

## FYSIK CAMP 2016

*Faglige:*

Kasper Zøllner (ansv.)	kaz@unf.dk
Nanna Bill Andersen	nba@unf.dk
Niels Jakob Søe Loft	nsl@unf.dk
Dorte Thrige Plauborg	dtp@unf.dk
Rasmus Krog	rak@unf.dk
Christoffer Hansen	ch@unf.dk

UNGDOMMENS NATURVIDENSKABELIGE FORENING



## **Kolofon**

*Kompendie til UNF Fysik Camp 2016*

Kompendiet er skrevet af Niels Jakob Søe Loft, Nanna Bill Andersen, Kasper Zøllner, Dorte Thrige Plauborg, Rasmus Krog og Christoffer Hansen. Kompendiet er trykt i juli 2016 og teksten er copyright ©2016 af UNF og forfatterne. Gengivelse med kildehenvisning tilladt.

Layout: Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen.

Ansvarlig: Kasper Zøllner

# Indhold

<b>Indhold</b>	<b>i</b>
<b>Introduktion</b>	<b>iii</b>
<b>1 Klassisk mekanik</b>	<b>1</b>
1.1 Newtons bevægelsesligninger . . . . .	1
1.2 Generaliserede koordinater . . . . .	2
1.3 Lagrange-funktionen, kinetisk og potentiel energi . . . . .	4
1.4 Euler-Lagrange-ligningerne . . . . .	5
1.5 Generaliserede impulsler . . . . .	5
1.6 Klassisk harmonisk oscillator . . . . .	6
<b>2 Kvantemekanik</b>	<b>9</b>
2.1 Tilstande og operatorer . . . . .	10
2.2 Egentilstande og egenværdier . . . . .	11
2.3 Regneregler for tilstande . . . . .	11
2.4 Målinger og forventningsværdier . . . . .	14
2.5 Regneregler for operatorer . . . . .	15
2.6 Usikkerhedsprincippet . . . . .	18
2.7 Hamiltonoperatoren, position og impuls . . . . .	18
2.8 Kvantemekanisk harmonisk oscillator . . . . .	20
<b>3 Laserfysik og optik</b>	<b>23</b>
3.1 Laseren . . . . .	23
3.2 Optik . . . . .	26
<b>4 Astrofysik</b>	<b>31</b>
4.1 Dannelse af stjerner og planeter . . . . .	31
4.2 Hvordan virker stjerner? . . . . .	33
4.3 En stjernes liv . . . . .	35
4.4 H-R diagram . . . . .	36
4.5 Stjerners endeligt og hvad der bliver tilbage . . . . .	38

4.6	Observation af stjerner: De fem hurtige . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Relativitetsteori</b>	<b>43</b>
5.1	Observatører i reference- og hvilesystemer . . . . .	43
5.2	Galileisk transformation . . . . .	44
5.3	Speciel relativitetsteori og dens betydning . . . . .	46
5.4	Lorentz-transformationer . . . . .	48
5.5	Generel relativitetsteori . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Termodynamik</b>	<b>53</b>
6.1	Temperatur, termisk udvidelse og varme . . . . .	53
6.2	Idealgas- og van der Waals ligningen . . . . .	55
6.3	0. hovedsætning . . . . .	57
6.4	1. hovedsætning . . . . .	58
6.5	2. hovedsætning . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Partikelfysik</b>	<b>67</b>
7.1	Kvantefeltteori . . . . .	68
7.2	Standardmodellen . . . . .	69
<b>A</b>	<b>Matematik</b>	<b>71</b>
A.1	Polære koordinater, cosinus og sinus . . . . .	71
A.2	Differentialregning . . . . .	73
A.3	Differentialligninger . . . . .	77

# Introduktion

Velkommen til UNF Fysik Camp 2016. Dette kompendium er en introduktion til de emner, som vi skal arbejde med i løbet af campen. Programmet, som I skal igennem, indholder en masse forskellige emner, som alle giver et indblik i, hvor vigtig og alsidig fysikken er. Emnerne strækker sig fra mekanik og kvantemekanik til astronomi, laserfysik og mange flere. Alle er de relevante for vores verden, og vi håber, at I vil finde dem lige så spændende som vi selv gør.

I kommer alle med forskellig undervisningsbaggrund, og vi kræver derfor ikke, at I bare forstår alt med det samme. Under campen vil der være rig mulighed for at snakke mere om det, som står i dette kompendie og virkelig dykke ned i stoffet. Kompendiet indeholder alt, hvad I vil få brug for til at forstå og arbejde med emnerne under campen, og I opfordres derfor kraftigt til at læse det. Særligt bør I forsøge at læse de to første kapitler om mekanik og kvantemekanik, fordi disse emner vil indgå i det obligatoriske program, hvorimod de andre emner er valgfrie.

Da I kommer fra forskellige klassetrin, har I ikke alle modtaget undervisning i al den matematik, som I måske skal bruge. I opfordres derfor også til at læse appendikset bagerst i kompendiet, som forklarer den matematik, vi skal arbejde med på campen.

God fornøjelse, og velkommen i fysikkens verden.

på vegne af det faglige team,  
*Kasper Zøllner, faglig koordinator*



# Kapitel 1

## Klassisk mekanik

Dette kapitel omhandler klassisk mekanik, dvs. systemer af ting, som “er til at tage og føle på” – billardkugler, træblokke, planeter, biler, fjedere osv. I gymnasiet bliver man præsenteret for Newtons love, der kræver, at man kigger på, hvilket kræfter, der påvirker forskellige dele af systemet. Når man løser ligningerne i eksempelvis Newtons 2. lov, finder man ud af, hvordan systemet bevæger sig. Vi skal i dette kapitel introducere en anden metode, der løser samme opgave. Metoden går under navnet Lagrange-mekanik, og involverer ikke kræfter som Newtons love, men i stedet kinetisk og potentiel energi. Lagrange-mekanik har mange beregningsmæssige fordele i forhold til Newtons love, men det er blot to forskellige metoder til at analysere den samme fysik, og begge metoder giver det samme resultat.

Før du læser videre vil vi meget kraftigt opfordre dig til at læse appendiks A, hvor vi forklarer den matematik, som du skal bruge i løbet af campen. Selvom du måske kender til noget af matematikken i forvejen, bruger vi sandsynligvis en anden notation, end du er vant til, så læs det alligevel.

### 1.1 Newtons bevægelsesligninger

Newton 2. lov siger, at et legeme med massen  $m$ , der påvirkes af en samlet kraft  $F$  accelererer med acceleration  $a$ , så følgende ligning er opfyldt:

$$F = ma . \quad (1.1)$$

Newton 2. lov gælder i hver af de tre retninger i rummet, så vi kan skrive en ligning op for  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -retningen:

$$F_x = ma_x$$

$$F_y = ma_y$$

$$F_z = ma_z ,$$

hvor  $F_x$  er kraften i  $x$ -retningen,  $a_x$  er accelerationen i  $x$ -retningen osv. (Hvis du kender til vektorer, kan du skrive Newtons 2. lov som en vektorligning, hvor kraften og accelerationen er vektorer.) For at gøre det simpelt, vil vi her nøjes med at se på  $x$ -retningen, men vi kan nemt generalisere teorien til alle tre dimensioner.

Hvis man kender kræfterne, der påvirker et legeme, ønsker man ofte at beregne legemets position  $x(t)$  som funktion af tiden  $t$ . Til dette kan man bruge Newtons 2. lov, idet vi ved, at når man differentierer positionen mht. tiden får man *hastigheden*:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t), \quad (1.2)$$

som også er en funktion af tiden. Her angiver  $\frac{dx}{dt}$  differentialkvotienten, som også typisk skrives  $x'(t)$  eller  $\frac{d}{dt}x$ . Desuden benytter vi ofte en speciel notation, når vi differentierer mht. tiden  $t$ , for i dette tilfælde sætter vi en prik over funktionen, vi differentierer. Se appendiks A for flere detaljer om notation og matematikken.

Differentierer vi nu hastigheden  $v(t)$  med hensyn til tiden  $t$ , får vi *accelerationen*:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t). \quad (1.3)$$

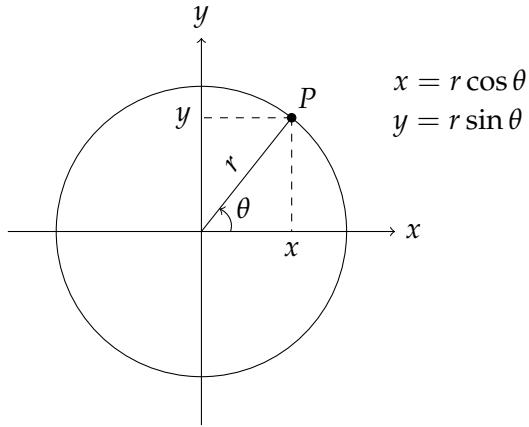
Indsættes ligning (1.3) i ligning (1.1) kan vi udtrykke Newtons 2 lov (ligning 1.1) som

$$F(x, \dot{x}) = m\ddot{x}, \quad (1.4)$$

hvor vi har skrevet kraften  $F$  som funktion af legemets position  $x$  og hastighed  $\dot{x}$ , idet dette ofte er tilfældet. Ligning (1.4) er det, der kaldes en andenordens differentialligning, hvor den ubekendte funktion er  $x(t)$ . For overskuelighedens skyld har vi ikke eksplisit skrevet, at positionen  $x$ , hastigheden  $\dot{x}$  og accelerationen  $\ddot{x}$  alle afhænger af tiden  $t$ , men det husker vi, at de gør.

## 1.2 Generaliserede koordinater

Når man beskriver, hvordan et legeme bevæger sig, angiver man dets position som funktion af tiden. F.eks. for en bil, der kører på en lige vej ( $x$ -aksen), angiver man  $x(t)$  for bilen. For bevægelse i to dimensioner, f.eks. hvis bilen drejer og kører langs en snoet rute, må man angive både  $x$ - og  $y$ -koordinaterne. De velkendte koordinater  $(x, y, z)$  kaldes *kartesiske* koordinater. Men det kan ofte være smart at angive et legemes bevægelse vha. andre koordinater. Ser man f.eks. på en kugle forbundet til en snor, der roterer rundt, kan man beskrive kugles bevægelse ved at angive afstanden  $r$  fra centrum og vinklen  $\theta$  med  $x$ -aksen. Disse kaldes *polære* koordinater. Se tegningen nedenfor og appendiks A for flere detaljer. Fordelen ved at beskrive kuglens bevægelse i polære koordinater frem for kartesiske koordinater er, at både  $x$ - og  $y$ -koordinaterne afhænger af tiden, men  $r$  er konstant (snoren ændrer ikke længde) og kun  $\theta$  afhænger af tiden, idet vinklen ændrer sig som kuglen roterer.



Newton's 2. lov i kartesiske koordinater  $(x, y)$  er

$$F_x = m\ddot{x} \quad (1.5)$$

$$F_y = m\ddot{y}, \quad (1.6)$$

hvilket er relativt simpelt. Men i polære koordinater  $(r, \theta)$  bliver Newton's 2. lov mere kompliceret:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1.7)$$

$$F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}), \quad (1.8)$$

hvor  $F_r$  er kraften i den "radielle retning" og  $F_\theta$  er kraften i "vinkel-retningen". Pointen er her, at når vi beskriver systemet i andre koordinater, ændrer ligningerne sig. Derfor kunne man umiddelbart tro, at når man vælger smarte koordinater, hvor så mange koordinater som muligt er tidsuafhængige, så mister man fordelen, fordi bevægelsesligningerne i Newton's 2. lov bliver mere komplicerede.

Vi vil derfor bortkaste Newton's 2. lov, og introducere en alternativ tilgang kaldet *Lagrange-mekanik*, hvor bevægelsesligningerne *ikke* ændrer sig, når man ændrer koordinater. Når vi formulerer Lagrange-mekanikken vil vi derfor bruge såkaldte *generaliserede koordinater*:

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_N \quad (1.9)$$

Når man ser på et konkret system vil man vælge  $q_i$ 'erne til at være et bestemt sæt af koordinater, f.eks. kartesiske koordinater  $q_1 = x$  og  $q_2 = y$ , eller polære koordinater  $q_1 = r$  og  $q_2 = \theta$ . I principippet er der frit valg, når man vælger sine generaliserede koordinater, så længe koordinaterne ikke afhænger af hinanden. Hvis man har et system, der består af flere dele, har man brug for koordinater til at beskrive positionen af hver del. Derfor har vi ladet antallet af generaliserede koordinater være  $N$  i ligning (1.9), hvor  $N$  er antallet af generaliserede koordinater, man har brug for for at beskrive systemet. For eksempelvis at beskrive et system af 3 kugler i én dimension har vi brug for  $N = 3$  koordinater (én for positionen af hver kugle), og for 2 kugler i 2 dimensioner har vi brug for  $N = 4$  koordinater (én for hver retning for hver kugle).

### 1.3 Lagrange-funktionen, kinetisk og potentiel energi

I modsætning til Newtons mekanik, hvor man ser på hvilket kræfter, der virker på forskellige dele af systemet, så bygger Lagrange-mekanik på en energibetrægtnings. Centralt i Lagrange-mekanikken står *Lagrange-funktionen*  $L$ , der er defineret som systemets *kinetiske energi*  $T$  minus systemets *potentielle energi*  $V$ . Opskriver man disse som funktioner af de  $N$  generaliserede koordinater, er Lagrange-funktionen defineret som:

$$L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - V(q_1, \dots, q_N), \quad (1.10)$$

eller i simplificeret form, hvis vi ikke eksplisit gider at skrive alle koordinaterne  $q_1, \dots, q_N$  og de tidsafledte koordinater  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N$ :

$$L = T - V.$$

#### Kinetisk energi

Kinetisk energi er den energi, der kommer fra bevægelse og afhænger derfor af de tidsafledte koordinater (hastigheden). For et legeme med massen  $m$ , der bevæger sig i et plan (i  $x$ - og  $y$ -retningen), er den kinetiske energi i kartesiske koordinater

$$T = T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (1.11)$$

dvs. en sum af led fra hver bevægelsesretning ( $x$  og  $y$ ). I polære koordinater er den kinetiske energi givet ved

$$T = T(\dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (1.12)$$

De to udtryk for  $T$  giver den samme kinetiske energi, den eneste forskel er valget af koordinater, hvilket er op til os. Hvis systemet består af flere dele er den kinetiske energi summen af den kinetiske energi fra hver del.

#### Potentiel energi

Potentiel energi er den energi, der skyldes, at kræfter virker på systemet. Det vil typisk være tyngdekraften og fjederkraften. Den potentielle energi afhænger kun af koordinaterne.

Man kan selv kan vælge, hvor man lægger nulpunktet for sit koordinatsystem, hvilket betyder, at man kan ændre den potentielle energi ved at ændre nulpunktet for sit koordinatsystem. Derfor måles potentiel energi altid i forhold til et nulpunkt, dvs. et punkt, hvor  $V = 0$ , som man frit kan vælge. Et smart valgt nulpunkt forsimpler de ligninger, man skal løse for at finde systemets bevægelse, og det ændrer ikke noget fysisk. Den kinetiske energi  $T$  afhænger ikke af koordinatsystemets nulpunkt, fordi den kun afhænger af de tidsafledte koordinater, så når vi vælger koordinatsystemet, behøver vi kun at tænke på at gøre udtrykket for den potentielle energi simpelt.

Den potentielle energi fra tyngdekraften (gravitationel energi) for et legeme med massen  $m$  i en højde  $h$  over nulpunktet for potentiell energi er givet ved

$$V_{\text{grav}} = V_{\text{grav}}(h) = mgh, \quad (1.13)$$

hvor  $g = 9,82 \text{ m s}^{-2}$  er tyngdeaccelerationen. Højden  $h$  afhænger af de generaliserede koordinater.

Den potentielle energi fra fjederkraften (fjederenergien) for et legeme med massen  $m$  i en fjeder med fjederkonstant  $k$ , der er strakt ud i længden  $l$  fra nulpunktet for potentiel energi, er givet ved

$$V_{\text{fj}} = V_{\text{fj}}(l) = \frac{1}{2}kl^2. \quad (1.14)$$

Længden  $l$  afhænger af de generaliserede koordinater.

## 1.4 Euler-Lagrange-ligningerne

Når man har opskrevet Lagrange-funktionen i ligning (1.10) for sit system, kan man opskrive bevægelsesligningerne for systemet, de såkaldte Euler-Lagrange-ligninger. De kan udledes ud fra nogle generelle antagelser, men her vil vi blot give dem:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dq_i} \right) = \frac{dL}{dq_i} \quad \text{for } i = 1, \dots, N. \quad (1.15)$$

Antallet af ligninger er altså antallet af generaliserede koordinater, for vi har én ligning for hver koordinat. De ser muligvis skræmmende ud nu, men på campen vil I få rig mulighed for at blive fortrolige med dem. Vi skal opskrive Lagrange-funktioner for forskellige simple systemer, og så skal vi undersøge systemernes opførsel ved at løse Euler-Lagrange-ligningerne.

Når vi skal differentiere  $L$  mht.  $q_i$  og  $\dot{q}_i$  skal vi tænke på dem som uafhængige variable. Dvs. når vi beregner  $\frac{dL}{d\dot{q}_i}$  kan vi ignorere  $V$ , fordi den kun afhænger af  $q_i$ 'erne og ikke  $\dot{q}_i$ 'erne. Tilsvarende kan vi ignorere  $T$ , når vi beregner  $\frac{dL}{dq_i}$ , fordi  $T$  kun afhænger af  $\dot{q}_i$ 'erne og ikke  $q_i$ 'erne. Derfor kan forsimple Euler-Lagrange-ligningen (1.15) til:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{d\dot{q}_i} \right) = -\frac{dV}{dq_i} \quad \text{for } i = 1, \dots, N. \quad (1.16)$$

Du kan frit vælge, om du vil benytte ligning (1.15) eller (1.16), når du regner opgaver.

## 1.5 Generaliserede impulser

Et legeme med massen  $m$  og hastighed  $v$  har impulsen (bevægelsesmængden):

$$p = mv. \quad (1.17)$$

For bevægelse i  $(x, y)$ -planet har legemet en impuls i hver retning:

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} \\ p_y &= m\dot{y}. \end{aligned}$$

Der gælder impulsbevarelse, hvilket vil sige, at den samlede impuls i hver retning aldrig kan ændres. Hvis f.eks. to billardkugler støder samme, så er den totale impuls bevaret i både  $x$ -retningen og  $y$ -retningen. Med andre ord summen af de to kuglers impulser i hver retning er de samme før og efter stødet.

Ligesom koordinater kan generaliseres, så kan impulser generaliseres. Når vi har en Lagrange-funktion  $L$  for et system kan vi for hver generaliseret koordinat  $q_i$  definere en tilsvarende generaliseret impuls  $p_i$ :

$$p_i = \frac{dL}{d\dot{q}_i} \quad \text{for } i = 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

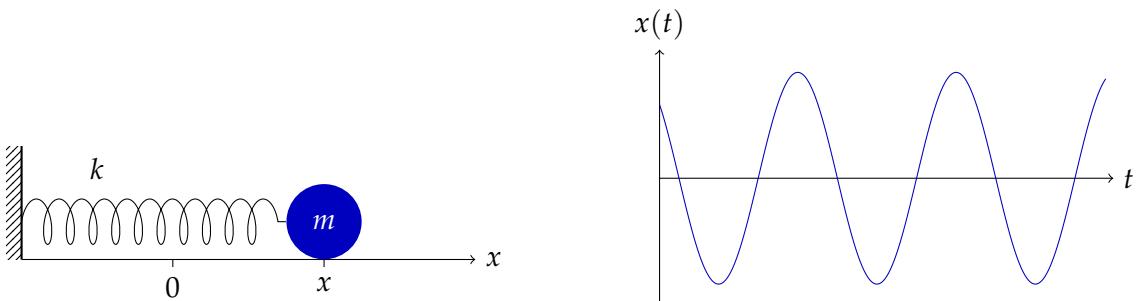
Som det ses findes den generaliserede impuls  $p_i$  ved at differentiere  $L$  med hensyn til  $\dot{q}_i$ . Da den potentielle energi  $V$  er uafhængig  $\dot{q}_i$ 'erne, får vi altså det samme ved kun at differentiere den kinetiske energi  $T$ :

$$p_i = \frac{dT}{d\dot{q}_i} \quad \text{for } i = 1, \dots, N. \quad (1.19)$$

Der gælder også impulsbevarelse for hver generaliseret impuls.

## 1.6 Klassisk harmonisk oscillator

Kært barn har mange navne, og den harmoniske oscillator er et meget kært barn for fysikere, der bruger den harmoniske oscillator i alle mulige sammenhænge, lige fra svingninger af atomer i kvantemekanikken til svingninger i stjerner i astrofysikken. Den harmoniske oscillator kaldes også harmonisk svingning eller simpel harmonisk bevægelse. I klassisk mekanik er små svingninger af et pendul eller en masse forbundet til en fjeder eksempler på systemer, der udviser simpel harmonisk bevægelse. Lad os her analysere en masse  $m$  forbundet til en fjeder med fjederkonstant  $k$  på et gnidningsfrit underlag (så vi ignorerer friktion), se figur 1.1.



Figur 1.1: Harmonisk oscillator i klassisk mekanik.

Vi vil nu analysere systemet vha. Lagrange-mekanik, og derfor skal vi finde den kinetiske og potentielle energi af systemet som funktion af nogle generaliserede koordinater og deres tidsafledte. I dette tilfælde kan vi nøjes med kun én generaliseret koordinat,  $x$ , som betegner kuglens position i forhold til ligevægtspositionen. Dvs.  $x = 0$  er ligevægtspositionen, hvor fjederen hverken er strakt eller mast, så dette er nulpunktet for potentiel energi. Så den potentielle energi som funktion af  $x$  er

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.20)$$

Når kuglen er i bevægelse er dens hastighed  $v = \dot{x}$ , og dermed er systemets kinetiske energi

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (1.21)$$

Dermed kan vi opskrive Lagrange-funktionen:

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Vi vælger af løse Euler-Lagrange-ligningen givet i (1.16), der for vores system er givet ved

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{d\dot{x}} \right) = -\frac{dV}{dx}. \quad (1.22)$$

På venstresiden udregnes først indmaden i parentesen:

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = \frac{d}{d\dot{x}} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m \frac{d}{d\dot{x}} \dot{x}^2 = \frac{1}{2}m2\dot{x} = m\ddot{x},$$

så venstresiden er

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{d\dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} m\ddot{x} = m \frac{d}{dt} \dot{x} = m\ddot{x}.$$

Højresiden er

$$-\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}k \frac{d}{dx} x^2 = -\frac{1}{2}k2x = -kx.$$

Ved at indsætte disse resultater får vi Euler-Lagrange-ligningen fra (1.22) til at være

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \quad (1.23)$$

Bemærk, at da  $\ddot{x}$  er accelerationen, genfinder vi Newtons 2. som  $m\ddot{x} = -kx$ , hvor kraften er  $-kx$ . Lagrange-mekanik og Newtons 2. lov giver altså det samme resultat, hvilket også helst skulle være tilfældet.

Ligning (1.23) er en differentialligning, som vi skal løse for  $x(t)$ . Løsningen er en svingningsfunktion:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (1.24)$$

hvor  $\omega = \sqrt{k/m}$  er svingningsfrekvensen,  $A$  er en vilkårlig amplitude og  $\phi$  er en vilkårlig fase. Man kan eftervise at (1.24) løser ligning (1.23) ved at differentiere  $x(t)$  to gange mht.  $t$  og indsætte  $x$  og  $\dot{x}$  i ligningen. Det overrasker os ikke, at løsningen beskriver en svingning, idet vores intuition nok ville fortælle os, at en masse i en fjeder vilstå og svinge periodiske frem og tilbage omkring ligevægtspunktet. Amplituden  $A$  beskriver størrelsen af udsvingene. Hvis vi trækker massen langt væk fra ligevægt og giver slip, vil bevægelsen have en stor amplitude, men hvis vi kun skubber let til massen, vil amplituden være lille. Men bevægelsen vil i begge tilfælde være periodiske svingninger med samme frekvens (svingninger pr. tidsenhed) givet ved  $\omega = \sqrt{k/m}$ , som kun afhænger af massen og fjederen. Fasen  $\phi$  afhænger af hvornår man sætter  $t = 0$ .

Lad os beregne energien  $E$  som summen af den kinetiske og potentielle energi:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.25)$$

Ved at differentiere  $x$  i ligning (1.24) mht.  $t$  finder vi, at

$$\dot{x}(t) = -\omega A \cos(\omega t + \phi).$$

Indsættes  $x$  og  $\dot{x}$  samt  $k = m\omega^2$  i ligning (1.25) fås

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2, \end{aligned}$$

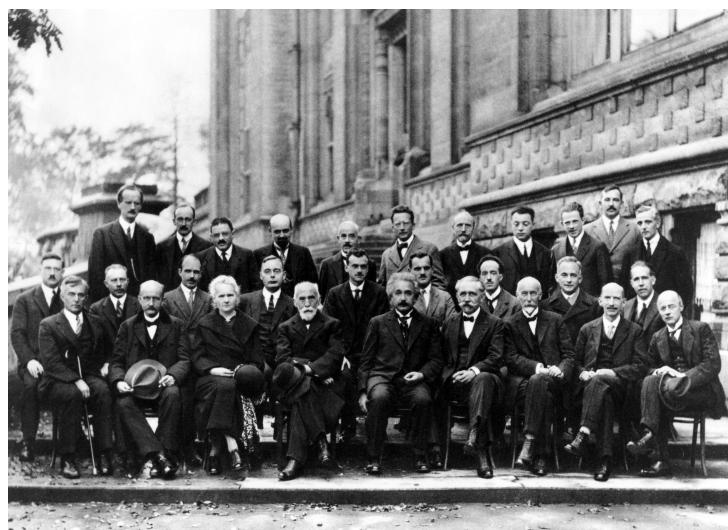
så jo større amplitude vi giver bevægelsen, jo mere energi er der i systemet.

## Kapitel 2

# Kvantemekanik

I slutningen af 1800-tallet troede fysikerne, at deres arbejde snart var færdigt. Ud over nogle enkelte eksperimentelle observationer, som man ikke kunne forklare, så mente fysikerne, at de havde forstået, hvordan verden hang sammen. Lord Kelvin udtalte selvsikkert i år 1900, at “der ikke var mere fysik at opdage. Det eneste, der er tilbage, er at udføre mere og mere præcise målinger.”

