligned}
1 &= \langle N(\psi_1 - \psi_3) \,|\, N(\psi_1 - \psi_3) \rangle \\
&= |N|^2 \langle \psi_1 - \psi_3 \,|\, \psi_1 - \psi_3 \rangle \\
&= |N|^2 \left(\langle \psi_1 - \psi_3 \,|\, \psi_1 \rangle - \langle \psi_1 - \psi_3 \,|\, \psi_3 \rangle \right) \\
&= |N|^2 \left(\langle \psi_1 \,|\, \psi_1 \rangle - \langle \psi_3 \,|\, \psi_1 \rangle - \langle \psi_1 \,|\, \psi_3 \rangle + \langle \psi_3 \,|\, \psi_3 \rangle \right) \\
&= 2\,|N|^2
\end{aligned}$$

Igen vælges den reelt positive løsning så $N = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $N(\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3)$

Siden krydsledene altid giver nul kan de ingnoreres

$$\begin{aligned}
1 &= \langle N(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) \,|\, N(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3) \rangle \\
&= |N|^2 \langle \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 \,|\, \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 \rangle \\
&= |N|^2 \left(\langle \psi_1 \,|\, \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 \,|\, \psi_2 \rangle + \langle \psi_3 \,|\, \psi_3 \rangle \right) \\
&= 3\,|N|^2
\end{aligned}$$

På samme måde som før for vi altså her $N = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Opgave 3: •• **Den tidsafhængige bølgefunktion**
I en uendelig brønd er bølgefunktionen til tiden $t = 0$:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_1 + \psi_2)$$

1) Hvad er $\Psi(x,t)$? Du kan med fordel bruge $\omega = \frac{E_1}{\hbar} = \frac{\pi^2\hbar}{2mL^2}$ Tidsudviklingen findes som summen af de stationære tilstande gange deres relevante tidsbølgefunktion $\varphi(t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$. Udtrykt i ω har de stationæretilstande energierne: $\omega\hbar$ og $4\omega\hbar$. Det giver en tidsafhængig bølgefunktion:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_1 e^{-i\omega t} + \psi_2 e^{-4i\omega t})$$

2) Hvad er $\Psi^*(x,t)$? De stationære tilstande reele, så det er kun tidsudvikligen der skal komplekskonjugeres. Det sker ved at erstatte alle i med $-i$.

$$Psi^* = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2 e^{4i\omega t})$$

3) Skriv $\Psi^* x \Psi$ så simpelt som muligt. Først indsættes Ψ og Ψ^* som vi allerede har fundet:

$$\begin{aligned}
&\Psi^* x \Psi \\
&= \frac{1}{5}(2\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2 e^{4i\omega t})x(2\psi_1 e^{-i\omega t} + \psi_2 e^{-4i\omega t}) \\
&= \frac{x}{5}(2\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2 e^{4i\omega t})(2\psi_1 e^{-i\omega t} + \psi_2 e^{-4i\omega t})
\end{aligned}$$

Husk at når man ganger eksponentialfunktioner lægger man eksponenterne sammen. Derudover får vi nu brug for vores første hint.

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{5}(4\psi_1^2 + \psi_2^2 + 2\psi_1\psi_2(e^{3i\omega t} + e^{-3i\omega t})) \\
&= \frac{x}{5}(4\psi_1^2 + \psi_2^2 + 4\psi_1\psi_2\cos(3\omega t))
\end{aligned}$$

Det bliver ikke pænere end dette.

4) Hvad er $\langle x(t)\rangle$ Vi har lige fundet indmaden til det integral vi skal løse, så det indsættes her:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_0^L \Psi^* x \Psi \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\int_0^L 4x\psi_1^2 + x\psi_2^2 + 4x\psi_1\psi_2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5}\int_0^L \psi_1^* x\psi_1 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_0^L \psi_2^* x\psi_2 \,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{4\cos(3\omega t)}{5}\int_0^L \psi_1^* x\psi_2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5}\langle\psi_1|\, x\, |\psi_1\rangle + \frac{1}{5}\langle\psi_2|\, x\, |\psi_2\rangle + \frac{4}{5}\cos(3\omega t)\langle\psi_1|\, x\, |\psi_2\rangle
\end{aligned}$$

Det er ikke ligefrem pæne integraler, så det er godt vi ikke skal løse dem.

$$\langle x\rangle = \frac{4}{5}\cos(3\omega t)\frac{-16L}{9\pi^2} = \frac{-64L}{45\pi^2}\cos(3\omega t)$$

Så forventningsværdien bevæger sig med en simpel harmonisk bevægelse og en vinkelfrekvens på 3ω.

Opgave 4: ●●● **En partikel i et kvadrat**

I to dimensioner er den tidsuafhængige Schrödingerligning i kartesiske koordinater.

$$E\psi(x,y) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + V(x,y)$$

Vi vil se på en kvadratisk brønd, i to dimensioner, med sidelængder på L. Her er potentialet nul når $0 \le x \le L$ og $0 \le y \le L$ Antag at man kan skrive bølgefunktionen som: $\psi(x,y) = X(x)Y(y) = XY$.

1) Indsæt $\psi = XY$ i Schrödingerligningen med $V = 0$ og isoler E.

Y kan betragtes som konstant for x differentialet og omvendt, så Schrödingerligningen bliver:

$$\begin{aligned}
E\psi &= \hat{H}XY \\
&= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 XY}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 XY}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

Herefter deles med XY på begge sider.

$$E = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)$$

2) Energien vil bestå af en bidrag fra X og Y. så $E = E_x + E_y$. Opstil differentialligninger i stil med ligning (2.20) i kompendiet for X og Y.

På den ene side af lighedstegnet er kun energien, så denne side er konstant. På den anden side er der en sum af to led der kun afhænger af en af vores variable. Den eneste mulige måde hvorpå dette kan gå op er hvis begge led er konstante. Disse konstanter kaldes E_x og E_y. Det giver differentialligningerne:

$$E_x X = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$
$$E_y Y = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

3) Find generelle løsninger til differentialligningerne, bølgefunktionen og de tilhørende energier. Bemærk at der vil være et kvantetal for hver af differentialligningerne.

Ligningerne er de samme som dem vi løste for den uendelige brønd, og løsningerne er de samme. Givet kvantetallene n_x og n_y vil X være:

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \quad E_x = \frac{n_x^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Tilsvarende for Y.

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \quad E_y = \frac{n_y^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Det giver bølgefunktioner $\psi_{n_x n_y}$ på formen:

$$\psi_{n_x n_y}(x, y) = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right)$$
$$E_{n_x n_y} = E_x + E_y = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2)$$

4) Hvad er de fem laveste energier, og skitser bølgefunktioner med disse energier.

De laveste energier kan findes ved at starte med $n_x = n_y = 1$ og gradvist gøre dem større. Med $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ Er energierne:

$$E_{11} = 2E_1$$
$$E_{21} = E_{12} = 5E_1$$
$$E_{22} = 8E_1$$
$$E_{31} = E_{13} = 10E_1$$
$$E_{32} = E_{23} = 13E_1$$

Opgave 5: ●●● En partikel i en boks
I tre dimensioner er den tidsuafhængige Schrödingerligning i kartesiske koordinater.

$$E\psi(x, y, z) = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z)$$

Vi vil se på en kubisk boks med en sidelængde på L vil potentialet være nul når x, y og z alle er imellem 0 og L. Antag at man kan skrive bølgefunktionen som: $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) = XYZ$.

Fremgangsmåden er nøjagtigt den samme som for opgave 4.

1) Indsæt $\psi = XYZ$ i Schrödingerligningen med $V = 0$ og isoler E.

$$\begin{aligned} EXYZ &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)XYZ \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}YZ + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}Z + XY\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) \\ \iff E &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

2) Energien vil bestå af en bidrag fra X, Y og Z. så $E = E_x + E_y + E_z$. Opstil differentialligninger i stil med ligning (2.20) i kompendiet for X, Y og Z.

Her er differentialligningerne:

$$\begin{aligned} E_x X &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \\ E_y Y &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \\ E_z Z &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \end{aligned}$$

3) Find generelle løsninger til differentialligningerne, bølgefunktionen og de tilhørende energier. Bemærk at der vil være et kvantetal for hver af differentialligningerne.

Løsningerne til de separerede differentialligninger har løsninger der svarer til dem for den uendelige brønd.

$$\begin{aligned} X(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right) \\ Y(y) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right) \\ Z(z) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right) \end{aligned}$$

4) Find de laveste 5 mulige energier udtrykt i $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ energien for en endimensionel uendelig brønd med samme brede som boksens sidelængde.

De 5 laveste energier er:

$$
\begin{aligned}
E_{111} &= 3E_1 \\
E_{112} &= E_{121} = E_{211} = 6E_1 \\
E_{122} &= E_{212} = E_{221} = 9E_1 \\
E_{113} &= E_{131} = E_{311} = 11E_1 \\
E_{222} &= 12E_1
\end{aligned}
$$

Opgave 6: • **Parabelformet bølgefunktion igen**

Denne opgave bygger videre på opgave 1, så det er en fordel at have lavet denne opgave først. Vi ser igen på en parabelformet bølgefunktion i en uendelig brønd:

$$\psi = Nx(L - x)$$

1) Hvad er $\sigma_x^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$?

Vi kender allerede $\langle x \rangle$ og $|N|^2$ fra opgave 1.

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \frac{L}{2} \\
|N|^2 &= \frac{30}{L^5}
\end{aligned}
$$

For at finde $\left\langle x^2 \right\rangle$ bruges sandwichen:

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle &= |N|^2 \int_0^L x^3(L - x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{30}{L^5} \int_0^L x^5 - 2x^4L + x^3L^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{30}{L^5} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5L}{5} + \frac{x^6}{6} \right]_0^L \\
&= 30L^2 \left(\frac{15}{60} - \frac{24}{60} + \frac{10}{60} \right) \\
&= \frac{L^2}{2}
\end{aligned}
$$

Nu er usikkerheden:

$$\sigma_x^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{2}$$

og

$$\sigma_x = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

2) Hvad er $\sigma_p^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2$? Her skal vi bruge at $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Så bliver sandwichen:

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= -i\hbar \left| N \right|^2 \int_0^L x(L-x) \frac{\partial}{\partial x} \left(x(L-x) \right) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-30i\hbar}{L^5} \int_0^L x(L-x)(L-2x) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-30i\hbar}{L^5} \int_0^L xL^2 - 3x^2L + 2x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-30i\hbar}{L^5} \left[\frac{x^2L^2}{2} - x^3L + \frac{x^4}{2} \right]_0^L \\
&= \frac{-30i\hbar}{L} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Tilsvarende for $\langle p^2 \rangle$, hvor $opp^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= |N|^2 \int_0^L x(L-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x(L-x) \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{-30\hbar^2}{L^5} \int_0^L x(L-x)(-2)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{60\hbar^2}{L^5} \int_0^L xL - x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{60\hbar^2}{L^5} \left[\frac{x^2 L}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^L \\
&= \frac{60\hbar^2}{L^5} \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right) \\
&= \frac{60\hbar^2}{L^2} \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6} \right) \\
&= \frac{10\hbar^2}{L^2}
\end{aligned}$$

Så usikkerheden er:

$$\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle = \frac{10\hbar^2}{L^2}$$

og:

$$\sigma_p = \frac{\hbar\sqrt{10}}{L}$$

3) Passer det med Heisenbergs usikkerhedsprincip?

Sættes σ_x og σ_p ind i Heisenbers usikkerhedsprincip findes:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{L}{\sqrt{2}} \frac{\hbar\sqrt{10}}{L} = \hbar\sqrt{5} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Heisenberg er tilfreds ⌣̈

Opgave 7: •• **Den frie partikel**

En fri partikel er en partikel der ikke påvirkes af noget potentiale, så $V(x) = 0$ for alle x

1) Hvad er $\hat{H}$?

Der er ikke noget potentiale så:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

2) Hvad er $[\hat{p}, \hat{H}]$?

