

©2009 г. В.А.БОНДАРКО, канд.физ.-мат.наук
(Санкт-Петербургский государственный университет)

Адаптивное векторное управление асинхронным электродвигателем на основе метода рекуррентных целевых неравенств*

Рассмотрена задача управления электромагнитным моментом асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором без измерения скорости его вращения. С помощью принципа векторного управления эта задача сводится к построению адаптивного наблюдателя за значениями вектора потокосцепления ротора. Использован метод рекуррентных целевых неравенств (РЦН), который позволяет сводить задачи адаптации к счетным системам неравенств относительно вектора оцениваемых параметров. Для рассматриваемой задачи управления эти неравенства оказываются невыпуклыми, что делает невозможным непосредственное использование разработанных в рамках метода РЦН проекционных алгоритмов. В связи с этим в работе предлагается общий метод пошаговой редукции размерности нелинейной части неравенств. При условии, что процессы замкнутой системы обладают некоторым естественным свойством невырожденности, этот метод позволяет свести невыпуклые неравенства к выпуклым и гарантирует достижение цели управления после окончания переходных процессов.

1. Введение

Асинхронные двигатели с короткозамкнутым ротором обладают общепризнанными достоинствами простоты и надежности в эксплуатации. В настоящее время они почти полностью вытеснили из автоматизированных управляемых приводов двигатели постоянного тока. В то же время с точки зрения управления эти двигатели представляют собой объекты достаточно сложные, особенно при отсутствии каких-либо датчиков скорости вращения, пристроенных к валу или встроенных в двигатель. Для управления такими двигателями наибольшее распространение получили системы так называемого векторного управления, начало которым было положено F. Blaschke [1] в начале 1970-х годов.

Название метода векторного управления обусловлено тем, что для синтеза регулятора используется модель динамики двигателя в системе координат (d-q), ориентированной вдоль вектора потокосцепления ротора. В этих координатах управляющее напряжение на обмотках статора определяется с помощью пропорционально-интегрирующей обратной связи от регулируемых величин, но как для их подсчета, так и для перевода напряжений в связанную с обмотками статора неподвижную систему координат, требуется знать вектор потокосцепления ротора.

Проблеме оценки потокосцепления посвящено множество исследований, довольно подробный список которых приведен, например, в [2]. Как правило, наблюдатели потокосцепления и других компонент состояния асинхронного электродвигателя строятся

*Работа выполнена при частичной поддержке ФЦП "Кадры" , госконтракт 02.740.11.5056.

на основе решения системы уравнений математической модели двигателя по доступной информации о напряжениях и токах статора. При этом, как отмечено, например, в [3], возникает проблема определения начальных условий, поскольку решения уравнения двигателя свойством асимптотической устойчивости не обладают. Кроме того, часть параметров двигателя могут иметь значения, отличные от номинальных, или даже медленно меняться во время функционирования системы (например, сопротивление обмоток растет по мере нагревания двигателя).

Настоящая работа посвящена, во-первых, обоснованию работоспособности некоторого конкретного алгоритма векторного управления асинхронным электродвигателем без измерения скорости вращения ротора, но с использованием значений тока статора и вектора потокоцепления ротора. Регулируемыми величинами служат электромагнитный момент на валу двигателя и абсолютная величина потокоцепления ротора. Показано, что рассматриваемый регулятор обеспечивает устойчивость в малом регулируемых величин относительно их заданных значений, и при этом он нечувствителен к параметрическим возмущениям. Во-вторых, поскольку измерение потокоцепления по постановке задачи предполагается невозможным, предлагается адаптивный наблюдатель вектора потокоцепления.

Рассматриваемый адаптивный наблюдатель построен на основе метода рекуррентных целевых неравенств (РЦН), предложенного В.А. Якубовичем в работах [4–6] и развитого затем в [7] и трудах его многочисленных последователей. Этот метод заключается в сведении задач адаптации к счетным системам неравенств относительно неизвестных оцениваемых параметров. Набор этих неравенств заранее не определен и может зависеть как от неконтролируемых воздействий на систему, так и от самого алгоритма их решения. Тем не менее, для широкого спектра задач адаптации удастся построить конечно-сходящиеся алгоритмы решения порождаемых ими систем.

Большая часть известных в рамках метода РЦН алгоритмов ориентирована на неравенства, выделяющие выпуклые множества в пространстве оцениваемых параметров; для немногочисленных исключений (например, [8]) характерно лавинообразное нарастание сложности вычислений по мере функционирования алгоритма. К сожалению, задача построения адаптивного наблюдателя за значениями вектора потокоцепления ротора асинхронного электродвигателя сводится именно к невыпуклым неравенствам, что обусловлено нелинейностью уравнений двигателя. Для решения этой проблемы в настоящей работе предлагается некий универсальный подход пошаговой редукции размерности нелинейных слагаемых в решаемых неравенствах. После окончания этого процесса получается новая система неравенств относительно того же набора параметров, но уже выпуклых, алгоритмы решения которых уже разработаны в рамках метода РЦН. В отношении рассматриваемой задачи это означает, что оценка потокоцепления может быть получена не только в случае известных параметров двигателя, но и для любого количества неизвестных параметров (хотя сложность алгоритма при этом растет).

Начало этой работе было положено по заказу компании Форд, что нашло свое отражение в [9, 10].

2. Постановка задачи

Преобразовав уравнения обобщенной электрической машины [11] с учетом короткозамкнутости обмоток ротора, получаем следующие уравнения асинхронного элект-

тродвигателя:

$$(1) \quad \begin{cases} d\omega/dt = -\alpha\omega + \mu T_e + T, \\ di/dt = -\gamma i + \beta(\eta I - \omega J)\psi + \delta u, \\ d\psi/dt = -(\eta I - \omega J)\psi + \eta M i. \end{cases}$$

Здесь используются следующие обозначения: ω — скорость вращения ротора, i — двумерный вектор токов статора, ψ — двумерный вектор потокосцепления ротора, u — двумерный вектор напряжений на обмотках статора, T — внешняя нагрузка на вал электродвигателя, α — коэффициент трения, μT_e — электромагнитный момент (создаваемая электродвигателем нагрузка),

$$T_e = i^* J \psi, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = -\frac{M}{m L_r},$$

M — взаимная индуктивность, m — момент инерции ротора, $L_r = M + L_{lr}$ — индуктивность ротора, L_{lr} — индуктивность рассеяния ротора, $\beta = \frac{\delta M}{L_r}$, $\gamma = \delta(R_s + \frac{M^2 R_r}{L_r^2})$, $\delta = \frac{1}{\sigma L_s}$, $\eta = \frac{R_r}{L_r}$, $\sigma = 1 - M^2/L_r L_s$ — параметр рассеяния, $L_s = M + L_{ls}$ — индуктивность статора, L_{ls} — индуктивность рассеяния статора, R_r, R_s — сопротивления ротора и статора. Если реальный электродвигатель имеет более двух перпендикулярно расположенных обмоток статора и ротора, то реальные токи и напряжения в этих обмотках преобразуются в i и u по известным правилам.

