

---

# Part 2 - Binary Tree

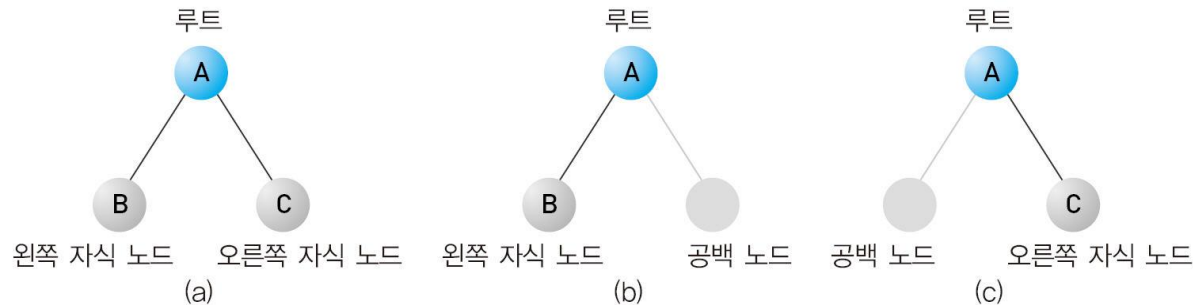
---

# Binary Tree 성립 요건

- 노드들의 유한(finite) (possibly empty) 집합
- **nonempty** binary tree는 단 하나의 **root** 노드를 가진다
- 나머지 노드들은 (if any) **two** binary trees로 분할된다
- 이들을 원래 binary tree의 **left** subtree 그리고 **right** subtree 라고 한다

# Tree 와 Binary Tree

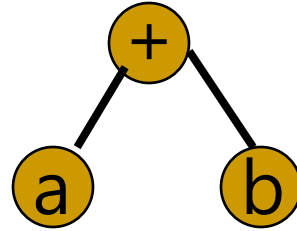
- Binary tree에 속하는 어떤 노드도 degree가 2보다 클 수 없다. 그러나 tree의 경우에는 제한이 없다
- Binary tree는 empty일 수 있으나 tree는 그렇지 않다
- Binary tree의 subtree들은 순서(즉, left, right)가 있으나 a tree의 subtree들을 그렇지 않다



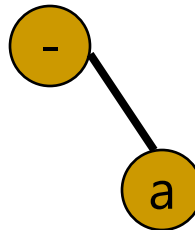
- Are different when viewed as binary trees
- Are the same when viewed as trees