Lord Kelvin kunne ikke have taget mere fejl. I starten af 1900-tallet viste det sig, at de “småting”, man ikke havde forstået, åbnede en helt ny verden for fysikerne: den mikroskopiske verden af atomer, elektroner, fotoner, som ikke lod sig beskrive af de gængse fysiske teorier. Samme år som Lord Kelvin selvsikkert erklærede fysikken for afsluttet introducerede Max Planck en helt ny idé om kvantisering. Planck foreslog, at energien, der blev udstrålet fra et objekt, havde en mindste udelelig enhed, en såkaldt *energikvant* (kvant = mindste enhed). Max Plancks idé om kvantisering, altså at fysiske størrelse kommer i mindste udelelig enheder, blev taget op af andre fysikere, f.eks. postulerede Albert Einstein i 1905 eksistensen af lysvanter, de såkaldte fotoner.



Figur 2.1: Fællesbillede fra Solvay-konferencen i Bruxelles i 1927, hvor kvantemekanikken blev ivrigt diskuteret.

I Niels Bohrs atommodel fra 1913 indgår idéen om kvantisering af energiniveauer som en væsentlig ingrediens, og modellen havde stor succes med at beskrive de målte brintspektre. Idéen om kvantisering kunne således forklare de eksperimenter, man før ikke kunne forklare, men det gav også nye spørgsmål. Hvordan opfører disse kvanter sig? Hvilke fysiske love gælder i kvanteverdenen? Kvantemekanikken, som blev udviklet i 1920'erne og 30'erne gav svarene på disse spørgsmål, og forståelsen af kvantemekanik er grundlaget for næsten al moderne fysik og teknologi.

## 2.1 Tilstande og operatorer

For at beskrive kvantemekanikken mere formelt bliver vi nødt til at indføre to vigtige begreber: *tilstande* og *operatorer*. Et systems tilstand (klassisk eller kvantemekanisk) fortæller, hvordan systemet er lige nu. Notationen for en fysisk tilstand er  $| \dots \rangle$ , hvor vi mellem den lodrette streg og den kantede parentes skriver noget, der beskriver tilstanden. Vi kan ændre tilstanden ved at ”operere” på den med en operator, som angives med en hat,  $\hat{A}$ . Når vi anvender en operator på en tilstand svarer det til at påvirke systemet på den måde, som operatoren beskriver, og det vil generelt ændre systemets tilstand fra én tilstand til en anden. Operatorer anvendes på tilstande ved at gange operatoren på tilstanden fra venstre:

$$\hat{A} | \text{tilstand før} \rangle = | \text{tilstand efter} \rangle .$$

### Eksempel: glad eller sur person (del 1)

Lad os betragte et simpelt system bestående af en person i et bestemt humør. Personen kan være i to forskellige tilstande, glad eller sur. Vi skriver de to tilstande som henholdsvis  $|\text{😊}\rangle$  og  $|\text{:(\rangle}$ . Lad os også definere en ”humørskifte”-operator, der ændrer personens humør. Humørskifteoperatoren  $\hat{S}$  definerer vi altså til at virke således på de to tilstande:

$$\begin{aligned}\hat{S} |\text{😊}\rangle &= |\text{:(\rangle} \\ \hat{S} |\text{:(\rangle} &= |\text{😊}\rangle\end{aligned}$$

Dvs. anvender vi humørskifteoperatoren  $\hat{S}$  på én af de to humørtilstande får vi den modsatte humørtilstand.

En anden operator, der kunne være interessant at definere, er ”humormåle”-operator, der mäter personens humør. Denne operator skal ikke ændre personens humør, men bare gange den nuværende humørtilstand med et tal  $\pm 1$ , der indikerer humøret. Lad os definere humormåleoperatoren  $\hat{M}$  således:

$$\begin{aligned}\hat{M} |\text{😊}\rangle &= (+1) \cdot |\text{😊}\rangle = |\text{😊}\rangle \\ \hat{M} |\text{:(\rangle} &= (-1) \cdot |\text{:(\rangle} = - |\text{:(\rangle}\end{aligned}$$

Dvs. hvis personen er glad ganges tilstanden med  $+1$ , og hvis personen er sur ganges tilstanden med  $-1$ , men ud over dette ændres personens tilstand ikke. Sådanne tilstande spiller en særlig rolle, som vi skal belyse nu.

## 2.2 Egentilstande og egenværdier

Tilstande, som kun ganges med et tal, når man virker på dem med en operator, kaldes for *egentilstande* for operatoren. Det tal, som tilstanden ganges med, kaldes *egenværdien* for tilstanden. I det forrige eksempel er de to humørtilstande egentilstande for humørnåleoperatoren  $\hat{M}$  med egenværdierne  $\pm 1$ .

Lad os mere generelt betragte et system med  $N$  forskellige tilstande (evt. uendeligt mange), som vi skriver  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle$ . Disse er egentilstande for operatoren  $\hat{A}$  med egenværdierne  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , hvis de opfylder:

$$\begin{aligned}\hat{A}|\psi_1\rangle &= a_1|\psi_1\rangle \\ \hat{A}|\psi_2\rangle &= a_2|\psi_2\rangle \\ &\vdots \\ \hat{A}|\psi_N\rangle &= a_N|\psi_N\rangle,\end{aligned}$$

eller skrevet lidt mere kompakt som:

$$\hat{A}|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle \quad \text{for } i = 1, \dots, N.$$

### Observable operatorer

Operatorer, hvor systemets tilstande er egentilstande, kan relateres til fysiske observable. En observabel er en ting, vi kan måle på systemet, f.eks. systemets energi, impuls, position osv. Hvis systemet befinner sig i en egentilstand vil målingsresultatet være egenværdien for den givne egentilstand. Dvs. når vi anvender operatoren  $\hat{A}$  på en egentilstand, f.eks.  $|\psi_1\rangle$ , kan vi tænke på at foretage en måling på systemet i tilstanden  $|\psi_1\rangle$ . Denne måling ganger tilstanden med målingsresultatet (egenværdien  $a_1$ ), men ændrer ellers ikke systemet fra at være i tilstanden  $|\psi_1\rangle$ .

I eksemplet fra før kan humørnåleoperatoren  $\hat{M}$  således relateres til personens humør (den observable). Måleresultatet vil da være  $+1$ , hvis personen er i den glade egentilstand, eller  $-1$  hvis personen er i den sure egentilstand.

## 2.3 Regneregler for tilstande

Lad os formalisere målinger på kvantemekaniske tilstande lidt mere. For at gøre dette skal vi definere *konjugerede tilstande*. Vi skal ikke gå ind i hvad der rent matematisk ligger bag disse konstruktioner, men idéen er, at der til enhver tilstand  $|\psi\rangle$  kan laves en konjugeret tilstand, som vi skriver  $\langle\psi|$ . Den eneste forskel i skrivemåden er, at vi starter med en kantet parentes og har flyttet den lodrette streg til højre. Formålet med konjugerede tilstande er at gange dem på en tilstand fra venstre, hvilket giver et tal. Hvis  $|\psi\rangle$  og  $|\chi\rangle$  er tilstande kan vi lave de konjugerede tilstande  $\langle\psi|$  og  $\langle\chi|$ , og produkterne  $\langle\chi|\psi\rangle, \langle\psi|\chi\rangle, \langle\psi|\psi\rangle$  og  $\langle\chi|\chi\rangle$  er alle tal. Husk også, at hvis  $\hat{A}$  er en operator får vi en tilstand ud af at anvende  $\hat{A}$  på en tilstand, så  $\hat{A}|\psi\rangle$  er f.eks. også en tilstand. Dvs.  $\langle\chi|\hat{A}|\psi\rangle$  er f.eks. også et tal. Vi giver nu nogle vigtige egenskaber og regneregler.

## 1. Normeringskrav.

For enhver tilstand  $|\psi\rangle$  skal der gælde, at

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Dette kaldes *normeringskravet* og sikrer, at visse regler for sandsynligheder er overholdt.

## 2. Ortonormalitet.

Hvis  $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_N\rangle$  er egentilstande for en observabel operator  $\hat{A}$  gælder der, at

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Denne egenskab for egentilstande kaldes *ortonormalitet*.

## 3. Superposition.

En sum af egentilstande en også en tilstand:

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle + \dots + c_N|\psi_N\rangle,$$

såfremt der gælder, at  $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2 = 1$ , hvilket sikrer at normeringskravet  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$  er opfyldt. Tilstanden  $|\psi\rangle$ , som opnås ved at lægge egentilstande sammen på denne måde, kaldes en *superpositionsstilstand*.

## 4. Fuldstændighed.

En ret vild og overhovedet ikke-oplagt egenskab er, at *enhver* tilstand  $|\psi\rangle$  kan skrives som en superpositionstilstand af egentilstande for en given operator. Så hvis man har fundet alle egentilstandene for en operator, kan man skrive enhver tilstand som en superpositionstilstand af disse.

## 5. Konjugerede tilstange.

Hvis en tilstand  $|\psi\rangle$  er skrevet som en sum af andre tilstange,

$$|\psi\rangle = a|\chi\rangle + b|\gamma\rangle,$$

opnås den konjugerede tilstand  $\langle\psi|$  ved at konjugere de enkelte tilstange i summen,

$$\langle\psi| = a\langle\chi| + b\langle\gamma|.$$

## 6. Kommutativitet.

Rækkefølgen hvormed man adderer tilstange er underordnet (ligesom når man regner med tal):

$$|\psi\rangle + |\chi\rangle = |\chi\rangle + |\psi\rangle.$$

En tilsvarende regel gælder for konjugerede tilstange.

## 7. **Associativitet.**

Man kan sætte sine parenteser som man vil (ligesom når man regner med tal):

$$|\psi\rangle + (|\chi\rangle + |\gamma\rangle) = (|\psi\rangle + |\chi\rangle) + |\gamma\rangle$$

og

$$a(b|\psi\rangle) = (ab)|\psi\rangle .$$

Derfor undlader man ofte at skrive parentserne overhovedet. En tilsvarende regel gælder for konjugerede tilstade.

## 8. **Distributiv lov.**

Man kan gange tal ind i parenteser:

$$a(|\psi\rangle + |\chi\rangle) = a|\psi\rangle + a|\chi\rangle$$

og man kan gange tilstande ind i parenteser:

$$(a + b)|\psi\rangle = a|\psi\rangle + b|\psi\rangle .$$

En tilsvarende regel gælder for konjugerede tilstade.

## **Eksempel: glad eller sur person (del 2)**

Vi vender tilbage til systemet bestående af en person i et bestemt humør. Vi har to tilstade,  $|\oplus\rangle$  og  $|\ominus\rangle$ , som er egentilstande for humørmåleoperatoren  $\hat{M}$  med egenværdier  $+1$  og  $-1$ , henholdsvis.

Jævnfør regel 3 kan lave en ny tilstand ved at lægge  $|\oplus\rangle$  og  $|\ominus\rangle$  sammen på følgende vis

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\oplus\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\ominus\rangle$$

fordi  $(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 1/2 + 1/2 = 1$ . Tilstanden  $|\psi\rangle$  er en superpositionstilstand af de to humortilstande, altså de to egentilstande for  $\hat{M}$ . Superpositionstilstanden er altså en blandingstilstand, der består 50% af  $|\oplus\rangle$  og 50% af  $|\ominus\rangle$ . Så fysisk skal vi fortolke personen i tilstanden  $|\psi\rangle$  som værende 50% glad og 50% sur. Hvilket resultat forventer vi at få, hvis vi spørger personen, om han/hun er glad eller sur? I kvantemekanikken er der kun to mulige svar, nemlig "glad" eller "sur" – der er ikke noget svar, der hedder "lidt af det ene og lidt af det andet". Så når vi foretager en måling af humøret med humøroperatoren  $\hat{M}$  er de eneste mulige måleværdier de to egenværdier  $\pm 1$ . Men egenværdien  $+1$  hører til den glade tilstand  $|\oplus\rangle$ , og egenværdien  $-1$  hører til den sure tilstand  $|\ominus\rangle$ , og  $|\psi\rangle$  består 50% af hver, så hvilket måleresultat får vi? Svaret er, at vi ikke ved det. Men 50% af gangene vi mäter på  $|\psi\rangle$  får vi  $+1$ , og 50% af gangene får vi  $-1$ . Men i det øjeblik vi foretager målingen "tvinger" vi systemet til tage stilling til hvilken tilstand, den befinner sig i – enten glad eller sur – og der er så 50% sandsynlighed for hver. Denne usikkerhed ved en måling – at naturen på fundamentalt niveau er styret af sandsynligheder – har givet fysikere og filosoffer meget at tænke over. Albert Einstein selv var dybt utilfreds med, at sandsynligheder for forskellige udfald var dybt begravet i naturens love, og det fik ham i protest til at sige, at "Gud ikke spiller med terninger". Men Einstein tog fejl, og en måling af superpositionstilstand vil give et resultat, der er bestemt af sandsynligheder.

## 2.4 Målinger og forventningsværdier

Diskussionen i eksemplet ovenfor er indholdt i følgende vigtige regel:

### 9. Sandsynligheder for forskellige måleresultater.

Lad  $\hat{A}$  være en observabel operator med  $N$  egentilstande  $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_N\rangle$  med tilhørende egenværdier  $a_1, \dots, a_N$ . Dvs. for  $i = 1, \dots, N$  har vi, at  $\hat{A}|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle$ . Betragt superpositionstilstanden

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + \dots + c_N|\psi_N\rangle ,$$

hvor  $c_1, \dots, c_N$  er nogle koefficienter, der opfylder  $c_1^2 + \dots + c_N^2 = 1$ .

Da gælder der, at en måling af  $\hat{A}$  på tilstanden  $|\psi\rangle$  har  $N$  mulige udfald, nemlig hver af de  $N$  mulige egenværdier  $a_1, \dots, a_N$ . Sandsynligheden for at måle  $a_i$  er givet ved  $c_i^2$ .

Vi ser nu, hvorfor vi kræver, at  $c_1^2 + \dots + c_N^2 = 1$ , for summen af  $c_i$ 'erne i anden er jo summen af sandsynlighederne for de forskellige måleværdier. Jævnfør regler for sandsynligheder skal sandsynlighederne for alle mulige udfald summere til 1 (dette betyder, at sandsynligheden for at måle bare et eller andet er 100%, hvilket gerne skal være tilfældet).

Når vi har foretaget en måling på en superpositionstilstand, er systemet ikke længere i den samme tilstand som før målingen. Tilstanden efter målingen vil derimod være en egentilstand, der svarer til den egenværdi vi måler. Vi kan tænke på det således: Før vi foretager målingen er systemet i en blandingstilstand af flere forskellige egentilstande, men når vi måler på systemet, tvinger vi det til at vælge, hvilken egentilstand, den er i. Sandsynligheden for at systemet "kollapser" til en given egentilstand  $|\psi_i\rangle$  er givet ved  $c_i^2$ , og den målte værdi er egenværdien  $a_i$ . Ved at måle på systemet har vi ødelagt tilstanden før målingen, men tilgengæld har vi fået et konkret svar på, hvilken tilstand, systemet er i (efter målingen). Skematisk kan vi skriver det således:

$$|\psi_{\text{før}}\rangle = c_1|\psi_1\rangle + \dots + c_N|\psi_N\rangle \xrightarrow{\text{måling af } \hat{A}} \begin{cases} |\psi_{\text{efters}}\rangle = |\psi_1\rangle \text{ og } a_{\text{målt}} = a_1 \text{ med s.s. } c_1^2 \\ \vdots \\ |\psi_{\text{efters}}\rangle = |\psi_N\rangle \text{ og } a_{\text{målt}} = a_N \text{ med s.s. } c_N^2 \end{cases}$$

hvor s.s. er en forkortelse for sandsynlighed.

Lad os sige, at vi efter målingen på  $|\psi\rangle$  præparerer systemet således, at vi kommer tilbage til den oprindelige tilstand  $|\psi\rangle$ . Hvis vi måler igen, kan vi få et nyt måleresultat end før. Men hvis vi måler rigtig mange gange på  $|\psi\rangle$ , hvad er så gennemsnittet af de mange måleresultatet? Dette gennemsnit kaldes forventningsværdien, og kan beregnes på følgende vis:

### 10. Forventningsværdi.

Gennemsnitsværdien af måleværdierne af  $\hat{A}$  på tilstanden  $|\psi\rangle$  er

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle ,$$

hvilket kaldes *forventningsværdien* af  $\hat{A}$  for tilstanden  $|\psi\rangle$ .

Hvis  $|\psi\rangle$  er en superpositionstilstand som i regel 9, så er forventningsværdien givet ved

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = c_1^2 a_1 + \dots + c_N^2 a_N ,$$

dvs. summen af de forskellige måleresultatet  $a_1, \dots, a_N$  vægtet med sandsynlighederne  $c_1^2, \dots, c_N^2$  for netop de udfald.

### **Eksempel: glad eller sur person (del 3)**

Vi vender atter en gang tilbage til systemet med to egentilstande for humørmåleoperatoren: sur og glad. Lad os sige, at systemet starter med at befinde sig i superpositionstilstanden

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\oplus\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\ominus\rangle ,$$

der består af 50% af hver af de to egentilstande. Jævnfør regel 9 vil en måling af humørmåleoperatoren  $\hat{M}$  (tænk på det som en måling af personens humør) have ét ud af følgende to udfald:

$$|\psi_{\text{før}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\oplus\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\ominus\rangle \xrightarrow{\text{måling af } \hat{M}} \begin{cases} |\psi_{\text{efter}}\rangle = |\oplus\rangle \text{ og } m_{\text{målt}} = +1 \text{ med s.s. } 1/2 \\ |\psi_{\text{efter}}\rangle = |\ominus\rangle \text{ og } m_{\text{målt}} = -1 \text{ med s.s. } 1/2 \end{cases}$$

hvor  $m_{\text{målt}}$  betegner værdien af den målte egenværdi for  $\hat{M}$ .

Forventningsværdien af humørmåleoperatoren beregnes jævnfør regel 10 som

$$\langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle = \frac{1}{2}(+1) + \frac{1}{2}(-1) = 0 ,$$

hvilket betyder at gentagne målinger af humøret af personen i superpositionstilstanden vil give 0. På en skala fra  $-1$  til  $+1$ , hvor  $-1$  er sur og  $+1$  er glad, så er personens humør altså i gennemsnit 0, hvis vi spørger mange gange. Dette hænger fint sammen med, at  $|\psi\rangle$  er en tilstand af 50% glad og 50% sur, så hvis vi skulle sætte en værdi på personens humør fra  $-1$  til  $+1$  er det eneste meningsfulde svar 0. Bemærk her, at selvom de enkelte målinger kun kan give resultatet  $-1$  eller  $+1$ , så kan gennemsnittet af mange målinger tage alle mulige værdier mellem  $-1$  og  $+1$ .

## **2.5 Regneregler for operatorer**

Operatorer, der virker på kvantemekaniske tilstande, er et vigtigt element i formuleringen af kvantemekanikken. Vi har i de foregående afsnit diskuteret hvordan operatorer kan beskrive fysiske observable, altså noget, man kan måle, og hvorledes man foretager målinger på en kvantemekanisk tilstand. Det er dog vigtigt at understrege, at ikke *alle* operatorer i kvantemekanik beskriver observable – altså nogle operatorer kan ikke måles, men har andre funktioner. Vi skal ikke komme yderligere ind på de matematiske egenskaber, der adskiller observable og ikke-observable operatorer, men med de rette matematiske forudsætninger er det nemt at give et kriterie for, hvornår en generel operator også er observabel. I dette afsnit skal vi give nogle generelle regneregler for operatorer (både de observable og ikke-observable).

### 11. Kommutativitet under addition og multiplikation med tal.

Rækkefølgen hvormed man adderer operatorer er underordnet (ligesom når man regner med tal), og man kan bytte om på tal og operator, når man ganger dem sammen:

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A} \quad \text{og} \quad \hat{A}a = a\hat{A} .$$

### 12. Associativitet.

Man kan sætte sine parenteser som man vil (ligesom når man regner med tal):

$$\hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}) = (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C}$$

og

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}$$

og

$$a(b\hat{A}) = (ab)\hat{A}$$

og

$$\hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle) = (\hat{A}\hat{B})|\psi\rangle .$$

Derfor undlader man ofte at skrive parenteserne overhovedet.

### 13. Distributiv lov.

Man kan gange tal ind i parenteser:

$$a(\hat{A} + \hat{B}) = a\hat{A} + a\hat{B}$$

og man kan gange tilstande ind i parenteser:

$$(\hat{A} + \hat{B})|\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle + \hat{B}|\psi\rangle .$$

Reglerne 11–13 er meget uskyldige, og man foranlediges til at tro at vi bare kan regne med operatorer som om de var tal. Men der er én stor forskel, nemlig at rækkefølgen hvormed vi *ganger* operatorer sammen, kan spille en rolle. Derfor kan vi generelt ikke bytte om på operatorer, vi ganger sammen! På en måde er dette ikke underligt, for når vi anvender en operator  $\hat{A}$  på en tilstand, ændrer vi jo generelt tilstanden. Hvis vi derefter anvender  $\hat{B}$  på resultatet, er det ikke mærkeligt, at vi kan få noget andet end hvis vi havde anvendt  $\hat{B}$  først, og dernæst  $\hat{A}$ .

### 14. Kommutator.

Generelt gælder der for operatorer, at man *ikke* kan bytte om på rækkefølgen, når man ganger dem sammen:

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A} .$$

Forskellen mellem  $\hat{A}\hat{B}$  og  $\hat{B}\hat{A}$  kaldes for *kommutatoren* mellem  $\hat{A}$  og  $\hat{B}$ , hvilket skrives

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} .$$

Bemærk, at

$$[\hat{B}, \hat{A}] = -[\hat{A}, \hat{B}] \quad \text{og} \quad [\hat{A}, \hat{A}] = 0 .$$

Desuden gælder den såkaldte *klaverregel*:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} .$$

Vær opmærksom på, at kommutatoren selv er en operator. Når vi fx skriver  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$  betyder 0'et, at hvis vi anvender operatoren på en tilstand, svarer det til at gange med 0.

Hvis  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ , dvs. hvis  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ , siger vi, at  $\hat{A}$  og  $\hat{B}$  *kommuterer*.

### Eksempel: glad eller sur person (del 4)

Vi vender for sidste gang tilbage til eksemplet med den glade eller sure person. I eksemplets første del definerede vi humørskifteoperatoren  $\hat{S}$  og humørmåleoperatoren  $\hat{M}$ , og vi så, hvordan de virkede på de to tilstande  $|\oplus\rangle$  og  $|\ominus\rangle$ . Ud fra denne viden kan vi udregne, hvordan kommutatoren  $[\hat{S}, \hat{M}]$  virker på tilstandene. Vi starter med at udregne

$$\hat{S}\hat{M} |\oplus\rangle = \hat{S}(+1) |\oplus\rangle = (+1)\hat{S} |\oplus\rangle = |\ominus\rangle$$

og

$$\hat{M}\hat{S} |\oplus\rangle = \hat{M} |\ominus\rangle = (-1) |\ominus\rangle = - |\ominus\rangle$$

Allerede her ser vi, at rækkefølgen af operatorerne har betydning for resultatet, så  $\hat{S}\hat{M} \neq \hat{M}\hat{S}$ . Kommutatoren anvendt på tilstanden bliver

$$[\hat{S}, \hat{M}] |\oplus\rangle = (\hat{S}\hat{M} - \hat{M}\hat{S}) |\oplus\rangle = \hat{S}\hat{M} |\oplus\rangle - \hat{M}\hat{S} |\oplus\rangle = |\ominus\rangle - (- |\ominus\rangle) = 2 |\ominus\rangle .$$

På tilsvarende vis kan vi beregne, hvorledes kommutatoren virker på den anden tilstand. Da

$$\hat{S}\hat{M} |\ominus\rangle = \hat{S}(-1) |\ominus\rangle = (-1)\hat{S} |\ominus\rangle = - |\oplus\rangle$$

og

$$\hat{M}\hat{S} |\ominus\rangle = \hat{M} |\oplus\rangle = (+1) |\oplus\rangle = |\oplus\rangle$$

finder vi, at

$$[\hat{S}, \hat{M}] |\ominus\rangle = (\hat{S}\hat{M} - \hat{M}\hat{S}) |\ominus\rangle = \hat{S}\hat{M} |\ominus\rangle - \hat{M}\hat{S} |\ominus\rangle = - |\oplus\rangle - |\oplus\rangle = -2 |\oplus\rangle .$$

Vi ser altså, at  $[\hat{S}, \hat{M}] \neq 0$ , og kommutatoren anvendt på en tilstand skifter humøret til det modsatte og ganger med  $\pm 2$ .

## 2.6 Usikkerhedsprincippet

Hvilken rolle spiller det, om to operatorer  $\hat{A}$  og  $\hat{B}$  kommuterer eller ej? Hvis  $\hat{A}$  og  $\hat{B}$  er to observable operatorer, så spiller det en stor rolle. Lad os sige, vores system er i en tilstand  $|\psi\rangle$ , og at vi ønsker at måle  $\hat{A}$  og  $\hat{B}$  på tilstanden. Vi har allerede diskuteret, at gentagne målinger af en observabel på den samme tilstand, kan give forskellige resultatet: De forskellige måleværdier har forskellige sandsynligheder. Hvis vi mäter  $\hat{A}$  på  $|\psi\rangle$  definerer man *usikkerheden* (eller standardafvigelsen) på målingen som

$$\Delta A = \sqrt{\langle\psi| \hat{A}^2 |\psi\rangle - \langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle^2}. \quad (2.1)$$

Bemærk, at  $\Delta A$  er et (ikke-negativt) tal, og derfor har vi ikke sat nogen hat på. Hvis usikkerheden  $\Delta A$  er stor, kan de forskellige måleresultater være meget forskellige. Omvendt, hvis usikkerheden  $\Delta A$  er lille, vil målingen give ca. det samme resultat hver gang. Det er nok bare at tænke på usikkerheden på denne måde, og den præcise definition i formlen (2.1) er ikke så vigtig. Vi husker, at når man mäter på en egentilstand, så får man altid egenværdien som måleresultat. Så hvis  $|\psi\rangle$  er en egentilstand for  $\hat{A}$ , så er  $\Delta A = 0$  (dette kan du vise i en opgave).

Forbindelsen mellem usikkerhederne af målingerne af to observable,  $\hat{A}$  og  $\hat{B}$ , og deres kommutator  $[\hat{A}, \hat{B}]$  er beskrevet i *usikkerhedsprincippet*.

### 15. Usikkerhedsprincippet.

Hvis  $\hat{A}$  og  $\hat{B}$  er to observable operatorer, vi mäter på den samme tilstand  $|\psi\rangle$ , gælder der, at

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq -\frac{1}{4} \left( \langle\psi| [\hat{A}, \hat{B}] |\psi\rangle \right)^2.$$

## 2.7 Hamiltonoperatoren, position og impuls

Vi har indtil nu været meget generelle og abstrakte i beskrivelsen af kvantemekanikken, og læseren har måske svært ved at se forbindelsen til rigtige fysiske systemer. Nu er vi endelig kommet til at benytte de introducerede koncepter på rigtige systemer.