Компоненты вектора u имеют смысл управляющих воздействий, внешняя нагрузка T — воздействие возмущающее, измерению доступны токи статора i . Цель управления заключается в минимизации предельных отклонений регулируемых величин

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |T_e - T_r|, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} ||\psi|^2 - \Psi|,$$

от их заданных предельных значений T_r и $\Psi > 0$.

3. Векторное управление с помощью пропорционально-интегрирующей обратной связи.

Для построения обратной связи, обеспечивающей поставленную цель управления, полезно преобразовать уравнения электродвигателя (1) таким образом, чтобы они непосредственно описывали зависимость регулируемых величин T_e , $|\psi|^2$ от управляющего воздействия. Прежде всего,

$$\frac{d}{dt} |\psi|^2 = 2\dot{\psi}^* \psi = 2[-(\eta I - \omega J)\psi + \eta M i]^* \psi = -2\eta |\psi|^2 + 2\eta M i^* \psi,$$

то есть

$$(3) \quad (d/dt + 2\eta)|\psi|^2 = 2\eta M i^* \psi,$$

поэтому для достижения равенства $|\psi|^2 \approx \Psi$ достаточно обеспечить вспомогательную цель управления

$$(4) \quad i^* \psi \approx \Psi/M.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(i^* \psi) &= \left(\frac{di}{dt}\right)^* \psi + i^* \frac{d\psi}{dt} = \\ &= [-\gamma i + \beta(\eta I - \omega J)\psi + \delta u]^* \psi + i^* [-(\eta I - \omega J)\psi + \eta M i] = \\ &= -\gamma i^* \psi + \beta \eta |\psi|^2 + \delta u^* \psi - \eta i^* \psi + \omega i^* J \psi + \eta M |i|^2, \end{aligned}$$

то есть

$$(5) \quad (d/dt + \gamma + \eta)(i^*\psi) = \beta\eta|\psi|^2 + \delta u^*\psi + \omega T_e + \eta M|i|^2.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T_e &= \frac{d}{dt}(i^*J\psi) = \frac{di^*}{dt}J\psi + i^*J\frac{d}{dt}\psi = \\ &= [-\gamma i + \beta(\eta I - \omega J)\psi + \delta u]^*J\psi + i^*J[-(\eta I - \omega J)\psi + \eta Mi] = \\ &= -\gamma T_e - \beta\omega|\psi|^2 + \delta u^*J\psi - \eta T_e - \omega i^*\psi \end{aligned}$$

то есть

$$(6) \quad (d/dt + \gamma + \eta)T_e = -\beta\omega|\psi|^2 + \delta u^*J\psi - \omega i^*\psi.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} T_e^2 + |i^*\psi|^2 &= (i_1\psi_2 - i_2\psi_1)^2 + (i_1\psi_1 + i_2\psi_2)^2 = i_1^2\psi_2^2 + i_2^2\psi_1^2 + i_1^2\psi_1^2 + i_2^2\psi_2^2 = |i|^2|\psi|^2 \Rightarrow \\ |i|^2 &= \frac{T_e^2 + |i^*\psi|^2}{|\psi|^2}. \end{aligned}$$

Собирая вместе первое из уравнений электродвигателя (1) и уравнения (3),(5),(6), получаем систему

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\omega = -\alpha\omega + \mu T_e + T, \\ \frac{d}{dt}|\psi|^2 = -2\eta|\psi|^2 + 2\eta M i^*\psi, \\ \frac{d}{dt}T_e = -(\gamma + \eta)T_e - \beta\omega|\psi|^2 - \omega i^*\psi + \delta v_\perp, \\ \frac{d}{dt}(i^*\psi) = -(\gamma + \eta)(i^*\psi) + \beta\eta|\psi|^2 + \omega T_e + \eta M(T_e^2 + |i^*\psi|^2)|\psi|^{-2} + \delta v_\parallel \end{cases}$$

с 4-мерным вектором состояния $x = (\omega, |\psi|^2, T_e, i^*\psi)^*$ и тремя входами $T, v_\parallel = u^*\psi$ и $v_\perp = u^*J\psi$.

Пусть $T = \bar{T} + \tilde{T}$, $\bar{T} = \text{const}$, $\tilde{T}(t) \rightarrow 0$. Тогда, приравняв нулю производные в уравнениях (7), нетрудно определить точку равновесия этой системы, которая соответствует поставленной цели управления: $\bar{\omega} = (\mu T_r + \bar{T})/\alpha$, $\overline{(i^*\psi)} = \Psi/M$, $\bar{v}_\perp = [(\gamma + \eta)T_r + \beta\bar{\omega}\Psi + \bar{\omega}\overline{(i^*\psi)}]/\delta$, $\bar{v}_\parallel = [(\gamma + \eta)\overline{(i^*\psi)} - \beta\eta\Psi - \bar{\omega}T_r - \eta M(T_r^2 + \overline{(i^*\psi)}^2)/\Psi_r]/\delta$, где установившиеся значения переменных надчеркнуты.

Линеаризация системы (7) около определенной точки равновесия приводит к уравнениям

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Delta_\omega = -\alpha\Delta_\omega + \mu\Delta_e + \tilde{T}, \\ \frac{d}{dt}\Delta_\psi = -2\eta\Delta_\psi + 2\eta M\Delta_{i^*\psi}, \\ \frac{d}{dt}\Delta_e = -(\gamma + \eta)\Delta_e - \beta\bar{\omega}\Delta_\psi - \beta\Psi\Delta_\omega - \bar{\omega}\Delta_{i^*\psi} - \overline{(i^*\psi)}\Delta_\omega + o(\Delta) + \delta(v_\perp - \bar{v}_\perp), \\ \frac{d}{dt}\Delta_{i^*\psi} = -(\gamma + \eta)\Delta_{i^*\psi} + \beta\eta\Delta_\psi + \bar{\omega}\Delta_e + \Delta_\omega T_r + 2\eta M T_r \Delta_e / \Psi + \\ + 2\eta M \overline{(i^*\psi)} \Delta_{i^*\psi} / \Psi - \eta M (T_r^2 + |\overline{(i^*\psi)}|^2) \Psi^{-2} \Delta_\psi + o(\Delta) + \delta(v_\parallel - \bar{v}_\parallel), \end{cases}$$

где $\Delta_\omega = \omega - \bar{\omega}$, $\Delta_\psi = |\psi|^2 - \Psi$, $\Delta_e = T_e - T_r$, $\Delta_{i^*\psi} = i^*\psi - \overline{(i^*\psi)}$ — отклонения компонент вектора состояния от своих установившихся значений.