# Binary Tree 형식 예

■  $a + b$

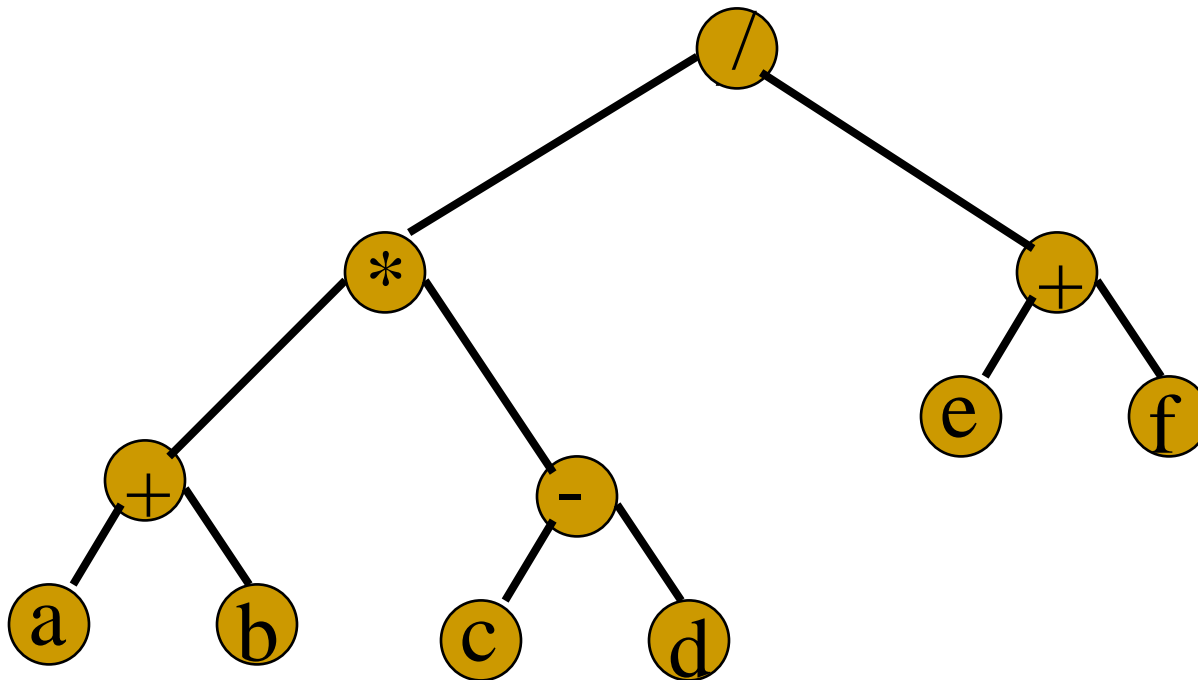


●  $- a$



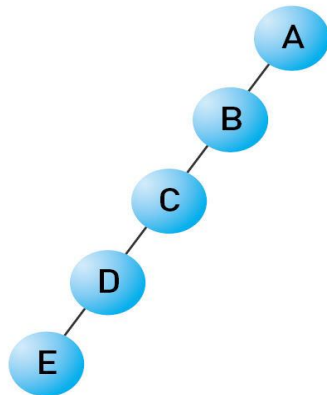
# Binary Tree 형식 예

- $(a + b) * (c - d) / (e + f)$

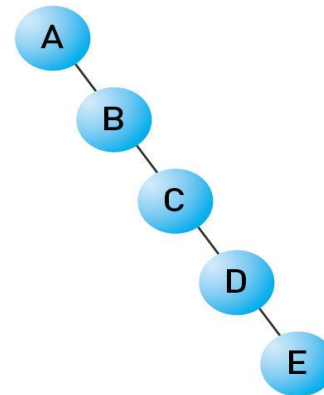


# 편향 트리(skewed tree)

- 한쪽으로 치우친 이진 트리
- 왼쪽 편향 트리(a) : 오른쪽 모두 공백인 트리이며 왼쪽으로 편향된 트리
- 오른쪽 편향 트리(b) : 왼쪽 모두 공백인 트리이며 오른쪽으로 편향된 트리



왼쪽 편향 이진 트리



오른쪽 편향 이진 트리

# Binary Tree 특성

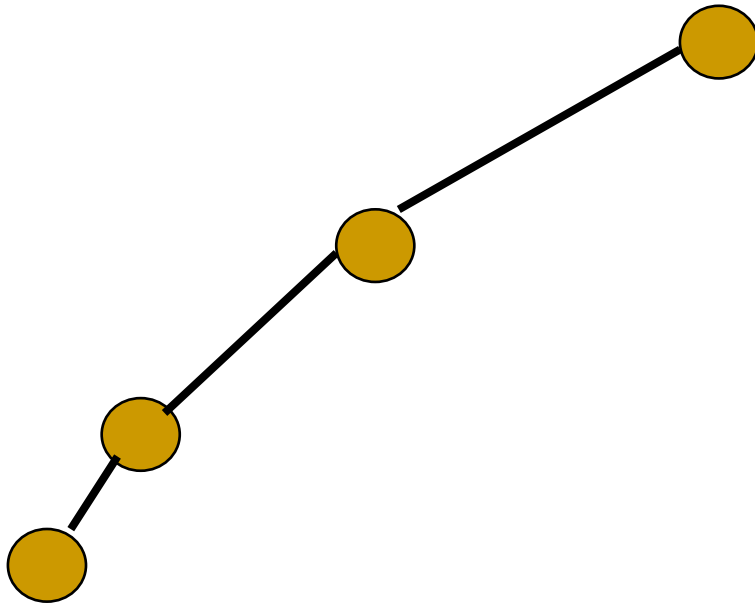
---

- Min./max. number of nodes
  - Number of nodes와 height와의 관계
  - Full binary tree
  - Node numbering과 특성
  - Complete binary tree 등
-