I kapitel 1 så vi på, hvordan man beskriver klassiske systemer. Idéen var at opskrive udtryk for systemets kinetiske og potentielle energi som funktioner af nogle generaliserede koordinater og deres tidsafledte. Når man kender de klassiske udtryk for systemets energi er der en simpel procedure for at beskrive den kvantemekaniske version af systemet, som vi beskriver nedenfor.

Lad os betragte et klassisk system bestående af en partikel med massen  $m$  i én dimension,  $x$ . Den tidsafledte af positionen  $x$  er hastigheden  $\dot{x}$ , og ved at gange med massen  $m$  får vi impulsen  $p = m\dot{x}$ . Positionen  $x$  og impulsen  $p$  er de vigtige størrelser, og vi vil nu opskrive et udtryk for systemets energi som funktion af  $x$  og  $p$ . Den kinetiske energi er

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{1}{2m}p^2.$$

og den potentielle energi  $V$  er en funktion af  $x$ , der afhænger af det system, vi kigger på,  $V = V(x)$ . Udtrykket for totalenergien af det klassiske system er

$$E = T + V = \frac{1}{2m} p^2 + V(x) .$$

### Kvantisering og Hamilton-operatoren

Nu vil vi lave en kvantemekanisk version af systemet. Dette gøres ved at udskifte  $x$  og  $p$  med operatorer, så vi sætter hatte på:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \hat{x} \\ p &\rightarrow \hat{p} \end{aligned}$$

Når vi udskifter tallene  $x$  og  $p$  med operatorer  $\hat{x}$  og  $\hat{p}$  får vi en operator, der beskriver energien. Denne kaldes for Hamilton-operatoren:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(\hat{x}) \quad (2.2)$$

Vi har nu ”kvantiseret” vores klassiske system. Idéen er nu at finde egentilstandene for Hamilton-operatoren, dvs. de kvantemekaniske tilstande  $|\psi_i\rangle$ , der opfylder at

$$\hat{H} |\psi_i\rangle = E_i |\psi_i\rangle , \quad (2.3)$$

hvor  $i$  er et indeks, der beskriver de forskellige egentilstande. Da Hamilton-operatoren er lavet ud fra det klassiske udtryk for systemet energi, er det ikke overraskende at egenværdierne  $E_i$  er energierne for systemet. Dvs. foretager vi en måling af Hamilton-operatoren på en egentilstand  $|\psi_i\rangle$  får vi tilstandens energi  $E_i$  som måleresultat. Ligningen (2.3) kaldes Schrödinger-ligningen efter Erwin Schrödinger, der opdagede den i 1925 (godt nok i en lidt anden form end den her præsenterede).

### Heisenbergs usikkerhedsprincip

Vi har endnu ikke sagt noget om, hvordan  $\hat{x}$  og  $\hat{p}$  virker på forskellige tilstande, fordi det afhænger af, hvad man kigger på. Men en essentiel egenskab ved dem er, at de *ikke* kommuterer. Vi postulerer følgende kommutator:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar , \quad (2.4)$$

hvor  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Js er Plancks reducerede konstant, og  $i$  er et komplekst (imaginært) tal, der opfylder at  $i^2 = -1$ . Derfor skriver man ofte  $i = \sqrt{-1}$ . Vi skal ikke gå nærmere ind i den matematiske teori for komplekse tal, men du kan bare regne med  $i$  som et almindeligt tal, der har den sære egenskab at  $i^2 = -1$ . Kombineres kommutatoren (2.4) med usikkerhedsprincippet i regel 15, finder man

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 . \quad (2.5)$$

Ligning (2.5) er kendt som Heisenbergs usikkerhedsprincip efter Werner Heisenberg, der opdagede det i 1927. Det siger, at usikkerheden på en partikels position  $\Delta x$  ganget med usikkerheden på dens impuls  $\Delta p$  altid er større end eller lig med  $\hbar/2$ . Med andre ord kan man aldrig kende en partikels position og impuls på samme tid, for hvis man fx  $\Delta x$  lille må  $\Delta p$  bliver stor, så uligheden i (2.5) er opfyldt.

## 2.8 Kvantemekanisk harmonisk oscillator

Lad os kigge på et konkret og meget vigtigt kvantesystem: den harmoniske oscillator. Vi starter med at opskrive det klassiske udtryk for energien for en klassisk harmonisk oscillator, se afsnit 1.6. Den kinetiske energi er  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2m}p^2$  og den potentielle energi er  $V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ , hvor svingningsfrekvensen er  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Det klassiske udtryk for energien kan altså skrives som

$$E = T + V = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (2.6)$$

Vi kvantiserer nu systemet og erstatter  $x$  og  $p$  med operatorer  $\hat{x}$  og  $\hat{p}$ . Derved fremkommer Hamilton-operatoren

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2. \quad (2.7)$$

Ved hjælp af en del formelgymnastik og brug af kommutatorrelationen  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  (se en af opgaverne), kan vi omskrive  $\hat{H}$  til

$$\hat{H} = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (2.8)$$

hvor  $\hat{N}$  er en operator med egenværdierne  $0, 1, 2, 3, \dots$  De tilhørende egentilstande for  $\hat{N}$  angives  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots$  Dvs. vi har

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

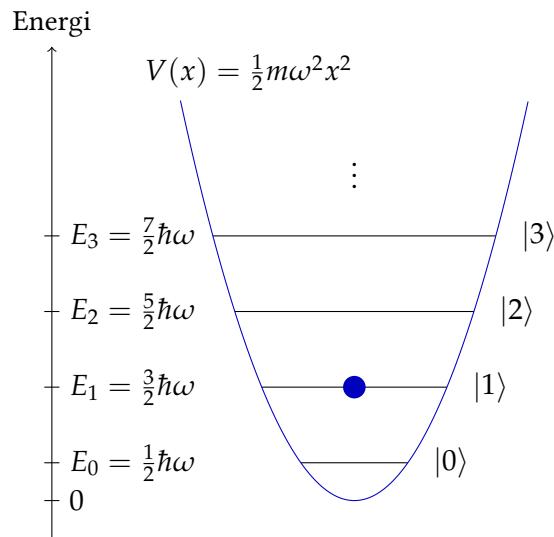
Vi ser, at  $|n\rangle$  også er egentilstande for  $\hat{H}$ , men med egenværdi  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}|n\rangle &= \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle \\ &= \left(\hat{N}|n\rangle + \frac{1}{2}|n\rangle\right)\hbar\omega \\ &= \left(n|n\rangle + \frac{1}{2}|n\rangle\right)\hbar\omega \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle \end{aligned}$$

Vi har altså, at tilstandene  $|n\rangle$  er de forskellige energitilstande i den harmoniske oscillator med energierne

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Bemærk, at den laveste energitilstand ikke har nul energi, men  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Så hvis partiklen befinder sig i tilstanden  $|0\rangle$  har den altså energien  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Bemærk også, at der er en fast afstand på  $\hbar\omega$  mellem de forskellige niveauer. Se figur 2.2, hvor vi har indtegnet energiniveauerne som trin i en stige i oscillator-potentialet  $V(x)$ . F.eks. kunne partiklen befinde sig i tilstanden  $|1\rangle$  med energi  $E_1$ , hvilket vi har markeret på tegningen.



Figur 2.2: Energiniveauerne i den kvantemekaniske harmoniske oscillator.

I den klassisk harmoniske oscillator kan energien af systemet tage alle mulige (positive) værdier og afhænger af amplituden af udsvinget i anden. Men når vi ser på den kvantemekaniske harmoniske oscillator, kan systemet kun have visse tilladte energier  $E_0, E_1, \dots$ . Vi har altså kvantiserede energiniveauer, og når vi mäter energien af systemet, kan vi kun måle en af disse tilladte energier! Dette er den helt afgørende forskel mellem klassisk mekanik og kvantemekanik. Studerer man f.eks. kvanteteorien for hydrogenatomer finder man ligeledes, at energien er kvantiseret i energiniveauer, nemlig de tilladte energier, som Bohr fandt i sin atommodel. Kvantiserede energiniveauer gør sig gældende i alle kantesystemer som f.eks. atomer og molekyler, og de er helt afgørende for kemiske og fysiske reaktioner mellem stoffer.



# Kapitel 3

## Laserfysik og optik

### 3.1 Laseren

Lasere er apparater, som kan udsende lys gennem *stimuleret emission af elektromagnetisk stråling* (engelsk: *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), og siden deres opfindelse i 1960'erne er de blevet en uvurderlig del af den moderne hverdag; laserteknologi bruges bl.a. i stregkodeskannere, laserprintere, fiberoptik og som en del af medicinske og kosmetologiske behandlinger. I fysikkens verden anvendes lasere i vid udstrækning, om det er eksperimentel kvantemekanik eller observation af fjerne astronomiske objekter med kæmpe teleskoper. Man kan forstå hvordan laseren udmærker sig ved f.eks. at sammenligne den med en almindelig lyspære. Begge apparater udsender lys, men mens pæren udsender lys af forskellige bølgelængder i alle retninger, så er laserens lys fokuseret i én retning, og det er muligt at udsende lys af tilnærmelsesvis kun én frekvens eller bølgelængde.

#### Sådan opstår laserlyset

Lyset fra en laser opstår i en vekselvirkning mellem lyspartikler (fotoner) og atomer. Energien af en foton  $E_{\text{foton}}$  er givet ved

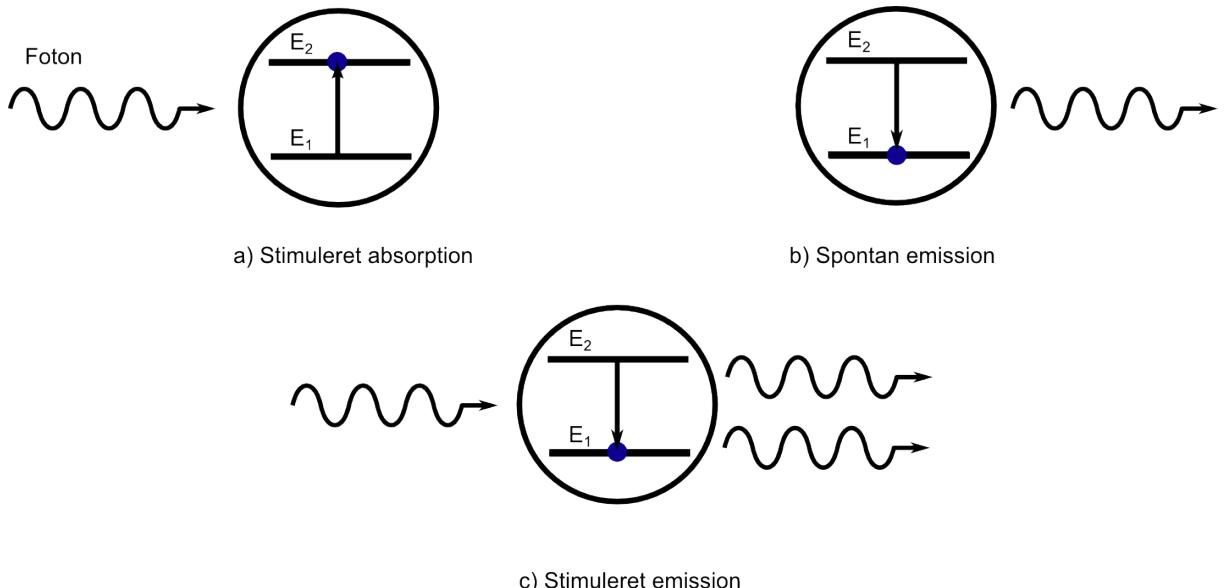
$$E_{\text{foton}} = hf = \frac{hc}{\lambda}, \quad (3.1)$$

hvor  $h$  er Plancks konstant,  $f$  er frekvensen,  $c$  lysets hastighed i vakuum og  $\lambda$  bølgelængden af lyset. Fotoner kan vekselvirke med atomer på 3 måder; *stimuleret absorption*, (*spontan*) *emission*, og *stimuleret emission*, som er illustreret i figur 3.1.

Lad os betragte et eksempel med et simpelt atom bestående af to energiniveauer: grundtilstanden (laveste energi)  $E_1$  og en højere (exciteret) energitilstand  $E_2$ . Befinder atomet sig i grundtilstanden kan det blive exciteret ved at få energi tilført tilsvarende forskellen i energi mellem de to niveauer. Dette kan blandt andet ske ved at *absorbere* en foton med energien

$$hf = E_2 - E_1.$$

Dette kaldes *stimuleret absorption* (se figur 3.1). Den exciterede tilstand vil være ustabil og atomet vil før eller siden henfalde tilbage til grundtilstanden under udsendelsen af en foton med samme energi, hvilket



Figur 3.1: Vekselsvirkning mellem lys og atomer. **a)** Absorption: et atom kan exciteres af en indkommende foton. **b)** Spontan emission: et exciteret atom henfalder af sig selv. **c)** Stimuleret emission: et exciteret atom stimuleres til at henfalde af en indkommende foton.

kaldes *spontan emission* (se figur 3.1). *Stimuleret emission* sker, når atomet befinner sig i en exciteret tilstand og vekselvirker med en foton, som har energien tilsvarende  $hf = E_2 - E_1$  (se figur 3.1). Her udsender atomet en “ekstra” foton med samme energi og retning som den oprindelige foton. Sidstnævnte proces er principippet bag det udsendte laserlys.

Inde i en laser består den af et materiale, f.eks. en gas eller et krystal, som befinner sig mellem to spejle. Dette kaldes en *optisk kavitet* eller resonator. Atomerne eller molekylerne i materialet kan bringes i en ønsket exciteret tilstand ved hjælp af stimuleret absorption ved at f.eks. stråle på materialet med fotoner af den rette energi, en proces som kaldes pumpning. For at stimuleret emission kan foregå skal størstedelen af atomerne befinde sig i en exciteret tilstand – men dette kan *ikke* foregå i et to-niveau system som det atom vi har brugt som eksempel indtil videre (vi skal overveje hvorfor i en opgave). Virkelighedens lasersystemer gør derfor brug af flere atomare (eller molekylære) energiniveauer.

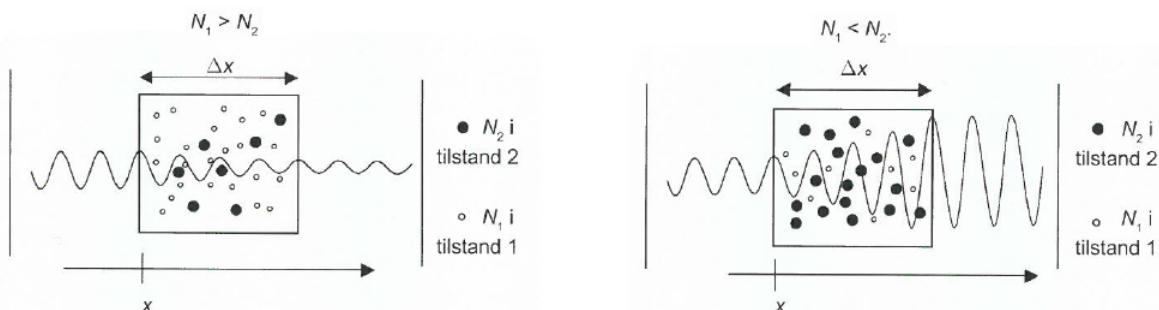
Når en stor del af atomerne befinner sig i den exciterede tilstand vil nogle af atomerne henfalde ved spontan emission. De udsendte fotoner vil give anledning til stimuleret emission af de exciterede atomer, og sådan opstår en “kædereaktion” og en forstærkning af antallet af fotoner med samme energi. Fotonerne vil blive reflekteret på spejlene i den optiske kavitet, hvilket fører til en forstærkning af antallet af fotoner, der reflekteres mellem de to spejle. Hvis det ene spejl er konstrueret sådan at det ikke er 100% reflekterende, så vil fotonerne undslippe kaviteten den vej. De undslupne fotoner udgør laserstrålen.

## Forstærkning af lyset

For at illustrere hvordan lyset forstærkes inde i laseren kan vi igen for nemheds skyld antage, at vi har med et 2-niveau atom at gøre med de to tilstande  $E_1$  og  $E_2$ , hvor  $E_1$  er grundtilstanden og  $E_2$  er en exciteret tilstand. Mellem de to spejle i den optiske kavitet vil lyset bevæge sig gennem mediet af atomer. Vi kan antage at området med mediet har længden  $\Delta x$ . Bevæger lys sig eksempelvis fra venstre mod højre, vil intensiteten af strålingen ændre sig gennem mediet. Ændringen i intensiteten  $\Delta I$  ved en position  $x$  i mediet vil være proportional med tykkelsen af mediet  $\Delta x$  og intensiteten  $I(x)$ . Ændringen kan skrives som

$$\Delta I = -\alpha I(x)\Delta x. \quad (3.2)$$

Proportionalitetskonstanten  $\alpha$  kaldes for *absorptionskoefficienten*. Det negative fortegn fortæller at ændringen i intensitet normalt er negativ når lys bevæger sig igennem et materiale, fordi det bliver absorberet. Når mediet absorberer lyset er det fordi antallet af atomer i grundtilstanden, f.eks. kaldet  $N_1$ , er større en antallet af atomer i den exciterede tilstand,  $N_2$ . Normalt er  $N_1 > N_2$ , men ved at pumpe systemet med den rigtige energi kan det opnås at  $N_2 > N_1$ . Det betyder at absorptionskoefficienten  $\alpha$  (som afhænger af forskellen  $N_1 - N_2$ ) skifter til negativt fortegn og derfor at intensiteten af lyset øges ved at passere gennem mediet. Når lyset reflekteres på spejlene og igen og igen bevæger sig gennem mediet så øges intensiteten mange gange. Mindskning og forstærkning af lysintensiteten gennem et medium er illustreret i figur 3.2.



Figur 3.2: Intensitet af lyset gennem et medium, når lyset bevæger sig fra venstre mod højre. **Venstre figur:** Antallet af atomer i grundtilstanden  $N_1$  er højere end i den exciterede tilstand  $N_2$ , og lyset mister intensitet ved at bevæge sig gennem mediet. **Højre figur:** antallet af exciterede atomer  $N_2$  er højere end antallet af atomer i grundtilstanden  $N_1$  og lyset bliver forstærket af at bevæge sig gennem mediet.

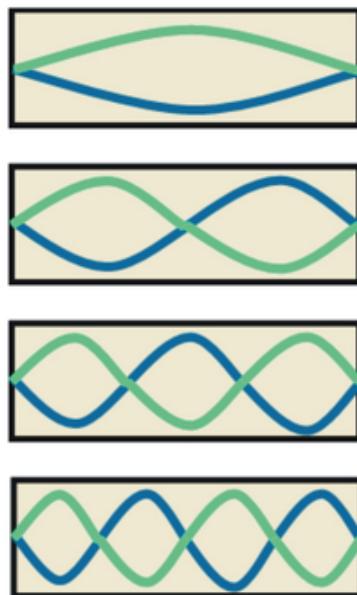
## Stående bølger i kavitteren

Ligesom man kan skabe stående bølger på en streng der er fastgjort i begge ender ved at sætte den i bevægelser op og ned, så kan lys også danne stående bølger. En stående bølge som man kender det for en streng består af steder med kraftigt udsving (hvor f.eks. to interfererende bølger forstærker hinanden, kaldet positiv interferens) og steder uden udsving (hvor f.eks. to bølger udslukker hinanden, kaldet negativ interferens). Steder hvor bølger udslukker hinanden kaldes for knuder, mens steder med positiv

interferens kaldes for bølge-buge. Mellem to spejle kan der opstå stående bølger når lys bliver reflekteret og interfererer, men kun hvis afstanden mellem spejlene,  $L$ , opfylder

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

Sagt med andre ord: stående bølger af lys med bølgelængden  $\lambda$  kan opstå hvis afstanden mellem laserens spejle er et helt antal halve bølgelængder. Af hensyn til lysets forstærkning i laseren er det derfor vigtigt, at laseren er udformet således, at stående bølger kan opstå for den ønskede bølgelængde. Figur 3.3 viser eksempler på udseendet af stående bølger i en kavitet med længder svarende til forskellige  $n \frac{\lambda}{2}$ .



Figur 3.3: Stående bølger hvor længden af kaviteten svarer til (øverst til nederst)  $L = \frac{\lambda}{2}$ ,  $L = \lambda$ ,  $L = \frac{3\lambda}{2}$ , ...

## 3.2 Optik

*Optikken* er den del af fysikken, som beskæftiger sig med hvordan synligt lys og andet elektromagnetisk stråling opfører sig, og hvordan optiske konstruktioner som f.eks. teleskoper, briller, det menneskelige øje og kameraer fungerer.

### Refleksion og brydning af lys

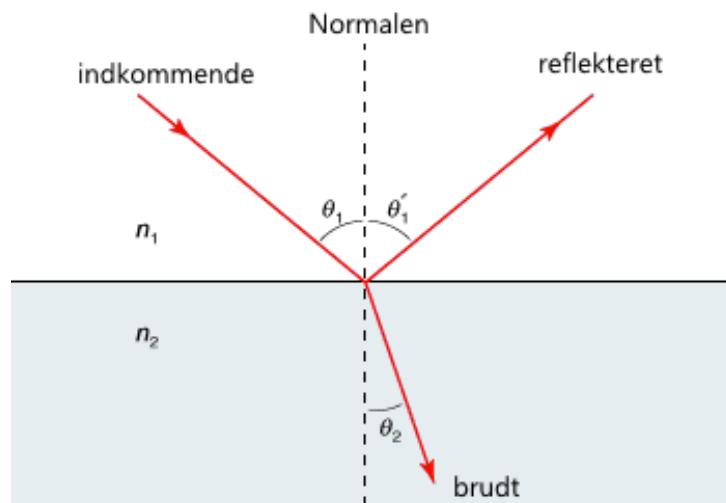
Mange har haft om lyssets refleksion og brydning i gymnasiet, her bliver koncepterne kort gennemgået. Lys og andet elektromagnetisk stråling bevæger sig med en fast hastighed i vakuum,  $c$ , men vil bevæge sig langsommere i andre materialer som f.eks. luft, vand, osv. Forholdet mellem  $c$  og lyssets hastighed i

et andet materiale,  $v$ , kaldes for materialets *brydningsindeks*,  $n$ :

$$n = \frac{c}{v}. \quad (3.4)$$

Da  $n$  er et forhold mellem to hastigheder er det et enhedsløst tal. Brydningsindekset for vakuum er  $n = 1$ .

Figur 3.4 viser en situation hvor lys, bare illustreret med en stråle går fra ét materiale med brydningsindeks  $n_1$  til et andet materiale med brydningsindeks  $n_2$ . Indfaldsvinklen  $\theta_1$  er vinklen mellem den indkomne stråling og "normalen" – en fiktiv linje, som sidder vinkelret på materialet. En del af lyset bliver reflekteret fra overfladen og forlader overfladen med udfaldsvinklen  $\theta'_1$ , mens en anden del af lyset brydes og rejser gennem det nye materiale med en ny vinkel fra normalen, kaldet brydningsvinklen,  $\theta_2$ .



Figur 3.4: Refleksion og brydning af indkommende stråle på en glat overflade.

Gennem eksperimenter har man bestemt to love, som beskriver lysets refleksion og brydning:

- Indfaldsvinklen  $\theta_1$  og udfaldsvinklen  $\theta'_1$  er lig hinanden for alle bølgelængder og materialer:

$$\theta_1 = \theta'_1, \quad (\text{Refleksionsloven}) \quad (3.5)$$

- Forholdet mellem to brydningsindekser  $n_1$  og  $n_2$  er lig det inverse forhold til sinus af deres vinkler:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)}, \quad (\text{Brydningsloven/Snells lov}) \quad (3.6)$$

Ligning 3.6 forklarer, hvorfor f.eks. et sugerør i vand ser ud som om det er knækket (figur 3.5). Hvorfor det præcis ser ud som det gør, gemmer vi til en opgave.

En vigtig egenskab for lysets refleksion og brydning mellem to materialer er, at hvis lyset rejser den modsatte vej, så *opfører det sig på den samme måde*. Dvs. at hvis vi kigger på figur 3.4 og ændrer



Figur 3.5: Lysets brydning mellem luft og vand.

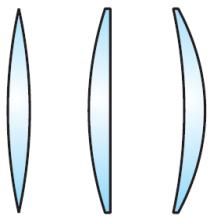
retningen af pilen på den brudte stråle, sådan at vi nu kigger på lys der rejser fra  $n_2$  til  $n_1$ , så vil strålen der før illustrerede den indkommende stråle nu illustrere den brudte stråle. Sagt på en anden måde: Lys fra et punkt i ét materiale til et andet punkt i et andet materiale rejser den samme vej, som lys fra det andet punkt til det første. Det forklarer bl.a. hvorfor det er muligt at få øjenkontakt med nogen gennem et spejl – idet lysets vej fra dig til et spejl og til din ven går samme vej fra din ven til spejlet til dig.

### Geometrisk optik: Linser og billeddannelse

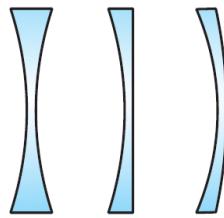
Den geometriske optik beskæftiger sig med hvordan refleksion og brydning kan bruges til billeddannelse. Et vigtigt objekt et linsen, som f.eks. danner billeder i briller og teleskoper. Overordnet set findes der to typer linser: *samlelinser* og *spredelinser* (figur 3.6). Samlelinser samler lyset, som det ses i figur 3.6. Her sendes lys, illustreret som parallelle stråler, ind langs den optiske akse (symmetri-aksen for systemet), og samlelinsen samler lyset i et punkt  $F$ , kaldet *brændpunktet*. Afstanden fra linsen til brændpunktet kaldes for fokallængden,  $f$ . Sendes parallelle stråler i stedet mod en spredelinse, så spredes lyset (se venstre side af figur 3.6). Hvis man følger de spredte stråler tilbage mod linsen *ser det ud som om* strålerne samles i punktet  $F$ , spredelinsen brændpunkt. Sammenlignet med samlelinsen, så sidder spredelinsens fokalpunkt på den modsatte side af linsen. En spredelinses fokallængde angives derfor med negativt fortegn.