Bemærk at operatorer altid kommuterer med sig selv, så:

$$\begin{aligned}[\hat{p}, \hat{H}] &= \hat{p}\hat{H} - \hat{H}\hat{p} \\ &= \frac{\hat{p}^3}{2m} - \frac{\hat{p}^3}{2m} \\ &= 0\end{aligned}$$

3) Hvilke bølgefunktioner opfylder: $\hat{p}\psi_p = -i\hbar\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = p\psi_p$?

Omskrives dette findes differentialligningen:

$$\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}$$

Løsningen til denne differentialligning er blot en eksponentialfunktion. Imaginærfaktoren ændrer ikke dette, så:

$$\psi_p = e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

4) Hvad sker der hvis man sætter ψ_p ind i Schrödingerligninen?

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_p &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2} \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2\psi_p \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{-p^2}{\hbar^2}\psi_p \\ &= \frac{p^2}{2m}\psi_p\end{aligned}$$

5) Hvad er sammenhængen imellem Eog p?

Energien er:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

6) Hvad er σ_p og σ_E?

Først findes $\langle p\rangle$, $\left\langle p^2\right\rangle$, $\langle E\rangle$ og $\left\langle E^2\right\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \left\langle\psi_p\middle|\hat{p}\psi_p\right\rangle \\ &= p\left\langle\psi_p\middle|\psi_p\right\rangle \\ &= p\end{aligned}$$

Dette er en konsekvens af at det er en egentilstand. Udregningen er tilsvarende for de andre.

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle &= p^2\\ \langle E\rangle &= E\\ \langle E^2\rangle &= E^2\end{aligned}$$

Det gør det muligt at finde usikkerhederne:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = 0\\ \sigma_E &= \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = 0\end{aligned}$$

Man kan godt kende $p$og E på samme tid for den frie partikel, og det er ved ψ_p tilstandene.

Opgave 8: ●●● En anden usikkerhedsrelation

1) Vis at:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\middle|\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle$$

Først skal det bemærkes at $\langle Q\rangle$ dækker over et integral:

$$\langle Q\rangle = \int \Psi^*\hat{Q}\Psi\,\mathrm{d}x$$

Siden integralet er i forhold til x og differentialet er i forhold til t kan differential operatoren flyttes ind i integralet. Herefter anvendes kæderegelen.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} &= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi^*\hat{Q}\psi\,\mathrm{d}x\\ &= \int\left(\frac{\mathrm{d}\Psi^*}{\mathrm{d}t}\hat{Q}\Psi + \Psi^*\frac{\mathrm{d}\hat{Q}}{\mathrm{d}t}\Psi + \Psi^*\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hverken x eller p afhænger af t, så den totale afledte er lig den delviste. Herefter kan integralet splittes op, og bringes på braket form (man kan sagtan lave hele denne opgave på braket form, men det kan være en hælp at se integralerne). Bemærk at rækkefølgen af differentiering og komplekskonjugering er underordnet.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^*\hat{Q}\Psi\,\mathrm{d}x + \int\Psi^*\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Psi\,\mathrm{d}x + \int\Psi^*\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\\ &= \left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\middle|\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle\end{aligned}$$

Som vi ville vise

2) Vis at:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{Q}]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\langle Q\rangle}{\partial t}\right\rangle$$

Først isoleres $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ i Schrödingerligningen.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\Psi$$

Komplekskonjugeres på begge sider findes:

$$\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = \frac{-1}{i\hbar}\hat{H}\Psi^*$$

I første led indsættes fra Schrödingerligningen.

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle &= \int\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\hat{Q}\Psi\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{-1}{i\hbar}\int\hat{H}\Psi^*\hat{Q}\Psi\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{-1}{i\hbar}\left\langle\hat{H}\Psi\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle\\ &= \frac{-1}{i\hbar}\left\langle\Psi\middle|\hat{H}\hat{Q}\Psi\right\rangle\end{aligned}$$

I sidste skridt udnyttede vi hintet. For det tredje led er fremgangsmåden den samme, så det giver:

$$\left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\hat{H}\Psi\right\rangle$$

Kombineres de to led fåes:

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial t}\middle|\hat{Q}\Psi\right\rangle + \left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right\rangle &= \frac{-1}{i\hbar}\left(\left\langle\Psi\middle|\hat{H}\hat{Q}\Psi\right\rangle - \left\langle\Psi\middle|\hat{Q}\hat{H}\Psi\right\rangle\right)\\ &= \frac{-1}{i\hbar}\left\langle\Psi\middle|(\hat{H}\hat{Q}-\hat{Q}\hat{H})\Psi\right\rangle\\ &= \frac{i}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{Q}]\right\rangle\end{aligned}$$

Det andet led indentificeres blot som forventningsværdien af ændrinen i operatoren.

$$\left\langle\Psi\middle|\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\Psi\right\rangle = \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle$$

Det giver det udtryk vi søgte:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{Q}]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\langle Q\rangle}{\partial t}\right\rangle$$

3) Hvordan ændrer antagelsen om at $\hat{Q}$ er uafhængig af t de to tidligere resultater? Hvis $\hat{Q}$ er afhængig af t er:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = 0$$

så

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \middle| \hat{Q}\Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \hat{Q}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

Med kun første og tredje led tilbage bliver resultatet af anden delopgave kun kommutatoren:

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\left\langle [\hat{H}, \hat{Q}] \right\rangle \tag{2.1}$$

4) Vis:

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right|$$

Den gennerelle usikkerhedsrelation er:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle\right)^2$$

Sættes $\hat{A}$ og $\hat{B}$ som $\hat{H}$ og $\hat{Q}$ får vi:

$$\sigma_H^2 \sigma_Q^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left\langle [\hat{H}, \hat{Q}] \right\rangle\right)^2$$
$$\Rightarrow \sigma_H \sigma_Q \geq \left|\frac{1}{2i}\left\langle [\hat{H}, \hat{Q}] \right\rangle\right|$$

Nu insdætter vi fra ligning (2.1).

$$\sigma_H \sigma_Q \geq \left|\frac{1}{2i}\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t}\right|$$

Opgave 9: • **Harmonisk oscillator med $\hat{a}_-\hat{a}_+$**

Færdiggør udledningen af den harmoniske oscillator. Hvis du havde problemer med denne udledning er denne opgave stærkt anbefalet.

1) Udregn $\hat{a}_-\hat{a}_+$.

$\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$ kan findes i ligning (**??**) og (**??**). Husk at operatorer ikke kommuterer. Det udnyttes at $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_-\hat{a}_+ &= \frac{1}{2\hbar\omega m}(i\hat{p} + m\omega\hat{x})(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 - im\omega(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2\right) - \frac{i}{2\hbar}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2) brug dette til at udlede ligning (**??**).

Denne ligning omarangeres så:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)$$

3) Vis at hvis ψ_n er en løsning til Schrödingerligningen, så er $\hat{a}_-\psi_n$ det også. Hamliton operatoren anvendes på $\hat{a}_-\psi_n$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\hat{a}_-\psi_n) &= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)\hat{a}_-\psi_n \\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+\hat{a}_- - \frac{1}{2}\hat{a}_-\right)\psi_n \\
&= \hbar\omega\hat{a}_-\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2} - 1\right)\psi_n \\
&= \hat{H}\psi_n - \hbar\omega\psi_n \\
&= (E_n - \hbar\omega)\psi_n
\end{aligned}$$

4) Hvad er energien af $\hat{a}_-\psi_n$

Vi fandt energien da vi satte $\hat{a} - \psi_n$ ind i schrödingerligningen. Den er:

$$E = E_n - \hbar\omega$$

Opgave 10: •• **Generering af nye tilstande.**

Start med grundtilstanden for den harmoniske oscillator ψ_0 og generer de første exciterede tilstande:

1) ψ_1

2) ψ_2

3) ψ_3

4) ψ_4

Opgave 11: •• **Det klassisk tilladte område.**

Vi vil her sammenligne den kvanteharmoniske oscillator med en klassisk harmonisk oscillator med samme V og $E = E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$

1) Hvad er den maksimale værdi af x?

Den maksimale værdi findes hvor alt energien er potentiel energi.

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} = V = \frac{m\omega^2 x}{2}$$
$$\iff \quad x_{\text{max}} = \frac{\hbar}{m\omega}$$

2) Hvad er sandsynligheden for at finde en partikel i ψ_0 tilstanden i intervallet fra $-x_{\text{max}}$ til x_{max}?

Sandsynlighedstætheden er givet $|\psi|^2$. Dette integreres imellem $-x_{\text{max}}$ og x_{max}. Her er $\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$.

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-x\text{max}}^{x_{\text{max}}} |\psi_0|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-x_{\text{max}}}^{x_{\text{max}}} \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}x^2\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{\hbar}{2m\omega} \left[\exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}x^2\right)\right]_{-x_{\text{max}}}^{x_{\text{max}}} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \exp\left(\frac{-m\omega}{\hbar}x_{\text{max}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} e^{-1}
\end{aligned}$$

(Hint: $\int x e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{-ax^2}}{2a} + k$.)

Opgave 12: •• **Sjov med operatorer**

Vi vil her komme ind på en af grundene til, at hæve-/sænkeoperatorerne er smarte. Udenyt at bølgefunktionerne er ortonormale.

1) Udtryk $\hat{x}$ og $\hat{p}$ med $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$.

Summen af de to operatorer er:

$$\begin{aligned}\hat{a}_+ + \hat{a}_- &= \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x} + i\hat{p} + m\omega\hat{x})\\ &= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\hat{x}\end{aligned}$$

Isoleres $\hat{x}$ findes:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)$$

Tilsvarende for differensen:

$$\begin{aligned}\hat{a}_+ - \hat{a}_- &= \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x} - i\hat{p} - m\omega\hat{x})\\ &= -i\frac{2}{\sqrt{\hbar m\omega}}\hat{p}\\ \iff \hat{p} &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_- - \hat{a}_+)\end{aligned}$$

2) Find $\langle x\rangle$ og $\langle p\rangle$ for ψ_0, ψ_1 og ψ_n. Har man fundet svaret for ψ_n kan man bare indsætte tallene bagefter. Husk på at $\hat{a}_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$ og $\hat{a}_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int \psi_n^*\hat{x}\psi_n \,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int \psi_n^*(\hat{a}_+\psi_n + \hat{a}_-\psi_n)\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int \psi_n^*\sqrt{n+1}\psi_{n+1} + \sqrt{n}\psi_{n-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Bigg(\sqrt{n+1}\int \psi_n\psi_n^*\psi_{n+1}\,\mathrm{d}x\\ &+ \sqrt{n}\int \psi_n^*\psi_{n-1}\,\mathrm{d}x\Bigg)\\ &= 0\end{aligned}$$

Siden denne metode frigør os fra at løse et eneste integral kan vi lige så godt bruge braket notation.

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \langle \psi_n | \hat{p} | \psi_n \rangle \\
&= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle \psi_n | (\hat{a}_-\psi_n - \hat{a}_+\psi_n \rangle \\
&= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\sqrt{n} \langle \psi_n | \psi_{n-1} \rangle - \sqrt{n+1} \langle \psi_n | \psi_{n+1} \rangle) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Så forventningsværdien er nul for alle stationære tilstande.

3) Gør det samme for $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$.