Установившиеся значения компонент управления существенно зависят от параметров, зачастую плохо определенных (значение $\bar{\omega}$, например, не может быть априорно известно, поскольку оно зависит от неизвестной постоянной составляющей \bar{T} внешней нагрузки $T = \bar{T} + \tilde{T}$). Эту зависимость нетрудно компенсировать, используя пропорционально-интегрирующий регулятор

$$(8) \quad v_{\perp} = -k_p \Delta_e - k_i \sigma_e, \quad \dot{\sigma}_e = \Delta_e, \quad v_{\parallel} = -k_p \Delta_{i^* \psi} - k_i \sigma_{i^* \psi}, \quad \dot{\sigma}_{i^* \psi} = \Delta_{i^* \psi}.$$

Чтобы вернуться к исходным терминам системы (1), нужно выразить 2-мерный вектор управляющих напряжений u через $v_{\parallel} = u^* \psi$ и $v_{\perp} = u^* J \psi$. Очевидно,

$$(9) \quad u = \frac{1}{|\psi|^2} \begin{bmatrix} \psi_1 & -\psi_2 \\ \psi_2 & \psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\parallel} \\ v_{\perp} \end{bmatrix},$$

где $\psi_{1,2}$ — компоненты вектора потокосцепления ψ .

Доставляемые пропорционально-интегрирующим регулятором (8) значения $v_{\parallel} = u^* \psi$ и $v_{\perp} = u^* J \psi$ только множителем $|\psi|$ отличаются от проекций вектора напряжения на оси координат, связанные с потокосцеплением ротора ψ . То же относится и к входным сигналам регулятора, то есть $i^* \psi$ и $i^* J \psi$. Таким образом, регулятор (8),(9) в общепринятой терминологии реализует векторное управление асинхронным электродвигателем.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *При любых параметрах асинхронного электродвигателя (1) пропорционально-интегрирующий регулятор (8),(9) обеспечивает локальную асимптотическую устойчивость замкнутой системы около точки равновесия, соответствующей цели управления (2), если $k_i = \rho k_p$, $\rho > 0$ и значение k_p достаточно велико.*

Итак, для фиксированных параметров электродвигателя цель управления достигается при всех достаточно больших коэффициентах обратной связи k_i и k_p . Из доказательства теоремы (оно вынесено в приложение) следует, что граничные значения допустимых коэффициентов непрерывно зависят от параметров двигателя. Следовательно, фиксированные коэффициенты регулятора обеспечивают решение задачи сразу для некоторого множества параметров, то есть регулятор обладает свойством нечувствительности к параметрическим возмущениям.

Теорема 1 не представляет собой ничего неожиданного и приведена здесь, главным образом, затем, чтобы обосновать следующий вывод: *задачу управления асинхронным электродвигателем можно считать решенной, если доступен измерению вектор потокосцепления ψ* . Поскольку непосредственное измерение ψ связано с существенными трудностями, возникает задача оценить потокосцепление, используя только известные и наблюдаемые величины: некоторые или все параметры двигателя, напряжение u и ток i . Этому и посвящен следующий раздел.

4. Оценка потокосцепления в случае полностью известных параметров двигателя.

В этом разделе будет предполагаться, что все параметры электродвигателя известны, а измерению доступны только компоненты вектора токов статора i , но не потокосцепление ψ и не скорость вращения ротора ω .

Из уравнений асинхронного электродвигателя (1) следует, что функция $z = \beta \psi + i$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dz/dt = (\beta \eta M - \gamma) i + \delta u.$$

Следовательно, значения вектор-функции

$$(10) \quad \Psi(t) = \frac{1}{\beta} \left(\int_0^t [(\beta\eta M - \gamma)i(s) + \delta u(s)] ds - i \right)$$

отличаются от потоксцепления только постоянным слагаемым:

$$(11) \quad \psi(t) = \Psi(t) + \tau.$$

Если τ известно, то уравнения (10),(11) позволяют получить ψ . Чтобы оценить τ , воспользуемся дифференциальным уравнением (3), которое справедливо для всех решений (1). Из этого уравнения по формуле Коши следует, что

$$\begin{aligned} |\psi(t)|^2 &= |\tau|^2 + 2\Psi(t)^*\tau + |\Psi(t)|^2 = e^{-2\eta t}|\psi(0)|^2 + \int_0^t e^{-2\eta s} 2\eta M i(t-s)^* [\tau + \Psi(t-s)] ds = \\ &= e^{-2\eta t}|\psi(0)|^2 + 2\eta M \int_0^t e^{-2\eta s} i(t-s) ds^* \tau + 2\eta M \int_0^t e^{-2\eta s} i(t-s)^* \Psi(t-s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\tau|^2 + 2 \left(\Psi(t) - \eta M \int_0^t e^{-2\eta s} i(t-s) ds \right)^* \tau + |\Psi(t)|^2 - \\ - 2\eta M \int_0^t e^{-2\eta s} i(t-s)^* \Psi(t-s) ds = e^{-2\eta t} |\psi(0)|^2, \end{aligned}$$

то есть

$$(12) \quad |\tau - C(t)|^2 - R(t)^2 = e^{-2\eta t} |\psi(0)|^2, \quad t \in [0, \infty),$$

где $C(t)$ и $R(t)^2$ можно выразить через известные или наблюдаемые величины:

$$(13) \quad \begin{aligned} C(t) &= - \left(\Psi(t) - \eta M \int_0^t e^{-2\eta s} i(t-s) ds \right), \\ R(t)^2 &= 2\eta M \int_0^t e^{-2\eta s} i(t-s)^* \Psi(t-s) ds - |\Psi(t)|^2 + |C(t)|^2. \end{aligned}$$

Равенство (12) означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ неизвестный вектор τ начиная с некоторого момента удовлетворяет неравенствам

$$(14) \quad \left| -2C(t)^*\tau + |\tau|^2 + C(t)^2 - R(t)^2 \right| < \varepsilon.$$

Замена уравнений неравенствами позволяет учесть ошибки измерения и вычислений, а также неполную адекватность модели.

