Versuch II: Linearisierung, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Andreas Jentsch, Ali Kerem Sacakli

Praktikumsbericht – Praktikum Matlab/Simulink II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

REGELUNGSTECHNIK UND MECHATRONIK rtm

2.1 Lienarisierung

Im folgenden Abschnitt wird die Funktion zur Linearisierung des Doppelpendel-Systems um einen Arbeitspunkt, sowie ihre Rückgabewerte an bestimmten Arbeitspunkten dokumentiert. Unter Vorgabe der Funktionen `f`, `h` und des Arbeitspunktes `AP` sollen die Matrizen der linearisierten Gleichungen in Zustandsraumdarstellung ausgegeben werden. Die Implementierung der Funktion ist in Listing 2.1 aufgeführt.

Bevor das System linearisiert wird sind zwei Fragen zu klären:

1. Welche Arbeitspunkte sind sinnvoll?
2. Was bedeutet es physikalisch, wenn M_{AP} ungleich null ist?

Die Antworten lauten wie folgt:

1. Es ist nur sinnvoll das System in Arbeitspunkten zu linearisieren, in denen es sowohl vollständig beobachtbar, als auch steuerbar ist.
2. Bei der Größe M_{AP} handelt es sich um den statischen Wert der Stellgröße M im Arbeitspunkt. Ist diese ungleich null muss der Motor das Moment M aufbringe, um die Schwerkraft auszugleichen.

Listing 2.1: Code der Linearisierungsfunktion

```
function [ A, B, C, D] = linearisierung( f, h, AP )

syms phi1 phi2 dphi1 dphi2 ddphi1 ddphi2 M;

x = [phi1;dphi1;phi2;dphi2];
u = M;

f_M_AP = subs(f(2),x,AP);

M_AP = solve(f_M_AP == 0 , M);

A = jacobian(f,x);
B = jacobian(f,u);
C = jacobian(h,x);
D = jacobian(h,u);

A = subs(A,[x,u],[AP,M_AP]);
B = subs(B,[x,u],[AP,M_AP]);
C = subs(C,[x,u],[AP,M_AP]);
D = subs(D,[x,u],[AP,M_AP]);
```

```
A = double(A);
B = double(B);
C = double(C);
D = double(D);

end
```

Die Linearisierung um die Arbeitspunkte

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\mathrm{AP}_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{x}_{\mathrm{AP}_2} &= \begin{bmatrix} \pi & 0 & \pi & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{x}_{\mathrm{AP}_3} &= \begin{bmatrix} \pi/2 & 0 & \pi & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ergibt für die allgmeine Zustandsraumdarstellung:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}
\end{aligned}
$$

die folgenden Systemmatrizen:

$$
\mathbf{A}_{\mathrm{AP1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -126{,}1286 & 0 & 63{,}0643 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 189{,}1929 & 0 & 168{,}1714 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{\mathrm{AP1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 142{,}8571 \\ 0 \\ -214{,}2857 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}_{\mathrm{AP1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_{\mathrm{AP1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_{\mathrm{AP2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 126{,}1286 & 0 & -63{,}0643 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -189{,}1929 & 0 & 168{,}1714 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{\mathrm{AP2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 142{,}8571 \\ 0 \\ -214{,}2857 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}_{\mathrm{AP2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_{\mathrm{AP2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{A}_{\text{AP3}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 73{,}5750 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{\text{AP3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 62{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\text{AP3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_{\text{AP3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Vergleich der Linearisierten Modelle

Die Eigenwerte der Zustandsraummodelle um die drei Arbeitspunkte lauten wie folgt:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 16{,}0744i \\ -16{,}0744i \\ 5{,}9929i \\ -5{,}9929i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} -16{,}0744 \\ 16{,}0744 \\ -5{,}9929 \\ 5{,}9929 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 8{,}5776 \\ -8{,}5776 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eine Betrachtung der Eigenwerte ergibt:

System in Arbeitspunkt 1

Das System ist ungedämpft, schwingungsfähig und grenzstabil, da es nur komplexe Eigenwerte auf der imaginären Achse aufweist. Wird die Reibung berücksichtigt erlangen die Eigenwerte einen negativen Realteil und sind somit sowohl gedämpft, als auch stabil.