Først skal vi finde $\hat{x}^2$ og $\hat{p}^2$ udtrykt med $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$. Husk at operatorer ikke kommuterer

$$\begin{aligned}
\hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)^2 = \frac{\hbar}{m\omega}(\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^2 + \hat{a}_-\hat{a}_+ + \hat{a}_+\hat{a}_-) \\
\hat{p}^2 &= \frac{-\hbar m\omega}{2}(\hat{a}_- - \hat{a}_+)^2 = -\hbar m\omega(\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^2 - \hat{a}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{a}_-)
\end{aligned}$$

Nu er det muligt at finde $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$.

$$\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \psi_n \middle| \hat{a}_+^2 + \hat{a}_- + \hat{a}_+\hat{a}_- + \hat{a}_-\hat{a}_+ \middle| \psi_n \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \psi_n \middle| \hat{a}_+^2\psi_n + \hat{a}_-^2\psi_n + \hat{a}_-\hat{a}_+\psi_n + \hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \psi_n \middle| \sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2} + \sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2} \right\rangle \\
&+ \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \psi_n | (n+1)\psi_n + n\psi_n \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) \langle \psi_n | \psi_n \rangle \\
&= \frac{\hbar(2n+1)}{2m\omega}
\end{aligned}$$

Bemærk at kun når der er lige mange hæve og sænke operatorer at ledene bidrager med andet end nul. Dette gælder ikke generelt.

$$\begin{aligned}
\left\langle p^2 \right\rangle &= \frac{\hbar m\omega}{2} \left\langle \psi_n \middle| \hat{a}_+\hat{a}_- + \hat{a}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+^2 - \hat{a}_-^2 \middle| \psi_n \right\rangle \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2} \langle \psi_n | \hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n + \hat{a}_-\hat{a}_+\psi_n \rangle \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2} \langle \psi_n | n\psi_n + (n+1)\psi_n \rangle \\
&= \frac{\hbar m\omega(2n+1)}{2}
\end{aligned}$$

4) Hvad er σ_x og σ_p for ψ_n?

Siden $\sigma_A^2 = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2$ er:

$$\sigma_x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar(2n+1)}{m\omega}}$$
$$\sigma_p = \sqrt{\left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega(2n+1)}{2}}$$

5) Hvor dan passer det med Heisenbergs usikkerhedsprincip?

Indsætter vi σ_x og σ_p i Heisenbergs usikkerheds princip finder vi:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar(2n+1)}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Heisenberg er altid opfyldt, og når $n = 0$ er det en lighed.

Opgave 13: •• Nu med tid

Til tiden $t = 0$ har vi bølgefunktionen:

$$\Psi(x, t = 0) = N(\psi_0 + \psi_1)$$

(Det kan være en fordel at have lavet opgave 12 først.)

1) Hvad er N?

Det udnyttes at bølgefunktionerne er ortonormale.

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \Psi \,|\, \Psi \rangle \\ &= |N|^2 \langle \psi_0 + \psi_1 \,|\, \psi_0 + \psi_1 \rangle \\ &= |N|^2 \left(\langle \psi_0 \,|\, \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 \,|\, \psi_1 \rangle + \langle \psi_1 \,|\, \psi_0 \rangle + \langle \psi_1 \,|\, \psi_1 \rangle \right) \\ &= 2\,|N|^2 \\ \Rightarrow |N| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

I princippet kan vi ikke sige mere om N. Her vælges $N = \frac{1}{\sqrt{2}}$ uden tab af generealitet.

2) Hvad er $\Psi(x, t)$?

Begge de stationære tilstande får en $\exp(\frac{-i\hbar E t}{\hbar})$ faktor.

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_0 e^{-i\omega t/2} + \psi_1 e^{-3i\omega t/2} \right)$$

3) Hvad er $\langle E \rangle$?

En måde at finde $\langle E \rangle$ er at udnytte at vi ved hvordan hamiltonoperatoren virker på de stationære tilstande, og kun afhænger af bølgefunktionens rumafhængighed. Det kan udnyttes at $\left\langle e^{i\theta} \middle| e^{i\theta} \right\rangle = 1$ og at de stationære tilstande er ortonormale.

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \left\langle \Psi \right| \hat{H} \left| \Psi \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \Psi \middle| \hat{H}\psi_0 e^{-i\omega/2} + \hat{H}\psi_1 e^{-3i\omega/2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \Psi \middle| \frac{\hbar}{2}\psi_0 e^{-i\omega/2} + \frac{3\hbar\omega}{2}\psi_1 e^{-3i\omega/2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left\langle \psi_0 e^{-i\omega t/2} + \psi_1 e^{-3i\omega t/2} \middle| \frac{\hbar}{2}\psi_0 e^{-i\omega/2} + \frac{3\hbar\omega}{2}\psi_1 e^{-3i\omega/2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \left\langle \psi_0 \,|\, \psi_0 \right\rangle + \frac{3\hbar\omega}{2} \left\langle \psi_1 \,|\, \psi_1 \right\rangle \right) \\
&= \hbar\omega
\end{aligned}$$

4) Hvad er $\langle x(t) \rangle$? Først skrives forventningsværdien som flere mindre integraler:

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \langle \Psi | \, x \, | \Psi \rangle \\
&= |N|^2 \left\langle \psi_0 e^{-i\omega t/2} + \psi_1^{-3i\omega t/2} \middle| x \middle| \psi_0 e^{-i\omega t/2} + \psi_1^{-3i\omega t/2} \right\rangle \\
&= |N|^2 \left\langle \psi_0 + \psi_1 e^{-i\omega t} \middle| x \middle| \psi_0 + \psi_1 e^{-i\omega t} \right\rangle \\
&= |N|^2 \left(\langle \psi_0 | \, x \, | \psi_0 \rangle + \left\langle \psi_1 e^{-i\omega t} \middle| x \middle| \psi_1 e^{-i\omega t} \right\rangle \right. \\
&+ \left. \left\langle \psi_0 \middle| x \middle| \psi_1 e^{-i\omega t} \right\rangle + \left\langle \psi_1 e^{-i\omega t} \middle| x \middle| \psi_0 \right\rangle \right) \\
&= |N|^2 \left(\langle \psi_0 | \, x \, | \psi_0 \rangle + \langle \psi_1 | \, x \, | \psi_1 \rangle \right. \\
&+ \left. \langle \psi_0 | \, x \, | \psi_1 \rangle \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \right)
\end{aligned}$$

Nu udregnes de enkelte integraler seperat. Det kan udnyttes at $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n | \, x \, | \psi_n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \psi_n | \, \hat{a}_+ + \hat{a}_- \, | \psi_n \rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\langle \psi_n \middle| \sqrt{n+1}\psi_{n+1} + \sqrt{n}\psi_{n-1} \right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n+1} \left\langle \psi_n \,|\, \psi_{n+1} \right\rangle + \sqrt{n} \left\langle \psi_n \,|\, \psi_{n-1} \right\rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dermed er både $\langle\psi_0| x |\psi_0\rangle$ og $\langle\psi_1| x |\psi_1\rangle$ lig nul.

$$\begin{aligned}
\langle\psi_0| x |\psi_1\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle\psi_0| a_+ + a_- |\psi_1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\left\langle\psi_0 \middle| \sqrt{2}\psi_2\right\rangle + \langle\psi_0 | \psi_0\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle\psi_0 | \psi_0\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}
\end{aligned}$$

Nu er det muligt at sætte ind og finde $\langle x\rangle$.

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \cos(\omega t)$$

Energibevarelse

Opgave 14: •• Energibevarelse i kvantetilstande
Vi skal i denne opgave se på hvordan energibevarelse kommer til udtryk i kvantemekaniske tilstande. Til enhver Hamilton $\hat{H}$ operator kan vi finde et sæt af løsninger som opfylder følgende ligning: $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$.

1) Udtryk en generel funktion $f(x)$ som en kombination af løsninger til Schrödinger ligningen.

2) Hvordan vil denne funktion udvikle sig over tid? (Hint: udtryk $f(x,t)$ som en kombination af løsninger til Schrödinger ligningen)

3) Udregn forventningsværdien af energien $\langle E\rangle$. Hvordan vil denne udvikle sig over tid?

Opgave 15: • Lige og ulige funktioner
En funktion så som $f(x) = x^2$ der opfylder kravet: $f(x) = f(-x)$ kaldes en lige funktion. Tilsvarende er funktioner som $f(x) = x$ der opfylder det ligende krav: $f(x) = -f(-x)$. Det vil sige at en lige funktion er uændret hvis man spejler den i y-aksen, mens en ulige funktion skifter fortegn. Bemærk at de fleste funktioner er hverken lige eller ulige, og unikt er funktionen $f(x) = 0$ både lige og ulige. Afgør om følgende funktioner er lige eller ulige:

1) $\sin x$ En af egenskaberne vid sinus er at $\sin(x) = -\sin(-x)$, så $\sin x$ er ulige.

2) e^{x^2} $x^2 = (-x)^2$ ligegyldigt hvilken funktion der får en lige funktion som input ender med at være lige.

3) $\cos x$ Cosinus har egenskaben $\cos(x) = \cos(-x)$

Opgave 16: • **Mere om lige og ulige funktioner**
Lad $f_g(x)$ være en lige funktion og $f_u(x)$ være en ulige funktion[1].

1) Vis at produktet af lige og ulige funktioner fungerer på samme måde som produktet af lige og ulige tal.
Produktet af to lige funktioner er:

$$(f_g g_g(-x) = f_g(-x)g_g(-x) = f_g(x)g_g(x)$$

Så $f_g g_g$ er lige.
Produktet af en lige og en ulige funktion er:

$$f_u g_g(-x) = f_u(-x)g_g(-x) = -f_u(x)g_g(x)$$

Så $f_u g_g$ er ulige.
Produktet af to ulige funktioner er:

$$f_u g_u(-x) = f_u(-x)g_u(-x) = (-f_u(x))(-g_u(x)) = f_u(x)g_u(x)$$

Så $f_u g_u$ er lige.

2) Er $\frac{1}{f_g(x)}$ lige eller ulige?

$$\frac{1}{f_g(-x)} = \frac{1}{f_g(x)}$$

En over ene lige funktion er også lige

3) Hvad med :$\frac{1}{f_u(x)}$?

$$\frac{1}{f_u(-x)} = \frac{1}{-f_u(x)} = \frac{-1}{f_u(x)}$$

En over en ulige funktion er også ulige.

4) Hvad er regnereglen med division?

Opgave 17: •• **Sammensætning af lige og ulige funktioner**
Alle funktioner kan skrives som en unik sum af en lige og en ulige funktion: $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$.

1) Skriv $f(-x)$ ud fra $f_g(x)$ og $f_u(x)$.

$$f(-x) = f_g(-x) + f_u(-x) = f_g(x) - f_u(x)$$

[1] g og u står for gerate og ungerate, de tyske ord for lige og ulige.

2) Skriv $f_g(x)$ og $f_u(x)$ ud fra $f(x)$ og $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f_g(x) &= \frac{1}{2}(f_g(x) + f_u(x) + f_g(x) - f_u(x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ f_u(x) &= \frac{1}{2}(f_g(x) + f_u(x) - f_g(x) + f_u(x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{aligned}$$

3) Hvad er den lige og den ulige komposant af eksponentialfunktionen e^x?

Vi kan her udnytte at vi allerede har den generelle løsning. Den type funktioner vi finder kaldes hyperbolske funktioner.

$$\begin{aligned} (e^x)_g &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \\ (e^x)_u &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh x \end{aligned}$$

Opgave 18: ●●● Integraler af lige og ulige funktioner.

Vi vil her finde nogle meget praktiske regneregler for integraler af lige og ulige funktioner over et symmetrisk interval. Lad $f_g(x)$ være en lige funktion og $f_u(x)$ være en ulige funktion. Antag derudover at $\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x$ og $\int_0^a f_u(x)\,\mathrm{d}x$ er kendte.

1) Vis at $\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x$

Integralet kan spilttes op i to intervaller:

$$\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f_g(x)\,\mathrm{d}x$$

Nu behandles andet integral med substitution, her vælges $u = -x$

$$\int_{-a}^{0} f_g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f_g(-u)\,\mathrm{d}u$$

Nu ombyttes grenserne, hvilket skifter fortegn. Præcis hvad vi kalder integrationsvariablen er ikke relevant, så den kan kaldes x igen.

$$\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f_g(x)\,\mathrm{d}x$$

Så hele integralet er:

$$\int_{-a}^a f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f_g(x)\,\mathrm{d}x$$

Hvilket vi ville vise.

2) Vis at $\int_{-a}^a f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Her er fremgangsmåden præcis den samme.