Фиксируем период дискретизации $h > 0$ и будем рассматривать неравенства (14) в кратные h моменты $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots$. Возьмем $t = t_k$ и $t = t_{k+1}$ и перепишем (14) в виде

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< -2C(t_k)^*\tau + |\tau|^2 + C(t_k)^2 - R(t_k)^2 < \varepsilon, \\ -\varepsilon &< 2C(t_{k+1})^*\tau - |\tau|^2 - C(t_{k+1})^2 + R(t_{k+1})^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

а затем сложим эти два двойных неравенства. В результате этих преобразований порождается система неравенств

$$(15) \quad |\tau^* \varphi_k + r_k| < 2\varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где

$$(16) \quad \varphi_k = 2[C(t_{k-1}) - C(t_k)], \quad r_k = C(t_k)^2 - C(t_{k-1})^2 + R(t_{k-1})^2 - R(t_k)^2.$$

Рассматриваемые неравенства имеют очевидный геометрический смысл. Каждое неравенство (14) означает, что искомый вектор τ принадлежит кольцу — промежутку между двумя окружностями с общим центром $C(t)$ и радиусами $R(t) \pm \varepsilon$ (если $R(t) - \varepsilon < 0$, то кольцо превращается в круг). Что касается неравенств (15), то каждое из них выделяет в пространстве векторов τ "полоску", то есть промежуток между прямыми $\tau^* \varphi_k + r_k = \pm \varepsilon$.

Определим матрицы

$$\Phi_1(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{bmatrix} \varphi_{k_1} & \varphi_{k_2} & \dots & \varphi_{k_n} \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(k_1, \dots, k_n) = \Phi_1^*(k_1, \dots, k_n) \Phi_1(k_1, \dots, k_n),$$

где n — размерность векторов τ (в рассматриваемом случае $n = 2$). Обозначим через $T_\infty = T_\infty(\varepsilon)$ множество всех решений неравенств (15) с достаточно большими номерами k , а через $D_\infty = D_\infty(\varepsilon)$ — диаметр множества T_∞ , то есть максимальное значение расстояния между двумя его точками. Будем говорить, последовательность $\{\varphi_k\}$ невырожденная, если она ограничена и выполнено любое из условий

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{k_i > K} \det \Phi_{1,2}(k_1, k_2, \dots, k_n) \geq \delta > 0.$$

Для невырожденных последовательностей, очевидным образом, $D_\infty(\varepsilon)$ — величина одного порядка малости с ε .

Искомый вектор τ — решение всех неравенств (15). Предположим, что нам удалось найти $\tau_\infty \in T_\infty$, тогда расстояние между τ и τ_∞ не может быть больше $D_\infty(\varepsilon)$, и может быть сделано сколь угодно малым при надлежащем выборе ε . Таким образом, задача наблюдения за значениями потокосцепления ротора сведена к решению системы неравенств (15).

Замена системы неравенств (14) на более грубые неравенства (15) оправдана тем, что последние выделяют выпуклые множества в пространстве векторов τ . Алгоритмы решения таких систем разработаны в рамках метода рекуррентных целевых неравенств. В частности, для решения неравенств (15) подходит следующий алгоритм [7]:

$$(17) \quad \tau_k = \begin{cases} \tau_{k-1}, & \text{если } |\eta_k| \leq 2\varepsilon, \\ \tau_{k-1} - \mu_k(\eta_k - 2\rho\varepsilon \operatorname{sign} \eta_k) |\varphi_{k-1}|^{-2} \varphi_{k-1}, & \text{если } |\eta_k| > 2\varepsilon. \end{cases}$$

где $\eta_k = \tau_{k-1}^* \varphi_k + r_k$, а $\rho \in (0, 1)$ и $\mu_t \in [\mu', \mu''] \subset (0, 2)$ — параметры алгоритма. Он получил название "Полоска-1" по геометрическому смыслу решаемых неравенств. Достаточные условия его сходимости за конечное число шагов — разрешимость неравенств $|\tau^* \varphi_k + r_k| < 2\rho\varepsilon$ и ограниченность последовательности $\{\varphi_k\}$. Первое условие в нашем случае выполнено, поскольку истинное значение искомого вектора τ удовлетворяет точным равенствам $\tau^* \varphi_k + r_k = 0$. Второе условие следует из предполагаемой невырожденности последовательности векторов φ_k . Окончательно, получаем следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть параметры электродвигателя (1) известны и управляющие напряжения на обмотках статора таковы, что определяемые равенствами (16) сигналы ϕ_k — невырожденные. Тогда система, задаваемая уравнениями (10), (11), (13), (16) и (17), по завершении переходных процессов обеспечивает наблюдение потокосцепления ротора с точностью, пропорциональной значению ε в уравнении (17).

5. Приведение рекуррентных неравенств к выпуклым в общем случае.

В предыдущем разделе задача решения системы невыпуклых неравенств была заменена решением неравенств выпуклых, полученных комбинацией исходных неравенств в различные моменты времени. Попробуем обобщить этот подход на более общий случай.

Рассмотрим бесконечную систему неравенств

$$(18) \quad |\alpha_k + \tau^* \varphi_k + \zeta(\tau)^* \phi_k| \leq \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

относительно n -вектора τ . Здесь $\zeta(\tau) \in \mathbb{R}^m$, $\{\varphi_k\}$ — последовательность n -векторов, $\{\phi_k\}$ — последовательность m -векторов, $\{\alpha_k\}$ и $\{\varepsilon_k\}$ — скалярные последовательности, причем $\varepsilon_k > 0$. Неравенства (14) принимают вид (18) при $n = 2$, $m = 1$, $\alpha_k = C^2(t_k) - R^2(t_k)$, $\varphi_k = -2C(t_k)$, $\zeta(\tau) = |\tau|^2$ и $\phi_k \equiv 1$.