Figur 3.7 viser et eksempel på billeddannelse ved hjælp af en tynd<sup>1</sup> samlelinse. Vi betragter et objekt, som ligger i punktet  $Q$ .  $Q$  udsender/reflekterer lys i alle retninger, hvorfaf noget lys rammer en tynd samlelinse. For at finde ud af, hvor der dannes et *billedpunkt*,  $U$ , behøver man kun tegne to stråler; én som går parallelt med den optiske akse og som brydes i punktet  $R$  og én, som går i lige linje fra  $Q$  og gennem linsens centrum  $O$ . Billedet af  $Q$  dannes i  $U$ , der hvor de to linjer mødes. Nu har vi fundet ud af, hvor et uendeligt lille punkt ville blive dannet som billede, men hvad med en et udstrakt objekt, som

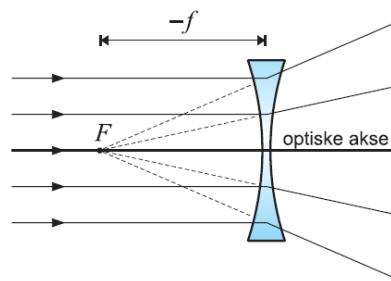
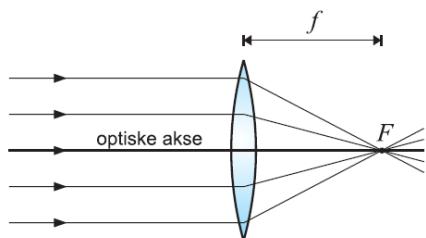
<sup>1</sup>Tyne linser er linser, hvor tykkelsen kan negligeres. Her behøver man ikke tage højde for, at lyset brydes flere gange, når det passere linsens to overflader



Samlelinser

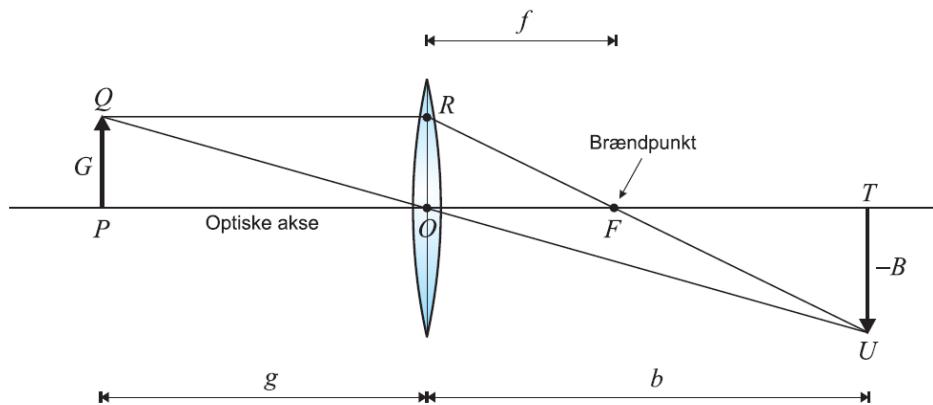


Spredelinser



Figur 3.6: Forskellige typer linser og konceptet bag samlelinser og spredelinser.

eksempelvis en pil fra  $P$  til  $Q$ , som tegnet på figuren? Ved at dele pilen op i uendelig mange punkter og på samme måde tegne de to stråler平行 med den optiske akse og gennem linsens centrum vil man danne billedet på den anden side af linsen. På grund af linsens egenskaber bliver billedet dannet på hovedet.



Figur 3.7: Billededdannelse ved hjælp af samlelinse.

Størrelsen af genstanden  $PQ$  betegnes  $G$ , mens størrelsen af billedet  $TU$  betegnes  $-B$  (negativt fortegn, idet billedet vender på hovedet). Afstanden fra genstand til linse kalder vi  $g$ , mens afstanden fra

linsen hvor billedet dannes kalder vi  $b$ . Med disse betegnelser kan vi angive linseformlen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (3.7)$$

Formel 3.7 gælder også for spredelinser, her er  $f$  og  $b$  bare angivet med negative fortegn. I geometrisk optik skelner man mellem ”fiktiv” eller ”indbildt” billeddannelse og ”reel” billeddannelse. Et *reelt* billede dannes på den modsatte side af linsen, hvorfra genstanden er placeret, som f.eks. er vist i figur 3.7. Et sådant billede vil f.eks. kunne vises på en skærm, hvis den blev placeret i billeddannelsespunktet. Et *indbildt* billede er et billede, som dannes på samme side af linsen som genstanden. Betragt f.eks. spredelinsen i figur 3.6 hvor de spredte lysstråler ser ud til at komme fra punktet  $F$  på samme side. Generelt så husk på, at dør, hvor strålerne enten reelt mødes eller tilsyneladende mødes i et punkt bliver der dannet henholdsvis reelle og fiktive billeder.

Afhængig af linsen, vil billedets størrelse være mere eller mindre ændret i forhold til objektets størrelse. Forstørrelsesfaktoren,  $m$  er forholdet mellem billedets udstrækning og genstandens udstrækning:

$$m = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}, \quad (3.8)$$

hvor man skal huske at bruge de rigtige fortegn for  $B$  og  $b$ . Er  $m < 1$ , bliver billedet formindsket af linsen, mens billedet forstørres hvis  $m > 1$ . Negative værdier for  $m$  betyder, at billedet vender på hovedet.

# Kapitel 4

## Astrofysik

I dette kapitel skal vi beskæftige os med astrofysik, som dækker over studiet af himmellegemer og de love og processer som styrer det univers vi kan se fra Jorden. Ganske som Universet er et enormt sted, så er astrofysikken et meget bredt felt, og der er alt for meget at beskæftige sig med til, at det hele kan introduceres her. Vi har derfor valgt at fokusere på fysikken bag stjerner, og hvorfor det er vigtigt. Kapitlet er inddelt kronologisk efter stjernens liv og vil introducere grundlæggende viden om, hvordan stjerner dannes, hvordan de lever og dør, samt hvordan de i det hele taget virker. I løbet af denne gennemgang vil vi også stifte bekendtskab med processer som er tæt knyttet til forståelsen af stjerner, f.eks. i forbindelse med dannelsen af planeter og de grundstoffer som vi alle består af.

Der findes mange enheder og konstanter, som astronomer ofte bruger i flæng. Vi har inkluderet en række af dem i listen over konstanter som findes i dette kompendium.

### 4.1 Dannelsen af stjerner og planeter

Stjerner dannes ud af gigantiske skyer af støv og gas som findes i galakserne. Disse enorme gasskyer, som primært består af hydrogen og helium, kan kollapse under deres egen tyngdekraft. Disse gasskyer er meget tættere end resten af rummet mellem stjernerne. Det typiske antal partikler i molekyleskyerne er  $\rho_{\text{sky}} \sim 10^{12} \text{ molekyler m}^{-3}$ . Det kan sammenlignes med Jordens atmosfære, hvor det tilsvarende tal ville være  $n \sim 10^{25} \text{ molekyler m}^{-3}$ . Det virker måske ikke af så meget, men fordi disse skyer kan være flere lysår i udstrækning er der altså tale om vildt mange partikler. De er bare spredt ud over et enormt område, og skal altså trykkes rigtig meget sammen før vi får noget spændende ud af det.

Den komprimering leveres af tyngdekraften. Vi kan antage, at skyen er helt kugleformet og at den så pludselig begynder at trække sig sammen. Den tid det tager for molekylerne at falde ind til centrum af kuglen afhænger kun af densiteten (massetætheden) af skyen til at starte med og kaldes for frit-falds tiden,  $t_{\text{ff}}$ , og er givet ved

$$t_{\text{ff}} = \left( \frac{3\pi}{32G\rho_0} \right)^{1/2} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ yr} \left( \frac{3 \cdot 10^{-15} \text{ kgm}^{-3}}{\rho_0} \right), \quad (4.1)$$

hvor  $G$  er Newtons gravitationskonstant.

Det viser sig, at man kan regne sig frem til nogle kritiske værdier for en række parametre, som kan bruges til at afgøre, hvornår en sky vil kollapse. Samlet set, er dette kendt som *Jeans kriterier* og findes for både radius (Jeans-længde) og masse (Jeans-masse) af skyen:

$$r_{\text{Jeans}} = 2000 \text{ AU} \left( \frac{T}{10 \text{ K}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_0}{2 \cdot 10^{-15} \text{ kgm}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad (4.2)$$

$$M_{\text{Jeans}} = 0.2 M_{\odot} \left( \frac{T}{10 \text{ K}} \right)^{3/2} \left( \frac{\rho_0}{2 \cdot 10^{-15} \text{ kgm}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad (4.3)$$

Som man kan se ud fra formlerne, så sker stjernedannelse altså typisk i kolde, tætte områder.



Figur 4.1: På figuren ses den ikoniske ørnetåge - en stor sky af gas og støv, som langsomt er ved at kollapse til at danne stjerner. Nogle steder er skyen så tæt, at stjerner allerede er ved at blive dannet. Ser man f.eks. øverst på billedet ses hvordan lyset fra en nyfødt stjerne er ved at presse omkringliggende gas væk i to jetstråler, vinkelret på stjernens omdrejningsskive. Skyen befinner sig ca. 7000 lysår væk og er dens dimensioner måles også selv i lysår. Kilde: NASA

Hvis en tæt klump inde i en stor molekylesky overskrider sin Jeans-længde vil et lille skub til den få den til at kollapse. Stoffet falder dog ikke bare ind til en mindre og mindre klump. På grund af den fysiske lov, som siger at impulsmomentet<sup>1</sup> er bevaret vil stoffet i stedet danne en tæt klump i midten, mens en del af det vil lægge sig i en skive rundt omkring stjernen. Det er i denne skive, at planeter kan dannes. Store skyer har typisk masser på mange gange Solens (nogle helt op til tusinder af Solens masse) og fragmenterer i flere små, som hver danner en stjerne. Der bliver altså skabt en masse stjerner i disse store skyer. Man ved endnu ikke om der dannes planeter omkring alle stjerner, men fundet af tusinder af exoplaneter over de seneste år tyder på, at planeter er et ganske almindeligt biprodukt af stjernedannelse.

## 4.2 Hvordan virker stjerner?

For at forstå hvordan stjerner virker, er vi nødt til at se på, hvordan de er bygget op, og hvilke fysiske love som bestemmer deres struktur. Langt de fleste stjerner består primært af hydrogen og noget helium, samt meget små mængder af tungere grundstoffer. Pga. den høje temperatur er alt stof i den tilstandsform, som man kalder plasma (når atomernes kerner og elektroner er skilt fra hinanden). Dvs. at når der refereres til grundstoffer som f.eks. hydrogen, så er der altså kun tale om kernen. Elektronerne er ikke bundet til kernen, og kun i de koldeste stjerner ser vi altså rigtige atomer som man ellers kender dem, hvor elektronerne er bundet i kredsløb om en kerne.

Vi vil gerne opstille nogle grundlæggende ligninger som beskriver vores stjerne. Vi kan antage, at stjernen er en kugle med en givet størrelse og en givet masse. Vi betragter en cylindrisk plade i stjernen med areal  $dA$  og som strækker sig fra afstanden  $r$  til afstanden  $r + dr$  fra stjernens centrum, se figur 4.2. For at opnå bevægelsesligningen for skallen bliver vi nødt til at evaluere de kræfter, der virker på pladen. En af disse kræfter er tyngdekraften. Det er velkendt, at tyngdekraften i en afstand  $r$  fra centrum, udelukkende skyldes den masse der er indeholdt i dette punkt. Lad denne masse være  $m = m(r)$ , da vil gravitationelle acceleration være  $-Gm/r^2$ . Volumenet af pladen er  $drdA$ .

Derfor, hvis densiteten i pladen er  $\rho$ , så vil pladen have massen  $\rho drdA$ , og tyngdekraften er da  $dF_g = -\rho \frac{Gm}{r^2} drdA$ . Den anden kraft kommer fra det totale tryk på pladen:  $dF_P \simeq -\frac{dP}{dr} drdA$ .

Hvis vi kræver, at stjerne er i ligevægt, således at accelerationen forsvinder og der er en ligevægt mellem tyngdekraft og tryk så stjernen hverken er ved at udvide eller trække sig sammen, vil man få at trykgradienten kan bestemmes ved

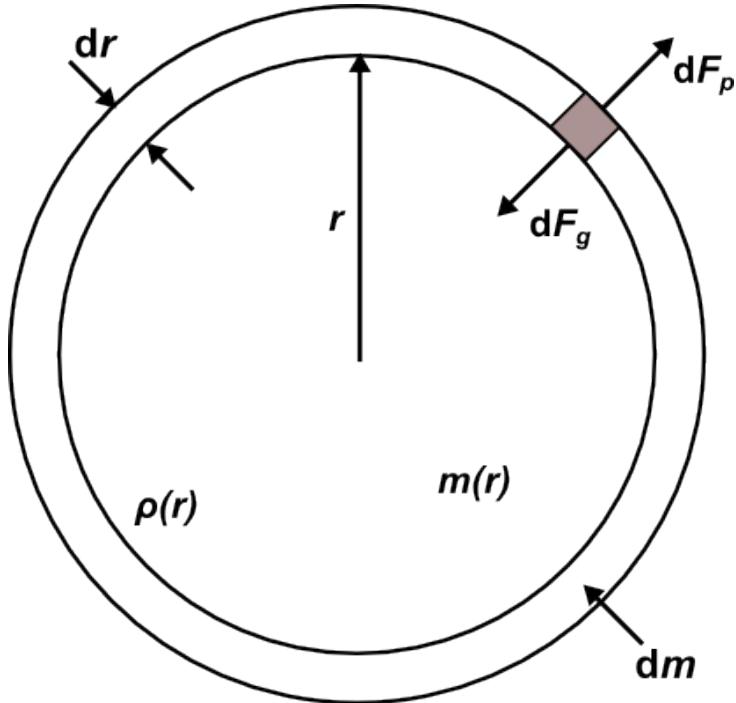
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \quad \text{Hydrostatisk ligevægt.} \quad (4.4)$$

Dette er den første af ligningerne for stjernes struktur. Denne ligning skal suppleres af en ligning der relaterer  $m$  til andre egenskaber for stjernen. Det følger direkte fra definitionen af  $m$ , at

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{massekontinuitetsligningen} \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup>Impulsmomentet forklarer groft sagt, hvor meget noget snurrer rundt, og er en bevaret størrelse. Det vil sige, at når en stor, og langsomt roterende, sky kollapser, så vil den snurre hurtigere og hurtigere rundt, jo mere vi klemmer massen sammen. Det svarer til en skøjteløber, som snurrer rundt med udstrakte arme for så at trække dem ind til kroppen.



Figur 4.2: Masseskål i en sfærisk symmetrisk stjerne af tykke  $dr$  og bestående af massen  $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ . I hydrostatisk ligevægt vil presset  $dF_p$  on den lille plade opveje tyngdekraften  $dF_g$  på pladen på grund af massen  $m(r)$  indenfor radius  $r$ .

Dette er vores anden ligning. Disse to ligninger er de mest essentielle når man kigger på stjerners struktur. Ud fra ligning 4.4 og ligning 4.5 er det muligt at fortælle noget om, hvordan en stjerne "ser ud".

Den første ligning beskriver den tilstand, som stjernerne primært befinner sig i, kendt som *hydrostatisch ligevægt* mens den anden er kendt som massekontinuitetsligningen, og som I kan se fortæller den bare at stjernens samlede masse er summen af masselementer. Der er en balance mellem det tryk som kommer fra stjernen selv (grundet varmen fra energiproduktionen i centrum) og tyngdekraften som forsøger at trykke den sammen.

Ud over disse kræver forståelsen af stjerner også en tilstandsform. For de fleste stjerner kan man bruge en kendt fra gymnasiet nemlig idealgasligningen

$$P(r) = \frac{\rho(r) k T(r)}{\mu m_p} \quad \text{Idealgasligningen,} \quad (4.6)$$

hvor  $\mu$  er middelmolekylærmassen og  $m_p$  er massen af en proton, som er det som stjerner primært består af. Desuden er vi også nødt til at have en ligning for energitransporten i stjernen. Den er lidt mere kompliceret, men grundlæggende giver den anledning til, at energi kan transporteres gennem stjerner på to forskellige måder - enten gennem stråling eller gennem konvektion<sup>2</sup>. Hvad der er mest effektivt

<sup>2</sup>Konvektion i stjerner er grundlæggende det samme som sker når man koger vand i en gryde, bare ved en højere temperatur. Varme områder stiger opad og køler ved overfladen inden de synker tilbage igen.

afhænger af stjernen. I Solen transporterer energien ud af centrum via stråling og kun i de yderste ca. 30 % sker transporten via konvektion. I tunge stjerner dominerer stråling mens dværgstjerner væsentligt mindre end Solen er fuldt konvektive.

Det sidste som vi mangler er noget som beskriver, hvor meget energi som produceres af stjernen. Energiproduktionen kommer primært fra fusionen af hydrogen til helium. Det forløber via flere mellemliggende processer, men den overordnede er



hvor  $\nu_e$  er elektronneutrinoer og  $\gamma$  er elektromagnetisk stråling. Energien bæres delvist i denne og kinetisk energi af partiklerne. En ligning kan godt skrives op så den stråling der kommer ud af et givet energiproducerende område afhænger af masseylden og energien fra reaktionerne:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r), \quad (4.8)$$

hvor  $\epsilon$  afhænger af energien der kommer ud af stjernen. For reaktionen beskrevet ovenfor er  $\epsilon \propto T^4$ .

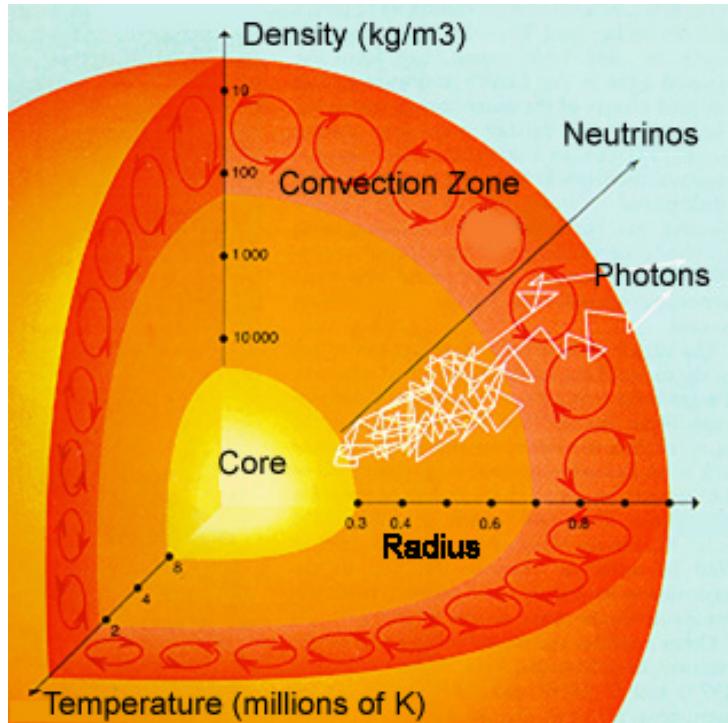
Kender vi vores middelmolekulære masse, vores ligning(er) for energitransport samt energiproduktionen  $\epsilon$ , som strengt taget er en funktion af densitet og temperatur  $\epsilon(\rho, T)$ , så har vi i principippet alt vi skal bruge til at beskrive vores stjerne overordnet set.

### 4.3 En stjernes liv

Når en stjerne begynder at fusionere hydrogen i centrum opnår den hydrostatisk ligevægt - energien fra fusionen skaber et tryk, som forhindrer tyngdekraften i at presse stjernen yderligere sammen. En stjerne siges at befinde sig på hovedserien (se afsnittet om HR-diagrammer nedenfor), og her forbliver den i en rum tid. Præcis hvor længe afhænger af, hvor stor stjernen er - altså hvor meget masse den blev skabt med. Stjerner som Solen opholder sig typisk 10 milliarder år på hovedserien indtil fusionen af hydrogen i centrum holder op. De stjerner som er lettere end Solen (der f.eks. kun har halvt så meget masse) kan fusionere hydrogen i meget længere tid mens tunge stjerner (8, 9, 10 og ja helt op til hundrede solmasser) kun holder millioner af år inden fusion af hydrogen ophører.

Det vigtigste der bestemmer en stjernes liv er dens masse. Lette stjerner som Solen vil fusionere hydrogen i omtrent 10 milliarder år. Herefter begynder de at falde sammen indtil temperaturen er steget så meget, at det næste grundstof i rækken kan fusioneres - helium. En ny hydrostatisk ligevægt opstår i nogle millioner år indtil også helium er blevet brugt op. Solen vil i mellemtiden have svulmet op (husk på, at hydrostatisk ligevægt giver en bestemt radius for en stjerne, og en ny hydrostatisk ligevægt ved en anden energiproduktion vil give en anden radius) og vokset til ca. 2 AU, hvor den nu er kendt som en *rød gigant*. Med en afstand på 1 AU fra Jorden til Solen skal vi altså nok helst være flyttet til den tid. Fusionen af helium har ændret Solens kerne til carbon, oxygen og neon og det er sådan Solen ender sine dage - det vender vi tilbage til.

Tunge stjerner fusionerer også hydrogen til helium men da stjernen er så tung, så vil temperaturen også være højere i centrum. Det betyder at stjernen meget hurtigere kan fusionere hydrogen og frigive



Figur 4.3: Solens opbygning er vist med et estimat over massefylden og temperaturen. Fusionen foregår i kernen hvorfra energien transportereres først gennem stråling og senere gennem konvektion. Neutrinoer, som også produceres som et produkt af fusionsreaktionerne strømmer frit ud igennem stjernen. Kilde: University of Oregon

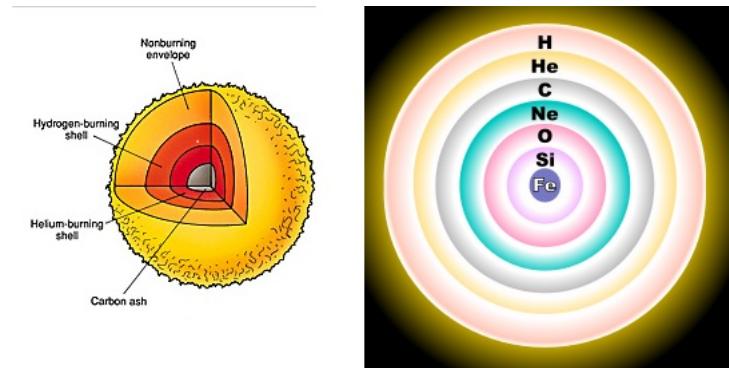
den energi, der er påkrævet for at modsvare tyngdekraften. Tunge stjerner lever altså ikke så længe. Der går blot omtrent 10 millioner år eller kortere (altså  $1/10$  af Solens levetid) før de når slutningen af deres liv. Modsat stjerner som Solen, så bliver temperaturen i de store stjerner høj nok til, at de kan fusionere slutprodukterne efter helium forbrænding (altså carbon, oxygen osv.) til endnu tungere grundstoffer. Til sidst når de silicium (Si) som fusioneres til jern (Fe). Ved jern opstår imidlertid et problem: der viser sig, at jern er det grundstof, som er bedst bundet sammen, og man kan derfor ikke vinde energi ved fusionere jern. Tyngdekraften vinder og stjernen ender sine dage på meget spektakulær vis.

Fusionen der leder frem til jern forløber hurtigere og hurtigere. Så mens hydrogenforbrændingen i tunge stjerner forløber over millioner af år, og heliumforbrændingen over hundretusinder, så tager omdannelsen af Si til Fe kun omtrent én dag!

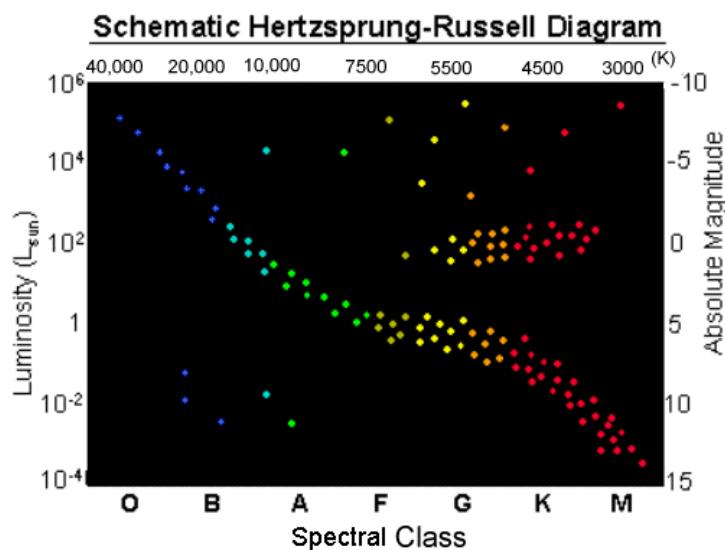
#### 4.4 H-R diagram

Et Hertzsprung-Russell diagram - som ofte forkortes H-R diagram - er et punktdiagram af stjerner, der viser sammenhængende mellem en stjernes absolutte magnitude eller luminositet mod den effektive temperatur eller spektralklassen, som det også ses af fig 4.5.

Det diagonale bånd fra øverste venstre hjørne til nederst i højre kaldes for hovedserien (engelsk: main sequence). De meget lysstyrke, men kolde, gigant stjerner findes i øverste højre hjørne, mens de



Figur 4.4: Skematisk opbygning af udviklede stjerner efter de har forladt hovedserien. Til venstre ses lette stjerner som Solen mens billedet til højre viser skæbnen for tunge stjerner over 8 solmasser.



Figur 4.5: Figuren viser en grov skitse af et H-R diagram samt få karakteristika for stjerner ud fra deres luminositet, temperatur mm.

lyssvage og varme dværges findes nede i venstre hjørne af H-R diagrammet.

De fleste stjerne er klassificeret efter MK-systemet, hvor man bruger bogstaverne OBAFGKM (en lille sød remse man kan lære for at huske den er: "Oh Be A Fine Guy/Girl, Kiss Me"), hvor O-stjerner er de varmeste, mens M-stjerner er de koldeste. Herunder er hver "klasse" inddelt i undergrupper med 0 som værende de varmeste og op til 9, som er de koldeste. Man angiver også ofte typen af stjerne med et romersk tal afhængig af dens størrelse. Sidenhen er rækkefølgen blevet udvidet med klasser for andre typer stjerner samt stjernelignende objekter, som ikke passer ind i det traditionelle system. Her kan der nævnes "D" for hvide dværges. Solen er en type "G2 V", hvor "V" er det romerske tal 5 og angiver dværgstjerner (i denne sammenhæng er Solen en dværg, hvor f.eks. III er en gigant).

En stjerne som Solen vil altså leve det meste af sin tid på hovedserien, mens den fusionerer hydrogen,

for derefter at vokse op af gigantgrenen under heliumforbrænding.

## 4.5 Stjerners endeligt og hvad der bliver tilbage

Stjerner som Solen ender deres dage med en kerne bestående af carbon, oxygen, neon og i nogle tilfælde magnesium. Der bliver dog aldrig varmt nok i centrum til, at disse kan fusioneres. De yderste lag smides af og danner en planetarisk tåge (som intet har med planeter at gøre) og kernen bliver blottet som det man kalder en hvid dværg (forestil dig noget der er næsten lige så tungt som Solen, men nu bare på størrelse med Jorden og en temperatur på op mod hundredetusinde Kelvin). Langsamt køler denne af, da der ikke længere er noget til at producere energi. Den holdes stadigt oppe af et tryk, men dette kommer nu fra elektroner som ifølge kvantemekanikken har en grænse for, hvor meget de kan presses sammen.