# Minimum Number Of Nodes

$$(\text{최소 노드 수}) = h$$

- Height가  $h$ 인 binary tree의 최소 노드 수(Minimum number of nodes) =  $h$
- 처음부터  $h$  level 까지 각 level에는 최소 하나의 노드가 존재



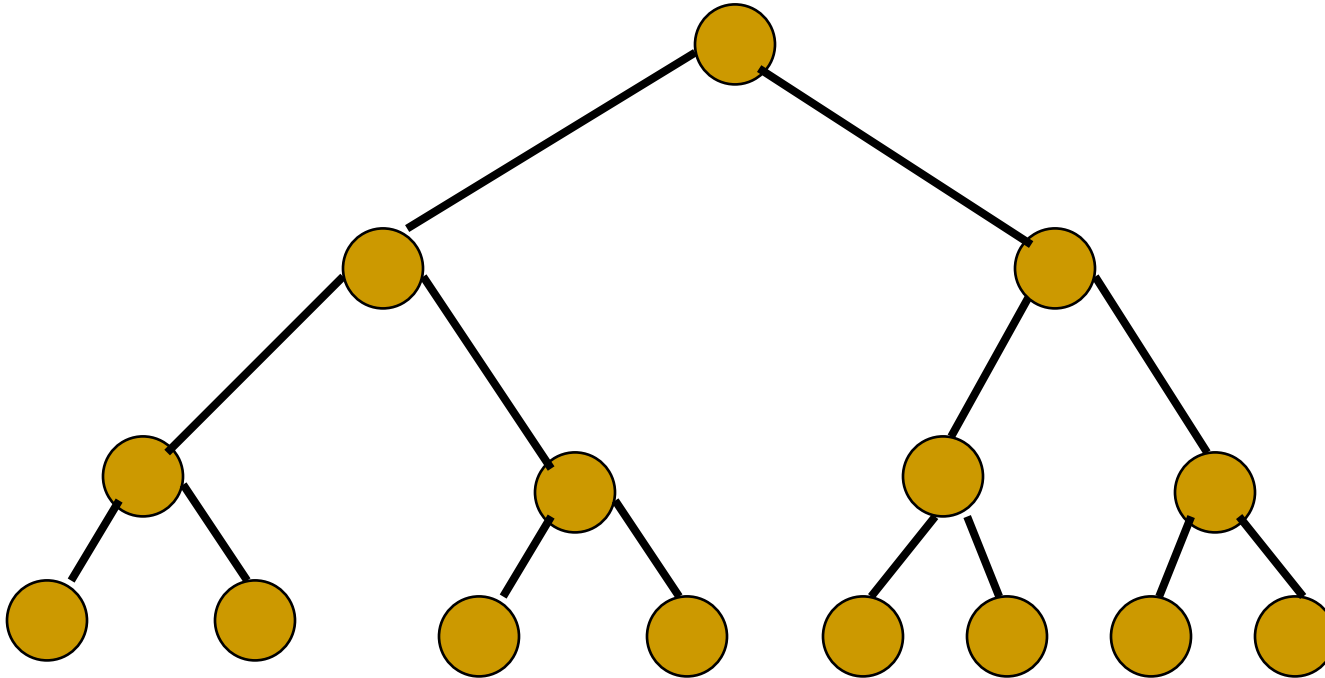
minimum number of nodes is the same as the number of levels, i.e., height  $h$



