

FYSIK CAMP 2018

Faglige:

Christoffer Hansen (ansv.)	ch@unf.dk
Sofie Bruun	shb@unf.dk
Josefine Bjørndal Robl	jr@unf.dk
Jacob Osman Hjortlund	jo@unf.dk
Rasmus Berg Jensen	rbe@unf.dk
Esben Skovhus Ditlefsen	esd@unf.dk
Jeppe Sinkbæk Thomsen	jet@unf.dk
Emil Hoffmann Kozuch	ehk@unf.dk

UNGDOMMENS NATURVIDENSKABELIGE FORENING

Kolofon

Kompendie til UNF Fysik Camp 2018

Opgaverne er udvalgt og formuleret af Sofie Bruun, Josefine Bjørndal Robl, Jacob Osman, Rasmus Berg Jensen, Esben Skovhus Ditlefsen, Jeppe Sinkbæk Thomsen, Emil Hoffmann Kozuch og Christoffer Hansen. Opgaverne er trykt i juli 2018 og teksten er copyright ©2018 af UNF og forfatterne. Gengivelse med kildehenvisning tilladt.

Layout: Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen.

Ansvarlig: Christoffer Hansen.

Indholdsfortegnelse

1	Analytisk Mekanik	1
1.1	Newton's 2. lov og bevægelsesligninger	1
1.2	Koordinater generelt	3
1.3	Roterende legemer	5
1.4	Generaliserede koordinater	12
1.5	Lagrange-funktion	13
1.6	Eksempler på brugen af Lagrangenmekanikken	16
1.7	Perspektiver i Analytisk Mekanik	23
2	Kvantemekanik	25
2.1	Historisk perspektiv	25
2.2	Introduktion	27
2.3	Den tidsuafhængige Schrödinger-ligning	30
2.4	Den uendelige potentielle-brønd	32
2.5	Kvantemekanikkens forunderlige egenskaber	34
2.6	Usikkerhedsrelationen	42
2.7	Den kvantemekaniske harmoniske oscillator	45
2.8	Fortolkninger af kvantemekanikken	48
3	Exoplaneter	51
3.1	Introduktion	51
3.2	Detektionsmetoder	55
3.3	Liv på Exoplaneter	68
4	Atom- og Molekylefysik	73
4.1	Atomstruktur	73
4.2	Finstruktur i atomer	74
4.3	Hyperfinstruktur	81
4.4	Molekylefysik	83
5	Planetbevægelse	89
5.1	Planetbaner og excentricitet	89

5.2 Tolegemeproblemet	92
5.3 Massemidtpunkt, relative koordinater og reduceret masse	92
5.4 Bevægelsesligningerne	95
5.5 Baneskift	102
6 Geometrisk Optik	107
6.1 Introduktion	107
6.2 Billeddannelse	108
6.3 Linser	116
A Matematik	121
A.1 Polære Koordinater, Cosinus og Sinus	121
A.2 Differentialregning	123
A.3 Integralregning	128
A.4 Differentialligninger	134
A.5 Taylorapproksimationer	135
A.6 Komplekse Tal	137
A.7 Vektorer	140
B Litteratur	145

Introduktion

Velkommen til UNF Fysik Camp 2018. Dette kompendium er en introduktion til de emner, som vi skal arbejde med i løbet af campen. Programmet, som I skal igennem, indeholder flere forskellige emner, som alle giver et indblik i, hvor vigtig og alsidig fysikken er. Emnerne er i år analytisk mekanik, kvantemekanik, exoplaneter, atom- og molekylefysik, planetbevægelse og geometrisk optik, hvor I blandt de sidste fire selv får lov til at vælge, hvilke to I ønsker at arbejde med. Alle er de relevante for vores verden, og vi håber, at I vil finde dem lige så spændende, som vi selv gør.

I kommer alle med forskellig undervisningsbaggrund, og vi kræver derfor ikke, at I bare forstår alt med det samme. Under campen vil der være rig mulighed for at snakke mere om det, der står i dette kompendie og virkelig dykke ned i stoffet. Kompendiet indeholder alt, hvad I vil få brug for til at forstå og arbejde med emnerne under campen, og I opfordres derfor kraftigt til at læse det. Særligt bør I forsøge at læse de to første kapitler om analytisk mekanik og kvantemekanik, da disse emner vil indgå i det obligatoriske program, hvormod de andre emner er valgfrie.

Da I kommer fra forskellige klassetrin, har I ikke alle modtaget undervisning i al den matematik, som I måske skal bruge. I opfordres derfor også til at læse appendikset bagerst i kompendiet, som forklarer den matematik, vi skal arbejde med på campen.

God fornøjelse, og velkommen i fysikkens verden.

På vegne af det faglige team,
Christoffer Hansen, fagligt ansvarlig.

Kapitel 1

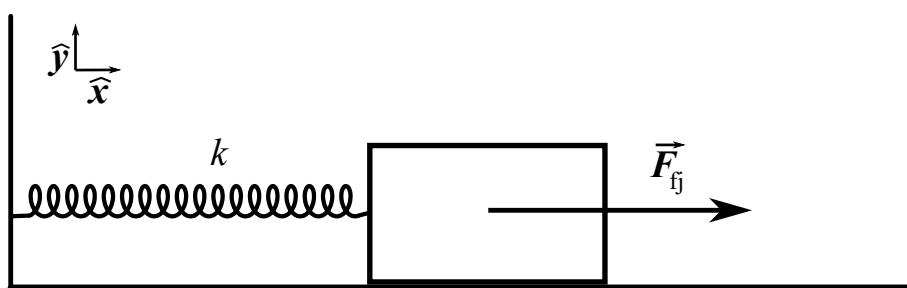
Analytisk Mekanik

1.1 Newtons 2. lov og bevægelsesligninger

Hovedformålet med klassisk mekanik er at undersøge systemer i vores verden, specifikt at kunne beskrive bevægelser og interaktioner, som vi ser dem. Newtons love, specielt hans 2. lov¹

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}, \quad (1.1)$$

lægger den grundlæggende byggesten for, hvordan klassiske problemer i mekanik løses. Beskrevet med ord siger ligning (1.1), at summen af alle kræfter på et legeme, er det samme som legemets masse gange legemets acceleration, men hvordan bruger man det til vores formål, nemlig at kunne beskrive objekters bevægelse? For at svare på dette tages udgangspunkt i kraftanalyse og et eksempel med et lod på en fjeder.



Figur 1.1: En klods, med massen m , fastspændt på en fjeder, med fjederkonstant k , hvor det hele er på en friktionsløs overflade. På tegningen er fjederen sammenpresset, hvorfor fjederen påvirker kloden med en kraft, \vec{F}_{fj} , i den viste retning. Enhedsvektorerne i venstre hjørne viser at x -aksen er vandret, og y -aksen er lodret.

På figur 1.1 ses en illustration af en fjeder fastspændt på en klods, hvor overfladen som kloden bevæger sig på er friktionsløs. Fjederen har fjederkonstanten k og kloden har massen m . Her ses bort fra alle former for friktion, hvilket betyder at fjederkraften er den eneste kraft, der virker på kloden. Inden

¹Her er den skrevet på vektorform, men det betyder bare, at den gælder for hvert koordinat i det koordinatsystem, man vælger at benytte.

dette problem løses, er det værd at overveje, hvilken løsning der forventes at få. Når fjederen er presset sammen, vil den forsøge at udvide sig, og når den er udstrakt, vil den forsøge at trække sig sammen. Det betyder, at kloden svinger frem og tilbage omkring et ligevægtspunkt. Det forventes også, at udsvinget har en maksimal værdi samt at bevægelsen er periodisk, det vil sige at bevægelsen gentager sig. Her defineres koordinatsystemet således at kloden i sin hvileposition er i $x = 0$, hvorved klodens bevægelse kan beskrives med en sinus- eller cosinusfunktion, og her vælges cosinus² på formen

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta), \quad (1.2)$$

hvor t er tiden, og A , ω og δ er konstanter. Cosinusfunktionen svinger mellem -1 og 1 , hvorfor A er den maksimale afstand fra $x = 0$, som kloden kan have. ω er vinkelfrekvensen, og den hænger sammen med, hvor hurtigt kloden svinger frem og tilbage. Fjederkonstanten k er et udtryk for, hvor "hård" fjederen er, eller hvor meget energi det kræver, at presse fjederen sammen, mens massen m er et mål for, hvor meget der skal til, for at ændre kladens bevægelse. En logisk forventning ville derfor være, hvis ω på en eller anden måde afhænger af k/m . δ er en faseskydningskonstant, og dens betydning ses ved at kigge på funktionen til tiden $t = 0$. Her bliver $x(0) = A \cos \delta$, hvorfor δ er et udtryk for, hvor lodet er til tiden $t = 0$. Cosinus er en periodisk funktion, der svinger frem og tilbage, hvorfor det giver mening at kunne beskrive kloden på den måde.

At ligning (1.2) faktisk beskriver kloden, vil vi nu vise. Kloden vil opleve en fjederkraft, $F_f = -kx$, som afhænger af fjederens forskydning fra dens ligevægtspunkt, hvilket kaldes opførelse efter Robert Hooke. Det at fjederkraften har den form, er der ingen dybere teoretisk grund for, men det skyldes at eksperimenter viser, at fjedre kan beskrives på den måde, hvis de ikke deformeres.³ Det er antaget, at fjederkraften er den eneste i systemet, hvorfor Newtons 2. lov i 1 dimension giver, at $-kx = ma$, hvor m er kladens masse. Accelerationen a er netop positionen af kloden differentieret 2 gange med hensyn til tiden, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ (differentieres et koordinat mht. tiden benyttes priknotationen, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ og for dobbeltafledt \ddot{x} , fremover). Dette betyder, at vi faktisk har en 2. ordens differentialligning, der relaterer variablen x til dens dobbeltafledte \ddot{x}

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (1.3)$$

Det særlige ved Newtons 2. lov er, at den giver os mulighed for, på en let og simpel måde, at opskrive de bevægelsesligninger (differentialligninger), som vi skal løse, for at kunne beskrive vores system. En beskrivelse af differentialligninger, kan findes i matematikafsnittet i appendiksetet, afsnit A.4. I modsætningen til almindelige ligninger, hvis løsninger er tal, så er løsningen til differentialligninger funktioner, og det er i matematikafsnittet bliver det forklaret, at differentialligninger kan være komplicerede at løse. Det er dog en hel del simplere at vise, at en funktion er en løsning til en differentialligning, end at finde en generel løsningsform dertil. At et tal er en løsning til en almindelige ligning, kan eftervises ved at sætte tallet ind på den ubekendtes plads, og så eftervise at ligningen går op. Det samme kan gøres med

²Havde man valgt sinus, ville det bare ændre værdien af δ med $\pi/2$. Pr. konvention vælges ofte cosinus, hvorfor det samme gøres her.

³Fjederkraften stiger jo mere der trækkes eller skubbes til fjederen, men trækker man for meget i fjeren, strækkes den så meget, at den holder op med at opføre sig som en fjeder. Her ses kun på tilfældet hvor x ikke bliver så stor at fjederen ødelægges.

differentialligninger, hvor det så er funktionen, der indsættes. Det blev påstået at ligning (1.2) beskriver kloden, og derfor prøver vi nu at indsætte det i differentialligningen, ligning (1.3). For at gøre det skal den dobbelt tidsafledte bestemmes

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d^2}{dt^2}(A \cos(\omega t + \delta)) \\ &= \frac{d}{dt}(-\omega A \sin(\omega t + \delta)) \\ &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \\ &= -\omega^2 x,\end{aligned}\tag{1.4}$$

og indsættes det i ligning (1.3) fås

$$\begin{aligned}m(-\omega^2 x) &= -kx \\ \implies \omega^2 &= \frac{k}{m}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Her ses det at ligning (1.2) opfylder ligning (1.3), hvis $\omega^2 = k/m$. Med et snakkeargument fandt vi frem til, at ω måtte afhænge af k/m , og den præcise afhængighed er her opnået. Dette illustrerer at alt information, om hvordan et system opfører sig, er indeholdt i de differentialligninger, der kan opskrives ud fra Newtons love. Det kræver bare lige at de kan løses, hvilket eksempelvis kan gøres som her, ved at have et kvalificeret bud og så prøve efter, om det rent faktisk er en løsning. Man kan i nogle tilfælde bruge integration til at løse differentialligninger, hvilket kaldes separation af de variable. Ellers må man slå løsninger op eller finde numeriske løsninger med en computer.⁴

Det kan måske virke lidt som spildt arbejde at benytte differentialligningerne, hvis man kan gætte sig til en funktion, der beskriver systemet. Det svarer lidt til, at det i nogle tilfælde er ganske praktisk, at kunne gætte sig til en løsning til en almindelig ligning, men den metode afhænger af, at man har et godt gæt. Derfor er det smart at have en metode til faktisk at løse problemet, uden at skulle gætte sig frem.

Det skal vise sig fremadrettet at være en rigtig smart og sikker fremgangsmåde først og fremmest at finde differentialligningerne (eller nærmere bevægelsesligningerne) for ens system, hvis man ikke kender bevægelsesligningerne på forhånd. For hvis man kan finde bevægelsesligningerne, så er det eneste man mangler, nemlig at løse differentialligningen, hvor man ofte kan lave nogle simplificerende antagelser, hvis løsningen ikke er oplagt.

1.2 Koordinater generelt

I matematikafsnittet med polære koordinater, afsnit A.1, blev et relevant eksempel på et anderledes koordinatsystem end de kartesiske koordinater (x, y, z koordinater) gennemgået, som kan være en fordel at

⁴Numeriske løsninger findes ved at sætte en computer til at regne en masse punkter, ud fra differentialligningen, til at forudsige opførslen af et bestemt system. Dette gøres tit, hvis der ikke kan laves fornuftige approksimationer til et system, eller for at teste fornuftigheden af de approksimationer man har lavet.

benytte til at beskrive sit system. Indenfor mekanik er det netop denne tilgang, man har til koordinatsystemer. Man benytter dem som et redskab, til at beskrive sit system bedst og lettest muligt. Der er ikke en dybere fortolkning af ens valg af koordinater.

For eksempel kan et to-dimensionelt system beskrives med to rumlige, kartesiske, koordinater, x og y . Hvis det vurderes fordelagtigt, i stedet at beskrive systemet med tre eller flere koordinater, så er man velkommen og indenfor al ret til at gøre dette. Dog mindske komplexiteten af et problem oftest ved at begrænse mængden af koordinater anvendt til den mindst nødvendige mængde. Ethvert almindeligt klassisk problem kan altid beskrives ud fra tre rumlige dimensioner per objekt/legeme i systemet. Generelt er et valgt koordinatsystem udtryk for, hvor mange dimensioner det forventes, at der skal bruges for nøjagtigt at beskrive problemet. Dette hænger tit sammen med, hvor mange retninger det forventes at et legeme kan bevæge sig i, totalt uafhængigt af andre retninger. Eksempelvis kan to uafhængige variable a og b , samt en variabel $f(a, b)$ betragtes. At a og b er uafhængige af hinanden betyder her, at hvis værdien af a ændres, så ændres værdien af b ikke, og omvendt. Modsat er $f(a, b)$ afhængig af både a og b , og kan derved ikke kaldes en uafhængig variabel. Ofte støder man på variable, der er implicit afhængige, hvilket betyder at man ikke skriver (eksplicit) at variablen afhænger af en anden. Dette ses tit med koordinater, hvor man ofte skriver eksempelvis x i stedet for $x(t)$, idet man antager det for kendt, at x afhænger af t . Dette er vigtigt, da man ønsker at beskrive systemet med så få uafhængige koordinater som muligt.

At koordinatsystemet her betragtes som givende udtryk for det *forventede* antal uafhængige bevægelser, forklares ud fra, at det ikke altid kan vides på forhånd, hvorvidt en variabel er afhængig af andre variable eller ej. Dette finder man ud af, når man analyserer systemet, som man har med at gøre, hvorefter man kan tilrette sine koordinater efter det. Som eksempel på dette tages et simpelt pendul, som vi vil analysere senere. Umiddelbart kan pendulets bevægelse beskrives ud fra to kartesiske koordinater, x og y , der varierer i tiden t , eller alternativt med to polære koordinater, med en vinkel φ og en pendullængde r , der også begge varierer med tiden. I dette tilfælde viser det sig dog, at længden r er konstant og ikke variabel, hvormed systemet burde kunne beskrives udelukkende ud fra et udtryk for vinklen φ til tiden t . Men hvad med de to kartesiske koordinater x og y ? Her kan det senere vises, at den ene af de to koordinater er overflødige, da der kan findes et funktionsudtryk, som beskriver pendulets bevægelse i den ene retning ud fra dens bevægelse i den anden. Dette er dog ikke altid tilfældet, hvormed det giver god mening, at starte ud med begge koordinater. Herefter kan man altid fjerne koordinater, der ikke er nødvendige, ved ændre på sit koordinatsystem.

Som det vil blive nævnt senere i afsnittet om generaliserede koordinater, så er det smart at vælge sine koordinater, efter at man har gjort sig nogle indledende overvejelser omkring sit system, for at begrænse den opfattede kompleksitet af ens system. Tit vil ens system nemlig have symmetrier eller lignende restriktioner i sin bevægelse, som så vil sætte begrænsninger på antallet af koordinater (senere nævnt som frihedsgrader), der er nødvendige for at beskrive systemet. Dette bliver anvendt til, at løse de fleste af problemerne I bliver præsenteret for i dette kapitel, samt i de andre kapitler, specielt kapitlet om planetbevægelse. Udover at nævne pendulet som eksempel igen, er det dog værd at nævne, at mange systemer, med to legemer, har disse begrænsninger, og flere endda kan reduceres til kun at have en variabel (i stedet for to til hvert legeme), hvormed hele systemets bevægelse kan beskrives ved bare at kende en

enkelt værdi.

1.3 Roterende legemer

Legemers bevægelse kan, i den Newtonske mekanik, deles op i to kategorier - translatorisk og rotationel bevægelse. Her menes bevægelse med og uden rotation. Vi starter med at se på den rotationelle del af legemers bevægelse, hvor der vil fokuseres på stive legemer, hvilket vil sige faste objekter, der ikke kan bøje eller deformeres. Beskrivelsen af legemers bevægelse deles op i tre dele - kinematik, energi og dynamik. Kinematik er beskrivelsen af legemers bevægelse, når bevægelsens oprindelse ikke tages med i betragtning. Dynamik beskriver hvorfor ting bevæger sig som de gør, og hvordan kinematiske bevægelser opstår. Det viser sig at energi er en vigtig størrelse at undersøge, når man skal beskrive bevægelse, hvorfor vi vil kigge på energien i både translatorisk og rotationel bevægelse.

Kinematik

I den translatoriske bevægelse beskrives et legemes position med en stedvektor \vec{r} , der kan udtrykkes i forskellige koordinatsystemer. I det kartesiske koordinatsystem ser vektoren ud på en af følgende måder

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}},$$

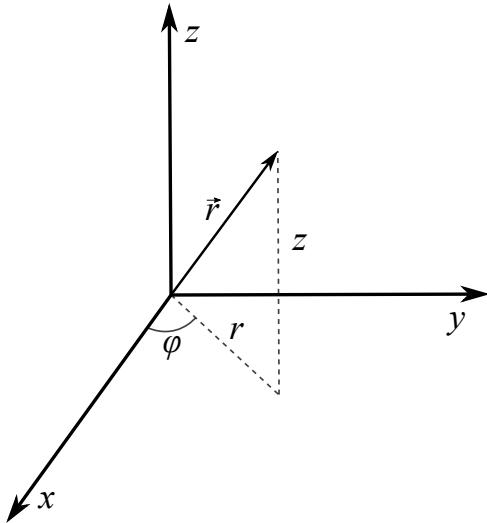
hvilket betyder at legemet befinner sig i punktet (x, y, z) . Ud fra stedvektoren defineres hastighed \vec{v} og acceleration \vec{a} som⁵

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}}. \quad (1.6)$$

Cylindrisk polære koordinater

Til beskrivelsen af roterende legemer benyttes ofte cylindriske koordinater i stedet for kartesiske koordinater. Cylindriske koordinater er en tredimensionel udvidelse af de todimensionelle polære koordinater, hvor 3. koordinatet, z , forskyder punktet parallelt med en akse, der er ortogonal (vinkelret) på den todimensionelle plan udspændt af de polære koordinater, gennem origo, $(0,0,0)$. I polære koordinater defineres et punkt som origo, og ud fra det en polærakse, der angiver placeringen af vinklen på $\varphi = 0$ radianer. Et punkts afstand til origo, r , og dets vinkel med polæraksen, φ , angiver så de polære koordinater. Defineres koordinatsystemet således at polæraksen og x -aksen i et tilsvarende kartesisk koordinatsystem er sammenfaldende, ville φ være vinklen ift. x -aksen i xy -planen og z er forskydningen ift. polærplanen, se figur 1.2. Det bemærkes, at det kartesiske 3. koordinat og det cylindriske 3. koordinat er ens, og at afstanden r ved udvidelsen fra polære til cylindriske koordinater forbliver uændret; det vil sige at

⁵Man kan selvfølgelig differentiere stedvektoren ligeså mange gange man lyster, og selvom højere aflede bruges meget sjældent, har de faktisk nogle navne (på engelsk), som man kan underholde sig selv ved at google. Den tredjeaflede $d^3\vec{r}/dt^3$ er dog værd at fremhæve, da den på engelsk hedder "jerk".



Figur 1.2: I det cylindriske koordinatsystem angives afstanden til z -aksen som første koordinat, samt forskydningen langs samme akse som z -koordinat. Derudover angives vinklen med polæraksen, her ækvivalent med x -aksen. z -koordinatet er derved det samme i det kartesiske og cylindriske koordinatsystem.

en ændring i z ikke giver en ændring i r . Da der kun fokuseres på legemers rotation om én akse, kan z -aksen defineres til at være denne rotationsakse, hvorved det cylindriske 3. koordinat forbliver uændret i tid.

I polære koordinater er der en meget nyttig sammenhæng mellem et legemes totale fart og den tidsafledte af vinkelkoordinaten $\dot{\varphi}$. Det antages at førstekoordinatet, r , er konstant i tid, $\dot{r} = 0$. Derfor kan ligning (A.1) fra matematikafsnittet⁶ benyttes til at opskrive de tidsaflede af de kartesiske koordinater udtrykt ved de polære koordinater

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -r \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= r \cos \varphi \dot{\varphi}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Da hastighed er en vektor, $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$, så er den totale fart længden af hastighedsvektoren, og den kan bestemmes vha. Pythagoras sætning

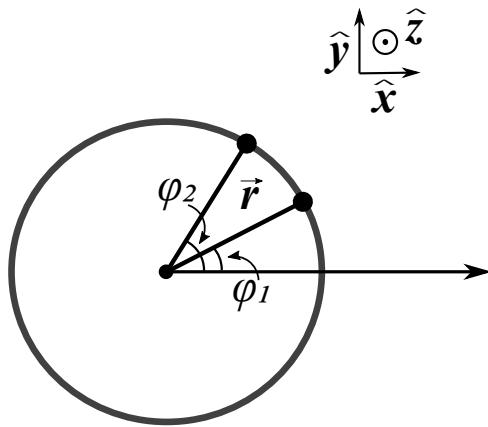
$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ &= \sqrt{(-r \sin(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (r \cos(\varphi)\dot{\varphi})^2} \\ &= \sqrt{r^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \\ &= r\dot{\varphi} \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \\ &= r\dot{\varphi}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

⁶I matematikafsnittet hedder vinklen θ , hvor den her hedder φ . Det betyder ikke det store hvad man kalder den, men her i kapitlet bruges φ , hvor denne notation bruges konsekvent.

Her er grundrelationen $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ benyttet, og dette resultat bliver super anvendeligt, når der skal bestemmes energier for roterende legemer, hvilket er en essentiel del af Lagrangemekanikken, som kommer senere. Differentieres ligning (1.8) igen med hensyn til tid fås

$$a = r\ddot{\varphi}. \quad (1.9)$$

Vinkelhastighed og Vinkelacceleration



Figur 1.3: Til to forskellige tider har det sorte punkt to forskellige vinkler med polæraksen (markeret med pil), der her er sammenfaldende med den kartesiske x-akse, mens legemet roterer om z-aksen. \vec{r} er en vektor fra origo til punktet, og har derfor længden r og vinklen φ med polæraksen. Denne vektor ændrer sig i tid, som punktet flytter sig.

Figur 1.3 viser hvordan vinklen φ ændrer sig fra tidspunktet t_1 til t_2 . Helt analogt til den translatoriske bevægelse defineres vinkelhastigheden, ω , og vinkelacceleration, α , som

$$\omega \equiv \dot{\varphi}, \quad \alpha \equiv \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (1.10)$$

Vinkelhastigheden er et udtryk for, hvor hurtigt et legeme roterer og har enheden rad/s. Vinkelaccelerationen udtrykker, hvor hurtigt rotationshastigheden ændres i enheder af rad/s². Her er "rad" symbolet for enheden radianer.

Inertimomentet

Eksperimenter viser, at et legemes modstand mod acceleration ikke kun afhænger af legemets masse, men også placeringen af massen, hvorfor inertimomentet for et objekt defineres som⁷

$$I \equiv \sum m_i r_i^2, \quad (1.11)$$

hvor m_i er massen af det i 'te masselement og r_i er samme masseelements afstand til rotationsaksen. Ethvert legeme kan tænkes som bestående af en masse små dele, kaldet masseelementer, og inertimomentet

⁷Symbolet \equiv betyder indenfor fysik *defineres som*, hvor $:=$ benyttes i matematik.

udtrykker så hvor langt fra rotationsaksen et legemes masse er placeret. Definitionen er en smule rigid, men en konceptuel forståelse er tilstrækkelig her. I afhænger af den akse, som legemet roterer om, hvilket kan forklares ved at legemer lettere kan sættes i rotation om bestemte akser end andre. Dette kan man afprøve ved at tage et objekt og prøve at rottere det på forskellige måder. Man vil mærke at nogle rotationer er lettere end andre.

Kinetisk Energi

For translatorisk bevægelse defineres kinetisk energi som

$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2, \quad (1.12)$$

hvor v_{CM} er massemidtpunktets fart. Hvis hele legemet bevæger sig med samme fart v er $v_{\text{CM}} = v$, men hvis legemet eksempelvis roterer, bevæger forskellige dele af legemet sig med forskellige hastigheder. Rotationskinetisk energi defineres tilsvarende som

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (1.13)$$

Bemærk at ligningerne (1.12) og (1.13) har præcis sammen form, idet energien i begge tilfælde er proportional med en form for inertি og en fart i anden. Den totale kinetiske energi for et roterende legeme er summen af de to ovenstående

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}}. \quad (1.14)$$

At den totale kinetiske energi "bare" er summen af translatorisk og rotationel kinetisk energi, bør man strengt taget vise, men det er en smule omstændigt, hvorfor det undlades her.

Dynamik

Kræfter er årsagen til bevægelse, som det kendes i fysik, og med hensyn til den translatoriske bevægelse er det ikke essentielt, hvor på legemet kraften virker, men det er det for rotationel bevægelse. Der findes mange dagligdags eksempler på dette, hvor et af de bedre er et værktøj, som en svensknøgle, der holder om en bolt. Jo længere nede på svensknøglen man holder, desto lettere er det at stramme eller løsne bolten. For at forstå fysikken bag dette, introduceres angrebspunktet for kraften \vec{F} som det punkt på et legeme, hvorpå kraften virker, se figur 1.4. Yderligere defineres en vektor fra rotationsaksen til kraftens angrebspunkt, hvilket kaldes kraftens arm \vec{r} . Herved kan kraftmomentet, $\vec{\tau}$, defineres

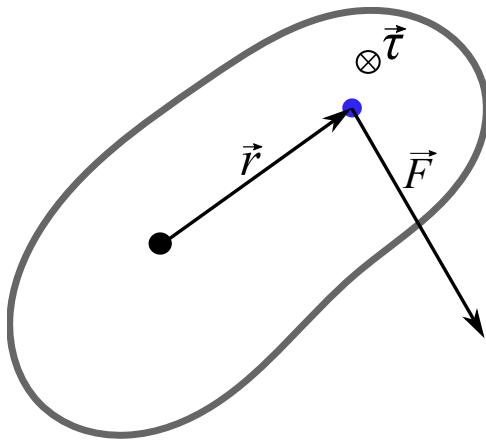
$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.15)$$

Kraftmomentet er en vektor, der står ortogonalt på både kraften og dens arm, og den er parallel med rotationaksen. Kraftmomentets størrelse kan bestemmes som

$$\tau = rF \sin \theta, \quad (1.16)$$

hvor θ er vinklen mellem \vec{r} og \vec{F} . Dette leder til Newtons 2. lov for roterende legemer

$$\sum \tau = I\alpha. \quad (1.17)$$



Figur 1.4: En arbitrær kraft, \vec{F} , virker i det blå punkt, hvorfor dette punkt kaldes kraftens angrebspunkt. Legemet roterer om en akse gennem det sorte punkt, der er ortogonal på tegningen. Det sorte punkt kan defineres som origo, hvorfed vektoren fra rotationsaksen til kraftens angrebspunkt kaldes kraftens arm \vec{r} . Kraftmomentet $\vec{\tau}$ peger ind i tegningen, hvilket højrehåndsreglen viser.

Det ville være super anvendeligt, hvis dette galt ligeså alment, som Newtons 2. lov, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, men det er desværre ikke tilfældet. Den gælder for legemer, der er symmetriske omkring rotationsaksen og kun for størrelsen af vektorerne.

Impulsmoment

Impulsmomentet defineres ud fra den lineære impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ som

$$\vec{\ell} \equiv \vec{r} \times \vec{p} . \quad (1.18)$$

Størrelsen på impulsmomentet er

$$\ell = rp \sin \theta , \quad (1.19)$$

hvor θ er vinklen mellem \vec{r} og \vec{p} . Differentieres ligning (1.18) med hensyn til tiden fås

$$\dot{\vec{\ell}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum \vec{\tau} , \quad (1.20)$$

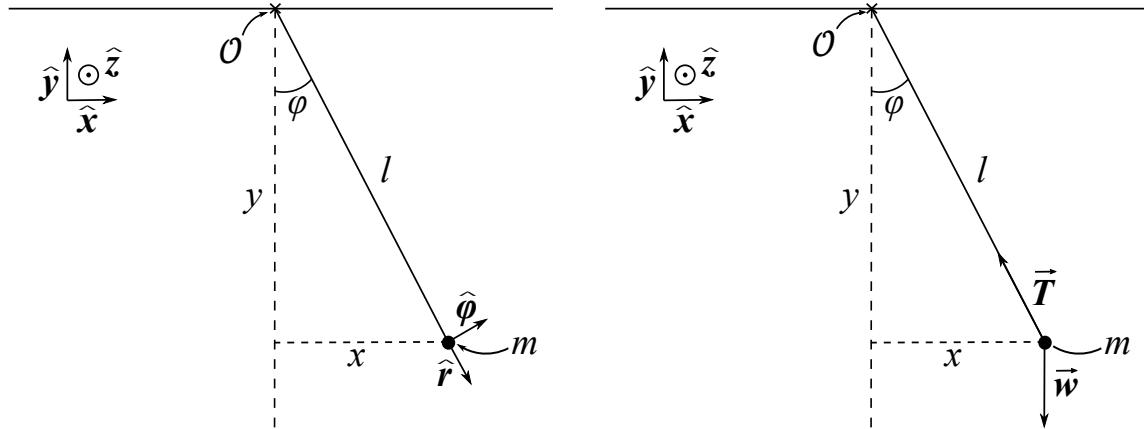
idet et krydsprodukt af to parallelle vektorer er nul. Det er da vist at

$$\sum \vec{\tau} = \dot{\vec{\ell}} . \quad (1.21)$$

Det kan vises at summen af de indre kraftmomenter er nul, og impulsmomentet er da bevaret, hvis og kun hvis summen af de ydre kraftmomenter er nul.

Newtonsk beskrivelse af et pendul

I første omgang defineres et smart koordinatsystem til at beskrive pendulet. Som origo vælges pendulets ophængningspunkt, se figur 1.5a. Penduloddets position, til tiden t , beskrives ved en retningsvektor i



(a) Skitsering af pendul med massen m og længden l . Enhedsvektorerne til et kartesisk og cylindrisk polært koordinatsystem er indtegnet.

(b) Kraftanalyse af de på pendulloddet virkende kræfter, der alle antages at have angrebspunkt i massemidtpunktet.

Figur 1.5: Tegning af pendulet, der blandt andet viser de valgte koordinatsystemer og de virkende kræfter.

cylindrisk polære koordinater $\vec{r}(r, \varphi, z, t)$, hvor r er lodets afstand til aksen gennem origo, φ er polærvinklen, og z er forskydningen fra polærplanen. Det antages at pendulet bevæger sig i ét plan, hvilket defineres som $z = 0$, hvorfor z forbliver uændret når tiden går. Det antages yderligere at lodets ophængning er et stift, ubøjeligt legeme, hvorfor $r = l \ \forall t$ ⁸. Pendulet kan under disse antagelser beskrives fuldstændigt ved vinklen φ , hvorfor stedfunktionen, $\varphi(t)$, er interessant at bestemme. Pendulet kan også beskrives ved kartetiske koordinater, hvilket er indtegnet i figur 1.5a, og det har visse fordele i forhold til den intuitive forståelse af systemet, når kraftanalysen udføres.

På pendulet virker tyngdekraften, \vec{w} , og en snorkraft, \vec{T} , se figur 1.5b. Det er de eneste kræfter på pendulet, idet friktion negligeres.⁹ Tyngdekraften virker til alle tider, t , i negativ y -retning og skrives derfor som

$$\vec{w} = -mg\hat{\mathbf{y}}, \quad (1.22)$$

hvor g er tyngdeaccelerationen, og $\hat{\mathbf{y}}$ er en enhedsvektor i y -retningen. Det bemærkes at $\hat{\mathbf{y}}$ er en kartesisk enhedsvektor.¹⁰

Defineres $\hat{\mathbf{r}}$ som en enhedsvektor parallelt med pendulets retningsvektor, hvilket også er en enhedsvektor i det polære koordinatsystem, kan snorkraften beskrives som

$$\vec{T} = -T\hat{\mathbf{r}}, \quad (1.23)$$

⁸V er matematisk notation for *for alle*.

⁹Det er muligt at regne med friktion, men det komplicerer situationen en del.

¹⁰Teknisk set er $\hat{\mathbf{y}}$ en enhedsvektor i begge koordinatsystemer, idet en enhedsvektor er en vilkårlig vektor med længden 1. Det vigtige er her at det er en enhedsvektor i den kartesiske basis og ikke i den polære.

hvor T er størrelsen på snorkraften, som vist på tegningen. Dette betyder, at hver kraft er simplest at beskrive i to forskellige koordinatsystemer, og faktoren T har lige præcis den værdi, som får systemet til at passe. Dette viser en af svaghederne ved den Newtonske beskrivelse af mekanik - håndteringen af "tvangskræfter", eller "constraint forces" på engelsk, er kluntet.

Pendulet roterer omkring ophængningspunktet, og har ved denne rotation inertimomentet I . Alle kræfter antages at virke på loddets massecenter, hvorfor alle kræfters arm kan beskrives som

$$\vec{r} = l\hat{r}, \quad (1.24)$$

hvilket også er pendulloddets stedvektor. Nu kan kraftmomentet for alle de virkende kræfter bestemmes

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_w &= \vec{r} \times \vec{w} = -mg \cdot \vec{r} \times \hat{\mathbf{y}} = -mgl \sin \varphi \hat{\mathbf{z}}, \\ \vec{\tau}_T &= \vec{r} \times \vec{T} = -Tl \cdot \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0},\end{aligned}\quad (1.25)$$

hvor subscriptet indikerer, hvilken kraft der behandles. Det samlede kraftmoment bliver derved

$$\sum \vec{\tau} = -mgl \sin \varphi \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.26)$$

Antages pendulets udsvingsvinkel at være lille, kan en andenordens Taylorudvikling benyttes

$$\sin \varphi \approx \varphi \implies \sum \tau \approx -mgl\varphi, \quad (1.27)$$

hvor Newtons anden lov for rotationel bevægelse giver differentialligningen

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I} \sum \tau = -\frac{mgl}{I} \varphi. \quad (1.28)$$

Denne differentialligning har løsningen

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \delta), \quad \omega^2 = \frac{mgl}{I}, \quad (1.29)$$

hvor A og δ er konstanter, der er bestemt af startbettingerne. Eftersom cosinusfunktioner giver værdier mellem -1 og 1 , så er A den maksimale udsvingsvinkel og δ er en faseforskydning, så pendulet kan være et hvilket som helst sted i sit udsving til tiden $t = 0$. Dette medfører, at pendulets periode bliver

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \quad (1.30)$$

Slutteligt kan pendulets x -koordinat beskrives som

$$x(t) = l \sin \varphi(t) \approx l\varphi(t), \quad (1.31)$$

hvor der til sidst igen gøres brug af en andenordens Taylorudvikling. Denne beskrivelse af et pendul kaldes et *fysisk pendul*.

Matematisk pendul

Antages pendulets masse at befinde sig i pendulets massemidtpunkt kan inertimomentet sættes til $I = ml^2$ i ligningerne fra det fysiske pendul:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi, \quad (1.32)$$

hvorved løsningen bliver

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \delta), \quad \omega^2 = \frac{g}{l}, \quad (1.33)$$

hvilket giver en periode på

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.34)$$

Ligning (1.32) er pendulligningen og rigtig mange ting i fysik kan approksimeres til en harmonisk oscillator, dvs. beskrevet ved en bevægelsesligning, for et koordinat q , på formen

$$\ddot{q} = -\omega^2 q, \quad (1.35)$$

hvorfor denne ligning er værd at huske på. Loddet på en fjeder var et andet eksempel på en harmonisk oscillator.

1.4 Generaliserede koordinater

I eksemplet med pendulet fremgik det, at koordinaterne r og z var overflødige. De var konstante i tid ved valg af et smart koordinatsystem og hele pendulet kunne beskrives ved ét koordinat, φ . Dette er en generel tankegang i analytisk mekanik, da der ikke er nogen grund til at gøre problemet sværere, end det allerede er. Man kan prøve at regne pendul-eksemplet igennem, kun ved brug af de kartesiske koordinater x og y , og man opdager hurtigt, at det er meget besværligt. Derfor introduceres konceptet generaliserede koordinater, der defineres som det sæt koordinater, der beskriver et fysisk system med det mindst mulige antal frihedsgrader. Antallet af frihedsgrader er antallet af uafhængige parametre, som beskriver et system, hvilket for pendulet er 1. Generaliserede koordinater har symbolet q , samt et indeks i , der fortæller hvilket koordinat der er tale om. Grunden til dette er, at teorien gælder for systemer med vilkårligt mange frihedsgrader. Beskrives fire partikler, som bevæger sig i en dimension, kan partiklernes koordinat noteres som (q_1, q_2, q_3, q_4) eller (q_1, q_2, \dots, q_4) . Den sidste notation er ikke så praktisk i dette eksempel, men da teorien skal kunne beskrive n partikler, så bliver den pludselig smart, idet koordinaterne bliver

$$(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (1.36)$$

Ønsker man at beskrive noget som gælder for alle n partikler, hvilket f.eks. kunne være at hastigheden for partiklen er givet som den tidsafledte skriver man

$$v_i = \dot{q}_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.37)$$

Fremover benyttes notationen q_i for det i 'te generaliserede koordinat, idet der tages højde for, at der kan være vilkårligt mange af disse, og at det også kan være nødvendigt med flere generaliserede koordinater for at beskrive én partikel.

Kunsten at bestemme de generaliserede koordinater bygger mange gange på at kunne genkende symmetrier. Symmetrier gør problemer lettere at håndtere, og det er derfor altid en god idé at overveje, om der er sådanne for et fysisk system. I pendul-eksemplet er der tale om cirkulær symmetri. Antagelserne at r og z er konstante i tid, gør at pendulets bevægelse bliver restrikeret til en cirkel, hvilket kan kaldes cirkulær symmetri.

1.5 Lagrangefunktion

Generelt er Newtons love gode i sin simplicitet, med let forståelse af dem og deres anvendelse. Dette gør dem essentielle til, at have en generelt løsningsmetode til de fleste problemer. En af ulemperne ved dem er dog, at problemløsningen ofte er en slavisk proces, der kræver at man tager højde for alle kraftpåvirkninger på ens system, og kan gøre systemet mere kompliceret end det er. Et eksempel på dette er systemer, hvis bevægelse har restriktioner fra snorkræfter, normalkræfter eller lignende, der ikke udfører arbejde på systemet. Her menes der, at netop disse "constrained forces" sætter begrænsninger på, hvordan systemet kan bevæge sig, men at de i sig selv ikke tilføjer eller fratager energi fra systemet. Newtons love kræver dog, at de inkluderes i udregningerne for at kunne beskrive systemet korrekt.

Her introduceres fordelen ved Lagrangemekanikken, der tager udgangspunkt i en undersøgelse af den kinetiske og potentielle energi i et system, samt en opskrivning af differentialligninger ud fra dette, ligesom for Newtonsk mekanik (Newtons 2. lov beskriver, hvordan man opsætter differentialligninger for systemet, da $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$). Ulempen ved Lagrangemekanik, i formen der introduceres her er, at den kun gælder for systemer udelukkende påvirket af konservative kræfter. Dette inkluderer derved ikke gnidningskræfter, luftmodstand og lignende.

Systemet undersøges ud fra en funktion kaldet Lagrangefunktionen:

$$L = K - V, \quad (1.38)$$

hvor K er systemets kinetiske energi, og V er systemets potentielle energi.

Euler-Lagrangeligningen i kartesiske koordinater

Først vil vi beskrive vores energier ud fra kartesiske koordinater i et inertialsystem, hvilket altid kan gøres, og derefter kan det konverteres over til mere favorable, generaliserede koordinater, som vælges specifikt for hvert system. Disse gør normalt problemet lettere at løse. Vi vil desuden tage udgangspunkt i et system uden bundne kræfter (snorkraft, normalkraft), hvor vi senere kan gøre det mere generelt.

Den kinetiske energi er

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (1.39)$$

og den potentielle energi er specifikt for systemet, men afhænger af de tre kartesiske koordinater:

$$V = V(\vec{r}) = V(x, y, z) . \quad (1.40)$$

Med Lagrangefunktionen opskrevet skal vi nu bruge en måde at frembringe bevægelsernes differentialligninger for systemet. Dette gøres ud fra Euler-Lagrangelignerne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} . \end{aligned} \quad (1.41)$$

Der fremgår altså en ligning til at udregne systemets bevægelsesligning i hver af de tre kartesiske koordinater, ud fra differentiation af Lagrangefunktionen. Det er værd at holde tungen lige i munden, når man skal udregne disse. Blandt andet skal det noteres, at der indgår to forskellige partielle differentiationer af L , samt en totaldifferentiation med hensyn til tiden. Når der står $\partial L / \partial x$ menes der her, at man skal partielt differentiere L med hensyn til x . Det betyder, at man skal betragte x som værende den eneste variabel L afhænger af, og se alle andre led som konstanter (det vil sige at eventuelle tidsafledte led \dot{x} også skal ses som konstante, da der ikke eksplisit står x). Ydermere skal man ignorere, at x også kan afhænge af tiden. Hvad så når der står $\partial L / \partial \dot{x}$? Her skal man i stedet betragte \dot{x} som værende det eneste varierende led, og differentiere med hensyn til det. Derfor skal alle andre led, x, y, z, \dot{y} og \dot{z} ses som konstanter, når der differentieres. Sluttligt, så skal der totaldifferentieres med hensyn til tiden. Her skal den nye funktion $\partial L / \partial \dot{x}$ differentieres på traditionel vis med hensyn til tiden. Men det er ikke garanteret, at der eksplisit står et t -led nogle steder. Det skal dog huskes, at vores funktion har mulighed for at afhænge af $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, som hver især kan afhænge af tiden t . Derfor kan totaldifferentiationen gennemføres ved at betragte leddene $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ som funktioner, der også skal differentieres med hensyn til tiden.

En interessant bemærkning er faktisk, at i det ovenstående tilfælde med et system uden bundne kræfter, og ved valg af kartesiske koordinater, kan det relativt let vises at Newtons 2. lov giver præcis Euler-Lagrangelignerne (hvilket forhåbentligt også skulle være tilfældet, da det er ækvivalente løsningsmetoder, som begge kan bruges til at komme frem til de relevante bevægelsesligninger for et system). Tag eksempelvis for x -koordinaten. Her fås to funktioner ved at partielt differentiere med hensyn til hhv. x og \dot{x} :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (K(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - V(x, y, z)) , \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (K(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - V(x, y, z)) . \quad (1.43)$$

Her har vi, at kun V afhænger eksplisit af x , og kun K afhænger eksplisit af \dot{x} . Derved får vi de to resultater:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right) = m \ddot{x} = p_x, \quad (1.45)$$

hvor den totale kraft i x -retningen, $F_x = -\partial V/\partial x$, følger af at vi har antaget udelukkende konservative krafter, hvorved:

$$\vec{F}_{\text{res}} = -\vec{\nabla}V = -\begin{bmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

Når vi så tager Euler-Lagrangeligningen for x -koordinaten fås

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = m \ddot{x}, \quad (1.47)$$

hvilket er præcis Newtons 2. lov taget for x -komposanten af den resulterende kraft.

Euler-Lagrangeligningen i generaliserede koordinater

Med den nyfundne forståelse for Lagrangefunktionen og Euler-Lagrangeligningen i kartesiske koordinater vil vi nu undersøge tilfældet, hvor vi i stedet anvender generaliserede koordinater. Fra afsnittet om generaliserede koordinater har vi, at generaliserede koordinater (q_1, q_2, \dots, q_n) er et valgt koordinatsæt, hvor antallet af koordinater svarer til antallet af frihedsgrader for systemet. Det vil sige, at hvis vi kan nøjes med at beskrive systemet med en enkelt koordinat, som i tilfældet med det simple pendul, så har vi en generaliseret koordinat (som i dette eksempel ville være oplagt at vælge som pendulvinklen φ). Her vil vi så have n Euler-Lagrangeligninger, hvor n er antallet af frihedsgrader for systemet, og derved antallet af generaliserede koordinater. Ud fra relationen mellem Newtons 2. lov og Euler-Lagrangeligningen for kartesiske koordinater vælges, at kalde de to relationer for henholdsvis generaliseret kraft og generaliseret impuls:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = (\text{i'te komponent af den generaliserede kraft}), \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = (\text{i'te komponent af den generaliserede impuls}). \quad (1.49)$$

Disse er ikke garanteret at være den fysiske kraft og impuls, som vi forstår dem, men er nærmere hvad vi ækvivalent kan forstå som dem i vores generaliserede koordinater (hvilket er grundten til navnet). Derved fås Euler-Lagrangelignerne

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.50)$$

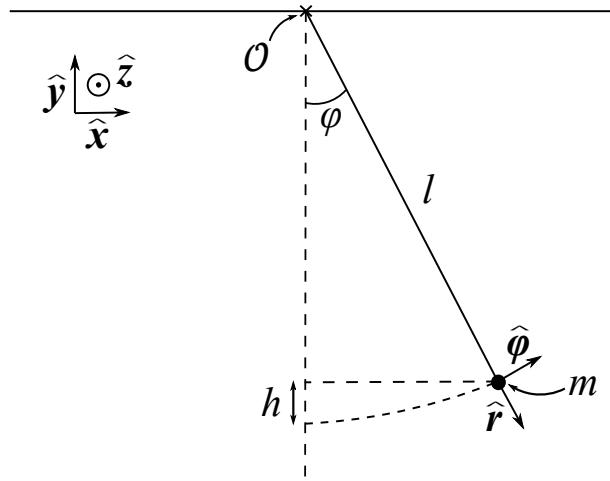
eller i ord:

$$(\text{generaliseret kraft}) = (\text{ændringsrate i generaliseret impuls}). \quad (1.51)$$

1.6 Eksempler på brugen af Lagrangemekanikken

Beskrivelse af pendul med Lagrangemekanik

Igen kigges der på pendulet fra afsnit 1.3, men denne gang gøres der brug af Lagrangemekanikken:



Figur 1.6: Samme pendul som i afsnit 1.3. Pendulets højde, h , defineres ud fra nulpunktet for den potentielle energi, der vælges til at være pendulets ligevegtspunkt $(0, -l)$ (i kartesiske koordinater).