Stjerner der er meget tungere end Solen ender som nævnt tidligere med en kerne af jern. Herfra begynder den at antænde skaller, hvor der forbrændes tungere og tungere grundstoffer. Jern-kernen i centrum holdes oppe af trykket fra elektronerne men efterhånden som kernen vokser ved at den Si-forbrændende skal tilfører den mere masse, så når den et punkt hvor trykket ikke længere kan understøtte den og den kollapser så meget hurtigt, typisk på en skala målt i sekunder eller mindre. Jernet ødelægges og protoner og elektroner kombinerer til neutroner. Kernen presses sammen så afstanden mellem neutronerne bliver sammenlignelige med den i en atomkerne og den stærke kernekraft tager over. Neutronerne følger samme princip som elektronerne og giver et tryk, som stabiliserer kernen. Resten af stjernen bliver blæst ud i det, som kendes som en Type II supernova<sup>3</sup>. Tilbage bliver en klump af neutroner, der så betegnes som en *neutronstjerne*. Ganske som der findes en grænse for, hvor tunge hvide dværge kan være, så findes der også en grænse for neutronstjerne. Kollapset af de tungeste af de tunge stjerner kan ikke stoppe ved at danne en neutronstjerne. Denne går hurtigt over sin maksimale grænse og kollapser videre. Man får i dette tilfælde det sære fænomen, som kendes som *sorte huller*. Navnet kommer af, at intet kan undslippe sorte huller, ikke engang lys. Sorte huller er virkelig sære, og det at de findes viser, at vores fysiske love bryder sammen under visse tilfælde. Et sort hul har ikke nogen udstrækning, men er derimod et matematisk punkt i rummet (prøv at forestille dig noget på flere gange Solens masse som skrumper ind til et punkt). Man kan dog definere en slags udstrækning af et sort hul, som den afstand hvor lys ikke længere kan undslippe. Kommer noget inden for denne afstand er det tabt. Afstanden kaldes for det sorte huls *Schwarzschild-radius*,  $r_{\text{Sch}} = (2GM)/c^2$ .

## 4.6 Observation af stjerner: De fem hurtige

Hvordan får man de vigtigste parametre ud af observationen af stjerner? Hvis man betragter rummet gennem et teleskop, hvordan kan man så vide, hvordan en stjerne ser ud mange tusinde lysår væk? At introducere nogle af de grundlæggende metoder er målet for dette afsnit.

---

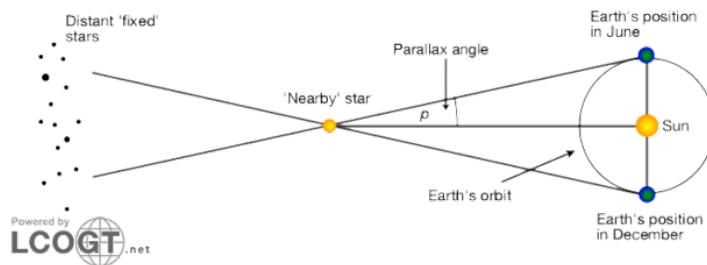
<sup>3</sup>Der findes også andre typer supernovaer. De har alle noget med kollapsende stjerner at gøre undtagen type Ia, som involverer en hvid dværg der får tilført masse, typisk fra en partner-stjerne, og eksploderer ved en grænse kendt som *Chandrasekhar-grænsen*.

## Afstand

Den simpleste måde at måle afstande til stjerner på er at måle deres *parallakse*. Når Jorden gennem ét år kredser en gang rundt om Solen vil den med et halvt års mellemrum være hhv. på den ene og den anden side af Solen. Jorden foretager altså en jævn bevægelse omkring Solen og på grund af denne vil det altså se ud som om, at de nærmeste stjerner bevæger sig i forhold til de fjerne (man kan selv teste dette ved at række sin pegefingør ud i strakt arm og se på den i forhold til baggrunden med skiftevis det ene og det andet øje). Hvis man mäter forskellen i position af en stjerne med et halvt års mellemrum, og man regner denne vinkel i *buesekunder*,  $\pi''$ , så får man følgende relation:

$$d = \frac{1 \text{ parsec}}{\pi''}, \quad (4.9)$$

hvor 1 parsec = 3,26 ly. Et buesekund,  $''$ , er  $1/60$  af et bueminut,  $'$ , som er  $1/60$  af en grad,  $^\circ$ . Et buesekund er altså  $1/3600$  af en grad og det er i de størrelsesordnere, at parallaksen skal måles. Denne metoder virker kun for de nærmeste stjerner, da parallaksen ellers bliver så lille, at selv ikke avancerede instrumenter på satellitter kan måle den.



Figur 4.6: Parallaksemетодen repræsenterer den simpleste måde at bedømme afstanden til andre stjerner. Grundet den meget lille vinkel som man mäter er metoden kun brugbar for de nærmeste stjerner. Vil man længere ud end et par tusinde lysår skal man bruge andre metoder.

*Cepheide-stjerner* er en anden metode og virker for stjerner inden for hele vores galakse. Her kan man måle en pulsering af stjernen - denne type af stjerner står og svinger meget ud og ind, de skiftevis vokser og skrumper kraftigt. Man har tilbage i starten af forrige århundrede fundet ud af, at deres pulseringsperiode kan omsættes til en lysstyrke og derved en afstand. Deres masse lader også til at være proportional med perioden. Målinger af Cepheider er et utroligligt vigtigt redskab for bestemmelsen af afstande i vores galakse.

Skal vi bestemme afstande mellem galakser eller længere ud i Universet kan vi ikke bruge de foregående metoder. Til gengæld kan vi, hvis vi er heldige, observere en Type Ia supernova i nabologat til det vi vil bestemme afstanden til. Type Ia supernovaer har den fordel, at de altid eksploderer ved samme masse, og på samme måde, så vi kender altså deres præcise luminositet. Ved at måle hvor meget lys vi modtager her på Jorden (og ved at tage højde for, om noget af lyset går tabt på vejen f.eks. ved at ramme ind i støv eller gas) kan vi udregne en afstand. Supernovaer af denne type er meget sjeldne, men når endelig der kommer en, så giver den også et fantastisk redskab til at bestemme afstande i vores Univers.

## Kinematik

Hvordan stjerner bevæger sig i rummet (og derved en forudsigelse af, hvor de befinder sig om mange, mange år) kan findes ved at måle den meget lille bevægelse, som stjerner foretager på himlen hen over tid. Det er klart, at dette kun gælder for da nærmeste stjerner og kræver uhyre præcise målinger. Det er desuden vigtigt at korrigere for Jordens bevægelse omkring Solen.

## Luminositet

Et objekts luminositet er et mål for, hvor meget energi, det udstråler. For en stjerne med temperatur  $T$  og radius  $R$  er luminositeten givet som

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (4.10)$$

hvor  $\sigma$  er Stefan-Boltzmanns konstant. En stjerne udsender lys ens i alle retningen. Modtages det i en afstand  $d_L$  væk fra kilden er det formindsket med en faktor  $4\pi d_L^2$ , idet lyset nu er ligeligt fordelt over et kugleareal  $4\pi d_L^2$ . Det lys, der modtages en afstand  $d_L$  fra kilden kaldes for fluxen  $f$ :

$$f = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (4.11)$$

Fluxen er da det lys, Jorden f.eks. modtager fra en fjern kilde. Hvis luminositeten af kilden kendes, kan man derfor finde afstanden  $d_L$  (kaldet luminositets-afstanden).

## Temperatur

Når temperaturen af et sort legeme stiger, så øges den samlede energi og toppunktet for strålingskurven flytter sig mod kortere bølgelængder. Når et maksimum bliver evalueret fra Planckstråling's formlen, vil produktet af topbølgelængden  $\lambda_{top}$  og temperaturen  $T$  være en konstant på formen:

$$\lambda_{top} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K} \quad (4.12)$$

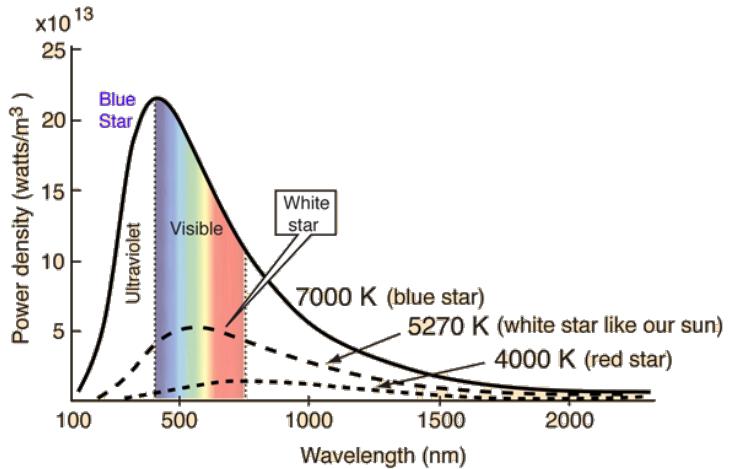
Netop formel 4.12 er kendt som Wien's forskydningslov, og er brugbar, hvis man skal bestemme temperaturen af objekter såsom stjerner.

## Masse, radius og alder

Det er ikke nødvendigvis nemt at finde masse og radius af stjerner. Tænk på, at de ikke kan opløses af teleskoper, så det eneste vi ser, er punkter der lyser. Vi kan dog bestemme dem, når stjernerne kredser om hinanden og ud fra dem vi så kender kan vi opstille nogle relationer. Det viser sig, at disse primært gælder for hovedseriestjerner og afhænger at, hvor tunge stjernerne er.

$$R/R_\odot = 1.06(M/M_\odot)^{0.945} \quad M < 1,66 M_\odot \quad (4.13)$$

$$R/R_\odot = 1.33(M/M_\odot)^{0.555} \quad M > 1,66 M_\odot \quad (4.14)$$



Figur 4.7: Figuren viser Wien's forskydning, hvor intensiteten er plottet mod bølgelængden.

$$L/L_{\odot} = 0.35(M/M_{\odot})^{2.62} \quad M < 0.7M_{\odot} \quad (4.15)$$

$$L/L_{\odot} = 1.02(M/M_{\odot})^{3.92} \quad M > 0.7M_{\odot} \quad (4.16)$$

Vi kan også finde en relation mellem masse og levetid,  $\tau$ , da vi ved at stjerner der lyser mere også bruger deres brændstof hurtigere  $\tau \propto M/L$  så:

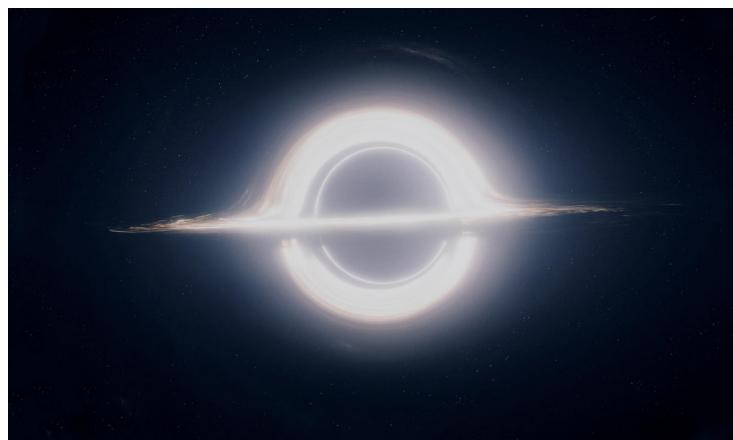
$$\tau \propto M^{-1.62} \quad M < 0.7M_{\odot} \quad (4.17)$$

$$\tau \propto M^{-2.92} \quad M > 0.7M_{\odot} \quad (4.18)$$

Husk på, at  $\tau$  og de andre relationer kun beskriver stjerner på hovedserien, og altså ikke udviklede stjerner. Den specifikke alder for stjerner er noget af det sværreste at bestemme. Det kan gøres ud fra det man kalder isokroner, som er stjernemodeller anvendt på store samlinger af stjerner.

Med de ovenstående metoder kan stjerners masse og radius bestemmes ind til omkring 10 % usikkerhed og alderen til 25 %. Benytter man i stedet asteroseismologi - målinger af, hvordan en stjerne står og svinger - kan masse og radius bestemmes ned til nogle få procent og alderen til ca. 10 % nøjagtighed. Asteroseismologi repræsenterer stjernen som en gigantisk oscillator, og er noget, som vi skal se nærmere på i opgaverne knyttet til dette kompendium.

Figur 4.8: Figuren viser den berømte Krabbetåge, som er resterne af en type II supernova. I centrum befinner der sig en neutronstjerne som roterer utrolig hurtigt om sig selv - dens omdrejningstid måles i millisekunder. Resterne fra stjernens yderste dele rejser gennem rummet med høj fart mens radioaktive henfald i de tunge grundstoffer giver et spektakulært lysshow. Tågen befinner sig ca. 6500 lysår fra Jorden, og supernovaen som skabte den er beskrevet i kinesiske tekster fra år 1054, hvor et mystisk klart lys på himlen, der var synligt selv i dagslys, forundrede de kinesiske astronomer. Kilde: NASA



*Figur 4.9: Man kan ikke rejse ud og se på sorte huller, og vi kan heller ikke se dem med vores teleskoper på andet end indirekte måder. Det forhindrer os dog ikke i at forestille os på film, hvordan de ville se ud, hvis man rejste ud til et.*

Kilde: Interstellar©Warner Brothers Pictures.

# Kapitel 5

## Relativitetsteori

Tilbage i 1905 præsenterede Albert Einstein første del af hvad, der i daglig tale kaldes for relativitetsteorien. Teorien beskæftiger sig med objekter i bevægelse og forudsiger effekter, som har været helt ukendte i den klassiske mekanik, og som for mange strider mod al logik. Tid er relativt, længder kan ændre sig, masse og energi er det samme og lysetshastighed i vakuum kan aldrig overskrides. Alt dette er blevet kendt som Einsteins *specielle relativitetsteori*, og vil i dette kapitel blive gennemgået. I vil komme forbi de generelle principper og ligninger, der danner grundlaget for teorien, og I vil komme til at beskæftige jer med nogle af de fascinerende konsekvenser, teorien har. Den anden del, fremlagt i 1916, er kendt som den *almene relativitetsteori*. Den er en beskrivelse af tyngdekraft, og mindst lige så spændende. Den er dog også matematisk set langt mere kompleks og vil derfor kun blive introduceret kort.

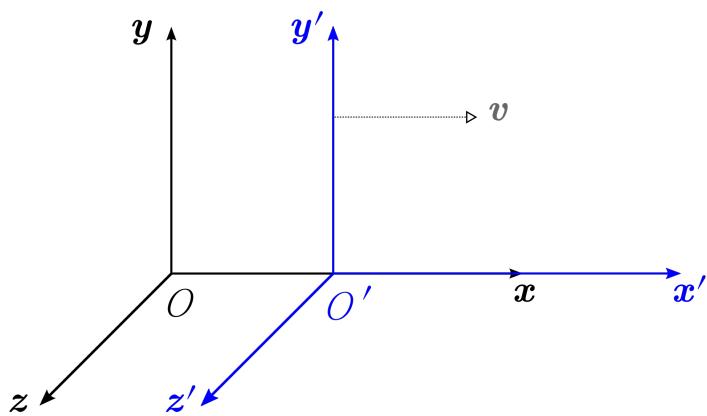
### 5.1 Observatører i reference- og hvilesystemer

Idéen om relativitet er en gammel størrelse. Princippet blev første gang formuleret af Galileo Galilei i 1630, og mange har siden beskæftiget sig med det, deriblandt Isaac Newton. Forestil dig en mand, som går med en hastighed af en meter per sekund ( $1 \text{ m/s}$ ) på dækket af et skib. Skibet selv sejler forbi en bred med en given hastighed. For personer på skibet er sagen klar. Manden bevæger sig med  $1 \text{ m/s}$ . For folk på borden bevæger han sig dog forbi med en anden hastighed, fordi skibet også bevæger sig. For et skib på vej i modsat retning har manden en helt tredje hastighed. Mandens hastighed afhænger altstå af, hvilket sted han observeres fra.

Vi kalder en samling af observatører, der alle er i hvile i forhold til hinanden, for et *referencesystem*. Observatørerne på dækket er ét system, dem på borden er et andet osv. Manden selv udgør også et referencesystem, hvori han står stille, og alle andre bevæger sig i forhold til ham. Nu lyder det måske tosset – manden ved jo, at han går hen af dækket, og han ved, at det er skibet der sejler, og ikke borden der står stille. Men hvad hvis han befandt sig under dæk? Ville han så vide at skibet sejler? Galilei indså hurtigt, at så længe bevægelsen er med konstant hastighed, uden opbremsning eller acceleration og i en ret linje, så er det umuligt for en observatør at vide, om han er i hvile eller i bevægelse. Er bevægelsen sådan konstant kaldes den uniform, og i et referencesystem i hvile eller uniform bevægelse gælder Newtons første lov: "Et legeme i hvile eller i uniform bevægelse vil forblive sådan, medmindre en kraft

påvirker det". Vi kalder sådan et referencesystem for et *hvilesystem*. Et hvilesystem er en idealisering i den forstand, at intet forsøg kan udføres for virkelig at bestemme om loven er opfyldt. Tit kan man dog med god samvittighed antage, at et referencesystem er et hvilesystem, og det er også hvad, der vil blive gjort her.

Et referencesystem,  $S$ , består af fire koordinater. Der er tre rumlige,  $x$ ,  $y$ , og  $z$ , som angiver en observatørs position, og en tidslig koordinat,  $t$ , der fortæller tiden hos observatøren. Et andet referencesystem,  $S'$  (dette udtales "S mærke"), har også fire koordinater  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  og  $t'$ , se figur 5.1.



Figur 5.1: To referencesystemer. Det stationære system kaldes  $S$ , mens det system der bevæger sig med hastigheden  $v$  i forhold til  $S$  kaldes  $S'$ .

## 5.2 Galileisk transformation

Før Einsteins revolutionerede forståelsen af relativitet var den gængse opfattelse den, der var udviklet af Galilei. Den bliver derfor kaldt for Galileisk relativitet, og skønt vi ved, at den ikke er helt korrekt, så passer den stadig godt ved hastigheder langt mindre end lysets hastighed.

### Transformation én retning

En hændelse  $E$  finder sted ved  $x$ ,  $y$ ,  $z$  til tiden  $t$ , målt i hvilesystemet  $S$ . Hvad vil koordinaterne af  $E$  være i et andet hvilkesystem  $S'$ , der bevæger sig med hastighed  $V$  i  $x$ -retningen? Det kan vi godt svare på. To observatører i hvert sit system har på forhånd synkroniseret deres ure. I den Galileiske forståelse af relativitet er tid en absolut størrelse, så

$$t' = t \quad (5.1)$$

$S'$  bevæger sig i  $x$ -retningen i forhold til  $S$ , så ved tiden  $t$  må afstanden mellem de to være  $Vt$ . Så må

$$x' = x - Vt, \quad (5.2)$$

mens  $y$  og  $z$  er ens i de to systemer

$$y' = y \quad (5.3)$$

$$z' = z. \quad (5.4)$$

Ligningerne 5.1 og 5.4 kaldes den *Galileiske transformation*. Det ses, at det eneste, der skal til for at gå tilbage fra  $S'$  til  $S$  er et skift af tegn i 5.2, da transformationen er den samme, men  $V$  er hastigheden af  $S$  i forhold til  $S'$ , så for  $S'$  har  $S$  en hastighed på  $-V$ . Ved at skifte tegnet får vi den *inverse transformation*, alt den der går den modsatte vej.

### Afstand mellem to punkter

Et tog kører i  $x$ -retningen med hastighed  $V$  forbi en perron, hvorpå der står en observatør,  $S$ . På toget sidder en anden observatør,  $S'$ . De vil nu begge gerne måle afstanden mellem to pæle, placeret ved  $A$  og  $B$ , der står på perronen. For  $S$  er positionen af de to uafhængig af tid

$$x_1 = A \quad , \quad x_2 = B \quad (5.5)$$

og afstanden  $x_2 - x_1 = B - A$ .

For  $S'$  finder koordinaterne vha. transformationen 5.2

$$x'_1 = A - Vt' \quad (5.6)$$

$$x'_2 = B - Vt' \quad (5.7)$$

For observatøren på toget målet positionen af pæl 1 til tiden  $t'_1$  og pæl 2 til  $t'_2$ . Så

$$x'_2 - x'_1 = B - A - V(t'_2 - t'_1). \quad (5.8)$$

Da pælene bevæger sig i  $S'$  bliver observatøren på toget nødt til at måle deres position samtidig for at få den rigtige afstand, så  $t'_2 = t'_1$  og derved bliver  $x'_2 - x'_1 = B - A$ . Vi siger at afstanden er invariant (uændret), den har samme værdi i alle referencesystemer. Vi skal se senere, at dette (meget overraskende) ikke er tilfælde i speciel relativitetsteori.

### Bevægelse i referencesystemet

Et legeme bevæger sig i  $x$ -retningen med hastighed  $v$ , målt i  $S$ . Positionen til tiden  $t$  er

$$x = vt. \quad (5.9)$$

Bruges den inverse af 5.1 og 5.2 fås

$$x' = (v - V)t'. \quad (5.10)$$

Begge ligninger beskriver en bevægelse med konstant hastighed. Størrelsen af den sidste kaldes  $v'$  er

$$v' = v - V \quad (5.11)$$

og den inverse

$$v = v' + V \quad (5.12)$$

Dette resultat er ret logisk. Går vi tilbage til skibet,  $S'$ , kan vi se, at hvis manden bevæger sig med  $1 \text{ m/s}$  i samme retning som skibet, der bevæger sig med  $5 \text{ m/s}$ , så vil folk på borden,  $S$ , måle en hastighed på  $v = 6 \text{ m/s}$ , og manden vil opleve borden flytte sig med  $v' = -6 \text{ m/s}$ .

Vi så tidligere, at afstand er invariant under Galileisk transformation. Det kan udledes, at dette også er tilfældet for en masse fysiske love. Faktisk kan der formuleres et princip, der siger, at alle fysiske love er de samme i hvilket som helst to hvilesystemer. Dette kaldes *relativitetsprincippet*. Det virker rimeligt at kræve, at fysikken ikke ændrer sig, blot fordi vi beskriver den i et andet referencesystem.

Her kommer Galilei modellen til kort. Det viser sig, at Maxwells ligninger, de ligninger der beskriver elektromagnetisme, ikke er invariante under Galileisk transformation. To muligheder var åbne for datidens fysikere. Enten gælder relativitetsprincippet ikke for elektromagnetisme og Maxwells ligninger er kun gældende i et specielt referencesystem, eller også er relativitetsprincippet universelt og Galileisk transformation forkert. Einstein holdte på den sidste løsning, og det førte ham til speciel relativitetsteori. Før vi kommer dertil, skal vi dog omkring den første mulighed, som i starten af det 19. århundrede var den foretrukne mulighed blandt fysikere.

### 5.3 Speciel relativitetsteori og dens betydning

Einstein valgte sin vej på baggrund af to principper. Det første er det kendte relativitetsprincip, om at alle fysikkens love er de samme i alle hvilesystemer. Det betød imidlertidt at den Galileiske transformation måtte være forkert. Det andet princip byggede på det første, men var banebrydende for sin tid. Einstein indså, at hvis Maxwells ligninger, som bl.a. giver lyssets korrekte hastighed på baggrund af kendte konstanter, gælder i alle hvilesystemer, så må lyssets hastighed i vakuum også være den samme i alle hvilesystemer. Lysets hastighed er altså uafhængigt af kildens hastighed. Samtidigt kan intet andet end lys bevæge sig med lyssets hastighed. De to principper ovenfor medfører en masse ting, som for mange strider mod almen logik. Den første ting, vi skal se på er, hvordan begrebet *samtidighed* er relativt, dvs. afhænger af observatøren.

#### Samtidighed er relativt

Vi kigger på endnu et eksempel: En observatør er placeret på et tog, som vist på figur 5.2. En anden observatør er placeret på jorden ved siden af skinnerne. Lyn slår ned i punkterne  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  og  $B'$  på samme tid, men da observatøren på toget bevæger sig mod lyset fra  $B'$ , vil vedkommende observere dette først, og konkludere at det fandt sted før nedslaget i  $A'$ ! Observatøren på perronen vil derimod se de to nedslag ske samtidigt. Så om de to ting fandt sted samtidigt eller ej afhænger altså af observatørens bevægelse! Men ved man ikke, at de to nedslag skete samtidigt for observatøren på toget? Hvis man nu kunne kommunikere med punkterne uden forsinkelsen som lyset oplever, vil man da se de to nedslag skete på samme tid. Det er dog ikke tilfældet. Hvis observatøren sidder midt mellem punkterne vil der være lige så langt til  $A'$  som til  $B'$ , så tiden det tager lyset at rejse fra  $A'$  frem til observatøren er den samme, som det tager at rejse fra  $B'$ . Så de to signaler når kun frem til observatøren, hvis de er udsendt samtidigt. Lyset når her ikke samtidigt frem til observatøren, som er nødt til at konkludere, at de to nedslag ikke skete samtidigt. Relativitetsprincippet støtter op om dette. Hvis alle love er ens for alle

systemer, så findes der ikke et system som er mere rigtigt end et andet. Så begge observatører har altså ret i deres eget referencesystem. Samtidighed er altså relativt.

## Tid og sted er relativt

For at komme frem til et udtryk mellem tid i forskellige systemer betragtes et andet eksempel, illustreret på figur 5.3 For observatøren på toget, med hastighed  $v$  i forhold til Jorden, bevæger lyset sig afstanden  $2d$  i tiden  $\Delta t_0$  (hvor  $\Delta$  er det græske bogstav ‘delta’). Denne tid er givet

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c} \quad (5.13)$$

For observatøren i  $S$  tager rejsen  $\Delta t$ , og i den tid når lyset at rejse  $2l$ , hvor  $l$  er

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} \quad (5.14)$$

Iisoleres  $d$  i 5.13 kan 5.14 omskrives til

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5.15)$$

Da en observatør ikke kan rejse med lysets hastighed (pga. Einsteins andet princip) vil nævneren i overnævnte altid være mindre end 1. Det betyder, at  $\Delta t_0$ . Sagt på en anden måde, så vil en observatør altid måle, at et ur i bevægelse går langsommere end et ur i hvile. Dette er udelukkende en effekt af, at lysets hastighed er den samme for alle observatører i alle referencesystemer. Effekten er selvfølgelig lille for hverdagsfænomener, men det faktum at tiden går langsommere, jo hurtigere man bevæger sig, er blevet bekræftet af atomure i kredsløb om Jorden.