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f_u(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a f_u(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^0 f_u(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_{-a}^0 f_u(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_a^0 f_u(-u)\,\mathrm{d}u \\
&= (-1)^2\int_0^a f_u(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_{-a}^a f_u(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a f_u(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a f_u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

3) Brug dette til at løse integralet:

$$\int_{-1}^1 x\cos(x)\sin(x) + x^2 - x\exp(x^2)\,\mathrm{d}x$$

Enten ved at bruge regnereglerne for produkter af lige og ulige funktioner, eller ved at finde den lige og ulige komposant er det muligt at vise at $x\cos(x)\sin(x) - x\exp(x^2)$ er ulige og x^2 er lige. Så integralet er:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x\cos(x)\sin(x) + x^2 - x\exp(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{x}{2}\right]_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Exoplaneter

Opgave 1: • Jævn cirkelbevægelse

1) En jævn cirkelbevægelse er en idealiseret bevægelsesform, hvor et legeme bevæger sig i en bane formet som en perfekt cirkel, hvor farten er den samme hele vejen rundt. Hastigheden ændrer sig dog, da bevægelsesretningen ændres.

2) Perioden er defineret som den tid det tager at bevæge sig en omgang, hvilket kan skrives som

$$P = \frac{x}{v}\,,$$

hvor v er farten og x er den i omløbet tilbagte distance. Eftersom den tilbagelagte distance er en cirkel med radius r, så er

$$x = 2\pi r\,,$$

hvorved

$$P = \frac{2\pi r}{v}$$

3) Jordens afstand til Solen er $r_\oplus = 1{,}0\,\text{AU}$ og perioden er nogenlunde 1,0 yr. Dermed bliver Jordens banehastighed under antagelse af jævn cirkelbevægelse

$$v = \frac{2\pi r_\oplus}{P_\oplus} = \frac{2\pi \cdot 1{,}0\,\text{AU}}{1{,}0\,\text{yr}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m}}{3{,}154 \cdot 10^{7}\,\text{s}} = 29{,}8\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$$

Bruger man approksimationen at $1{,}0\,\text{yr} \simeq \pi \cdot 10^7\,\text{s}$ fås

$$v = \frac{2\pi r_\oplus}{P_\oplus} \simeq \frac{2\pi \cdot 1{,}0\,\text{AU}}{\pi \cdot 10^{7}\,\text{s}} = \frac{2\,\text{AU}}{1 \cdot 10^{7}\,\text{s}} = 2 \cdot 10^{-7}\,\text{AU/s} = 29{,}9\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$$

Opgave 2: • **Den Beboelige Zone**
Afstanden isoleres i ligning 3.19 i kompendiet:

$$T_p = T_\star \left(\frac{1-A}{4}\right)^{1/4} \left(\frac{R_\star}{r}\right)^{1/2} \Rightarrow rT_p^2 = T_\star^2 \left(\frac{1-A}{4}\right)^{1/2} R_\star \Rightarrow r = R_\star \left(\frac{T_\star}{T_p}\right)^2 \left(\frac{1-A}{4}\right)^{1/2}$$

1) Nu bestemmes r for temperaturene $T_p = 273{,}15\,\mathrm{K} to 373{,}15\,\mathrm{K}$

a) $T_\star = T_\odot, R_\star = R_\odot \Rightarrow r_{\mathrm{BZ}} = 6{,}9 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} to 12{,}9 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 0{,}46\,\mathrm{AU} to 0{,}86\,\mathrm{AU}$

b) $T_\star = 2T_\odot, R_\star = R_\odot \Rightarrow r_{\mathrm{BZ}} = 2{,}77 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} to 12{,}9 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 1{,}85\,\mathrm{AU} to 3{,}46\,\mathrm{AU}$

c) $T_\star = T_\odot, 5R_\star = R_\odot \Rightarrow r_{\mathrm{BZ}} = 3{,}47 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} to 6{,}47 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} = 2{,}32\,\mathrm{AU} to 4{,}32\,\mathrm{AU}$

2) Afstanden mellem Jorden og Solen er 1 AU, hvilket er udenfor den estimerede beboelige zone. Dette betyder at Jorden ikke opfylder antagelserne som ligning 3.19 bygger på. Dette skyldes at Jorden har en varm jernkerne, som gør at Jorden ikke er i termisk ligevægt.

Opgave 3: •• **Estimat af planetmasse**
Til dette benyttes ligningerne (3.11) og (3.15) i kompendiet. Først indsættes ligning (3.11) i ligning (3.15)

$$\frac{4\pi^2}{G(M_p + M_\star)} = \left(\frac{2\pi r_\star \sin(i)}{v_{||}}\right)^3 \left(P_\star r^3\right)^{-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{4\pi^2}{G(M_p + M_\star)} = \left(\frac{2\pi r_\star \sin(i)}{v_{||}}\right)^3 \left(P_\star r_\star^3 \left(\frac{M_\star + M_p}{M_p}\right)^3\right)^{-1} .$$

Herefter er det "bare" oprydning, hvor det første der gøres er at skrive det hele ud ved at opløse parenteserne

$$\frac{4\pi^2}{G(M_p + M_\star)} = \frac{8\pi^3 r_\star^3 \sin^3(i)}{v_{||}^3} \frac{M_p^3}{P_\star r_\star^3 (M_\star + M_p)^3} .$$

Så forkortes ting ud

$$\frac{1}{G} = \frac{2\pi \sin^3(i)}{v_{||}^3} \frac{M_p^3}{P_\star (M_\star + M_p)^2} ,$$

og slutteligt isoleres $M_p^3 \sin^3 i$ for at opnå resultatet

$$M_p^3 \sin^3(i) = \frac{P_\star v_{||}^3 (M_\star + M_p)^2}{2\pi G} .$$

Opgave 4: •• **Overfladetemperatur på planeter**

1) For at kunne komme frem til udtrykket starter vi med at se på fluxen, altså det lys, som vi modtager. Fluxen er givet ved

$$\begin{aligned} F &= \frac{L_\star}{4\pi D^2} \\ &= \frac{4\pi R_\star^2 \sigma T_\star^4}{4\pi d^2} \\ &= \left(\frac{R_\star}{d}\right)^2 \sigma T_\star^4 \end{aligned}$$

Vi ser nu på den energi som planeten absorberer. Vi antager at vi har en jævn kugle, som energien fordeles jævnt udover. Derudover skal vi have albedoen i spil, i det den fortæller os hvor meget lys, der bliver reflekteret.

$$\begin{aligned} L_{\text{abs}} &= \pi R_p^2 f\,(1-A) \\ &= \pi R_p^2 \left(\frac{R_\star}{D}\right)^2 \sigma T_\star^4\,(1-A) \\ &= \frac{\pi R_p^2 R_\odot^2 \sigma T_\star^4}{d^2}\,(1-A) \end{aligned}$$

2) Termisk ligevægt betyder at temperaturen er konstant i tid. Derfor er mængden af varme, planeten optager fra sine omgivelser, den samme som mængde af varme, den afgiver til omgivelserne.

3) Idet planeten er antaget som værende et sortlegeme er

$$L_{\text{uds}} = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4\,.$$

Planeten er også i termisk ligevægt, hvorfor den udsender lige så meget energi, som den absorberer.

$$\begin{aligned} L_{\text{uds}} &= L_{\text{abs}} \\ \Rightarrow 4\pi R_m^2 \sigma T_m^4 &= \frac{\pi R_m^2 R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{d^2}\,(1-A) \\ \Rightarrow 4T_m^4 &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^2 T_\odot^4\,(1-A) \\ \Rightarrow T_m^4 &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^2 \frac{(1-A)}{4} T_\odot^4 \\ \Rightarrow T_m &= \left(\frac{R_\odot}{d}\right)^{1/2} \left(\frac{(1-A)}{4}\right)^{1/4} T_\odot \end{aligned}$$

4) Vi bruger udtrykket, som vi lige har fundet og bestemmer temperaturen på overfladen.

$$T_p \approx 40\,\mathrm{K}$$

Vi antager at den roterer hurtigt. Det har den betydning, at vi antager at temperaturen er den samme på over det hele, der vil altså ikke være noget "dag og nat". Den teoretiske værdi siger 40 K og temperaturen er blevet vurderet til 65 K. Det tyder derfor på, at vores antagelse om hurtigt rotation muligvis ikke er så god. Hvis den roterer langsomt, vil det betyde at temperaturen ikke er den samme overalt, hvilket kan forklare hvorfor temperaturen er blevet vurderet til 65 K.

Opgave 5: ●●● Atmosfærekrav

For at en planet kan have en stabil atmosfære er den nød til at kunne holde simple molekyler fanget i dens tyngdefelt. Massen af O_2 er $m_{O_2} = 5{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg.

1) Newtons gravitationslov siger at tyngdekraften mellem legemer i afstand r er

$$F_G = G\frac{mM}{r^2}$$

Bruges Newtons anden lov er

$$mg = G\frac{mM}{r^2}$$
$$g = G\frac{mM}{r^2}$$

hvor g er tyngdeaccelerationen.

2) Fra mekanik er de omtalte energier

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$V = mgh$$

hvor h er afstanden fra nulpunktet. Defineres planetens centrum som nulpunktet er $h = R_p$, og sættes de to energi lig hinanden fås

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR_p$$

Isoleres v^2 før tyngdeaccelerationen fra før indsættes, fås

$$v_{\text{ecs}}^2 = \frac{2M_pG}{R_p}$$

3) I ligningen fra kinetisk gasteori isoleres $\overline{v}^2/2$

$$\frac{1}{2}\overline{v}^2 = \frac{3}{2}\frac{k_B T}{m}$$

Kombineres dette med undvigelseshastigheden fås

$$\frac{3}{2}\frac{k_B T}{m} = \frac{M_p G}{R_p}$$
$$\implies \frac{M_p}{R_p} = \frac{3}{2}\frac{k_B T}{mG}$$

4) Udtrykket på venstre side af lighedstegnet er egenskaber ved selve planten, mens udtrykket på højre side er egenskaber ved plantens atmosfære, der udtrykker partiklerne i atmosfærens hastighed. Hvis planeten skal kunne fastholde atmosfæren må den hastighed ikke overskride undvigelseshastigheden, hvorfor uligheden må være

$$\frac{M_p}{R_p} > \frac{3}{2}\frac{k_B T}{m_{O_2} G} \tag{3.1}$$

5) For Jorden er forholdet mellem masse og radius

$$\frac{M_\oplus}{R_\oplus} = \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6371\,\mathrm{m}}$$
$$= 9{,}3737 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$$

Sættes tallene ind i højresiden fås

$$\frac{3}{2}\frac{k_B T}{m_{O_2} G} = \frac{3 \cdot 1{,}380\,65 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} \cdot (273,15 + 16)\mathrm{K}}{2 \cdot 5{,}31 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 6{,}674\,08 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}}$$
$$= 1{,}6886 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$$

Ergo er ligningen opfyldt for Jorden.

Opgave 6: • **Gravitationslinser**

I afsnit 3.2 i kompendiet om gravitationslinsemetode blev det nævnt at begivenheden skal observeres af flere forskellige målinger.

1) Kigges der ud i verdensrummet er der mange ting der kan ses. En lyskurve, som beskrevet i afsnittet, kan også skyldes andre fænomener, skyldes en fejl i målingerne, eller bare et statistisk udsving. For at man kan konkludere noget naturvidenskabeligt, så er man derfor nød til at observere det samme fænomen på en sådan måde, sådan så der kun er en realistisk konklusion.

2) Gravitationslinsemetoden kræver en meget specifik situation, netop at en stjerne med tilhørende planten bevæger sig ind foran en anden stjerne alt samme i et plan, hvori Jorden også er. For at "lensingen"kan ske er de to stjerne separeret af en anseelig afstand, hvorfor de ikke nødvendigvis påvirker hinanden gravitationelt signifikant. Det er derfor meget muligt at begivenheden kun forekommer én gang, og hvis den ene stjerne er i bane om den anden, så er perioden så kæmpe stor at det er urealistisk at vente lang nok tid til at se det igen.