Først kigger vi på pendulet, hvorved vi finder, at dets længde er l og loddet for enden af det har masse m . Der defineres et nulpunkt for pendulet, hvor lodet befinner sig, når pendulet er i hvile, altså når det hænger lodret ned (se figur 1.6). Siden der kun er tale om en rotationel bevægelse, vælges et polært koordinatsystem. Den kinetiske energi af pendulet er givet ved

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.52)$$

hvor hastigheden v for en rotationel bevægelse er givet ved pendulets længde l og dets vinkelhastighed $\dot{\varphi}$, ligning (1.8), hvorfor den kinetiske energi bliver

$$K = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2. \quad (1.53)$$

Den potentielle energi er givet ved

$$V = mgh, \quad (1.54)$$

hvor højden h er givet som pendulets længde fratrukket dets projktion på y -aksen

$$h = l - l \cos(\varphi) = l(1 - \cos(\varphi)), \quad (1.55)$$

hvorfor den potentielle energi bliver

$$V = mgl(1 - \cos(\varphi)) . \quad (1.56)$$

I Lagrangefunktionen, ligning (1.38), indsættes den kinetiske og den potentielle energi fra henholdsvis ligning (1.53) og ligning (1.56), hvilket giver følgende

$$L = K - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos(\varphi)) , \quad (1.57)$$

hvorved de partielt afledeede af Lagrangefunktionen med hensyn til φ og $\dot{\varphi}$ bliver

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin(\varphi) , \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} , \quad (1.59)$$

og findes den tidsaflede af den sidste ligning fås

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2\ddot{\varphi} . \quad (1.60)$$

Indsættes i Euler-Lagrangeligningen, ligning (1.50), den partielt aflede af Lagrangefunktionen med hensyn til φ , ligning (1.58), samt den tidsaflede af den partielt aflede af Lagrangefunktionen med hensyn til $\dot{\varphi}$, ligning (1.60), fås følgende:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) \\ \Rightarrow -mgl \sin(\varphi) &= ml^2\ddot{\varphi} . \end{aligned} \quad (1.61)$$

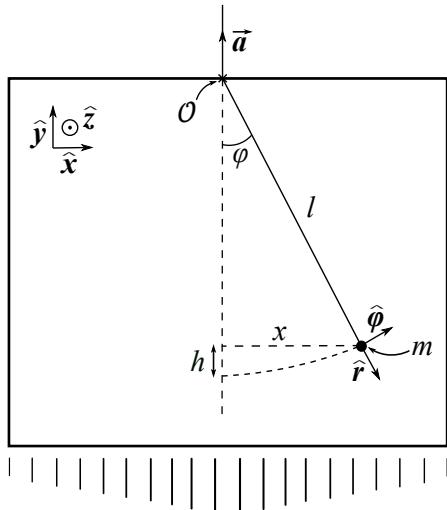
I ovenstående ligning isoleres vinkelaccelerationen $\ddot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi) . \quad (1.62)$$

Antages det at pendulets udsving vil være små, da kan der gøres brug af Taylorudviklingen for $\sin(\varphi)$, tabel A.1, hvorved der fås

$$\ddot{\varphi} \simeq -\frac{g}{l}\varphi , \quad (1.63)$$

hvilket er pendulligningen, ligning (1.32). Hvorfor skulle dette være simpelere på denne måde end den Newtonske beskrivelse? Så snart man bliver god til at differentiere rigtig, og opskrive Euler-Lagrangeligningen i nogle gode koordinater, så er denne metode markant lettere at benytte - det er bare et spørgsmål om træning.



Figur 1.7: Samme pendul som i figur 1.6, dog nu placeret i en lineært accelererende elevator.

Pendul med rotationel og translatorisk bevægelse

Et anden eksempel, hvor der kan gøres brug af Lagrangenmekanikken er, når et problem indeholder både translatorisk og rotationel bevægelse, hvilket kan illustreres af et pendul i en elevator, figur 1.7. Her bevæger lodet i pendulet sig ved en rotationel bevægelse, hvorimens elevatoren bevæger sig med en translatorisk bevægelse, hvilket her er ved konstant acceleration. Først findes koordinaterne, x og y , for loddet samt de tidsaflede af disse:

$$\begin{aligned} x &= l \sin(\varphi), \\ \dot{x} &= l \cos(\varphi)\dot{\varphi}, \\ y &= l(1 - \cos(\varphi)) + \frac{1}{2}at^2, \\ \dot{y} &= l \sin(\varphi)\dot{\varphi} + at, \end{aligned} \tag{1.64}$$

hvor formlen for y fremkommer som kombination af pendulets y -koordinat i forhold til elevatoren, ligning (1.55), og elevatorens stedfunktion

$$y_{elevator}(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_{0,elevator}t + y_{0,elevator}, \tag{1.65}$$

hvor $y_{0,elevator} = v_{0,elevator} = 0$ grundet vores valg af koordinatsystem. Dette valg foretages, da det gør y -koordinaten nemmere at regne med.

Systemets kinetiske og potentielle energi findes herudfra som henholdsvis

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m \left[(l^2 \cos^2(\varphi)\dot{\varphi}) + (l^2 \sin^2(\varphi)\dot{\varphi}^2 + a^2 t^2 + 2l \sin(\varphi)\dot{\varphi}at) \right] \\ &= \frac{1}{2}m(l^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 t^2 + 2l \sin(\varphi)\dot{\varphi}at), \end{aligned} \tag{1.66}$$

og

$$V = mgy = mg \left[l(1 - \cos(\varphi)) + \frac{1}{2}at^2 \right], \quad (1.67)$$

hvorved Lagrangefunktionen bliver

$$L = K - V = \frac{1}{2}m \left(l^2\dot{\varphi}^2 + a^2t^2 + 2l \sin(\varphi)\dot{\varphi}at \right) - mg \left[l(1 - \cos(\varphi)) + \frac{1}{2}at^2 \right]. \quad (1.68)$$

De partielt afledede af Lagrangefunktionen i forhold til henholdsvis φ og $\dot{\varphi}$, samt den tidsaflede af sidste findes:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml \cos(\varphi)\dot{\varphi}at - mgl \sin(\varphi), \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml \sin(\varphi)at, \quad (1.70)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2\ddot{\varphi} + ml \cos(\varphi)\dot{\varphi}at + ml \sin(\varphi)a. \quad (1.71)$$

Indsættes dette i Euler-Lagrangeligningen fås

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) \\ \Rightarrow ml \cos(\varphi)\dot{\varphi}at - mgl \sin(\varphi) &= ml^2\ddot{\varphi} + ml \cos(\varphi)\dot{\varphi}at + ml \sin(\varphi)a. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Heri isoleres vinkelaccelerationen

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g + a}{l} \sin(\varphi), \quad (1.73)$$

og antages pendulets udsving at være lille, kan dette Taylorudvikles til

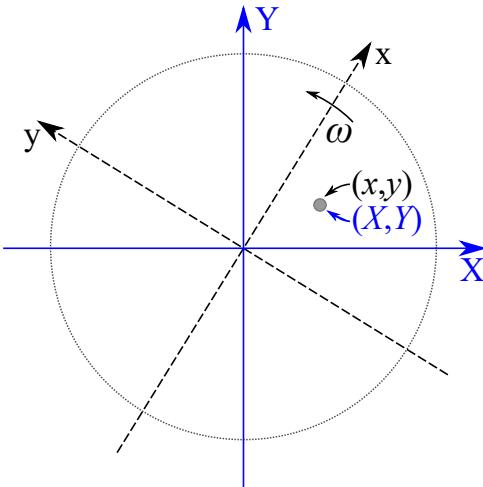
$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{g + a}{l}\varphi, \quad (1.74)$$

hvilket er på samme form som pendulligningen, hvorfor dette kan ses som et stillestående system med en ændret tyngdeacceleration, $\tilde{g} = g + a$.

Karrusel: System uden potentiel energi

Ovenfor har der været kigget på systemer, der har haft både kinetisk og potentiel energi, hvorfor der nu ses på et system uden potentiel energi: En karrusel, figur 1.8.

I dette system betragtes en partikel med masse m , der bevæger sig relativt til et roterende koordinatsystem, som følger karrusellen (stiplet koordinatsystem i figur 1.8). I dette koordinatsystem har partiklen koordinaterne (x, y) . Betragtes dette system ud fra et stillestående koordinatsystem (blåt koordinatsystem i figur 1.8) med samme origo, vil karrusellen rotere med en vinkelhastighed ω . I dette koordinatsystem vil



Figur 1.8: Roterende karussel. Det stiplede sorte koordinatsystem roterer med karussellen således, at et punkt på karussellen i dette koordinatsystem altid har koordinaterne (x, y) . I det fastlåste blå koordinatsystem roterer karussellen, hvorfor fornævnte punkt i dette koordinatsystem vil have skiftende koordinater, der er givet ved (X, Y) , ligning (1.75).

partiklens koordinater være (X, Y) . Sammenhængen mellem partiklens koordinater i de to koordinatsystemer er givet ved¹¹

$$\begin{aligned} X &= x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t), \\ Y &= x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (1.75)$$

For at finde den kinetiske energi, beregnes de afledede af koordinaterne, hvilket giver

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x} \cos(\omega t) - \omega x \sin(\omega t) - \dot{y} \sin(\omega t) - \omega y \cos(\omega t), \\ \dot{Y} &= \dot{x} \sin(\omega t) + \omega x \cos(\omega t) + \dot{y} \cos(\omega t) - \omega y \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Hernæst beregnes summen af de kvadrerede \dot{X} - og \dot{Y} -koordinater:

$$\begin{aligned} \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 &= \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 + \dot{y}^2 + \omega^2 y^2 - \dot{x}y\omega + x\dot{y}\omega + x\dot{y}\omega - \dot{x}y\omega \\ &= \dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \omega(x^2 + y^2) + 2\omega(x\dot{y} - \dot{x}y). \end{aligned} \quad (1.77)$$

De første fire led i ligning (1.77) fremkommer på samme måde, og her forklares blot fremkomsten af \dot{x}^2 ledet: Kvadreres \dot{X} og \dot{Y} fremkommer led som er kvadrerede, for eksempel

$$\begin{aligned} [\dot{x} \cos(\omega t)]^2 &= \dot{x}^2 \cos^2(\omega t), \\ [\dot{x} \sin(\omega t)]^2 &= \dot{x}^2 \sin^2(\omega t). \end{aligned}$$

Siden summen af de kvadredede \dot{X} - og \dot{Y} -koordinater beregnes, vil man få

$$\dot{x}^2 \cos^2(\omega t) + \dot{x}^2 \sin^2(\omega t) = \dot{x}^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = \dot{x}^2,$$

¹¹Dette fås ved at gange en rotationsmatrix på stedvektoren $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, hvilket her bare tages for gode varer.

da $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$, hvilket kaldes grundrelationen.

For de resterende fire led er der også gjort brug af grundrelationen, men her blot mellem krydsleddene:

Tages et eksempel kan det ses at

$$\begin{aligned} [\dot{x} \cos(\omega t)] [-\omega y \cos(\omega t)] &= -\dot{x}\omega y \cos^2(\omega t), \\ [\dot{x} \sin(\omega t)] [-\omega y \sin(\omega t)] &= -\dot{x}\omega y \sin^2(\omega t). \end{aligned}$$

Sammenlægges disse to led fås

$$-\dot{x}\omega y \cos^2(\omega t) - \dot{x}\omega y \sin^2(\omega t) = -\dot{x}\omega y (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = -\dot{x}\omega y.$$

De resterende krydsled fra sammenlægningen \dot{X} og \dot{Y} går ud med hinanden, eksempelvis

$$\begin{aligned} [\dot{x} \cos(\omega t)] [-\omega x \sin(\omega t)] &= -\dot{x}x\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t), \\ [\dot{x} \sin(\omega t)] [\omega x \cos(\omega t)] &= \dot{x}x\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t), \end{aligned}$$

hvorfor disse ikke indgår i ligning (1.77).

Ud fra ligning (1.77) fås følgende kinetisk energi

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \omega(x^2 + y^2) + 2\omega(x\dot{y} - \dot{x}y)], \quad (1.78)$$

og da der ingen potentiel energi er i systemet, bliver Lagrange-funktionen

$$L = K = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \omega(x^2 + y^2) + 2\omega(x\dot{y} - \dot{x}y)]. \quad (1.79)$$

Fra denne Lagrange-funktion kan følgende partielt afledede med hensyn til x og \dot{x} findes

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}m[2\omega^2x + 2\omega\dot{y}] = m(\omega^2x + \omega\dot{y}), \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m[2\dot{x} - 2\omega y] = m(\dot{x} - \omega y), \quad (1.81)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(\ddot{x} - \omega\dot{y}), \quad (1.82)$$

hvorved Euler-Lagrangeligningen bliver

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \\ \Rightarrow m(\omega^2x + \omega\dot{y}) &= m(\ddot{x} - \omega\dot{y}), \end{aligned} \quad (1.83)$$

så bevægelsesligningen bliver

$$\ddot{x} = \omega^2x + 2\omega\dot{y}. \quad (1.84)$$

For y og \dot{y} bliver de partielt afledede

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2} [2\omega^2 y - 2\omega \dot{x}] = m (\omega^2 y - \omega \dot{x}), \quad (1.85)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2} [2\ddot{y} + 2\omega x] = m (\ddot{y} + \omega x), \quad (1.86)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m (\ddot{y} - \omega \dot{x}), \quad (1.87)$$

hvorved Euler-Lagrangeligningen bliver

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \\ \Rightarrow m (\omega^2 y - \omega \dot{x}) &= m (\ddot{y} - \omega \dot{x}), \end{aligned} \quad (1.88)$$

og der fås følgende bevægelsesligning for partiklen i y -retningen

$$\ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega \dot{x}. \quad (1.89)$$

Det kan med nogle lettere bøvlede udregninger vises, at Corioliskraften og centrifugalkraften er givet som

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{cor}} &= 2m \dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}, \\ \vec{F}_{\text{cf}} &= m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}, \end{aligned} \quad (1.90)$$

hvor \vec{r} er stedvektoren for det legeme, som kræfterne påvirker, og $\vec{\Omega}$ er vinkelhastighedsvektoren for det roterende koordinatsystem, som legemet befinder sig i. I dette eksempel roterer karrusellen med vinkelhastigheden ω omkring z -aksen, hvorfor $\vec{\Omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$. Enhver vektor kan i kartesiske koordinater skrives på formen $\vec{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$. Af denne grund kan Corioliskraften skrives som

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{cor}} &= 2m(\dot{x}\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}\hat{\mathbf{y}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}}) \times \omega \hat{\mathbf{z}} \\ &= 2m\omega(-\dot{x}\hat{\mathbf{y}} + \dot{y}\hat{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (1.91)$$

og tilsvarende bliver centrifugalkraften

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{cf}} &= m[\omega \hat{\mathbf{z}} \times (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})] \times \omega \hat{\mathbf{z}} \\ &= m\omega^2[x\hat{\mathbf{y}} - y\hat{\mathbf{x}}] \times \hat{\mathbf{z}} \\ &= m\omega^2(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Bruges Newtons 2. lov på summen af de fiktive kræfter fås

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{F}_{\text{cor}} + \vec{F}_{\text{cf}} \\ \Rightarrow m(\ddot{x}\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{y}}) &= 2m\omega(-\dot{x}\hat{\mathbf{y}} + \dot{y}\hat{\mathbf{x}}) + m\omega^2(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}), \end{aligned} \quad (1.93)$$

og samles x - og y -komposanterne for sig fås

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \omega^2 x + 2\omega \dot{y}, \\ \ddot{y} &= \omega^2 y - 2\omega \dot{x}.\end{aligned}\tag{1.94}$$

Dette er præcis de samme ligninger, som ligningerne (1.84) og (1.89), hvorfor ovenstående kan tænkes som en pseudoudledning af Coriolis- og centrifugalkraften, og det illustrerer også, at de er effekter, som rotationen skaber fra den kinetiske energi i systemet. Grunden til at det ikke er en rigid udledning er, at den er bundet op på det kartesiske koordinatsystem og én specifik rotation. Karrusellen illustrerer dog eksistensen af disse fiktive kræfter, til en vis grad hvor de kommer fra, og den belyser hvad disse kræfter er for nogle størrelser.

1.7 Perspektiver i Analytisk Mekanik

Euler-Lagrangeligningen giver én andenordens differentialligning for hvert generaliseret koordinat, men disse kan være svære at løse. Nogle gange er det simpelere at få to koblede differentialligninger pr. generaliseret koordinat, hvilket kræver en ny formulering af mekanikken.

Hamiltonformalismen

Tankegangen minder meget om den fra Lagrangeformalismen, hvorfor der kan tages udgangspunkt i den til at illustre idéen. Her defineres en Hamiltonfunktion, H , af n generaliserede koordinater ud fra Lagrangefunktionen

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) \equiv \sum_i^n p_i \dot{q}_i - L,\tag{1.95}$$

hvor p_i er den generaliserede impuls svarende til det i 'te generaliserede koordinat q_i . Det er vigtigt at pointere at en Hamiltonfunktion først kan kaldes en Hamiltonfunktion, når den er udtrykt udelukkende ved de generaliserede stedkoordinater og impulser. Det kommer til at give mening under udledningen af Hamiltons ligninger, der netop er udtrykt ved disse parametre. Den generaliserede impuls er defineret ud fra Lagrangefunktionen som

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.\tag{1.96}$$

I mange tilfælde er Hamiltonfunktionen givet ud fra et systems energier

$$H = K + V = E,\tag{1.97}$$

og den er faktisk ofte systemets samlede energi, hvilket dog ikke uddybes her.

Differentieres ligning (1.95) partielt med hensyn til det i 'te generaliserede koordinat fås

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}.\tag{1.98}$$

Alle disse differentialer kommer af at der er tale om en produktfunktion og en sammensat funktion, og man er nød til at tage højde for, at der kan være bidrag fra alle led. Ved brug af ligning (1.96) ses det, at første og sidste led er ens, men med modsat fortægning. Derudover afhænger p_i ikke eksplisit af q_i , hvorfor dens partielt afledte er nul. Dette skyldes at de generaliserede koordinater med tilhørende generaliserede impulser er en komplet basis for systemet, hvilket blandt andet betyder, at ingen af dem kan udtrykkes ved de andre, hvorfor deres partielt afledte med hensyn til hinanden skal være nul.

Ved brug af Euler-Lagrangeligningen, ligning (1.50), og definitionen på generaliseret impuls, ligning (1.96), opnås den første af Hamiltons ligninger:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{dp_i}{dt} = -\dot{p}_i. \quad (1.99)$$

Prøves det nu at opskrive den partielt aflede af Hamiltonfunktionen med hensyn til den generaliserede impuls fås

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i}. \quad (1.100)$$

Pr. definition er Lagrangefunktionen en funktion af de generaliserede koordinater og disses afledte, hvorfor $\partial L / \partial p_i = 0$. Med henvisning til ligning (1.96) ses det også, at første og sidste led er ens, og da den partielt aflede af en funktion med hensyn til sig selv er 1, fås det at

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \dot{q}_i = \dot{q}_i. \quad (1.101)$$

Dette er Hamiltons 2. ligning, og skrives de to op sammen er det

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Her vil der ikke gås i detaljen med, hvorfor Hamiltonformalismen kan være smart sammenlignet med Lagrangeformalismen, og det virker da også umiddelbart som ekstra arbejde, at skulle omskrive Lagrange-funktionen til en gyldig Hamiltonfunktion og så indsætte i Hamiltons ligninger, når man bare kunne have indsat i Euler-Lagrangeligningen. Her må man som læser bare stole på, at der eksisterer tilfælde, hvor Hamiltonformalismen er nemmere at benytte. Et mindre flyvsk argument for at introducere Hamiltonformalismen er dog at kvantemekanikken bygger på netop dette, hvilket ses i form af Hamiltonoperatoren, og alt dette introduceres i kapitel 2 om netop kvantemekanik.

Kapitel 2

Kvantemekanik

Velkommen til forløbet i kvantemekanik. Formålet med dette forløb er at give en ordentlig introduktion, til hvad kvantemekanik handler om, samt at give dig nogle værktøjer, så du bliver i stand til at regne på kvantemekaniske problemer. Selvsagt vil der være massere af ting, der vil blive udeladt i dette forløb, da tiden er knap¹. Dette skyldes primært, at man i kvantemekanik har mange specialtilfælde, og at ligningerne man prøver at løse hurtigt bliver så komplicerede, at der ikke findes analytiske løsninger til dem. Grundprincipperne, og de få ting man kan løse analytisk i kvantemekanik, viser sig at kunne formuleres på relativt lidt plads. Det er de fleste af disse, vi vil præsentere i dette forløb. Det betyder dog ikke, at det bliver nemt, da matematikken sagtens kan drille, og tankegangen man skal benytte er helt anderledes, end hvad du er vant til fra klassisk mekanik. Så hvis du er klar på en ekstra udfordring, så lad os bare springe ud i det!

2.1 Historisk perspektiv

Historien bag opfindelsen af kvantemekanik er i sig selv utrolig fascinerende og underholdende at læse og høre om. Lige fra hvordan Heisenberg fik idéen til usikkerhedsrelationen i et badekar på loftet af Niels Bohr instituttet, over hvordan Bohr og Einstein glemte at stige af bussen under en ophedet diskussion, om Guds tilbøjelighed til hasardspil, til hvordan Schrödinger kom på sin berømte ligning, mens han var i et lysthus i de Schweiziske Alper sammen med en elskerinde². Vi vil dog her holde os til de mest essentielle begivenheder, og lade anekdoterne vente til de sene aftener.

Kvantemekanikken beskriver hvordan verden virker på lille skala. Det betyder blandt andet, at vi ikke lægger mærke til kvantefænomener i vores hverdag, og derfor kan mange kvantefænomener virke kontraintuitivt. Når man undersøger naturen på lille skala, er den dog uundværlig. Et af de første steder, hvor den klassiske fysik var utilstrækkelig, er lys. På Newtons tid var der to modstridende beskrivelser af lyset. I den ene beskrivelse var lyset strømme af partikler kaldet korpuskler. I den anden var lyset bølger, i

¹På mange universiteter vil man have mulighed for at tage kvant kurser i sammenlagt mere end 12 måneder, hvis man vil forstå alle aspekter af kvantemekanik

²Oprindeligt brugte han ligningen som et modargument imod kvantemekanik, da han mente at den gav nogle absurde konsekvenser. Ironisk nok er hans ligning i dag grundlaget for det hele

et medie kaldet æteren. Uden eksperimentelt belæg var det ikke muligt at afgøre hvilken model, der bedst beskrev virkeligheden. Det var først i begyndelsen af 1800-tallet, at Youngs dobbeltspalteeksperiment viste, at lys opførte sig som bølger. Thomas Young sendte lys igennem to spalter, og observerede et interferens mønster på en skærm bagved. Interferens er et typisk bølgefenomen, og det ville ikke findes, hvis lyset var partikler. Dette, samt Maxwell's beskrivelse elektromagnetiske bølger, betød at bølgemodellen blev generelt accepteret. Bølge beskrivelsen havde dog problemer. Helt utilstrækkelig var beskrivelsen af varmestråling. Her var det muligt at opstille en model, Rayleigh-Jeans lov, der gav en glimrende beskrivelse ved lange bølgelængder.

$$B_\lambda(T) = \frac{2ck_B T}{\lambda^4} \quad (2.1)$$

Problemet er for korte bølgelængder, hvor $\frac{1}{\lambda^4}$ ledet eksploderer, hvilket forudsagde, at alle legemer ville udsende uendelige mængder kortbølget lys. Denne såkaldte ultraviolette katastrofe forekommer tydeligvis ikke, da det ikke ville tillade liv, som vi kender det, i universet.

En tilfredstillende model blev fremstillet af Max Planck, men i hans udregninger antog han, at lys kun kunne udsendes i pakker med en energi på:

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \quad (2.2)$$

Planck så blot dette som et smart regnetrik, men i dag ved vi, at det var et af de første blik ind i kvantemekanikkens verden. Konstanten h kaldes i dag Plancks konstant og optræder i stort set alle ligninger, der involverer kvantemekanik. Ofte bruger man i stedet Plancks reducerede konstant $\frac{h}{2\pi} = \hbar$ (h -streg). c er lysets hastighed i vakuum. Havde Plancks konstant været større, ville kvantemekanikken spille en større rolle i vores hverdag.

$$\begin{aligned} h &= 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \\ \hbar &= 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \end{aligned}$$

At Planck ikke blot havde udført et smart regnetrick, fandt man ud af ved at undersøge den fotoelektriske effekt. Hvis man sender ultraviolet lys ind på en metalplade, vil lyset slå elektroner fri af metallet, hvilket kan måles. Øger man intensiteten, af lyset slår man flere elektroner løs. Hvis man mäter de løsrevne elektroners kinetiske energi finder man at der er en øvre grænse for energien. Denne grænse afhænger af lysets bølgelængde.

$$T_{\max} = \frac{h}{\lambda} - E_{\text{binding}} \quad (2.3)$$

Netop som man ville forvente, hvis lyset var kvantiseret. Bølger kommer ikke i diskrete pakker, dette er en klar partikel egenskab. Pludseligt var partikel modellen ikke helt så død, som man havde troet. I 1924 i sin PhD. afhandling fremsatte de Broglie en model, hvor ikke kun lys var både bølger og partikler, men også alt andet. For ting med masse er bølgelængden bestemt af impulsen (bevægelsesmængden), og dermed hastigheden af partiklen.³

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (2.4)$$

³I de Broglies oprindelige model blev partiklernes bevægelse bestemt af en pilotbølge. Denne fortolkning af kvantemekanikken blev ret hurtigt forkastet. Der er dog en modificeret udgave, de Broglie-Bohm fortolkningen, fra 50'erne.



Året efter opstillede Schrödinger en ligning, der senere er blevet opkaldt efter ham, der beskriver hvordan systemerne udvikler sig over tid.

2.2 Introduktion

Okay nok krumspring, lad os komme til sagen, og lad os starte med en ting som I allerede er godt bekendt med, nemlig Newtons love. Disse love ser i deres enkelhed og elegance således ud:

- (1) Uden ydre kræfter vil et legeme bevæge sig med konstant hastighed. $\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{v} = \text{konstant}$
- (2) Kraften er proportionel til ændringen i hastighed (accelerationen). $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$
- (3) Enhver kraft resulterer i en ligeså stor, men modsatrettet, kraft $\rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Ud fra disse love er man i stand til at udlede alle de regler og love, der er i klassisk mekanik. Med andre ord, disse tre love er fundamentet for den klassiske mekanik. Nu kommer det store spørgsmål så bare, for hvor kommer disse love fra? Konsekvenserne af disse ligninger viser sig at være korrekte i alle de tilfælde,

vi har været i stand til at teste dem i (så længe vi befinder os i det klassiske regime), så der må naturligvis ligge et mere grundlæggende princip bag, en underliggende årsag til at de er korrekte? Selvom det måske virker underligt, så er svaret på dette spørgsmål faktisk nej! Der er ikke noget underliggende princip bag Newtons love, de er det grundlæggende bag Newtonsk mekanik⁴.

Det vi lige er stødt på her, er det man kalder et aksiom. Et aksiom er en antagelse eller formodning, om hvordan verden er skruet sammen, og altså ikke noget der er udledt andre steder fra. I enhver teori vil det være teoriens aksiomer der danner grundlaget for teorien, og med dem der bliver testet når man laver forsøg der har til formål at undersøge om teorien passer med virkeligheden. I Newtonsk mekanik er der 3 aksiomer, nemlig Newtons tre love.

Hvis vi nu vender os imod kvantemekanikken, så vil et naturligt spørgsmål være at spørge, hvilke aksiomer der ligger til grund for denne teori? Ligesom med klassisk mekanik er det faktisk muligt at koge det ned til tre aksiomer, omend disse aksiomer er noget anderledes end klassisk mekanik. Aksiomerne er angivet nedenunder.

1

Et system betragtes som kvantemekanisk, hvis det opfylder Schrödingerligningen:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{r}, t) \Psi \quad (2.5)$$

2

$|\Psi|^2$ er sandsynlighedsfordelingen, og det må derfor gælde at:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 d\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi d\vec{r} = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \quad (2.6)$$

3

Forventningsværdien af enhver observabel er givet ved:

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{Q} \Psi d\vec{r} = \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle \quad (2.7)$$

I disse aksiomer vil der formentlig optræde en del begreber, som du ikke er bekendt med endnu, så lad os lige bruge lidt tid på at gennemgå dem:

- For det første er der bølgefunktionen Ψ , som beskriver systemet. Grunden til at vi her bruger ordet system i stedet for partikel er, at bølgefunktionen sagtens kan beskrive et system af flere partikler. Dette kan f.eks. være elektronerne i et atom, eller to atomer der interagerer. Det skal dog siges, at matematikken hurtigt bliver så kompliceret, når man arbejder med fler-partikel systemer, at man

⁴Det er faktisk også muligt at udlede Euler-Lagrangeligningerne ud fra disse.

ikke er i stand til at løse det analytisk, og derfor må bruge numeriske metoder⁵. Af samme grund vil vi i dette forløb holde os til systemer, der beskriver en partikel af gangen. Bølgefunktionen er altid en funktion af både tid og position. Man bør derfor egentlig skrive $\Psi(\vec{r}, t)$, men det er så almindeligt at bruge store psi for bølgefunktionen, at man oftest bare skriver Ψ .

- Dernæst er der potentialet $V(\vec{r}, t)$. Dette kan betragtes som det "landskab" partiklen befinner sig i. $V(\vec{r}, t)$ har enheder af energi, og angiver hvor meget energi, det kræver for partiklen at være bestemte steder. Klassisk vil man opleve, at hvis man skyder en bold op af en bakke, vil den trille tilbage igen, hvis den ikke har nok kinetisk energi til at overkomme den potentielle energi, som bakken har. I kvantemekanik vil man derimod opleve, at løsningen til Schrödingerligningen gør det muligt for partiklen at være steder, som klassisk ikke ville være tilladt.
- Sandsynlighedsfortolkningen af bølgefunktionen kan tolkes, som at hvis vi integrerer fra minus uendelig til plus uendelig, betragtes det som at vi integrerer over hele rummet, og da partiklen er et eller andet sted i universet må sandsynligheden for at finde den derfor være én (100% sandsynlighed for at finde partiklen). Hvis vi i stedet havde integreret over et bestemt område af rummet, ville vi finde sandsynligheden, for at finde partiklen i den del af rummet, som et decimaltal.
- Idet at partiklen har en sandsynlighed for at være alle steder i universet (omend den næsten er uendelig lille langt de fleste steder), vil det også være muligt for os at måle alle værdier af en bestemt observabel. Det eneste vi derfor kan sige noget om, er forventningsværdien $\langle Q \rangle$ af en bestemt observabel. Forventningsværdien er gennemsnittet af en bestemt observabel fra et bestemt system, hvis vi mäter den uendelig mange gange.
- Operatoren \hat{Q} er en ny størrelse, som vi her støder på. Det kan være lidt svært at få en ordentlig forståelse for, hvad sådan en egentlig repræsenterer, da der ikke er noget tilsvarende i klassisk mekanik, men man kan tænke på den som en ting, der udfører målingen af observablen på systemet. Vi skal senere se, hvordan operatorerne fører til ting som usikkerhedsrelationen, og begrænsninger i antallet af ting vi på én gang kan vide om et system.
- Klammerne i ligning (2.6) og (2.7) kaldes Dirac notation eller bra-ket notation. Det er lettest at se det som en let måde at skrive integralerne op på. Notationen tillader nogle matematiske spidsfindigheder, som vi desværre ikke dækker.

Dvs. at vores fremgangsmåde, når vi skal løse kvantemekaniske problemer, er at opstille Schrödingerligningen for systemet, og så løse den for at finde bølgefunktionen. Derefter skal vi sørge for at sandsynlighedsfordelingen giver 1, når vi integrerer over hele rummet, vi skal altså normere den. Til sidst vil vi da være i stand til at spørge systemet om diverse ting, som f.eks. hvad den gennemsnitlige impuls vil være, eller hvor den partiklen i gennemsnit vil være.

Nu vi har fået grundprincipperne på plads, er vi klar til at gå i gang med at regne på nogle kvantemekaniske problemer, så lad os gå lige til den.

⁵Computer beregninger

2.3 Den tidsuafhængige Schrödingerligning

Den generelle Schrödingerligning er ret kompliceret at regne på, da den både er i tre dimensioner og er tidsafhængig. Vi bliver derfor nød til at lave en række antagelser, så den bliver lidt nemmere at arbejde med. Den første antagelse vi vil benytte, er at vi kun vil se på tidsuafhængige potentialer. Denne approksimation benyttes, da matematikken for tidsafhængige potentialer bliver voldsomt kompliceret, og svær at regne på. Derudover har det også vist sig, at de fleste potentialer faktisk er relativt stabile over lang tid, og når de så endelig ændrer sig med tiden, så gør de det så tilpas langsomt, så man kan betragte hvert øjeblik som havende konstant potentielle, og så løse Schrödingerligningen med det tidsuafhængige potentielle, dvs. Schrödingerligningen nu ser således ud:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{r})\Psi \quad (2.8)$$

Den næste antagelse vi skal gøre os, er at vi nu vil begrænse os til 1 dimension. Dette lyder måske underligt, for er verden ikke normalt opbygget i 3 dimensioner?

Jo det er den egentlig, men hvis vi begrænser os til kun at arbejde i en dimension, så bliver matematikken en del nemmere, og mange af de resultater vi når frem til i en dimension kan faktisk generaliseres til 2 og 3 dimensioner, så det er ikke spildt arbejde. Vi har nu reduceret Schrödingerligningen til kun at være en funktion af x og t :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi \quad (2.9)$$

Den sidste antagelse vi skal gøre os, er at vi nu antager separation af variable. Dvs. at vi antager, at bølgefunktionen er en funktion af x og t . $\Psi(x, t)$ kan skrives som:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t) \quad (2.10)$$

Dette kan måske virke lidt underligt, første gang man ser det, for smider vi ikke dermed nogle løsninger væk ved kun at se på løsninger af denne form?

Svaret er, at det gør vi faktisk, ved at antage dette ser vi bort fra en masse løsninger, men som et senere skal vise sig, så gør dette ikke noget, da de løsninger vi ender ud med ved at benytte denne metode, faktisk er alt hvad vi har brug for, for at opnå alle tænkelige løsninger der giver fysisk mening. Lige som det er meget almindeligt af bruge Ψ for den tidsafhængige bølgefunktion, er det også meget almindeligt af bruge ψ for den tidsuafhængige. Når vi skriver ψ eller φ vil det være underforstået, at det er $\psi(x)$ eller $\varphi(t)$. Hvis man sætter den separerede løsning (2.10) ind i Schrödingerligningen og anvender kæderegralen, bliver Schrödingerligningen:

$$i\hbar \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\varphi\psi \quad (2.11)$$

Det næste skridt er at dele med $\varphi\psi$ på begge sider. Det giver ligningen:

$$\frac{i\hbar}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \quad (2.12)$$

Det vi er nået frem til her, er faktisk ret fantastisk. For hvis man kigger på venstre side af ligningen, så ser man kun ting der er afhængige af tiden t , og kigger man på højre side, så ser man kun ting der er

afhængige af position x . Det vi så her vil benytte er et af de ældste tricks i bogen, når det kommer til at løse partielle differentialligninger af flere variable. Når to sider af en ligning afhænger af hver deres uafhængige variabel, så må de nødvendigvis begge to være konstante. Hvis man f.eks. sætter t til at være en konstant $t = t_0$, så er det lige meget hvilken værdi af x man vælger, højresiden vil altid være lig med venstresiden. Vi vælger derfor en konstant, og kalder denne for E (det kan allerede afsløres, at E er energien af systemet, men vi skal nok komme nærmere ind på, hvorfor det er sådan), og Schrödingerligningen kan nu opskrives på følgende måde:

$$\frac{i\hbar}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) = E \quad (2.13)$$

Ud fra den rent tidsafhængige del kan man opstille en differentialligning, der kun afhænger af t :

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = E\varphi \quad (2.14)$$

Tilsvarende kan man opstille en differentialligning, der kun afhænger af x . Denne ligning er ret vigtig, og den kaldes for den tidsuafhængige Schrödingerligning.

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi \quad (2.15)$$

Dette betyder, at vi for at løse Schrödingerligningen, nu skal løse to separate ligninger, og så bagefter gange dem sammen for at få den totale løsning! Den første af ligningerne indeholdende den tidsafhængige del er faktisk ret simpel, da dette jo bare er en differentialligning, hvor den afledte af en funktion er lig med en konstant gange funktionen selv. Denne type differentialligninger løses af en eksponentialfunktion.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= E\varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{-iE}{\hbar}\varphi \\ \varphi &= A \cdot e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

For at sandsynlighedsfortolkningen af bølgefunktionen (2.6) holder må den være normeret. Det vil sige at $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. Den letteste måde at opnå dette er at normere ψ og φ enkeltvist. Det betyder, at $|A|^2 = 1$, og det oplagte valg her er $A = 1$.

$$\varphi = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \quad (2.17)$$

Dette er faktisk ret utroligt, for det betyder at vi nu bare skal løse den tidsuafhængige Schrödingerligning, hvor den vil bestemme ψ og E , og så for at få den tidsafhængige løsning, skal vi bare gange en faktor $e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$ på. Dvs. at alt vi skal gøre nu, er at løse følgende den tidsuafhængige Schrödingerligning:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (2.18)$$

Uheldigvis viser det sig, at dette i langt de fleste tilfælde vil være utrolig svært, da potentialet $V(x)$ kan antage alle former. Vi vælger derfor at kigge på nogle specielle potentialer, som optræder mange steder i

naturen, og som giver en god indsigt i de underlige konsekvenser, som der er af kvantemekanik. Men først skal vi lige lave en lille omskrivning af Schrödingerligningen, så vi får:

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi &= E\psi \\ \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi &= E\psi \\ \hat{H}\psi &= E\psi \end{aligned} \quad (2.19)$$

Hvor \hat{H} er den såkaldte Hamilton operator. Du har sikkert allerede regnet ud, at denne operator måler den totale energi i systemet, og ligesom i forløbet om analytisk mekanik, som i lige har haft, består den af summen af den kinetiske og den potentielle energi. Vil vil snakke meget mere om operatorer, hvordan de fungerer, samt hvad man kan bruge dem til, og hvordan de bliver udledt i afsnittet om operatorer. Det du skal vide nu er bare, at når man bruger Hamiltonoperatoren på ψ , så får man energien gange ψ .

2.4 Den uendelige potentialebrønd

Den første udgave af Schrödingerligningen vi skal løse, er en ægte klassiker, nemlig den uendelige potentialebrønd. Dette er nok det potentielle, der er nemmest at løse for Schrödingerligningen, og løsningen til dette potentielle benyttes faktisk en del steder i fysikken, da mange lukkede systemer kan approksimeres til at være uendelige potentialbrønde i 1, 2 eller 3 dimensioner, alt efter hvordan systemet er indrettet.

I den uendelige potentialebrønd forestiller vi os, at partiklen er fanget i et potentielt, der er $V(x) = 0$ for $0 < x < L$ inde i brønden, og uden for brønden er potentiælet uendelig stort, $V(x) = \infty$ for $x < 0$ og $x > L$. Når man begynder at arbejde med uendeligheder bliver ens resultater ofte lidt funky, for hvordan skal man fysisk tolke noget, der er uendelig stort?

I dette tilfælde vil det betyde, at partiklen skal have uendelig meget energi for at være i området uden for brønden, og da det selvfølgelig ikke giver nogen fysisk mening at have en partikel med uendelig meget energi, betyder det, at sandsynligheden for at finde partiklen udenfor brønden, må være uendelig lille, eller sagt med andre ord lig med nul (dette er en af de eneste potentialer, hvor man definitivt kan sige at sandsynligheden for at finde en partikel et bestemt sted er lig med nul).

For at finde løsningen til Schrödingerligningen, behøver vi kun at koncentrere os om området inde i brønden, da dette er det eneste sted partiklen kan være. På grund af potentiælet kræver vi samtidig, at bølgefunktionen må være nul ved $x = 0$ og $x = L$, dette leder til at Schrödingerligningen tager formen:

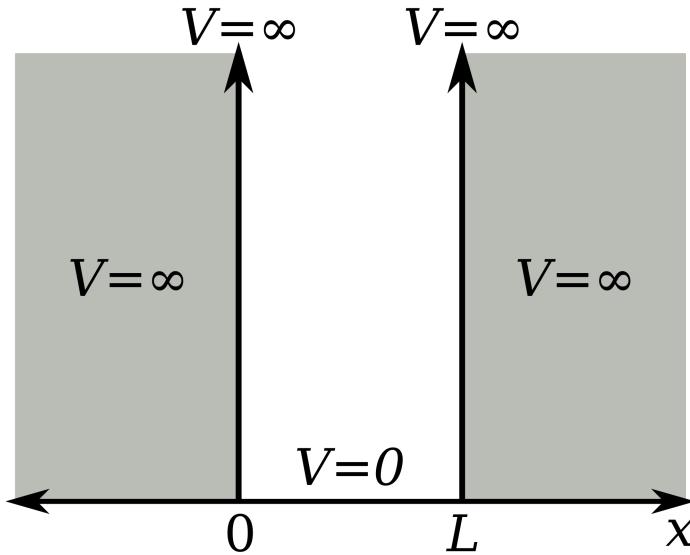
$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi \quad (2.20)$$

Bølgefunktionerne er altid kontinuerte. Så siden bølgefunktionen er nul alle steder uden for brønden, må den også være det ved kanten af brønden:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

Omskrives den tidsuafhængige Schrödingerligning lidt, finder vi differentialligningen:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{-2mE}{\hbar^2} \psi = -\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)^2 \psi = -k^2 \psi \quad (2.21)$$



Figur 2.1: Skitse af den uendelige potentialebrønd

Her indføres $\omega = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}$, for at gøre de følgende udregninger markant pænere. Da $\frac{d^2}{dx^2} \cos(x) = -\cos(x)$ og $\frac{d^2}{dx^2} \sin(x) = -\sin(x)$, er det oplagt at løsningerne til Schrödingerligningen er baseret på trigonometriske funktioner. Ganske rigtigt er den generelle løsning til differentialligningen på formen:⁶

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.22)$$

Konstanterne A , B og k (og dermed E), kan ikke være hvad som helst. Deres værdier skal passe med grænsebetingelserne. Lad os til at starte med betragte $L = 0$. Her er bølgefunktionen:

$$\psi(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = B = 0 \quad (2.23)$$

Vi kan hermed konkludere at $B = 0$. Bølgefunktionen er dermed en sinusfunktion. Den anden ende af brønden giver os værdien af k , og dermed E .

$$\begin{aligned} \psi(L) &= A \sin(kL) = 0 \\ \implies \sin(kL) &= 0 \\ \implies kL &= \pi n \end{aligned}$$

Her kan n være et hvilket som helst helt tal større end eller lig 1. Der er altså mere end en mulig værdi for k , og de forskellige værdier er klart forskellige. Vi har netop fundet at k og dermed også energien er kvantiseret. De kan have værdierne:

$$k_n = \frac{\pi n}{L} \quad (2.24)$$

$$E_n = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m L^2} \quad (2.25)$$

⁶Tjek at det passer.

Nu mangler blot at finde konstanten A_n for alle n . Den kan findes ud fra normeringskravet, der følger af sandsynlighedsfortolkningen af bølgefunktionen.

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

Siden bølgefunktionen er nul alle andre steder end i brønden, vil integralet også være det. Derfor skal der kun integreres her

$$\langle \psi | \psi \rangle = A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx$$

Der er rigtigt mange regneregler for trigonometriske funktioner, men en af dem der ofte er nyttig er: $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$. Bruges den bliver integralet:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{A^2}{2} \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right) dx = \frac{A^2 L}{2} - \frac{L}{2\pi n} \left[\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right]_0^L = \frac{A^2 L}{2} - \frac{L}{2\pi n} + \frac{L}{2\pi n} = \frac{A^2 L}{2} = 1$$

Det er nu muligt at isolere A .

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (2.26)$$

Nu kan det konkluderes, at de stationære løsninger til den uendelige brønd er:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (2.27)$$

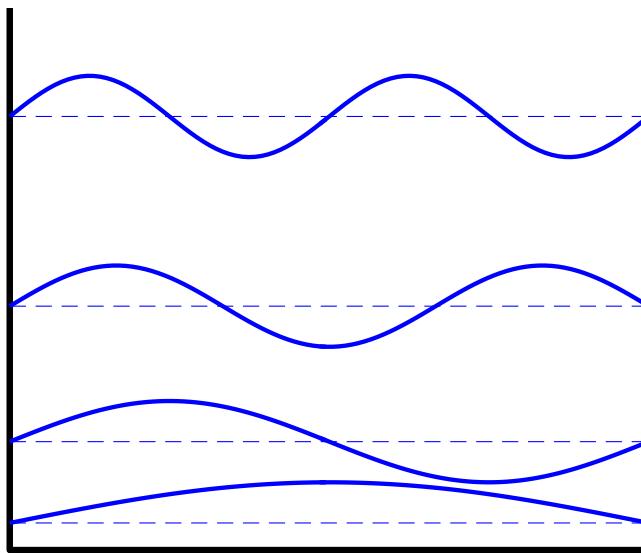
2.5 Kvantemekanikkens forunderlige egenskaber

Løsningen til den uendelige potentialebrønd ser måske ikke ud af meget, men bliv ikke snydt, for dette resultat indeholder faktisk en hel del information om mange af de underlige egenskaber der er ved kvantemekanik, så lad os bruge en del energi på at gennemgå dem.

Grundtilstanden

Da vi løste Schrödingerligningen for den uendelige potentialbrønd, fandt vi at der er en tilstand med minimal energi, og alle andre tilstænde har en højere energi end denne tilstand. Dette viser sig at være en generel ting, og vi vil genfinde det, når vi løser andre systemer. Den laveste tilstand har et særligt navn. Den kaldes for grundtilstanden. Lad os se på en hypotetisk tilstand med en energi, der alle steder er lavere end potentialet.

$$E < V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Figur 2.2: De laveste fire bølgefunktioner for den uendelige brønd forskudt efter deres energi.

Så er det muligt at omarrangere den tidsuafhængige Schrödingerligning til:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)\psi \quad (2.28)$$

Som man kan se er krumningen (den anden afledte) af ψ altid positiv. Det betyder at hældningen altid vil være stigende, så det er ikke muligt for bølgefunktionen at gå imod nul i det uendeligt fjerne. Dette er et krav for at bølgefunktionen kan normeres, så for at finde en løsning til Schrödingerligningen som kan normeres, må grundtilstandsenergien være større end potentialets minimum.

Ortonormalitet

For det første er det værd at bemærke, at vi i ligningerne for energien og bølgefunktionen har benævnt dem begge med et subscript n . Dette er gjort, da alle de andre konstanter der indgår i udtrykkene er bestemt for os på forhånd, hvorimod n er et vilkårligt tal, vi var nød til at indføre da matematikken krævede det. Dette n er skyld i, at vores partikel ikke kan have alle tænkelige energier, men er begrænset til at have en ud af mange diskrete energier. Samtidig betyder det også, at partiklen er begrænset til at have én ud af en række bestemte bølgefunktioner.

Betyder det at en partikel ikke kan bevæge sig frit i en sådan boks, og at den samtidig er nød til at have helt bestemte energier? Nej ikke helt, men for at forstå det, skal vi først lære lidt om hvordan disse bølgefunktioner fungerer.

Den første ting vi skal indse, er at disse funktioner er indbyrdes ortonormale. Ortonormale betyder at en funktion ψ_n ikke kan skrives som en kombination af andre funktioner $\sum_m \psi_m$ for $m \neq n$. Dette kan ses

ved at udføre integralet.

$$\int_0^L \psi_m^* \psi_n \, dx = \delta_{m,n} \quad (2.29)$$

hvor tegnet $\delta_{m,n}$ er det såkaldte Kronecker-delta-tegn, der er 1 når $m = n$, og 0 ellers. Dette integral kan tolkes som at funktionen ψ_n ikke indeholder noget af funktionen ψ_m .

Repræsentation

Ortonormalitet betyder at funktionerne ψ_1, ψ_2, \dots udspænder et komplet rum, hvor de hver især er uafhængige af hinanden, men ved at lave lineære kombinationer af disse funktioner, kan vi repræsentere alle andre funktioner vi kan tænke på inde i intervallet $x = 0, L$, og alle disse funktioner vil have en unik kombination af ψ_n funktioner at blive repræsenteret af. Man kan tænke på dette som et koordinatsystem. Et punkt i et 3-dimensionalt kartesisk koordinatsystem (a, b, c) , kan beskrives ved tre enhedsvektorer $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ og $\hat{\mathbf{z}}$ på følgende måde:

$$P(a, b, c) = a\hat{\mathbf{x}} + b\hat{\mathbf{y}} + c\hat{\mathbf{z}}$$

Denne repræsentation er unik, da man ikke kan beskrive punktet $P(a, b, c)$ på andre måder i det kartesiske rum, end den måde vi lige har vist. Derfor kan man se funktionerne ψ_n som enhedsvektorer i et komplet rum, der gør det muligt at beskrive alle funktioner som en unik linear kombination af disse enhedsfunktioner, også kaldet egenfunktioner. Dette er en parallel til Taylorudvikling, her bruger vi bare ikke polynomier, men sinus funktioner som vores funktions base.