# Maximum Number Of Nodes

$$(\text{최대 노드 수}) = 2^h - 1$$

- 처음 부터 h level까지 최대 가능한 모든 노드가 존재

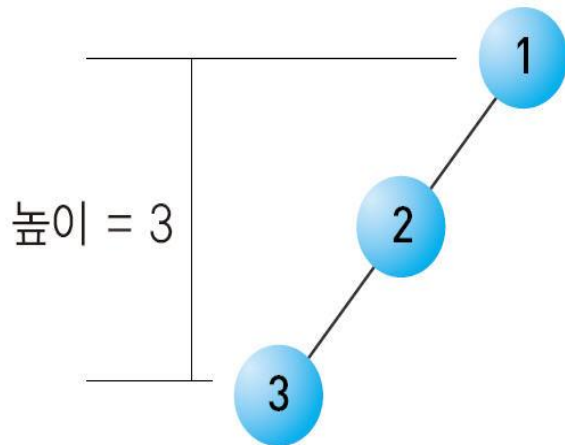


Maximum number of nodes

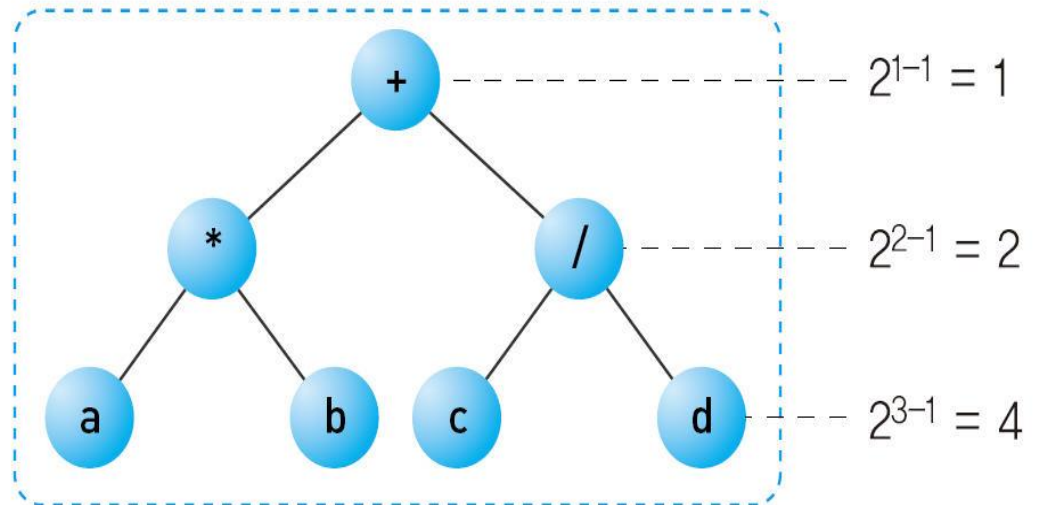
$$= 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{h-1}$$

$$= 2^h - 1$$

## $h = 3$ 인 경우



최소 노드 개수 = 3



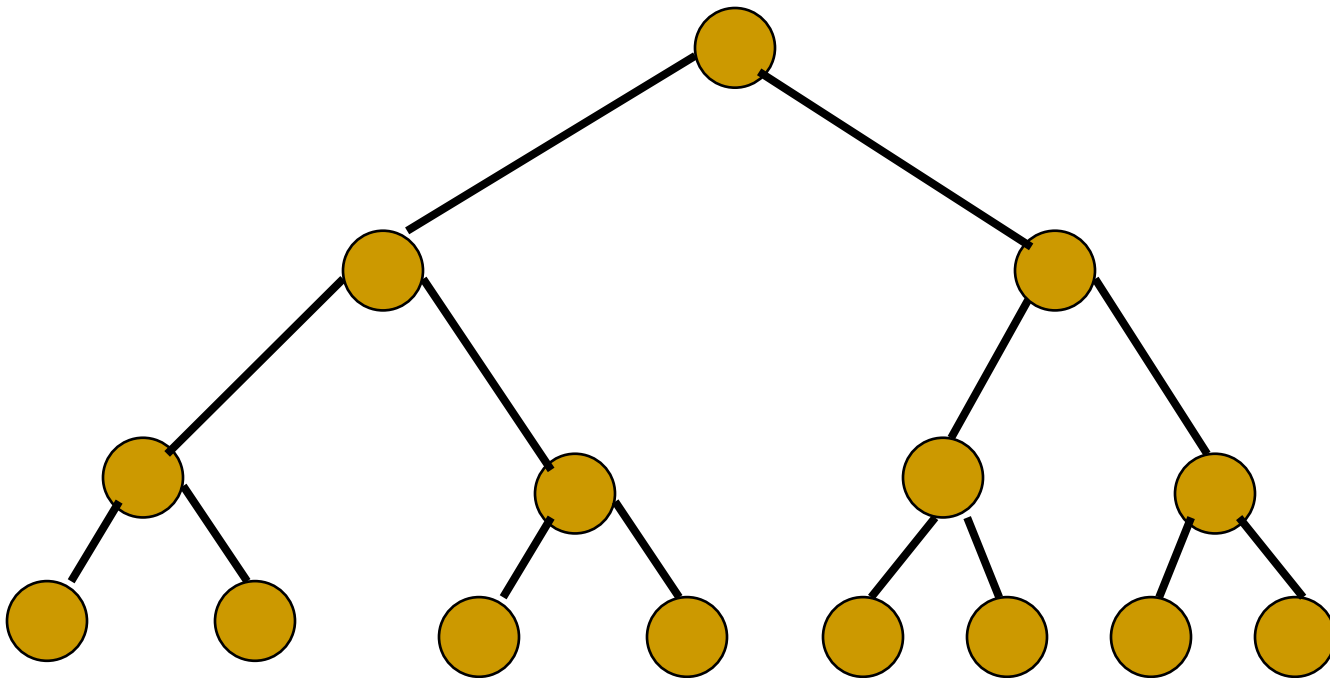
최대 노드 개수 =  $2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} = 1 + 2 + 4 = 7$