3) Hvis man kun har én mulighed for at observere begivenheden, men stadig vil kunne afvise at det er er andet end en planet, så er man for det første nød til at have så mange målinger med forskelligt udstyr, at man kan afvise at der er tale om en fejl i målingerne eller en statistisk afvigelse fra normen. Derudover er man også nød til på en eller anden måde at kunne verificere at det ikke kan skyldes andre fænomener. Den bedste måde at gøre dette på er at observere systemet i lang tid før og efter, med flere forskellige instrumenter, så man ved hvordan området på stjernehimlen normalt ser ud.

Opgave 7: •• Bose-Einstein kondensat og laserkøling

1) $E = \frac{hc}{\lambda}$ hvor h og c er konstanter, hvorfor energien bliver større, hvis bølgelængden bliver kortere

2) Ingenting (ideelt set), da atomets energiniveauer er kvantiseret, hvorfor der ikke kan ske noget, hvis ikke fotonens energi er lige præcis nok til at to at flytte elektronen fra ét energiniveau til et andet.

3) For at holde styr på atomerne kaldes den der bevæger sig mod laseren (1), og den der bevæger sig væk fra (2). Kaldes retningen af atom (1) for den positive retning, gælder følgende:
(1) Laseren bevæger sig mod atomet, og altså i negativ retning.
(2) Laseren bevæger sig væk fra atomet, og altså i positiv retning.

4) Der kigges nu på samme foton fra de to referencesystemer.
(1) Fotonen er udsendt fra en kilde, der bevæger sig mod atomet, hvorfor fotonen er blåforskydt.
(2) Fotonen er udsendt fra en kilde, der bevæger sig væk fra atomet, hvorfor fotonen er rødforskydt.

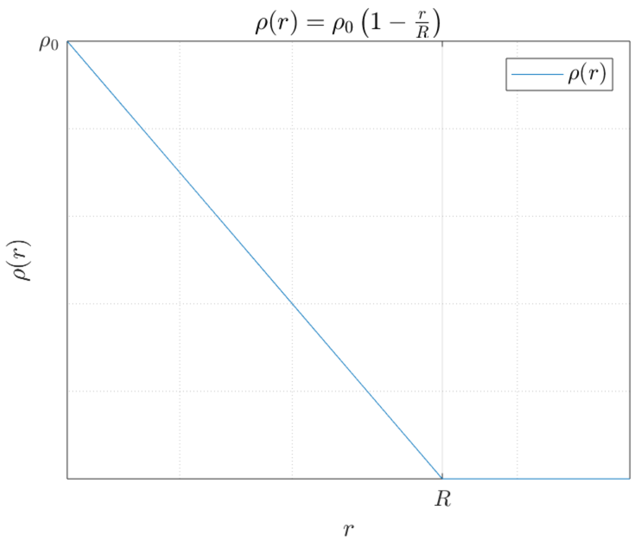
5) De to atomer ser ikke fotonen, som havende samme bølgelængde, og dermed ikke samme energi. Da atomerne er ens, har de samme energiniveauer, men da atomerne oplever fotonen forskelligt, så passer fotonen ikke med en overgang i begge atomer.

6) Atomet skal gerne holdes samlet i midten af den fælde, hvori de holdes. De atomer, der bevæger sig væk fra fælden mod laseren ser laseren som blåforskudt. Vælges laserens til at have en bølgelængde, der er lidt længere end den, der svarer til overgangen hvis atomet står stille. Det betyder at kun atomer på vej ud af fælden oplever lyset, som værende Dopplerforskudt på den måde, der gør det muligt for atomet at interagere med lyset. Derved kan man sikre sig at man kun påvirker de rigtige atomer, og derved køler gassen.

7) Dette kan opgavens forfatter ikke besvare. Ifølge JR er svaret entydigt "ja"!

Opgave 8: •• Masse af en planet

1) Se figur 3.1.



Figur 3.1: Tegning af funktionen $\rho(r)$ for $r \geq 0$.

2) Funktionen indsættes i integralet, som derefter løses

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 \mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2 - \frac{r^3}{R}\mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{3}r^3 - \frac{r^4}{4R}\right]_0^R = 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{4}R^3\right] = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3$$

Opgave 9: ●●● Tyngdeaccelerationen indeni en planet

1) Densitet har enheden kg m^{-3}, mens r har enheden m, hvorfor

$$[A] = [\rho r^2] = \mathrm{kg\,m^{-1}}\ .$$

2) For at forstå sådanne funktioner kan det være værd at kigge på hvilket dele af funktionen, der er størst i hvilke områder:
– $1/0^2 \to \infty$, mens $\exp(-R/c) < \infty$, hvorfor $1/r^2$ dominerer for små r. Ergo opfører $\rho(r)$ sig som $1/r^2$ for små værdier af r.
– Eksponentialfunktionen er aftagende idet eksponenten er negativt på hele definitionsmængden, hvorfor den kun bliver dominerende, hvis den aftager tilpas meget langsommere end $1/r^2$. Jo mindre c bliver, desto større bliver $(r-R)/c$, hvorfor eksponentialfunktionen dominerer mest for små værdier af c. Eksponenten går mod 0, for $r \to R$ uanset hvad c er, hvorfor betydningen af c må blive mindre jo større r bliver.
– Planetens radius er R, hvorfor $\rho(r) = 0$ for $r > R$, hvilket ses ved at funktionen brat går i nul og bliver der.
– Af figurens ses det at $\rho(r) \xrightarrow{r\to 0} \infty$ uanset hvad værdien af c er.

– Det ses også at $\rho(r)$ først begynder at afvige drastisk fra $1/r^2$, når $c < 0,5$. For alle værdier af c bliver grafen godt nok næsten flad eller voksende når r nærmer sig R, men det sker meget sent for de største værdier af c.
– For de mindste værdier af c bliver eksponenten så stor at den meget hurtigt begynder at dominere, hvorfor $1/r^2$ delen kun ses for meget små r.

– Alt i alt er størstedelen af planetens masse samlet tæt på centrum, og interessant nok er der ikke ret meget masse omkring $r = R/2$, hvis c er tilpas lille.
– Hvorvidt denne funktion overhoved kan modellere massen af en planet skal være usagt, men som teoretisk eksempel er den ganske interessant.

3) Det er bare integralets grænse, der skal ændres, og formelt set bør man også ændre integrationsvariablen så

$$M(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi(r')^2 \mathrm{d}r' \ .$$

4) Nu er det bare at kombinere formlerne og løse integralet.

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{G}{r^2}\int_0^r \rho(r')4\pi(r')^2\mathrm{d}r' = \frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r \frac{A}{(r')^2}\exp\left(\frac{r'-R}{c}\right)4\pi(r')^2\mathrm{d}r' \\ &= \frac{4\pi AG}{r^2}\int_0^r \exp\left(\frac{r'-R}{c}\right)\mathrm{d}r' \end{aligned}$$

For at løse dette integral benyttes en substitution

$$u = \frac{r'-R}{c} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r'} = -\frac{1}{c} \Rightarrow \mathrm{d}r' = c\mathrm{d}u \ .$$

Yderligere skal grænserne ændres

$$u(0) = -\frac{R}{c} \quad , \quad u(r) = \frac{r-R}{c} \ ,$$

hvorved det substituerede integral bliver

$$g(r) = \frac{4\pi AG}{r^2}\int_{-R/c}^{(r-R)/c} \exp(u)\, c\mathrm{d}u = \frac{4\pi cAG}{r^2}\Big[\exp(u)\Big]_{-R/c}^{(r-R)/c} = \frac{4\pi cAG}{r^2}\left[\exp\left(\frac{r-R}{c}\right) - \exp\left(-\frac{R}{c}\right)\right] \ .$$

Kapitel 4

Planetbevægelse

Planetbaner og excentricitet

Opgave 1: • **Excentricitet og planetbaner**

1) Når $\varepsilon = 0$:

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} = \frac{c}{1} = c\ .$$

Afstanden er altså ens til alle vinkler. Af denne grund må den geometriske form være en cirkel, da der altid er samme afstand fra centrum til cirklen.

2) Når $\varepsilon = 1$:

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} = \frac{c}{1 + \cos(\varphi)}\ .$$

Idet φ går mod π, da går afstanden mellem objekterne mod ∞:

$$r(\pi) = \frac{c}{1 + \cos(\pi)} = \frac{c}{1 - 1} = \frac{c}{0} = \infty\ .$$

Da banen er endelig i alle andre punkter end $\varphi = \pi$, da vil der være tale om en parabelbane.

3) For $\varepsilon > 1$ vil $r(\varphi) = \infty$, men dette vil ske til en vinkel $\varphi < \pi$ til forskel fra tilfælde med $\varepsilon = 1$. Denne vinkel vil være givet ved

$$-1 = \varepsilon\cos(\varphi) \Rightarrow \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\ .$$

Idet funktionen for afstanden mellem de to objekter vil stige hurtigere, når $\varepsilon > 1$ end når $\varepsilon = 1$, da vil der være tale om en hyperbel i tilfældet $\varepsilon > 1$.

Opgave 2: • **Halleys komet**

1) Fra kompendiets ligning (**??**):

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} \,.$$

Idet afstanden mellem Solen og kometen er mindst, så befinder kometen sig i periapsis, hvor $\varphi = 0$:

$$r_{min} = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(0)} = \frac{c}{1 + \varepsilon} \,.$$

Idet afstanden mellem Solen og kometen er størst, så befinder kometen sig i apoapsis, hvor $\varphi = \pi$:

$$r_{maks} = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\pi)} = \frac{c}{1 - \varepsilon} \,.$$

Isoleres i begge disse ligninger konstanten c fås:

$$r_{min} = \frac{c}{1+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad c = r_{min}(1+\varepsilon)\,,$$
$$r_{maks} = \frac{c}{1-\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad c = r_{maks}(1-\varepsilon)\,.$$

Da c er samme konstant i de to ligninger sættes disse to lig hinanden:

$$r_{maks}(1-\varepsilon) = r_{min}(1+\varepsilon)$$
$$\Rightarrow r_{maks} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} r_{min} \,.$$

2)

$$r_{maks} = \frac{1 + 0,967}{1 - 0,967} \cdot 0,59 \text{ AU} = \frac{1,967}{0,033} \cdot 0,59 \text{ AU} = 35 \text{ AU} \,.$$

Opgave 3: • **Excentricitet**

1) I opgave 2 blev det fundet at

$$r_{min}(1+\varepsilon) = r_{maks}(1-\varepsilon)\,.$$

Excentriciteten kan isoleres på følgende måde:

$$r_{min} + r_{min}\varepsilon = r_{maks} - r_{maks}\varepsilon$$
$$\Rightarrow r_{maks} - r_{min} = r_{maks}\varepsilon + r_{min}\varepsilon = (r_{maks} + r_{min})\varepsilon$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{r_{maks} - r_{min}}{r_{maks} + r_{min}} \,.$$

2) Den mindste værdi, som ε kan antage, er 0, hvilket sker når $r_{min} = rmaks$.
Den største værdi, som ε kan antage, er matematisk set 1, hvilket sker når $r_{min} = 0$, men dette tilfælde giver ikke mening fysisk set, da objektet så i periapsis vil befinde sig i centrum af det objekt, som det kredser om. En anden grund til, at den største værdi af epsilon ikke kan være 1 er, at der gøres brug af r_{maks}, og denne værdi findes kun idet, at der er tale om en bunden bane, da objektet i en ubunden bane aldrig vil nå en maksimal afstand.
Idet $0 \leq \varepsilon < 1$ vil der være tale om ellipsebaner.

Tolegemeproblemet

Opgave 4: • **Ækvivalens i tolegemeproblemet**

$$R = \frac{m_\odot r + m_\oplus \cdot 0}{m_\odot + m_\oplus} = r\frac{m_\odot}{M}$$

Hvis $r = c/(1+\varepsilon\cos(\varphi))$, så er $R = A/(1+\varepsilon\cos(\varphi))$, hvor $A = cm_\odot/M$. Dette betyder, at massemidtpunktet vil lave en ellipsebevægelse med samme excentricitet som Solen, men med en reduceret halv storakse (reduceret med $m_\odot/M$). Her er $\odot$ og $\oplus$ astrofysisk notation for henholdsvis Solen og Jorden.