Dette kan måske virke som en underlig egenskab ved den uendelige potentialebrønd, men faktisk viser det sig, at dette er en generel egenskab ved alle potentialer. Det er nemlig sådan, at ved alle potentialer vi kan tænke på til Schrödingerligningen, vil løsningerne være et sæt af egenfunktioner, der udspænder et komplet rum, og disse egenfunktioner vil hver især have en egenenergi E_n knyttet til sig. Det vil samtidig være muligt at udtrykke alle tænkelige funktioner, som en linear kombination af disse egenfunktioner.

Men hvordan repræsenterer man så en vilkårlig funktion ud fra en samling af egenfunktioner? Svaret på dette er faktisk ganske simpelt (omend matematikken godt kan være lidt drilsk), man spørger simpelthen hvor meget af funktionen der er indeholdt i hver af egenfunktionerne. Dette gøres på samme måde som vi før gjorde, da vi så hvor meget af egenfunktionerne der er indeholdt i de andre egenfunktioner (i det tilfælde var resultatet 0). Så hvis vi har en funktion $f(x)$ der er normaleret således at:

$$\int_0^L |f(x)|^2 \, dx = 1$$

så vil vi være i stand til at finde, hvor meget af hver egenfunktion ψ_n der er indeholdt i $f(x)$ ved at sige:

$$c_n = \int_0^L f^*(x) \psi_n \, dx \quad (2.30)$$

Hvor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$$

Hvilket så betyder at, vi kan udtrykke $f(x)$ som en linear kombination af egenfunktioner ψ_n på følgende måde:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n \quad (2.31)$$

Superposition

Dette er i sig selv et fantastisk resultat, men den opmærksomme læser vil allerede nu have stillet sig selv et meget dybt spørgsmål. For hvis partiklen befinner sig i tilstanden $f(x)$, hvad er så dens energi? For at besvare dette spørgsmål, må vi henvende os til kvantemekanikkens tredje postulat, der handler om målingen af forventningsværdier, der siger, at vi skal presse operatoren for den værdi vi gerne vil måle ind imellem de to funktioner, når vi tager integralet af funktionerne. Fra sidste afsnit ved vi yderligere, at energioperatoren er den såkaldte Hamilton operator, og vi har jo lige fundet alle egenenergierne til den uendelige potentialebrønd, så vi har alt hvad vi skal bruge for at finde svaret. Vi sætter derfor bare ind og får:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_0^L f^*(x) \hat{H} f(x) dx \\ &= \int_0^L (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots)^* \hat{H} (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots) dx \\ &= \int_0^L (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots)^* (E_1 c_1 \psi_1 + E_2 c_2 \psi_2 + \dots) dx \\ &= E_1 |c_1|^2 \int_0^L |\psi_1|^2 dx + E_2 |c_2|^2 \int_0^L |\psi_2|^2 dx + \dots \\ &= E_1 |c_1|^2 + E_2 |c_2|^2 + E_3 |c_3|^2 + E_4 |c_4|^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

Hvor vi her har brugt at

$$\int_0^L \psi_m^* \psi_n dx = 0 \quad \text{for} \quad n \neq m$$

Ud fra dette kunne man derfor tro, at partiklen så har energien $\langle E \rangle$, hvilket så må medføre at partiklen dermed kan have alle energier, bare vi sørger for at forberede den i den rigtige tilstand $f(x)$, men dette er dog ikke tilfældet. Det er nemlig sådan at en partikel kun kan befinde sig i sin egenfunktion til potentialet ψ_n . Vi skal jo huske på, at $\langle E \rangle$ står for den gennemsnitlige energi vi burde finde, hvis vi laver uendelig

mange målinger på et system med funktionen $f(x)$. Men ved en enkelt måling er det kun muligt at måle energierne E_n .

Men hvordan ved vi hvilken E_n vi så måler, når vi laver en måling af systemet? Svaret er, at det ved vi ikke, men vi kender sandsynligheden for at få energien E_n , og denne sandsynlighed er netop koefficienten $|c_n|^2$.

Nu skal vi holde tungen lige i munden, for efter man har foretaget en måling af energien, og fået af vide at partiklen har energien E_n , så betyder det at hvis vi foretager endnu en måling af energien lige bagefter, så må vi nødvendigvis få samme svar tilbage, da partiklen jo lige har sagt at den har energien E_n , og at den befinner sig i tilstanden ψ_n . Det vi er her er stødt på er det man kalder superpositionsprincippet, hvilket siger, at hvis en partikel befinner sig i en bestemt tilstand

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$$

og vi så måler på den, så tvinger vi partiklen til at beslutte sig for hvilken tilstand ψ_n , den gerne vil være i, hvorefter den kollapser til denne tilstand, således at $f(x)$ ændres til:

$$f(x) = \psi_n$$

Med andre ord, når vi måler på et system, så ændrer vi på systemet. Dette betyder ikke at partiklen så vil blive i tilstanden ψ_n , indtil vi igen måler på den, for den vil blive påvirket af alle mulige andre ting, man ikke kan skærme den for, som f.eks. fotoner, interaktioner med andre partikler og kvantefluktuationer, så den vil ret hurtigt igen blive ændret, til at være i en tilstand der er en linear kombination af egenfunktioner ψ_n , men det vigtige her er, at denne tilstand ikke er den samme tilstand, som vi startede med. Men hvorfor er det så vigtigt at vide, hvad der sker, når vi laver en linear kombination af egenfunktioner? Grunden til dette er, at vi kun kan have bevægelse, hvis vores partikel har en tilstand, der er en linear kombination af egentilstande, hvilket vi nu skal til at vise.

Tidsudvikling

Vi skal først huske på at den generelle løsning til Schrödingerligningen er

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x)\varphi_n(t) = \psi_n(x)e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}$$

Så hvis vi vil få vores bølgefunktion til at udvikle sig over tid, så skal vi gange det tidslige led $\Phi_n(t)$ på hver af vores egentilstande. Derfor kan vi udtrykke en generel tidsafhængig tilstand således:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} \quad (2.33)$$

Nu forestiller vi os så, at vi har en tilstand, der kun består af en egentilstand $n = 1$, $f(x, t) = \psi_1 e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}}$, så vores sandsynlighedsfordeling $|f(x, t)|^2$ kan derfor udregnes til at være:

$$|f(x, t)|^2 = \left(\psi_1 e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} \right)^* \left(\psi_1 e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} \right) = \psi_1^* \psi_1 e^{\frac{+iE_1 t}{\hbar}} e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} = |\psi_1|^2$$

som tydeligvis ikke er tidsafhængigt, da egentilstandene ψ_n kun er funktioner af sted.

Hvis vi i stedet prøver at kigge på et tilstand $f(x, t)$ som består af to egenfunktioner, således at: $f(x, t) = c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t)$, får vi følgende sandsynlighedsfordeling:

$$\begin{aligned} |f(x, t)|^2 &= (c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t))^* (c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t)) \\ &= |c_1|^2 |\Psi_1|^2 + |c_2|^2 |\Psi_2|^2 + c_1^* c_2 \Psi_1^* \Psi_2 + c_1 c_2^* \Psi_1 \Psi_2^* \\ &= |c_1|^2 |\Psi_1|^2 + |c_2|^2 |\Psi_2|^2 + c_1^* c_2 \Psi_1^* \Psi_2 e^{-\frac{i(E_2-E_1)t}{\hbar}} + c_1 c_2^* \Psi_1 \Psi_2^* e^{\frac{i(E_2-E_1)t}{\hbar}} \end{aligned}$$

Hvis vi antager at c_1, c_2 og Ψ_1, Ψ_2 er reelle får vi:

$$= |c_1|^2 |\Psi_1|^2 + |c_2|^2 |\Psi_2|^2 + c_1 c_2 \Psi_1 \Psi_2 \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)$$

Hvilket viser at sandsynlighedsfordelingen for denne tilstand oscillere som en cosinusfunktion med frekvensen $\frac{E_2 - E_1}{\hbar}$. Nu er det sådan at siden sandsynlighedsfordelingen ændrer sig med tiden, så bør vi også forvente at forventningsværdien af positionen $\langle x \rangle$ ændrer sig med tiden. Dette kan vi vise først ved at se på:

$$\int_0^L |f(x, t)|^2 dx = \int_0^L |c_1|^2 |\Psi_1|^2 + |c_2|^2 |\Psi_2|^2 + c_1 c_2 \Psi_1 \Psi_2 \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right) dx = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Hvor vi her ikke kan regne med at leddet med Ψ_1, Ψ_2 giver 0, når vi integrerer over x . Dette skyldes, at vi her har puttet en operator ind i integralet, der ændrer funktionen så ortonormalitetsbetingelsen ikke længere holder. Dette betyder så at vores forventningsværdi for x over tid vil ændre sig med en værdig givet ved:

$$\langle x \rangle = c_1 c_2 \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right) \int_0^L \Psi_1 x \Psi_2 dx$$

For at forstå hvad det præcist er, der sker her, er vi derfor nødt til at forstå hvad en operator er, hvilket vi skal se på i næste afsnit.

Operatorer

I kvantemekanikken er operatorer meget vigtige, men hvad er de egentligt. På mange måder minder operatorer om en funktion, men i stedet for at tage et tal som input og give et nyt tal vil en operator virke på en funktion og give en ny funktion. Operatorerne virker på alle funktioner til højre for dem, og efterlader alle til vestre for dem urørt. En type operator de fleste nok er bekendt med er differentialoperatoren: $\frac{d}{dx}$. Derudover er ting som at gange med en funktion eller et tal også operatorer. I kvantemekanikken er alle observable repræsenteret af operatorer. Vi har allerede stiftet bekendskab med en observabel, x .

Forventningsværdien er den gennemsnitlige værdi vores observable vil have når man måler. Det er normalt også den værdi, man ville forvente ud fra klassisk mekanik. Hvis vi ønsker at finde en operator for hastigheden må vi stille det krav at forventningsværdien svarer til den klassiske hastighed:

$$\langle v \rangle = \frac{\partial \langle x \rangle}{\partial t}$$

Siden \hat{x} blot er operatoren der ganger med funktionen $f(x) = x$, vil vi kunne ombytte funktionerne i udtrykket for $\langle x \rangle$ frit. Udtrykket er på samme form som i ligning (2.7). Da de er

$$\langle v \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{x} \Psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 \, dx$$

For at finde $\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2$ bruges kæderegelen:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$$

Ved at isolere $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ i Schrödingerligningen (2.5) og ved at kompleks konjugere, er det muligt at erstatte tids differentieringen med x differentialer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V \Psi \\ \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &= \frac{-i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^* \end{aligned}$$

Det giver forventningsværdien for hastigheden som:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} |\Psi|^2 V - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} |\Psi|^2 V \right) dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right) dx \end{aligned}$$

Ofte kan udregninger gøres lettere ved at lægge nul til på en smart måde. I dette tilfælde $0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}$. Vi kan herefter anvende kæderegelen baglæns.

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) dx \end{aligned}$$

Når man finde differentialet af et produkt af funktioner bruger man kædereglen. Tilsvarende findes der en regel for integralet kaldet partiell integration. Desværre er udtrykket ikke lige så pænt.

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} \, dx = [fg]_a^b - \int_a^b \frac{df}{dx} g \, dx$$

Hvis vores bølgefunktion er normerbar må den gå imod 0 i det uendeligt fjerne i begge retninger. Første led vil derfor være nul når vi arbejder med bølgefunktioner, og kan smides væk. Delvis integration giver forventningsværdien:

$$\langle v \rangle = \frac{-i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial x}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) dx = \frac{-i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} dx$$

Anvendes delvis integration en gang til på andet led, ender vi med et resultat på samme form som ligning (2.7).

$$\langle v \rangle = \frac{-i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} P s i \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} dx = \frac{-i\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx$$

Herfra er det muligt, at slutte at hastighedsoperatoren er:

$$\hat{v} = \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.34)$$

Nu hvor vi har operatorer for position og hastighed, er det muligt at konstruere operatorer for andre observable herudfra. Den operator der ofte er af interesse er impulsoperatoren:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.35)$$

Da Schrödinger opstillede ligningen, der idag er navngivet efter ham, havde han et andet udgangspunkt end vi har taget her. Schrödinger tog udgangspunkt i (2.35), der derfor også kaldet Schrödingers aksiom.

Observabel	Klassisk udtryk	Operator
Position	$x = x$	$\hat{x} = x$
Hastighed	$v = \frac{\partial x}{\partial t}$	$\hat{v} = \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x}$
Impuls	$p = mv$	$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
Energi	$E = \frac{1}{2}mv^2 + V$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$

Tabel 2.1: Et par af de mest almindelige observable og deres operatorer.

Når man regner med tal eller funktioner, er vi vandt til, at rækkefølgen vi ganger eller lægger sammen ikke har nogen betydning for resultatet.

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ ab &= ba \end{aligned}$$

Denne egenskab kaldes kommutativitet, og det er ikke garanteret at operatorer. For at undersøge om to operatorer kommerterer udregner man den såkaldte kommutator:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (2.36)$$

Hvis kommutatorern er nul vil de to operatorer kommutere (tjek efter at det gælder for tal). Det kan ofte være en udfordring at regne med operatorer, så det kan være et fordel at finde kommutatoren ganget på en hjælpefunktion. Lad os for at demonstrere se på $[\hat{x}, \hat{p}]$

$$[\hat{x}, \hat{p}]f(x) = -i\hbar \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \right) f(x) = -i\hbar \left(x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x f(x) \right) = -i\hbar \left(x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial x} \right) = i\hbar f(x)$$

Nu har hjælpe funktionen spillet sin rolle, og kan roligt fjernes. Det giver at kommutatoren er:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.37)$$

Det skal senere vis sig, at dette resultat har stor betydning for kvantemekanikken, og det er muligt at bruge værdien af kommutatoren, som en af forudsætningerne til at udlede kvantemekanikken. Det kaldes den kanoniske kommutatorrelation, og vi skal nu se en af de vigtige konsekvenser af denne.

2.6 Usikkerhedsrelationen

Inden vi kommer til usikkerhedsrelationen, skal vi lige have styr på, hvad vi mener med usikkerhed. For at gøre det lidt lettere vil vi starte med at se på diskrete variable. Det kunne f.eks være de seks mulige resultater man kan få med en sekssidet terning. Slår man mange gange med terningen, vil det gennemsnitlige resultat være det samlede resultat delt med antal slag. Dette vil også kunne skrives som værdien af de enkelte slag gange sandsynligheden for at få dette slag.

$$\langle j \rangle = \sum_j j P(j) \quad (2.38)$$

Bemærk at gennemsnittet er skrevet med samme notation som forventningsværdien, det er bevidst, da det senere skal vise sig, at forventningsværdien er det gennemsnitlige resultat af en måling. Gennemsnittet er dog ikke alt, f.eks vil en tyvesidet terning give samme gennemsnitlige resultat som 3 sekssidede terninger. Mere generelt kan man finde gennemsnittet af en funktion. I terningsanalogien vil det svare til at hver side kan have et vilkårligt tal:

$$\langle f \rangle = \sum_j f(j) P(j) \quad (2.39)$$

Det er derfor interessant at vide, hvor meget man kan forvente et resultat at afvige fra gennemsnittet:

$$\Delta f = f(j) - \langle f \rangle \quad (2.40)$$

Nu er det oplagte spørgsmål: hvad er den gennemsnitlige afvigelse?

$$\langle \Delta f \rangle = \sum_j (f(j) - \langle f \rangle) P(j) = \sum_j f(j) P(j) - \langle f \rangle \sum_j P(j) = \langle f \rangle - \langle f \rangle = 0 \quad (2.41)$$

Det var ikke så interessant, men egentlig ikke overraskende at afvigelserne fra gennemsnittet på begge sider er lige stort. Det ville være oplagt at finde den gennemsnitlige absolute afvigelse, men det viser sig at

det er mere brugbart at tage gennemsnittet af kvadratet af afvigelsen. Dette kaldes usikkerheden. For at få en størrelse i de samme enheder bruges kvadratroden af usikkerheden kaldes standardafvigelsen skrevet σ .

$$\sigma_f^2 = \langle (\Delta f)^2 \rangle \quad (2.42)$$

Når vi regner på kvantemekaniske systemer er afvigelsen ikke så praktisk, så vi kan med fordel omskrive usikkerheden.

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \sum_j (\Delta f(j))^2 P(j) \\ &= \sum_j (f(j) - \langle f \rangle)^2 P(j) \\ &= \sum_j (f(j)^2 - 2f(j)\langle f \rangle + \langle f \rangle^2) P(j) \\ &= \sum_j f(j)^2 p(j) - 2\langle f \rangle \sum_j f(j)P(j) + \langle f \rangle^2 \sum_j P(j) \\ &= \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2 + \langle f \rangle^2 = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2 \end{aligned}$$

Dette giver os et mere praktisk udtryk for usikkerheden:

$$\sigma_f^2 = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2 \quad (2.43)$$

Går vi tilbage til kvantemekanikken er gennemsnittet det samme som forventningsværdien. Resten af udregningerne er tilsvarende, så ligning (2.43) gælder stadig.

Det vi kommer til nu er Heisenbrgs usikkerhedsrelation, som nok er en af de mest berømte resultater fra kvantemekanikken. Det er Heisenberg der siger, at det ikke er muligt på samme tid, at kende både en partikels position og hastighed. Spredningen på målingerne er givet ved denne ulighed:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.44)$$

Dette i sig selv havde været et fint resultat, men der er mere i usikkerhedsprincippet. Heisenberg kan give tilsvarende uligheder for *alle* par af observable. Vi vil nu se på to vilkårlige observable A og B . Som tidligere nævnt har alle observable en tilhørende operator, så vi har også operatorerne \hat{A} og \hat{B} . Usikkerheden vil her være givet ved ligning (2.42).

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 | \Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle \quad (2.45)$$

I det sidste skridt har den ene afvigelses operator fået lov til at virke på bølgefunktionen. En spidsfindighed er at hvis man bytter om på bølgefunktionerne i en braket svarer det til at kompleks konjugere det hele:

$$\langle \psi_1 | \hat{O} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{O} | \psi_1 \rangle^* \quad (2.46)$$

Siden A er en observabel vil forventningsværdien være reel. Hvis det ikke var tilfældet ville det være muligt at måle komplekse størrelser.

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) | (\hat{A} - \langle A \rangle) | \Psi \rangle = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \Psi \rangle = \langle f | f \rangle \quad (2.47)$$

Siden vi kommer til at bruge $(\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi$ en del fremover, er denne funktion blevet omdøbt til f . Vi kan lave en tilsvarende udregning for B . Lige som vi har f fra σ_A , vil vi her bruge $g = (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi$. Vi finder usikkerheden:

$$\sigma_B^2 = \langle \Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle)^2 | \Psi \rangle = \langle (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi \rangle = \langle g | g \rangle \quad (2.48)$$

Som vi så i afsnittet om repræsentation, kan man finde ud af hvor meget en egenfunktion udgjorde af en tilstand ((2.30)). Tilsvarende er det muligt at finde, i hvor stor grad to funktioner deler egenfunktioner som: $\langle f | g \rangle$. Det er ikke muligt at finde to funktioner der har mere tilfælles med hinanden end funktionen har med sig selv⁷. Det gør det muligt at opstille en ulighed:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2 \quad (2.49)$$

Her er $\langle f | g \rangle$ et komplekst tal. For alle komplekse tal z gælder følgende ulighed:

$$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 \geq Im(z) = \left(\frac{1}{2i}(z - z^*) \right)^2 \quad (2.50)$$

Så længe vi holder styr på krokodillenæbs symbolet, kan vi sætte denne ulighed ind i ligning (2.49). Her kan det igen udnyttes at ombytning af funktionerne i braketten svarer til kompleks konjugering.

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}(\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle) \right)^2 \quad (2.51)$$

Nu har f og g tjent deres formål, men vi bliver desværre nød til at arbejde en smule for at komme af med dem.

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)(\hat{B} - \langle B \rangle) | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B \rangle - \langle A \rangle \hat{B} + \langle A \rangle \langle B \rangle | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \hat{A}\hat{B} | \Psi \rangle - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A} \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B} \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

Den samme udregning kan laves for $\langle g | f \rangle$. Det giver:

$$\langle g | f \rangle = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

Det betyder at f og g delen af ligning (2.51) bliver:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle - \langle \hat{B}\hat{A} \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{B}\hat{A} \rangle \\ &= \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \end{aligned}$$

⁷ På mange måder minder $\langle f | g \rangle$ om prikproduktet, hvor der er en tilsvarende relation. Prikproduktet imellem to vektorer er vektorernes længde gange cosinus til deres inbyrdes vinkel. Så her gælder:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

Nu kan vi sætte dette ind i ligning (2.51), hvilket givers det generelle usikkerhedsprincip:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \quad (2.52)$$

Ved første øjekast kan det godt virke som et problem, at der er et i i denne ulighed, men heldigvis vil $\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle$ altid være rent imaginær, så i 'erne går ud med hinanden⁸. Siden vi startede med usikkerhedsrelationen imellem position og impuls (ligning (2.44)), ville det være dejligt, hvis vi kunne genskabe denne relation. Her husker vi tilbage til den kanoniske kommutator: (2.37):

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Hvilket giver relationen:

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i} i\hbar \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (2.53)$$

Siden usikkerheden altid er positiv giver det den relation, vi så til at starte med:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.44)$$

Det er værd at bemærke at Heisenberg ikke siger noget om usikkerheden i isolation. Det er muligt af have tilstande med $\sigma_x = 0$ eller $\sigma_p = 0$, men her er usikkerheden på den anden uendeligt stor.

Tilstande med $\sigma_A = 0$ er særligt interessante. Efter ligning (2.43) må de nødvendigvis opfylde:

$$\sigma_A = 0 \iff \langle A \rangle^2 = \langle (\hat{A})^2 \rangle \quad (2.54)$$

Dette sker kun for såkaldte egenfunktioner. En operators egenfunktioner er de funktioner, der hvis operatoren virker på en af disse, efterlader funktionen ganget med en skalar. Vi er allerede stødt på et par egenfunktioner, nemlig de stationære tilstande, der er egenfunktioner for Hamilton operatoren. En ekstra konsekvens af Heisenbergs usikkerhedsprincip er, at hvis to operatorer kommunuterer, vil det være muligt at finde funktioner, der er egenfunktioner for dem begge. Omvendt hvis de ikke kommunuterer er dette umuligt.

2.7 Den kvantemekaniske harmoniske oscillator

Både i klassisk mekanik og i kvantemekanikken er harmoniske oscillatorer et meget almindeligt fænomen. Et oplagt eksempel er en fjeder, der vil modvirke både stræk og klem med en kraft, der er proportional med længdeændringen.

$$F = -kx$$

Dette vil svare til et potentiale på formen:

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.55)$$

⁸ Dette skyldes at observable ikke bare er vilkårlige operatorer, men en særlig klasse af operatorer kaldet hermitiske. Præcis hvad det er har vi desværre ikke plads til at komme ind på, så lad os bare sige at de opfører sig paent.

I klassisk mekanik finder man, at det giver en harmonisk svingning⁹ med en vinkelfrekvens på $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Det viser sig at frekvenser er meget lette at måle, så man kan med fordel skrive potentialet med ω i stedet for k . Derudover vil de følgende udregninger blive pænere, hvis man erstatter v med $\frac{p}{m}$. Det giver en Hamiltonoperator på formen:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2\right) \quad (2.56)$$

Da vi regnede på den uendelige brønd, fandt vi løsningen ved at løse en anden ordens differentialligning. Det kunne vi også gøre her, men selv for dette relativt pæne potentiale, er det ikke helt trivielt. I stedet vil vi bruge en metode, der er baseret på operatorer. Formalismen er mere avanceret, men vil gøre udregningerne simplere. Havde \hat{p} og \hat{x} været tal, ville man have kunnet faktorisere Hamiltonoperatoren som to tals sum gange de samme to tals differens.

$$(u^2 + v^2) = (u + iv)(u - iv)$$

Problemet er, at denne regneregel ikke virker for ting der ikke kommuterer. Alligevel er de operatorer vi ville have fået meget nyttige. Let modifieret for at få enhedsløse operatorer er de:

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \quad (2.57)$$

$$\hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(+i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \quad (2.58)$$

Indekserne kan virke bagvendte, men vi vil senere se, at der er en god grund til dette. Produktet af de to operatorer er:

$$\hat{a}_+\hat{a}_- = \frac{1}{2\hbar\omega m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + im\omega(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}))$$

Her er det muligt at identificeres Hamiltonoperatoren og den kanoniske kommutatorrelation: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ (2.37).

$$\begin{aligned} \hat{a}_+\hat{a}_- &= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right) + \frac{i}{2\hbar}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} + \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] \\ &= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nu er det muligt at skrive Hamiltonoperatoren ud fra de nye operatorer:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right) \quad (2.59)$$

Den samme udregning kan udføres for $\hat{a}_-\hat{a}_+$. Denne udregning overlades til læseren.

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right) \quad (2.60)$$

⁹Beskrevet af sinus og cosinus funktioner

Nu når vi endelig til den tidsuafhængige Schrödingerligning. Med operatorer er den:

$$E\psi = \hat{H}\psi = \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- \psi + \frac{1}{2} \psi \right) \quad (2.61)$$

Indtil videre har vi kun flyttet rundt på operatorer og er ikke tættere på en løsning. Det ændrer sig nu. Vi starter med at antage, at vi allerede har en løsning ψ_n med energi E_n . Det er nu muligt at generere nye løsninger på formen: $\hat{a}_+ \psi_n$. Det gøres ved at vise, at $\hat{a}_+ \psi_n$ også er en løsning under vores antagelse.

$$\begin{aligned} \hat{H} \hat{a}_+ \psi_n &= \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- \hat{a}_+ + \frac{1}{2} \hat{a}_+ \right) \psi_n \\ &= \hbar\omega \hat{a}_+ \left(\hat{a}_- \hat{a}_+ + \frac{1}{2} \right) \psi_n \\ &= \hat{a}_+ (\hat{H} \psi_n + \hbar\omega \psi_n) \\ &= (E_n + \hbar\omega) \hat{a}_+ \psi_n \end{aligned} \quad (2.62)$$

Tilsvarende kan man vise, at $\hat{a}_- \psi_n$ også er en løsning med energi E_{n-1} . Det er således muligt at generere løsninger med stigende eller faldende energi i skridt af $\hbar\omega$. Der er dog et lille problem: grundtilstanden må ikke være mindre end potentialets minimum værdi. Der må altså være en løsning ψ_0 hvor $\hat{a}_- \psi_0$ ikke svarer til en fysisk løsning, men stadig er en matematisk løsning til Schrödingerligningen. Dette vil være opfyldt hvis:

$$\hat{a}_- \psi_0 = 0$$

Går vi tilbage og sætter ind, hvad \hat{a}_- står for (ligning (2.58)), ender vi med en førstegrads differentialligning:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}} (i\hat{p} + m\omega\hat{x})\psi_0 &= 0 \\ \frac{i}{\hbar} \hat{p}\psi_0 &= -\frac{m\omega}{\hbar} \hat{x}\psi_0 \\ \frac{d\psi_0}{dx} &= -\frac{m\omega}{\hbar} x\psi_0 \end{aligned}$$

For at løse differentialligningen betragtes infinitisimalerne i differentialkvotienten som separate variable. Det gør det muligt at finde en løsning ved at integrere.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_0} d\psi_0 &= -\frac{m\omega x}{\hbar} dx \\ \int \frac{1}{\psi_0} d\psi_0 &= -\frac{m\omega}{\hbar} \int x dx \\ \ln(\psi_0) &= -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + k \\ \psi_0 &= N \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \end{aligned}$$

Logaritmen fjernes ved at tage eksponentialet af begge sider. Dette ændrer integrationskonstanten k til normeringskonstanten $N = e^k$. Normeringen springes over her, og vi vil blot påstå at $N = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$. Det giver en bølgefunktion:

$$\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \exp\left(\frac{-m\omega x^2}{2\hbar}\right) \quad (2.63)$$

Når man husker at $\hat{a}_-\psi_0 = 0$ giver hæve/sænke operatorerne en meget let måde at finde energien for grundstilstanden:

$$\hat{H}\psi_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)\psi_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}_+(\hat{a}_-\psi_0) + \frac{1}{2}\psi_0\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0$$

Så energien af grundstilstanden er $\frac{\hbar\omega}{2}$. Dog bevarer hæve/sænke operatorerne ikke normalisering. Det viser sig at for at generere normaliserede bølgefunktioner er udtrykket:

$$\hat{a}_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1} \quad (2.64)$$

$$\hat{a}_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1} \quad (2.65)$$

Nu har vi en grundstilstand og kan bruge hæve/sænke operatorerne til at generere resten af af tilstandene.

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_+^n \psi_0(x) \quad \text{og} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.66)$$

n	E_n	ψ_n
0	$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$	$\psi_0 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
1	$E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$	$\psi_1 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}} \sqrt{2\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
2	$E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$	$\psi_2 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} (2\xi^2 - 1) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
3	$E_3 = \frac{7\hbar\omega}{2}$	$\psi_3 = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{3}} (2\xi^3 - 3\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$

Tabel 2.2: De første fire stationære tilstænde for den harmoniske oscillator. Her er $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ og $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x = \sqrt{\alpha}x$.

2.8 Fortolkninger af kvantemekanikken

Et kriterium for en god fysisk teori er, at den er i stand til at forudsige observationer. Her brillerer kvantemekanikken. Der er dog uenighed om, hvad udregningerne repræsenterer.

I løbet af dette kapitel har vi set på partiklernes position som ukendt indtil de observeres. I kvantemekanikken er en observation ikke begrenset til, at der er en person, der ser systemet. Mange kvantesystemer er mindre end bølgelængden af synligt lys, så de er umuligt at observere direkte. I stedet er en observation

i kvantemekanik enhver vekselvirkning med omgivelserne. Det kunne for eksempel være lys, der bliver absorberet af et atom.

Mange af de mystiske kvanteffekter bliver sat på spidsen i Københavnerfortolkningen. Mange fysikere, heriblandt Einstein har igennem tiden være utilfreds med det. Der er igennem årene blevet udviklet en del alternativer, hvor en partikels placering blot er ukendt i stedet for at være ubestemmelig indtil observation. Den nok mest kendte af disse er de Broglie-Bohm pilotbølge modellen. Her rider partiklen på en bølge, der på mange måder minder om bølgefunktionen.

Kapitel 3

Exoplaneter

3.1 Introduktion

Et af de spørgsmål, der nok altid har optaget menneskeheden er, om vi er alene, eller der er andre som os et sted. Engang var svaret ja - vi har mødt både neanderthalere og andre menneskearter gennem tiden. Men i alle områder, vi har undersøgt godt nok, kan vi ikke længere finde andre, der minder særligt meget om os selv mht. tankemåde og teknologi. Et andet spørgsmål, der altid har optaget os er, hvordan vi og verden omkring os opstod. Er der andre steder som dette? Vi har kigget mod stjernerne og undret os over, hvad der findes langt borte.

Nu har vi endelig teknikken til at undersøge disse spørgsmål mere i dybden ved at lede efter exoplaneter, som er planeter uden for Solsystemet. Indtil videre har fokus ligget på at detektere så mange planeter som muligt og karakterisere dem, hvilket er nemmest for de store og tunge, men i fremtiden vil vi blive bedre til at analysere de jordlignende planeter.

For at diskutere astrofysik, er det nyttigt at kende nogle begreber:

Luminositet eller lysstyrke er den totale energi E et objekt udsender i alle retninger per tid t .

$$L = \frac{dE}{dt} \quad (3.1)$$

Flux beskriver hvor meget af noget man opfanger over et bestemt areal - sagt med andre ord, hvor meget der strømmer igennem et areal. Ofte siger man bare flux, når man egentlig mener energiflux - altså hvor meget af kildens energi vi opfanger. Fluxen F måles i denne sammenhæng som energi E per tid t og areal A .

$$F = \frac{1}{A} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3.2)$$

Det svarer til hvor meget af luminositeten, man opfanger over et bestemt areal, fx. på Jorden. Hvis man har et bestemt areal at måle med, og flytter det længere væk fra kilden, bliver det ramt af færre fotoner, så

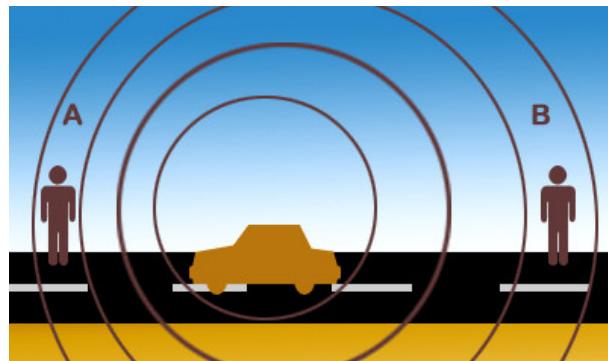
fluxen skal aftage. Fluxen følger

$$F = \frac{L}{4\pi D^2}, \quad (3.3)$$

hvor D er afstanden til objektet. Dette kaldes *Afstandskvadratloven*, da fluxen falder med kvadratet på afstanden. Så objekter, der er langt væk, ser vi meget svagt. Afstandskvadratloven ser sådan ud, fordi man antager at stjerner udstråler isotropt, det vil sige lige meget i alle retninger, hvorfor den målte flux i en afstand D fra kilden, er den fra kilden udsendt flux, over hvor stort et areal den har spredt sig over, hvilket er overfladen af en kugle.

Dopplerforskydning

Du kender nok til, at når en ambulance kører forbi, så lyder sirenens tone højere, når den nærmer sig, og dybere når den kører væk. Det skyldes et fænomen kaldet *Dopplerforskydning*. Det skyldes at lydbølgerne, eller mere præcist bølgens bølgelængde, skubbes sammen eller strækkes ud, afhængigt af hvilken hastighed de udsendes med i forhold til lytteren. Hvis en ambulance kører mod dig, og du står stille, vil du høre bølgerne sammenpresset. Men hvis du selv kører med samme hastighed foran ambulancen, så vil du høre dem på samme måde, som de bliver udsendt - altså på samme måde, som hvis både du og ambulancen står stille, da det er den relative hastighed, som er afgørende.



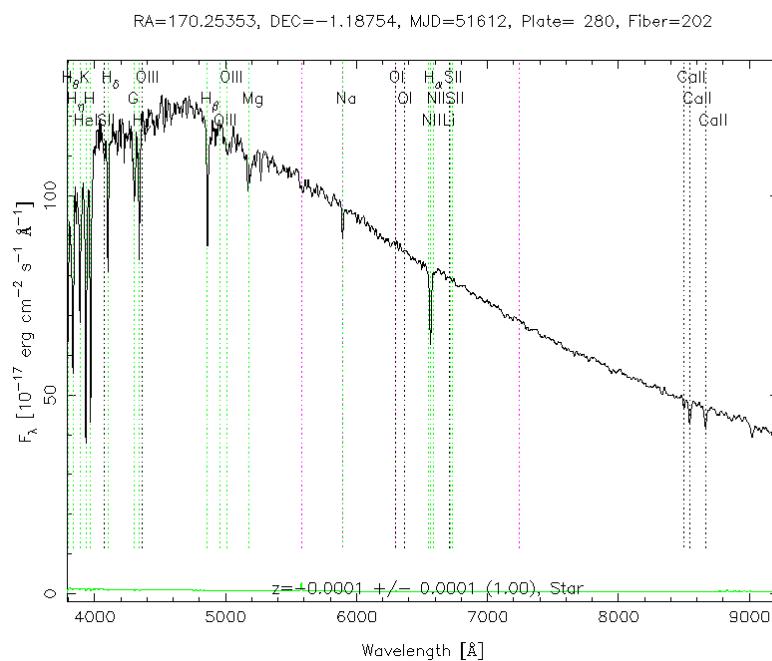
Figur 3.1: Dopplerforskydning af lyden fra en bil, der kører mod venstre. Person A vil høre en højere tone end person B, og personen i bilen vil høre noget et sted derimellem. Ringene viser et fast punkt på lydbølgerne.

Det samme sker for lys. Hvis en ambulance kører væk, vil både tonen blive dybere og lyset fra den en smule rødere, fordi bølgelængden bliver længere. Da rød svarer til lange bølgelængder og blå til korte (indenfor det synlige spektrum), så refererer rødforskydning til noget, som bevæger sig væk fra os og vice versa.

Bemærk dog, at selvom fotoner og lydbølger har højere energi ved korte bølgelængder, så mister de ikke energi ved Dopplerforskydning - der er bare sket et skift i perspektivet, man ser bølgerne fra. Fra bølgens eget synspunkt (hvis man følger den) har den samme bølgelængde og energi hele tiden. På figur 3.1 ses hvordan bølgerne "presses sammen" foran en kilde der bevæger sig, når man ser det fra et andet perspektiv.

Spektre

Et spektrum viser intensiteten af lys ved forskellige bølgelængder eller frekvenser, fx som på figur 3.2. Om bølger gælder det, at $v = f\lambda$, hvor v er bølgens fart, f er bølgens frekvens¹ og λ er bølgens bølgelængde. Lys bevæger sig med lysets fart, der afhænger af det medie lyset udbredes i, men det vigtige er, at den er kendt, hvorfor man simpelt kan regne f ud fra λ og omvendt. Pointen med dette er, at den eneste forskel på om et spektrum viser bølgelængde eller frekvens, er hvordan tallene skal fortolkes (fx vil spektret være spejlvendt, da de er omvendt proportionale).²



Figur 3.2: Et typisk stjernespektrum. y-aksen skal forstås som intensitet, mens der på x-aksen er bølgelængde i Ångstrøm (Å) ($1 \text{ \AA} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$). Dykkene i intensitet er angivet med en overgang tilhørende et grundstof, som er identificeret i stjernens atmosfære.

I kapitlet Kvantemekanik blev tanken om kvantiserede energiniveauer introduceret, og denne teori videreføres i kapitlet Atom- og Molekylefysik til atomer. Eksempelvis er et hydrogenatom i et laboratorium på Jorden og et hydrogenatom i en stjerne langt væk i sidste ende samme grundstof, hvilket betyder, at de opfører sig ens, hvis de er udsat for samme betingelser. Det betyder, at man kan bruge sin viden om grundstofferne her på Jorden til at få viden om f.eks. stjerner i universet.

Lidt oversimplificeret kan det siges, at stjerner er så varme og tætte i kernen, at atomkerner har energi nok

¹Et andet almindeligt brugt symbol er det græske bogstav ν , men her benyttes f , da det ikke minder så meget om det latinske bogstav v , der bruges om fart.

²For at gøre forvirringen total anvendes $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ også på nogle områder. Alt dette er traditioner og konventioner, der varierer fra område til område.

til at kunne overkomme deres indbyrdes elektriske frastødning.³ Når atomkernerne kolliderer, fusionerer de til en tungere kerne, hvilket frigiver energi. Dette kan lade sig gøre, fordi den specielle relativitetsteori siger, at masse og energi i virkeligheden er to sider af samme sag; $E = mc^2$. Denne energi kan danne lys, som passerer ud gennem stjernen, men det sker ikke uhindret. Der er langt fra stjernens centrum til dens overflade, og lys og atomer påvirker hinanden. Bliver et atom ramt af en foton med lige præcis nok energi til at excitere en elektron fra en tilstand til en anden, vil denne elektron skifte energiniveau. På et senere tidspunkt henfalder elektronen til en lavere energitilstand under udsendelse af den overskydende energi i form af en foton. Denne fotons energi er netop karakteristisk for overgangen mellem de to omtalte energiniveauer. I en stjerne er der mange atomer udenfor kernen, så når fotonerne skal igennem det, vil rigtig mange af de mulige excitationer ske. Så når lyset passerer igennem vil de bølgelængder der lige passer med energiforskellene absorberes, og derfor kan vi se de mangler, når vi kigger på stjernen. Ved at sammenligne med kendte energiforskelle fra forskellige grundstoffer og kemiske forbindelser i laboratoriet, kan vi bestemme hvilke stoffer, der har påvirket et spektrum, og hvor meget af hver.

En fotons energi kan af ligning (2.2) udtrykkes som $E = hc/\lambda$, hvor λ er fotonens bølgelængde, h er Plancks konstant, og c er lysets fart. Fordi energiforskellene mellem elektronbaner i et atom er helt specifikke, er de tilhørende bølgelængder det også. Da vi kender grundstofferne godt, ved vi hvilke energiniveauforskelle, der er karakteristiske for hvert atom, så vi også kan finde dem i spektret fra en stjerne. Når vi kan genkende energiforskellene fra et bestemt grundstof, kan vi dermed finde ud af hvad stjernens overflade består af, se figur 3.2. Kigger man grundigt på denne figur ser man, at hver absorptionslinje, hvilket man kalder dykkene, har en udbredelse - de har ikke kun én bestemt bølgelængde. Dette skyldes en kombination af mange ting, hvoraf to af dem er Dopplerforskydningen og Heisenbergs usikkerhedsrelation⁴

$$\sigma_E^2 \sigma_t^2 \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.4)$$

Pga. usikkerhedsrelationen har energien en usikkerhed, så den ikke nødvendigvis er, præcis hvad vi ellers forventer. Derudover står atomer ikke stille i stjernen, men bevæger sig i alle mulige retninger, med vidt forskellige hastigheder og energier.⁵ Effekten af dette er, at atomerne er i bevægelse, når de udsender fotonen, der senere observeres på Jorden, og Dopplereffekten er netop en forskydning af bølgelængderne, som følge af at kilden bevæger sig. Det at atomerne bevæger sig i alle mulige retninger, gør at Dopplerforskydningen trækker i alle mulige retninger, hvilket resulterer i en udbredning af linjen frem for et skift i dens placering. Jo varmere en gas er, desto hurtigere bevæger gassens atomer sig. Det vil sige at absorptionslinjerne fra en varm stjerne er bredere end dem fra en kold stjerne. Yderligere har stjernens temperatur også indflydelse på dens grundstofsammensætning, da nogle stjerner kan være så

³Dette ville ikke være muligt, hvis det ikke var for kvantetunnelering. Kvantetunnelering er kort sagt, at partikler kan passere gennem en energibarriere for at komme hen til et område med lav potentiel energi. Dette svarer til at en bold kan komme forbi en meget stor bakke, som den egentlig ikke har nok energi til, for at komme hen på den anden side af bakken, hvor der er en dyb dal bolden gerne vil ned i. Dette kan jo ikke lade sig gøre for en bold, men det er essentielt set det der sker inde i stjerner hele tiden.

⁴Den mest kendte af disse er relationen mellem sted og impuls, men der eksisterer en tilsvarende tid og energi.

⁵Partikler i en gas følger approksimativt Maxwell-Boltzmannfordelingen, hvilket den interesserede læser kan finde andet materiale om.

varme, at bestemte grundstoffer ikke er stabile. I forhold til exoplaneter er stjernens sammensætning blandt andet interessant, fordi den påvirker sandsynligheden for forskellige typer af planeter.

3.2 Detektionsmetoder

Der er mange måder at detektere exoplaneter på, men fælles for dem alle er, at de involverer lys fra enten planeten selv eller en anden lyskilde. At opdage planeter kræver derfor en forståelse af lys, hvordan det opstår og påvirkes af sine omgivelser. Det er dog muligt at få en god forståelse af de fysiske fænomener, der ligger til grund for disse metoder, uden en dybdegående forståelse af de teorier, der detaljeret beskriver fænomenerne. Eksempelvis kan gravitationslinsemетодen, som beskrevet senere, sagtens forstås overfladisk uden kendskab til generel relativitetsteori, hvis man er villig til at acceptere, at lys er påvirket af tyngdekraften analogt til objekter med masse. Formålet med dette afsnit er derfor at give en fænomenologisk og forhåbentlig intuitiv forståelse af, hvordan vi mennesker på Jorden kan opdage planeter uden for Solsystemet.⁶

Direkte observation

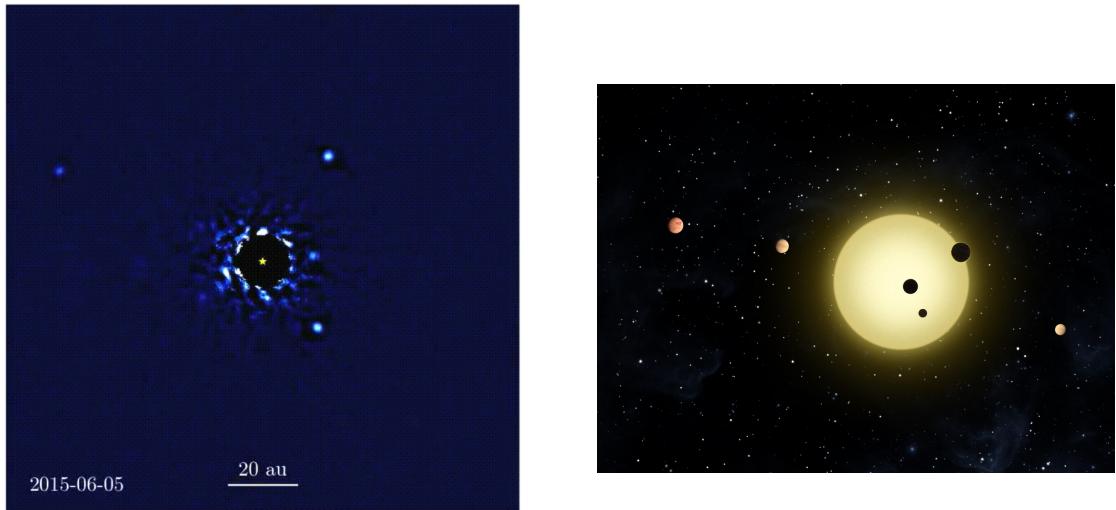
Den mest nærliggende metode er nok at pege sit teleskop mod et stjernesystem, og direkte se om noget ligner en planet. Dette er dog svært i praksis. Problemet er at exoplaneter fylder meget lidt på himlen, når de er så langt væk, så den eneste måde vi ville kunne se dem, var hvis de lyste. Men det er faktisk muligt. For hvis vi kigger i den infrarøde del af spektret, så lyser Solen fx kun 100 gange mere end Jupiter. Men hvilke planeter er så lettest at se?

Svaret er, at jo større en planet er, des mere lys vil den udsende. Derfor er planeterne detekteret ved direkte observation så store, at de er på grænsen til at være brune dværgstjerner. Lysstyrken bliver dog aldrig særlig høj sammenlignet med stjerner. Dette betyder, at metoden kun virker for gaskæmper, der kredser meget langt fra deres stjerner. Store planeter lyser mere, og afstanden gør at lyset kan skelnes fra stjernens. Vi kan kun se dem der kredser om stjerner tæt på vores eget solsystem, så fluxen ikke er faldet for meget med afstanden, for ligesom alt andet lys, aftager fluxen her som $F \propto D^{-2}$ ifølge afstandskvadratloven i lancing (3.3). Et eksempel på planeter opdaget ved direkte observation, er dem om stjernen HR 8799 på figur 3.3a. Her har man blokeret selve stjernens lys, så det ikke blænder for den smule infrarødt lys, vi modtager fra planeterne omkring den.

Transitmetoden

Den metode, vi har fundet flest exoplaneter med, er transitmetoden. Essensen af metoden er, at når en planet passerer ind foran en stjerne, som i den kunstneriske fortolkning på figur 3.3b, så falder stjernens lysstyrke. Der sker en lille formørkelse, ligesom det bliver mørkt på Jorden, når Månen formørker Solen. Forskellen er, at vi er så langt væk fra disse planeter, at de modsat Månen ikke kan dække hele stjernen - uanset hvad størrelse planeten har (så længe den er mindre end stjernen). Det ses af figur 3.4. Noget der er

⁶Til dette formål kan der med fordel henvises til nogle særdeles glimerende animationer på <https://exoplanets.nasa.gov/5-ways-to-find-a-planet/>.

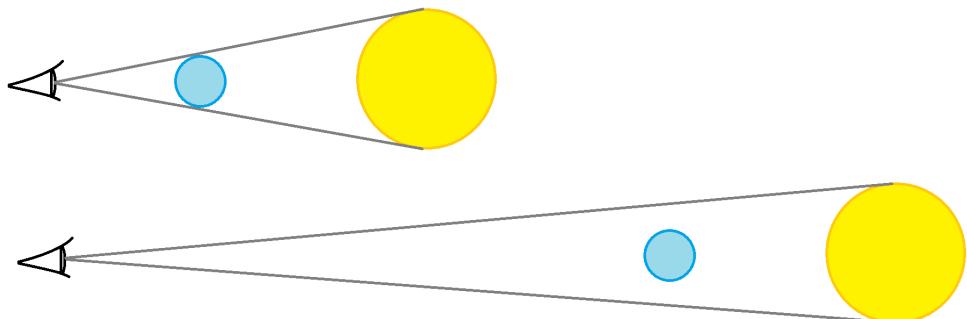


(a) Direkte observation af mindst 4 store exoplaneter om stjernen HR 8799. AU står for astronomical unit og er afstanden fra Jorden til Solen. Til sammenligning er Jupiter 5 AU fra Solen.

(b) Kunstnerisk afbildning af stjernen Kepler 11 med planeter i transit.