System in Arbeitspunkt 2

Das System ist aufgrund zweier Pole rechts der Imaginären Achse instabil.

System in Arbeitspunkt 3

Das System ist aufgrund des Pols rechts der Imaginären Achse Instabil.

Es soll eine Funktion `diagonalForm` implementiert werden, die ein gegebenes System in Diagonalform transformiert, der entsprechende code ist in Listing 2.2 aufgeführt.

Listing 2.2: Code der Diagonalisierungsfunktion

```
function [ AD, BD, CD, DD ] = diagonalForm( A, B, C, D )

[V, Deig] = eig(A);

if rank(V)==length(V)
    V_inv = inv(V);

    AD = Deig;
    BD = V_inv*B;
    CD = C*V;
    DD = D;
else
    disp('Matrix␣A␣ist␣nicht␣diagonalähnlich!')
end

end
```

Die Transformation des um AP2 linearisierten Systems in die Diagonalform mittels der Funktion `diagonalForm` ergibt folgende Systemmatritzen:

$$\mathbf{A}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -16{,}0744 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16{,}0744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5{,}9929 & 0 \\ 0 & 0 & & 5{,}9929 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 138{,}1293 \\ 138{,}1293 \\ -21{,}3960 \\ 21{,}3960 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -0{,}0267 & 0{,}0267 & 0{,}0943 & 0{,}0943 \\ 0{,}0560 & -0{,}0560 & 0{,}1349 & 0{,}1349 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Transormation des selben Systems mit der MATLAB Funktion canon ergibt folgende Systemmatritzen:

$$\mathbf{A}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -16{,}0744 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5{,}9929 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16{,}0744 & 0 \\ 0 & 0 & & 5{,}9929 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 2{,}5354 \\ -0{,}7024 \\ 2{,}5354 \\ 0{,}7024 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -1{,}4559 & 2{,}8726 & 1{,}4559 & 2{,}8726 \\ 3{,}0534 & 4{,}1093 & -3{,}0534 & 4{,}1093 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die beiden Transformierten Systeme unterscheiden sich in der Sortierung der Eigenwerte in der **A** matrix, sowie in den Werten der **B** und **C** Matritzen. Dies ist durch eine unterschiedliche Sortierung der Eigenvektoren in der Transformationsmatrix **T** die zur Ähnlichkeitstransformation der Systemmatritzen genutzt wird zurückzuführen.

Die Transformation des um AP1 linearisierten Systems mit der MATLAB Funktion canon ergibt folgende Systemmmatritzen in Modalform:

$$\mathbf{A}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & 16{,}0744 & 0 & 0 \\ -16{,}0744 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 5{,}9929 \\ 0 & 0 & -5{,}9929 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 5{,}3736 \\ 0 \\ 0 \\ -2{,}1428 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}3739 & -1{,}8832 & 0 \\ 0 & 2{,}8813 & -2{,}6939 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Untersuchung von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Hier sollen die im Skript vorgestellten Überprüfungsverfahren unter Verwendung der im Rahmen des Versuchs erstellten Funktionen implementiert werden. Die Funktionen für die Überprüfungsverfahren sollen möglichst allgemein verwendbar sein. Die Überprüfungsverfahren sind in Listing 2.3 bis 2.8 aufgeführt

Listing 2.3: Code der Steuerbarkeitsfunktion nach Kalman

```
function [ S_s_Kalman] = checkCtrbKalman( A, B )

n = length(A);

if (rank(A)==n)

else
    disp('Matrix A hat nicht vollen Rang')
end
S_s_Kalman = B;
for count = 1:n-1
    S_s_Kalman = [S_s_Kalman, A^count *B ];
end
end
```

Listing 2.4: Code der Beobachtbarbarkeitsfunktion nach Kalman

```
function [ S_b_Kalman ] = checkObsvKalman( A, C )

n = length(A);

if rank(A) == n
else
    disp('Matrix␣A␣hat␣nicht␣vollen␣Rang');
end
S_b_Kalman = C;
for count = 1:n-1
    S_b_Kalman = [S_b_Kalman ; C * A^count];
end
end
```