Opgave 5: • **Ækvivalens i tolegemeproblemet II**
Vi har

$$R = \frac{m_\odot \cdot r_\odot + m_\oplus \cdot r_\oplus}{M} = 0$$

og

$$r = r_\oplus - r_\odot = \frac{c}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

(de to er antiparallelle). Så

$$m_\odot \cdot r_\odot = -m_\oplus \cdot r_\oplus$$

eller

$$r_\odot = -r_\oplus \frac{m_\oplus}{m_\odot}$$

samt

$$r_\oplus = r + r_\odot$$

$$\begin{aligned}
r_\odot &= -\frac{m_\oplus}{m_\odot}(r + r_\odot) \\
r_\odot\left(1 + \frac{m_\oplus}{m_\odot}\right) &= -\frac{m_\oplus}{m_\odot} r \\
r_\odot &= -\frac{m_\oplus}{m_\odot + m_\oplus} r \\
&= -\frac{m_\oplus}{M} r
\end{aligned}$$

Tilsvarende for Jorden:

$$\begin{aligned}
r_\oplus &= -\frac{m_\odot}{m_\oplus} r_\odot \\
r_\odot &= r_\oplus - r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_\oplus &= -\frac{m_\odot}{m_\oplus}(r_\oplus - r) \\
r_\oplus\left(1 + \frac{m_\odot}{m_\oplus}\right) &= \frac{m_\odot}{m_\oplus} r \\
r_\oplus &= \frac{m_\odot}{M} r
\end{aligned}$$

Bevægelsesligningerne

Opgave 6: •• **Keplers 3. lov**

1) Vi ved at

$$\begin{aligned}
P &= \frac{A}{\mathrm{d}A/\mathrm{d}t} = \frac{\pi a b}{\left(\frac{\ell}{2\mu}\right)} \\
\Rightarrow P^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu^2}{\ell^2} \,.
\end{aligned}$$

Fra kompendiets ligning (**??**) vides det at

$$\begin{aligned}
a &= \frac{c}{1 - \varepsilon^2} \\
b &= \frac{c}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \,,
\end{aligned}$$

og udtrykkes b^2 ved a^2 bliver det

$$b^2 = a^2 \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{1-\varepsilon^2} = a^2(1-\varepsilon^2)\,,$$

hvilket kan indsættes i udtrykket for P^2:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^2 a^2 (1-\varepsilon^2)\mu^2}{\ell^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu^2}{\ell^2}\,.$$

Hernæst vides det fra kompendiet, at

$$c = \frac{\ell^2}{Gm_1 m_2 \mu}$$
$$\Rightarrow \ell^2 = Gm_1 m_2 \mu c\,,$$

hvorfor P^2 bliver

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu^2}{Gm_1 m_2 \mu c} = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu}{Gm_1 m_2 c}\,.$$

Hernæst indsættes et udtryk for c fået fra ligningen for a,

$$c = a(1-\varepsilon^2)\,,$$

i udtrykket for P^2

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\mu}{Gm_1 m_2 a(1-\varepsilon^2)} = \frac{4\pi^2 a^3 \mu}{Gm_1 m_2}\,.$$

Sidst indsættes udtrykket for den reducerede masse,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,,$$

i P^2:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}{Gm_1 m_2 a(1-\varepsilon^2)} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3\,.$$

Opgave 7: ••• Energibevarelse og excentricitet

1) Hastigheden skifter fortegn, når kometen passerer r_{min}. Derved må $v(r_{min}) = 0$. Af dette bliver energien i r_{min}:

$$E(r_{min}) = V_{eff}(r_{min}) = \frac{\ell^2}{2\mu r_{min}^2} - \frac{\gamma}{r_{min}} = \frac{1}{2r_{min}}\left(\frac{\ell^2}{\mu r_{min}} - 2\gamma\right)\,.$$

2) Fra kompendiets ligning (5.62) har vi, at

$$r = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} ,$$

hvilket for r_{min} bliver

$$r_{min} = \frac{c}{1 + \varepsilon\cos(0)} = \frac{c}{1 + \varepsilon} .$$

Ved at indsætte den givne værdi for c fås

$$r_{min} = \frac{\ell^2}{\gamma\mu(1 + \varepsilon)} .$$

3) Her indsættes resultatet fra spørgsmål 2 i resultatet fra spørgsmål 1:

$$E = \frac{\gamma\mu(1+\varepsilon)}{2\ell^2}\left(\gamma(1+\varepsilon) - 2\gamma\right) = \frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2}(\varepsilon + 1)(\varepsilon - 1) = (\varepsilon^2 - 1)\frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2} .$$

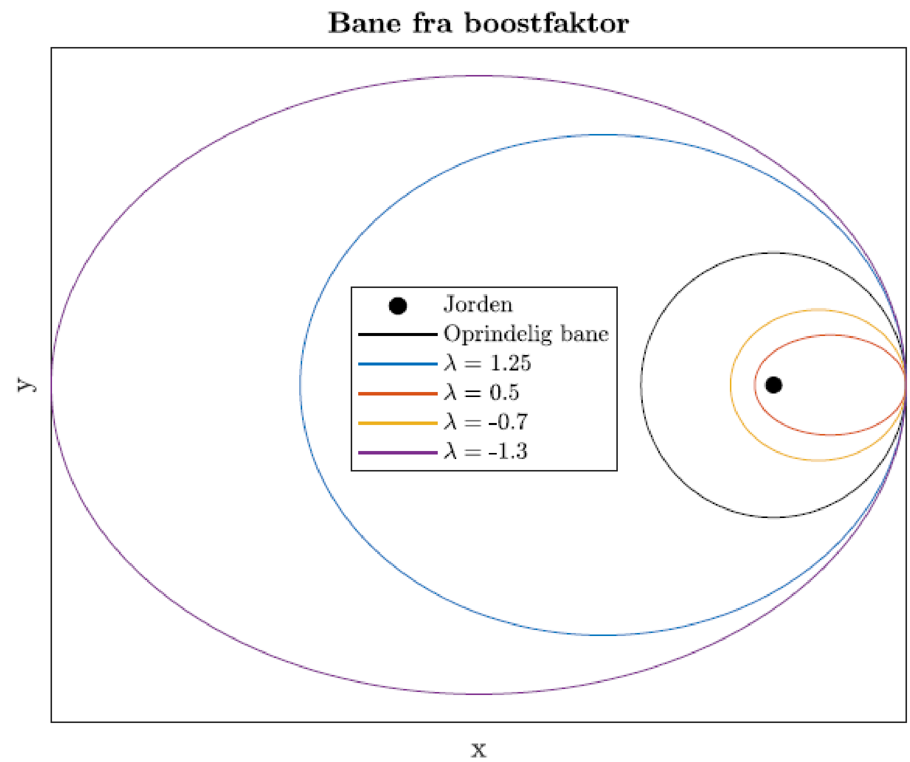
Da der er energibevarelse må denne energi være den samme, som den til en vilkårligt andet tidspunkt eller sted i banen.

4) Hvis energien skal være negativ kræves, at $\varepsilon^2 < 1$, altså $0 \leq \varepsilon < 1$. Dette er excentriciteten for en ellipsebane (eller cirkelbane hvis $\varepsilon = 0$), hvilket stemmer fint overens med at kometen er i en bunden bane, når den potentielle energi er større end den kinetiske.
Hvis energien er 0 kræves, at $\varepsilon^2 = 1$, altså $\varepsilon = 1$. Dette er svarende en parabelbane, hvor kometen netop undslipper, men dette sker så langsomt som muligt, da den kinetiske energi netop opvejer den potentielle energi.
Hvis energien er positiv, da må $\varepsilon^2 > 1$, altså $\varepsilon > 1$, hvorfor der må være tale om en hyperbelbane.

Baneskift

Opgave 8: • Boostfaktor
Se figur 4.1. Her er forskellige værdier af de positive og negative boostfaktorer valgt, da fortegnet for boostfaktoren blot vender bevægelsesretningen.

Opgave 9: •• Boostkraft



Figur 4.1: Baner fundet fra forskellige boostfaktorer.

1)

$$\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}} \xlongequal{\vec{\boldsymbol{a}}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t}} m\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} \xlongequal{\vec{\boldsymbol{p}}=m\vec{\boldsymbol{a}}} \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{p}}}{\Delta t} \,.$$

2) Først finds impulsmomentet i P før og efter boostet, hhv. ℓ_1 og ℓ_2:

$$\ell_1 = mv_1r_1 \,,$$
$$\ell_2 = mv_2r_2 \xlongequal{\lambda=\frac{v_2}{v_1}} m\lambda v_1r_2 \,,$$

hvor m er satellittens masse, som antages ikke at ændre sig under boostet, v er hastigheden og r er afstanden mellem Jorden og satellitten. Forskellen i impulsmoment findes:

$$\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1 = m\lambda v_1r_2 - mv_1r_1 \xlongequal{r_1(P)=r_2(P)} mv_1r_1(\lambda - 1) \,,$$

Da impulsmomentet findes som

$$\ell = rp \,,$$

så bliver ovenstående

$$\Delta\ell = r_1 \Delta p \,,$$

hvor

$$\Delta p = m v_1 (\lambda - 1) \,.$$

Boostkraften bliver dermed

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m v_1}{\Delta t} (\lambda - 1) \,.$$

Opgave 10: •• **Hohmannbane**

1) Hohmannbanen har apsis i de to baner med radius hhv. R_1 og $R_3 = 2R_1$. Da $R_3 > R_1$, må Hohmannbanen havde apoapsis i P' og periapsis i P.

2) Da bane 1 er cirkulær, så vil excentriciteten af denne bane være $\varepsilon_1 = 0$. Ved brug af kompendiets ligning (5.63) kan det ses, at $R_1 = c_1$:

$$R_1 = \frac{c_1}{1 + \varepsilon_1 \cos(\varphi - \delta)} \overset{\varepsilon_1 = 0}{=\!=\!=} \frac{c_1}{1} = c_1 \,.$$

Excentriciteten af Hohmannbanen kan nu findes ved kompendiets ligning (5.69):

$$\varepsilon_2 = \lambda^2 \varepsilon_1 + (\lambda^2 - 1) \overset{\varepsilon_1 = 0}{=\!=\!=} \lambda^2 - 1 \,.$$

Idet satelitten er i apoapsis i Hohmannbanen (P') skal $r_2(P') = R_3$. Der gøres her igen brug af kompendiets ligning (5.63):

$$R_3 = r_2(P') = \frac{c_2}{1 + \varepsilon_2 \cos(\pi)} = \frac{c_2}{1 - \varepsilon_2} \overset{\varepsilon_2 = \lambda^2 - 1}{=\!=\!=\!=} \frac{c_2}{1 - (\lambda^2 - 1)} = \frac{c_2}{2 - \lambda^2} \,.$$

c_2 kan ved kompendiets ligning (5.68):

$$c_2 = \lambda^2 c_1 \overset{c_1 = R_1}{=\!=\!=} \lambda^2 R_1 \,.$$

Indsættes dette i udtrykket for R_3 fra tidligere fås:

$$\begin{aligned}
R_3 &= \frac{\lambda^2 R_1}{2 - \lambda^2} \\
\Rightarrow \frac{R_1}{R_3} &= \frac{2 - \lambda^2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - 1 \\
\Rightarrow \frac{2}{\lambda^2} &= \frac{R_1}{R_3} + 1 = \frac{R_1 + R_3}{R_3} \\
\Rightarrow \lambda^2 &= \frac{2R_3}{R_1 + R_3} \\
\Rightarrow \lambda &= \sqrt{\frac{2R_3}{R_1 + R_3}} \overset{R_3 = 2R_1}{=\!=\!=\!=} \sqrt{\frac{2 \cdot 2R_1}{R_1 + 2R_1}} = \sqrt{\frac{4R_1}{3R_1}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \,.
\end{aligned}$$

Altså vil boostfaktoren i punktet P være $\lambda = \sqrt{4/3}$.