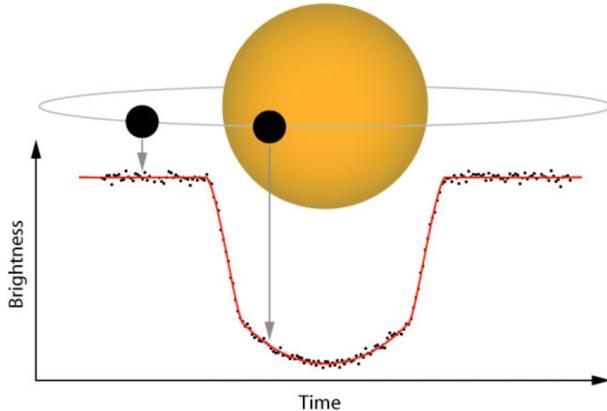
Figur 3.3: Til venstre ses en direkte observation af exoplaneter og til højre en illustration af transitmetoden, hvor planeter skygger for stjernen.

tæt på kan skygge for en stor del af himlen, mens noget langt væk skal være større for at skygge for den samme vinkel. Alle andre stjerner end Solen er ca. uendeligt langt væk (mindst 4 lysår), så lyset fra hver ende af stjernen rammer os stort set平行t. Deres planeter er også ca. uendeligt langt fra os, og derfor skal planeten være (næsten) på størrelsen med stjernen, hvis man skulle få en total formørkelse.



Figur 3.4: Illustration af at jo længere man er fra stjernen, des mindre afgørende er exoplanetens afstand til sin stjerne for hvor meget af lyset den dækker

Dette medfører også at planetens afstand til sin stjerne faktisk ikke har betydning for, hvor stor en formørkelse vi ser. Hvis lyset fra alle dele af stjernen flyver parallelt for at ramme os, så handler det kun om, hvor stor radius planeten har i forhold til stjernen. Antaget at lyset fra planeten er tæt på 0, er dybden af passagen



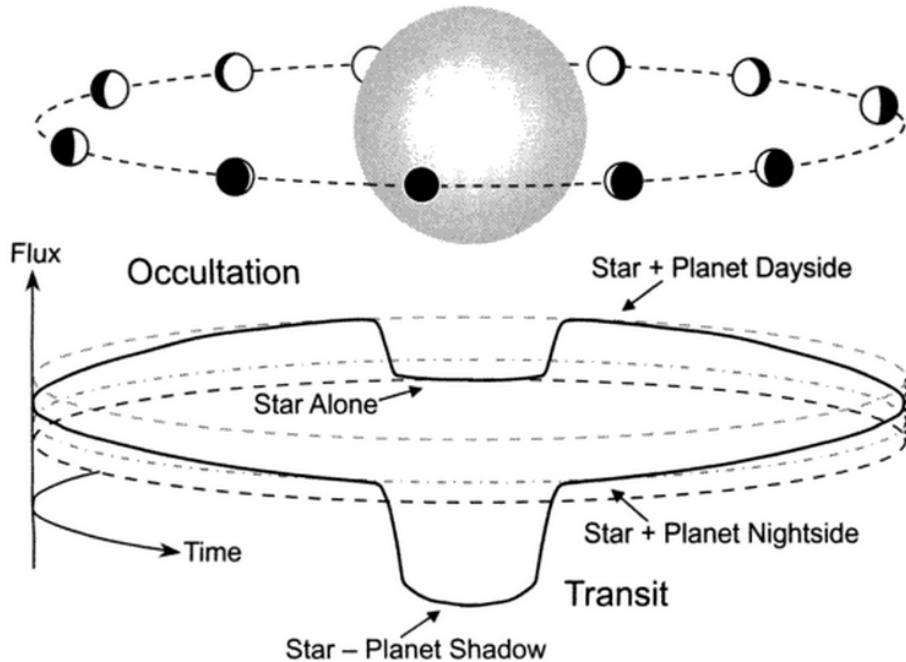
Figur 3.5: Som planeten bevæger sig ind foran stjernen, skærmer den for mere af dens lys. På grafen vises luminositet som funktion af tid.

$$\frac{\Delta L}{L_\star} = \left(\frac{R_p}{R_\star} \right)^2 \quad (3.5)$$

Luminositeten af stjernen L_\star kan vi nemt finde, da den hænger sammen med hvordan dens spektrum ser ud. ΔL er hvor meget lysstyrken falder under et transit, R_p er planetens radius og R_\star er stjernens radius. Så hvis vi kender stjernens egenskaber og mäter dybdet af transittet, er planetens radius den eneste ubekendte, som vi derfor kan isolere i ligningen og beregne. Metoden er selvfølgelig begrænset af, at stjernesystemet skal have en vinkel i forhold til os, hvor planetens bane krydser stjernen. Planeter der ikke opfylder dette, må vi detektere med andre metoder. Fra Jorden kan vi måle fluxen fra en stjerne, så ved at gøre dette over tid, kan vi se om der er variationer, som indikerer tilstedeværelsen af en eller flere planeter. Man plotter en lyskurve med flux eller luminositet (ved at korrigere fluxen for afstanden) som funktion af tid, og ser efter mønstre i dette, som på figur 3.5. Når planeten først passerer ind over stjernen, ser vi et stejlt fald i lyskurven. Hældningen afhænger af planetens radius, da det for en stor planet vil tage længere tid før hele planeten er inde over stjernen. Derefter får vi en buet form i bunden af lyskurven, fordi stjernen lyser kraftigere i midten end ude i siden. Når planeten dækker stjernens midte, dækker den derfor en større andel af stjernens totale lys, end den ville, hvis den var ude i kanten af stjernen. Når planeten passerer væk fra stjernen igen, ser vi det modsatte mønster.

Det er dog ikke det eneste interessante tidsrum. Når planeten ikke er ved at formørke stjernen, vil den nemlig stadig sende noget af dens lys i retning mod Jorden, og dermed øge lysstyrken. Dette sker langsomt mens planeten bevæger sig om mod bagsiden af stjernen, hvor mere af mere af dens lys vil reflekteres - ligesom Månenes faser ændrer sig som man nærmer sig fuldmåne. Men når planeten er direkte bag stjernen, får vi en planetformørkelse, hvor stjernen blokerer for lyset fra planeten, så der falder lyskurven til det niveau, der kun er genereret af stjernen selv. Dette kaldes det sekundære transit. På figur 3.6 ses en fuld lyskurve. Tidsaksen er elliptisk, så den følger hvordan planeten bevæger sig set fra Jorden. De stippled

linjer viser, hvordan fluxen ville være, hvis planeten og stjernen ikke påvirkede hinanden, mens den solide linje angiver den reelle lyskurve. Bemærk at selv natsiden af planeten vil bidrage med en smule lys.



Figur 3.6: Lyskurven for et helt kredsløb med både primært og sekundært transit. Bemærk at tidensaksen er elliptisk, og fluxen er konstant hvis man holder en konstant højde over tidsaksen. Kilde: Aldaron, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7274700>

Ud fra transitmetoden kan man få mange oplysninger om planeten og dens stjernesystem:

- **Planetens radius** kan fås fra hvor stor en del af stjernens lys der dækkes, men hænger også sammen med hældningen på lyskurven mens hele planetens overflade ikke dækker stjernen. Beregnet fra transittets dybde i enheder af stjernens luminositet $\frac{\Delta L}{L_\star}$ får man

$$R_p = R_\star \sqrt{\frac{\Delta L}{L_\star}} \quad (3.6)$$

- **Inklinationsvinklen**, som er planetbanens hældning i forhold til os, kan vi også finde. Hvis planeten passerer ude i kanten af stjernen vil passagen nemlig tage kortere tid og lyskurvens form ændres.
- **Perioden** (dvs. årets længde for planeten) samt planetens **afstand** til stjernen hænger sammen ifølge Keplers 3. lov, hvis man kan estimere massen af systemet. De kan bestemmes ved at vente og se, hvornår dykket i lysstyrken vender tilbage, som følge af at planeten har været hele vejen rundt. Det øger desuden sikkerheden af, at vi virkelig har fundet en planet, jo flere gange signalet vender tilbage, da dyk i intensitet kan skyldes mange andre ting også.

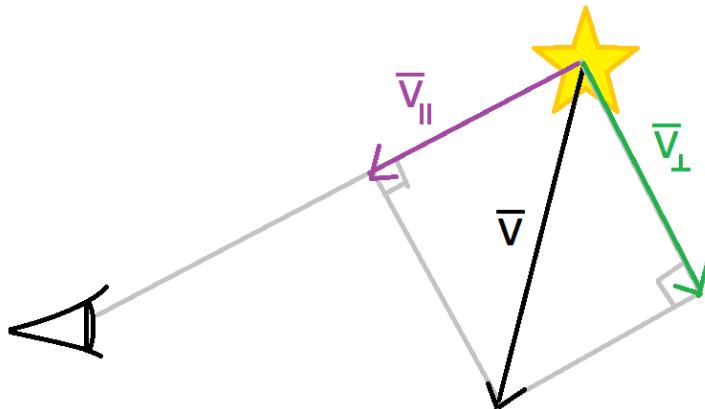
- **Temperaturen** af planeten kan fås gennem det sekundære transit. Når planeten er i sekundært transit, måler vi kun stjernens lys og kan finde dens spektrum. Når planeten så er lige ved siden af stjernen og reflekterer mest muligt, kan vi tage et spektrum, som vil være summen af spektret fra planeten og det fra stjernen. Ved så at trække stjernens spektrum fra, får vi planetens spektrum. Hvor meget lys vi får fra den, kan afsløre dens temperatur.
- **Atmosfæresammensætningen** er rigtig interessant, hvis vi vil vide om der er liv på planeten, da fx oxygen er en god biomarkør. Den kan vi både se gennem planetens spektrum fra det sekundære transit, og gennem hvordan noget af stjernens lys kan blive absorberet under det primære transit. Her vil en del af det nemlig passere igennem atmosfæren. Dette uddybes i afsnit 3.3.
- **Solpletter** på stjernen kan også måles. Hvis planeten passerer henover en solplet, vil den kortvarigt skærme for en mindre del af stjernens lys, så der kommer et bump opad på lyskurven.
- **Planetens rotation** i forhold til stjernen kan bestemmes ved at se på, hvornår hvilke dele af spektret blokeres. Dette vil vi ikke komme nærmere ind på her, men det kaldes Rossiter-McLaughlin-effekten og viser overraskende at, op til 25 % af planeter af typen "Hot Jupiters" drejer modsat deres stjerne.

Endvidere kan man opdage ekstra planeter indirekte, hvis man ser at transitplaneterne opfører sig, som om en ekstra planet hiver i dem. Vi kan altså opnå utrolig meget viden ud fra det lys, vi modtager fra et stjernesystem, og vi ser, at karakteriseringen af exoplaneter er meget afhængigt af vores forståelse af stjerner.

Radialhastighedsmetoden

Radialhastighedsmetoden er en anden effektiv metode. Radialhastighed er den del af en hastighedsvektor der peger mod observatøren, også kaldet den radielle komponent, som illustreret på figur 3.7. Det er derfor et mål for, hvor meget noget bevæger i vores retning. Hvor hurtigt det kommer tættere på eller længere væk fra os, selv hvis det i virkeligheden ikke bevæger sig direkte mod os. Grunden til at vi bruger radialhastigheden er, at den er nem at måle, og fra den kan man opnå information om:

- **Perioden** hænger sammen med hvor ofte Dopplerforskydningen svinger mellem rødforskydning og blåforskydning.
- **Den radielle hastighed** af stjernen og planeten i deres fælles kredsløb kan godt findes, men den totale hastighed kræver andre metoder.
- **Massen** kan bestemmes, hvis vi kender stjernens masse, periode og radielle hastighed. Det er dog $M_p \sin(i)$ man finder, så uden at kende inklinationsvinklen i har man kun en nedre grænse, da $\sin(i)$ kan være mellem 0 og 1. Men det plejer at passe inden for en faktor 2.
- **Densitet** kan man beregne ud fra massen og radius ved $\rho = \frac{M}{4/3\pi R^3}$, hvis vi også kender radius fra at have observeret planeten med transitmetoden. Denne densitet er et gennemsnit over hele planeten, der her er antaget sfærisk.



Figur 3.7: Illustration af en stjernes hastighed i forhold til en observatør. Den sorte pil angiver den totale hastighed, den grønne er den tangentIELLE hastighed, og den lilla er den radielle hastighed.

- **Materialet** kan bestemmes fra densiteten. Dette gøres meget groft, men nogle materialer sætter øvre og nedre grænser på densiteten, og vi kan sammenligne med kendte planeter med lignende densiteter.

Radialhastighedsmetoden udnytter at planeten har masse, hvorfor både stjernen og planeten bevæger sig om et fælles massemidtpunkt. Eftersom stjernen er meget tungere end planeten, vil det resultere i at planeten bevæger sig meget mere end stjernen, og massemidtpunktet kan befinde sig inde i stjernen. Dette kan ses ud fra vægtstangsprincipippet

$$M_p r_p = M_\star r_\star \quad (3.7)$$

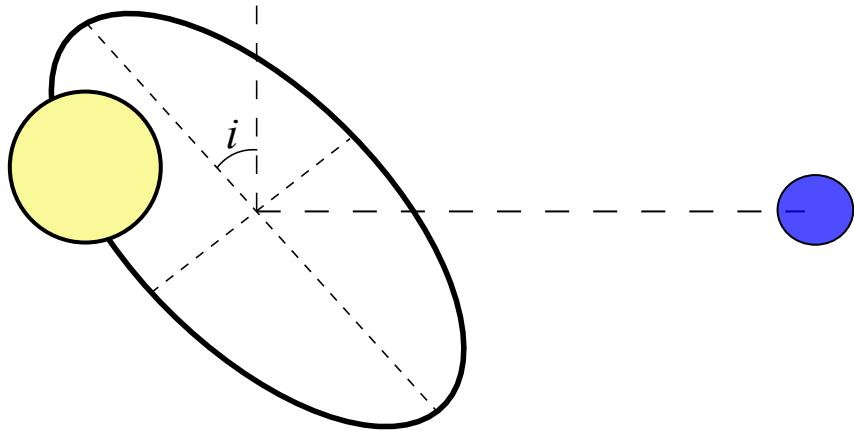
hvor M_p og r_p er hhv. planetens masse og afstand til stjernen og planetens fælles massemidtpunkt, og ligeså for stjernen. For kontekstens skyld kan vores Solsystem nogelunde approksimeres til kun at bestå af Solen og Jupiter, hvorfor afstanden fra Solens centrum til solsystemets massemidtpunkt, i solradier, er

$$r_\odot = \frac{M_J r_J}{M_\odot} = 1,07 R_\odot, \quad (3.8)$$

hvor subscriptet \odot indikerer, at det er en af Solens egenskaber.⁷ Det ses altså, at Solen roterer om et punkt lidt uden for dens overflade, og det kan derfor konkluderes at Solen bevæger sig, men ikke ret meget ift. planeterne omkring den.

Stjernens bevægelse kan dog være nok til, at det kan ses fra Jorden. Vi har svært ved at observere stjernens bevægelse i andre retninger en den radielle, så stjernen ser ud som om den svinger skiftevis mod os og væk fra os. Lys er elektromagnetiske bølger og påvirkes derfor af Dopplerforskydning som beskrevet i sektion 3.1. Dopplereffekten gør det at hele spektret flyttes, og det betyder, at stjernes hastighed kan bestemmes ved at finde ud af, hvor meget spektret skal "flyttes" for at spektrallinjerne falder tilbage til den form det ville have, hvis det ikke var blevet Dopplerforskudt.

⁷Jorden kan tilsvarende angives ved subscriptet \oplus .



Figur 3.8: Størkt fortegnet illustration af situationen for radialhastighedsmetoden. Den hastighed vi kan bestemme på Jorden ud fra Dopplerforskydningen er en radiell bevægelse i samme plan som vi ser stjernen, dvs. langs med den stiplede linje fra Jorden. Stjernen kan dog også bevæge sig i de to andre dimensioner, som ikke kan "ses" fra Jorden. Den samlede fart afhænger derfor af inklinationsvinklen i , som er vinklen mellem den plan stjernen bevæger sig i og synslinjen til stjernen fra Jorden.

Estimat af planetens masse fra radialhastighedsmetoden

Planetens masse og afstand til sin stjerne er helt essentielle parametre, så dem vil vi forsøge at bestemme med udgangspunkt i Keplers 3. lov for to-legemesystemets fælles bevægelse

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_p + M_\star)} \quad (3.9)$$

hvor P er stjernen og planetens fælles periode, G er Newtons gravitationskonstant, r er afstanden mellem dem, og det kan også udtrykkes som summen af afstandenene fra hhv. stjernen og planeten til deres fælles massemidtpunkt. Antager vi nu, at både planeten og stjernen er i jævn cirkelbevægelse omkring deres fælles massemidtpunkt, kan vi anvende ligning 3.7 og få

$$r = r_\star + r_p = r_\star + \frac{M_\star r_\star}{M_p} \quad (3.10)$$

Det er dog afstanden i tredje, der skal bruges til Keplers 3. lov, som så det opskriver vi

$$r^3 = r_\star^3 \left(1 + \frac{M_\star}{M_p}\right)^3 = r_\star^3 \left(\frac{M_\star + M_p}{M_p}\right)^3 \quad (3.11)$$

Antagelsen om jævn cirkelbevægelse er nødvendig for at opnå et simpelt udtryk for planetens masse, selvom den ikke altid er lige god, men dog tilstrækkelig til at få en idé om størrelsen.⁸

Perioden er den tid det tager et objekt at bevæge sig en hel omgang om sit rotationspunkt, hvilket også kan

⁸Det er en generel ting i fysik at jo mere præcist vi forsøger at beskrive verden desto mere kompliceret bliver det, og at vi derfor hurtigt bliver nødt til at approksimere, hvilket specielt ses i kapitlerne om analytisk mekanik og atom- og molekylefysik.

udtrykkes som forholdet mellem den tilbagelagte afstand og hastigheden. For stjernen bliver det derfor (antaget cirkelbevægelse)

$$P_\star = \frac{2\pi r_\star}{v} \quad (3.12)$$

hvor v er stjernens samlede fart. Problemet er bare, at med Dopplerforskydning kan vi kun se farten parallelt med vores synslinje dvs. den radielle hastighed $v_{||}$. Hvis stjernen ikke roterer i samme plan som vi ser den fra, er der en hastighedskomponent vi ikke får målt, se figur 3.8. Fra denne figur ses det, at vi vha. trigonometri kan udtrykke den observerede hastighed $v_{||}$ som

$$v_{||} = v \sin(i), \quad (3.13)$$

hvor i er inklinationsvinklen og v er stjernens samlede fart. Herfra skiftes notationen, som indikeret ved det første lighedstegn ovenfor, da det er simplere at skrive. Herved bliver perioden

$$P_\star = \frac{2\pi r_\star \sin(i)}{v_{||}} \quad (3.14)$$

Kombineres dette med Keplers 3. lov, ligning (3.9), fås

$$\frac{4\pi^2}{G(M_p + M_\star)} = \frac{P_\star^2}{r^3} = \frac{P_\star^3}{P_\star r^3} = P_\star^3 (P_\star r^3)^{-1} = \left(\frac{2\pi r_\star \sin(i)}{v_{||}} \right)^3 (P_\star r^3)^{-1} \quad (3.15)$$

Tricket med at forlænge brøken med perioden kan virke uintuitivt, men det tillader os at benytte ligning (3.11) således

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} &= 2\pi \sin^3(i) \left[v_{||}^3 P_\star \frac{(M_\star + M_p)^2}{M_p^3} \right]^{-1} \\ \implies M_p^3 \sin^3 i &= \frac{P_\star v_{||}^3 (M_\star + M_p)^2}{2\pi G} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Det virker som om der sker en hel masse her, men i virkeligheden er der ikke sket andet, end indsættelsen af ligning (3.11) og en efterfølgende reduktion af ligningen til en nogenlunde på form. Dette opfordres læseren til at tjekke efter.

Stjernen vil ofte være meget tungere end planeten, hvorfor kan være en rimelig antagelse, at summen af de to masser bare er stjernens masse, $M_\star + M_p \approx M_\star$, hvorved følgende opnås

$$M_p \sin(i) \approx v_{||} \left(\frac{P_\star M_\star^2}{2\pi G} \right)^{1/3} \quad (3.17)$$

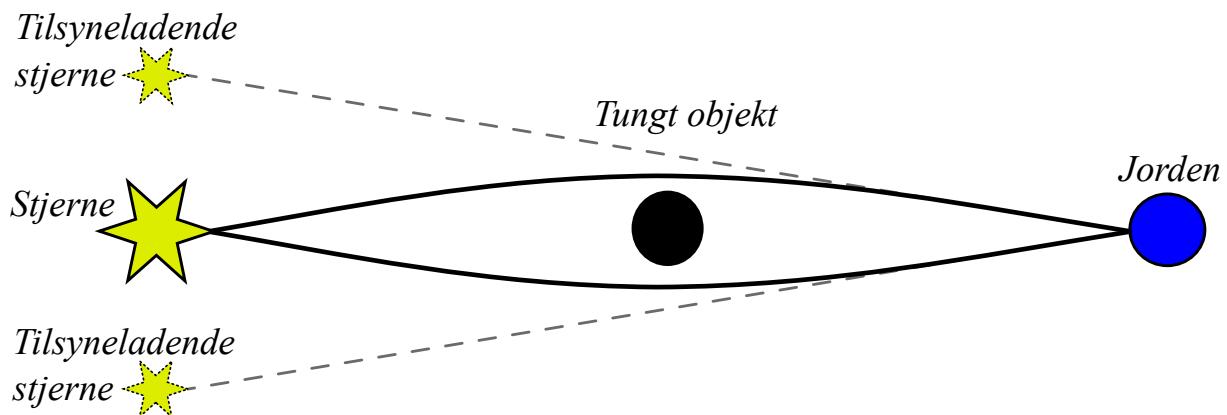
Da udtrykket afhænger af i , kræver dette, at i kan bestemmes på andre måder. Det er en klar svaghed ved metoden, da i kan være svær at bestemme. Men man får en nedre grænse for massen. Derudover er radialhastighedsmetoden selektiv over for tunge planeter på tæt stjernen, da $v_{||}$ må være stor nok til at vi kan se, hvordan den trækker i stjernen.

Astrometri

Udfordringen ved radialhastighedsmetoden er, at vi netop kun mÅler den radielle komponent af hastigheden, og ikke kender den fulde version. For at metoden kan virke optimalt, skal $\sin(i)$ helst vÅre så stor som muligt, da Dopplerforskydningen sÅ er stÅrst (og man fÅr et stÅrst muligt minimum for massen). Er $\sin(i)$ meget lille, svarer det til at se systemet enten oppefra eller nedefra. SÅ bliver Dopplerforskydningen relativt lille, og radialhastighedsmetoden bliver svÅr at bruge. Men planeten vil stadig hive i stjernen langs andre akser - vinkelret pÅ vores synsfelt. Teknisk set kan denne bevægelse ses, og kan dette gøres konsistent nok, er det muligt at bruge det til at detektere planeten i bane om stjernen. Stjerner er dog sÅ langt væk, at selvom de bevæger sig meget, sÅ ser bevægelsen lille ud herfra, og det kræver meget store teleskoper med meget god opløsning.

Med astrometri kan vi opnÅ information om

- **Inklinationsvinklen** af systemet.
- **Massen** kan bestemmes, lidt parallelt til hvordan det gøres for radialhastighedsmetoden.
- Kan inklinationsvinklen bestemmes, samtidig med at der er data, som kan bruges til radialhastighedsmetoden, bliver det muligt at bruge denne til at bestemme fx massen med høj præcision.
- I kombination med direkte observation af planeten kan planetens banebevægelse beskrives med høj præcision.



Figur 3.9: Lys udsendt fra en fjerntliggende lyskilde afbøjes af tyngdefeltet fra objektet i midten. Som de grå stipede linjer indikerer ser det ud til at der skulle vÅre to mindre identiske stjerner, frem for én stÅrre, nÅr de ses pÅ Jorden.

Gravitationslinsemетодen

Klassisk set er lys masseløse elektromagnetiske bølger, der ikke påvirkes af tyngdekraften. Det falder dog ud af den specielle relativitetsteori, at energi og masse er to sider af samme sag, og da lys har energi, så påvirkes det også af tyngdekraften. Det bevæger sig stadig i lige linjer, men vil se bøjet ud, fordi

tyngdekraften ændrer på, hvad en lige linje er - det får selve rummet til at krumme, som beskrevet i generel relativitetsteori. Denne effekt er dog lille nok til, at den klassiske beskrivelse holder i mange situationer, hvorfor den klassiske beskrivelse ikke altid bør forkastes. Astrofysiske objekter kan dog være så tunge, at effekter af rumtidens krumning observeres. Dette ses blandt andet ved eksistensen af det, som kaldes *gravitationelle linser*. En linse spreder eller fokuserer lys, hvilket uddybes i kapitel 6. En gravitationel linse virker essentielt set på samme måde, som en almindelig konveks linse, da gravitation kun er tilstrækende.⁹ I figur 3.9 ses en illustration af princippet i en gravitationel linse, hvor lyset fra den bagvedliggende kilde fokuseres omkring et tungt objekt. Det medfører at vi modtager mere lys, end hvis det midterste legeme ikke havde været der, og at lyskildens position på himlen bliver forskudt, forvrænget og måske splittet til flere versioner forskellige steder. Hvis objektet i midten bevæger sig, så ændres fluxen på Jorden sig markant. På denne måde kan tunge objekter, som ikke selv udsender nok lys, til at vi kan se dem, detekteres på Jorden. Hvis det midterste objekt er en stjerne med en tilhørende planet, vil der være et tidspunkt, hvor planetens position får fluxen fra den fjerne stjerne til i "kort" tid at øges og falde igen. Så hvis man plotter fluxen på en lyskurve, vil det give et lille peak. Hvis dette peak kan karakteriseres ud fra flere målinger, og der er samme effekt alle stedet, så er det muligt at konkludere, at en ny planet er fundet.

Ud fra gravitationslinsemетодen, hvor det afbøjende objekt er et stjernesystem, kan man opnå information om

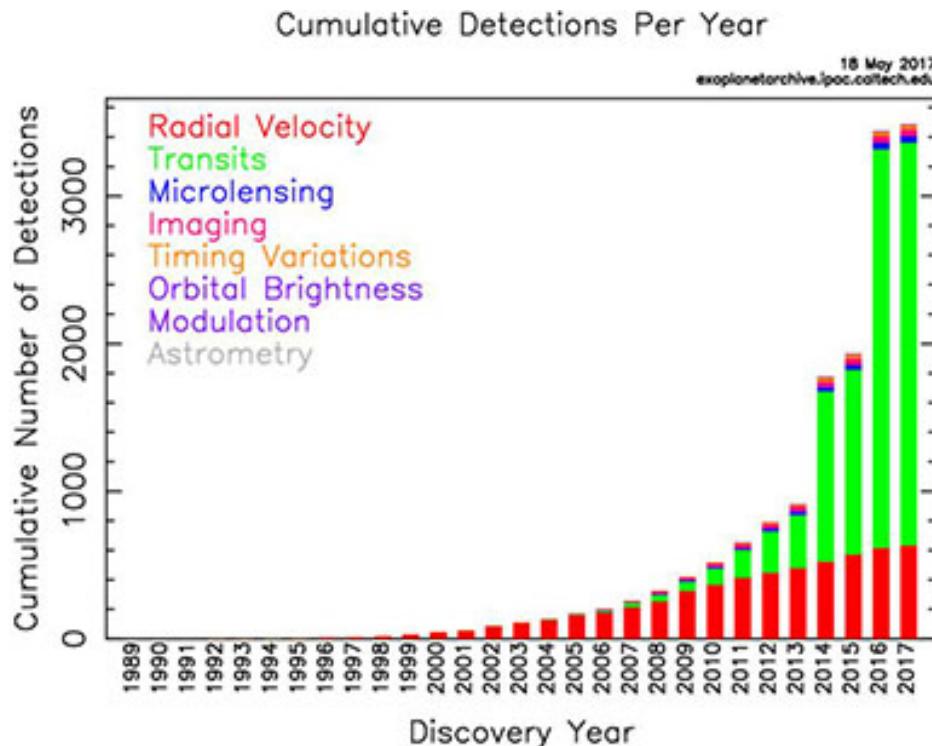
- **Systemets masse** ved at se hvor forvrænget det bagvedliggende lys bliver. Hvis lyskilden danner en ring kan man fx måle dens størrelse. Man må tage højde for afstandene mellem lyskilden, stjernesystemet og Jorden, samt hvor langt objekterne er fra hinanden på himlen. Hvis lyskilden er næsten på samme synslinje fra Jorden som stjernesystemet, vil linseeffekten påvirke det mere.
- **Masseforholdet** mellem stjernen og planeten kan findes, ved at se hvor stor linseeffekten er, når planeten bidrager i forhold til når den ikke gør. Det medfører, at **planetens masse** kan bestemmes, forudsat at stjernens masse kan bestemmes på anden vis. Metoden er særligt interessant, fordi man med gravitationslinser kan se selv relativt små planeter på størrelse med Mars.
- **Afstanden** mellem baggrundskilden og stjernesystemet kan approksimeres, hvis området hvori de to objekter er, er relativt kendt. Har man en grov idé om, hvor de to befinner sig, kan man sammenligne deres relative bevægelse med, hvordan ting i de områder typisk bevæger sig, og på den måde komme frem til en indbyrdes afstand.
- **Afstanden** fra planeten til stjernen kan ses, men kun ved et bestemt tidspunkt.

Gravitationslinsemетодen er desuden speciel idet den tillader os at se planeter meget langt væk fra os selv - helt ind mod galaksens centrum.

En ulempe ved gravitationslinsemетодen er, at den er afhængig af et objekt der passerer bagved stjernesystemet, og som sandsynligvis aldrig vender tilbage. Så man har kun kort tid til observationerne (timer til dage), og de kan ikke gentages.

⁹Dette gælder så længe negativ masse ikke er en ting, hvilket alt empiri peger mod.

Der kan desuden være en fremtid i at anvende Solen som gravitationel linse til at tage højopløsningdata fra fjerne objekter. Dette har vi dog ikke den praktiske kunnen til endnu.



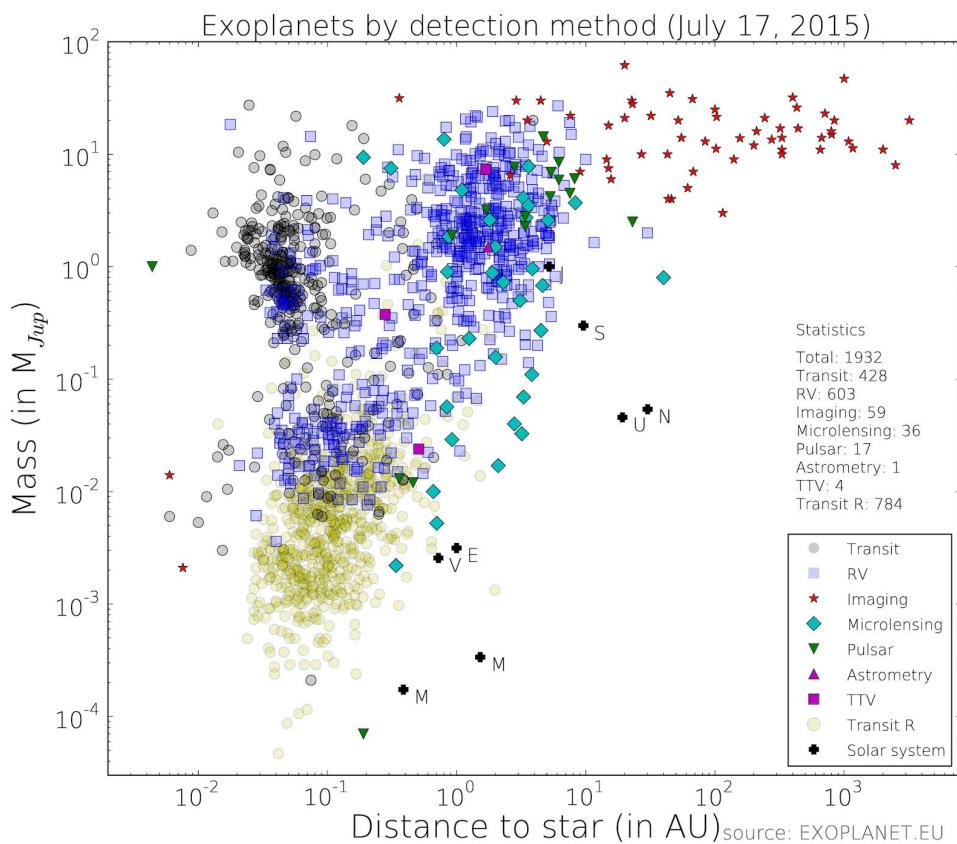
Figur 3.10: Antal fundne exoplaneter efter årstal og sorteret efter metode. Kilde: NASA IPAC Exoplanet Science Institute

Sammenligning

Da der er så mange forskellige metoder at detektere exoplaneter med (også nogle vi ikke har nævnt), er det værdifuldt at have et overblik over deres styrker og svagheder. Af figur 3.10 ses, at vi generelt bliver bedre til at finde exoplaneter, hvilket der kan være mange årsager til. Den mest oplagte er at instrumenter, teknologier og vores viden om exoplaneter forbedres. Det handler langt hen af vejen om at se små ændringer i det lys en stjerne udsender, sammenlignet med hvordan det ellers ville have set ud. Jordens atmosfære kan både sprede lys, absorbere dele af det og udsende mere, hvorfor det giver mere præcise målinger at benytte rumteleskoper for at undgå disse forstyrrelser. Så når vi får flere af disse, og dedikerer mere af deres tid til exoplaneter, vil vi også gøre flere opdagelser i feltet. Der er fx høje forventninger til James Webb Space Telescope, som med sin høje præcision måske vil kunne afgøre, om der er liv på andre planeter. Erfaringen fra tidligere missioner kan også forbedre de næste. Derudover må nogen jo betale for forskningen, og når først der er publicerede artikler, der viser at noget er muligt, og at det kan være interessant at undersøge noget, så bliver det lettere at skaffe penge til.

Det ses også at radialhastighedsmetoden var dominerende i starten, indtil den i 2014 blev overhalet af transitmetoden i antal opdagede planeter. Keplersatellitten blev sat i kredsløb om Jorden i 2009 og har siden 2011 sendt data tilbage om tusindvis af exoplaneter, primært fundet vha. transitmetoden.

Nogle detektionsmetoder er meget afhængige af, hvordan stjernen og planetens bevægelse er orienteret, ift. det plan hvori vi ser dem. Selvom en planet kan være kæmpestor og meget tæt på sin stjerne, så den hiver meget i stjernen, kan den være stort set usynlig for radialhastighedsmetoden, hvis $i \approx 0^\circ$ eller $i \approx 90^\circ$. Stjernen vil rigtig nok bevæge sig en hel masse, men ikke parallelt med synslinjen, så lyset ikke Dopplerforskydes meget. Denne planet ville dog være ideel til at detektere med astrometri, men med henvisning til figur 3.10 ses det, at astrometri ikke er nær så effektiv som radialhastighedsmetoden, hvorfor planeten måske overses.



Figur 3.11: Her ses de pr. 17. juli 2015 fundne exoplaneter, deres masse, afstand til den nærmeste stjerne, og den metode de er fundet ved. Yderligere er planeterne i Solsystemet indtegnet med sort. Det ses, at planeter meget langt fra deres stjerne kun er fundet ved direkte observation (dem fundet tæt på stjernen er formegentlig en fejl), samt at de andre metoder mest finder tunge planeter, tæt på deres stjerne. Bemærk de logaritmiske akser og enhederne - M_{Jup} er Jupitermasser og AU er Jordens afstand til Solen. Kilde: exoplanet-diagrams.blogspot.dk/2015/07/exoplanets-by-detection-method.html

I afsnittet om transitmetoden fremgår det, at jo større planeten er relativt til stjernen, desto tydeligere vil

den sørke systemets luminositet, se ligning 3.5. Det betyder, at en "stor" planet i bane om en "lille" stjerne vil være lettere at detektere på denne måde end den modsatte situation. Dette er et eksempel på en relativt generel tendens i detektionsmetoderne. De fleste favoriserer store planeter tæt på deres stjerne, da de så påvirker stjernen mest. Det er vigtigt, da det ofte er stjernens lys, og ikke planetens, der ses på Jorden, og planeten detekteres ved den måde den får stjernen til at bevæge sig på. Dette kan ses fra Newtons tyngdelov,

$$F_g = G \frac{M_\star M_p}{r^2}, \quad (3.18)$$

hvor kraften er proportional med planetens masse over dens kvadrerede afstand til stjernen. Denne effekt finder sted ligeså snart stjernens bevægelse benyttes, hvorfor det ikke er aktuelt for eksempelvis direkte observation, men som det fremgår af afsnittet favoriserer denne metode også store, tunge planeter, dog via nogle andre argumenter.

I figur 3.11 ses et plot over kendte exoplaneter, deres masse, afstand til nærmeste stjerne samt den metode vi har fundet dem med. Ovenfor blev det konkluderet at tunge planeter tæt på deres stjerne, er favoriseret af de fleste detektionsmetoder. Dette ses ved de mange punkter øverste venstre hjørne på figuren, sammenlignet med at nederste højre hjørne er fuldstændig tomt - men der er også en faktor fra, at der nok blot findes færre små planeter langt fra deres stjerner. Det skal også nævnes at planeter markeret som "Transit R", adskiller sig udelukkende fra "Transit", ved at massen er et kvalificeret gæt. Man har brugt planetens radius, antaget en densitet der er rimelig for planeter af dens størrelse, og derved estimeret massen. Det ses også tydeligt at radialhastighedsmetoden og transitmetoden er de klart mest effektive, samt at transitmetoden har den mest markante favorisering af planeter, som er tæt på. For at noget kan kaldes en planet, er det ikke nok at observere ét transit, så transitmetoden kræver at årets længde på planeten er kort nok - men perioden hænger sammen med afstanden til stjernen ifølge Keplers 3. lov, ligning 3.9, så det sætter en begrænsning på afstanden. Radialhastighedsmetoden favoriserer hovedsageligt tunge planeter, som kan være lidt længere væk. Det er også meget markant, hvordan direkte observationer skiller sig ud. Det er den eneste metode som har fundet de fjerne planeter, som i nogle tilfælde også ligger meget længere fra deres stjerne end Neptun gør fra Solen. De to små planeter, der er fundet med direkte observation, er der en risiko for at det er fejl,¹⁰ hvilket blot styrker konklusionen om, hvilke planeter direkte observation favoriserer.

Her er også plottet nogle planeter, der er fundet med metoder, der ikke er beskrevet her, men de er ikke essentielle for at forstå de generelle tendenser i plottet.

Det er ret markant som Solsystemets planeter stort set falder helt uden for den tendens, vi ser for fundne exoplaneter. Dette kan skyldes mange ting. En mulighed er, at Solsystemet er meget specielt, hvilket kunne reducere sandsynligheden for liv andre steder - for hvad nu hvis liv kræver specielle forhold, siden vi netop er i et usandsynligt system? En anden mulighed er, at Solsystemet bare er et af mange stjernesystemer, og at der intet specielt er ved det, men at vi ikke er i stand til at se tilsvarende planeter i andre stjernesystemet godt nok. Begge fortolkninger er plausible, men vi ved med sikkerhed at metoderne er biased, så helt repræsentative er de fundne planeter i hvert fald ikke.

¹⁰<http://exoplanet-diagrams.blogspot.dk/2015/07/exoplanets-by-detection-method.html?m=1>

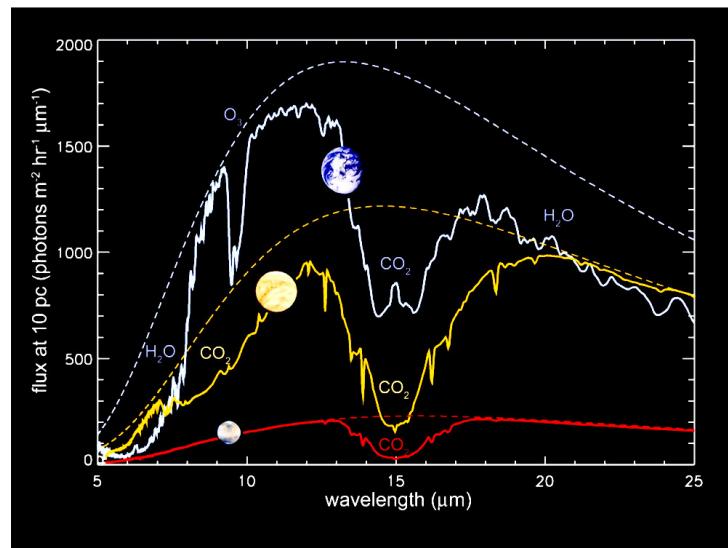
3.3 Liv på Exoplaneter

Der har været mange forsøg på at definere hvad liv er, og måske findes der versioner, vi end ikke vil kunne genkende som levende. Jagten på liv andre steder fokuserer dog på, at lede efter liv som os selv, da det er svært at sige, hvad vi ellers skulle kigge efter. Men vi leder også mere generelt efter noget, der ser unaturligt ud eller ude af balance for, hvad vi ville forvente af en planet uden liv.

Biomarkører

Vi kan bruge spektre til at analysere, hvilke stoffer der findes i en gas. Så hvis vi har en lyskurve fra atmosfæren på en planet (fx fundet gennem transitmetoden, mens den passerer foran en stjerne), kan vi afgøre hvilke luftarter den består af. Jordens atmosfære er meget ude af ligevægt i forhold til, hvis der ikke fandtes liv. Oxygen er eksempelvis forholdsvis reaktivt, så hvis der ikke havde liv til at producere det, ville det have bundet sig til andre stoffer - vi kender fx, hvordan jern ruster og frugt bliver brunt, hvis man lader det stå ude. Oxygen i atmosfæren ville derfor være en god indikation på, at der findes liv på en planet - en biomarkør.

På figur 3.12 ses spektre af atmosfærerne på Jorden, Mars og Venus. Her er det tydeligt, at Jordens atmosfære adskiller sig væsentligt i form af fx mere oxygen og vand. Man hører ofte om ozonlaget, der beskytter os mod ultraviolet stråling, hvilket ses i Jordens spektrum ved linjen markeret med O_3 . Hvis det ikke var for absorptionen ville atmosfærenens spektrum følge de stippled linjer. På alle 3 planeter ses CO_2 tydeligt, men Jordens spektrum er særligt domineret af absorption fra vanddamp ved både lange og korte bølgelængder.

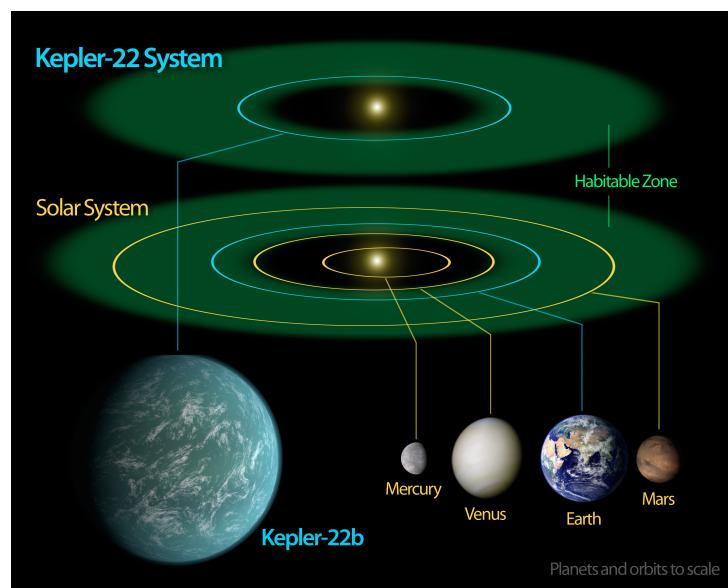


Figur 3.12: Her ses spektre fra Jorden, Mars og Venus. De stippled linjer angiver hvordan lyset ville være fordelt hvis ikke der skete absorption i atmosfæren. Kilde: Franck Selsis and Giovanna Tinetti, Darwin proposal, 2007

Den Beboelige Zone

For at finde genkendeligt liv, leder vi som sagt efter jordlignende planeter. Men hvilke krav skal vi stille til en planet, før den ligner os tilstrækkeligt? Livet på Jorden er i høj grad baseret på kulstofferbindelser og vand. Man kunne muligvis også forestille sig liv baseret på kulstof og ammoniak eller silicium og ammoniak, men vi har aldrig fundet disse typer organismer. Livet på Jorden kan dog ikke klare sig med vand på hvilken som helst form - det kræver flydende vand. Så planeter der tillader flydende vand kan være særligt interessante.

Man har defineret et område omkring en stjerne kaldet "den beboelige zone", som ligger i den afstand fra stjernen, hvor en planet som Jorden kunne have flydende vand. Planetens atmosfære og masse har selvfølgelig betydning, men normalt vil man estimere zonen antaget en jordlignende planet. Er man for tæt på stjernen vil vandet fordampe, og er man for langt væk vil det fryse til is. Derfor er den beboelige zone tilpasset efter stjernens luminositet, så den er tæt på for små stjerner og langt væk for store stjerner. Et eksempel kan ses i figur 3.13. At en planet er i den beboelige zone er dog bestemt ingen garanti for, at den er beboelig.



Figur 3.13: Illustration af et bud på den beboelige zone for Solsystemet og systemet om stjernen Kepler-22. Kilde: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler-22_diagram.jpg

Hvis man vil gå mere i dybden med om vand kan findes på den enkelte planet, kan man beregne dens overfladetemperatur, T_p , som

$$T_p = T_\star \left(\frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R_\star}{r} \right)^{1/2}, \quad (3.19)$$

hvor T_\star er stjernens overfladetemperatur, R_\star er stjernens radius, r er afstanden mellem stjernen og planeten og A er planetens albedo. Albedoen er en enhedslös konstant, der udtrykker hvor meget planeten reflekterer, da det jo kun er den energi planeten absorberer, der går til at varme den op. Denne formel bygger på en

antagelse om, at der eksisterer en mekanisme, som fordeler energien på hele planetens overflade. Fx en hurtig rotationshastighed eller en atmosfære. Man kan også komme ud for at en planet er "låst" så den altid vender samme side mod Solen - i så fald vil den sandsynligvis være for varm på den ene side og for kold på den anden, men der kan være en stribé med lige den rette temperatur. Hvis der skal være flydende vand på planeten, så må T_p være mellem 0 og 100 °C, under antagelse af nogenlunde atmosfærisk tryk. Dette illustrerer også hvor store dele af jagten på liv, der er præget af kvalificerede gæt og estimerater. Hvis en planet har et tryk, der afviger meget fra 1 atm, som vi har på Jorden, så vil temperaturintervallet, hvor vand kan eksistere i flydende form være helt anderledes eller måske ikke-eksisterende. Det er også en gråzone, hvis overfladetemperaturen jævnligt falder uden for intervallet. Det kunne fx ske hvis planetens bane er meget elliptisk, eller planeten blot er meget tæt på kanten af den beboelige zone. Det er derfor svært at sætte hårde krav til en planets afstand til sin stjerne.

Et andet problem med ligning (3.19) er, at den bygger på, at planeten er i termodynamisk ligevægt, hvor den opvarmes af sin stjerne og nedkøles ved varmestråling. I Solsystemet findes der flere eksempler på, at der også er andre mekanismer i spil - fx overskydende varme i planetens indre og atmosfærer der holder på varmen.

Selv hvis en stjernes lys er passende for flydende vand, er der andre krav for om liv også kan eksistere ved stjernen. Store stjerner lever kortere, og derved har livet formentlig ikke tid nok til at udvikles til avancerede former. Små stjerner er til gengæld meget aktive og har kraftige solvinde af partikler, der slynges ud mod planeterne. Disse består af ladede partikler med høj energi, der i værste fald kan blæse atmosfæren af en planet, hvis den ikke har et magnetfelt til at beskytte sig (og strålingen kan i sig selv være skadelig for liv at blive utsat for). Samtidig er den beboelige zone tæt på stjernen, hvis den er lille, så planeten ville blive påvirket endnu mere af solvindene.

Planetens masse er også afgørende for om der kan eksistere liv, da tyngdekraften på overfladen af planeten hænger direkte sammen med massen. Hvis tyngdekraften er lidt svagere end på Jorden, kan man forvente højere organismer end her, og hvis tyngdekraften er stærkere vil det betale sig at være mere kompakt. Dette skyldes at en levende organisme skal være stabil, og jo stærkere tyngdekraften er, desto stærkere skal organismen også være, for at opretholde samme højde. Dette kan man forestille sig ved at tænke på, hvordan det føles at benytte en elevator. Når elevatoren accelereres opad presses man ned i gulvet, og når den så bremser ned igen, opnår man i kort tid en følelse af at være "lettere", hvilket blev vist teoretisk for et pendul i afsnit 1.6. Denne analogi er helt valid, da en af byggestenene for den generelle relativitetsteori er Einsteins ækvivalensprincip, der kan formuleres som følgende:

Intet lokalt eksperiment kan skelne konstant acceleration og gravitation fra hinanden.