Попробуем уменьшить размерность нелинейного слагаемого $\phi(\tau) \in \mathbb{R}^l$ в левой части (18). Обозначим через $\zeta''(\tau)$ и ϕ_k'' последние компоненты векторов $\zeta(\tau)$, ϕ_k и представим эти векторы в виде $\zeta(\tau) = (\zeta'(\tau)^*, \zeta''(\tau))^*$ и $\phi_k = (\phi_k'^*, \phi_k'')^*$, где $\zeta''(\tau)$ и ϕ_k'' — векторы, размерность которых на единицу меньше l . Перепишем два подряд идущих неравенства (18) в виде

$$(19) \quad \begin{aligned} -\varepsilon_k &\leq \alpha_k + \tau^* \varphi_k + \zeta'(\tau)^* \phi_k' + \zeta''(\tau) \phi_k'' \leq \varepsilon_k, \\ -\varepsilon_{k-1} &\leq \alpha_{k-1} + \tau^* \varphi_{k-1} + \zeta'(\tau)^* \phi_{k-1}' + \zeta''(\tau) \phi_{k-1}'' \leq \varepsilon_{k-1}. \end{aligned}$$

Если домножить первую строку на ϕ_{k-1}'' , а вторую на $-\phi_k''$, то

$$\begin{aligned} -\varepsilon_k |\phi_{k-1}''| &\leq \alpha_k \phi_{k-1}'' + \tau^* \varphi_k \phi_{k-1}'' + \zeta'(\tau)^* \phi_k' \phi_{k-1}'' + \zeta''(\tau) \phi_k'' \phi_{k-1}'' \leq \varepsilon_k |\phi_{k-1}''|, \\ -\varepsilon_{k-1} |\phi_k''| &\leq -\alpha_{k-1} \phi_k'' - \tau^* \varphi_{k-1} \phi_k'' - \zeta'(\tau)^* \phi_{k-1}' \phi_k'' - \zeta''(\tau) \phi_{k-1}'' \phi_k'' \leq \varepsilon_{k-1} |\phi_k''| \end{aligned}$$

при любых знаках этих множителей. Сложив первую строку со второй, получаем

$$\begin{aligned} -\varepsilon_k |\phi_{k-1}''| - \varepsilon_{k-1} |\phi_k''| &\leq (\alpha_k \phi_{k-1}'' - \alpha_{k-1} \phi_k'') + \tau^* (\varphi_k \phi_{k-1}'' - \varphi_{k-1} \phi_k'') + \\ &\quad + \zeta'(\tau)^* (\phi_k' \phi_{k-1}'' - \phi_{k-1}' \phi_k'') \leq \varepsilon_k |\phi_{k-1}''| + \varepsilon_{k-1} |\phi_k''|, \end{aligned}$$

то есть

$$(20) \quad \left| \tilde{\alpha}_k + \tau^* \tilde{\varphi}_k + \tilde{\zeta}(\tau)^* \tilde{\phi}_k \right| \leq \tilde{\varepsilon}_k,$$

где

$$(21) \quad \begin{aligned} \tilde{\alpha}_k &= \alpha_k \phi_{k-1}'' - \alpha_{k-1} \phi_k'', \quad \tilde{\varphi}_k = \varphi_k \phi_{k-1}'' - \varphi_{k-1} \phi_k'', \\ \tilde{\varepsilon}_k &= \varepsilon_k |\phi_{k-1}''| + \varepsilon_{k-1} |\phi_k''|, \quad \tilde{\phi}_k = \phi_k' \phi_{k-1}'' - \phi_{k-1}' \phi_k''. \end{aligned}$$

Таким образом, любое решение системы неравенств (18) является решением аналогичной системы (20), в которой размерность векторов ϕ_k и $\zeta_k(\tau)$ уменьшены на единицу. Применив преобразования (21) еще раз уже к системе (20), получаем еще меньшую размерность ϕ_k и $\zeta_k(\tau)$. На m -том шаге из системы (18) получается система

$$|\alpha_k + \tau^* \varphi_k| \leq \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

для решения которой можно применить алгоритм (17). При дополнительном условии невырожденности векторов φ_k его конечная сходимость обеспечена.

6. Адаптивное оценивание потокосцепления ротора двигателя с неизвестными параметрами

В предыдущем разделе была описана процедура сведения невыпуклых неравенств (18) к выпуклым неравенствам вида (15), алгоритм решения которых известен. Покажем, как свести задачу оценки потокосцепления ротора двигателя с неполностью известными параметрами к системам вида (18).

Для простоты изложения предположим, что известны все параметры двигателя, кроме сопротивления ротора R_r . Более общие случаи рассматриваются аналогично, но сложность наблюдателя при этом возрастает.

В терминах коэффициентов уравнений (1) неизвестное значение R_r означает, что нам неизвестна величина $\eta = R_r/L_r$, где L_r — индуктивность ротора. Важно, что в силу соотношений между η и другими коэффициентами значение величины $\beta\eta M - \gamma$ от η не зависит — оно равно $-\delta R_s$, где $\delta = \frac{1}{\sigma L_s}$, $\sigma = 1 - M^2/L_r L_s$, R_s — сопротивление статора, L_s — индуктивность статора, M — взаимная индуктивность. Поэтому уравнение (10) можно переписать в виде

$$(22) \quad \Psi(t) = \frac{1}{\beta} \left(\delta \int_0^t [u(s) - R_s i(s)] ds - i \right),$$

и оно по-прежнему дает возможность определить потокосцепление ψ с точностью до неизвестного постоянного слагаемого: $\psi(t) = \Psi(t) + \psi_0$. В этом уравнении, в отличие от (11), для постоянной составляющей потока используется обозначение ψ_0 , поскольку вектор подстраиваемых параметров τ будет иметь теперь другой смысл и другую размерность.

По-прежнему воспользуемся тем, что в силу уравнений электродвигателя справедливо равенство (3), и перепишем его в виде

$$\begin{aligned} (d/dt + \Gamma) |\psi|^2 &= 2\eta M i^* \psi + (\Gamma - 2\eta) |\psi|^2 = \\ &= 2\eta M i^* (\Psi + \psi_0) + (\Gamma - 2\eta) (|\Psi|^2 + 2\Psi * \psi_0 + |\psi_0|^2), \end{aligned}$$

где Γ — какая-нибудь постоянная положительная величина. Из этого уравнения следует, что

$$|\psi(t)|^2 = 2\eta M [A(t) + B^*(t)\psi_0] + (\Gamma - 2\eta) [C(t) + 2B^*(t)\psi_0 + \Gamma^{-1}(e^{-\Gamma t} - 1)|\psi_0|^2]$$

где

$$(23) \quad A(t) = \int_0^t e^{-\Gamma s} i^*(t-s) \Psi(t-s) ds, \quad B(t) = \int_0^t e^{-\Gamma s} i(t-s) ds, \quad C(t) = \int_0^t e^{-\Gamma s} |\Psi(t-s)|^2 ds.$$