Størrelsen  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  støder man på meget tit i relativitetsteori, så den betegnes ofte med bogstavet gamma ( $\gamma$ ):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1, \quad (5.16)$$

$\gamma$  som en funktion af den relative hastighed mellem referencesystemerne kan ses på figur 5.4. Ofte betegnes brøken  $v/c$  med det græske bogstav beta ( $\beta$ ).

Tidligere viste vi, at længden er invariant under Galileisk transformation. Med en simpel betragtning som den ovenstående kan man komme frem til, at længden ikke er invariant i Einsteins version. Udtrykket man kan komme frem til relaterer længden,  $l$ , af et objekt i det stationære system,  $S$ , og længden af samme objekt,  $l_0$ , i systemet,  $S'$ , der bevæger sig med  $v$  relativt til  $S$ . Længden for observatøren op Jorden vil være

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma} \quad (5.17)$$

Så længden af et objekt vil for en stillestående observatør være kortere end den længde som objektet har i sit hvilesystem. Denne effekt kaldes normalt *længdeforkortelse*. Det er vigtigt at påpege, at objekter kun bliver forkortet i den retning, som de bevæger sig.

## 5.4 Lorentz-transformationer

Den Galileiske transformation er altså kun nogenlunde rigtig, og kun så længe hastigheden af det ene hvilesystem er lille i forhold til det andet. Der er altså brug for en anden måde at transformere på, der baserer sig på ideerne bag den specielle relativitetsteori.

Betrægt to hvilesystemer, som befinner sig det samme sted til tiden  $t = 0 = t'$ , hvor  $S'$  bevæger sig med hastigheden  $v$  i forhold til  $S$ . Til tiden  $t$ , vil transformationen fra  $S'$  til  $S$  være givet ved den inverse til 5.2, altså stadig som den Galileiske  $x = vt + x'$ . Men som det nu er klart, så vil  $x'$  i  $S$  være længdeforkortet med en faktor  $1/\gamma$ , som beskrevet i 5.17. Så

$$x = vt + x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.18)$$

og dens inverse

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x - vt) \quad (5.19)$$

Igen er bevægelsen blevet begrænset til at ligge udelukkende i  $x$ -retningen, så

$$y' = y \quad (5.20)$$

$$z' = z. \quad (5.21)$$

Skiftes der hvilesystem, er den eneste forskel en ændring i fortægning for hastigheden. Det leder til et udtryk for transformationen af tid

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(t - vx/c^2) \quad (5.22)$$

Vi kaldes ligningerne 5.19 og 5.22 for *Lorentz-transformation* som er den relativistisk generalisering af Galileisk transformation. I det tilfælde, hvor  $v$  bliver meget lille går Lorentz-transformationen mod den Galileiske. Generelt ses det dog, at alle koordinater (inklusiv tid) i et referencesystem er afhængig af koordinaterne i et andet. Man siger derfor, at rum og tid er sammenhængende, og at hverken længde eller tid har en betydning der er uafhængig af referencesystem. Derfor refererer man ofte til tid og de tre rumlige koordinater som den fire-dimensionale størrelse *rum-tid*.

Transformationen for hastigheden vil være givet ved:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - vv_x/c^2} \quad (5.23)$$

Vi ser, at i det ekstreme tilfælde, hvor  $v_x = c$  så vil  $v'_x = c$ , hvilket jo var Einsteins ene postulat.

De fleste kender en enkelt del af relativitetsteorien bedre end nogen anden del. Einsteins berømte ligning  $E = mc^2$  fortæller, at masse og energi er to sider af samme sag. De færreste indser dog, at dette også betyder, at masse er en relativistisk størrelse, ganske som vi har set længde og tid er. Et objekt med hvilemasse  $m$  (altså den massive objektet har i dens eget hvilesystem) der bevæger sig med en hastighed  $v$  i forhold til en observatør vil for observatøren have en masse, der er større end massen, objektet har i sit eget hvilesystem. Vi siger, at objektets *relativistiske masse* er givet

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5.24)$$

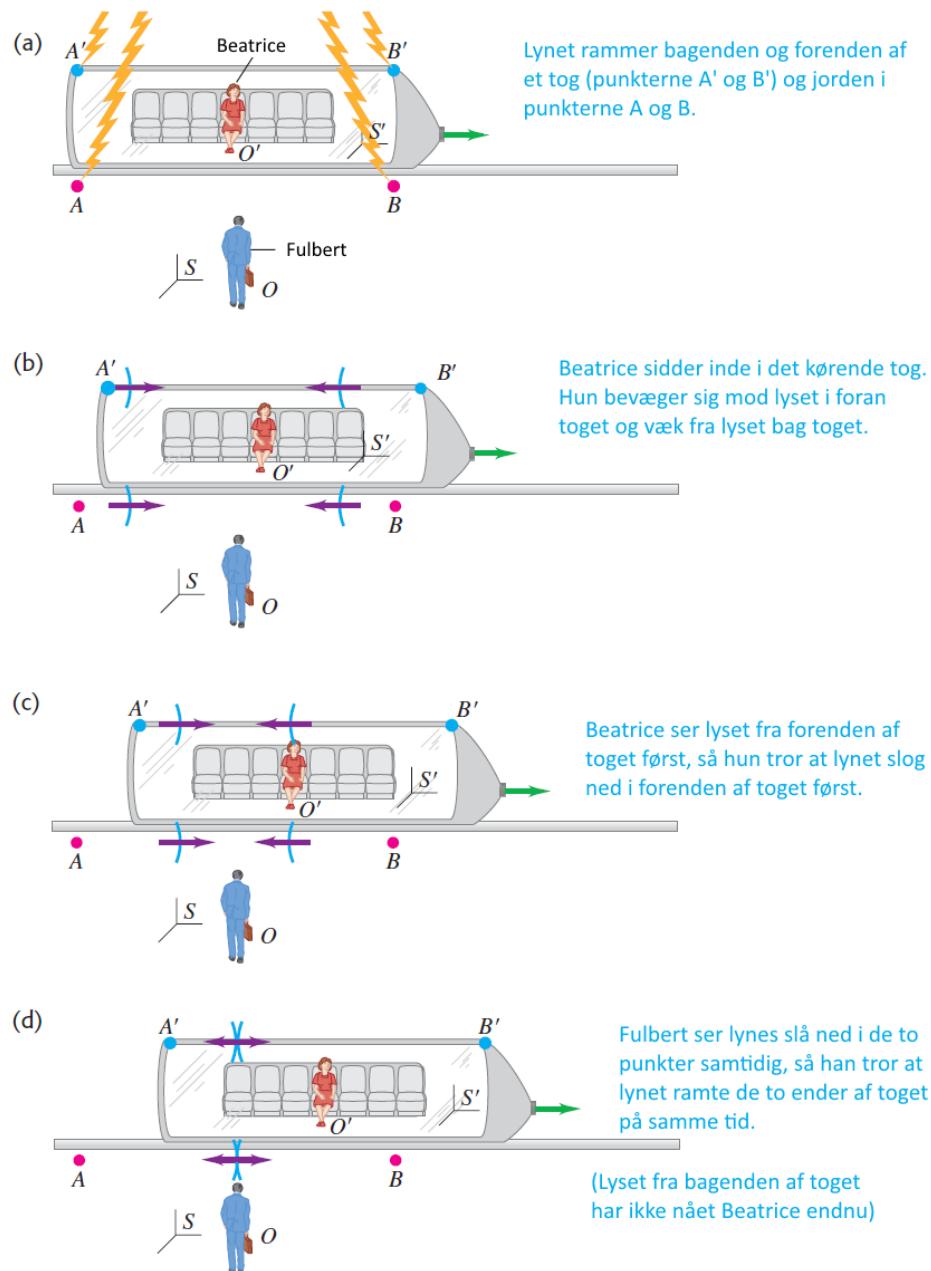
## 5.5 Generel relativitetsteori

Både Einsteins specielle og generelle relativitetsteori er forbundet. Den generelle er som sagt matematisk setmere kompleks, men den grundlæggende idé bag den kan illustreres med et eksempel.

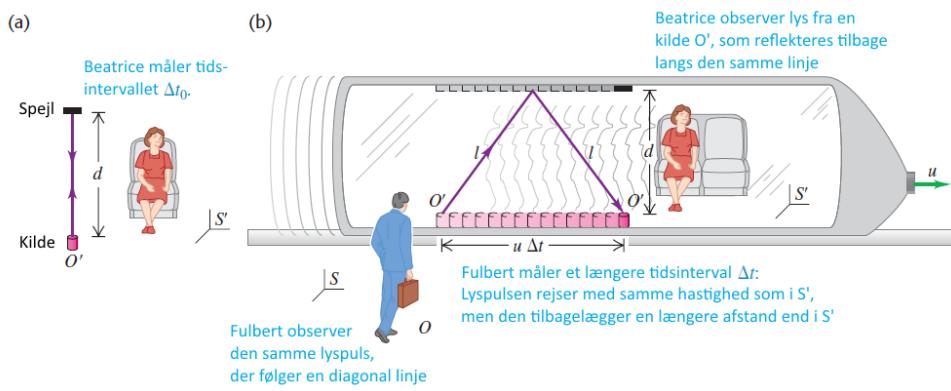
Du vågner en morgen og står ud af sengen. Til din store forfærdelse opdager du, at du i løbet af natten er blevet bortført af rumvæsner, som har lukket dig inde i deres rumskib, i et lukket rum uden vinduer. I choket taber du din bamse. Som fysiker ser du straks, at bamsen falder mod gulvet med en acceleration på præcis  $9,82 \text{ m/s}^2$ , som er Jordens tyngdeacceleration  $g$ . Du er altså i det mindste stadig på Jorden.

Pludselig glider et panel til side, og afslører et vindue. Udenfor ser du det tomme rum, og du indser nu, at i virkeligheden accelererer rumskibet blot med præcis  $g$ , og grunden til, at du kan stå på gulvet er ikke, at Jorden hiver i dig, men i stedet at gulvet kommer imod dig, med en acceleration der bare har samme størrelse, som du ville have oplevet Jorden trække dig ned med.

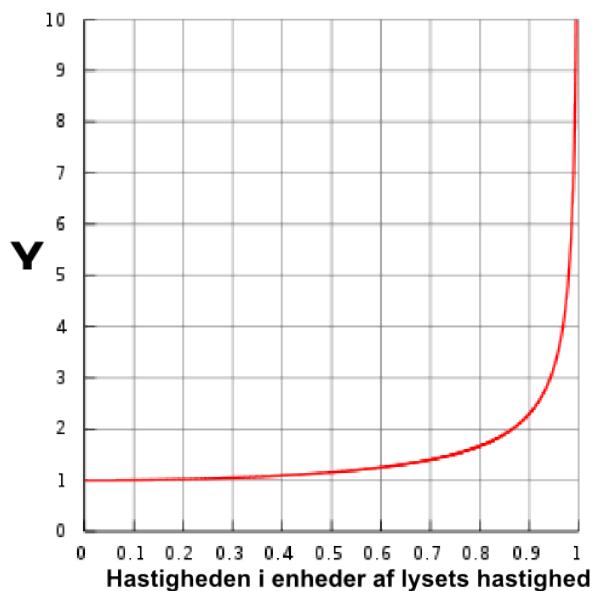
Eksemplet danner grundlag for den generelle relativitetsteori. Hvis man ikke kan skelne eksperimentelt mellem tyngdekraften fra et objekt i et givet punkt og så et uniformt accelereret referencesystem, så kan der ikke være nogen rigtig forskel på de to. Dette kaldes *ækvivalensprincippet* og er illustreret i figur 5.5. Dette betyder, at alle de spændende effekter, som kommer med et referencesystem i bevægelse i forhold til et andet, også er tilstede, når det kommer til tyngdekraft. F.eks. går ure på Jorden langsommere end i rummet fordi vi befinder os i Jordens *tyngdepotentiale*.



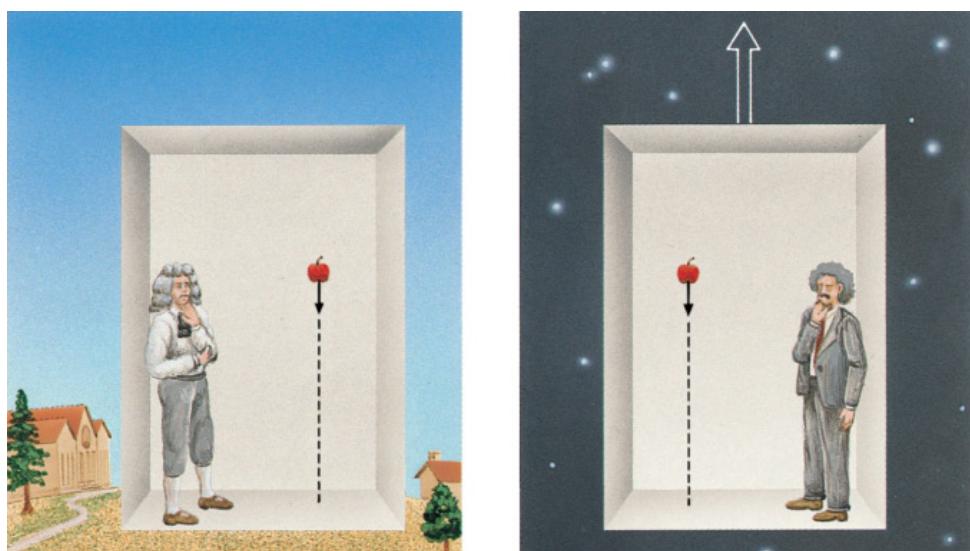
Figur 5.2: En observatør er placeret på et tog  $S'$ , som passerer en anden observatør på jorden  $S$ . Lyn slår ned i punkterne  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  og  $B'$  samtidigt. Observatøren i  $S$  vil se de lysglimt nå frem samtidigt, og konkluderer at nedslagene fandt sted samtidigt. For observatøren på toget er situationen dog en anden. Vedkommende bevæger sig imod lyset fra  $B'$  og væk fra  $A'$ . Observatøren i  $S'$  vil derfor se lyset fra  $B'$  først og konkludere at dette nedslag fandt sted først.



Figur 5.3: For en observatør placeret i et tog,  $S'$ , vil en lyspuls udsendt fra  $O'$  bliver reflekteret af et spejl og vende tilbage langs samme linje med længde  $d$ . For en stationær observatør på jorden,  $S'$ , vil situationen være en anden. For denne har toget rykket sig et stykke i den tid, som det har taget lyset at blive reflekteret. Lyset vender stadig tilbage til kilden, men har for observatøren i  $S$  rejst et længere stykke end for observatøren i  $S'$ .



Figur 5.4: Størrelsen  $\gamma$  som funktion af den relative hastighed  $v$  mellem to referencesystemer. Efterhånden som  $v$  nærmer sig  $c$  går  $\gamma$  mod uendelig.



Figur 5.5: Figuren illustrerer ækvivalensprincippet: der ikke kan skelnes mellem at befinde sig i et tyngdefelt med tyngdeacceleration  $g$  eller det at befunde sig i et uniformt accelererende referencesystem med acceleration  $g$ .

# Kapitel 6

## Termodynamik

Termodynamik beskriver hvordan tryk og temperatur har indflydelse på forskellige legemer, gasser eller væsker. Den giver en dybere forståelse af varme som energi og vi kan forklare med fysik, hvordan eksempelvis benzinmotorer og køleskabe virker.

### 6.1 Temperatur, termisk udvidelse og varme

Vi kender alle til termerne temperatur og varme, og i hverdagen bruges de ofte som værende ækvivalente. Når man spørger, hvor varmt det er i dag, får man svaret givet ved en temperatur. I fysik har temperatur og varme dog hver sin betydning.

#### Temperatur

Konceptet temperatur kommer fra nogle idéer om, hvornår noget føles varmt eller koldt. Den har indflydelse på egenskaber, som kan måles i et stof. F.eks. afhænger længden af en metaltråd eller farven af et glødende objekt af temperaturen. Senere vil I se, at temperatur også er relateret til kinetisk energi af molekylerne i det stof, vi ser på.

Vi bruger altså temperaturen til at sige noget om, hvornår noget føles varmt eller koldt. Det kræver at vi har en temperaturskala, og sådanne skalaer kender vi allerede godt. I hverdagen bruger vi oftest "Celsius" ( $^{\circ}\text{C}$ ), men der findes andre temperaturskalaer som "Fahrenheit" ( $^{\circ}\text{F}$ ) og "Kelvin" (K). Disse skalaer er lavet ud fra det samme princip: Ved at se på et bestemt system og vælge et nulpunkt. Ud fra dette nulpunkt defineres en temperaturskala.

Da man lavede Celsius-skalaen så man på et system, der bestod af vand. Man valgte at nulpunktet for Celsius-skalen var defineret ud fra vands frysepunkt, og at kogepunktet for vand skulle ligge ved  $100\ ^{\circ}\text{C}$ . Herefter trak man en lige streg mellem de to punkter, og man havde sig en temperaturskala.

Hvis vi skal måle en temperatur kræver det altså bare, at vi har et system, der kan variere mellem at være varmt eller koldt. Et sådant system kunne være et termometer, enten ét med et flydende materiale, som vi kender fra husmuren, eller ét med gas.

## Termisk udvidelse

Mange materialer udvider sig, når deres temperatur vokser. Vi kender det allerede fra termometret med det flydende materiale, hvor væsken stiger i højden, når temperaturen også gør det. Vi snakker typisk om to former for udvidelse:

- *Lineær udvidelse*

Termisk lineær udvidelse kan beskrives med

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T. \quad (6.1)$$

Dvs. når temperaturen ændrer sig med  $\Delta T$ , ændrer længden sig med  $\Delta L$ , såfremt  $\Delta T$  er mindre end 100 °C.  $\alpha$  kaldes for den lineære udvidelseskoefficient.

- *Volumen-udvidelse*

Både faste og flydende materialer vokser i volumen, når temperaturen stiger. Denne udvidelse beskrives med

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T. \quad (6.2)$$

Volumet ændrer sig med  $\Delta V$ , når temperaturen ændres  $\Delta T$ , såfremt  $\Delta T$  er mindre end 100 °C.  $\beta$  kaldes for volumen-udvidelseskoefficienten.

## Varme

Varme er den energi, der enten overføres til eller afgives fra et system grundet en ændring i temperatur. Hvis man putter en kold ske ned i en varm kop kaffe vil skeen varmes op og kaffen køles ned indtil hverken kaffen eller skeen afgiver energi til hinanden, og vi siger, at systemet har opnået *termisk ligevægt*.

Lad os se på et materiale med masse  $m$ . Energien (varmen)  $Q$ , der kræves for at ændre temperaturen fra  $T_1$  til  $T_2$  er

$$Q = mc\Delta T, \quad (6.3)$$

hvor  $c$  er den specifikke varmekapacitet (enhed: joule per Kelvin J/K), som afhænger af materialet, og ændringen i temperatur er  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

Ser vi i stedet på et materiale bestående af  $n$  mol molekyler, så er massen  $m = nM$ , hvor  $M$  er den molare masse (enhed: kg per Kelvin kg/K). Det følger så at

$$Q = nC\Delta T, \quad (6.4)$$

hvor  $C = Mc$  er den molare varmekapacitet (enhed: joule per kelvin per mol: J/K/mol), som også afhænger af materialet.

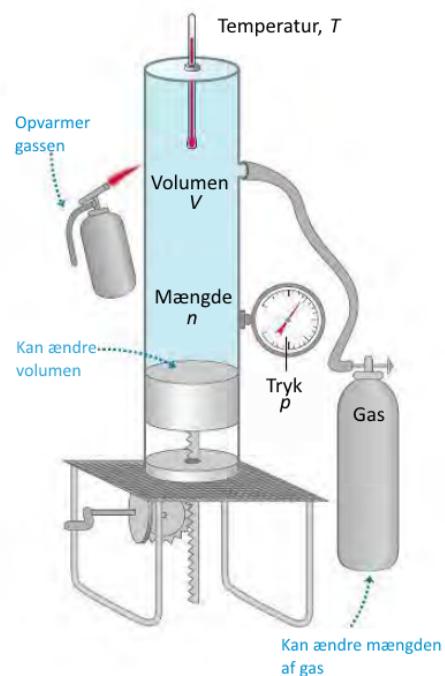
## 6.2 Idealgas- og van der Waals ligningen

Både idealgas- og van der Waals ligningen er det, der hedder tilstandsligninger, og deres variable kaldes for tilstandsvariable. En tilstandsligning beskriver et materiales tilstand, og en tilstandsvariabel kunne eksempelvis være tryk eller temperatur.

### Idealgasligningen

En *ideal gas* findes i virkeligheden ikke. Det er en hypotetisk gas, der består af identiske partikler. Disse partikler har ingen volumen eller udstrækning, påvirker ikke hinanden med intermolekulære kræfter, og støder kun sammen elastisk, således at intet kinetisk energi går tabt. Dog er idealgasligningen ikke ubrugelig. Ved høj temperatur og lavt tryk giver den en tilstrækkelig god tilnærmelse af gassens tilstand. Har gassen en høj temperatur har molekylerne i gassen en så høj energi, at der kan ses bort fra den energi, som mistes i uelastiske stød, det kunne f.eks. være når gasmolekylerne støder ind i selve gasbeholderen. Ved lavt tryk bevæger molekylerne sig så langt væk fra hinanden, at der kan ses bort fra de intermolekulære kræfter.

På fig. 6.1 ses en hypotetisk opstilling, hvor vi kan kontrollere trykket, volumet, temperaturen og antal mol molekyler. Studerer vi opstillingen grundigt kan vi drage tre konklusioner, der til sidst kan sammenfattes i idealgasligningen.



Figur 6.1: En hypotetisk opsætning til at studere gassens opførelse. Ved at opvarme gassen, variere volumen med et stempel og tilføje mere gas kan vi kontrollere trykket, volumet, temperaturen og antal mol molekyler.

1. Volumet,  $V$ , er proportional med antallet af mol,  $n$ . Hvis volumet øges vil mængden af molekyler også øges.
2. Volumet,  $V$ , er omvendt proportional med trykket,  $p$ . Hvis volumet mindskes ved at bevæge stemplet op ad vil trykket stige, fordi det samme antal mol skal være i et nu mindre volumen.
3. Trykket,  $p$ , er proportional med temperaturen,  $T$ . Hvis temperaturen stiger får molekylerne mere energi, hvilket giver anledning til et højere tryk.

Disse tre relationer kan sammenfattes i idealgasligningen:

$$pV = nRT , \quad (\text{Idealgasligningen}) \quad (6.5)$$

hvor  $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  er en proportionalitetskonstant. Med idealgasligningen kan vi også bestemme tætheden (densiteten) af en ideal gas, som vi betegner  $\rho$ :

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M} RT \\ \Rightarrow \frac{m}{V} &= \frac{pM}{RT} \\ \Rightarrow \rho &= \frac{pM}{RT} . \end{aligned} \quad (6.6)$$

### Van der Waals-ligningen

En anden tilstandsligningen er Van der Waals-ligningen. Denne tilstandsligning tager højde for, at molekylerne har et volumen, og at de interagerer med hinanden i form af intermolekylære kræfter. Denne tilstandsligning korrigerer så at sige idealgasligningen for disse to udeladelser. Van der Waals-ligningen er

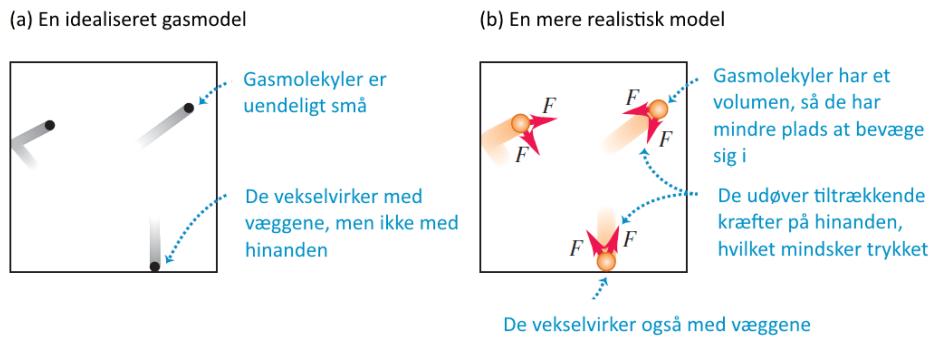
$$\left( p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT , \quad \text{Van der Waals ligningen} \quad (6.7)$$

hvor  $a$  og  $b$  er konstanter, der afhænger af gassen. Konstanten  $b$  er volumet af et mol molekyler, det vil sige, at  $n \cdot b$  er volumnet, som alle gaspartiklerne fylder. Det volumen som molekylerne har plads til at bevæge sig i må altså være  $V - nb$ .

Konstanten  $a$  afhænger af de tiltrækkende intermolekylære kræfter. Netop disse tiltrækkende kræfter reducerer trykket af gassen ved at trække molekylerne sammen, når de rammer ind i gasbeholderen. Reduktionen i tryk er proportional til antallet af molekyler per volumen i et lag tæt på gasbeholderens væg, og er også proportional til antallet af molekyler per volumen i det næste lag. Det vil altså sige, at reduktionen i tryk i forhold til intermolekylære kræfter er proportional med  $n^2/V^2$ , og  $a$  er proportionalitetskonstanten.

Når  $n/V$  er lille er gassen fortyndet og afstanden mellem molekylerne er stor. I et sådant tilfælde vil Van der Waals-ligningen reduceres til 6.5. Van der Waals ligningen giver os altså en mere realistisk model af en gas end den model idealgasligningen giver os.

Vi har nu set to forskellige modeller, og en illustrativ opsummering kan ses i fig. 6.2.



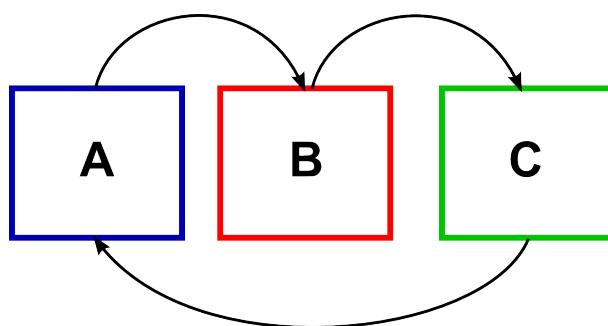
Figur 6.2: (a) viser modellen af en gas, som idealgasligningen giver og (b) viser en mere realistisk model, som Van der Waals-ligningen giver.