Dette betyder, at i eksemplet med elevatoren er det umuligt at finde ud af om elevatoren står stille i et stærkere tyngdefelt, eller om den accelereres måske endda uden påvirkning af et tyngdefelt.

Der er en nedre grænse for, hvor lav planetens masse kan være, da den skal være stor nok til at kunne holde på en atmosfære - ellers vil den langsomt kunne fordampe væk. Mars lille størrelse er en af faktorerne, der har gjort, at den mistede sin. En planeten for lille til at opretholde en atmosfære, vil der ikke være noget til at beskytte levende organismer og holde trykket for det flydende vand, hvilket vil gøre det umuligt, for det

meste liv vi kender på Jorden at overleve.

Kobles massen sammen med radius til en densitet, kan vi også sætte begrænsninger på, hvad planeten kan bestå af, og det har betydning for hvilket liv der kan være. Jordens liv vil fx ikke have det særlig godt på en gasplanet. Hvis en planet er meget let, kan man godt konkludere at den må indeholde hydrogen, da intet andet ville give så lav densitet. Der er også densiteter man vil forbinde med planeter af vand eller klippe. Hvis densiteten er meget høj må planeten også indeholde en vis mængde jern.

En anden metode til at undersøge en planets materiale er spektroskopi, som beskrevet i afsnit 3.1 under spektrer. Ved at analysere spektret af en planet, kan man afgøre hvad den må bestå af.

Er det så muligt at finde liv andre steder end på Jorden, eller er det hele blot en jagt på en ikkeeksisterende nål i en høstak af astronomisk størrelse? Det korte svar er, at det ikke er til at vide. Det kan være, at det venter lige om hjørnet, og at en af de kommende missioner til Mars finder rester af liv der. Det kan også være, at man kan lede til tid og evighed uden nogensinde at finde noget. Men ved at lede, kan vi i hvert fald sætte grænser for hvor almindeligt liv er, og hvor specielle forhold vi har. Mange forskere mener, at vi sandsynligvis vil finde liv inden for 10 år, hvis det eksisterer, i forbindelse med projekter der leder endnu grundigere end nu. Jagten på liv er utroligt kompleks og fascinerende, hvilket forhåbentlig er illustreret i dette kapitel, men én ting er sikkert: Hvis man ikke leder efter nålen, så finder man den i hvert fald ikke.

Kapitel 4

Atom- og Molekylefysik

4.1 Atomstruktur

Det simpleste atom er brintatomet. Her er det rent faktisk muligt at udregne analytiske udtryk for alle elektronbølgefunktionerne. Denne udledning er dog lettere omfattende, så vi vil ikke gennemgå den her. Det vigtigste er, at alle elektrontilstandene er beskrevet ved 3 kvantetal: n , l og m . Bølgefunktionen kan skrives: ψ_{nlm} . Alle kvantetallene er hele tal, n kan gå fra 1 og opad, l går fra 0 til n og m går imellem $-l$ og l . Grundtilstanden i brintatomet har en energi på:

$$E_1 = -13,6 \text{ eV} \quad (4.1)$$

De andre tilstænde har en energi givet ved n kvantetallet:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Så længe der kun er en elektron, er det fint, men langt de fleste atomer har mere end en elektron¹. Når vi tilføjer flere elektroner, vil de frastøde hinanden, hvilket giver et mere kompliceret system. Den første effekt er, at de indre elektroner vil frastøde de ydre elektroner, som derfor er svagere bundet. Derudover vil energien ikke længere kun være bestemt af n kvantetallet, men også l kvantetallet. Energien er dog stadig primært bestemt af n kvantetallet, så f.eks har ψ_{210} højere energi end ψ_{200} , men lavere energi end ψ_{300} .

Når vi arbejder med atomer og molekyler, har vi oftest mere end en elektron. Den endelige bølgefunktion må derfor konstrueres ud fra bølgefunktioner for en elektron. Disse bølgefunktioner for en elektron kaldes orbitaler.

Det er normal praksis at navngive orbitaler med et bogstav, der repræsenterer l kvantetallet. s for $l = 0$, p for $l = 1$, d for $l = 2$ og f for $l = 3$. Bogstaverne stammer fra spektroskopi, hvor det var muligt at observere energiniveauerne et godt stykke tid, før kvantemekanikken blev udviklet. s for *sharp*, p for *principal*, d for *difuse* og f for *fine*. Der er flere, men herefter forsætter de bare alfabetisk. Siden et højt l kvantetal kræver et højt n kvantetal vil f -orbitaler og højere være sjældne.

¹Siden universet primært består af brint, har de fleste atomer en elektron. Stort set alle andre atomer har mere end en elektron.

En tommelfingerregel for at finde rækkefølgen af orbitaler vil være så lavt n -kvantetal som muligt, derefter så lavt l -kvantetal som muligt. Det er dog ikke helt korrekt. Den egentlige rækkefølge er:

$$1s \ 2s \ 2p \ 3s \ 3p \ 4s \ 3d \ 4p \ 5s \ 4d \ 5p \ 6s \ \dots$$

For de høje energier begynder der at være meget kort imellem de enkelte niveauer.

4.2 Finstruktur i atomer

Atomers magnetisering

Det vi skal se nu er en ret sjov konsekvens af kvantemekanikken, som blandt andet bruges til atomure og måling af hydrogen i rummet (21 cm linjen). For at komme frem til denne konsekvens, skal vi dog først lige forbi noget elektromagnetisme. En ladning i bevægelse vil danne en magnetisk felt. Tilsvarende vil en ladning der bevæger sig igennem et elektrisk felt opleve det, som et magnetisk felt på formen:

$$\vec{B} = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (4.3)$$

Denne formel kan udledes fra den specielle relativitetsteori, hvor elektriske og magnetiske felter er to sider af samme sag. Vi vil dog ikke vise det her, men i stedet benytte det. Hvis du dog skulle have lyst til at lære mere om den, kan der henvises til stort set alle bøger om speciel relativitetsteori, da det er et meget kendt eksempel at vise.

Det elektriske felt vi skal se på, er det felt, som elektronen udsender. Ligesom vi med tyngdekraften har $F_{tyngde} = -\frac{\partial V}{\partial r}$, hvor V er tyngdepotentialet, kan vi gøre det samme for det elektriske felt, hvis vi bruger det elektrostatiske potentiiale, som er givet ved $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$. Kraften på en ladning i et elektrisk felt er givet ved: $\vec{F} = e\vec{E}$ ². Vi ser dermed at $\vec{E} = \frac{1}{e} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{r}$ (minusset fra kraftformlen går ud med minusset fra elektronens ladning). Vi kan så sætte udtrykket for V ind i udtrykket for \vec{E} , hvilket giver:

$$\vec{E} = \frac{1}{e} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-e^2}{r} = \frac{e\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.4)$$

Hvilket vi sætter ind i formlen fra \vec{B} -feltet, som så giver os:

$$\vec{B} = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{v} \times \vec{r} \quad (4.5)$$

Vi har så formlen for to krydsprodukter, der siger at $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Dette gør, så vi kommer af med fortegnet i vores udtryk. Vi bruger så det matematiske trick at gange med en på en smart måde, nemlig $1 = \frac{m}{m}$. Det giver os følgende udtryk:

$$\vec{B} = \frac{1}{mc^2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \times m\vec{v} \quad (4.6)$$

²Det elektriske felt minder på mange måder om tyngde accelerationen, hvor den tilsvarende formel er: $\vec{F} = m\vec{g}$.

Vi kan her se, at udtrykket $\vec{r} \times m\vec{v}$ er det impulsmomentet, som vi kender fra klassisk mekanik (ligning (1.18)). Kvæntemekanisk har impulsmomentet enheder af $m\hbar$, hvor m er kvantetallet, der kommer fra løsningen til Schrödingerligningen for hydrogenatomet. Når vi kan observere noget klassisk, vil der altid være en kvæntemekanisk analog, på trods af at det omvendte ikke altid er tilfældet. Det er derfor muligt at opstille en operator for det kvæntemekaniske impulsmoment: $\vec{r} \times m\vec{v} = \hat{l}$. Dette kan vi indsætte i udtrykket, og vi får derfor, at det \vec{B} -felt som elektronen laver, når den flyver rundt om protonen kan beskrives ved følgende formel:

$$\vec{B} = \frac{\hbar}{mc^2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{l} \quad (4.7)$$

Spin-orbit kobling

Et godt spørgsmål er så at spørge sig selv om, hvorfor vi gjorde alt det her? Grunden er, at de energiniveauer vi måler hydrogenatomet til at have, afhænger af hvor stort et magnetfelt der påvirker elektronen. Elektroner har en egenskab der hedder spin. De fleste ting vi hidtil har set på, har haft en klassisk analog, men spin er strængt ikke-klassisk. Navnet er lidt misvisende, da elektronens spin ikke bare skyldes, at den roterer. Snarer er spin lige så fundamentalt for at beskrive partiklen, som dens ladning eller hvilemasse. Elektronen har et magnetisk dipolmoment, i stil med en stangmagnet, der vekselsvirket med det magnetiske felt, elektronen føler i kraft af sin bevægelse omkring atomkernen. Energien af en magnetisk dipol i et \vec{B} -felt kan skrives som et prikprodukt: $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. For koblingen mellem spinnet og impulsmomentet får vi at koblingen er givet som $H_{s-o} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$, hvor vi kan indsætte vores nyligt fundne værdi for \vec{B} og inkludere at $\vec{\mu} = g_s \mu_B \hat{s}$, hvor \hat{s} er spinoperatoren.

$$\hat{H}_{s-o} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -g_s \mu_B \hat{s} \frac{\hbar}{mc^2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{l} = g_s \frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{s} \cdot \hat{l} \quad (4.8)$$

Da Bohr magnetonen μ_B er givet ved: $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$. Når vi arbejder med elektroner er Bohr magnetonen den oplagte enhed for magnetisk dipolmoment.

Vi har nu en ny Hamiltonoperator, der beskriver, hvordan elektronens bindingsenergi bliver påvirket, af det \vec{B} -felt som elektronen laver omkring protonen. Måden hvorpå vi inkorporerer det i den Hamiltonoperator der beskriver bindingsenergien, er simpelthen at vi bare lægger dem sammen, så vi får:

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H}_{\text{binding}} + \hat{H}_{s-o} \quad (4.9)$$

Så når vi tager den nye Hamiltonoperator og udregner forventningsværdien af en tilstand, får vi:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle \psi_{nlm} | \hat{H}_{\text{tot}} | \psi_{n'l'm'} \rangle \\ &= \langle \psi_{nlm} | \hat{H}_{\text{binding}} | \psi_{n'l'm'} \rangle + \langle \psi_{nlm} | \hat{H}_{s-o} | \psi_{n'l'm'} \rangle \\ &= E_n + \alpha \left\langle \psi_{nlm} \left| \frac{\hat{s} \cdot \hat{l}}{r^3} \right| \psi_{n'l'm'} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

Her har vi gjort det smarte, at vi har absorberet alle konstanterne ind i α , og α er derfor givet ved:

$$\alpha = \frac{g_s \hbar^2 e^2}{2m^2 c^2 4\pi\epsilon_0} \quad (4.11)$$

E_n er de stationære energier, vi i forvejen kender. Tilbage er at finde ud af, hvad $\langle \psi_{nlm} | \frac{\hat{s} \cdot \hat{l}}{r^3} | \psi_{n'l'm'} \rangle$ er. Det svære i dette udtryk er at finde ud af, hvordan operatorne \hat{s} og \hat{l} , virker på tilstandene ψ_{nlm} . Det første vi skal teste er, om de kommuterer med Hamiltonoperatoren for bindingsenergien. Grunden til at vi spørger om dette er, at tilstandene ψ_{nlm} er egentilstande for \hat{H}_{binding} . Ved at tjekke om de to operatorer kommuterer med Hamiltonoperatoren, kan vi tjekke, om de har et komplet sæt af fælles egentilstande. Hvis vi har det, kan vi benytte Schrödingerligningen til at se, at når vi bruger en operator der virker på dens egentilstand, får vi en konstant gange egentilstanden, hvilket vil gøre det en del lettere at finde ud af, hvad $\langle \psi_{nlm} | \frac{\hat{s} \cdot \hat{l}}{r^3} | \psi_{n'l'm'} \rangle$ er.

Vi fik \hat{l} fra et krydsprodukt, og har sidenhen behandlet den som en vektor. Det er heller ikke helt forkert, og det er muligt at finde komposanter af vektoren. Der er dog et problem, da det ikke er muligt at kende dem alle tre på en gang. Opstiller man en usikkerhedsrelation for et vilkårligt par vil vi finde, at vi ligesom for p og x ikke kan kende dem begge perfekt på en gang. Vi kan derimod finde længden \hat{l}^2 og en af komposanterne. Her vælges: \hat{l}_z . Det samme gælder for \hat{s} , og er en af grundene til at spin minder om rotation i kvantemekanikken. At vise at de to operatorer kommuterer kan være meget interessant og en lærerig øvelse i, hvordan man præcis gør det. Det er ret matematisk, og der er ikke særlig meget fysik indblandet i det. Vi vil derfor her bare give resultatet, så vi kan komme frem til den interessante fysik i problemet. Kommutatorerne er:

$$\begin{aligned} [\hat{l}_x, \hat{l}_y] &= i\hbar\hat{l}_z & [\hat{l}^2, \hat{l}_z] &= 0 \\ [\hat{l}_z, \hat{H}] &= 0 & [\hat{l}^2, \hat{H}] &= 0 \\ [\hat{s}_z, \hat{H}] &= 0 & [\hat{s}^2, \hat{H}] &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Hvilket betyder at vores egentilstande ψ_{nlm} også er egentilstande til disse operatorer. Egentilstandene for \hat{l}_z og \hat{l}^2 operatorne kan vi allerede finde, da egenværdierne er givet ved:

$$\hat{l}_z\psi_{nlm} = \hbar m\psi_{nlm} \quad \hat{l}^2\psi_{nlm} = \hbar^2 l(l+1)\psi_{nlm} \quad (4.13)$$

For at beskrive hvad egenværdierne for spinoperatoren \hat{s} er, skal vi først lige have deres egentilstande. Disse kan også udledes andre steder fra, men måden det sker på er egentlig også bare en masse matematik, så det vi vil gøre her, er bare at fortælle hvordan de ser ud. Man får dermed at spin egentilsatendene bare bliver χ_{sm_s} hvor der gælder at $\langle \chi_{sm_s} | \chi_{sm_s} \rangle = 1$. Disse funktioner har to kvantetal: s og m_s . Egenværdierne for \hat{s}_z og \hat{s}^2 operatorne er:

$$\hat{s}_z\chi_{sm_s} = \hbar m_s \chi_{sm_s} \quad \hat{s}^2\chi_{sm_s} = \hbar^2 s(s+1) \chi_{sm_s} \quad (4.14)$$

Hvilket minder rigtig meget om egenværdierne for impulsmomentoperatorne. Den totale bølgefunktion for en elektron er, derfor givet ved: $\psi_e = \psi_{nlm}\chi_{sm_s}$, og det er egentlig ψ_e , vi benytter, når vi udregner $\langle E \rangle$. Nu har vi fundet hvordan operatorerne \hat{s} og \hat{l} , virker på vores egentilstande, er det nu vi skal til er at finde ud af, hvordan den koblede operator $\hat{s} \cdot \hat{l}$ virker. Det vi derfor gør er at definere det totale impulsmoment $j = s + l$, som har værdierne $j = |l + s|, |l + s| - 1, \dots, |l - s|$, og for hver j -værdi er der m_j -værdier, der ligesom med m_l værdierne for tilstanden for hydrogenatomet har værdierne, $m_j = -j, -j + 1, \dots, j$. Så hvis vi har $l = 1$ og $s = \frac{1}{2}$, så får vi følgende tilstande, $j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ med m_j værdierne, $m_{j=\frac{3}{2}} = \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ og

$m_{j=\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$. Hvis vi i stedet havde valgt at opskrive det ved tilstandene l og s , så ville vi for vores l kvantetal få $l = 1$, og $m_{l=1} = -1, 0, 1$. Dette kan vi kombinere med vores spin kvantetal og få for $s = \frac{1}{2}$, $m_{s=\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$. Vi ser derfor, at vi for hvert m_s kvantetal har 3 m_l kvantetal, hvilket i alt giver os 6 tilstande, præcis ligesom med j kvantetallet. De to forskellige måder at beskrive dette på er derfor ækvivalente. Derudover så er \hat{j} operatorens egenværdier også givet ved:

$$\hat{j}_z |j, m_j, s, l\rangle = \hbar m_j |j, m_j, s, l\rangle \quad \hat{j}^2 |j, m_j, s, l\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m_j, s, l\rangle \quad (4.15)$$

Udover at være egentilstande for \hat{j}_z og \hat{j}^2 , er de også egentilstande for \hat{s}^2 og \hat{l}^2 :

$$\hat{s}^2 |j, m_j, s, l\rangle = \hbar^2 s(s+1) |j, m_j, s, l\rangle \quad \hat{l}^2 |j, m_j, s, l\rangle = \hbar^2 l(l+1) |j, m_j, s, l\rangle \quad (4.16)$$

Okay, nu kan vi endelig komme videre med vores beskrivelse af, hvordan operatorerne $\hat{s} \cdot \hat{l}$ virker på vores tilstande. Vi kan nemlig benytte os af vores definition af \hat{j} operatoren der jo siger: $\hat{j} = (\hat{s} + \hat{l})$, så hvis vi tager denne i anden får vi:

$$\hat{j}^2 = (\hat{s} + \hat{l})^2 = \hat{l}^2 + \hat{s}^2 + 2\hat{s} \cdot \hat{l} \quad (4.17)$$

Ud fra dette får vi, at $\hat{s} \cdot \hat{l}$ kan opskrives som:

$$\hat{s} \cdot \hat{l} = \frac{1}{2} (\hat{j}^2 - \hat{s}^2 - \hat{l}^2) \quad (4.18)$$

Når de anvendes på en tilstand får vi:

$$\langle \psi_{nlm} | \frac{1}{2} (\hat{j}^2 - \hat{s}^2 - \hat{l}^2) | \psi_{n'l'm'} \rangle = \frac{1}{2} (j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)) \langle \psi_{nlm} | \psi_{n'l'm'} \rangle \quad (4.19)$$

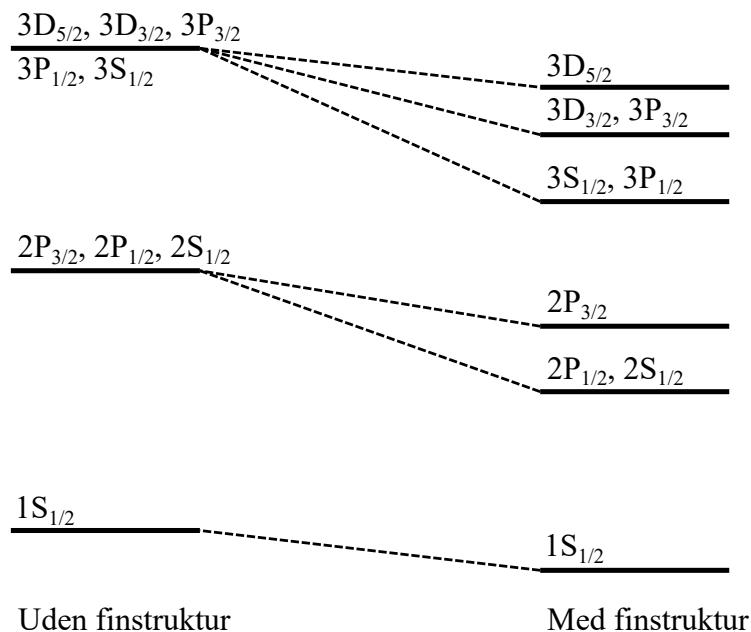
Vi ser derfor at operatoren $\hat{s} \cdot \hat{l}$ bare bliver en konstant, som er bestemt af de specifikke j, l og s kvantetal vores tilstand består af. Vi har så bare tilbage, at det eneste vi mangler at finde ud af, er hvad følgende giver: $\langle \psi_{nlm} | \frac{1}{r^3} | \psi_{n'l'm'} \rangle$. Dette er egentlig bare noget matematik, så vi vil ikke gå særlig meget igennem det, men i stedet bare skitsere at måden man løser dette på er, at man udfører integralet som dirac notationen beskriver og så indse at det kun er den radielle del der har indflydelse, da Y_l^m tilstandene jo ikke har noget at gøre med $\frac{1}{r^3}$, og vi får derfor:

$$\left\langle \psi_{nlm} \left| \frac{1}{r^3} \right| \psi_{n'l'm'} \right\rangle = \int_0^\infty (R_n^l)^* \frac{1}{r^3} R_n^l r^2 dr = \frac{1}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \left(\frac{Z}{na_0} \right)^3 \quad (4.20)$$

Hvor Z er antallet af protoner i kernen (1 for hydrogen, men dette gør det muligt at udregne forventningsværdien af $\frac{1}{r^3}$ for kerner med stor ladning og kun en enkelt elektron), og a_0 er den såkaldte Bohr radius defineret som: $a_0 = \frac{\hbar^2}{(e^2/4\pi\epsilon_0)m_e}$. Vi kan så samle alle trådene her til sidst og få at energiniveauerne i hydrogenatomet bliver splittet op med følgende værdier:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= E_n + \frac{g_s \hbar^2 e^2}{2m_e^2 c^2 4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \left(\frac{Ze^2 m_e}{n\hbar^2 4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{1}{2} (j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)) \\ &= E_n + \frac{g_s Z^3 e^8 m_e}{c^2 n^3 \hbar^4 4^5 \pi^4 \epsilon_0^4} \frac{(j(j+1) - s(s+1) - l(l+1))}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Hvilket er spin-orbit koblingen, som alt sammen kommer fra interaktionen mellem spin og impulsmoment, givet ved udtrykket $\hat{s} \cdot \hat{l}$, og vi ser at hvis elektronens impulsmoment er 0, så bliver korrektionen til vores egenenergier 0. Nedenfor er en visualisering af hvordan tilstandene bliver splittet op, denne opsplitning er i størrelsesordenen $\frac{1}{100}$ af de egentlig energier, så størrelsesforholdet på billedet er ikke helt korrekt. Bogstaverne S, P, D er desuden navne på de forskellige L værdier, og tallet nede til højre for bogstaverne er J værdien. Tallet foran bogstaverne angiver n værdien. Dette er bare hvordan man har valgt at opskrive de forskellige tilstande, og rummer altså ikke noget nyt fysik.



Figur 4.1: opsplitningen af energierne for $n=1,2,3$ for elektronen i hydrogenatomet. Her anvendes en meget kompakt notation for tilstandene, kaldet et term symbol. Tallet til venstre er n -kvantetallet. Bogstavet angiver l -kvantetallet, med S for $l = 0$, P for $l = 1$, D for $l = 2$ og så videre. Tallet i sæknet skrift er j -kvantetallet.

Generalisering til flere elektroner

Hvis der er flere elektroner omkring atomkernen, kan vi generalisere udtrykket ovenfor, så vi også kan beskrive koblingen mellem spin og impulsmomentet for disse, dette er relevant hvis man f.eks. vil beskrive spin-orbit opsplitningen i Helium eller andre atomer. Vi vil her gøre det for to elektroner, men metoden er valid for generalisering til N elektroner.

Hamiltonoperatoren for spin-orbit interaktionen for et par af elektroner er givet ved:

$$H_{S-O} = \beta_1 \hat{s}_1 \cdot \hat{l}_1 + \beta_2 \hat{s}_2 \cdot \hat{l}_2 \quad (4.22)$$

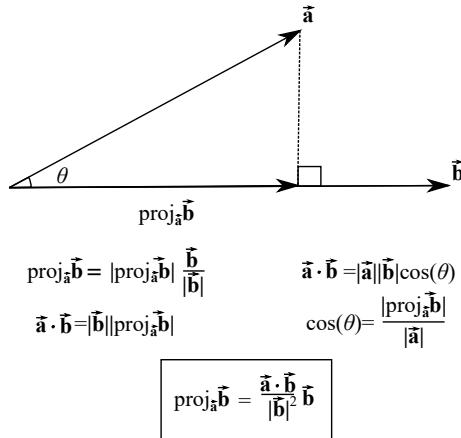
hvor hvor β_n er givet ved:

$$\beta_n = \frac{g_s Z^3 e^8 m_e}{c^2 n^3 \hbar^4 4^5 \pi^4 \epsilon_0^4} \frac{1}{l_n(l_n + \frac{1}{2})(l_n + 1)} \quad (4.23)$$

hvilket betyder at værdien af β afhænger af impulsmomentet.

I det forrige tilfælde var vi tilfredse med at opstille vores Hamiltonoperator på denne måde, fordi l og s ikke ændrede sig og da l jo betegner impulsmomentet. For at det skal ændre sig, skal der komme en udefrakommende kraft der påvirker elektronen. I det tilfælde vi har nu, er det dog sådan, at l_1 og l_2 godt kan ændre sig og give hinanden lidt ekstra impulsmoment, hvis de til gengæld mister lidt selv. Dette betyder at l_1 og l_2 ikke er bevarede størrelser, men at det totale impulsmoment $L = l_1 + l_2$ er. For at finde ud af, hvordan vi kan bruge det til at beskrive vores spin-orbit kobling for flere elektroner, skal vi nu til noget der er ret konceptuelt svært. Det er nemlig i kvantemekanik sådan, at man kan betragte både spinnet og impulsmomentet som vektorer. Dette skal ikke forstås, som at de er fysiske vektorer, man kan sætte ind i et koordinatsystem, men snarere at de kan beskrives i et specielt vektorrum, der er en matematisk konstruktion, hvis løsninger giver resultater, der passer med eksperimentelle resultater. Denne form for matematisk beskrivelse kaldes gruppeteori og er meget benyttet indenfor blandt andet partikel fysik. Vi vil ikke gennemgå den her, da den er ret matematisk abstrakt og kan være lidt svær at forstå. Vi opfordrer selvfølgelig til, at du kigger på det der hjemme, hvis det lyder interessant. Det der dog har en del værdi for os, er at konsekvensen af at l og s kan beskrives som vektorer i det her abstrakte vektorrum er, at normale matematiske regler for hvordan vektorer fungerer også gælder her. Det betyder, at vi kan beskrive l_1 og l_2 ud fra deres projktion ned på store L . Dette kan klassisk beskrives ud fra følgende formel, hvor man gerne vil projicere vektoren \vec{a} ned på \vec{b} .

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \quad (4.24)$$

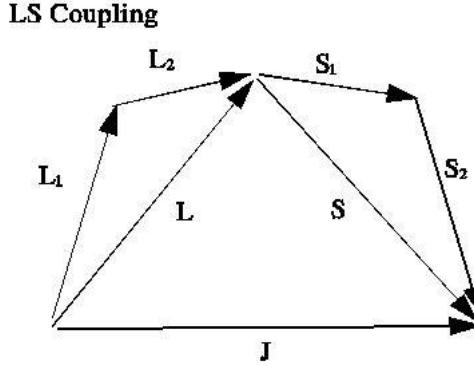


Figur 4.2: Projektionen af en vektor \vec{a} ned på en vektor \vec{b}

Vi kan så ud fra denne formel udlede at projektionen af l_1 ned på L må være givet ved:

$$l_{1,L} = \frac{\langle \hat{l}_1 \cdot \hat{L} \rangle}{|L|^2} \hat{L} \quad (4.25)$$

Denne formel er vigtig, da projektionen af l_1 og l_2 ned på L , tilsammen giver L , som man kan se af figur 4.3:



Figur 4.3: l_1 og l_2 giver tilsammen L hvis man projicerer dem ned på L

Vi ser ud fra billedet, at det samme er gældende for spinnet af de to elektroner tilsammen bliver til et totalt spin S . Vi kan derfor omskrive vores Hamiltonoperator H_{S-O} på følgende måde:

$$H_{S-O} = \beta_1 \frac{\langle \hat{s}_1 \cdot \hat{S} \rangle}{\langle \hat{S}^2 \rangle} \hat{S} \cdot \frac{\langle \hat{l}_1 \cdot \hat{L} \rangle}{\langle \hat{L}^2 \rangle} \hat{L} + \beta_2 \frac{\langle \hat{s}_2 \cdot \hat{S} \rangle}{\langle \hat{S}^2 \rangle} \hat{S} \cdot \frac{\langle \hat{l}_2 \cdot \hat{L} \rangle}{\langle \hat{L}^2 \rangle} \hat{L} \quad (4.26)$$

Vi har så at $\langle \hat{L}^2 \rangle = L(L+1)$, som vi kender det fra tilfældet med en enkelt elektron. Her er forskellen bare at $L = l_1 + l_2$, så L har følgende værdier $L = |l_1 + l_2|, |l_1 + l_2 - 1|, \dots, |l_1 - l_2|$. Så hvis $l_1 = l_2 = 1$ så får L følgende værdier $L = 2, 1, 0$, hvilket betyder at der kommer mange flere tilstande, og at energierne bliver splittet mere op end før. Det fungerer på samme måde med $S = s_1 + s_2$, bortset fra at elektroner er fermioner, så de har altid spin halv dvs. $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$. Når vi skal udregne $\langle \hat{l}_1 \cdot \hat{L} \rangle$ så bruger vi at $L = l_1 + l_2$ og får:

$$\begin{aligned} \langle \hat{l}_1 \cdot \hat{L} \rangle &= \langle \hat{l}_1 \cdot (\hat{l}_1 + \hat{l}_2) \rangle \\ &= \langle \hat{l}_1 \cdot \hat{l}_1 + \hat{l}_1 \cdot \hat{l}_2 \rangle \\ &= \left\langle \hat{l}_1^2 + \frac{1}{2} (\hat{L}^2 - \hat{l}_1^2 - \hat{l}_2^2) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} (L(L+1) + l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1)) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Læg her mærke til at l_1 er positiv inde i parantesen hvis det i stedet er $\langle \hat{l}_2 \cdot \hat{L} \rangle$ vi vil udregne så vil l_1 være negativ og l_2 være positiv. Man udregner så $\langle \hat{s}_1 \cdot \hat{S} \rangle$ og $\langle \hat{s}_2 \cdot \hat{S} \rangle$ på samme måde. Dette giver så i alt resultatet:

$$\begin{aligned} H_{S-O} &= \left[\beta_1 \frac{(L(L+1) + l_1(l_1+1) - l_2(l_2+1))(S(S+1) + s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1))}{4L(L+1)S(S+1)} \right. \\ &\quad \left. + \beta_2 \frac{(L(L+1) - l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1))(S(S+1) - s_1(s_1+1) + s_2(s_2+1))}{4L(L+1)S(S+1)} \right] \hat{S} \cdot \hat{L} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Herfra går man så over til at beskrive det totale impulsmomentmoment som: $\hat{J} = \hat{S} + \hat{L}$ og vi får så ligesom før at $\hat{S} \cdot \hat{L} = \frac{1}{2} (\hat{J}^2 - \hat{S}^2 - \hat{L}^2)$, hvor J som sædvanlig har værdierne: $J = |L + S|, |L + S - 1|, \dots, |L - S|$. Som du kan se bliver det hurtigt totalt uoverskueligt at holde styr på alt dette. Derfor sætter man computere til at regne på disse ting, hvis man rent faktisk skal udregne hvordan opsplitningen foregår, når man har at gøre med flere elektroner. Nu har du set hvordan man rent praktisk skulle gøre det, så hvis du en dag keder dig en stille aften, kunne tiden fordrives ved at lave dette i hånden.

4.3 Hyperfinstruktur

I det forgående afsnit har vi beskrevet, hvordan elektronernes energier i hydrogenatomet bliver splittet op grundet koblingen mellem elektronens spin og dens impulsmoment. Dette så vi blev ufattelig kompliceret, hvis vi begyndte at regne på systemer af flere elektroner, så derfor kunne man fristes til at tro, at der nu ikke var flere korrektioner til energierne for atomer, for hvordan kan det blive mere kompliceret end det allerede er? Som du sikkert har gættet er legen ikke slut her, for det er nemlig sådan at kernen i et atom jo består af protoner og neutroner, og disse partikler har også et spin. Der opstår derfor en yderligere opsplitning af energierne, som er forårsaget af interaktionen mellem kernens spin og det totale impulsmoment, som elektronen har. Det totale impulsmoment som elektronen producerer vil nemlig resultere i et magnetfelt (når $J \neq 0$), og dette vil naturligvis interagere med magnetfeltet som kernens spin forårsager. For at udregne dette udtryk skal man se på det magnet felt, som det totale impulsmoment forårsager, og så udregne hvor stort det magnetfelt er i midten af atomet, der hvor kernen er (det er jo kun den del af magnetfeltet som er ved kernen, som kernen kan interagere med). Denne udledning vil vi ikke lave her, men i stedet bare postulere at den er givet ved:

$$H_{\text{hfs}} = A \langle \hat{I} \cdot \hat{J} \rangle \quad (4.29)$$

Hvilket med det samme også gælder, hvis der er flere elektroner, da det jo bare kommer an på værdien af det totale impulsmoment J . A er så en konstant der er givet ved faktorerne:

$$A = \frac{2}{3} \mu_0 g_s \mu_B g_I \mu_N \frac{Z^3}{\pi a_0^3 n^3} \quad (4.30)$$

Her er μ_0 vakuumpermabiliteten³, g_s er det samme som ved finstrukturen og μ_B er ligesom før Bohrмагнетонen. g_I er i dette regi lidt speciel, da man skulle forvente at protoner og neutroner ligesom elektroner har værdier der er ret "pæne" (tæt på heltallige værdier). Sådan forholder det sig dog ikke, og det har eksperimentelt vist sig at disse partikler har g værdierne $g_n = -3.82608545$, $g_p = 5.58569470$. Dette var et af de første tegn på, at protoner og neutroner faktisk består af andre mere fundamentale partikler, som vi i dag har fundet ud af er quarkerne. Inde i en kerne har vi generelt en masse protoner og neutroner, så det er svært at sige noget om g_I , da der vil være en kobling mellem g værdierne for de partikler der er i kernen, dog vil størrelsesordenen for denne konstant nok ikke overstige 10, så man kan bare sætte den til 2 for at undgå forvirring. μ_N svarer til μ_B for elektronen bare hvor det i stedet er for en kerne, og den er defineret som:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N} = \frac{e\hbar}{2m_e \cdot 1836} = \frac{1}{1836} \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (4.31)$$

³Vakuumpermeabiliteten er en naturkonstant der styrer styrken af magnetiske kræfter.

Vi ser altså, at μ_N er ca. 2000 gange mindre en μ_B , hvilket skyldes at massen af en proton er ca. 2000 gange større end en massen for en elektron.

For at udregne opsplitningen af energierne givet koblingen mellem det totale impulsmoment og kernens spin, skal vi dog først finde ud af hvad udtrykket $\langle \hat{I} \cdot \hat{J} \rangle$ giver. Set i lyset af hvad vi lige har lavet, så er det måske ikke så overraskende at løsningen findes ved at betragte det totale impulsmoment af hele atomet (kerne + elektron) og definere dette som F , som er givet ved $F = J + I$, og denne ændrer sig nødvendigvis ikke hvis der ikke er nogen udefrakommende kræfter. Vi bruger nu samme trick som ved finstrukturen og får:

$$\langle \hat{I} \cdot \hat{J} \rangle = \frac{1}{2}(F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)) \quad (4.32)$$

Den totale opsplitning af energierne givet ved hyperfinstrukturen er derfor givet ved:

$$H_{\text{hfs}} = \frac{1}{3}\mu_0 g_s \mu_B g_I \mu_N \frac{Z^3}{\pi a_0^3 n^3} (F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)). \quad (4.33)$$

Men vent nu lige lidt, hvis denne opsplitning egentlig er mere generel end finstruktur opsplitningen, da vi jo her også tager højde for at elektronen interagerer med kernens spin, hvorfor brugte vi så rigtig lang tid på at udlede og regne på finstrukturen? Svaret til dette er faktisk ret simpelt. Det er nemlig sådan, at den opsplitning af energierne som hyperfinstrukturen forårsager er i størrelsesordenen 10^{-5} , hvilket er ca. 1000 gange mindre end den opsplitning af energierne som finstrukturen forårsager. Det man gør er derfor at udregne korrektionerne fra finstrukturen, og derefter udregne korrektionerne til disse korrektioner, som er givet ved hyperfinstrukturen. Når man har det hele samlet så har man alle de forskellige opsplitninger af energiniveauerne.⁴.

En ting man kan spørge sig selv om her er, hvorfor er det interessant at udregne alle disse ting? Svaret til dette er faktisk ret simpelt. For finstruktur tilstandene så vi, at korrektionen til energierne for grundtilstanden simpelthen er 0, idet der jo ikke er noget impulsmoment. For hyperfinstruktur ser vi dog, at dette ikke er tilfældet. F er jo defineret som $F = I + J$, så hvis elektronen er i sin grundtilstand har den $I = 0$ og $s = \frac{1}{2}$, hvilket vil sige at $J = s = \frac{1}{2}$, så $F = I + s$ hvilket giver følgende to værdier for F , $F = |I + \frac{1}{2}|, |I - \frac{1}{2}|$. Hvis vi nu betragter et hydrogenatom, så vil I have værdien $I = \frac{1}{2}$, da protonen jo har spin $\frac{1}{2}$, og F vil derfor antage værdierne $F = 1, 0$. Vi har derfor at:

$$E_{F=1} = \frac{A}{2}(1(1+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \frac{A}{4}$$

$$E_{F=0} = \frac{A}{2}(0(0+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) = \frac{-3A}{4}$$

Denne opsplitning er ret specifik for hydrogenatomet og energiforskellen er så lille, så det lys der bliver udsendt fra denne overgang har derfor en helt specifik bølgelængde, da der ikke er andet, der udsender lys med så lav energi. Dette kan astronomer bruge til at kigge efter hydrogen ude i verdensrummet,

⁴Der findes andre korrektioner til energierne, men disse vil ikke blive gennemgået her. Andet litteratur om atomfysik kan dog konsulteres hvis man er interesseret.

for ligeså snart man ser lys med denne bølgelængde, så ved man med det samme at det stammer fra hydrogen. Det lys der bliver udsendt herfra er har nemlig en bølgelængde på ca. 21 centimeter, og derfor kalder man det 21 centimeter linjen, når man laver spektroskopi på lyset herfra. Grunden til at denne bølgelængde er ekstra god at kigge efter er, at lys med en bølgelængde på 21 centimeter ligger i radiobølge regimet, og dette lys interagerer ikke specielt meget med andet stof. Dvs. at det går igennem det meste andet materiale ude i universet. Derfor er det en god indikator, hvis man vil se hvor meget stof, der f.eks. ligger i den anden ende af vores galakse, da vi jo ikke kan se det med normalt synligt lys, da alle stjernerne ligger i vejen. Da 21 centimer linjen trænger igennem relativt ubesværet, kan vi bruge denne til at få en anelse om, hvordan stof generelt er fordelt bag stjerner, og andre ting der blokere "normalt"lys.

En anden virkelig dejlig ting ved hyperfinopsplitningen er, at det også er denne, der ligger til grund for, hvordan atomure fungerer. Her benytter man nemlig cæsium-133, hvor man ser på hyperfinopsplitningen i $6 = n$ tilstanden. Cæsium har nemlig 55 elektroner, hvoraf de første 54 elektroner fylder alle de nederste tilstande fra $n = 1$ til $n = 5$, og så er der kun 1 elektron i den yderste 6. skal. Dette gør cæsium atomet særligt stabilt, da de andre korrektioner til energierne for elektronerne (som blev nævnt eksisteret men som ikke er blevet udspesificeret her), ikke har så stor effekt her. Da cæsium-133 kernen har spin $\frac{7}{2}$, så får atomet det totale impulsmoment $F = 3, 4$. Det er overgangen mellem disse to tilstande, man bruger til at definere sekundet. Overgangen mellem de to tilstande har nemlig en energiforskel på $6.06 \cdot 10^{-6}$ eV, som svarer til lys med en bølgelængde på ca. 3,26 cm. Man har så defineret sekundet ud fra den frekvens, som lyset der bliver udsendt ved denne overgang har, hvilket er defineret som eksakt 9 192 631 770 Hz, hvor enheden Hz er $\frac{1}{s}$, og det er derfor, at man kan definere sekundet ud fra denne naturkonstant.

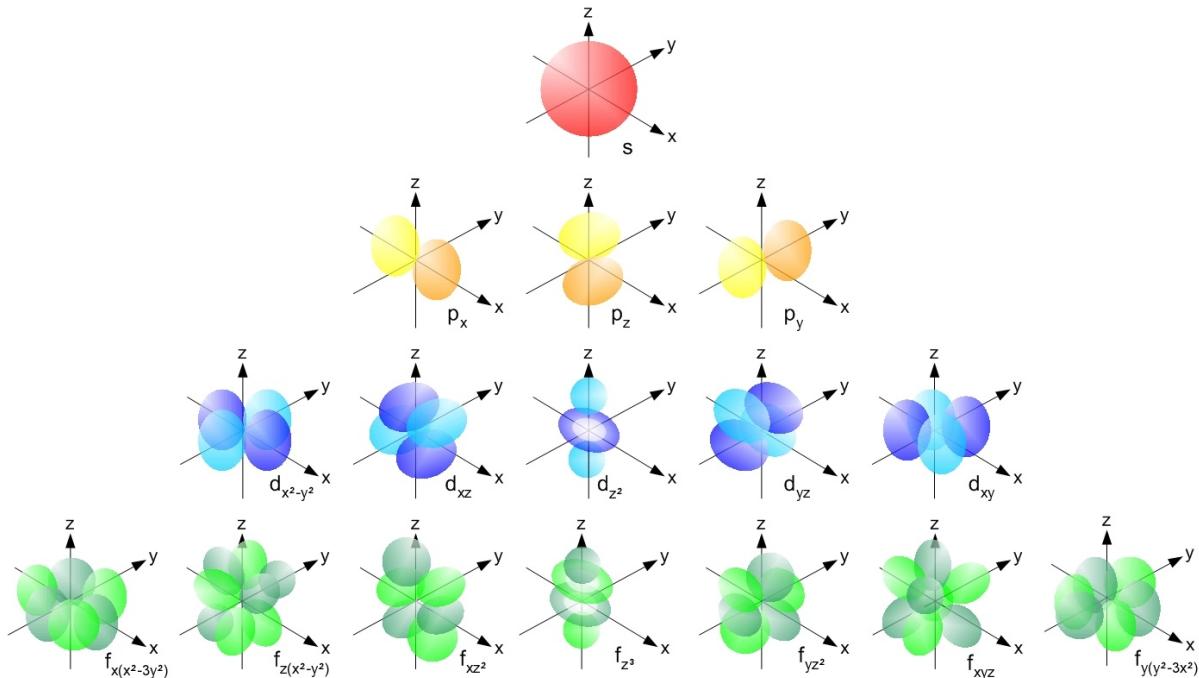
4.4 Molekylefysik

Vi har hidtil ignoreret orbitalernes rummelige form. For isolerede atomer er det nemlig ikke super vigtigt. For molekyler er det derimod essentielt, og der er vidst nogle eksempler på figur 4.4. De simpleste orbitaler er s orbitalerne. De er sfærisk symmetriske. Normalt repræsenteres de som en kugle, der angiver det område, hvor det er mest sandsynligt at finde elektronen. Hvor s orbitalerne var de eneste med deres bestemte energi, kommer p orbitalerne i sæt af tre. Her er der størst sandsynlighed for at finde elektronen i to regioner på hver sin side af atomkernen. Selve bølgefunktionen har hvert sit fortegn i disse regioner. Orbitalerne ligger langs en akse, og normalt navngives de derfor: p_x , p_y og p_z . De repræsenteres oftest som en ottetalsformet overflade med to forskellige farver til at angive fortegnet.

LCAO

Når to eller flere atomer bringes tæt på hinanden, vil deres elektroner interagere. Hvis det resulterende system er stabilt vil der dannes et molekyle. I et kovalent bundet molekyle er nogle af elektronerne ikke længere bundet til et atom, men delt imellem flere. Disse molekylære orbitaler kan dannes, som en sum af atomorbitaler. Denne metode kaldes LCAO metoden⁵. Når to s orbitaler blandes dannes to kombinationer: en bindende σ orbital eller en antibindende σ^* orbital. Den bindende orbital dannes ved at

⁵LCAO står for Linear Combination of Atomic Orbitals, eller på dansk: Linearkombination af Atomorbitaler.



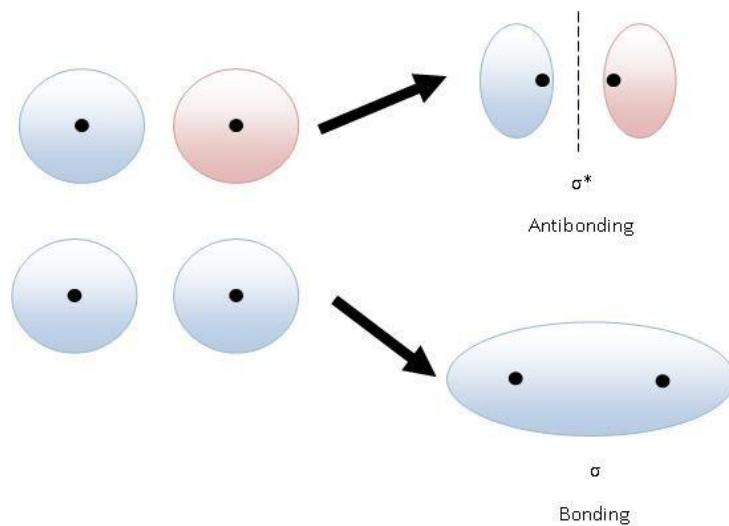
Figur 4.4: Formen på s, p, d og f orbitalerne. Bemærk at indekserne er tre dimensionelle polynomier, som har samme symmetri som orbitalen. Kilde: Wikimedia commons.

lägge s orbitalerne sammen. Her vil der være en større sandsynlighed for at finde elektronen imellem atomkernerne, så elektronen tiltrækker kernerne stærkere end de frastøder hinanden. Det er dette der holder molekylet sammen. For den antibindende orbital trækkes atomorbitalerne fra hinanden. Der vil derfor være en lavere sandsynlighed for at finde elektronen imellem kernerne, der derfor frastøder hinanden. Ser vi på et brintmolekyle H₂ som eksempel, ses det, at de indgåede atomer her har en s orbital der indgår i bindingen. Brintmolekylet har derfor en bindende og en antibindende orbital. Molekylet indeholder i alt to elektroner. Der er plads til begge elektroner i den bindende orbital, så i grundtilstanden vil de begge være der. En let måde at tjekke, om et molekyle er stabilt, er at tælle antallet af fyldte bindende orbitaler, minus antallet af fyldte antibindende orbitaler. Dette tal kaldes molekylets bindingsorden. Er bindingsordenen større end nul vil, der være en energievinst for atomerne ved at være i molekylet. Ellers kan molekylet ikke eksistere. Brintmolekylet har en fyldt bindende orbital, så bindingsordenen er 1. Molekylet er derfor stabilt. Dette passer med hvad vi ser i virkeligheden, hvor H₂ er et stabilt molekyle⁶. De to forskellige orbitaler for H₂ er vist på figur 4.5.

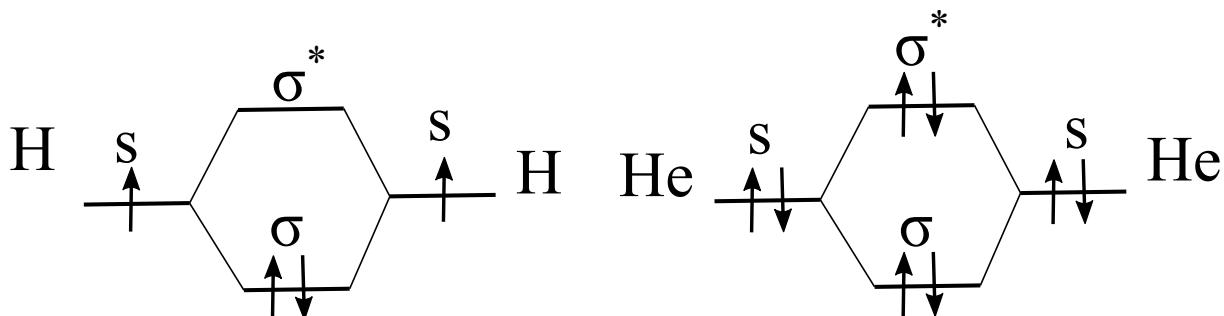
Nu er vi i stedet på et molekyle bestående af to helium atomer. Her indgår de samme orbitaler, men både den bindende og den antibindende orbital er fyldt. Bindingsordenen er derfor nul. Ganske rigtigt findes dihelium ikke i virkeligheden, og helium er *meget* uvillig til at reagere⁷. Helt generelt vil stabile molekyler have høj bindingsorden.

⁶Der dog er ret reaktivt.