3) Da bane 1 er cirkulær, så vil excentriciteten af denne bane være $\varepsilon_3 = 0$. Ved brug af kompendiets ligning (5.63) kan det ses, at $R_3 = c_3$:

$$R_3 = \frac{c_3}{1 + \varepsilon_3 \cos(\varphi - \delta)} \stackrel{\varepsilon_3=0}{=\!=\!=} \frac{c_3}{1} = c_3 \ .$$

c_3 kan nu beskrives ved kompendiets ligning (5.68):

$$c_3 = \lambda'^2 c_2 \stackrel{c_2=\lambda^2 c_1}{=\!=\!=\!=} \lambda'^2 \lambda^2 c_1 \stackrel{c_1=R_1}{=\!=\!=} \lambda'^2 \lambda^2 R_1 \ .$$

Heri isoleres nu for at finde λ':

$$\lambda'^2 = \frac{c_3}{\lambda^2 R_1} \stackrel{c_3=R_3}{=\!=\!=} \frac{R_3}{\lambda^2 R_1} \stackrel{\lambda=\sqrt{\frac{2R_3}{R_1+R_3}}}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{R_3}{\frac{2R_3}{R_1+R_3} R_1} = \frac{R_3}{\left(\frac{2R_1 R_3}{R_1+R_3}\right)} = R_3 \frac{R_1 + R_3}{2R_1 R_3} = \frac{R_1 + R_3}{2R_1}$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{2R_1}} \stackrel{R_3=2R_1}{=\!=\!=\!=} \sqrt{\frac{R_1 + 2R_1}{2R_1}} = \sqrt{\frac{3R_1}{2R_1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ .$$

Altså vil boostfaktoren i punktet P' være $\lambda' = \sqrt{3/2}$.

4) Da der er impulsmomentbevarelse, da vil følgende gøre sig gældende for Hohmannbanen:

$$m v_2(P) r_2(P) = m v_2(P') r_2(P') \,,$$

hvor m er satellittens masse, som antages konstant under hele baneskiftet, hvorfor denne går ud. Herudover vides det, at $r_2(P) = R_1$ og $r_2(P') = R_3$, hvorfor ligningen bliver

$$v_2(P) R_1 = v_2(P') R_3 \ .$$

Af formlen for boostfaktoren, kompendiets ligning (5.66), fås

$$\begin{array}{ccc} \lambda = \dfrac{v_2(P)}{v_1(P)} & \qquad & \lambda' = \dfrac{v_3(P')}{v_2(P')} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ v_2(P) = \lambda v_1 & & v_2(P') = \dfrac{v_3}{\lambda'} \end{array}$$

hvilket indsættes i ligningen ovenfor:

$$\lambda v_1 R_1 = \frac{v_3}{\lambda'} R_3 \,,$$

og v_3 isoleres

$$v_3 = \frac{\lambda' \lambda v_1 R_1}{R_3} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{v_1 R_1}{R_3} = \sqrt{\frac{12}{6}} \frac{v_1 R_1}{R_3} \stackrel{R_3=2R_1}{=\!=\!=\!=} \sqrt{2} \frac{v_1 R_1}{2R_1} \stackrel{\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \ .$$

Altså er hastigheden af satellitten i den nye bane udtrykt ved hastigheden i begyndelsesbanen $v_3 = v_1/\sqrt{2}$.

Opgave 11: •• **Hohmannbane II**

Fra opgave 10 blev det fundet, at boostfaktoren for et skift mellem fra en startbane til en Hohmannbane er givet ved

$$\lambda = \sqrt{\frac{2R_{\text{efter}}}{R_{fr} + R_{\text{efter}}}}, \tag{4.1}$$

og boostfaktoren for et skift mellem Hohmannbanen og slutbanen er givet ved

$$\lambda' = \sqrt{\frac{R_{\text{før}} + R_{\text{efter}}}{2R_{\text{før}}}}, \tag{4.2}$$

hvor $R_{\text{før}}$ er radius af den første bane, altså banen inden skiftet til Hohmannbanen, og R_{efter} er radius af den sidste bane, altså banen der kommer af skiftet fra Hohmannbanen.

1) Der er tale om et skift fra en cirkulær bane (A) til en Hohmannbane (1), hvorfor ligning (4.1) bruges. Her er $R_{\text{før}} = R_A$ og $R_{\text{efter}} = R_C = (9/2)R_A$:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{9}{2}R_A}{R_A + \frac{9}{2}R_A}} = \sqrt{\frac{9R_A}{\frac{11}{2}R_A}} = \sqrt{\frac{18R_A}{11R_A}} = \sqrt{\frac{18}{11}}\,.$$

2) Der er tale om et skift fra en Hohmannbane (1) til en cirkulær bane (C), hvorfor ligning (4.2) bruges. Her er $R_{\text{før}} = R_A$ og $R_{\text{efter}} = R_C = (9/2)R_A$:

$$\lambda_1' = \sqrt{\frac{R_A + \frac{9}{2}R_A}{2R_A}} = \sqrt{\frac{\frac{11}{2}R_A}{2R_A}} = \sqrt{\frac{11}{4}\frac{R_A}{R_A}} = \sqrt{\frac{11}{4}}\,.$$

3) Der er tale om et skift fra en cirkulær bane (C) til en Hohmannbane (2), hvorfor ligning (4.1) bruges. Her er $R_{\text{før}} = R_C = (3/2)R_B$ og $R_{\text{efter}} = R_B$:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{2R_B}{\frac{3}{2}R_B + R_B}} = \sqrt{\frac{2R_B}{\frac{5}{2}R_B}} = \sqrt{\frac{4R_B}{5R_B}} = \sqrt{\frac{4}{5}}\,.$$

4) Der er tale om et skift fra en Hohmannbane (2) til en cirkulær bane (B), hvorfor ligning (4.2) bruges. Her er $R_{\text{før}} = R_C = (3/2)R_B$ og $R_{\text{efter}} = R_B$:

$$\lambda_2' = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}R_B + R_B}{2 \cdot \frac{3}{2}R_B}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{2}R_B}{3R_B}} = \sqrt{\frac{5}{6}\frac{R_B}{R_B}} = \sqrt{\frac{5}{6}}\,.$$

5) Boostfaktorerne λ_1 og λ_2 er på samme form, formen fra ligning (4.1), mens boostfaktorerne λ_1' og λ_2' er på samme form, formen fra ligning (4.2).

Kapitel 5

Matematik

Differentialregning

Opgave 1: • **Afledte og dobbeltafledte**

1) $f(x) = x^3$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 6x$$

2) $f(x) = x^2 + 4x$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x + 4, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 2$$

3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^{-1} + x^{-2}$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -x^{-2} - 2x^{-3}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 2x^{-3} + 6x^{-4}$$

4) $f(x) = \cos(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\sin(x), \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\cos(x)$$

5) $f(x) = \ln(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -x^{-2}$$

Opgave 2: • **Ubestemte integraler**

1) $f(x) = x^3$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$$

2) $f(x) = x^2 + 4x$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C$$

3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^{-1} + x^{-2}$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \ln(x) - x^{-1} + C$$

4) $f(x) = \cos(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

5) $f(x) = \ln(x)$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

Opgave 3: • **Sammensatte funktioner**

$g(x)$ og $f(g)$ findes. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ findes vha. kædereglen: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}$.

1) $f(x) = \sin(4x)$:

$$g(x) = 4x, \quad f(g) = \sin(g)$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 4\cos(4x)$$

2) $f(x) = \sqrt{2x}$:

$$g(x) = 2x, \quad f(g) = \sqrt{g}$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2\frac{1}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

3) $f(x) = \sqrt{4x+5}$

$$g(x) = 4x+5, \quad f(g) = \sqrt{g}$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 4\frac{1}{2\sqrt{4x+5}} = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$$

4) $f(x) = \sin(e^x)$

$$g(x) = e^x, \quad f(g) = \sin(g)$$
$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = e^x\cos(e^x)$$

Opgave 4: • **Integration ved substitution**

Udregn de følgende integraler vha. integration ved substitution:

1) $\int e^{-4x}\mathrm{d}x$

$$\int e^{-4x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C$$

2) $\int \sqrt{3x-2}\mathrm{d}x$

$$\int \sqrt{3x-2}\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\cdot(3x-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

3) $\int xe^{-3x^2}\mathrm{d}x$

$$\int xe^{-3x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$$

4) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-5)$$

Opgave 5: • ***f* som funktion af *g***

Udtryk $\mathrm{d}fx$ vha. den ukendte funktion $g(x)$ og dens differentierede $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ for følgende funktioner:

1) $f(x) = x^2 g(x)$. Produktreglen anvendes:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} \cdot g(x) + x^2 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = 2xg(x) + x^2 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

2) $f(x) = (g(x))^2$. Produktreglen anvendes:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} g(x) + g(x) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = 2g(x) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

3) $f(x) = g(x^2)$. Kædereglen anvendes:

$$\mathrm{d}fx = 2x\mathrm{d}gx^2$$

Opgave 6: •• Partiel integration

Udregn de følgende integrale vha. partiel integration og substitution:

1) $\int 4x\cos(2-3x)\mathrm{d}x$

$$\int 4x\cos(2-3x)\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\cos(2-3x) - \frac{4}{3}x\sin(2-3x) + C$$

2) $\int (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\mathrm{d}x$

$$\int (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\mathrm{d}x = (15x-39)e^{\frac{1}{3}x} + C$$

3) $\int (3x+x^2)\sin(2x)\mathrm{d}x$

$$\int (3x+x^2)\sin(2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(3x+x^2)\cos(2x) + \frac{1}{4}\Big[(3+2x)\sin(2x) + \cos(2x)\Big] + C$$

Opgave 7: • Hastighed og postion

1) Da grafen simpelt viser v som funktion af tiden kan man bare aflæse på figuren. for (a):

Figur 5.1: Hastighed og position som funktion af tiden.

- $t = 0 \rightarrow 1,5$: sætter farten op
- $t = 1,5 \rightarrow 4$: sætter farten ned

for (b):

- $t = 0 \rightarrow 1$: sætter farten ned
- $t = 1 \rightarrow 2$: sætter farten op
- $t = 2 \rightarrow 4$: sætter farten ned

.

2) Her ses i stedet positionen som funktion af tiden. For at svare på, hvordan hastigheden opfører sig, så skal vi derfor kigge på *hældningen* af grafen. for (c):

- $t = 0 \rightarrow 1$: positiv hældning $\rightarrow$ hastigheden øges
- $t = 1 \rightarrow 3$: negativ hældning $\rightarrow$ hastigheden sænkes
- $t = 3 \rightarrow 4$: positiv hældning $\rightarrow$ hastigheden øges

for (d):

- $t = 0 \rightarrow 2$: negativ hældning $\rightarrow$ hastigheden sænkes
- $t = 2 \rightarrow 3$: negativ hældning $\rightarrow$ hastigheden sænkes - og hældningen er større, så der bremses hårdere.
- $t = 3 \rightarrow 4$: positiv hældning $\rightarrow$ hastigheden øges

.

Opgave 8: •• Harmonisk bevægelse

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

hvor A, ω og φ er konstanter.

1) For at finde hastigheden ($\dot{x}$), så ses det at udtrykket er en sammensat funktion ($g = \omega t + \varphi$, $f = A\cos g$). Bruges kædereglen får man:

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

2) Hvis det antages at alle konstanter er > 0, så er $\dot{x} = 0$, når $\sin(\omega t + \varphi) = 0$. Det er opfyldt for

$\omega t + \varphi = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Fysisk set er $v = 0$ i yderpunkterne af svingningen, som forekommer periodisk.