### 6.3 0. hovedsætning

Termodynamikken har i alt 4 hovedsætninger, men vi vil fokusere på det vigtigste fra de tre første. Den 0. hovedsætning er vi allerede stødt på. Den drejer sig som *termodynamisk ligevægt*. Når to systemer kommer i kontakt med hinanden vil de udveksle energi og evt. stof indtil de er i termodynamisk ligevægt og dermed ikke ændrer sig mere. Termodynamisk ligevægt omfatter *termisk ligevægt* forbundet med varmeudveksling, *mekanisk ligevægt* forbundet med arbejde og *kemisk ligevægt* forbundet med stofudveksling. Den 0. hovedsætning kan formuleres som:

*Hvis legeme A er i termisk ligevægt med legeme B, og legeme B er i termisk ligevægt med legeme C, da vil legeme A og C være i termisk ligevægt.*

Det er illustreret i fig. 6.3

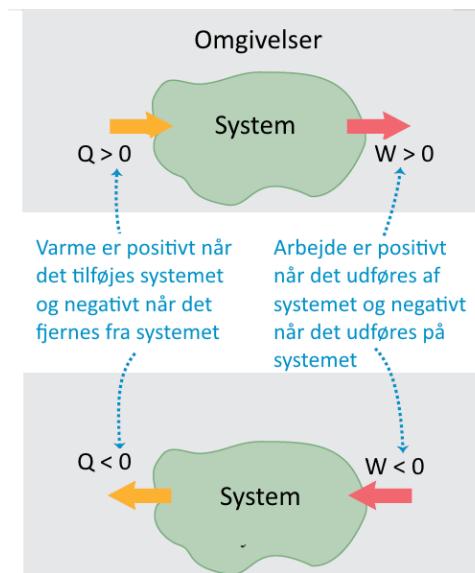


Figur 6.3: Illustrativ 0. hovedsætning, hvor pilene viser termisk ligevægt mellem delene A, B og C.

## 6.4 1. hovedsætning

Den 1. hovedsætning hjælper os med at forstå *termodynamiske processer*, der foregår i et *termodynamisk system*. Et termodynamisk system er en samling af objekter, der kan betragtes som en helhed, og som kan have potentiale til at udveksle energi med omgivelserne. Et eksempel på et termodynamisk system er popcornkerner i en gryde med låg. I den termodynamiske proces tilføjes varme til systemet, og systemet udfører et arbejde med dets omgivelser sådan at låget løfter sig fra gryden.

Vi beskriver energiforholdene i en termodynamisk proces ud fra af mængden af varme,  $Q$ , der tilføjes *til* systemet og arbejdet  $W$ , der udføres *af* systemet. Både  $Q$  og  $W$  kan være positive, negative eller nul. Hvis  $Q$  er positiv tilføjes varme til systemet, og hvis  $Q$  er negativ strømmer varme ud af systemet. Hvis  $W$  er positiv vil det sige, at systemet udøver en kraft på omgivelserne, og omvendt når  $W$  er negativ. Se fig. 6.4.



Figur 6.4: Definitionen af fortregnene på varmen  $Q$  og arbejdet  $W$ .

## Arbejde

Vi ser nu på arbejdet udført af et termodynamisk system når volumenet ændres. Lad os tage udgangspunkt i en gas, der opbevares i en beholder. For at forstå det arbejde, som gassen udfører, ser vi på molekylerne, som gassen udgøres af. Molekylerne udøver en kraft på beholderen når de rammer den, men udfører ikke noget arbejde, da beholderen ikke bevæger sig, det er altså en stationær flade. Lad os i stedet forestille os en benzincmotor, hvori der sidder et stempel. Når molekylerne i benzinen kolliderer med stemplet udfører de et arbejde, da stemplet bevæger sig og dermed ændrer volumenet sig også. Volumet kan enten blive mindre eller større. Hvis volumet øges betyder det, at molekylerne udfører et positivt arbejde på stemplet. Hvis volumet derimod mindskes vil det sige, at stemplet udfører et negativt arbejde på molekylerne, og molekylerne udfører et negativt arbejde på stemplet.

Lad os generalisere og se på et system, hvis volumen kan ændre sig i en cylinder med et bevægeligt stempel. Systemet kan ses på fig. 6.6. Indholdet i cylinderen kan altså både være en gas, noget flydende eller noget fast. Cylinderen har et tværnitsareal  $A$ , og trykket fra systemet på stemplet er  $p$ . Den totale kraft, der udøves af systemet på stemplet, må derfor være  $F = pA$ . Når stemplet bevæger sig en infinitesimal afstand  $dx$  vil det infinitesimale arbejde, der udføres af kraften være

$$dW = F dx = pA dx = p dV , \quad (6.8)$$

hvor  $dV$  er den infinitesimale ændring af volumet i systemet.

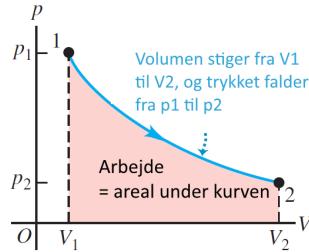
Lad os sige, at volumet ændrer sig fra  $V_1$  til  $V_2$ . Det udførte arbejde i en volumen ændring er så

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV . \quad (6.9)$$

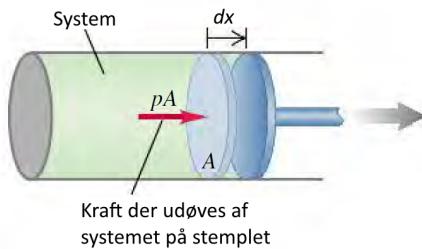
Vi ser også, at hvis trykket er konstant bliver arbejdet blot

$$W = p(V_2 - V_1) . \quad (6.10)$$

For ethvert termodynamisk system kan der laves et  $pV$ -diagram, hvor arealet under kurven i diagrammet repræsenterer arbejdet. Et eksempel på et  $pV$ -diagram, hvor arbejdet er positivt kan ses på fig. 6.5.



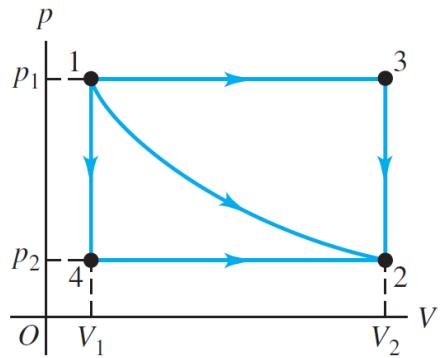
Figur 6.5: Når arbejdet er positivt udvider volumet sig, når trykket varierer.



Figur 6.6: Systemet består af en cylinder med gas. Derudover er der et stempel i den ene ende af cylinderen, og den kan bevæge sig.

Arbejdet afhænger altså af, hvor vi starter og hvor vi slutter, men det afhænger også af vejen derhen. På fig. 6.7 kan I se, hvordan man på tre forskellige måder kan komme fra punkt 1 til punkt 2. I

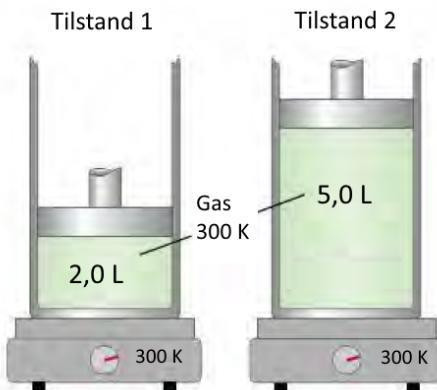
virkeligheden er der uendelige mange måder, men her vises blot tre mulige. Forestil jer et system, der former et loop. Her starter og slutter vi samme sted, men arbejdet, der udføres af systemet er ikke nul, i stedet vil det være arealet indeholdt i loopet. Det giver altså ikke mening at snakke om arbejde indeholdt i et system. Man kan snakke om specifikke værdier af  $p$ ,  $V$  og  $T$  i en bestemt tilstand, men det giver ikke mening at snakke om en specifik værdi af  $W$ .



Figur 6.7: Tre mulige veje at gå for at komme fra 1 til 2. Dette viser, at arbejdet afhænger af, hvilken vej vi går.

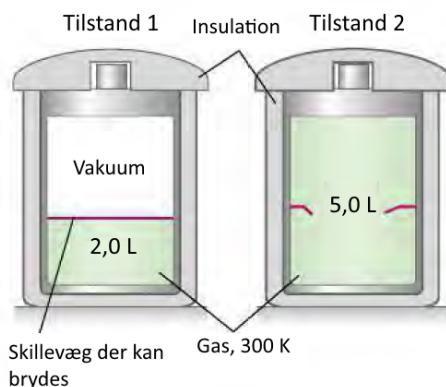
Der gælder det samme for varmeoverførsel i et termodynamisk system.  $Q$  afhænger altså også af hvilken vej vi går. Et eksempel, der bekræfter dette, kan ses på fig. 6.8, hvor en ideal gas udvides fra 2 til 5 L. En varm plade tilfører varme til systemet og systemet udfører da et arbejde på stemplet således, at gassen udvides. Her er både  $W > 0$  og  $Q > 0$ . På fig. 6.9 ser vi også på en ideal gas, der udvider sig fra 2 til 5 L. Her er gassen dog indeholdt i en beholder, der kan rumme 5 L. I beholderen er der en skillevæg, der adskiller gassen og vakuum. Når skillevæggen brydes udvides volumen af gassen til 5 L. Der udføres ikke noget arbejde og intet er varme er hverken kommet ind eller ud af systemet. her er både  $W = 0$  og  $Q = 0$ .

System udfører arbejde på stemplet, varmeplaade tilfører varme til systemet ( $W>0$ ,  $Q>0$ )



Figur 6.8: Systemet udfører noget arbejde på stemplet, og en varm plade tilfører varme til systemet. Så  $W > 0$  og  $Q > 0$

Systemet udfører intet arbejde og der er ingen varmetransport ( $W=0$ ,  $Q=0$ )



Figur 6.9: Systemet udfører ikke noget arbejde; der kommer hverken varme ind eller ud af systemet. Så  $W = 0$  og  $Q = 0$

## Indre energi

Den indre energi er et af de vigtigste koncepter i termodynamik. Hvis man varmer et legeme op vil dens indre energi vokse og ligeledes aftage hvis legemet køles ned. Men hvad *er* indre energi?

### Definition 1

Lad os definere indre energi ud fra et mekanisk synspunkt. Stof består af atomer og molekyler, og disse er netop lavet af partikler, der både har kinetisk og potentiel energi. Vi definerer den indre energi af et system som summen af de kinetiske energier fra systemets partikler plus summen af alle de potentielle

energier, der kommer fra partiklernes interaktion med hinanden. Vi betegner den indre energi  $U$ , hvor  $\Delta U = U_2 - U_1$  er ændringen i den indre energi i et system.

### Definition 2

Vi kan anskue den indre energi fra en anden vinkel. Tilføjer vi noget varme,  $Q$ , til et system, og systemet ikke udfører noget arbejde gennem processen, vil den indre energi vokse med en værdi svarende til  $Q$ , dvs.  $\Delta U = Q$ . Hvis et system udfører arbejde ved at udvide sig mod sine omgivelser og ingen varme er tilføjet i processen, så vil der strømme noget energi ud af systemet, og dermed vil den indre energi aftage. Vi får da, at  $\Delta U = -W$ . Hvis der både optræder varmeoverførsel og arbejde, så er den totale ændring i indre energi:

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q - W \quad (1. hovedsætning) \quad (6.11)$$

Det viser sig, at vores første definition har en del ulemper. Det vil f.eks. være håbløst kompliceret at skulle beregne den indre energi i et system, og derudover kan vi heller ikke måle nogle fysiske størrelser som kan bestemme den indre energi. Den anden definition, altså den 1. hovedsætning, giver os mulighed for rent faktisk at bestemme den indre energi. Men vi så tidligere at både  $W$  og  $Q$  afhænger af hvilken vej vi går. Hvis  $\Delta U$  også er vejafhængig vil den være tvetydig. Man undersøgte dette gennem et eksperiment og her så man at  $\Delta U$  ikke er vejafhængig. Ændringen i den indre energi i et system afhænger altså kun af hvilken tilstand vi starter og slutter i. Dermed ikke sagt at den første definition af den indre energi som mikroskopisk mekanisk energi er forkert, men den er ikke operationel ligesom den 1. hovedsætning.

Ligning (6.11) er også nogle gange nyttig i sin differentiale form:

$$dU = dQ - dW = dQ - p dV \quad (6.12)$$

### Termodynamiske processer

Der er flere forskellige termodynamiske processer. Vi vil nu se på nogle af dem.

- **Adiabatisk proces** I en adiabatisk proces er der ingen varmeoverførsel hverken ind eller ud af systemet, dvs.  $Q = 0$ . Fra 1. hovedsætning får vi, at  $\Delta U = -W$ . Når et system udvider sig adiabatisk er  $W$  positiv, og dermed aftager den indre energi, da  $\Delta U$  er negativ. Når et system komprimeres adiabatisk er  $W$  negativ, og den indre energi vil vokse. Når proppen i en flaske champagne popper, har vi at gøre med en adiabatisk proces. Gasserne inde i flasken udfører et arbejde på luften udenfor ( $W > 0$ ). Gasserne har ikke tid til at udveksle energi med omgivelserne og dermed er  $Q = 0$ . Dermed aftager den indre energi af de udvidede gasser og temperaturen falder. Dette viser sig i form af kondenseret vanddamp, som er den lille sky vi ser lige efter flasken er poppet.
- **Isokorisk proces** I en isokorisk proces er volumet konstant. Dvs. arbejdet er  $W = 0$  og vi har at  $\Delta U = Q$ . Alt energi i form af varme, der tilføres til systemet forbliver i systemet, og dermed vokser den indre energi. At varme en gas op i en lukket beholder med konstant volumen er et eksempel på en isokorisk proces.

- **Isobarisk proces** I en isobarisk proces er trykket konstant. Hverken  $\Delta U$ ,  $Q$  eller  $W$  er nul, men vi ved her, at  $W$  er givet ved ligning (6.10). Det meste madlavning involverer isobariske processer, f.eks. er trykket i en mikrobølgeovn konstant mens maden varmes op.
- **Isotermisk proces** I en isotermisk proces er temperaturen konstant. I en sådan proces gælder der altså også, at hverken  $\Delta U$ ,  $Q$  eller  $W$  er nul. For en ideal gas afhænger den indre energi *kun* af temperaturen, og dermed er  $Q = W$ . Det betyder at den varme, der tilføres til systemet i form af energi må forlade igen som arbejde udført af systemet.

## 6.5 2. hovedsætning

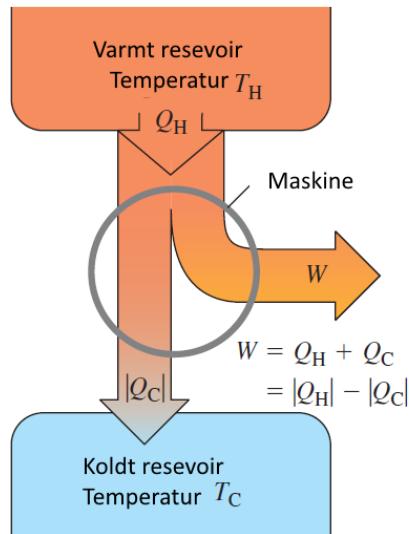
Termodynamikkens 2. hovedsætning handler om termodynamiske processers retning. Helt naturligt overføres varme altid fra et legeme med højere temperatur til et legeme med lav tempeatur, aldrig omvendt. Varmeoverførsel den anden vej er muligt, men det sker bare ikke i naturen (det er helt ufatteligt usandsynligt og sker derfor ikke). Det er også nemt at omdanne mekanisk energi komplet til varme, men hvis vi vil omdanne varme til mekanisk energi kan vi kun gøre det delvist, aldrig fuldstændigt. Sagt på en lidt anden måde “*you can't unscramble eggs*”.

Termodynamiske processer, der forekommer i naturen er irreversible, de kan altså kun ske i én retning. Irreversible processer er heller ikke ligevægtsprocesser. Systemet er ikke i termodynamisk ligevægt før processen ender. For senere at kunne forstå 2. hovedsætning bedre skal vi introducere varmemaskiner, reservoirer og termisk effektivitet.

En *varmemaskine* er en enhed, der delvist omdanner varme til arbejde eller mekanisk energi. Inde i maskinen sidder den *arbejdende del*, som bl.a. gennemgår til- og udstrømningen af varme, udvidelse og kompression. De nemmeste varmemaskiner at analysere er dem, hvor den arbejdende del gennemgår en cyklisk proces, hvilket vil sige, at tilstrømningen af varme er lig det samlede arbejde som varmemaskinen udfører, altså er  $Q = W$ .

Alle varmemaskiner absorberer varme fra en kilde ved en relativ høj temperatur, udfører noget mekanisk arbejde og kasserer noget varme ved en lav temperatur. For at analysere varmemaskiner er det derfor smart at tænke på to legemer, som den arbejdende del kan interagere med. Det ene kaldes det *varme reservoir* og repræsenterer varmekilden: Det kan give den arbejdende del en stor mængde af varme ved en konstant temperatur  $T_H$  uden at ændre sin egen temperatur. Det andet kaldes det *kolde reservoir*, som kan absorbere store mængder af kasseret varme fra maskinen ved en konstant temperatur  $T_C$ . Varme der overføres fra det varme reservoirer til det kolde betegnes med  $Q_H$  og  $Q_C$  når det går den anden vej.

Varmen, der overføres til den arbejdende enhed er postiv, hvorimod varmen, der forlader den arbejdende enhed er negativ, det vil sige, at  $Q_H$  er postiv og  $Q_C$  er negativ. For at forstå disse energioverførelser i en varmemaskine under en cyklisk proces laver vi et energi-flow diagram, som ses på fig. 6.10. Ideelt set vil vi gerne kunne omdanne al varmen  $Q_H$  til arbejde. Dermed ville  $Q_H = W$  og  $Q_C = 0$ . Eksperimenter viser, at det ikke kan lade sig gøre, fordi der altid vil være noget varme, der går tabt, så  $Q_C$  kan aldrig blive 0. Vi definerer nu den termiske effektivitet, som repræsenterer andelen af



Figur 6.10: Energi-flow-diagram for en varmemaskine.

$Q_H$ , som omdannes til arbejde.

$$e = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \left| \frac{Q_C}{Q_H} \right|. \quad (6.13)$$

Vi kan tænke på et køleskab som en varmemaskine, der kører baglæns. Det vil altså sige, at et køleskab overfører varme fra et koldt sted (inde i køleskabet) til et varmt sted (til luften i rummet, som køleskabet er placeret i). Det betyder også, at  $Q_C$  nu er positiv og  $Q_H$  og  $W$  er negative. Et energi-flow diagram for et køleskab ser dermed ud som vist på fig. 6.11.

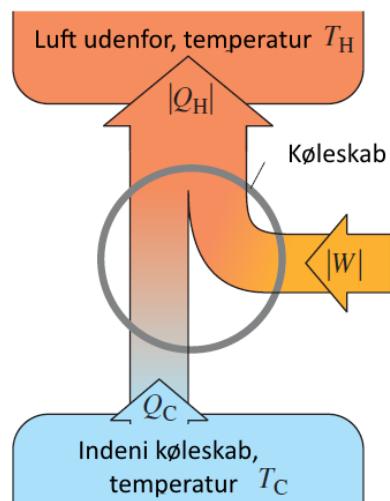
Fra et økonomisk synspunkt vil det bedste køleskab være et, som kræver minimal arbejde for at overføre varme  $Q_C$  fra indersiden af køleskabet. Ydeevne-koefficienten (på eng. *coefficient of performance*) beskriver hvor godt et køleskab er, og er givet som

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|}. \quad (6.14)$$

Termodynamikkens 2. hovedsætning kan udtrykkes på to måder. Den første måde lyder:

*Det er umuligt for et system at gennemgå en proces, hvor det absorberer varme fra et reservoir ved en enkel temperatur, omdanner al varme til mekanisk arbejde fuldstændigt og ender i samme stadie som det startede i.*

Denne formulering kaldes også for "the engine statement". Vi kan bruge, hvad vi ved om køleskabet, til at formulere 2. hovedsætning på en anden måde. Helt naturligt bevæger varme sig altid fra varmere til koldere legemer, aldrig modsat. Men så tænker du sikkert: hvad med køleskabet? Et køleskab tager godt nok varme fra et koldere legeme til et varmere, men *kun* når der puttes noget mekanisk energi eller arbejde ind i systemet. Det leder os til den anden formulering:



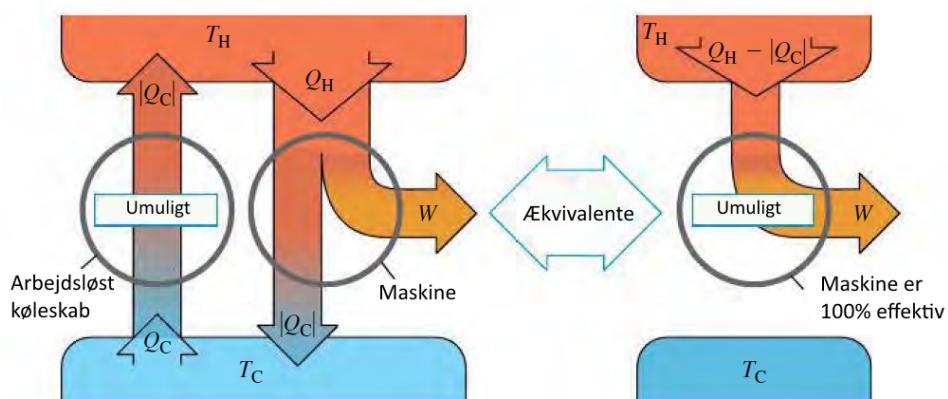
Figur 6.11: Energi-flow-diagram for et køleskab.

*Det er umuligt for en process at have overførsel af varme fra et koldt legeme til et varmt som det eneste resultat.*

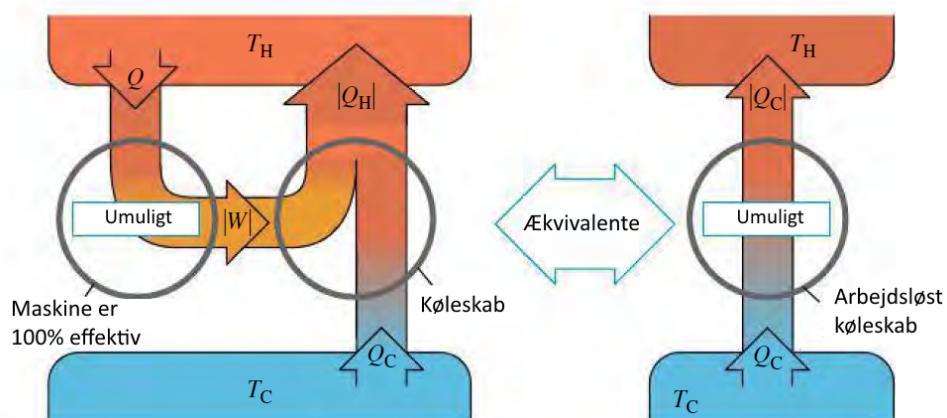
Denne formulering kaldes også for “the refrigerator statement”. Energi-flow-diagrammerne for disse to formuleringer af den 2. hovedsætning ses på fig. 6.12 som illustrerer “the engine statement” og 6.13, der illustrerer ”the refrigerator statement”. Forestil dig at vi sætter et køleskab sammen med en varmemaskine. Køleskabet er arbejdsløst og derfor overføres al varme fra det kolde reservoirer til det varme. Det er ækvivalent til, at al varme, der tilføres til det varme reservoirer omdannes til arbejde, hvilket strider mod 2. Hovedsætning.

Man kan også forestille sig at varmemaskinen er 100 procent effektiv. Arbejdet tilføjes da til systemet med køleskabet. Dette er ækvivalent til et arbejdsløst køleskab, som er umuligt.

Der findes altså ikke evighedsmaskiner. Selv den bedst konstruerede maskine taber til sidst energien og går i stå.



Figur 6.12: Energi-flow-diagram for den første formulering af 2. hovedsætning (engine statement).

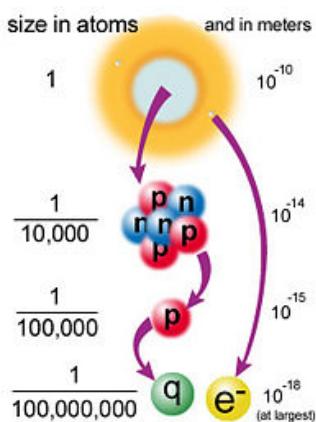


Figur 6.13: Energi-flow-diagram for den anden formulering af 2. hovedsætning (refrigerator statement).

## Kapitel 7

# Partikelfysik

Fysik handler om at beskrive vores verden, og fysikere har altid interesseret sig for den mest fundamentale beskrivelse. Hvad er verdens mindste byggesten, og hvordan vekselvirker de med hinanden? Engang troede man, at atomer var de mindste byggesten, men så opdagede man, at de bestod af negativt ladede elektroner (J.J. Thomson, 1896) og en positivt ladet kerne (E. Rutherford, 1911). Med opdagelsen af neutronen (J. Chadwick, 1932) gik det op for folk, at kernen ikke var fundamental, men var sammensat af protoner og neutroner. I 1950'erne begyndte man at opdage et hav af nye proton- og neutron-lignende partikler, og man blev klar over, at de ikke kunne være fundamentale. De måtte bestå af nogle mindre partikler, kvarkerne, foreslog M. Gell-Mann og G. Zweig i 1964. I alt seks forskellige kvarker måtte der være, og eksistensen af disse blev eksperimentelt bekræftet mellem 1968 og 1995. Fysikere fik efterhånden godt styr på de fundamentale partikler, og i midten af 1970'erne stod med en samlet teori, der fænomenalt godt beskriver vores verden på fundamentalt niveau. Teorien fik navnet "Standardmodellen", og da den blev udviklet, indeholdt den både kendte og endnu uopdagede partikler. Sidenhen er alle partiklerne i Standardmodellen blevet eksperimentelt bekræftet. Den sidste manglende brik, Higgs-partiklen, blev opdaget i 2012 i et storstilet eksperiment på CERN-laboratoriet i Geneve.



Figur 7.1: Når man piller et atom fra hinanden, finder man mindre og mindre byggesten.

## 7.1 Kvantefeltteori

Hvis vi ønsker at lave en fundamental beskrivelse af vores verden, er det vigtigt at tage højde for de allerede eksisterende teorier. Først og fremmest skal vi tage højde for kvantemekanikken, som er vigtig på atomar skala. Dernæst skal vi tage højde for den specielle relativitetsteori, som er vigtig, når hastigheder nærmer sig lysets hastighed. Hvis vi f.eks. ønsker en fundamental beskrivelse af lys, skal vi huske, at lys i kvantemekanikken beskrives som foton-partikler, og da de ovenikøbet bevæger sig med lysets hastighed, er relativitetsteorien afgørende. Derfor er det uomgængeligt, at vi skal lave en teori for relativistisk kvantemekanik. Denne teori kaldes *kvantefeltteori*.