⁷Helium indgår i ingen kendte molekyler.



Figur 4.5: Dannelsen af en bindende σ og en antibindende σ^* orbital. Kilde: chemwiki.ucdavis.edu



Figur 4.6: Diagram over orbitalerne i brintmolekylet og i dihelium. Pilene angiver elektronernes spin.

Binding med p orbitaler

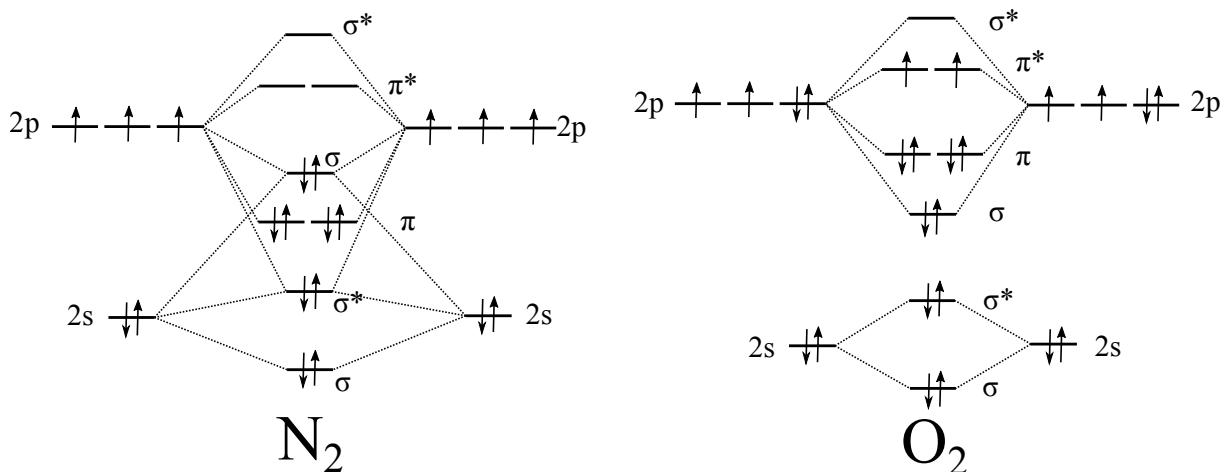
Når bindingen involverer p orbitaler, er der lige pludseligt langt flere orbitaler involveret i bindingen. Ligesom for s orbitalerne kan bindingen dannes langs bindingsaksen. Her vil de to p orbitaler, der ligger langs aksen binde på samme måde som s orbitalerne gjorde det. Her dannes igen et sæt af en σ orbital og en σ^* orbital. De resterende p orbitaler indgår også i bindingen. De p orbitaler der er vinkelrette på bindingsaksen vil også kunne overlappet. Her kaldes orbitalerne π orbitaler. Der vil være to bindende π orbitaler og to antibindende π^* orbitaler, svarende til de fire p -orbitaler der indgår i dem. Overlappet imellem p -orbitalerne er mindre for π -bindingen end for σ -bindingen, så normalt er opsplitningen mindre her.

Vi kan opstille en række regler for hvordan atomorbitalerne blander, når molekylet binder.

1. Atomorbitaler overlapper kun, når deres fortegn er det samme.
2. Når to atomorbitaler blander dannes to molekylære orbitaler, en bindende og en antibindende.

3. Hvis to orbitaler skal blande må de have omtrent samme energi.
4. Hver molekyleorbital kan indeholde to elektroner, en med spin i hver retning.
5. Elektronstrukturen kan konstrueres ved at placere alle elektronerne med så lav en energi som muligt⁸.
6. Når flere orbitaler har samme energi placeres elektroner først enkeltvist, når alle de relevante orbitaler har en elektron, tilføjes elektron nummer to.
7. Bindingsordenen af et diatomart molekyle er antallet af bindende elektronpar, minus antallet af antibindende elektronpar.

Regel nummer 1 sørger for at σ og π orbitalerne ikke interagerer. Forskellige σ -orbitaler derimod er i principippet frie til at interagere. I de fleste tilfælde bliver vi redet af regel nummer 3. For de fleste atomer har s - og p -orbitalerne stor nok forskel i deres energi til, at det ikke giver mere end en mindre korrektion til det endelige billede. Da vi betragter problemet kvalitativt har det ingen betydning. Det vil dog have en betydning for diatomare molekyler med kvælstof(N) eller lettere grundstoffer⁹. Her ligger den bindende σ orbital for p -orbitalerne højere i energi end den bindende π orbital.



Figur 4.7: Molekyleorbitaldiagrammer for ilt og kvælstof molekyler. Bemerk ombytningen af π - og σ -orbitalerne i N_2 .

Er atomerne ikke de samme vil reglerne stadig gælde. Man skal blot huske at s -orbitaler giver σ orbitaler, mens p orbitaler giver både σ orbitaler og dobbelt så mange π orbitaler.

Vi behøver ikke at bekymre os om d - eller f -orbitaler. Når vi kommer så langt ned i det periodiske system, at de bliver relevante, vil alt være metaller, der sjældent binder kovalent med hinanden. Metalbinding er et helt andet emne, der på trods af at det er fascinerende, ligger uden for det vi vil dække her.

⁸Dette kaldes Aufbau princippet.

⁹Det er grundstofferne: bor(B), kulstof(C) og kvælstof(N).

Tilsvarende regler gælder når man giver sig til at bygge større molekyler. Her er elektronerne nogle gange begrænset over et lille område af molekylet, men især π bindinger har en tendens til at flyde sammen. I organiske molekyler så som benzen vil elektronerne ofte kunne bevæge sig frit over store dele af molekylet.

Kapitel 5

Planetbevægelse

I dette kapitel skal vi undersøge klassisk bevægelse i stjernesystemer. Specifikt skal vi kigge på Keplers love og ud fra Lagrangemekanik undersøge, hvordan planeter, kometer og lignende bevæger sig omkring tungere objekter såsom stjerner. Vi vil tage udgangspunkt i det generelle tolegemeproblem, hvor to legemer påvirker hinanden med en indbyrdes centralkraft. Herefter vil vi kigge på det særlige tilfælde, hvor denne kraft er omvendt proportional med afstanden imellem de to legemer kvadreret, og til sidst sætter vi denne kraft til at være tyngdekraften. Til dette vil vi introducere keglesnit og vise, at bevægelserne der fremkommer kan beskrives ud fra de geometriske former, der fås ved at snitte en kegle på forskellige måder.

5.1 Planetbaner og excentricitet

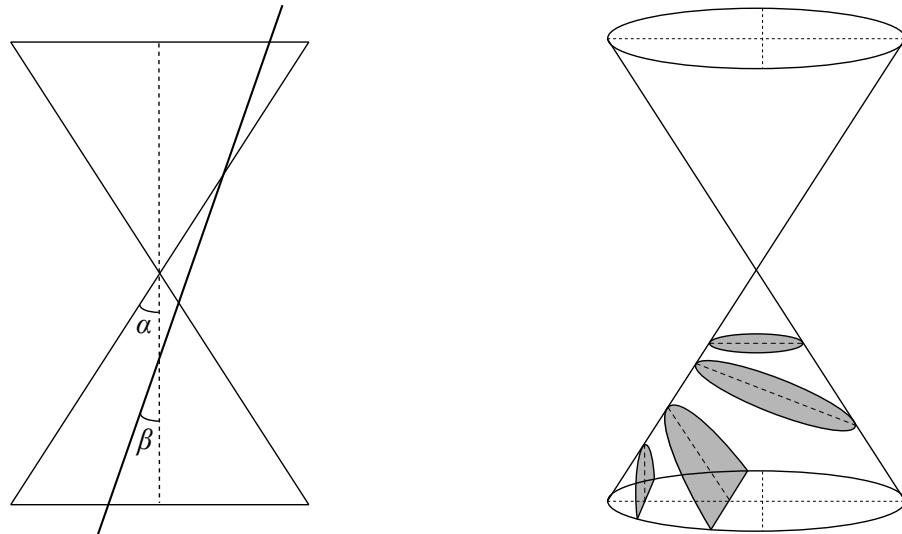
Når objekter er i bevægelse om et centralt legeme, for eksempel en planet omkring en stjerne, kan deres baner generelt have tre forskellige former: Elliptiske, parabolske og hyperbolske. Formen af disse afhænger af banernes excentricitet ε , som beskriver, hvor tæt banerne er på at være perfekt cirkelformede.

Excentricitet fra keglesnit

Ses på en dobbeltkegle dannet af en ret linje, der roterer omkring en fastlåst akse, og et plan der skærer denne kegle, figur 5.1a, da kan excentriciteten af det keglesnit, der opstår, beskrives ved

$$\varepsilon \equiv \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}. \quad (5.1)$$

Her betegner α og β vinklen mellem den horisontale akse i keglen og henholdsvis keglesiden og planet. For α og β skal det gælde, at $0 < \alpha < \pi/2$, da keglen skal være en kegle og ikke blot en vertikal eller horizontal linje, og $0 \leq \beta \leq \pi/2$, da planet må være alt fra og med vertikalt til og med horisontalt. Nogle af de keglesnit der fremkommer ved dette, kan ses på figur 5.1b, og de fremkommer på følgende måder:



(a) En dobbeltkegle med vinkel α til den horizontale akse (stiplet linje) skæres af et plan (breddere linje) med en vinkel β til den vertikale akse.

(b) Banerne fremkommer ved keglesnit med forskellige vinkler (fra øverst): Cirkel ($\varepsilon = 0$), ellipse ($0 < \varepsilon < 1$), parabel ($\varepsilon = 1$) og hyperbel ($\varepsilon > 1$).

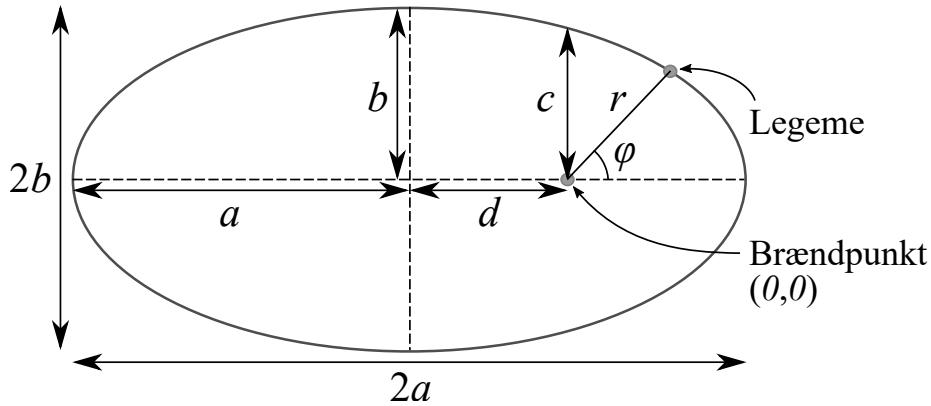
Figur 5.1: En dobbeltkegle og dens keglesnit, som resulterer i forskellige planetbaner.

- **Elliptiske baner:** Idet planet skærer keglen i en vinkel større end keglens vinkel¹, således at $\beta > \alpha$, vil elliptiske baner forekomme, da planet skærer begge sider af keglen, hvorfor banen er lukket. Excentriciteten af disse baner bliver derved $\varepsilon < 1$. Cirkelbaner er et specialtilfælde af de elliptiske baner, hvor excentriciteten er $\varepsilon = 0$.
- **Parabolske baner:** Når planet skærer keglen i en vinkel lig keglens vinkel, $\alpha = \beta$, opstår en parabolsk bane. Siden denne bane er parallel med keglesiden, vil denne være grænsen mellem lukkede og åbne baner. Excentriciteten af sådanne baner er $\varepsilon = 1$.
- **Hyperboliske baner:** Tilbage er når planet skærer dobbeltkeglen i en vinkel mindre end keglens vinkel, så $\beta < \alpha$, hvorved der dannes en hyperbolisk bane, da planet kun skærer hver af keglerne i dobbeltkeglen ét sted, hvorfor der dannes en åben bane. Ud fra de givne vinkler er excentriciteten af en hyperbolisk bane givet ved $\varepsilon > 1$.

Fysisk definition af excentricitet

Mens denne beskrivelse af excentricitet virker fint til matematisk at beskrive ellipser, parabler og hyperbler, da er den ikke specielt brugbar til beregning af excentriciteten af planetbaner, da man ikke har en kegle i rummet at gå ud fra. Af denne grund findes en anden og ækvivalent definition af excentricitet, som tager

¹Dette afsnit gør sig gældende så længe, at planet ikke skærer dobbeltkeglen i samlingspunktet mellem de to kegler, altså hvor de to kegler mødes, da der så ville være tale om degenererede keglesnit.



Figur 5.2: Elliptisk bane hvor a og b betegner henholdsvis den halve storakse og den halve lilleakse, d er forskydningen af brændpunktet fra ellipsens centrum, c er afstanden af et linjestykke fra brændpunktet til punktet på ellipsen, hvor dette linjestykke er vinkelret på storaksen, og r er afstanden fra brændpunktet til et virkârligt sted på ellipsen i en vinkel φ . Ved udregninger antages brændpunktet at ligge i $(0,0)$.

udgangspunkt i de parametre, som kan måles for en planetbane:

$$\varepsilon \equiv \frac{d}{a}. \quad (5.2)$$

Her er a den halve storakse, og d er afstanden fra et brændpunkt til centrum af banen, se figur 5.2.

Excentriciteten af en planetbane bruges til at beregne afstanden mellem to objekter, hvor det ene objekt befinder sig i bane om det andet i vilkårlig vinkel φ , som angivet på figur 5.2. Ligningen for banens radius, som funktion af vinklen af et objekt, ligning (5.7), kan findes ved at konvertere formlerne for en elliptisk bane med nulpunkt i et brændpunkt, ligning (5.3), en parabolisk bane, ligning (5.4), og en hyperbolisk bane, ligning (5.5), fra kartesiske koordinater:

$$1 = \frac{(x + d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (5.3)$$

$$y^2 = c^2 - 2cx \quad (5.4)$$

$$1 = \frac{(x - \delta)^2}{\Gamma^2} - \frac{y^2}{\eta^2}, \quad (5.5)$$

hvor a , b og d er givet ved følgende formler:

$$\begin{aligned} a &= \frac{c}{1 - \varepsilon^2} \\ b &= \frac{c}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ d &= a\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.6)$$

og Γ , δ , η og c er konstanter, til polære koordinater. Dette viser sig at give én og samme ligning

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}, \quad (5.7)$$

hvilken vi senere viser at planetbaner opfylder.

5.2 Tolegemeproblemet

Til at udlede Keplers love, er det relevant at kende lidt mere til det problem vi arbejder med. Vi starter med et mere generelt tilfælde, end det vi vil undersøge, nemlig det generelle tolegemeproblemet. Det er et system hvor følgende er opfyldt: Systemet skal indeholde præcis to legemer, der påvirker hinanden med en indbyrdes central, konservativ kraft. At kraften er central betyder, at den udelukkende afhænger af afstanden mellem de to legemer. At den er konservativ betyder, at arbejdet den udfører på et af legemerne, ikke afhænger af vejen taget, men kun af start- og slutpunkt for vejen.

Vi kigger på to legemer med massen m_1 og m_2 , der betragtes som punktpartikler, se figur 5.3. Vi opskriver først systemet, som et inertialsystem, det vil sige et system, der bevæger sig med konstant hastighed i forhold til alle andre inertialsystemer. Dette system kan betragtes som værende i hvile, og det må ikke være roterende. I et inertialsystem har hvert legeme en vektor, der går fra origo og ud til legemet, henholdsvis \vec{r}_1 og \vec{r}_2 . Legemerne påvirkes af en fælles tiltrækningskraft, henholdsvis \vec{F}_{21} og \vec{F}_{12} , som antages at være konservativ og central. Da kræfterne er konservative, kan de udledes fra en potentiel energi $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Vi vil senere sætte denne kraft til at være en gravitations kraft af størrelsen, $Gm_1m_2/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2$, med tilhørende potentiel energi

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (5.8)$$

Bemærk her, at den potentielle energi kun afhænger af afstanden mellem legemerne, og ikke de individuelle vektorer. Dette er hvad det vil sige, at kraften er central, og det betyder også, at den potentielle energi ikke afhænger af hvilket inertialsystem, vi vælger. Potentielle energier, med denne egenskab, kaldes translationelt invariante. Det er altså lige meget for kraften og den potentielle energi, hvor origo ligger. Der gælder derved nærmere, at $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, og det giver mening at introducere en ny vektor, \vec{r} , som vi kalder den relative position:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (5.9)$$

Afstanden imellem de to legemer, r , er således størrelsen af vektoren \vec{r} , og $V = V(r)$.

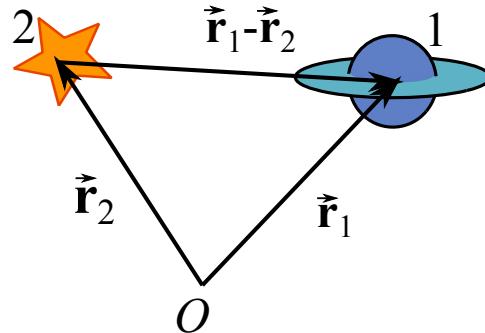
Nu kan problemets Lagrangefunktion opskrives:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(r) \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 + \frac{Gm_1m_2}{r}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dette kunne også være opskrevet ud fra Newtons love, men i dette tilfælde holder vi os til vores nyligt lærte Lagrangenmekanik.

5.3 Massemidtpunkt, relative koordinater og reduceret masse

Vi skal vælge hvilke generaliserede koordinater, vi vil opskrive og løse systemet i. Indtil videre har vi bare opskrevet problemet i et almindeligt inertialsystem med kartesiske koordinater og et vilkårligt nulpunkt.

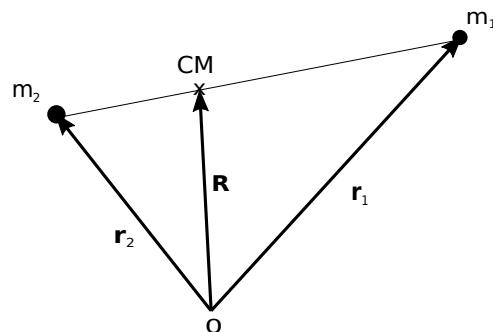


Figur 5.3: Illustrerer vektorer \vec{r}_1 og \vec{r}_2 fra origo til hver af de to legemer, samt den relative positionsvektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ af legeme 1 i forhold til legeme 2.

Dog lægger systemet tydeligvis op til at man benytter et relativ koordinat, \vec{r} , som en af vores generaliserede koordinater. Da systemet er centralt og kun involverer to legemer og kræfter, der følger en lige linje, behøver vi ikke mere end et 3-dimensionelt koordinat til hvert legeme². Så indtil videre skal der bruges et koordinat mere, for at vi har lige så mange koordinater, som forventede frihedsgrader. Her vælges et koordinat, kaldet massemidtpunktet, eller "centre of mass coordinate" (med endepunkt CM), som betegnes \vec{R} . Den er defineret som

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad (5.11)$$

hvor M betegner den totale masse for systemet: $M = m_1 + m_2$. Da \vec{R} involverer en sum af de vægtede vektorer, viser det sig, at massemidtpunktet ligger på linjen mellem de to legemer, dannet af $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$.



Figur 5.4: Massemidtpunktet for de to legemer ligger ved $\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)/M$ på linjen mellem de to legemer.

Den totale impuls, \vec{P} , for systemet er den samme, som den totale masse lagt til ændringsraten for \vec{R} i

²de oprindelige koordinater er \vec{r}_1 og \vec{r}_2

tiden:

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = M \dot{\vec{R}}. \quad (5.12)$$

Den totale impuls for systemet er konstant, da systemet ikke påvirkes af udefrakommende kræfter. Derfor må $\dot{\vec{R}}$ være konstant, og der findes således et inertialsystem hvor $\dot{\vec{R}} = \vec{0}$ (inertialsystemer er systemer, der ikke accelererer).

For at kunne introducere \vec{r} og \vec{R} som generaliserede koordinater i Lagrangefunktionen skal den kinetiske og potentielle energi omskrives til at være afhængig af dem, i stedet for de gamle koordinater. Vi ved allerede, at den potentielle energi let kan skrives, som afhængende kun af den relative afstand r . For den kinetiske energi skal vi først omskrive \vec{r}_1 og \vec{r}_2 til at afhænge af vores generaliserede koordinater. Fra definitionen af \vec{R} i ligning (5.11), kan \vec{r}_1 isoleres, og ved introduktion af definitionen af \vec{r} fås:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}. \quad (5.13)$$

Det samme kan gøres med \vec{r}_2 , hvor der fås:

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}. \quad (5.14)$$

Den kinetiske energi bliver så:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} (m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + m_2 \dot{\vec{r}}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(m_1 \left[\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right]^2 + m_2 \left[\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right]^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

som reduceres yderligere til

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2, \quad (5.16)$$

ved introduktion af en såkaldt "reduceret masse" μ . Parameteren $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ har enheder af masse.

I de generaliserede koordinater er den kinetiske energi det samme, som en traditionel kinetisk energi for to "fiktive" partikler, en med massen M , der bevæger sig med samme hastighed som CM, og en med masse μ , der bevæger sig med samme hastighed, som den relative position \vec{r} . Derfor kan den samlede Lagrangefunktion splittes op i to dele, en for den relative bevægelse, og en for CM-bevægelsen:

$$\begin{aligned} L &= K - V = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \left(\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \right) \\ &= L_{CM} + L_{rel}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Derved kan de to koordinater løses som to separate problemer.

5.4 Bevægelsesligningerne

Ud fra den opskrevne Lagrangefunktion kan bevægelsesligningerne for systemet findes. Fra hovedemnet om Lagrangenekanik har vi Euler-Lagrange relationerne, ligning (1.50). Ved at benytte dem fås først bevægelsesligningerne for \vec{R} (bemærk her at \vec{R} teknisk set er en tre-dimensionel vektor, så der er tale om tre ligninger, for X , Y og Z , som ellers er ens³). Da Lagrangefunktionen ikke direkte afhænger af \vec{R} giver Euler-Lagrangeligningen i forhold til koordinaten \vec{R} at:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{0}, \quad (5.18)$$

som betyder, at $\dot{\vec{R}}$ er konstant. Dette er allerede forklaret med, at den totale impuls for systemet er bevaret. Det kan også forklares ud fra, at Lagrangefunktionen er uafhængig af \vec{R} , hvorfor der er tale om et neglibibelt koordinat. Nærmere opfører L_{CM} sig som en Lagrangefunktion for en fri partikel, med masse M og position \vec{R} . At det er et neglibibelt koordinat betyder i sidste ende, at vores system nødvendigvis kun har en enkelt frihedsgrad, fremfor de to, som var forventet.

Hvis Euler-Lagrangerelationen anvendes med hensyn til den 2. koordinat, \vec{r} , fås:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\begin{bmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{bmatrix} = \vec{F}_{res}. \quad (5.19)$$

At gradienten af den samlede potentielle energi på et af legemerne, $\vec{\nabla}V$, er lig den resulterende kraft på legemet op til et fortegn, blev kort nævnt i mekanikkapitlet, men skyldes udelukkende, at vi kun arbejder med konservative kræfter.

For at få bevægelsen for det relative koordinat skal vi bare løse Newtons 2. lov for en enkelt partikel med reduceret masse μ og position \vec{r} , i et potentiale $V(\vec{r})$.

Massemidtpunktsreferencesystemet

Vi kan vælge et inertialsystem hvori $\dot{\vec{R}} = \vec{0}$, netop fordi $\dot{\vec{R}}$ er konstant. Her vil den totale impuls for systemet være nul, og $L_{CM} = 0$. Derved bliver vores Lagrangefunktion

$$L = L_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}). \quad (5.20)$$

Problemet er reduceret til et etlegemeproblem, hvilket også var forventet, siden \vec{R} var et overflødig koordinat.

³Med ens menes der, at alle operationer vi benytter påvirker de tre koordinatligninger ens.

Bevaring af impulsmoment

Da der ikke er udefrakommende kræfter på systemet, må det, udover at betyde at totalimpulsen er bevaret, også betyde, at det totale impulsmoment (*angular momentum*) også er bevaret. Det totale impulsmoment vil, ud fra de to oprindelige koordinater \vec{r}_1 og \vec{r}_2 , være summen af de to legemers impulsmoment:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2 . \quad (5.21)$$

Der benyttes her symbolet $\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$ for det totale impulsmoment, fordi man med ved brug af et stort bogstav indikerer, at der er tale om en sum af samme fysiske størrelse for flere legemer. I CM-referencesystemet, hvor origo er valgt til $\vec{R} = \vec{0}$, fås specifikt fra ligningerne (5.13) og (5.14) at:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (5.22)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r} . \quad (5.23)$$

Derved fås, at det totale impulsmoment bliver:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} - \frac{m_2 m_1}{M} \vec{r} \times \left(-\frac{m_1}{M} \right) \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{m_1 m_2}{M^2} \left(m_2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_1 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right) \\ &= \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} . \end{aligned} \quad (5.24)$$

hvor $m_1 m_2 / M$ er erstattet med den reducerede masse μ . Herved ser vi også, at det totale impulsmoment for systemet i CM systemet svarer til det ækvivalente impulsmoment for en enkelt partikel med massen μ og positionen \vec{r} . Da det totale impulsmoment er bevaret, må vektoren $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ være konstant i både størrelse og retning. Dette betyder, at de to vektorer beholdes indenfor et låst plan (2 dimensioner), som vi kan vælge som xy -planen. Derved har vi, udover at reducere tolegemeproblemet til et ækvivalent etlegemeproblem, desuden reduceret problemet fra et i 3 dimensioner til 2 dimensioner. Grunden til at vi tidligere har behandlet Lagrangefunktionen og tilhørende, som være en-dimensionel med hensyn til \vec{r} , skyldes at alle operationer, vi har foretaget, på \vec{r} , foretages ækvivalent på alle 3 rumlige dimensioner, og derved let kan overføres tilbage til et 3-dimensionelt system.

De to bevægelsesligninger

Vi har reduceret det oprindelige problem til kun at afhænge af en vektor \vec{r} , og vi har reduceret \vec{r} til at være to-dimensionel. Dette betyder, at vi formentlig skal bruge to rumlige koordinater til, at beskrive problemets bevægelse fuldstændigt, hvor vi for eksempel kunne anvende x , y -koordinater. Da vi har med en bevægelse, der formentligt er cirkulær eller elliptisk, at gøre, er det nok smartere at vælge vores koordinater til at være polære, det vil sige en radius, r , (bemærk at denne er en skalar og ikke en vektor), og en vinkel, φ . Dette giver en Lagrangefunktion på formen

$$L = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - V(r) . \quad (5.25)$$

Da Lagrange-funktionen ikke direkte afhænger af φ (udifferentieret), vil $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$, og derved giver Euler-Lagrangeligningen, at $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$. Da må

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{konstant} = \ell. \quad (5.26)$$

At konstanten her kaldes ℓ skyldes specifikt, at for polære koordinater (faktisk cylindriske koordinater), med et impulsmoment udelukkende i z -retningen, vil størrelsen af impulsmomentet ℓ for et legeme, være givet ved $\mu r^2 \dot{\varphi}$. I dette tilfælde er vores problem netop ækvivalent med problemet for et enkelt legeme, hvor massen er givet ved μ .

Da Euler-Lagrangeligningen for φ giver, at $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, må φ være et negligerbart koordinat, og hele problemet burde altså kunne beskrives ud fra det ene koordinat $r(t)$, som et endimensionelt problem.⁴

Euler-Lagrangeligningen for det radielle komponent r bliver

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad (5.27)$$

og således

$$\mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{dV}{dr} = \mu \ddot{r}. \quad (5.28)$$

Problemet ud fra kun r

Da φ blev fundet til at være et negligerbart koordinat, kan vi nøjes med at beskrive systemet ud fra en enkelt koordinat r . φ ændrer sig altså stadigvæk i tiden, men pointen er her at vores Euler-Lagrangeligning fortæller os, at vi kan finde et udtryk, der kan beskrive bevægelsen i φ udelukkende ud fra bevægelsen i r . Fra forrige afsnit kan vi finde, at

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2}. \quad (5.29)$$

Det lader os eliminere $\dot{\varphi}$ fra vores bevægelsesligning for r .

$$\begin{aligned} \mu \ddot{r} &= -\frac{dV}{dr} + \mu r \frac{\ell^2}{\mu^2 r^4} \\ &= -\frac{dV}{dr} + \frac{\ell^2}{\mu r^3}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Denne ligning har samme form, som Newtons 2. lov for en partikel i 1 dimension med massen μ , påvirket af en fysisk kraft $-\frac{dV}{dr}$ og en fiktiv uadgående centrifugalkraft F_{cf} . Her har centrifugalkraften formen

$$F_{cf} = \frac{\ell^2}{\mu r^3}. \quad (5.31)$$

⁴Det er nu endimensionelt netop fordi r ikke er en vektor, men en skalar.

Derved har vi reduceret problemet, vedrørende relativ bevægelse af to legemer i tre dimensioner, til et problem vedrørende et enkelt objekt, der bevæger sig i en dimension.

En centrifugalkraft kommer traditionelt frem, når man bruger et referencesystem, der ikke er et inertialsystem, men roterer i forhold til tilsvarende inertialsystemer. Det er en form for fiktiv tilføjelse til Newtons 2. lov, for at kompensere for, at man ikke befinner sig i et inertialsystem, men regner på det, som om man gør. I dette tilfælde giver det også mening, at der fremkommer en centrifugalkraft, da vi har reduceret vores bevægelse til en dimension, og derved betragter objekterne, som værende ikke-roterende i forhold til hinanden.

Centrifugalkraften kan betragtes ud fra en fiktiv addition til den potentielle energi, eller nærmere en såkaldt "centrifugalbarriere":

$$F_{\text{cf}} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{l^2}{2\mu r^2} \right) = -\frac{dV_{\text{cf}}}{dr}. \quad (5.32)$$

Her er $V_{\text{cf}} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$ centrifugalkraftens fiktive addition til den potentielle energi, i forhold til vores referencesystem. Bevægelsesligningen kan så skrives

$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} [V(r) + V_{\text{cf}}(r)] = -\frac{d}{dr} V_{\text{eff}}(r) \quad (5.33)$$

hvor der fås en effektiv potentiel energi for systemet,

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + V_{\text{cf}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}. \quad (5.34)$$

Energibevarelse

Hvis vi ganger med $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ på begge sider af vores radielle bevægelsesligning, ligning (5.33), får

$$\mu \ddot{r} \frac{dr}{dt} = -\frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} V_{\text{eff}}(r). \quad (5.35)$$

På venstresiden skal vi anvende en kæderegel modsat for at omskrive udtrykket som vi gerne vil have. Der gælder, at

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right) = \frac{1}{2} \mu \frac{d}{dt} \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \mu 2\dot{r}\ddot{r}. \quad (5.36)$$

På højresiden af ligning (5.35) kan vi anvende følgende resultat af at bruge kædereglen:

$$\frac{dV(r(t))}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{dV}{dr}. \quad (5.37)$$

Dermed får vi den samlede ligning til at være;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right) = -\frac{d}{dt} V_{\text{eff}}(r). \quad (5.38)$$

Omskrives dette får vi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}} \right) = 0, \quad (5.39)$$

eller nærmere

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{konstant}. \quad (5.40)$$

Dette er rent faktisk den totale mekaniske energi for systemet (i vores valgte referencesystem), hvilket kan ses, hvis vi husker tilbage på, hvor V_{eff} og V_{cf} kom fra:

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}. \quad (5.41)$$

Hvis vi erstatter ℓ med $\mu r^2 \dot{\varphi}$ får vi netop at energiligningen er

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 + V(r) = E, \quad (5.42)$$

da $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2$ netop er den kinetiske energi for en partikel med masse μ , skrevet i polære koordinater.

Hvorfor er det så relevant at kigge på energien for systemet? Man får netop, at hvis energien er positiv eller 0, så har man ikke en bunden interaktion mellem de to legemer. Det vil sige, at i eksemplet med en stjerne og en planet, så vil planeten undslippe stjernens gravitationelle indflydelse, og vil ikke kredse om den. Dette kan vi gå tilbage og vise senere.

Baneligningen

Ligning (5.33) er en differentialligning der giver r som funktion af tiden:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} V_{\text{eff}}(r). \quad (5.43)$$

Dog kunne det være mere interessant at kende radius som funktion af vinklen φ i stedet. Dette burde teknisk set være muligt at finde, da vi regner med, at vores baner er gentagne, det vil sige, at hvis de er lukkede, så rammer vi efter en hel omgang det samme punkt. Det vil nemlig være lettere at forklare banens form hvis $r = r(\varphi)$. Vi ønsker derved at omskrive differentialligningen til en for r , hvor der differentieres med hensyn til φ i stedet for t . Til dette er det nødvendigt at foretage en substitution: $u = \frac{1}{r}$. Grunden til at foretage denne substitution er udelukkende, at det er lettere at komme frem til det resultat, som vi ønsker. Hvis vi finder en differentialligning for u med hensyn til φ , og kan løse denne, så er det nemlig let at substituere tilbage til r .

Vi kan bruge kæderegralen til at omskrive differentialoperatoren $\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi}. \quad (5.44)$$

Vi har tidligere fundet at $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2}$. Derved fås

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2} \frac{d}{d\varphi}. \quad (5.45)$$

Når substitutionen til u anvendes fås

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell u^2}{\mu} \frac{d}{d\varphi}. \quad (5.46)$$

Nu skal dette benyttes til at omskrive venstre side af differentialligningen for r , ved at omskrive \ddot{r} . Først fås

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} r = \frac{d}{dt} \frac{1}{u} \\ &= \frac{\ell u^2}{\mu} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{u} \right). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Her differentierer vi med en kæderegel igen! Så når $1/u$ differentieres gøres det ved først at differentiere med hensyn til u og derefter differentiere u i forhold til φ .

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}. \quad (5.48)$$

Så fås der:

$$\ddot{r} = -\frac{\ell}{\mu} \frac{du}{d\varphi}. \quad (5.49)$$

Dette kan anvendes når der ønskes et udtryk for \ddot{r} :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} (\dot{r}) = \frac{\ell u^2}{\mu} \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{\ell}{\mu} \frac{du}{d\varphi} \right) \\ &= -\frac{\ell^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Da den fysiske kraft (den ikke-fiktive kraft mellem legemerne) vi arbejder med, er konservativ, kan vores differentialligning for r , ligning (5.33), skrives om, ved at anvende, at størrelsen af kraften, $F(r) = -\frac{d}{dr} V(r)$:

$$\mu \ddot{r} = F(r) + F_{cf}(r) = F(r) + \frac{\ell^2}{\mu r^3}. \quad (5.51)$$

Når vi anvender substitutionen for \ddot{r} og r på begge sider fås:

$$-\frac{\ell^2 u^2}{\mu} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = F + \frac{\ell^2 u^3}{\mu}. \quad (5.52)$$

Til sidst flyttes der rundt, så der fås en differentialligning for u , på formen

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -u(\varphi) - \frac{\mu}{\ell^2 u(\varphi)^2} F. \quad (5.53)$$

For en given central kraft mellem to legemer, har vi derved fået en transformert radial ligning for den nye variabel $u(\varphi)$. Hvis den kan løses for at få en ligning for $u(\varphi)$, så er det let at substituere tilbage med $u = \frac{1}{r}$.

Kepler banerne

Indtil videre har de fleste af udledningerne været gjort generelt for et tilfælde, hvor der er tale om et hvilket som helst system, der opfylder følgende: Systemet skal indeholde præcis to legemer, der påvirker hinanden med en indbyrdes central, konservativ kraft.

Nu undersøges det mindre generelle system, hvor kraften, der omtales, afhænger af $\frac{1}{r^2}$, specifikt tilfældet hvor dette er den klassiske gravitationskraft, der følger Newtons gravitationslov.

$$F(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} = -Gm_1m_2u^2. \quad (5.54)$$

Når netop denne kraft indsættes i ligningen for u , ligning (5.53), fås:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u(\varphi) + \frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2}. \quad (5.55)$$

Det unikke ved netop den gravitationelle kraft⁵ er, at de netop medfører at det sidste led i ligningen bliver en konstant. Dette gør ligningen betydeligt lettere at løse.

For at løse den, laves der dog yderligere en substitution: $w(\varphi) = u(\varphi) - \frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2}$. Substitueres denne ind i ligningen for u (samtidig med den dobbelt differentierede udgave for φ) fås differentialligningen:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} = -w(\varphi). \quad (5.56)$$

Denne differentialligning svarer til ligningen for en simpel harmonisk svingning, der har løsningen

$$w(\varphi) = A \cos(\varphi - \delta). \quad (5.57)$$

A er en positiv konstant, og δ er en konstant der beskriver en forskydning fra vores valg af start af φ . Det vil sige at δ kan sættes til 0 ud fra valget af nulpunkt for φ , hvilket vi gør her. Hvis der substitueres tilbage til u fås således:

$$u(\varphi) - \frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2} = A \cos \varphi, \quad (5.58)$$

eller,

$$u(\varphi) = \frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2} + A \cos \varphi. \quad (5.59)$$

Da u må være en invers længde, må både A og $\frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2}$ også være det. Derved kan der indføres en enhedsløs, positiv konstant $\varepsilon = \frac{A\ell^2}{Gm_1m_2\mu}$, således at ligningen kan samles til

$$u(\varphi) = \frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2} (1 + \varepsilon \cos \varphi). \quad (5.60)$$

⁵og lignende kræfter der afhænger af $\frac{1}{r^2}$

Der introduceres desuden længdekonstanten $c = \frac{\ell^2}{Gm_1m_2\mu}$:

$$u(\varphi) = \frac{1}{c}(1 + \varepsilon \cos \varphi). \quad (5.61)$$

Nu mangler vi blot at tage den reciprokke $1/u$ af det hele, for netop at substituere tilbage til $r(\varphi)$:

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (5.62)$$

Dette er vores generelle løsning for ethvert system, der indeholder to legemer, som tiltrækker hinanden gravitationelt. Den beskriver afstanden mellem de to legemer, som en funktion af vinklen for vores samlede legeme i det valgte polære koordinatsystem, i termen af en ubestemt positiv konstant ε samt en længdekonstant $c = \ell^2/(Gm_1m_2\mu)$.

Bemærk her, at den fundne ligning for systemet, er præcist den vi har for keglesnittene, med nulpunkt taget i brændpunktet for vores bevægelser. Her ses, at med $\varepsilon = 0$, får vi en cirkulær bane, når $\varepsilon \rightarrow 1$ er det en ellipse der bliver tynd og udstrakt. Når $\varepsilon = 1$ fås en parabel, og når $\varepsilon > 1$ en hyperbolsk bane.

Nu skal det huskes, at det system vi har løst her, har været et tilsvarende system svarende til et legemes bevægelse, som er tiltrukket til et nulpunkt. Dette skyldes, at vi har anvendt det relative koordinat r mellem de to legemer, og kun har regnet med en tiltrækkende kraft. Vi har vist, at dette er en gyldig måde at gøre det på, og at vi stadigvæk får ellipsebaner, for det bundne tilfælde. Vi har her vist, at det, for to vilkårlige legemer, som påvirker hinanden gravitationelt, er gyldigt at sætte brændpunktet i en af de to legemer, og stadigvæk få en ellipsebevægelse for det andet legeme. Perspektiverende kunne vi kigge på et system med jorden og solen. Vi vil få den præcist samme ellipsebane, hvis vi satte nulpunktet ved solen og regnede jordens bevægelse om solen, som vi ville gøre, hvis vi satte nulpunktet ved jorden og regnede solens bevægelse om jorden.

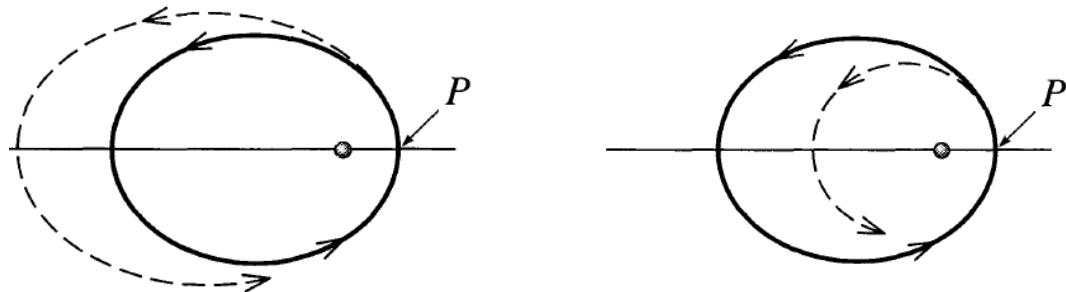
Normalt ville man dog i stedet betragte de elliptiske bevægelser, der fremkommer, når man sætter brændpunktet til at være i massemidtpunktet for de to legemer. Dette vil i stedet give de to legemer hver sin elliptiske bane, med samme excentricitet, men en skaleret halve storakse, i forhold til deres indflydelse på massemidtpunktet.

Det kan betragtes som om, at den ellipsebane, der fremkommer ved at sætte et af legemerne til, at være i brændpunktet, svarer til en sammenlægning af to elliptiske bevægelser.

5.5 Baneskift

I de tidligere afsnit er det blevet beskrevet, hvordan objekter i baner bevæger sig, men hvad nu hvis et objekt vil skifte fra en bane til en anden? I dette afsnit vil det blive beskrevet, hvordan et sådan baneskift vil kunne foretages, når der er tale om elliptiske baner, da det er disse baneskift, som vi er interesseret i, når vi for eksempel sender en satellit i kredsløb om Jorden. For disse elliptiske baner er den generelle formel

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \delta)}, \quad (5.63)$$



(a) Positivt boost således, at hastigheden øges, hvilket resulterer i et baneskift udad.
(b) Negativt boost således, at hastigheden sænkes, hvorved der foretages et baneskift indad.

Figur 5.5: Et objekts oprindelige bane er angivet med en streg, mens dets nye bane efter baneskift er vist med en stiplet linje. Baneskiftet foretages her i punktet P , hvilket kaldes periapsis, hvor punktet, der ligger lige modsat P på den vandrette akse, kaldes apoapsis. (Kilde: Classical Mechanics, John R. Taylor, figur 8.12.)

hvorfra ligning (5.62) er et særligt tilfælde med $\delta = 0$. I ligning (5.63) er δ en vinkel, der angiver forskydningen fra nulpunktet. Grunden til at δ ikke findes i ligning (5.62) er, at der kun er tale om én bane, hvorfor der kan vælges et koordinatsystem således, at $\delta = 0$. I det der nu er tale om et baneskift, vil der være tale om to baner, hvorfor koordinatsystemet ikke nødvendigvis kan lægges således, at δ er nul.

Der betragtes nu et scenarie med en satellit, der skifter bane. Til at starte med befinner satellitten sig i en bane, der kan beskrives ved ligning (5.63), og den har energien E_1 , impulsmomentet ℓ_1 og baneparametre c_1, ε_1 og δ_1 . En almindelig måde at manøvrere en satellit på er, at affyre dens raketter i et kort tidsinterval, hvilket kaldes et boost. Man skelner imellem et positivt boost, hvor farten øges, og et negativt boost, hvor den sænkes. Sammenlignet med omløbstiden er boostet meget kortvarigt, hvorfor det derfor kan betragtes som øjeblikkeligt. Satellitten har således samme position før og efter boostet, men en ny hastighed. Sker boostet i en vinkel φ_0 giver det, at $r_1(\varphi_0) = r_2(\varphi_0)$:

$$\frac{c_1}{1 + \varepsilon_1 \cos(\varphi_0 - \delta_1)} = \frac{c_2}{1 + \varepsilon_2 \cos(\varphi_0 - \delta_2)}. \quad (5.64)$$

Ud fra den nye hastighed kan man finde energien for den nye bane, E_2 , samt impulsmomentet for samme, ℓ_2 , hvorefter det er muligt at finde de nye baneparametre c_2 og ε_2 . Indsættes de fundne og kendte værdier i ligning 5.64, vil den eneste ubekendte være δ_2 , som så kan beregnes.

Der er nu fundet et udtryk til beregning af baneskift, og i det følgende vil der blive betragtet et særligt tilfælde af dette, nemlig hvor der forekommer et boost, når en satellit befinner sig i periapsis.

Tangentielt boost i periapsis

Først skal det lige fastsættes, hvad der menes med periapsis. Periapsis er det punkt på en bane, hvor der er mindst afstand mellem de to indgående objekter, hvilket i figur 5.5 er angivet med et P . Ligeledes findes et navn for det punkt på en bane, hvor der er størst afstand mellem de to indgående objekter, hvilket er

apoapsis, og denne kan på figur 5.5 ses som liggende lige modsat P på den vandrette akse.⁶

Scenariet, som betragtes nu, er en satellit, der foretager et baneskift, ved at affyre sine raketter enten fremad eller bagud tangentIELT til dens bane, idet den befinder sig i periapsis, φ_0 . Koordinatsystemet for dette vælges således, at dets x -akse går gennem periapsis, hvor afstanden mellem Jorden og satellitten skal være kortest. Dette sker når argumentet til cosinus, $\varphi_0 - \delta_1$, er nul, da $\cos(0) = 1$. Idet det vides, at φ_0 er, når satellitten befinder sig i periapsis, og koordinatsystemets x -akse går gennem periapsis, da vil $\varphi_0 = 0$, hvorfor $\delta_1 = 0$. Grundet at raketterne affyres i den tangentelle retning, vil satellittens retning ikke ændre sig under boostet, hvorfor den nye bane også vil have periapsis⁷ i φ_0 , og det derfor også må gælde, at $\delta_2 = 0$. På denne måde kan ligning (5.64) reduceres til

$$\frac{c_1}{1 + \varepsilon_1} = \frac{c_2}{1 + \varepsilon_2}. \quad (5.65)$$

Der inføres nu en boostfaktor λ , som er svarende til forholdet mellem hastigheden efter, v_2 , og før boostet, v_1 ,

$$\lambda = \frac{v_2}{v_1}. \quad (5.66)$$

Idet $\lambda > 1$ vil boostet være fremadrettet (positivt), da $v_2 > v_1$. For $0 < \lambda < 1$ vil boostet være tilbagerettet (negativt), da $v_2 < v_1$.

Der laves nu to antagelser: For det første antages det, at satellittens masseændring grundet boostet er så lille, at den er negligerlig, således at den reducerede masse μ er konstant før og efter boostet. For det andet antages det, at boostet foregår øjeblikkeligt, hvorfor satellitten er i samme punkt, φ_0 , før og efter boostet. Ud fra dette, og med viden om, at impulsmomentet er proportionelt med hastigheden, vil følgende gøre sig gældende:

$$\ell_2 = \lambda \ell_1, \quad (5.67)$$

og da c er proportional med ℓ^2 fås følgende:

$$c_2 = \lambda^2 c_1. \quad (5.68)$$

Indsættes dette i ligning (5.65) og isoleres excentriciteten af bane 2, ε_2 , fås

$$\varepsilon_2 = \lambda^2 \varepsilon_1 + (\lambda^2 - 1). \quad (5.69)$$

Fra ligning (5.69) kan det ses, at boostes satellitten positivt, $\lambda > 1$, vil den nye bane have en excentricitet større end den første bane, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. De to baner vil altså have samme periapsis, men satellitten vil i den nye bane komme længere væk fra Jorden, se figur 5.5a. Ved en stor nok λ vil excentriciteten af den nye

⁶Periapsis og apoapsis er de generelle betegnelser for disse punkter. For bestemte andre situationer findes også andre navne for disse punkter: For en bane omkring Solen benævnes periapsis og apoapsis henholdsvis perihelium og aphelium, og for en bane omkring Jorden benævnes disse henholdsvis perigæum og apogæum.

⁷Det er også muligt, at dette punkt kan være apoapsis, hvilket vil vise sig til sidst i afsnittet, så den mest præcise beskrivelse her ville være at sige, at den nye bane vil have apsis (et af yderpunkterne) i første banes periapsis, hvorfor $\delta = 0 \vee \delta = \pi$, men forskellen på disse er, om $\cos(\varphi_0 - \delta) = 1 \vee \cos(\varphi_0 - \delta) = -1$.

bane blive større end 1, hvilket er svarende til en hyperbolsk bane, hvilken er åben, hvorfor satellitten kan undslippe fra Jorden.

Hvis i stedet satellitten boostes negativt, således at $\lambda < 1$, vil den nye banes excentricitet være mindre end den første banes, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, hvorfor den nye bane vil ligge indenfor den første bane, men de to baner vil stadig have samme periapsis.

Mindskes λ nås et punkt, hvor $\varepsilon_2 = 0$, og her kommer satellitten i en cirkulær bane omkring Jorden. Mindskes λ fortsat opnås en negativ excentricitet, hvilket giver fin mening, når det indsættes i formlen for afstanden mellem to objekter, hvor det ene er i banebevægelse om det andet, ligning (5.63), der så ser ud på følgende måde

$$r(\varphi) = \frac{c}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)}, \quad (5.70)$$

hvilket er svarende til afstanden fra Jorden og til apoapsis, hvorfor periapsis i den første bane i dette tilfælde vil sammenfalde med apoapsis.