С другой стороны, $|\psi(t)|^2 = |\psi_0|^2 + 2\Psi(t)^* \psi_0 + |\Psi(t)|^2$, поэтому

$$\begin{aligned} 2[\Gamma B(t) - \Psi(t)]^* \psi_0 + 2\eta(M - 2)B(t)^* \psi_0 + (\Gamma - 2\eta)[\Gamma^{-1}(e^{-\Gamma t} - 1) - 1]|\psi_0|^2 + \\ + 2\eta M A(t) + (\Gamma - 2\eta)C(t) - |\Psi(t)|^2 = 0, \end{aligned}$$

или

$$\alpha(t) + \tau^* \varphi(t) + \zeta(\tau)^* \phi(t) = 0,$$

где

$$(24) \quad \alpha(t) = \Gamma C(t) - |\Psi(t)|^2, \\ \tau = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \zeta(\tau) = \begin{bmatrix} \eta \psi_0 \\ (\Gamma - 2\eta)|\psi_0|^2 \end{bmatrix}, \quad \varphi(t) = 2 \begin{bmatrix} \Gamma B(t) - \Psi(t) \\ M A(t) - C(t) \end{bmatrix}, \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} 2MB(t) \\ \Gamma^{-1}(e^{-\Gamma t} - 1) - 1 \end{bmatrix}.$$

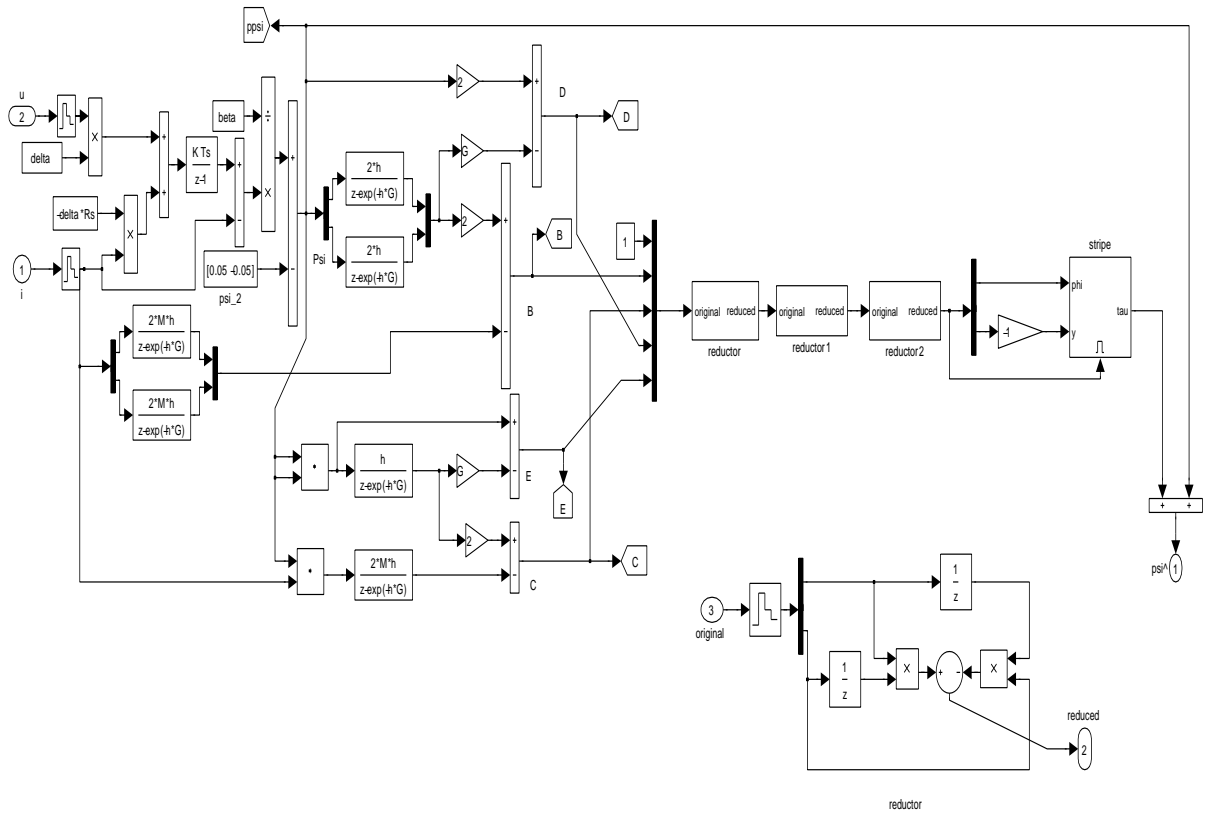


Рис. 2: Блок-схема адаптивного наблюдателя, неизвестно значение R_r .

На рисунке 3 отображаются результаты моделирования в случае полностью известных параметров электродвигателя, а на рисунке 4 — для случая неизвестного сопротивления ротора R_r . Время эксперимента — 50 секунд, но отображаются данные первых 5 секунд моделирования, поскольку после этого графики стабилизируются. Начальное значение вектора оценок — нулевое, а обе компоненты истинного значения τ равны 0.05. Период дискретизации в обоих экспериментах равен 0.01, во втором эксперименте для параметра Γ выбрано значение 100. На верхних осях каждого из рисунков изображаются компоненты векторов потокосцепления ротора (сплошные линии — истинное потокосцепление, пунктирные — результат оценки), а также абсолютная величина истинного потокосцепления (сплошная линия с кружочками). На средних осях пунктирная синусоида — это желательное значение электромагнитного момента T_r , а сплошная кривая — реально достигаемое значение T_e . Наконец, на нижних осях обоих рисунков изображена псевдослучайная внешняя нагрузка на электродвигатель T_l , имеющая смысл неизмеряемого возмущающего воздействия.

Видно, что переходный период в обоих случаях составляет около 1 с, после чего оценки компонент вектора потокосцепления близки к своим истинным значениям, а регулируемые величины T_e и $|\psi|$ — к заданным значениям T_r и 0.02 соответственно. Отсутствие видимой корреляции между возмущающим воздействием T_l и качеством оценивания объясняется тем, что сигнал T_l исключен из уравнений, используемых для оценивания. Влияние возмущения T_l на качество управления все-таки имеется, но оно не слишком велико.