# Number Of Nodes & Height

- height가  $h$  인 binary tree의 노드들의 수가  $n$  이라면 다음 관계가 성립한다
- $h \leq n \leq 2^h - 1$
- $\log_2(n+1) \leq h \leq n$

# Full Binary Tree(완전 이진 트리)

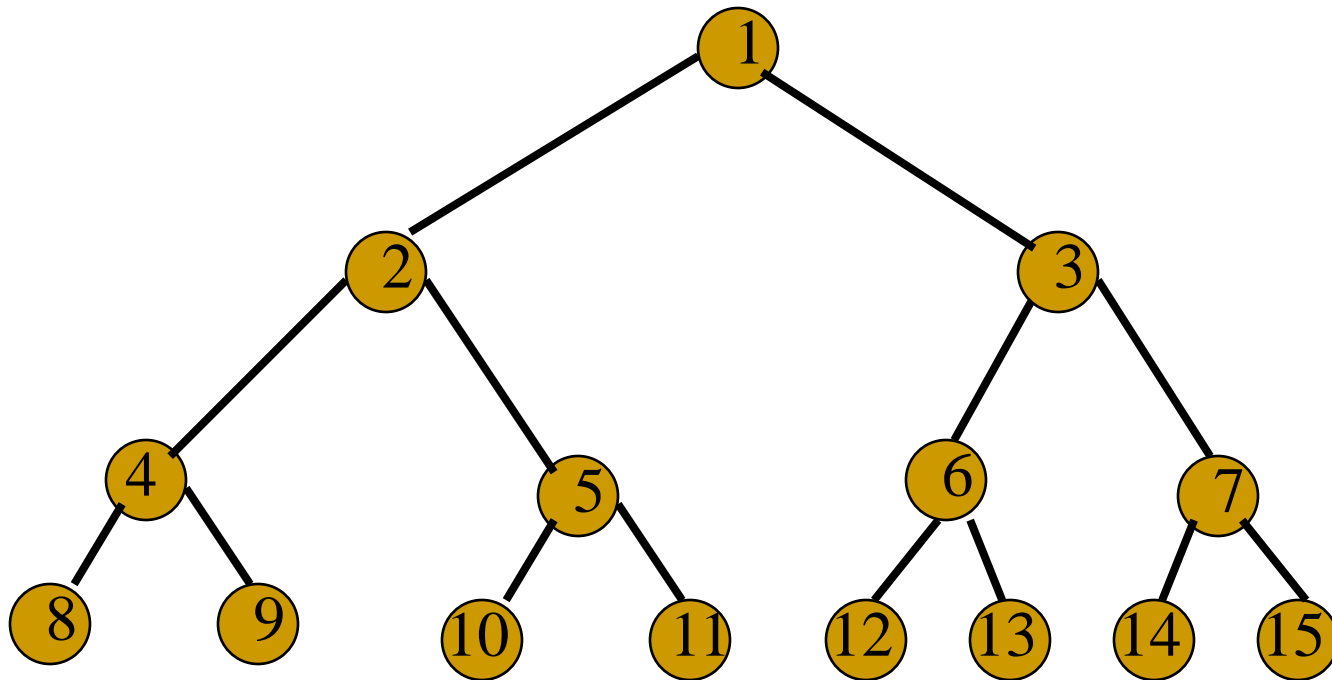
- A **full binary tree** of a given height  **$h$**  has  **$2^h - 1$**  nodes.