Die MATLAB Funktionen `ctrb` und `obsv` ergeben die selben Steuerbar- beziehungsweise Beobachtbarkeitsmatritzen

$$\mathbf{S}_{SAP1} = 10000 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0{,}0143 & 0 & -3{,}1532 \\ 0{,}0143 & 0 & -3{,}1532 & 0 \\ 0 & -0{,}0214 & 0 & 6{,}3064 \\ -0{,}0214 & 0 & 6{,}3064 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{BAP1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -126{,}1286 & 0 & 63{,}0643 & 0 \\ 189{,}1929 & 0 & -168{,}1714 & 0 \\ 0 & -126{,}1286 & 0 & 63{,}0643 \\ 0 & 189{,}1929 & 0 & -168{,}1714 \end{bmatrix}$$

wie die selbst geschriebenen Funktionen `checkCtrbKalman` in Listing 2.3 und `checkObsvKalman` in Listing 2.4. Dies gilt für alle Arbeitspunkte

Listing 2.5: Code der Steuerbarkeitsfunktion nach Gilbert

```
function [ isCtrb_Gilbert ] = checkCtrbGilbert( A, B )

[T, lam] = eig(A);

if length(unique(diag(lam))) ~= length(A)
    disp('A␣hat␣mehrfache␣Eigenwerte');
end
```

```
Bd = T/B;
isCtrb_Gilbert = all(any(Bd,2));

if isCtrb_Gilbert
    disp('System␣ist␣steuerbar␣nach␣Gilbert');
else
    disp('System␣ist␣NICHT␣steuerbar␣nach␣Gilbert');
end
end
```

Listing 2.6: Code der Beobachtbarbarkeitsfunktion nach Gilbert

```
function [ isObsv_Gilbert ] = checkObsvGilbert( A, C )

[T, lam] = eig(A);

if length(unique(diag(lam))) ~= length(A)
    disp('A␣hat␣mehrfache␣Eigenwerte');
end

Cd = C*T;
isObsv_Gilbert = all(any(Cd,1));

if isObsv_Gilbert
    disp('System␣ist␣beobachtbar␣nach␣Gilbert');
else
    disp('System␣ist␣NICHT␣beobachtbar␣nach␣Gilbert');
end
end
```

Listing 2.7: Code der Steuerbarkeitsfunktion nach Hautus

```
function [ isCtrb_Hautus ] = checkCtrbHautus( A,B )

lam = eig(A);
isCtrb_Hautus = 0;
for count = 1:length(lam)
    ranks(count) = rank(horzcat(eye(length(A))*lam(count) - A, B));
end
```

```
if all(ranks == length(A))
    disp('System␣ist␣steuerbar␣nach␣Hautus');
    isCtrb_Hautus = 1;
else
    disp('System␣ist␣NICHT␣steuerbar␣nach␣Hautus');
end

end
```

Listing 2.8: Code der Beobachtbarbarkeitsfunktion nach Hautus

```
function [ isObsv_Hautus ] = checkObsvHautus( A,C )

lam = eig(A);
isObsv_Hautus = 0;
for count = 1:length(lam)
    ranks(count) = rank(vertcat(eye(length(A))*lam(count) - A, C));
end

if all(ranks == length(A))
    disp('System␣ist␣beobachtbar␣nach␣Hautus');
    isObsv_Hautus = 1;
else
    disp('System␣ist␣NICHT␣beobachtbar␣nach␣Hautus');
end

end
```

Nach Anwendung aller kriterien lassen sich folgende Aussagen über die Systeme in den drei Arbeitspunkten machen:

System in Arbeitspunkt 1

Das System ist vollständig steuer- und beobachtbar nach allen kriterien. Berücksichtigung der Reichbung ändert hieran nichts.

System in Arbeitspunkt 2

Das System ist vollständig steuer- und beobachtbar nach allen kriterien. Berücksichtigung der Reichbung ändert hieran nichts.

System in Arbeitspunkt 3

Das System ist nicht diagonalisierbar, daher sind Gilberts Kriterien nicht anwendbar. Das System ist sowohl nach Kalman, als auch nach Hautus vollständig beobachtbar. Es ist weder nach Kalman, noch nach Hautus steuerbar.