Opgave 9: ●● Cepheide-stjernen Delta Cephei

$$B(t) = 4,0 + 0,35 \sin\left(\frac{2\pi t}{5,4}\right).$$

1) Raten er $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \dot{B}$. Funktionen er en sammensat funktion ($u = \frac{2\pi t}{5,4}$, $g = 0,4 + 0,35 \sin u$).

$$\dot{B} = 0,35 \cdot \frac{2\pi}{5,4} \cos\left(\frac{2\pi t}{5,4}\right)$$

2) For at finde ændringen i lysstyrke udregnes forskellen:

$$\begin{aligned} &B(t = 2 \text{ dage}) - B(t = 0 \text{ dage}) \\ &\qquad = 4,0 + 0,35 \sin\left(\frac{2\pi}{5,4} \cdot 2\right) - 4,0 - 0,35 \sin\left(\frac{2\pi}{5,4} \cdot 0\right) \\ &\qquad = 0,25 \end{aligned}$$

Husk at regne i radianer og ikke i grader.

Opgave 10: ●● Udvidelse af ballon

1) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ er ændring af volumen afhængig af radius, mens $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ er ændring af volumen afhængig af tiden.
2) Volumenet af en sfærisk ballon er $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$. Det er en sammensat funktion med $u = r(t)$ og $g = \frac{4}{3}\pi u^3$. Det giver:

$$\dot{V} = \frac{4}{3} 2\pi \cdot 3r^2(t)\dot{r}$$

Opgave 11: ●●● Approksimation af funktion

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, \mathrm{d}fx|_{x=a} + \frac{1}{2}(x-a)^2 \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=a} + \frac{1}{3!}(x-a)^3 \left.\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=a} + \ldots$$

1) Første led er en konstant, mens andet led afhænger linært af x, og tredje led kvadratisk af x osv. Forfaktoren bliver mindre og mindre for hvert led, så ledene bliver mindre og mindre.

2) For $x \approx 0$, er $\sin(x)$ med de første to led:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin(0) + (x-0)\left.\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \\
&= 0 + x\cos(0) \\
&= x
\end{aligned}$$

Idet $\sin(0) = 0$ og $\cos(0) = 1$. For $x \approx 0$, er $\cos x$ med de første to led:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos(0) + (x-0)\left.\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \\
&= 1 - x\sin(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Hvis man medtager det 3. led, så bliver $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x + \frac{1}{2}(x-0)^2\left.\frac{\mathrm{d}^2\sin(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} \\
&= x - \frac{x^2}{2}\sin(0) \\
&= x
\end{aligned}$$

Hvis man medtager det 3. led, så bliver $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-0)^2\left.\frac{\mathrm{d}^2\cos(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2}\cos(0) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

3) For $x \approx 1$, er $\ln(x)$ for de tre første to led:

$$\begin{aligned}
\ln x &= \ln(1) + (x-1)\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} + \frac{1}{2}(x-1)^2\left.\frac{\mathrm{d}^2\ln(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1} \\
&= 0 + (x-1)\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\left(x^2 + 1 - 2x\right)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}\right|_{x=1} \\
&= x - 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + 1 - 2x\right)\left.\left(-1x^{-2}\right)\right|_{x=1} \\
&= x - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + x \\
&= -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Idet den differentierede at $\ln(x) = \frac{1}{x}$ og $\ln(1) = 0$.

4) For $x \approx 0$, er $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ for de første tre led:

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + (x-0)\left.\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} + \frac{1}{2}(x-0)^2 \left.\frac{\mathrm{d}^2e^x}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

Idet den differentierede af e^x er e^x og $e^0 = 1$.

5) For $x \approx 0$, vises det, at approksimationen for et polynomie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ er givet ved leddene i polynomiet selv. Vi regner ét led af gangen:

$$\begin{aligned} \text{Første led} &= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 \\ &= a_0 \\ \text{Andet led} &= (x-0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right)\right|_{x=0} \\ &= x \cdot (a_1 + 2a_2x))|_{x=0} \\ &= a_1x \\ \text{Tredje led} &= \frac{1}{2}(x-0)^2 \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right)\right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_1 + 2a_2x)\right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{2}x^2\,(2a_2)|_{x=0} \\ &= a_2x^2 \\ &\rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 \end{aligned}$$

Og det er hermed vist at approksimationen af et polynomie er givet ved leddene i polynomiet.

6) For små værdier af x ($x \approx 0$), vises det, at $(1+x)^a \approx 1 + ax$.:

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= (1+0)^a + (x-0)\left.\frac{\mathrm{d}(1+x)^a}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \\ &= 1 + \left.\left(a(1+x)^{a-1}\right)\right|_{x=0} \\ &= 1 + ax, \end{aligned}$$

hvor $(1+x)^a$ er blevet differentieret som en sammensat funktion med $u = 1 + x$ og $g = u^a$.

Opgave 12: ●● **Jordens form**

Figur 5.2: Plot af $f(x)$, $g(x)$, samt approksimationer af disse.

I første omgang differentieres funktionen to gange vha. kædereglen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}\left[R^2 - x^2\right]^{-1/2}(-2x) \\
&= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\
\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[R^2 - x^2\right]^{-3/2}(-x)(-2x) - \left[R^2 - x^2\right]^{-1/2} \\
&= \frac{-x^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}
\end{aligned}$$

Evalueres disse differentialer i $x = 0$ fås

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} &= \left[\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right]_{x=0} \\
&= \frac{-0}{\sqrt{R^2 - 0^2}} \\
&= 0 \\
\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} &= \left[\frac{-x^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right]_{x=0} \\
&= \frac{-0^2}{(R^2 - 0^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 0^2}} \\
&= 0 - \frac{1}{R} \\
&= -\frac{1}{R}
\end{aligned}$$

1) Indsættes det i ligning A.7 fra kompendiet fås

$$\begin{aligned}
f_2(x) &\simeq f(0) + x\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} + \frac{1}{2}x^2\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} \\
&= R + 0 - \frac{1}{R}x^2
\end{aligned}$$

hvilket er Taylorrækken til 2. orden. Til første og nulte orden er det

$$\begin{aligned}
f_1(x) &\simeq R + 0 = R \\
f_0(x) &\simeq R
\end{aligned}$$

2) Da $f_0(x) = f_1(x)$ betragtes de herfra sammen.
1) f_1 er en vandret linje for alle værdier af x
2) $f_2(x)$ er en parabel, hvor "benene"vender nedad, grundet fortegnet på højesteordensledet.

3) Se figur 5.2.

4) Der er tale om
1) Et plan.
2) En elliptisk paraboloid, dvs. den figur, der fremkommer ved at dreje en parabel$180°$ rundt om y-aksen. Af denne figur er taget de positive værdier og spejlet i x-aksen. Denne forklaring giver ikke super meget mening, hvorfor det er bedre bare at tænke det som et øje.

5) På bagrund af dette er det acceptable approksimationer at se jorden som enten flad eller et gigantsisk øje. Som figuren dog viser er det begrænset, hvor stort et område disse approksimationer er valide.

Differentialligninger

Opgave 13: • **Specialtilfælde af 1. og 2. Ordens Differentialligninger**

1) $f(t) = -7e^{3t}$ og $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 3f(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{3t} = -7 \cdot 3e^{3t} = 3\left(-7e^{3t}\right) = 3f(t)$$

2) $g(t) = \frac{2}{3}e^{t} + e^{-2t}$ og $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + 2g(t) = 2e^{t}$.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-2t} = \frac{2}{3}e^{t} - 2e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + 2g(t) = \frac{2}{3}e^{t} - 2e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{t} + 2e^{-2t} = \frac{6}{3}e^{t} = 2e^{t}$$

3) $h(t) = 5\sin(3t) - 10\cos(3t)$ og $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -9h(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot 5\cos(3t) + 3 \cdot 10\sin(3t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = (-9) \cdot 5\cos(3t) + 9 \cdot 10\sin(3t) = -9h(t)$$

4) $k(t) = 13\cos(8t + 45)$ og $\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}t^2} = -64k(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = (-8) \cdot 13\cos(8t + 45) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}t^2} = (-64) \cdot 13\cos(8t + 45) = -64k(t)$$

Opgave 14: •• **Generelle 1. Ordens Differentialligninger**

1) $h(x) = 1/(x + A)$ og $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -h(x)^2$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + A)^{-1} = -(x + A)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + A) = -\frac{1}{(x + A)^2} = -h(x)^2$$

2) $k(x) = \left(c - x^2\right)^{-1/2}$ og $\mathrm{d}kx = xk(x)^3$.

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}\left(c - x^2\right)^{-3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c - x^2\right) = x\left(c - x^2\right)^{-3/2} = xk(x)^3$$

3) $g(x) = (\ln(x) + C)/x$ og $x^2 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + xg(x) = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x + C)\right]\frac{1}{x} + (\ln x + C)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + C}{x^2}$$
$$\Rightarrow x^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + xg(x) = 1 - (\ln(x) + C) + (\ln(x) + C) = 1$$

4) $f(x) = (1 + ce^x)/(1 - ce^x)$ og $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - 1\right)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + c^x)\right]\frac{1}{1 - ce^x} + (1 + ce^x)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1 - ce^x}\right] = \frac{ce^x}{1 - ce^x} + \frac{(1 + ce^x)(-1)(-ce^x)}{(1 - ce^x)^2}$$

$$= ce^x\left[\frac{1}{1 - ce^x} + \frac{1 + ce^x}{(1 - ce^x)^2}\right] = ce^x\frac{1 - ce^x + 1 + ce^x}{(1 - ce^x)^2} = \frac{2ce^x}{(1 - ce^x)^2}$$

$$f(x)^2 - 1 = \frac{(1 + ce^x)^2}{(1 - ce^x)^2} - \frac{(1 - ce^x)^2}{(1 - ce^x)^2} = \frac{(1 + ce^x)^2 - (1 - ce^x)^2}{(1 - ce^x)^2} = \frac{4ce^x}{(1 - ce^x)^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - 1\right)$$

Opgave 15: ●●● **Hvornår er det en løsning?**

1) Find k så $f(y) = \cos(ky)$ løser $4\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} = -25f(y)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -k\sin(ky) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} = -k^2\cos(ky) = -k^2 f(y)$$

Så sætter man ind:

$$4\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} = -25f(y) \quad \Rightarrow \quad -4k^2 f(y) = -25f(y) \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \pm\frac{5}{2}$$

2) For de fundne k fra 1), vis at $g(y) = A\sin(ky) + B\cos(ky)$ løser $4\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = -25g(y)$.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = kA\cos(ky) - kB\sin(ky) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 A\sin(ky) - k^2 B\cos(ky) = -k^2 g(y)$$

Det giver:

$$-4k^2 g(y) = -25g(y)$$

Som er opfyldt for $k = \pm\frac{5}{2}$.

3) Find r så $h(y) = e^{ry}$ løser $2\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} - h(y) = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} = re^{ry} = rh(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}y^2} = r^2 e^{ry} = r^2 h(y)$$

Så sætter man ind:

$$2\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} - h(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 h(y) + rh(y) - h(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 + r - 1 = 0$$

Løses andengradsligningen får man:

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad r_2 = -1$$

4) For de fundne r_1, r_2 i 3), vis at $k(y) = ae^{r_1 y} + be^{r_2 y}$ løser $2\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} - k(y) = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = ar_1 e^{r_1 y} + br_2 e^{r_2 y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}y^2} = ar_1^2 e^{r_1 y} + br_2^2 e^{r_2 y}$$

Så sætter man ind:

$$2\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} - k(y) = 2\left(ar_1^2 e^{r_1 y} + br_2^2 e^{r_2 y}\right) + (ar_1 e^{r_1 y} + br_2 e^{r_2 y}) - (ae^{r_1 y} + be^{r_2 y})$$

$$= \left(2ar_1^2 + ar_1 - a\right) e^{r_1 y} + \left(2br_2^2 + br_2 - b\right) e^{r_2 y} = 0 \cdot e^{r_1 y} + 0 \cdot e^{r_2 y} = 0$$