Kapitel 6

Geometrisk Optik

6.1 Introduktion

I geometrisk optik bruger man en simpel model for lys, hvor lyset beskrives som stråler, der bevæger sig i lige linjer. Denne model siger ikke noget om den præcise natur af lyset, men sammen med nogle få love er den tilstrækkelig til at give en beskrivelse af både refleksion og refraktion (brydning) af lys. På figur 6.1 del A) er der vist et eksempel på en indgående lysstråle, der reflekteres og brydes ved en overflade mellem to materialer. Der er også tegnet en stiplet linje på figuren, som er vinkelret på overfladen. En sådan linje kaldes for overfladens normal, og den bruges som en reference til at måle indgangsvinklen θ_a , refleksionsvinklen θ_r og brydningsvinklen θ_b , der også er vist på figuren. Disse processer er beskrevet ved de følgende to love.

Refleksionsloven: Denne lov siger, at når en lysstråle reflekteres ved en overflade, så vil indgangsvinklen være lig refleksionsvinklen:

$$\theta_a = \theta_r \quad (6.1)$$

Brydningsloven: Denne lov siger, at når en lysstråle brydes ved overgangen mellem to forskellige materialer a og b , så er forholdet mellem indgangsvinklen og brydningsvinklen beskrevet ved den følgende formel¹:

$$n_a \sin(\theta_a) = n_b \sin(\theta_b) \quad (6.2)$$

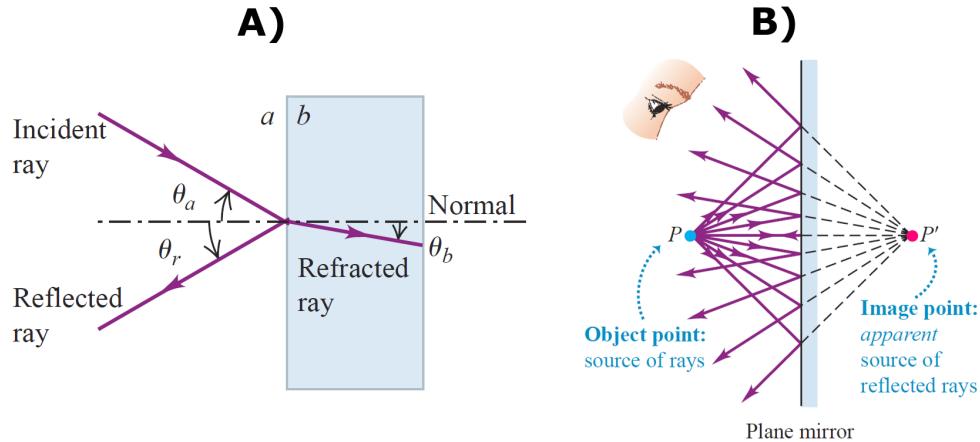
Her er n_a og n_b brydningsindekserne for de to materialer. Brydningsindekset for et materiale er defineret som

$$n = \frac{c}{v}, \quad (6.3)$$

hvor c er lysets fart i vakuum, og v er lysets fart i materialet. I en mere komplet model, hvor lyset beskrives som elektromagnetiske bølger, kan man udlede begge disse love, men her vil de blot blive betragtet som eksperimentelle resultater.

¹Nogle gange kaldes denne lov også for Snells Lov.

Udover disse to love og vores simple model for lyset, er der to andre koncepter, som er helt centrale for geometrisk optik. Det første er konceptet om et *objekt*, hvilket her defineres som enhver form for genstand, der kan udsende eller reflektere lys. Det andet er konceptet om et *billede*, der er den reflekterede eller brudte version af objektet, som en observatør rent faktisk ser. Der er vist et eksempel på figur 6.1 del B), som illustrerer de to koncepter.



Figur 6.1: På figurens del A) ses en indkommende lysstråle, der reflekteres og brydes ved overgangen mellem to materialer a og b. På del B) ses et punktobjekt placeret i punktet P og objektets billede i punktet P', der er dannet af spejlet. Billedpunktet P' er som illustreret det punkt, hvor observatøren ser objektet være.

6.2 Billeddannelse

Billeddannelse ved Fladt Spejl

Som et første eksempel på billeddannelse betragtes et simpelt punktobjekt (et objekt uden en fysisk udstrækning), der placeres i nærheden af et fladt spejl, som det er vist på figur 6.2 del A). Her er s afstanden mellem objektet og spejlet, der kaldes for objektafstanden, mens s' er afstanden mellem billedet og spejlet, der kaldes billedafstanden. Derudover er der de to punkter, P og P' , der angiver placeringen af objektet og billedet, og som derfor kaldes for henholdsvis objekt- og billedpunktet. På figuren er der også vist et eksempel på en lysstråle, der danner en vinkel θ i forhold til overfladens normal (stippled linje). Det centrale at bemærke her er, at man lige så godt kunne have valgt en hvilken som helts anden vinkel θ' , og man ville stadig have det samme billedpunkt.

Når man skal arbejde med objekt- og billedafstandene, s og s' , er der nogle fortegnskonventioner, som man skal huske at følge. Disse er givet ved de første 2 af de følgende regler. Den 3. regel er ikke relevant for eksemplet her med et fladt spejl, men den bliver vigtig, når man skal arbejde med refleksion og brydning ved krumme overflader. De 3 regler er som følger:

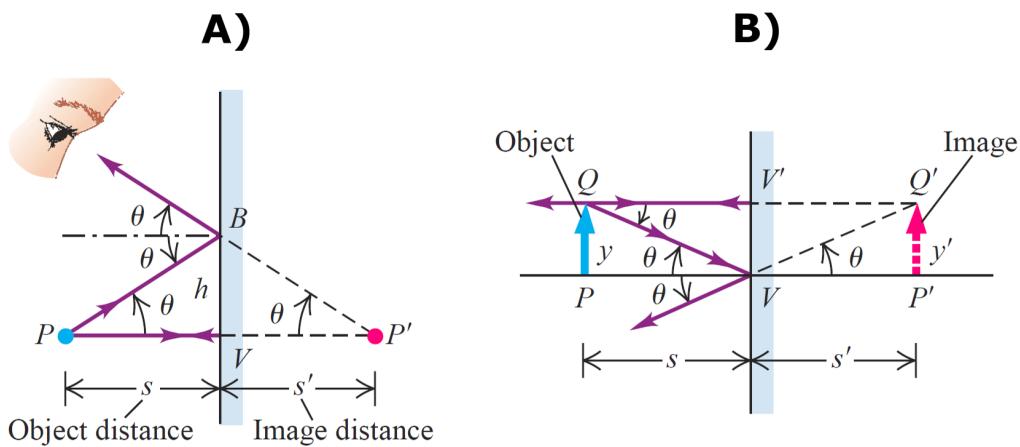
1. Regl for objektafstand: Når et objekt er på samme side af den reflekterende eller brydende overflade som den indkommende lysstråle, er objektafstanden s positiv. Ellers er den negativ.

2. Regl for billedafstand: Når et billede er på samme side af den reflekterende eller brydende overflade som den udgåede lysstråle, er billedafstanden s' positiv. Ellers er den negativ.

3. Regl for krumningsradius af en sfærisk overflade: Når krumningscentrummet C er på samme side som den udgående lysstråle, er krumningsradiusen r positiv. Ellers er den negativ.

Kigger man igen på eksemplet med et fladt spejl, ser man hurtigt, at objektet altid vil være på samme side som den indgående lysstråle, og at billedet altid vil ligge på den anden side af den udgående lysstråle. Derfor kan man for et fladt spejl give følgende resultat:

$$s = -s' \quad (\text{for fladt spejl}) \quad (6.4)$$



Figur 6.2: På figurens del A) ses et punktobjekt og billedobjekt ved et fladt spejl samt objektafstanden s og billedafstanden s' . På del B) ses en pil i blå der udgør objektet, som her har en udstrækning, mens billedet af objektet er angivet med den lyserøde pil, der også har en udstrækning. Også her er der angivet objekt- og billedafstand.

Selvom dette simple eksempel giver en god illustration af nogle af de grundlæggende begreber i geometrisk optik, er det ikke et særligt realistisk eller relevante eksempel, da punktobjekter ikke findesude i naturen. Det er derfor oplagt at kigge på et lidt mere generelt tilfælde, hvor objektet har en fysiskudstrækning. Et eksempel på dette kan være en pil med en given længde y , som det er vist i figur 6.2 del B). Her ses det, at når man har et objekt med en udstrækning y , så får man også et billede med enudstrækning y' . I dette eksempel består objektet af alle punkter på linjen PQ , mens billedet består af allepunkter på linjen $P'Q'$. Kigger man på et enkelt punkt af objektet, f.eks Q , ser man også, at dette punktsvarer til et enkelt punkt af billedet, hvor det her er Q' . Altså vil en observatør, på samme side af spejlet som den indgående lysstråle, se pilespidsen ligge i punktet Q' og ikke Q . En vigtig ting her er, at ligesom med s og s' , så er der også en fortegnskonvention for størrelserne y og y' . Denne konvention siger blot, at hvis objekt- og billedpilen peger i samme retning, så er y og y' positive, mens hvis objekt- og billedpilen

peger i modsatte retninger, så er y positiv og y' er negativ.

Når man arbejder med objekter og billeder, der har en udstrækning, definerer man typisk en tværgående forstørrelse m som forholdet mellem højden af billedet og objektet på følgende måde:

$$m = \frac{y'}{y} \quad (6.5)$$

Benytter man fortegnskonventionen for y og y' , ses det, at hvis objekt- og billedpilen peger i samme retning, så er m positiv, og hvis de peger i modsatte retninger er m negativ. Kigger man igen på figur 6.2 del B), kan man se, at objekt- og billedpilen altid vil pege i samme retning for et fladt spejl, og at y og y' vil være lige store. Dette giver altså følgende resultat

$$m = +1 \quad (\text{for fladt spejl}) \quad (6.6)$$

Som det ses i de to gennemgåede eksempler ovenover, er det muligt at danne billeder af både punktobjekter og objekter med udstrækning ved et fladt spejl. Det er dog begrænset, hvor anvendeligt dette er, da man ikke kan variere den tværgående forstørrelse m , hvilket er essentielt, hvis man vil bruge geometrisk optik, til at lave forskellige teknologier som mikroskoper eller teleskoper. For at opnå denne frihed til at variere m , må man gå væk fra det simple tilfælde med et fladt spejl, og i stedet kigge på refleksion og brydning ved krumme overflader.

Billeddannelse ved Krumme Overflader

Det næste man kan kigge på indenfor geometrisk optik er, hvad der sker, hvis man skifter det flade spejl ud med et spejl med en krum overflade. Som et første eksempel er det oplagt at kigge på et hulspejl, hvor spejlet består af et udsnit af en cirkel, som det er vist på figur 6.3. Her er R cirklens radius, C kaldes for krumningscentrummet og ligger i cirklens centrum, V , der ligger i spejlets centrum, kaldes for spejlets vertex og den vandrette streg langs CV kaldes for den optiske akse. På samme måde som i (6.4) vil man gerne finde en sammenhæng mellem objekt- og billeddafstanden s og s' . Dette kan gøres ved at lave nogle geometriske overvejelser ud fra figur 6.3. Kigger man først på trekanten PBC , ses det fra figuren at²

$$\pi = \alpha + \theta + x,$$

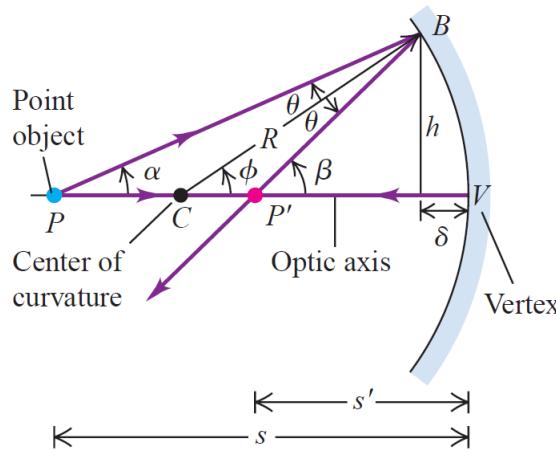
hvor x er den stump vinkel ved krumningscentrummet C . Dette siger blot, at alle tre vinkler i trekanten PBC summer op til π radianer (altså 180 grader). Man kan da bemærke, at vinklen x i trekant PBC og vinklen φ i trekant CBP' til sammen udspænder π radianer. Det betyder at

$$\pi = x + \varphi \quad \Rightarrow \quad x = \pi - \varphi$$

Sætter man dette ind i den ovenstående ligning, finder man da at

$$\varphi = \alpha + \theta$$

²Her angives vinklerne i radianer. Man finder en vinkel i radianer ud fra vinklen i grader ud fra formlen: $v_{\text{rad}} = \pi \cdot (v_{\text{grad}} / 180^\circ)$



Figur 6.3: På figuren ses et punktobjekt placeret i punktet P samt billedet af dette punktobjekt placeret i punktet P' dannet ved et hulspejl.

På samme måde kan man kigge på trekanten CBP' , hvor man ved lignende overvejelser finder at

$$\beta = \varphi + \theta$$

Ud fra disse to resultater kan man løse to ligninger med fire ubekendte, hvilket giver en ligning der relaterer α , β og φ

$$\alpha + \beta = 2\varphi \quad (6.7)$$

Husker man da på fortegnskonventionerne fra det forrige afsnit, ses det, at både s , s' og R er positive størrelser. Ideen er da, at kigge på tangens til vinklerne α , β og φ , og at udtrykke disse vha. størrelserne fra figur 6.3. Husker man, at tangens til en vinkel i en retvinklet trekant, forskellig fra den rette vinkel, kan skrives som den modstående divideret med den hosliggende katete, finder man at

$$\tan \alpha = \frac{h}{s - \delta}, \quad \tan \beta = \frac{h}{s' - \delta}, \quad \tan \varphi = \frac{h}{R - \delta}.$$

Disse tre ligninger er ikke lige til at løse, men hvis man antager, at vinklen α er lille, således at β og φ også er små, kan man lave en approksimation af tangens. Rent fysisk svarer dette til tilfældet, hvor objektafstanden s er meget større end højden af spejlet h . I forhold til approksimationen af tangens gælder det, at $\tan x \approx x$, hvis x er lille og angivet i radianer. Det bemærkes videre, at δ også vil være lille i dette tilfælde, så den kan også ignoreres. Dette giver tre ligninger

$$\alpha = \frac{h}{s}, \quad \beta = \frac{h}{s'}, \quad \varphi = \frac{h}{R}.$$

Sætter man dette ind i relationen (6.7), får man da at

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad (6.8)$$

Som det næste er det interessant at kigge på, hvad der sker, hvis man tager objektet og flytter det uendeligt (i praksis meget) langt væk fra spejlet. Fysisk vil dette betyde, at alle de indgående stråler bevæger sig parallelt med den optiske akse, som illustreret på figur 6.4 del A). I dette tilfælde vil $1/s = 0$, hvilket ifølge (6.8) må give at

$$\frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad s' = \frac{R}{2}$$

Det viser, at alle indkommende stråler vil have den samme billeddafstand s' , og altså vil alle de indgående stråler samle sig i et enkelt punkt F , som det også er vist på figur 6.4 del A). Dette punkt kaldes for spejlets brændpunkt, og afstanden fra dette til spejlets vertex kaldes for spejlets brændvidde, der betegnes f . Her har man, at brændvidden er givet ved

$$f = \frac{R}{2} \quad (6.9)$$

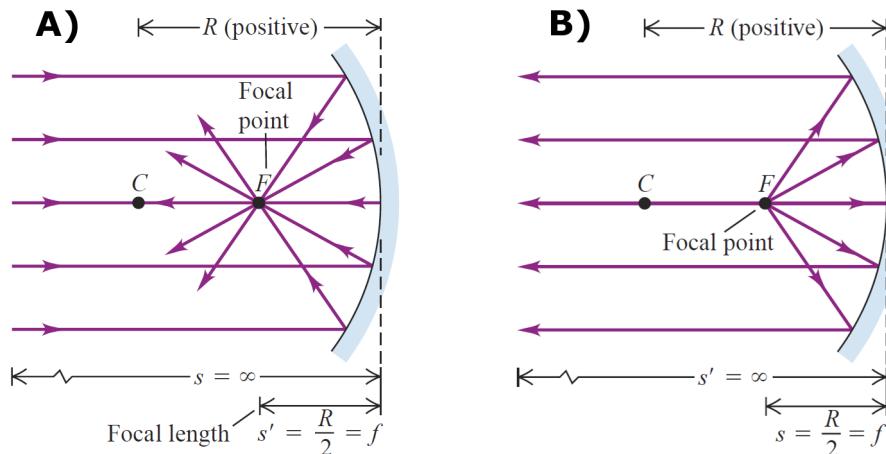
Som det ses af denne ligning afhænger brændvidden f kun af R , hvilket betyder at både brændvidden f og placeringen af brændpunktet F er uafhængige af objekt- og billeddafstanden s og s' . Brændpunkter er altså karakteristisk egenskab for et givet spejl.

Et andet interessant tilfælde, er det hvor objektet placeres i brændpunktet F , hvilket betyder at objektafstanden bliver $s = f = R/2$. Sætter man dette ind i (6.8) finder man således at

$$\frac{R}{2} + \frac{1}{s'} = \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = 0 \quad \Rightarrow \quad s' = \infty$$

Det viser, at billedet ligger uendeligt langt væk, således at alle de udgående lysstråler vil være parallelle med den optiske akse, som det er illustreret i figur 6.4 del B). Nu hvor brændvidden er blevet indført, er det mere konventionelt at skrive formel (6.8) på følgende form

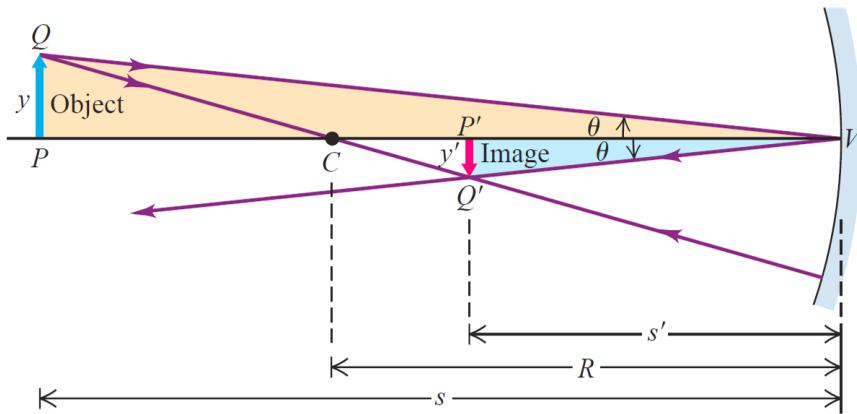
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (6.10)$$



Figur 6.4: På figurens del A) ses tilfældet hvor et objekt er placeret uendeligt langt fra et hulspejl, og hvor brændpunktet er placeret i punktet F . På del B) ses tilfældet, hvor objektet er placeret i brændpunktet F .

Det næste spørgsmål man kan stille sig selv er nu, hvad der sker, hvis man i stedet for et punktobjekt valgte et objekt med en udstrækning. Et eksempel på dette er vist på figur 6.5. Det vigtigste at bemærke her er, at man får to ensinklede trekanter PQV og $P'Q'V$. Det betyder specielt, at forholdet mellem længden af siderne PV og $P'V$, er det samme som for siderne PQ og $P'Q'$. Fra dette får man således

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (6.11)$$



Figur 6.5: På figuren ses et eksempel på refleksion af et objekt med en udstrækning ved et hulspejl.

Nu hvor de fleste egenskaber ved refleksion fra et hulspejl er dækket, kan man kigge på hvad der sker, hvis man i stedet tager et såkaldt konvekst spejl, som er et spejl, der krummer væk fra observatoren i stedet for imod. To eksempler, hvor det ene er med et punktobjekt, og det andet er et objekt med en udstrækning, er vist på figur 6.6. På del A) af figuren kan man se, at krumningsradiusen R her vil være negativ. Man kan da bruge den samme metode som for hulspejlet til at vise, at man her har relationen

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad (6.12)$$

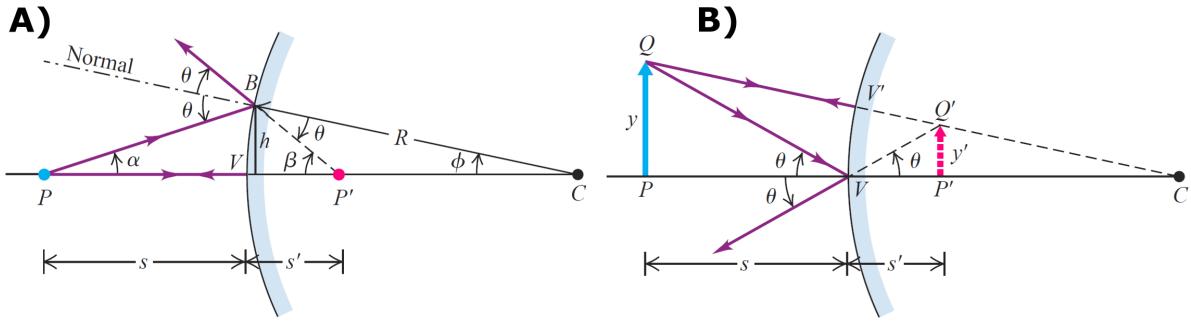
På samme måde kan man også vise at

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (6.13)$$

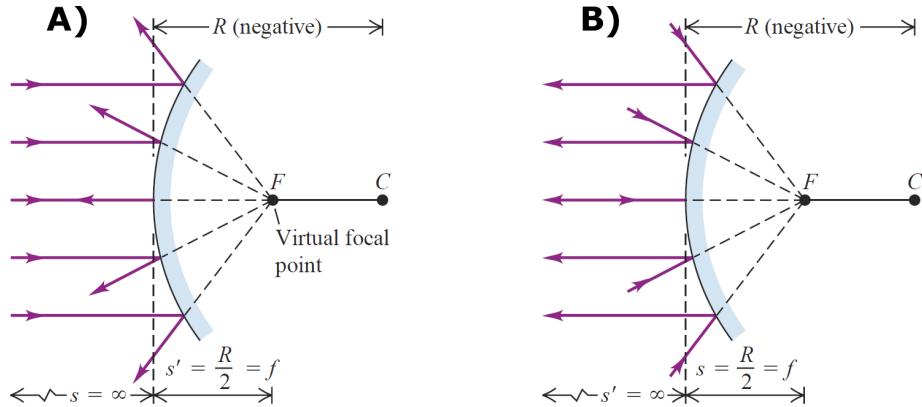
Ligesom for hulspejlet kan man også tale om brændpunkter og brændvidder for konvekse spejle. Kigger man på situationen i figur 6.7 del A), hvor de indkommende lysstråler er平行 med den optiske akse, vil de ikke samle sig i et brændpunktet på samme måde, som det var tilfældet for hulspejlet. Til gengæld vil de udgående lysstråler se ud som om, at de kommer fra brændpunktet F i en afstand f bag spejlet. Her kalder man f for brændvidden og F for et virtuelt brændpunkt. Man finder også på samme vis som før at

$$f = \frac{R}{2}$$

Den overordnede pointe er altså, at formlerne (6.5), (6.8), (6.9) og (6.10) holder både for hulspejle og konvekse spejle, så længe man husker at bruge fortegnsreglerne for s , s' og R rigtigt. Før man går videre



Figur 6.6: På figurens del A) ses et punktobjekt placeret i P, der ved refleksion ved et konvekst spejl danner billedet i P'. På del B) ses et objekt med en udstrækning, der også danner et billede ved refleksion.



Figur 6.7: På figurens del A) ses situationen, hvor objekten er placeret uendeligt langt væk fra spejlet. På del B) ses situationen, hvor objekten er placeret i det virtuelle brændpunkt F.

og kigger på, hvordan man kan bruge geometrisk optik til at beskrive linser, er det værd først at kigge på billeddannelse ved brydning for en krum overflade i stedet for ved refleksion, som det er gjort indtil nu. Et eksempel på dette, med et punktobjekt, er givet i figur 6.8. Det første man gerne vil, er at finde relationen mellem objekt- og billedafstanden. Dette kan igen gøres ved at lave nogle geometriske overvejelser. Kigger man først på trekantene PBC og $P'BC$, finder man at

$$\theta_a = \alpha + \varphi \quad \varphi = \beta + \theta_b$$

Det næste man kan gøre, er da at bruge formel (6.2) sammen med tangens til vinklerne α , β og φ . Dette giver følgende udtryk

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b \quad \tan \alpha = \frac{h}{s + \delta} \quad \tan \beta = \frac{h}{s' + \delta} \quad \tan \varphi = \frac{h}{R - \delta}$$

Det næste trin herfra er at antage, at α er lille, da det vil betyde, at alle de andre vinkler også er små. Derfor kan man lave en approksimation af både sinus og tangens til de forskellige vinkler, og bruge at δ

bliver lille i forhold til s og s' , så den også kan ignoreres. Det giver

$$n_a \theta_a = n_b \theta_b, \quad \alpha = \frac{h}{s}, \quad \beta = \frac{h}{s'}, \quad \varphi = \frac{h}{R}.$$

Bruger man udtrykket for θ_a fra før finder man da at

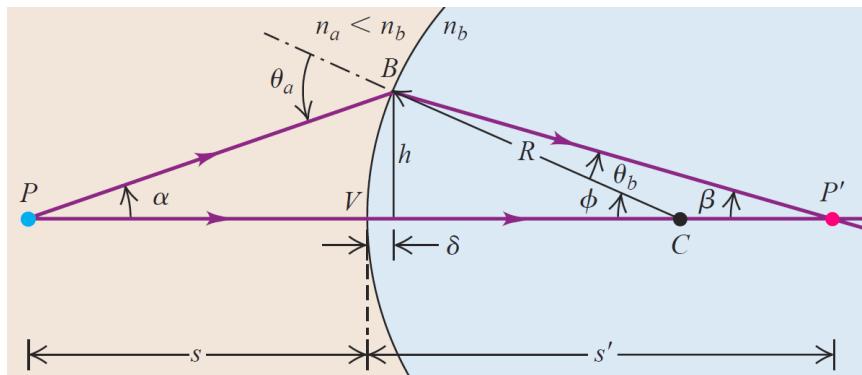
$$\theta_b = \frac{n_a}{n_b} (\alpha + \varphi),$$

og man kan da sætte det ind i udtrykket for φ fra før og få

$$\varphi = \beta + \frac{n_a}{n_b} (\alpha + \varphi) \quad \Rightarrow \quad n_a \alpha + n_b \beta = \varphi (n_b - n_a)$$

Endeligt kan man sætte de nye udtryk for α , β og φ ind i denne formel, hvilket giver det endelige resultat

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} \quad (6.14)$$



Figur 6.8: Figuren viser et eksempel på billeddannelsen af et punktobjekt ved et konvekst spejl.

Det sidste man gerne vil finde er forstørrelsen, når man har et objekt med en udstrækning. Dette gøres ved at betragte opsætningen på figur 6.9. Det første man kan bemærke er, at man for trekantene PQV og $P'Q'V$ får

$$\tan \theta_a = \frac{y}{s}, \quad \tan \theta_b = -\frac{y'}{s'}.$$

Fra (6.2) får man også at

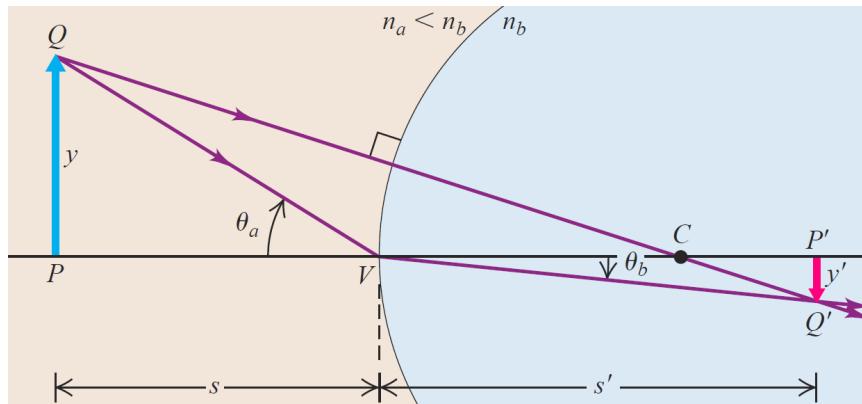
$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b$$

Så bruges det, at man for små vinkler har, at $\sin \theta \approx \tan \theta$, så man samlet set får at

$$\frac{n_a y}{s} = -\frac{n_b y'}{s'},$$

eller efter en lille omskrivning

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_a s'}{n_b s} \quad (6.15)$$



Figur 6.9: Figuren viser et eksempel på billeddannelse af et objekt med en udstrækning ved et konvekst spejl.

6.3 Linser

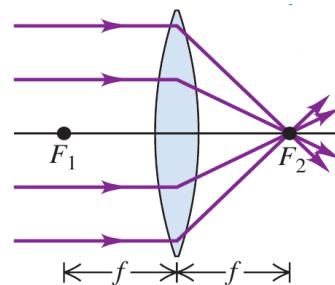
Vi vil i dette kapitel kigge nærmere på et af de mest brugte optiske værktøjer (efter det flade spejl), den tynde linse. Tynde linser bliver brugt i et utal af forskellige forsøgsopstillinger, så som optik, laser fysik og astronomi, og er derfor yderst interessante at undersøge

Tynde linser

En linse er et optisk system bestående af to brydende overflader, hvor den tynde linse består af to sfæriske overflader tæt nok på hinanden til, at afstanden imellem dem er negligerbar. I dette afsnit vil der blive gjort brug af resultaterne fra forrige afsnit omkring brydning ved sfæriske overflader. Der bruges herudover samme fortegnsregler som defineret tidligere.

En linse af formen vist i figur 6.10 har den egen skab, at når stråler parallel til den optiske akse passerer igennem linsen, dannes der et billede ved punktet F_2 . Omvendt, så vil stråler udsendt fra F_1 være parallelle til aksen efter at have passeret igennem linsen. Denne type af linse kaldes for en konvergerende linse. Punkterne F_1 og F_2 kaldes for hhv. det første og andet brændpunkt, mens afstanden f (målt fra centrum af linsen) kaldes for brændvidden. For en konvergerende linse er brændvidden f positiv. Bemærk her ligheden med det krumme spejl fra forrige kapitel.

Ligesom ved det krumme spejl, kan et konvergerende spejl danne et billede af et udstrakt objekt. Lad s og s' betegne hhv. objekt- og billedeafstanden og y og y' betegne hhv. objekt- og billedehøjden. På figur 6.11



Figur 6.10: Konvergerende tynd linse med brændpunkter F_1 , F_2 og brændvidde f .

ses strålen QA brydes igennem F_2 , mens strålen QO passerer igennem uden at ændre retning, da vi har antaget at vi arbejder med en tynd linse, hvor overfladerne i centrum er parallelle. Vinklerne α er her ens, og derved må forholdet mellem siderne i trekanterne PQO og $P'Q'O$ også være det,

$$\frac{y}{s} = -\frac{y'}{s'} \quad \text{eller} \quad \frac{y'}{s'} = -\frac{s'}{s}, \quad (6.16)$$

hvor det negative fortegn skyldes, at billedet er under den optiske akse. Vinklerne β er også ens, hvilket medfører at forholdet mellem siderne i trekanterne OAF_2 og $P'Q'F_2$ også er ens, hvorved

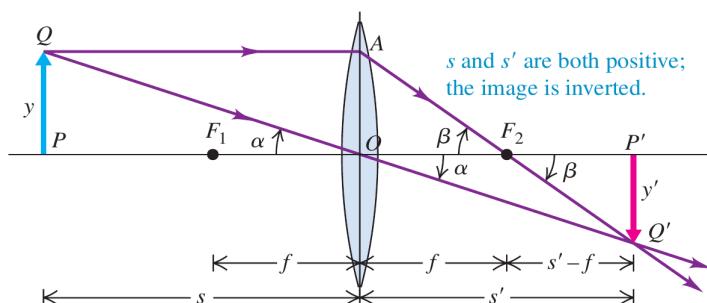
$$\frac{y}{f} = -\frac{y'}{s'-f} \quad \text{eller} \quad \frac{y'}{y} = -\frac{s'-f}{f} \quad (6.17)$$

Ud fra ligning (6.16) og ligning (6.17) får vi relationen

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}, \quad (6.18)$$

hvilket er den samme relation mellem objekt og billede, vi fandt for det konvekse spejl i ligning (6.10). Vi får herudover også et udtryk for den tværgående forstørrelse, ækvivalent til ligning (6.13),

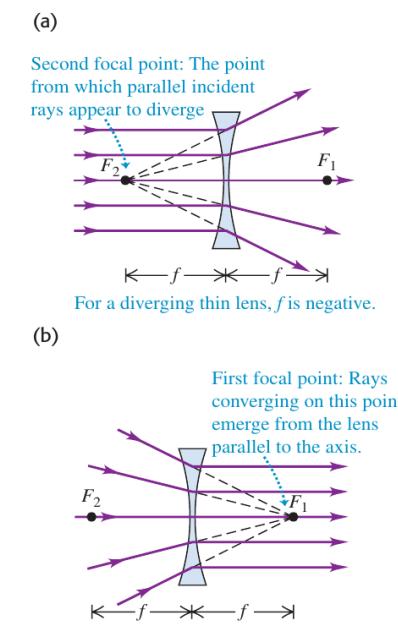
$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (6.19)$$



Figur 6.11: Model til at finde objekt position for en tynd linse.

De to ovenstående ligninger er grundligningerne for tynde linser, og er som sagt af samme form som de tidligere fundne ligninger for sfæriske spejle. Det negative fortegn i ligning (6.19) betyder, at når s og s' er positive, så vil billedet være inverteret, og y og y' vil have modsatte fortegn. Hvis vi antager at $f > 0$ (en konvergerende linse), så giver ligning (6.18) os, at når objektet er uden for det første brændpunkt F_1 ($s > f$) vil billedeafstanden s' være positiv og billedet inverteret. Når billedeafstanden er positivt, er billedet per definition på den modsatte side af linsen end objektet, og kaldes for reelt. Omvendt så vil et objekt placeret inden for det første brændpunkt ($s < f$) danne et billede med negativ billedeafstand s' . Dette billede er ikke-inverteret, og placeret på samme side af linsen som objektet. Når billedeafstanden er negativ, og billedet befinner sig på samme side af linsen som objektet, kaldes billedet for virtuelt.

I figur 6.12 vises en divergerende linse, en anden form for tynd linse. Lysstråler parallelle til den optiske akse divergere efter brydning. Brændvidden f for divergerende linser er en negativ størrelse, mens brændpunkterne F_1 og F_2 er modsat placeret i forhold til den konvergerende linse. Parallelle stråler der brydes lader til at være udsendt fra punktet F_2 , mens stråler der konvergerer mod punktet F_1 er parallelle til den optiske akse efter brydning, som set i hhv. figur 6.12a og figur 6.12b. Ud fra dette kan vi se at divergerende linser har det samme forhold til konvergerende linser, som konvekse spejle havde til konkavé spejle i forrige kapitel. Man ville kunne foretage den samme geometriske analyse som tidligere i dette kapitel, for at vise at ligning (6.18) og (6.19) også er gældende for divergerende linser.



Figur 6.12: Divergerende linse med negativ f , og brændpunkter F_1 og F_2 .

Linsemagerens ligning

Ud fra analysen af tynde linser påstår vi følgende,

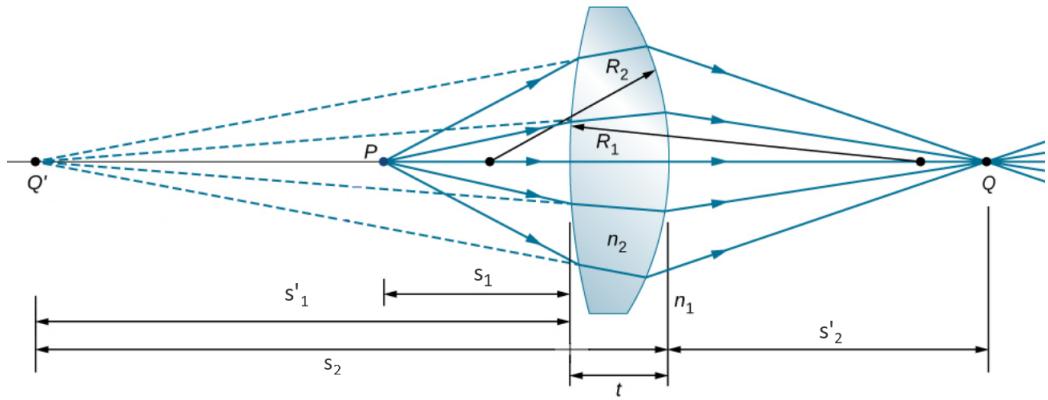
Enhver linse der er tykkere på midten end ved kanterne er en konvergerende linse, og enhver linse der er tykkere ved kanterne end på midten er en divergerende linse.

Denne påstand kan vises ved at lave en dybdegående udledning af ligning (6.18), hvorved vi også vil udlede *Linsemagerens ligning*. Denne ligning beskriver forholdet mellem brændvidde f , linsens brydningsindex n , og overfladernes radiusser R_1 og R_2 . Vi starter generelt ud med en bi-konvergerende linse (bedre kendt som en bi-konveks linse) med tykkelse t og med brydningsindeks n_2 omkredset af et materiale med brydningsindeks n_1 , illustreret i figur 6.13. De to sfæriske overflader har hhv. radiuserne R_1 og R_2 . Vi betragter punktobjektet P , med objektafstand s_1 fra den første overflade. Lysstråler udsendt fra P brydes af den første overflade og danner et virtuelt billede Q' med billedefaststand s'_1 . Ud fra de definerede fortegnskonventioner er $s_1 > 0$, $s'_1 < 0$ og $R_1 > 0$. Ud fra ligning (6.14) får man følgende relation,

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (6.20)$$

Det virtuelle billede Q' danner nu et objekt med objektafstand $s_2 = |s'_1| + t = t - s'_1$ for den anden sfæriske overflade. Stråler fra Q' brydes og danner et reelt billede Q med billedefaststand s'_2 . Her har vi at $s_2 > 0$, $s'_2 > 0$ og $R_2 < 0$. Vi kan da opstille relationen

$$\frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s'_2} = \frac{n_1}{s'_2} + \frac{n_2}{t - s'_1} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (6.21)$$



Figur 6.13: Brydning af lys igennem en bi-konveks linse med tykkelse t .

Ved at addere ligning (6.20) og ligning (6.21) får vi

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_1} + \frac{n_1}{s'_2} + \frac{n_2}{t - s'_1} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (6.22)$$

For tynde linser er det gældende at $t \ll s'_1$, hvorved man får

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_2} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (6.23)$$

Her kan s_1 betragtes som objektfstanden s , s'_2 kan betragtes som billedafstanden s' , og da vi oftest betragter linser i luft kan vi sætte $n_1 = 1$ og $n_2 = n$, hvorved vi får følgende vha. ligning (6.18)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (6.24)$$

Den ovenstående ligning kaldes for Linsemagerens ligning, som er gældende for alle tynde linser. Ved brug af de definerede fortegnsregler, kan den tidligere påstand omkring konvergerende og divergerende linser vises, da linser der er bredere ved midten vil resultere i en positiv brændvidde, mens linser der er bredere ved enderne vil resultere i en negativ brændvidde.

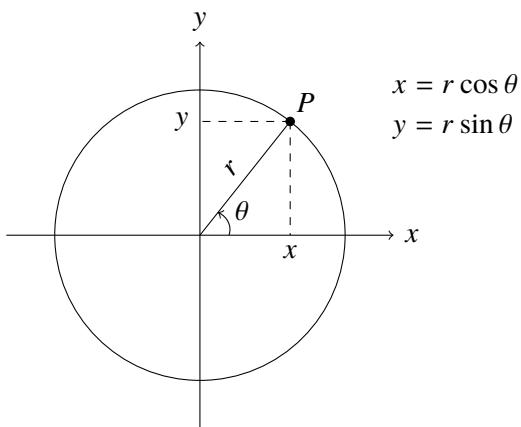
Bilag A

Matematik

I dette appendiks skal vi indføre nogle nyttige matematiske redskaber, der er essentielle for fysikken. Selvom du måske kender noget af matematikken i forvejen, så anbefaler vi alligevel kraftigt, at du læser appendikset, fordi vi sandsynligvis præsenterer det på en anden måde, end du er vant til fra gymnasiet.

A.1 Polære Koordinater, Cosinus og Sinus

Forestil dig en lille kugle for enden af en snor, der roterer rundt i en cirkelbevægelse som på tegningen nedenfor.



Kuglen roterer rundt i et to-dimensionalt plan. Lad os sige, at til et bestemt tidspunkt befinner kulgen sig i punktet P . Når vi har lagt et koordinatsystem som på tegningen kan vi beskrive punket P ved at angive dets x -værdi og y -værdi. Disse koordinater (x og y) kaldes *kartesiske* koordinater. Det er muligt at beskrive P ved hjælp af andre koordinater, fx er det i dette tilfælde smart at beskrive P ved at angive afstanden r fra centrum (origo) og vinklen θ mellem x -aksen og linjen fra origo til P , se tegningen. Disse koordinater (r og θ) kaldes *polære* koordinater.

Fordelen ved polære koordinater er tydelig, når vi tænker på en kugle i en snor, der roterer rundt. Til et senere tidspunkt har kuglen flyttet sig til et andet punkt på cirklen. I kartesiske koordinater vil det

nye punkt have både en ny x - og y -værdi, men i polære koordinater vil vinklen θ være ny, men radius r er uændret. Så i polære koordinater er det altså kun én koordinat, der ændres, når kuglen roterer rundt, hvilket er nemmere at arbejde med en to, der ændrer sig.

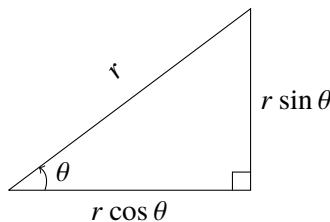
Relationerne mellem kartesiske og polære koordinater er:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\&\theta = \arctan(y/x),\end{aligned}\tag{A.1}$$

hvor \arctan er den inverse funktion til tangens¹. I udtrykkene for x og y indgår henholdsvis funktionerne cosinus og sinus. De er defineret som på tegningen: Hvis θ angiver vinklen mellem x -aksen og et punkt, så er

$$\begin{aligned}\cos \theta &= x\text{-koordinaten for punktet på cirklen med radius 1} \\ \sin \theta &= y\text{-koordinaten for punktet på cirklen med radius 1}\end{aligned}$$

Cosinus og sinus har også noget med trekanter at gøre. Hvis vi kigger på tegningen af cirklen igen, ser vi, at den indeholder to retvinklede trekanter: OxP og OyP , hvor O betegner centrum. I de to trekanter er hypotenusen r , og de to sidelænger er $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$. Vi kan altså lave følgende tegning, der illustrerer længderne i en retvinklet trekant:



Heraf følger at cosinus og sinus er forholdet mellem to længder i den retvinklede trekant:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\text{hosliggende side}}{\text{hypotenusen}} \\ \sin \theta &= \frac{\text{modstående side}}{\text{hypotenusen}}\end{aligned}$$

Vi definerer også en funktion kaldet tangens:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{modstående side}}{\text{hosliggende side}}$$

Hvis vi sætter $r = 1$ får vi fra Pythagoras' sætning at

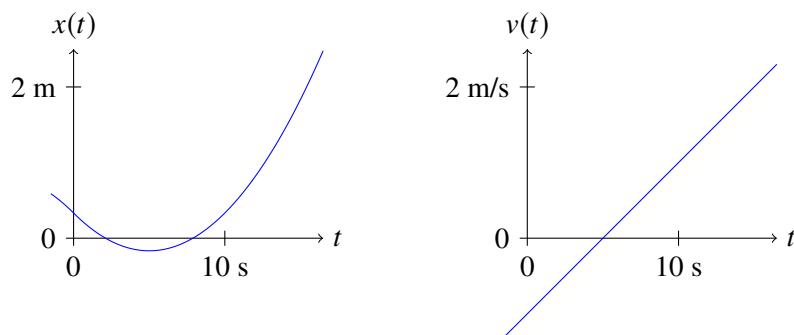
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

hvor vi har brugt notationen $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$ og $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$.

¹Dvs. at $\arctan(\tan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$.

A.2 Differentialregning

En bil kører på vejen, og den position betegnes x . Fordi bilen bevæger sig, ændrer den position sig med tiden. Hvis vi lader t betegne tiden, så er bilens position en *funktion* af tiden, og vi skriver $x(t)$. Vi siger også, at x *afhænger* af t . Nogle gange er vi dovne og nøjes med at skrive x i stedet for $x(t)$, men vi husker på, at x er en funktion af t . Måske er vi interesseret i bilens hastighed v , hvilket er ændringen i position pr. ændringen i tid. Hvis bilens position ændrer sig meget i løbet af kort tid, så er bilens hastighed stor. Med andre ord er hastigheden til et bestemt tidspunkt t altså givet som hældningen af grafen for $x(t)$, og hastigheden er altså selv en funktion af tiden, $v(t)$. Nedenfor ses et eksempel, hvor bilen kører baglæns for $t < 5$ s, standser i $t = 5$ s, og kører fremad for $t > 5$ s, hvorefter den kører hurtigere og hurtigere som $v(t)$ vokser.



Notation for Differentialkvotienter

Differentialregning går ud på at beregne hældningen af en graf. Som allerede illustreret med den kørende bil, så er dette yderst relevant i fysik. En stor del af fysik har at gøre med, hvordan noget ændrer sig, når man ændrer et eller andet, f.eks. hvordan positionen ændrer sig, når tiden ændrer sig. Tit afhænger fysiske størrelser af mere end én variabel, men for at illustrere de grundlæggende principper ved differentiering, starter vi med at kigge på funktioner af kun en variabel, altså $f(x)$. Hældningen for f mht. x betegnes

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \text{eller} \quad \frac{d}{dx}f \quad \text{eller blot} \quad \frac{df}{dx},$$

og $\frac{df}{dx}$ er en funktion af x , der kaldes *differentialkvotienten* (eller *den afledte*) af f mht. x . Når vi beregner differentialkvotienten siger vi, at vi *differentierer* (eller *afleder*) funktionen f mht. x . Du har måske allerede stødt på dette, men brugt mærke-notationen i stedet:

$$\frac{df}{dx} = f'(x).$$

Mærke-notationen $f'(x)$ er uheldig, fordi den kun kan anvendes for funktioner af én variabel; hvis funktionen afhænger af to variable, hvilken én henviser mørket så til? Da $\frac{df}{dx}$ også er en funktion, kan vi differentiere den igen, hvilket giver

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

I det særlige tilfælde, hvor vi differentierer en funktion mht. tiden t , så bruger vi tit en særlig prik-notation:

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} \quad \text{og} \quad \frac{d}{dt} \frac{df}{dt} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \ddot{f}.$$

Sidebemærkning: Hvis man vil, kan man tænke på $\frac{d}{dx}$ som en operator, der opererer på funktionen f . Når vi ganger operatoren $\frac{d}{dx}$ på f fra venstre, vil dens operation være at finde hældningen af f mht. x . I sig selv giver $\frac{d}{dx}$ ikke så meget mening, men når den får lov til at operere på en funktion f , så får vi en ny funktion, $\frac{df}{dx}$.

Regneregler

Vi skal ikke gå i detaljer med, hvordan man matematisk finder differentialkvotienter. Derimod vil vi postulere en række regneregler, og dem skal vi bruge til at regne differentialkvotienten ud for en masse funktioner. Nedenfor er f og g to funktioner af x , og a er en konstant (dvs. afhænger ikke af x).

1. Konstant skaling.

Hvis a er en konstant kan den trækkes udenfor differentiationen.

$$\frac{d}{dx}(af) = a \frac{df}{dx}.$$

2. Sum.

En sum differentieres ved at differentiere hvert led.

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

3. Produkt.

Et produkt differentieres ved skiftevis at differentiere hver faktor.

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \left(\frac{df}{dx} \right) \cdot g + f \cdot \left(\frac{dg}{dx} \right).$$

4. Kvotient.

En kvotient differentieres på følgende vis.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\left(\frac{df}{dx} \right) \cdot g - f \cdot \left(\frac{dg}{dx} \right)}{g^2}.$$

5. Kæderegræl.

En sammensat funktion, $f(g(x))$, differentieres ved at differentiere den indre funktion, $g(x)$, mht. x og gange med den ydre funktion $f(g)$ differentieret mht. den indre funktion, g .

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}.$$

Med de ovenstående regler kan differentialkvotienten af enhver funktion simplificeres, så den kan beregnes ved at kende differentialkvotienten af nogle simple funktioner. Nu giver vi en liste over differentialkvotienter for en række simple funktioner.