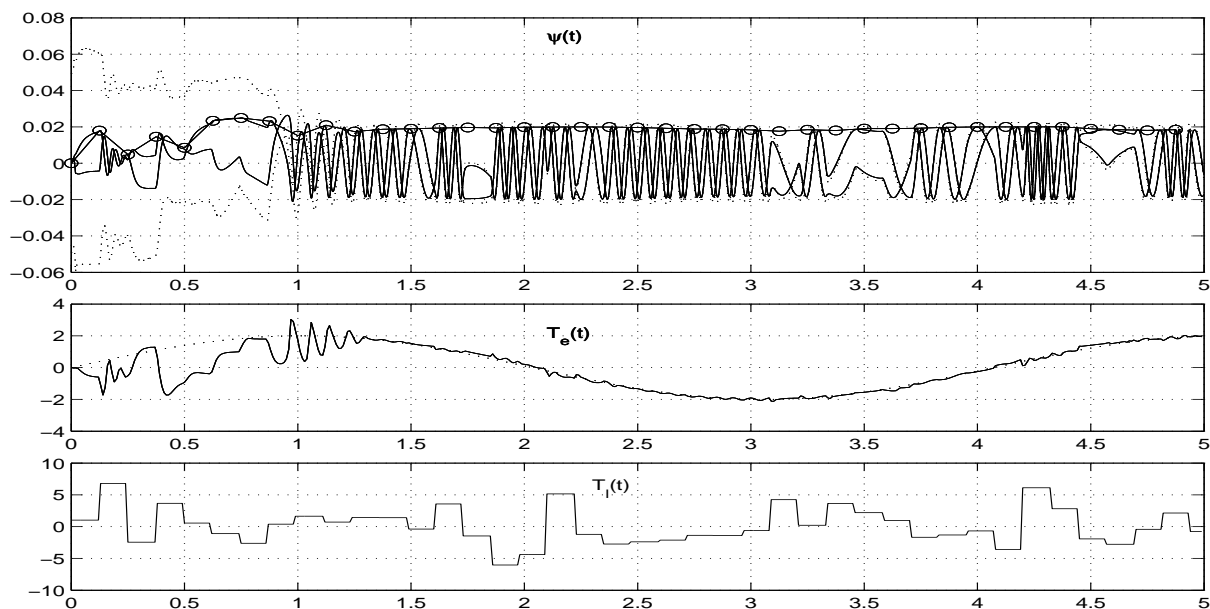


Рис. 3: Вектор потокосцепления и его оценка.

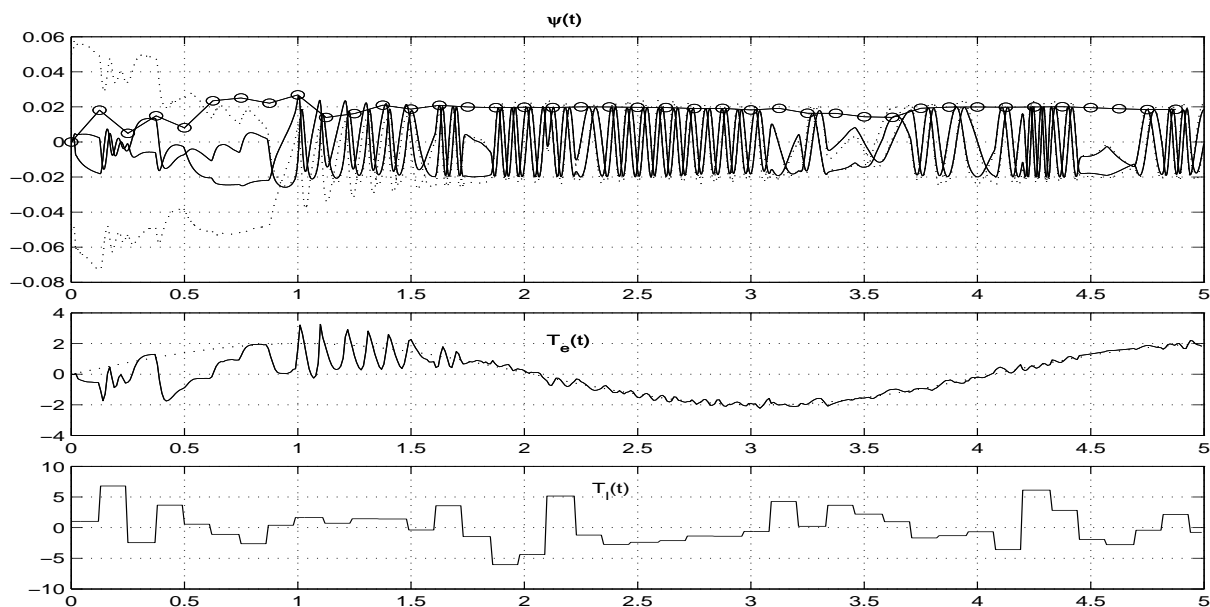


Рис. 4: Вектор потокосцепления и его оценка.

Заключение.

Итак, для асинхронного электродвигателя с короткозамкнутыми обмотками ротора рассмотрена задача отслеживания заданных значений электромагнитного момента и абсолютной величины потокосцепления ротора. По принципу векторного управления построен регулятор, который обеспечивает устойчивость в малом регулируемых величин относительно их заданных значений, и при этом он нечувствителен к параметрическим возмущениям. В качестве входных сигналов этот регулятор использует токи обмоток статора и потокосцепление ротора. Поскольку измерение потокосцепления по постановке задачи предполагается невозможным, предлагается использовать адаптивный наблюдатель, построенный по методу рекуррентных целевых неравенств. Порождаемые задачей неравенства выделяют в пространстве оцениваемых параметров невыпуклые множества, что делает затруднительным построение эффективного

алгоритма их решения. Для решения этой проблемы в настоящей работе предлагается некий универсальный подход пошаговой редукции размерности нелинейных слагаемых в решаемых неравенствах. После окончания этого процесса получается новая система неравенств относительно того же набора параметров, но уже выпуклых, алгоритмы решения которых уже разработаны в рамках метода РЦН. С помощью этого подхода наблюдатели потокоцепления построены как при полностью известных параметрах двигателя, так и при частично неизвестных.

Достаточным условием работоспособности построенных наблюдателей служит труднопроверяемое условие невырожденности некоторых их внутренних сигналов, порождаемых в процессе функционирования замкнутой системы. Аналитическая проверка аналогичных условий весьма сложна даже для линейных объектов управления. Численный эксперимент показывает, однако, что для рассматриваемых систем оно выполняется.