	Små afstande ( $< 10^{-9}$ m)	Store afstande ( $> 10^{-9}$ m)
Små hastigheder ( $< 10^8$ m/s)	Kvantemekanik	Klassisk mekanik
Store hastigheder ( $> 10^8$ m/s)	Kvantefeltteori	Relativitetsteori

Som vi så i kapitlet om klassisk mekanik, så kan et system beskrives ved hjælp af en Lagrange-funktion,  $L = T - V$ , som er den kinetiske energi,  $T$ , minus den potentielle energi,  $V$ , udtrykt i nogle generaliserede koordinater. Denne idé overfører man næsten direkte til kvantefeltteorien, hvor man også opskriver led for den kinetiske og potentielle energi. De generaliserede koordinater er kvantefelterne (som dog hver især afhænger af tid og sted). Der er dog den forskel, at man i stedet for Lagrange-funktionen  $L$ , helst opskriver Langrange-tætheden,  $\mathcal{L}$ , som blot er  $L$  pr. volumen rum pr. tid.<sup>1</sup> Ud fra Euler-Lagrange-ligningen kan man finde en ligning for Langrange-tætheden, som altså er bevægelsesligningen i kvantefeltteori, der fortæller, hvordan kvantefelterne opfører sig. Et simpel kvantefeltteoretisk system kunne bestå af et enkelt felt  $\phi$  i én rumlig dimension  $x$ , så feltet afhænger af sted  $x$  og tid  $t$ , dvs.  $\phi = \phi(x, t)$ . Lad os sige, at feltet  $\phi$  beskriver en partikel med massen  $m$ . Langrange-tætheden for systemet kan opskrives som

$$\mathcal{L}(\phi) = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2}_{\text{Kinetisk energi}} - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\text{Potentiel energi}} .$$

På campen skal vi snakke mere om idéerne bag kvantefeltteori, og vi skal se på nogle simple eksempler. Kvantefeltteori er et af de sværreste teorier at mestre, også for universitetsstuderende. Selvom vi ved meget om kvantefeltteori i dag, så er der stadig ubesvarede spørgsmål, som forskere arbejder på at besvare. Studiet af forskellige kvantefeltteoretiske systemer er et meget aktivt forskningsfelt. Derfor kommer vi heller ikke på nogen måde til bunds i emnet på campen, men vi vil komme til at beskæftige os med de grundlæggende principper og idéer, som kvantefeltteori og partikelfysik bygger på. Selvom vi kommer til at behandle emnet overfladisk, så vær ikke i tvivl om, at I stadig kommer meget dybt ind i en verden, som ellers er helt utilgængelig for gymnasieelever.

---

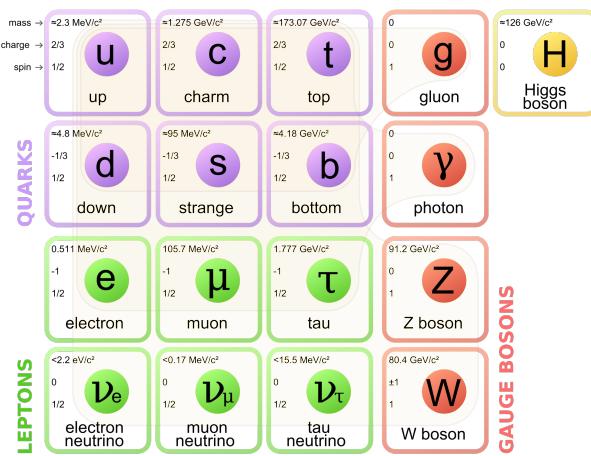
<sup>1</sup>Da Langrange-tætheden  $\mathcal{L}$  er Lagrange-funktionen  $L$  pr. rumtids-volumen, får vi  $L$  ved at integrere  $\mathcal{L}$  over hele rumtiden:  $L = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx dy dz dt$ .

## 7.2 Standardmodellen

For sjov skyld kan du se Lagrange-tætheden for Standardmodellen nedenfor. Standardmodellen er vores bedste model for de fundamentale partikler og deres vekselvirkninger.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{SM}} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\text{tr}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\text{tr}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \\
 & + \bar{L}_i^\alpha i\gamma_\mu \left( \partial^\mu - ig' Y B^\mu - ig(T_a)_\alpha^\beta W_a^\mu \right) L_i\beta \\
 & + \bar{e}_i i\gamma_\mu \left( \partial^\mu - ig' Y B^\mu \right) e_i \\
 & + \bar{Q}_i^{\alpha c} i\gamma_\mu \left( \partial^\mu - ig' Y B^\mu - ig(T_a)_\alpha^\beta W_a^\mu - ig_s(\lambda_a)_c^d G_a^\mu \right) Q_{i\beta d} \\
 & + \bar{u}_i^c i\gamma_\mu \left( \partial^\mu - ig' Y B^\mu - ig_s(\lambda_a)_c^d G_a^\mu \right) u_{id} \\
 & + \bar{d}_i^c i\gamma_\mu \left( \partial^\mu - ig' Y B^\mu - ig_s(\lambda_a)_c^d G_a^\mu \right) d_{id} \\
 & + \left| \left( \partial^\mu - ig' Y B^\mu - ig(T_a)_\alpha^\beta W_a^\mu \right) H_\beta \right|^2 \\
 & - \left( \lambda_{ij}^e \bar{e}_i (H^\dagger)^\alpha L_{j\alpha} + \lambda_{ij}^d \bar{d}_i^c (H^\dagger)^\alpha Q_{j\alpha c} + \lambda_{ij}^u \bar{u}_i^c H_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} Q_{j\beta c} + \text{c.c.} \right) \\
 & + \mu^2 H^\dagger H - \lambda(H^\dagger H)^2 .
 \end{aligned}$$

Standardmodellen er delt op i flere sektorer, der hver indeholder sin mere eller mindre afgrænsede del. Linje 1 indeholder de kinetiske energier for vekselvirkningspartiklerne (kaldes også gaugebosoner, det er fotoner, gluoner mm.). Linje 2–3 indeholder lepton-sektoren (leptoner er elektroner, muoner, neutrinoer osv.). Linje 4–6 indeholder kvark-sektoren (kvarker er byggestenene til neutroner, protoner mm.). Linje 7–9 indeholder Higgs-sektoren med Higgs-partiklen og dens vekselvirkninger med de andre partikler. Desuden indeholder modellen også alle partiklernes respektive antipartikler (anti-elektroner, anti-kvarker osv.). Dermed indholder Standardmodellen alle de partikler, vi kender i dag.

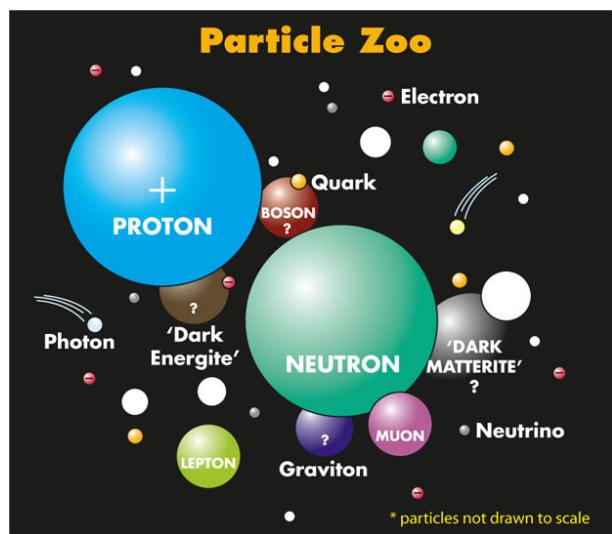


Figur 7.2: Standardmodellens partikler.

Selvom Standardmodellen har vist sig ufattelig succesfuld til at beskrive vores verden, så ved vi, at den ikke er perfekt. En fundamental teori skal indehold al kendt fysik, men Standardmodellen indeholder fx ikke tyngdekraften. Dette må man sige er en væsentlig mangel! Man har forsøgt at inkludere tyngdekraften i Standardmodellen ved at postulere en tyngdekraftspartikel, en såkaldt graviton. Men trods mange forsøg har ingen kunne lave et tilfredsstillende teori, der forener de kendte partikler med en graviton.

Et andet stort problem for Standardmodellen er, at partiklerne i modellen kun udgør ca. 5% af energien i universet. Resten af energien er enten såkaldt mørk energi (68%) eller udgjort af mørkt stof (27%), som vi ved må eksistere ud fra studier af galaksers bevægelse. Men da det tilsyneladede næsten ikke vekselvirker med det kendte stof i Standardmodellen, er det uhyre svært at lære mere om dets natur.

Fysikere håber, at man engang i fremtiden forstår tyngdekraft på kvanteskala, mørk energi og mørkt stof bedre, så vi kan lave en teori, der beskriver al fysik. En konsistent teori, der både inkluderer Standardmodellens partikler, tyngdekraft, mørk energi og mørkt stof er ”den hellige gral” for mange fysikere, der arbejder med disse problemer. Nogen håber oveni købet på, at vi finder en komplet beskrivelse af verden, der til perfektion beskriver virkeligheden. Men hertil kan man argumentere, at en fysisk teori altid vil være en approksimation til virkeligheden, dog bliver vores approksimation bedre og bedre som fysikken udvikles. Måske vil vi en dag smide Standardmodellen bort til fordel for en bedre teori.



Figur 7.3: Nogle af de kendte partikler samt nogle postulerede partikler, der kunne løse Standardmodellens problemer.

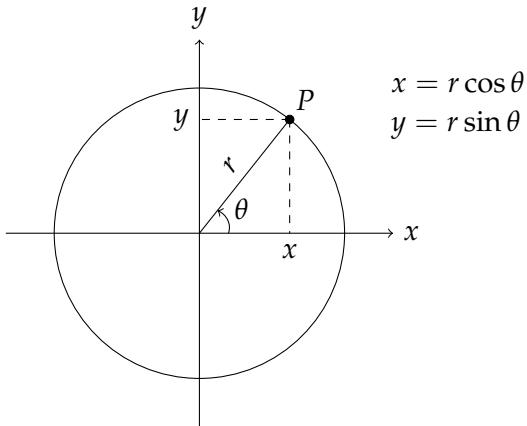
## Bilag A

# Matematik

I dette appendiks skal vi indføre nogle nyttige matematiske redskaber, der er essentielle for fysikken. Selvom du måske kender noget af matematikken i forvejen, så anbefaler vi alligevel kraftigt, at du læser appendikset, fordi vi sandsynligvis præsenterer det på en anden måde, end du er vant til fra gymnasiet.

### A.1 Polære koordinater, cosinus og sinus

Forestil dig en lille kugle for enden af en snor, der roterer rundt i en cirkelbevægelse som på tegningen nedenfor.



Kulgen roterer rundt i et to-dimensionelt plan. Lad os sige, at til et bestemt tidspunkt befinder kulgen sig i punktet  $P$ . Når vi har lagt et koordinatsystem som på tegningen kan vi beskrive punket  $P$  ved at angive dets  $x$ -værdi og  $y$ -værdi. Disse koordinater ( $x$  og  $y$ ) kaldes *kartesiske* koordinater. Det er muligt at beskrive  $P$  ved hjælp af andre koordinater, fx er det i dette tilfælde smart at beskrive  $P$  ved at angive afstanden  $r$  fra centrum (origo) og vinklen  $\theta$  mellem  $x$ -aksen og linjen fra origo til  $P$ , se tegningen. Disse koordinater ( $r$  og  $\theta$ ) kaldes *polære* koordinater.

Fordelen ved polære koordinater er tydelig, når vi tænker på en kulge i en snor, der roterer rundt: Til et senere tidspunkt har kuglen flyttet sig til et andet punkt på cirklen. I kartesiske koordinater vil det

nye punkt have både en ny  $x$ - og  $y$ -værdi, men i polære koordinater vil vinklen  $\theta$  være ny, men radius  $r$  er uændret. Så i polære koordinater er det altså kun én koordinat, der ændres, når kuglen roterer rundt, hvilket er nemmere at arbejde med en to, der ændrer sig.

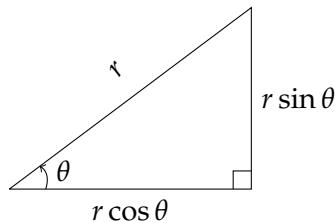
Relationerne mellem kartesiske og polære koordinater er:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\\theta &= \arctan(y/x),\end{aligned}$$

hvor  $\arctan$  er den inverse funktion til tangens, men udtrykket for  $\theta$  vil I ikke få brug for. I udtrykkene for  $x$  og  $y$  indgår henholdsvis funktionerne cosinus og sinus. Hvis du ikke kender disse funktioner, kan du selv finde litteratur om dem, men faktisk er de defineret som på tegningen: Hvis  $\theta$  angiver vinklen mellem  $x$ -aksen og et punkt, så er

$$\begin{aligned}\cos \theta &= x\text{-koordinaten for punktet på cirklen med radius } 1 \\\sin \theta &= y\text{-koordinaten for punktet på cirklen med radius } 1\end{aligned}$$

Cosinus og sinus har også noget med trekanter at gøre. Hvis vi kigger på tegningen af cirklen igen, ser vi, at den indeholder to retvinklede trekanter:  $OxP$  og  $OyP$ , hvor  $O$  betegner centrum. I de to trekanter er hypotenusen  $r$ , og de to sidelænger er  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$ . Vi kan altså lave følgende tegning, der illustrerer længderne i en retvinklet trekant:



Heraf følger at cosinus og sinus er forholdet mellem to længder i den retvinklede trekant:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\text{hosliggende side}}{\text{hypotenusen}} \\\sin \theta &= \frac{\text{modstående side}}{\text{hypotenusen}}\end{aligned}$$

Vi definerer også en funktion kaldet tangens:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{modstående side}}{\text{hosliggende side}}$$

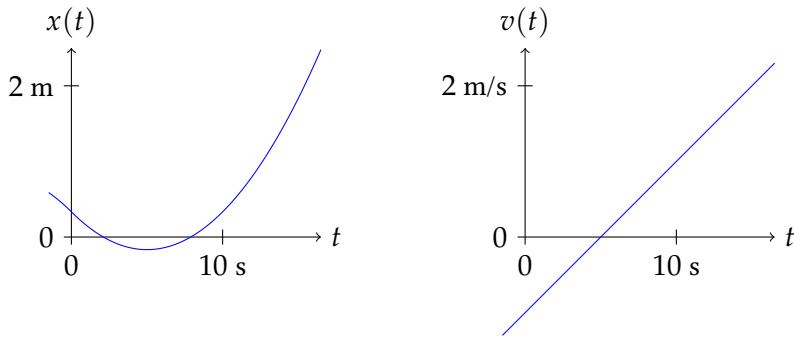
Hvis vi sætter  $r = 1$  får vi fra Pythagoras' sætning at

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

hvor vi har brugt notationen  $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$  og  $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$ .

## A.2 Differentialregning

En bil kører på vejen, og den position betegnes  $x$ . Fordi bilen bevæger sig, ændrer den position sig med tiden. Hvis vi lader  $t$  betegne tiden, så er bilens position en *funktion* af tiden, og vi skriver  $x(t)$ . Vi siger også, at  $x$  *afhænger* af  $t$ . Nogle gange er vi dovne og nøjes med at skrive  $x$  i stedet for  $x(t)$ , men vi husker på, at  $x$  er en funktion af  $t$ . Måske er vi interesseret i bilens hastighed  $v$ , hvilket er ændringen i position pr. ændringen i tid. Hvis bilens position ændrer sig meget i løbet af kort tid, så er bilens hastighed stor. Med andre ord er hastigheden til et bestemt tidspunkt  $t$  altså givet som hældningen af grafen for  $x(t)$ , og hastigheden er altså selv en funktion af tiden,  $v(t)$ . Nedenfor ses et eksempel, hvor bilen kører baglæns for  $t < 5$  s, standser i  $t = 5$  s, og kører fremad for  $t > 5$  s, hvorefter den kører hurtigere og hurtigere som  $v(t)$  vokser.



### Notation for differentialkvotienter

Differentialregning går ud på at beregne hældningen af en graf. Som allerede illustreret med den kørende bil, så er dette yderst relevant i fysik. En stor del af fysik har at gøre med hvordan noget ændrer sig, når man ændrer et eller andet, f.eks. hvordan positionen ændrer sig, når tiden ændrer sig. Tit afhænger fysiske størrelser af mere end én variabel, og derfor betragter vi generelt funktioner af flere variable,

$$f(x, y, z, \dots) .$$

Hvis vi vil finde hældningen skal vi specificere hældningen mht. hvilken variabel. Hvis vi vil finde hældningen mht.  $x$ , må vi holde  $y, z, \dots$  fast og kun ændre  $x$ . Da kan vi tegne grafen for  $f$  som funktion af  $x$  og finde hældningen. Hældningen for  $f$  mht.  $x$  betegnes

$$\frac{d}{dx} f(x, y, z, \dots) \quad \text{eller} \quad \frac{d}{dx} f \quad \text{eller blot} \quad \frac{df}{dx} ,$$

og  $\frac{df}{dx}$  er en funktion af  $x$  (og de øvrige variable  $y, z, \dots$ ), der kaldes *differentialkvotienten* (eller *den afledte*) af  $f$  mht.  $x$ . Når vi beregner differentialkvotienten siger vi, at vi *differentierer* (eller *afleder*) funktionen  $f$  mht.  $x$ . Du har måske allerede stødt på dette, men brugt mærke-notationen i stedet:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) .$$

Mærke-notationen  $f'(x)$  er uheldig, fordi den kun kan anvendes for funktioner af én variabel; hvis funktionen afhænger af to variable, hvilken én heviser mærket så til? Da  $\frac{df}{dx}$  også er en funktion, kan vi differentiere den igen, enten mht.  $x$  igen eller en af de andre variable, hvilket skrives

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{og} \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dy} \frac{df}{dx}.$$

I det særlige tilfælde, hvor vi differentierer en funktion mht. tiden  $t$ , så bruger vi tit en særlig prik-notation:

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} \quad \text{og} \quad \frac{d}{dt} \frac{df}{dt} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \ddot{f}.$$

*Sidebemærkning:* Hvis man vil, kan man tænke på  $\frac{d}{dx}$  som en operator, der opererer på funktionen  $f$ . Når vi ganger operatoren  $\frac{d}{dx}$  på  $f$  fra venstre, vil dens operation være at finde hældningen af  $f$  mht.  $x$ . I sig selv giver  $\frac{d}{dx}$  ikke så meget mening, men når den får lov til at operere på en funktion  $f$ , så får vi en ny funktion,  $\frac{df}{dx}$ .

## Regneregler

Vi skal ikke gå i detaljer med, hvordan man matematisk finder differentialkvotienter. Derimod vil vi postulere en række regneregler, og dem skal vi bruge til at regne differentialkvotienten ud for en masse funktioner. Nedenfor er  $f$  og  $g$  to funktioner af  $x$  og evt. flere variable,  $f(x, \dots)$  og  $g(x, \dots)$ , og  $a$  er en konstant (dvs. afhænger ikke af  $x$ ).

### 1. Konstant skalering.

Hvis  $a$  er en konstant kan den trækkes udenfor differentiationen.

$$\frac{d}{dx}(af) = a \frac{df}{dx}.$$

### 2. Sum.

En sum differentieres ved at differentere hvert led.

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

### 3. Produkt.

Et produkt differentieres ved skiftevis differentiere hver faktor.

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \left( \frac{df}{dx} \right) \cdot g + f \cdot \left( \frac{dg}{dx} \right).$$

### 4. Kvotient.

En kvotient differentieres på følgende vis.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{\left( \frac{df}{dx} \right) \cdot g - f \cdot \left( \frac{dg}{dx} \right)}{g^2}.$$

## 5. Kædereglen.

En sammensat funktion,  $f(g(x))$ , differentieres ved at differentiere den indre funktion,  $g(x)$ , mht.  $x$  og gange med den ydre funktion  $f(g)$  differentieret mht. den indre funktion,  $g$ .

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg} .$$

## 6. Ombytning af rækkefølgen.

Hvis man differentierer en funktion mht. to forskellige variable, må man ombytte rækkefølgen af differentiationen.

$$\frac{d}{dy} \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{df}{dy}$$

Med de ovenstående regler kan differentialkvotienten af enhver funktion simplificeres, så den kan beregnes ved at kende differentialkvotienten af nogle simplere funktioner. Nu giver vi en liste over differentialkvotienter for en række simple funktioner.

## 7. Konstant.

$$\frac{d}{dx} a = 0 .$$

## 8. Potensfunktion.

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1} .$$

Specielt gælder der

$$\frac{d}{dx} x = 1 \quad (a = 1)$$

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x \quad (a = 2)$$

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \quad (a = 3)$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (a = \frac{1}{2})$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad (a = -1)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3} \quad (a = -2)$$

Kombineret med regel 1 og 2, får man for polynomier

$$\frac{d}{dx} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$$

Specielt for en lineær funktion og en parabel har vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x) &= a_1 & (n = 1) \\ \frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_1 + 2a_2x & (n = 2)\end{aligned}$$

### 9. Eksponentialfunktion.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x .$$

### 10. Naturlig logaritme.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} .$$

### 11. Sinus.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x .$$

### 12. Cosinus.

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x .$$

### Eksempel 1

Vi vil differentiere funktionen  $F(x) = (3 - x^2)e^{-x^2}$  mht.  $x$ . Vi starter med at betragte  $F(x)$  som et produkt af to funktioner,  $3 - x^2$  og  $e^{-x^2}$ , og bruger derfor regel 3.

$$\frac{dF}{dx} = \left( \frac{d}{dx}(3 - x^2) \right) \cdot e^{-x^2} + (3 - x^2) \cdot \left( \frac{d}{dx}e^{-x^2} \right)$$

Fra regel 8 for en parabel med  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 0$  og  $a_2 = -1$  har vi, at

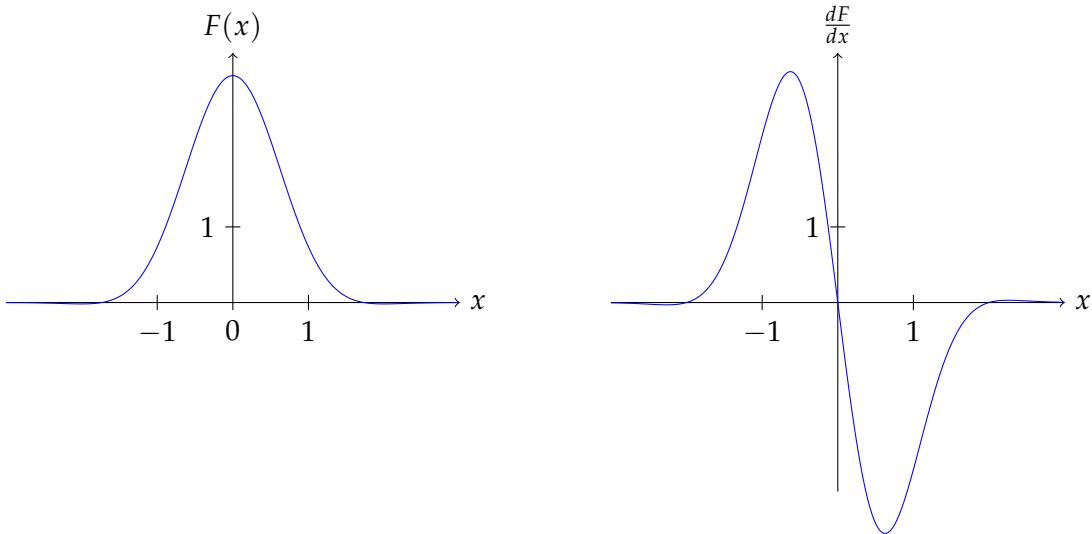
$$\frac{d}{dx}(3 - x^2) = -2x .$$

Dernæst vil vi differentiere  $e^{-x^2}$ , som vi betragter som en sammensat funktion. Regel 5 med  $g(x) = -x^2$  og  $f(g(x)) = e^{g(x)}$  giver, at

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = \frac{d}{dx}(-x^2) \cdot \frac{d}{dg}e^g = -2x \cdot e^g = -2xe^{-x^2} .$$

Vi kan nu samle resultaterne og beregne

$$\frac{dF}{dx} = (-2x) \cdot e^{-x^2} + (3 - x^2) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -2x(4 - x^2)e^{-x^2} .$$



Figur A.1:  $F(x)$  fra Eksempel 1 og dens afledte  $\frac{dF}{dx}$ , der angiver hældningen af  $F(x)$ .

### Eksempel 2

Vi vil differentiere funktionen  $G(x, y) = x^2 \sin y$  mht.  $x$  og dernæst mht.  $y$ . Vi starter med beregne  $\frac{dG}{dx}$ , og derfor betragter vi  $y$  som en konstant.

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx} x^2 \sin y = \left( \frac{d}{dx} x^2 \right) \sin y = 2x \sin y .$$

Nu differentierer vi  $G$  mht.  $y$ , og betragter derfor  $x$  som en konstant.

$$\frac{dG}{dy} = \frac{d}{dx} x^2 \sin y = x^2 \left( \frac{d}{dy} \sin y \right) = x^2 \cos y .$$

## A.3 Differentialligninger

En differentialligning er en ligning, hvor der indgår differentialkvotienter af en funktion, og funktionen er den ubekendte. Et eksempel kunne være

$$\frac{df}{dx} = -4f(x) ,$$

hvor vi løser ligningen ved at finde en funktion  $f(x)$ , således at ligningen er sand. I modsætningen til almindelige ligninger, hvor de ubekendte er tal, så er det her funktioner, der er de ubekendte. Ligningen overfor løses af funktionen

$$f(x) = e^{-4x} ,$$

hvilket vi let kan checke ved at differentiere ved hjælp af regel 5 om sammensatte funktioner:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} e^{-4x} = \frac{d}{dx} (-4x) \cdot \frac{d}{d(-4x)} e^{-4x} = -4e^{-4x} = -4f(x) .$$

Der er generelt ingen systematisk måde at løse differentialligninger på, så man finder altid løsninger ved at komme med et godt gæt. Heldigvis er det ofte de samme differentialligninger, man møder gang på gang, og derfor er følgende liste over differentialligninger og deres løsninger meget praktisk.

### 13. Førsteordensligning.

Ligningen

$$\frac{df}{dx} = kf(x) ,$$

hvor  $k$  er en konstant, løses af

$$f(x) = Ae^{kx} ,$$

hvor  $A$  er en arbitrer konstant, som man kan fastsætte, hvis man ved, at løsningsfunktionen skal tage en bestemt værdi i et bestemt punkt.

### 14. Andenordensligning.

Ligningen

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -k^2 f(x) ,$$

hvor  $k$  er en konstant, løses af

$$f(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad \text{og} \quad f(x) = A \sin(kx + \phi) ,$$

hvor  $A$ ,  $B$  og  $\phi$  er arbitrarie konstanter. De to løsninger er faktisk ens, så man kan selv vælge hvilken, man bruger.