6. Konstant.

$$\frac{d}{dx} a = 0 .$$

7. Potensfunktion.

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1} .$$

Specielt gælder der at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} x &= 1 & (a = 1) \\ \frac{d}{dx} x^2 &= 2x & (a = 2) \\ \frac{d}{dx} x^3 &= 3x^2 & (a = 3) \\ \frac{d}{dx} \sqrt{x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & (a = \frac{1}{2}) \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{x} &= -\frac{1}{x^2} & (a = -1) \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} &= -\frac{2}{x^3} & (a = -2)\end{aligned}$$

Kombineret med regel 1 og 2, får man for polynomier

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$$

Specielt for en lineær funktion og en parabel har vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x) &= a_1 & (n = 1) \\ \frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_1 + 2a_2x & (n = 2)\end{aligned}$$

8. Eksponentialfunktion.

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x .$$

9. Naturlig logaritme.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} .$$

10. Sinus.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x .$$

11. Cosinus.

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x .$$

Eksempel 1

Vi vil differentiere funktionen $F(x) = (3 - x^2)e^{-x^2}$ mht. x . Vi starter med at betragte $F(x)$ som et produkt af to funktioner, $3 - x^2$ og e^{-x^2} , og bruger derfor regel 3.

$$\frac{dF}{dx} = \left(\frac{d}{dx}(3 - x^2) \right) \cdot e^{-x^2} + (3 - x^2) \cdot \left(\frac{d}{dx}e^{-x^2} \right)$$

Fra regel 8 for en parabel med $a_0 = 3$, $a_1 = 0$ og $a_2 = -1$ har vi, at

$$\frac{d}{dx}(3 - x^2) = -2x .$$

Dernæst vil vi differentiere e^{-x^2} , som vi betragter som en sammensat funktion. Regel 5 med $g(x) = -x^2$ og $f(g(x)) = e^{g(x)}$ giver, at

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = \frac{d}{dx}(-x^2) \cdot \frac{d}{dg}e^g = -2x \cdot e^g = -2xe^{-x^2} .$$

Vi kan nu samle resultaterne og beregne

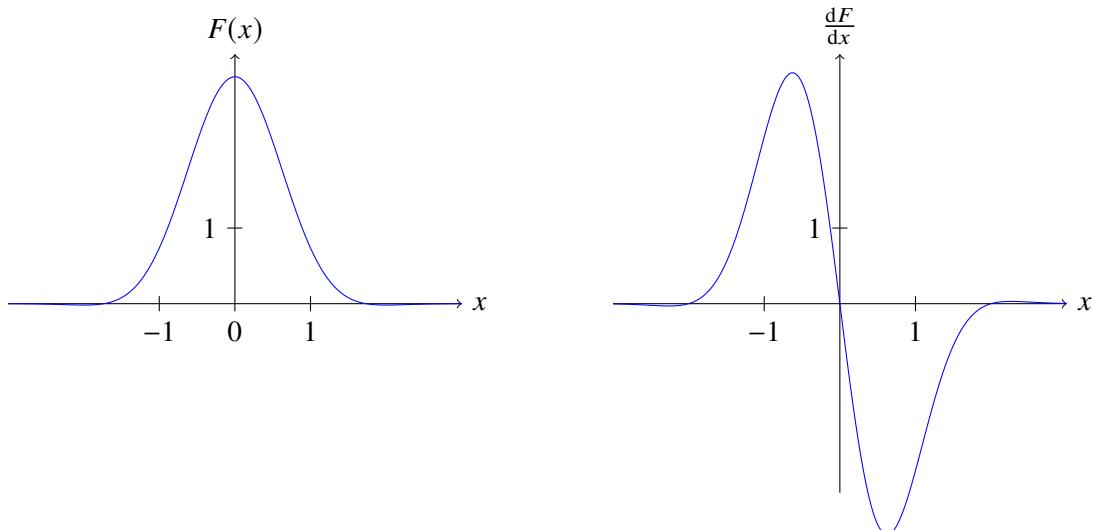
$$\frac{dF}{dx} = (-2x) \cdot e^{-x^2} + (3 - x^2) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -2x(4 - x^2)e^{-x^2} .$$

Funktioner af Flere Variable

Det næste vi nu skal kigge på, er tilfældet hvor man har en funktion, der afhænger af mere end en variabel, altså $f(x, y, z, \dots)$. Her taler man om to forskellige måder at differentiere på, der kaldes for hhv. *total differentiering* og *partiel differentiering*, og som skrives på to forskellige måder

$$\frac{df}{dx} \quad \text{total differentiering} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{partiel differentiering}$$

Den grundlæggende forskel på de to er, at man ved en total differentiering antage, at de andre variable kan afhænge af den variabel man differentierer i forhold til, mens man ved en partiel differentiering antager, at de andre variable er konstante, og altså ikke afhænger af den variabel man differentierer i forhold til. Det betyder specielt, at partiel differentiering fungerer på samme måde, som differentiering af funktioner af en variable, som det er introduceret ovenfor, og vi kan derfor genbruge de regneregler, som allerede er



Figur A.1: $F(x)$ fra Eksempel 1 og dens afledte $\frac{dF}{dx}$, der angiver hældningen af $F(x)$.

blevet gennemgået, på nær kæderegralen som er lidt mere vanskelig her. Den partielle version af kæderegralen bliver dog ikke relevant på campen, og vi vil derfor ikke kigge nærmere på den. Vi vil i stedet henvise til eksempel 2 i slutningen af dette afsnit, hvor det er illustreret, hvordan man regner med partiell differentiering.

Går vi nu til total differentiering, er det fordelagtigt at kigge lidt nærmere på, hvad en differentialkvotient egentligt er. Kigge vi tilbage på eksemplet med bilen, vil hastigheden $v(t)$ faktisk være lig med differentialkvotienten $\frac{dx}{dt}$, hvor $x(t)$ er bilens position. Da bilens hastighed jo er ændringen i dens position pr. tid, kan vi se, at man generelt kan tænke på en differentialkvotient, som noget der angiver en ændring. Mere præcist angiver en differentialkvotient $\frac{df}{dx}$, hvor meget en funktion $f(x)$ ændre sig pr. ændringen i x , når man ændre x meget lidt. Differentialkvotienten giver os derfor muligheden for at beskrive, hvor meget en funktion $f(x)$ ændre sig, hvis vi ændre x en lille smule². Specielt kan vi finde ændringen i $f(x)$, df , hvis vi ændre x med den lille størrelse dx

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

Sagt med ord siger denne formel, at ændringen i f , når man ændre x med dx , er lig med ændringen i f pr. ændringen i x , ganget med ændringen i x . På samme måde kan man finde ændringen i en funktion af flere variable $f(x, y, z, \dots)$, hvis man ændre hver af disse med en lille smule dx, dy, dz, \dots

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots \quad (\text{A.2})$$

For at forstå denne formel, er det vigtigt at nævne, at den partielle differentialkvotient, f.eks. $\frac{\partial f}{\partial x}$, af en funktion af flere variable, angiver ændringen i f pr. ændringen i x , når man holder alle de andre variable

²Dette er ikke en helt matematisk stringent måde at tænke på, med det giver en bedre intuition, og er derfor meget anvendt i fysik.

konstante. Formel (A.2) siger altså, at ændringen i f , når man ændre hver af variablene, er lig med summen af ændringerne, der kommer fra hver variabel. Ud fra denne formel kan vi nu, ved at dividere med en af ændringerne dx, dy, dz, \dots på begge sider, finde den total differentierede af f ift. hver af variablene

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \dots, \quad \frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \dots, \quad \text{Osv.} \quad (\text{A.3})$$

Vi vil ikke gå mere i dybden med total differentiering, men blot lade det være ved, at totale differentialkvotienter kan beregnes vha. formel (A.3).

Eksempel 2

Vi vil nu partielt differentiere funktionen $G(x, y) = x^2 \sin y$ mht. x og mht. y . Vi starter med at beregne $\frac{\partial G}{\partial x}$, og derfor betragter vi y som en konstant.

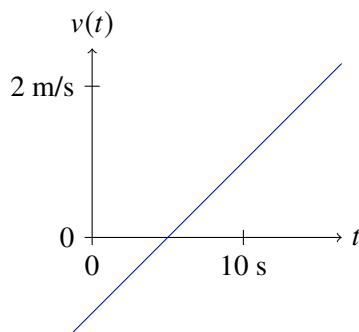
$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 \sin y = \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 \right) \sin y = 2x \sin y .$$

Nu partielt differentierer vi G mht. y , og betragter derfor x som en konstant.

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} x^2 \sin y = x^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \sin y \right) = x^2 \cos y .$$

A.3 Integralregning

I den tidligere kapitel var vi interesseret i at se på, hvordan en funktion ændrer sig mht. en given variabel, såsom tiden. Hvis vi nu havde $v(t)$ grafen fra forrige kapitel, som ses nedenunder, og ville finde ud af hvor langt bilen har kørt mellem tiderne $t_1 = 5$ s og $t_2 = 12$ s, hvordan ville vi så kunne bære os an med det? Hvis vi overvejer hvad grafen viser os, så er det hastigheden langs y -aksen og tiden langs x -aksen. Hvis man multiplicerer disse to får man en afstand $x = v \cdot t$. Vi kan altså finde den afstand bilen har bevæget sig i et givet tidsrum ved at finde arealet under funktionen, og i dette tilfælde har vi med en trekant at gøre, hvorved det areal er $x = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot v(t_2) \cdot (t_2 - t_1)$



Hvad gør vi så hvis vi befinner os i et tilfælde, hvor vores funktion ikke er lige så "simpel" som i det forrige tilfælde? Hvad nu hvis vores $v(t)$ var et 2-grads polynomium, hvordan ville vi så kunne finde arealet under grafen i et givet tidsrum?

Man kunne dele tidsrummet $t_2 - t_1$ op i n tidsintervaller $\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{n}$, og multiplicere med funktionsværdien i centrum af disse Δt 'er. Herved vil vi få et antal rektangler, hvor summen af deres areal vil give os en approksimation af arealet under grafen. Hvis vi nu øger antallet n af tidsintervaller, så vil vores approksimation blive bedre.

Notation for integralregning

Det forrige eksempel viser en praktisk anvendelse for integralregningen, nemlig at finde arealet under en funktion i et givet interval. Herudover giver integralregningen os muligheden for at udregne de funktioner, der hører til en given differentialkvotient. Dette gør integraler utrolig brugbare inden for alle dele af fysikken.

Der findes to former for integraler, *det bestemte integrale* og *det ubestemte integrale*. Det bestemte integrale følger samme tankegang som det forrige eksempel, hvor vi forsøger at udregne arealet under en funktion inden for et givet interval, a til b , og defineres som

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Her er funktionen $F(x)$ en *stamfunktionen* til $f(x)$. En stamfunktion $F(x)$ defineres som en funktion, der når den differentieres, giver $f(x)$, det vil sige

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad (\text{A.4})$$

En vigtig ting at bemærke her er, at der findes mere end en stamfunktion til enhver given funktion $f(x)$. Dette kan illustreres ved at tage en bestemt stamfunktion $F_1(x)$ til funktionen $f(x)$, og definere den nye funktion $F_2(x) = F_1(x) + C$, hvor C er en konstant. Det vil da gælde at

$$\frac{d}{dx} F_2(x) = \frac{d}{dx} (F_1(x) + C) = \frac{d}{dx} F_1(x) + \frac{d}{dx} C = f(x) + 0 = f(x),$$

hvor det er brugt, at $F_1(x)$ opfylder (A.4), da vi har antaget at $F_1(x)$ er en stamfunktion for $f(x)$, og at den differentierede af en konstant er 0. Altså opfylder $F_2(x)$ også (A.4), og er derfor en stamfunktion for $f(x)$. Vi har hermed vist, at der må være uendeligt mange stamfunktioner hørende til enhver given funktion $f(x)$. Man kan matematisk set vise, at der for alle tilfældige par af stamfunktioner, $F_1(x)$ og $F_2(x)$, hørende til en given funktion $f(x)$, altid vil findes en konstant C , der opfylder at

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Forskellen mellem to stamfunktioner er altså aldrig mere end en konstant, hvilket sikrer at det bestemte integrale giver det samme resultat, uanset hvilken stamfunktion man bruge, hvilket kan illustreres ved følgende lille beregning.

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + C - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$$

Dette skulle selvfølgeligt også gerne være tilfældet, da det bestemte integrale angiver arealet under en funktion i et givet interval, som jo er en fast størrelse.

Den anden form for integrale er det ubestemte integrale. Når man udregner et ubestemt integrale, indsættes der intet interval a til b , men man udregner blot en stamfunktionen $F(x)$,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

I det ubestemte tilfælde er det vigtigt, at man huske at tilføje en integrationskonstant til stamfunktionen, da alle mulige løsninger til integralet skal inkluderes, altså alle de forskellige stamfunktioner.

Regneregler

Vi skal ikke gå i detaljer med, hvordan man matematisk finder stamfunktioner. Derimod vil vi postulere en række regneregler, og dem skal vi bruge til at regne stamfunktioner ud for en masse funktioner. Nedenfor er f og g to funktioner af x og k er en konstant (dvs. afhænger ikke af x).

1. Konstant skaling.

Hvis k er en konstant kan den trækkes udenfor integralet.

$$\begin{aligned}\int (kf(x))dx &= k \int f(x)dx , \\ \int_a^b (kf(x))dx &= k \int_a^b f(x)dx .\end{aligned}$$

2. Sum.

En sum integreres ved at integrere hvert led.

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x))dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx . \\ \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .\end{aligned}$$

3. Partiel integration.

Partiel integration er en metode til at omskrive et integrale, så det er nemmere at løse. Metoden bygger på produktreglen for differentiering fra forrige afsnit, men vi vil ikke gå i nærmere detaljer med, hvordan reglen udledes her men blot give resultatet.

$$\begin{aligned}\int f \cdot \frac{dg}{dx} dx &= f \cdot g - \int \frac{df}{dx} \cdot g dx + C , \\ \int_a^b f \cdot \frac{dg}{dx} dx &= [f \cdot g]_a^b - \int_a^b \frac{df}{dx} \cdot g dx .\end{aligned}$$

Her er C en integrationskonstant, som skal tages med i det ubestemte tilfælde. Ideen med partiel integration er, at man flytter en differentiering af $g(x)$ i integralerne på venstre side af lighedstegnene over på $f(x)$ i integralerne på højre side. Dette gør det ofte muligt, at finde løsninger til svære integraler, ved at kende løsningen til simplere integraler, som man kan omskrive det svære integrale til vha. reglen ovenfor.

4. Substitution.

Substitution er, lige som partiel integration, en metode til at omskrive integraler. Denne metode bygger på kædereglen for differentiering fra forrige afsnit, men vi vil heller ikke her gå i detaljer med udledningen. Man kan bruge substitution i det tilfælde, hvor den funktion man skal integrere har den bestemte form $f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}$, hvor $f(g(x))$ er en sammensat funktion. Reglen er

$$\int f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx} dx = F(g(x)) + C,$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

Her er F en stamfunktionen for f og $t = g(x)$. En vigtig relation når man arbejder med substitution, er relationen mellem dx og dt , som kan skrives $dt = \frac{dg}{dx} dx$ (brugen af denne relation er illustreret i eksempel 5). Ideen med substitution er, som for partiel integration, at omskrive et svært integrale, til et nemmere integrale der kan løses.

Med de ovenstående regler kan stamfunktionen af de fleste funktion simplificeres, så den kan beregnes ved at kende stamfunktionerne af nogle simple funktioner. Nu giver vi en liste over stamfunktioner for en række simple funktioner.

5. Konstant.

$$\int adx = ax + C.$$

6. Potensfunktion.

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + C.$$

hvor $a \neq -1$. Specielt gælder der

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (a = 1)$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (a = 2)$$

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C \quad (a = 3)$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (a = \frac{1}{2})$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad (a = -2)$$

7. Eksponentialefunktion.

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

8. Naturlig logaritme.

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C .$$

9. Sinus.

$$\int \sin x dx = -\cos x + C .$$

10. Cosinus.

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

Eksempel 3

I dette eksempel vil vi finde det bestemt og ubestemte integrale af funktionen $f(x) = 15x^2 + e^x$. For det ubestemte integrale finder man at

$$\int f(x) dx = \int 15x^2 + e^x dx = \int 15x^2 dx + \int e^x dx = 15 \int x^2 dx + \int e^x dx ,$$

hvor Regel 2 og 5 er benyttet til at dele integralet op i to integraler og at flytte en konstant udenfor. Herfra giver Regel 6 og 7 at

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_1 , \quad \text{og} \quad \int e^x dx = e^x + C_2 ,$$

hvor det er antaget, at de to integrationskonstanter kan være forskellige. Samles det hele nu sammen finder man resultatet

$$\int f(x) dx = 15 \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right) + (e^x + C_2) = 5x^3 + 15C_1 + e^x + C_2 = 5x^3 + e^x + C ,$$

hvor konstanterne i det sidste trin er samlet i den ene konstant C . Nu ved vi, at enhver stamfunktion $F(x)$ for $f(x)$ har formen $5x^3 + e^x + C$, og vi kan derfor beregne det bestemte integrale som følger

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = [5x^3 + e^x + C]_a^b = (5b^3 + e^b + C) - (5a^3 + e^a + C) = 5(b^3 - a^3) + (e^b - e^a) .$$

Som det ses her, har værdien af konstanten C ikke nogen betydning for det bestemte integrale og undlades derfor ofte ved beregninger.

Eksempel 4

I dette eksempel vil vi kigge på anvendelse af partiell integration. Vi kigger derfor på funktionen $h(x) = x \cdot \cos(x)$, som vi ikke kan integrere vha. nogle af vores simple formler. Man kan derfor bemærke, at denne funktion også kan skrives som $h(x) = f \cdot \frac{dg}{dx}$, hvor $f(x) = x$ og $g(x) = \sin(x)$, da den afledte af $\sin(x)$ er $\cos(x)$. Da kan man bruge Regel 3 for partiell integration, og vi vil her nøjes med at kigge på det bestemte integrale

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f \cdot \frac{dg}{dx} dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b \frac{df}{dx} \cdot g dx$$

De to led udregnes nu hvert for sig

$$[f \cdot g]_a^b = [x \cdot \sin(x)]_a^b = b \cdot \sin(b) - a \cdot \sin(a), \quad (\text{A.5})$$

$$\int_a^b \frac{df}{dx} \cdot g dx = \int_a^b 1 \cdot \sin(x) dx = [-\cos(x)]_a^b = -(\cos(b) - \cos(a)) = \cos(a) - \cos(b). \quad (\text{A.6})$$

Samlet set finder man da

$$\int_a^b h(x)dx = (b \cdot \sin(b) - a \cdot \sin(a)) - (\cos(a) - \cos(b)) = (\cos(b) - \cos(a)) + (b \sin(b) - a \sin(a)).$$

Som dette eksempel viser er partiell integration en effektiv metode til at løse svære integraler, men den kræver at man finde to funktioner $f(x)$ og $g(x)$, så man kan skrive den funktion man vil integrere på formen $f \cdot \frac{dg}{dx}$. Dette kan nogle gange være mere en kunst end en videnskab, men det bliver hurtigt lettere med lidt erfaring.

Eksempel 5

I dette eksempel vil vi kigge på anvendelse af integration ved substitution. Vi kigger derfor på funktionen $h(x) = x \cos(x^2 + 1)$ og vil gerne finde funktioner $f(x)$ og $g(x)$, så vi skrive $h(x)$ på formen $f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}$. Vælger man $f(x) = \cos(x)$ som den ydre og $g(x) = x^2 + 1$ som den indre funktion, får man at

$$\begin{aligned} f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx} &= \cos(x^2 + 1) \cdot \left(\frac{d}{dx} x^2 + 1 \right) = 2x \cdot \cos(x^2 + 1) = 2 \cdot h(x), \\ \Rightarrow h(x) &= \frac{1}{2} f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}. \end{aligned}$$

Kigge man så f.eks på det bestemte integrale af $h(x)$, kan man nu bruge Regel 4 til at løse det

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x)dx &= \int_a^b \frac{1}{2} f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx} dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx} dx = \frac{1}{2} \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{a^2+1}^{b^2+1} \cos(t)dt = \frac{1}{2} [\sin(t)]_{a^2+1}^{b^2+1} = \frac{1}{2} (\sin(b^2 + 1) - \sin(a^2 + 1)). \end{aligned}$$

Som dette eksempel illustrerer substitution ofte en smart måde at løse svære integraler på. Desværre kræver det, at man vælger funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ på den rigtige måde, hvilket ofte kan være svært. Derfor præsenterer vi også en lidt anderledes måde at løse det samme problem på, hvor fremgangsmåden er lidt mere slavisk.

Lad igen vores funktion være $h(x) = x \cdot \cos(x^2 + 1)$, og denne gang vælger vi blot, at vi vil lave substitutionen $t = x^2 + 1$. Det første man da skal gøre, er at finde et udtryk for dx i integralet af $h(x)$, hvilket kan gøres vha. relationen mellem dt og dx givet i Regel 4. Det giver

$$dt = \frac{dg}{dx} dx = \left(\frac{d}{dx}(x^2 + 1) \right) dx = 2x dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2x} dt .$$

Så udregnes $h(x)dx$ og udtrykkes vha. t og dt som følger

$$h(x)dx = x \cdot \cos(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) dt = \frac{1}{2} \cos(t) dt .$$

Dernæst skal man finde de nye grænser for integrationen, som er givet ved $t(a)$ til $t(b)$. Her bliver grænserne

$$t(a) = a^2 + 1 \quad \text{og} \quad t(b) = b^2 + 1 .$$

Endeligt skal man blot indsætte alt dette i integralet, hvilket giver

$$\int_a^b h(x) dx = \int_{a^2+1}^{b^2+1} \frac{1}{2} \cos(t) dt = \frac{1}{2} \int_{a^2+1}^{b^2+1} \cos(t) dt ,$$

som et det samme integrale vi fandt og løste ovenfor. Hvilken af disse to metoder man bruger er op til en selv, men den sidste er ofte nemmere at huske, da fremgangsmåden er fast.

A.4 Differentialligninger

En differentialligning er en ligning, hvor der indgår differentialkvotienter af en funktion, og funktionen er den ubekendte. Et eksempel kunne være

$$\frac{df}{dx} = -4f(x) ,$$

hvor vi løser ligningen ved at finde en funktion $f(x)$, således at ligningen er sand. I modsætningen til almindelige ligninger, hvor de ubekendte er tal, så er det her funktioner, der er de ubekendte. Ligningen overfor løses af funktionen

$$f(x) = e^{-4x} ,$$

hvilket vi let kan checke ved at differentiere vha. regel 5 om sammensatte funktioner fra afsnittet om differentialregning. Sætter man $g(x) = -4x$, finder man da at:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} e^{-4x} = \left(\frac{d}{dx}(-4x) \right) \cdot \left(\frac{d}{dg} e^g \right) = -4e^{-4x} = -4f(x) .$$

Der er generelt ingen systematisk måde at løse differentialligninger på, så man finder typisk løsninger ved at komme med et godt gæt. Heldigvis er det ofte de samme differentialligninger, man møder gang på gang, og derfor er følgende liste over differentialligninger og deres løsninger meget praktisk.

11. Førsteordensligning.

Ligningen

$$\frac{df}{dx} = kf(x),$$

hvor k er en konstant løses af

$$f(x) = Ae^{kx},$$

hvor A er en arbitrer konstant, som man kan fastsætte, hvis man ved, at løsningsfunktionen skal tage en bestemt værdi i et bestemt punkt.

12. Andenordensligning.

Ligningen

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -k^2 f(x),$$

hvor k er en konstant løses af

$$f(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad \text{og} \quad f(x) = A \cos(kx + \varphi),$$

hvor A, B og φ er arbitrale konstanter. De to løsninger er faktisk ens, så man kan selv vælge hvilken, man bruger.

A.5 Taylorapproksimationer

I fysikken prøver man generelt at give en så præcis beskrivelse af virkeligheden som muligt, men i mange tilfælde kan det ikke lade sig gøre at løse et givet problem eksakt. Derfor må man tit vælge enten at kigge på specialtilfælde af problemet, der kan løses, eller at finde en approksimativ løsning til problemet, som kan give noget information omkring, hvordan ens fysiske system opfører sig. Et eksempel på dette kunne fx. være et pendul, hvor man tit kan antage, at vinklerne ved udsving er små, hvilket giver en betydeligt simplere bevægelsesligning for pendulet. Et vigtigt redskab til dette formål er *Taylorapproksimationer*, som er en måde at approksimere en given funktion $f(x)$ omkring et bestemt punkt $x = a$, vha. en sum af polynomier $1, x, x^2, \dots$. I denne forbindelse definerer man det, der kaldes et *Taylorpolynomium*:

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} (x-a) + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!} (x-a)^N. \quad (\text{A.7})$$

Her skal $f^{(n)}(a)$ læses som funktionen $f(x)$ differentieret n gange, og derefter evalueret i punktet a . Dette skrives også nogle gange med en anden notation, der minder mere om den, der er brugt i afsnittet om differentiering, men som er lidt tungere at skrive.

$$f^{(n)}(a) = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=a}.$$

Når man har en funktion $f(x)$, der approksimeres med et Taylorpolynomium $T_N(x)$ omkring punktet $x = a$, skriver man, at $f(x) \approx T_N(x)$ for $x \approx a$, for at indikere at $f(x)$ er cirka lig med $T_N(x)$, når x er cirka lig med a .

Ved første øjekast er det nok svært at gennemskue, hvad formel (A.7) har med at approksimere en funktion at gøre, så vi vil derfor bruge noget tid på at give lidt intuition omkring, hvorfor formlen ser ud som den gør. Lad os derfor kigge på funktionen $f(x) = e^x$ og prøve at approksimere den omkring punktet $a = 0$. Den simpleste approksimation man kan lave, er at approksimere $f(x)$ som en konstant. Da vi gerne vil beskrive funktionen omkring punktet $a = 0$, er den bedste konstante approksimation $f(x)$ selv evalueret i punktet a . Altså

$$f(x) \approx f(a) = e^a = e^0 = 1$$

Det næste man kan gøre er da, at tilføje en hældning til vores approksimation. Det bedste valg er hældningen af $f(x)$ selv i punktet a . Den er

$$f^{(1)}(a) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} e^x \right|_{x=a} e^x|_{x=a} = e^a = 1$$

Det giver den nye approksimation af $f(x)$

$$f(x) \approx 1 + x ,$$

der netop opfylder både at antage værdien og hældningen af $f(x)$ i punktet $x = a$. Man kan så også tilføje en krumning (ændringen i hældningen) til vores approksimation. Igen er det bedste valg krumningen af $f(x)$ i punktet a , hvilket giver

$$f^{(2)}(a) = \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=a} = \left. \frac{d^2}{dx^2} e^x \right|_{x=a} e^x|_{x=a} = e^a = 1$$

Den nye approksimation bliver da

$$f(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 ,$$

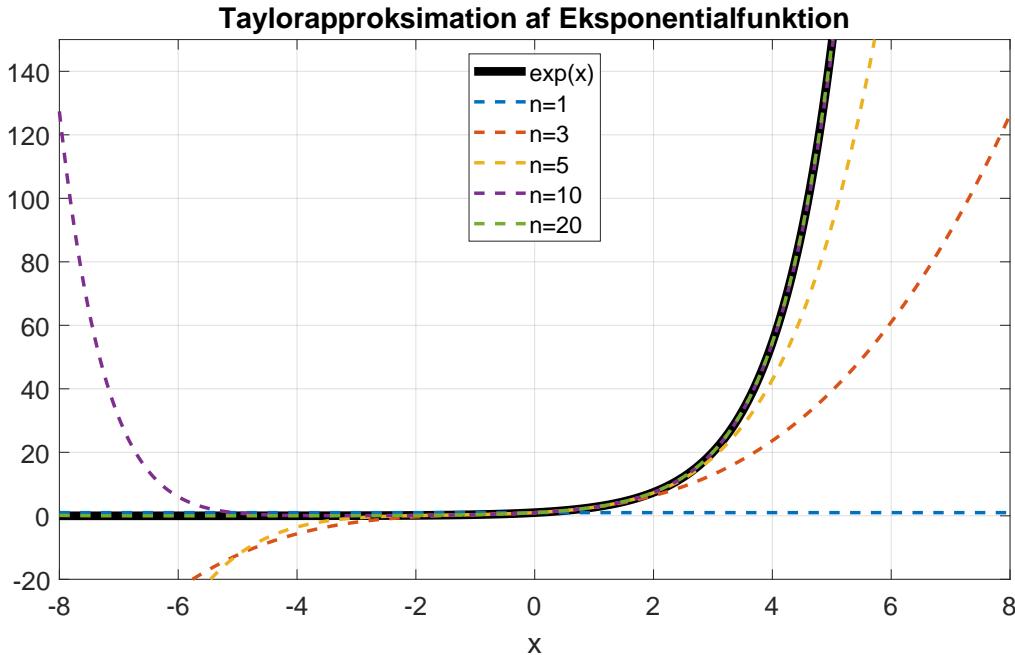
hvor $\frac{1}{2}$ er taget med for at sikre at krumningen af approksimation er lig med krumningen af $f(x)$ i punktet a . At dette faktisk er tilfældet kan vises ved en hurtig beregning

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 \right) \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} (1 + x) \right|_{x=a} = 1|_{x=a} = 1 = f^{(2)}(a) .$$

Ideen herfra er da blot at tilføje flere og flere led, så den flere og flere gange differentierede af $f(x)$ og approksimationen er lig med hinanden i punktet a . Ideen er også illustreret på figur A.2, hvor approksimationen er vist for flere og flere led, der er taget med. Som en hjælp til opgaver har vi samlet Taylorpolynomierne for nogle af de mest almindelige funktioner omkring $a = 0$ i tabel A.1.

Tabel A.1: Taylorpolynomier for forskellige funktioner omkring punktet $a = 0$.

Funktioner	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
Taylorpolynomier	$\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$	$\sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$



Figur A.2: Taylorpolynomierne $T_1(x)$, $T_3(x)$, $T_5(x)$, $T_{10}(x)$, $T_{20}(x)$ for $f(x) = e^x$ omkring punktet $a = 0$. Eksemplet illustrerer hvordan en Taylorapproximation bliver bedre og bedre, jo flere led der tages med.

A.6 Komplekse Tal

Formålet med dette afsnit er at give en kort introduktion til komplekse tal, da de er et vigtigt redskab i store dele af fysikken. Vi vil her ikke gå i dybden med den stringente matematiske konstruktion af de komplekse tal, men i stedet fokuserer på anvendelse og forskellige specifikke egenskaber, der er relevante for de ting, som I skal arbejde med på campen.

Før vi definerer, hvad komplekse tal er, vil vi først kigge på den imaginære enhed i , som er meget vigtigt i forhold til at beskrive, hvad komplekse tal er. Den imaginære enhed er defineret som følger

$$i^2 = -1 , \quad (\text{A.8})$$

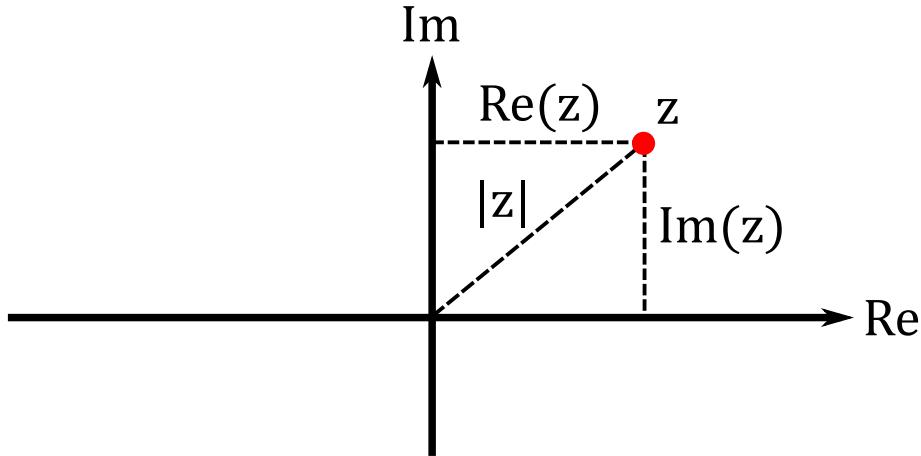
og blev oprindeligt indført som løsningen til ligningen $x^2 = -1$, der ikke kan løses med reelle tal. Men med den imaginære enhed kan man løse denne type ligning på følgende måde

$$x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = i^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{i^2} = \pm i .$$

Det virker måske lidt underligt, sådan at indføre et nyt tal som i for at løse en ligning, men det skal understreges at tallet i matematisk set er lige så rigtigt som de reelle tal. Nu hvor vi har indført den imaginære enhed, er vi nu klar til at give definitionen på et komplekst tal z . Definitionen lyder

$$z = a + ib , \quad (\text{A.9})$$

hvor a og b er reelle tal, der kaldes henholdsvis realdelen og imaginærdelen af det komplekse tal z ³. Dette skrives ofte som $\operatorname{Re}(z) = a$ og $\operatorname{Im}(z) = b$. En god måde at give en visuel beskrivelse af komplekse tal er vha. *den komplekse plan*, som er illustreret i figur A.3. Ligesom man normalt deler en plan op vha. en x - og y -akse for at lave et koordinatsystem, deler man her den komplekse plan op vha. en real- og imaginærakse. Da kan man repræsentere ethvert komplekst tal z som et punkt i den komplekse plan, som det også er vist i figur A.3. Denne visuelle repræsentation er god at have i baghovedet, da den viser at komplekse tal er en form for todimensionelle objekter, og minder derfor på mange måder om punkter i et koordinatsystem, (x, y) .



Figur A.3: Et komplekst tal z indikeret med en rød prik i det komplekse plan.

Det næste spørgsmål vi skal kigge på er, hvordan man regner med komplekse tal. Mere specifikt skal vi starte med at kigge på *addition*, *subtraktion*, *multiplikation* og *division*, da disse regneoperationer lægger fundamentet for langt de fleste beregninger, som involverer komplekse tal. Lad derfor $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$ være to komplekse tal, og starte med at kigge på addition og subtraktion. Dette er defineret på den naturlige måde

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d), \quad (\text{A.10})$$

$$z_2 - z_1 = (c - a) + i(d - b). \quad (\text{A.11})$$

Man lægger/trækker altså realdelene og imaginærdelene til/fra hinanden hver for sig. Når man skal gange komplekse tal sammen, gøres det ganske som man ville forvente. Man regner blot som om, man gangede to parenteser ud

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

hvilket giver os definitionen for multiplikation af komplekse tal

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (\text{A.12})$$

³At b kaldes imaginærdelen skyldes, at tal på formen ib , hvor b er et reelt tal, kaldes for imaginære tal.

Endeligt er der division, som kan defineres ud fra multiplikation. Dette kan illustreres ved følgende beregning

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

og definitionen for division af komplekse tal kan da skrives

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \quad (\text{A.13})$$

Nu da de grundlæggende regneregler for komplekse tal er blevet gennemgået, vil vi gå videre og kigge på nogle af de andre vigtige definition og egenskaber ved de kompleks tal. Den første af disse er det der kaldes for den *komplekst konjugerede* af et komplekst tal z , og som skrives z^* . Hvis vi skriver $z = a+ib$ kan den komplekst konjugerede defineres som

$$z^* = a - ib. \quad (\text{A.14})$$

Man finder således den komplekst konjugerede af et komplekst tal z ved blot at skifte fortegn på imaginærdelen. En kompleks konjugering kan derfor også ses, som en spejling af et komplekst tal i realaksen. Den næste egenskab ved komplekse tal er det der kaldes for tallets *modulus*, og som skrives $|z|$. Definitionen af modulus er

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (\text{A.15})$$

og kigger vi igen på figur A.3, kan man vha. Pythagoras sætning se, at modulus for et komplekst tal angiver afstanden fra den komplekse plans origo (centrum) ud til det komplekse tal i planen. Ud fra definitionen af modulus kan man også vise følgende praktiske regneregler

$$|z| = |z^*|, \quad (\text{A.16})$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (\text{A.17})$$

$$|z^n| = |z|^n. \quad (\text{A.18})$$

Dette bringer os videre til *normkvadratet* for komplekse tal⁴, der er defineret som følger

$$|z|^2 = a^2 + b^2. \quad (\text{A.19})$$

Der er altså som sådan ikke så meget nyt ved normkvadratet i forhold til modulus, men da normkvadratet optræder typisk i fysik, er det vigtigt at nævne alligevel. Specielt er følgende lighed god at kende

$$|z|^2 = z z^*, \quad (\text{A.20})$$

og kan nemt eftervises ved en hurtig beregning. Det sidste vi skal kigge på her er *Eulers formel*, som er en af de mest brugbare relationer indenfor komplekse tal. Eulers formel siger at

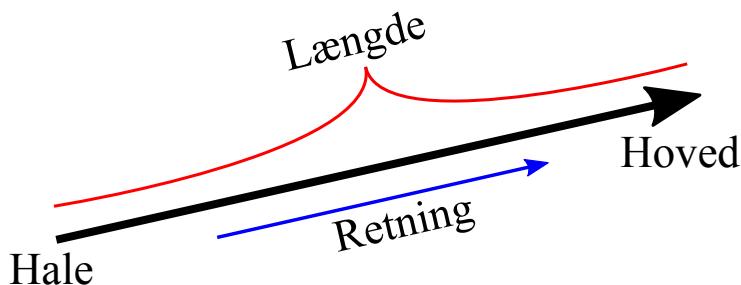
$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad (\text{A.21})$$

⁴Grunden til at det kaldes for et normkvadrat er, modulus $|z|$ også i nogle sammenhænge kaldes for normen af z . Her holder vi os dog til at kalde $|z|$ for modulus og $|z|^2$ for normkvadratet.

hvor x er et reelt tal. Dette virker nok som en lidt underlig lighed, og det er umiddelbart også svært at se, hvad en eksponentialfunktion har med cosinus og sinus at gøre. Ikke desto mindre er formlen rigtigt, og den er faktiske ikke så svær at bevise igen, men vi vil ikke gå i dybden med det her. Tilgengæld vil vi påpege, at e^{ix} har en pæn visuel repræsentation, som sættet af alle punkter på enhedscirklen (cirklen med radius 1 og centrum i origo) i den komplekse plan.

A.7 Vektorer

Den simpleste måde at beskrive en vektor på, er som noget der har både en længde og en retning. I forhold til notation er der forskellige måder at skrive vektorer på, f.eks. som et bogstav med en pil over \vec{v} . I fysikken er der dog tradition for at skrive vektorer med fed, altså \mathbf{v} , så her har vi valgt at skrive \vec{v} , så der ikke er nogen tvivl. En god måde at illustrere vektorer på er vha. en pil, som det ses på figur A.4. Denne måde at beskrive en vektor på har den fordel, at man tydeligt kan se både længden og retningen af vektoren. Typisk vil man dog gerne regne med vektorer, og selvom det godt kan gøres vha. en grafisk metode, er



Figur A.4: Den sorte pil er vektoren, og der er indikeret både vektorens længde og retning.

der en anden repræsentation af vektorer, som egner sig bedre til dette. Denne kaldes for *komposantform* (eller *matrixform*) og tager udgangspunkt i et koordinatsystem. Da man i fysikken arbejder med den virkelige verden, som jo har tre rumlige dimensioner, vil vi i resten af afsnittet bruge et 3-dimensionalt koordinatsystem, som vist på figur A.5. Specielt bruges et højrehåndet koordinatsystem, hvilket betyder, at hvis man tager højre hånd og peger sin tommelfinger i x -retningen og sin pegefingher i y -retningen, så vil langefingeren vise z -retningen, som det også ses på figur A.5.

Ideen med komposantformen er, at man i et koordinatsystem kan beskrive en vektor, \vec{v} , ved at angive tre tal v_x, v_y, v_z , som angiver, hvor meget vektoren peger i hhv. x -, y -, og z -retningen. Disse tal kaldes for vektorens komposanter, og man skriver vektoren:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

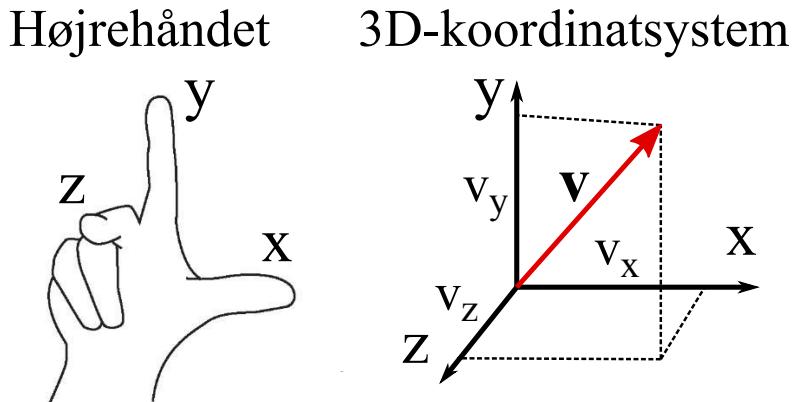
For at finde længden af vektoren, som man skriver $|\vec{v}|$, på komposantform, bruges Pythagoras sætning i tre dimensioner. Man får altså at:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (\text{A.23})$$

Til sidst er det også vigtigt at vide, hvornår to vektorer er lig med hinanden. Det er de, hvis de har både samme længde og samme retning. På komposantform kan dette skrives:

$$\vec{v} = \vec{u} \quad \text{hvis} \quad \begin{aligned} v_x &= u_x \\ v_y &= u_y \\ v_z &= u_z \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

To vektorer er altså lig med hinanden, hvis deres komposanter er ens.



Figur A.5: På billedet til venstre ses reglen for et højrehåndet koordinatsystem. På billedet til højre er der vist et højrehåndet 3-dimensionalt koordinatsystem, og der er også indtegnet en vektor, \vec{v} , med sine tre komposanter v_x, v_y, v_z .

Regneregler for Vektorer

I dette afsnit skal vi se på, hvordan man regner med vektorer. Det første spørgsmål som man kunne stille sig selv i denne forbindelse er, om man kan lægge/trække vektorer til/fra hinanden. Det kan man godt, og det gøres ved at lægge/trække komposanterne til/fra hinanden i par. Det skrives:

$$\vec{v} \pm \vec{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \pm u_x \\ v_y \pm u_y \\ v_z \pm u_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

En anden ting som man kan gøre med en vektor, er at gange den med en konstant a . Det gøres ved at gange tallet på hver af komposanterne, altså:

$$a \cdot \vec{v} = a \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot v_x \\ a \cdot v_y \\ a \cdot v_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Det næste naturlige spørgsmål er nu, om man kan gange og dividere vektorer med hinanden. Det viser sig at division af vektorer ikke er defineret, men at der til gengæld er to forskellige måder at gange vektorer

sammen på, som begge kaldes for vektorprodukter.

Den første er *skalarproduktet* (eller *prikproduktet*) og kaldes sådan, fordi resultatet er en skalar (altså et tal uden en retning). Skalarproduktet af to vektorer skrives $\vec{v} \cdot \vec{u}$, og er defineret som:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z \quad (\text{A.27})$$

Man tager altså vektorernes komposanter, ganger dem sammen i par og lægger det hele sammen. Specielt kan man kigge på skalarproduktet af en vektor med sig selv, og hvis man sammenligner med udtrykket for længden af en vektor, ligning (A.23), ses, at $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$. Det giver os en alternativ definition på længden af en vektor; $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

Skalarproduktet har dog også en mere geometrisk definition, som tager udgangspunkt i vektorernes længde og vinklen mellem dem. Det er her vigtigt at understrege, at når man taler om vinklen mellem to vektorer, så menes der den mindste vinkel mellem dem, når man placerer halerne af vektorerne oveni hinanden, som det ses på figur A.6. Med denne definition er skalarproduktet:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \theta \quad (\text{A.28})$$

Det andet af de to vektorprodukter er *krydsproduktet*, hvor resultatet er en ny vektor. Krydsproduktet skrives $\vec{v} \times \vec{u}$ og er defineret:

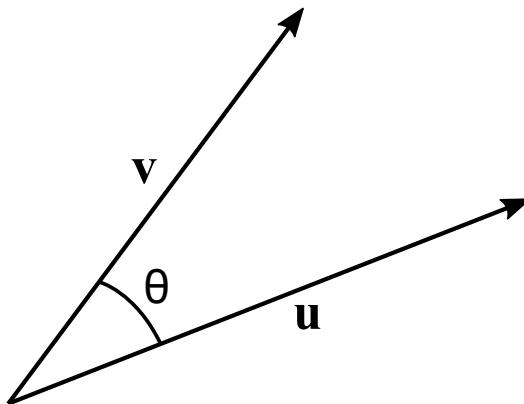
$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_y \cdot u_z - v_z \cdot u_y \\ v_z \cdot u_x - v_x \cdot u_z \\ v_x \cdot u_y - v_y \cdot u_x \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

En viktig egenskab ved krydsproduktet, som man ikke sådan lige kan se ud af definitionen, er at den resulterende vektor, $\vec{c} = \vec{v} \times \vec{u}$, er vinkelret på både \vec{v} og på \vec{u} . Kigger man igen på figur A.6, kan man da se, at der er to muligheder for, hvilken vej vektoren \vec{c} kan pege, så den er vinkelret på \vec{v} og \vec{u} ; nemlig ind i eller ud af figuren. Der er selvfølgelig kun en af disse, som er den rigtige retning, og heldigvis er der en nem huskeregel (typisk kaldet *højrehåndsreglen*) til at finde den rigtige. Man tager højre hånd og peger tommelfingeren i retningen af den første vektor og peger så sin pegefingern i retningen af den anden vektor. Da vil langefingeren give retningen af den nye vektor, \vec{c} , på samme måde som den angiver z -retningen i et højrehåndet koordinatsystem. Tager man eksemplet på figur A.6, vil \vec{c} pege ind i figuren.

Ligesom med skalarproduktet har krydsproduktet også en mere geometrisk fortolkning. Det gælder nemlig at størrelsen af den vektor, som man får, når man laver et krydsprodukt, kan udtrykkes vha. længden af de to vektorer som man krydser med hinanden og vinklen mellem dem. Der gælder:

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \sin \theta \quad (\text{A.30})$$

Det sidste begreb vi skal kigge på er *enhedsvektorer*, der er vektorer, som har en længde på 1. For at kunne kende forskel på en almindelig vektor og en enhedsvektor, bruger man en speciel notation, hvor man sætter



Figur A.6: To vektorer og deres mellemliggende vinkel.

en "hat" over vektoren, $\hat{\mathbf{v}}$. Enhedsvektorer opfylder de samme regneregler som almindelige vektorer, og på den måde er der ikke meget nyt i dem. De er dog et vigtigt notationsmæssigt redskab og bruges i mange dele af fysikken. Specielt bruger man ofte enhedsvektorer, der peger langs en af de tre koordinataksler. Disse har en speciel notation og er skrevet op nedenfor:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Med disse tre enhedsvektorer kan man nu skrive enhver vektor, \vec{v} , på følgende måde:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{bmatrix} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$$

Denne metode, hvor man skriver en vektor som summen af flere andre vektorer, er vigtig at bide mærke i. Hvis en vektor, \vec{v} , repræsenterer en fysisk størrelse, f.eks. en kraft, så vil den fysiske størrelse være uændret, om man skriver vektoren på den ene eller anden måde. Dette er praktisk, da man selv kan vælge på hvilken måde man skriver vektoren, alt efter hvilken fysisk problemstilling man prøver at løse.

Bilag B

Litteratur

Hvis vi har vakt jeres interesse er her en liste over bøger, der kan give en dybere indsigt i de forskellige emner, og det er disse, selv vi har konsulteret i løbet af skriveprocessen til dette kompendium.¹

1 Analytisk Mekanik

- Taylor, John R., *Classical Mechanics*, University Science Books, 2005
- Young, Hugh & Freedman, Roger, *University Physics*, Pearson Education, 2016

2 Kvantemekanik

- Griffiths, David J., *Introduction to Quantum Mechanics*, Cambridge University, 2016

3 Exoplaneter

- Cockell, Charles, *Astrobiology and the Search for Extraterrestrial Life*, MOOC af The University of Edinburgh
- Jørgensen, Uffe Gråe, *Exoplanets and Astrobiology*, 2017
- Ryden, Barbara & Peterson, Bradley M., *Foundations of Astrophysics*, Pearson Education, 2010

4 Atom- og Molekylefysik

- Griffiths, David J., *Introduction to Quantum Mechanics*, Cambridge University, 2016
- Rayner-Canham , Geoff & Overton, Tina, *Descriptive Inorganic Chemistry*, W.H. Freeman and Company, 2014

¹Mange af bøgerne findes i mange forskellige versioner og endda fra forskellige forlag. Denne liste er bare de udgaver, kompendiets forfattere har benyttet.

5 Planetbevægelse

- Taylor, John R., *Classical Mechanics*, University Science Books, 2005

6 Geometrisk Optik

- Young, Hugh & Freedman, Roger, *University Physics*, Pearson Education, 2016