Приложение. Доказательство теоремы 1.

Локальная динамика замкнутой системы определяется 6×6 матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - k_p I_2 & -k_i I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

с соответствующими (2×2) -подматрицами A_{ij} :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -2\eta \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -\beta n \Psi - \overline{i^* \psi} & -\beta \bar{\omega} \\ n T_r & \beta \eta - \eta M (T_r^2 + |(\overline{i^* \psi})|^2) \Psi^{-2} \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 2\eta M \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -(\gamma + \eta) & -\bar{\omega} \\ \bar{\omega} + 2\eta M T_r / \Psi & -(\gamma + \eta) + 2\eta M (\overline{i^* \psi}) / \Psi \end{bmatrix}.$$

Пусть $k_i = \rho k_p$, $\rho > 0$. Нетрудно убедиться, что матрица \mathcal{A} будет гурвицевой, если значение k_p достаточно велико. Действительно, по лемме Шура можно вычислить характеристический определитель \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_6 - \mathcal{A}) &= \det \left[\begin{array}{cc|c} \lambda I_2 - A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{21} & \lambda I_2 - A_{22} + k_p I_2 & k_i I_2 \\ \hline 0 & -I_2 & \lambda I_2 \end{array} \right] = \\ &= \det(\lambda I_2) \det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda I_2 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda I_2 - A_{22} + k_p I_2 \end{bmatrix} - \lambda^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k_i I_2 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \lambda^2 \det \begin{bmatrix} \lambda I_2 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda I_2 - A_{22} + k_p I_2 + \lambda^{-1} k_i I_2 \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^2 \det \begin{bmatrix} & -A_{12} & \lambda I_2 - A_{11} \\ \lambda I_2 - A_{22} + k_p I_2 + \lambda^{-1} k_i I_2 & & -A_{21} \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^2 \det A_{12} \det [-A_{21} + (\lambda I_2 - A_{22} + k_p I_2 + \lambda^{-1} k_i I_2) A_{12}^{-1} (\lambda I_2 - A_{11})] = \\ &= 2\mu M \eta \det \left[(\lambda^2 I_2 - A_{22} \lambda + k_p I_2 \lambda + k_i I_2) \begin{pmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & 1/(2\eta M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda + \alpha & 0 \\ 0 & \lambda + 2\eta \end{pmatrix} - \lambda A_{21} \right] = \\ &= \lambda^6 + c_1 \lambda^5 + c_2 \lambda^4 + \dots + c_6, \end{aligned}$$

где c_i — это многочлены от k_p :

$$\begin{aligned} c_1 &= 2k_p + \dots, \\ c_2 &= k_p^2 + \dots, \\ c_3 &= (\alpha + 2\rho + 2\eta)k_p^2 + \dots, \\ c_4 &= (4\eta\rho + \rho^2 + 2\alpha\eta + 2\rho\alpha)k_p^2 + \dots, \\ c_5 &= (\rho^2\alpha + 2\eta\rho^2 + 4\alpha\eta\rho)k_p^2 + \dots, \\ c_6 &= 2\alpha\eta\rho^2k_p^2 + \dots, \end{aligned}$$

а многоточиями обозначены слагаемые, которые содержат младшие степени k_p . По критерию Рауса-Гурвица для того, чтобы все собственные числа \mathcal{A} лежали в открытой левой полуплоскости, необходимым и достаточным условием служит положительность левых верхних миноров матрицы

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c_2 & c_4 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_2 & c_4 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_3 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 & c_4 & c_6 \end{bmatrix}.$$

Эти миноры — тоже многочлены от k_p :

$$\begin{aligned} d_1 &= c_1 = 2k_p + \dots, \\ d_2 &= c_1c_2 - c_3 = 2k_p^3 + \dots, \\ d_3 &= 2(\alpha + 2\eta + 2\rho)k_p^5 + \dots, \\ d_4 &= 2[\rho^3 + 4(\alpha + 2\eta)\rho^2 + 4(\alpha + 2\eta)^2\rho^2 + 2(\alpha + 2\eta)\alpha\eta]k_p^7 + \dots, \\ d_5 &= 4\rho(\alpha + \rho)^2(2\eta + \rho)^2(\alpha + 2\eta)k_p^9 + \dots, \\ d_6 &= 8\alpha\eta\rho^3(\alpha + \rho)^2(2\eta + \rho)^2(\alpha + 2\eta)k_p^{11} + \dots, \end{aligned}$$

где многоточиями опять обозначены слагаемые с младшими степенями k_p . Поскольку значения α и η по своей природе положительны, при больших k_p все гурвицевы определители d_i тоже будут положительны, то есть матрица \mathcal{A} будет гурвицевой.

Приведенные рассуждения доказывают локальную устойчивость системы (7), замкнутой обратной связью (8), что и требовалось.

Список литературы

1. *Blaschke F.* Method for controlling asynchronous machines. / United States Patent 3,824,437, July 16, 1974.
2. *Пивняк Г.Г., А.В. Волков.* Современные частотно-регулируемые асинхронные электроприводы с широтно-импульсной модуляцией. / Днепропетровск: Национальный горный университет, 2006. — 470 с.
3. *Виноградов А., Сибирцев А., Колодин И.* Адаптивно-векторная система управления бездатчикового асинхронного электропривода серии ЭПВ. // Силовая электроника. 2006. №3.

4. *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // ДАН СССР. 1966. Т.166. № 6. С. 1308-1311.
5. *Якубович В.А.* К теории адаптивных систем // ДАН СССР. 1968. Т.182. № 3. С. 518-521.
6. *Якубович В.А.* Конечно-сходящиеся алгоритмы решения счетных систем неравенств и их применение в задачах адаптивных систем // ДАН СССР. 1969. Т. 189. № 3. С. 495–498.
7. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
8. *Gusev S.V., Shishkin S.L.* Adaptive control of biped robot walking on an inclined plane// Proc. of the 5th IEEE Conf. Control Appl., Dearborn, MI, 1996. P. 1090-1095.
9. *Bondarko V.A., Zaremba A.T.* Speed and Flux Estimation for an Induction Motor Without Position Sensor // Proc. Amer. Contr. Conf., San Diego, CA, Jun. 1999
10. *Stuntz R.M., Bondarko V.A., Zaremba A.T.* Induction motor control system with speed and flux estimation / United States Patent patent 6,014,006, January 2000.
11. *Копылов И.П.* Математическое моделирование электрических машин. — М.: Высшая школа, 2001. — 327 С.