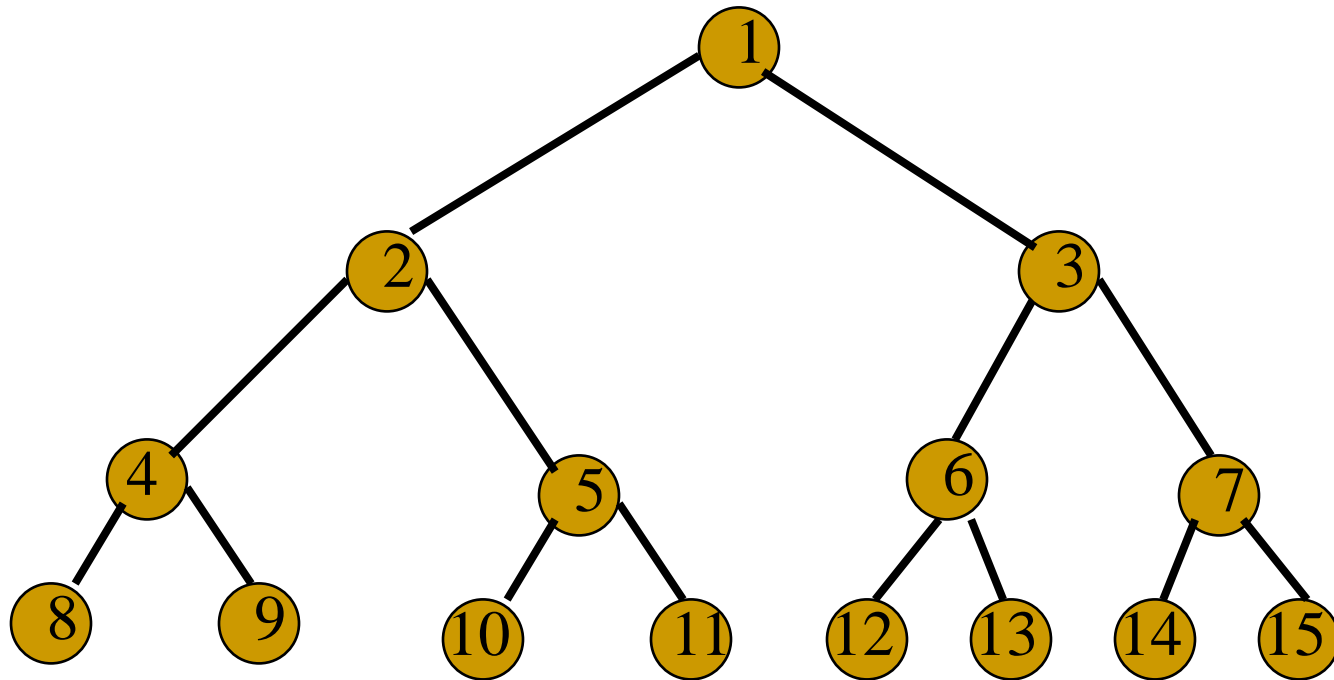
$h = 4$  인 full binary tree.

# Numbering Nodes In Full Binary Tree

- Number the nodes **1** through  **$2^h - 1$**
- Number by levels from top to bottom.
- Within a level number from left to right.



# Node Number Properties



- Parent of node  $i$  is node  $i / 2$ , unless  $i = 1$
- Node  $1$  is the root and has no parent

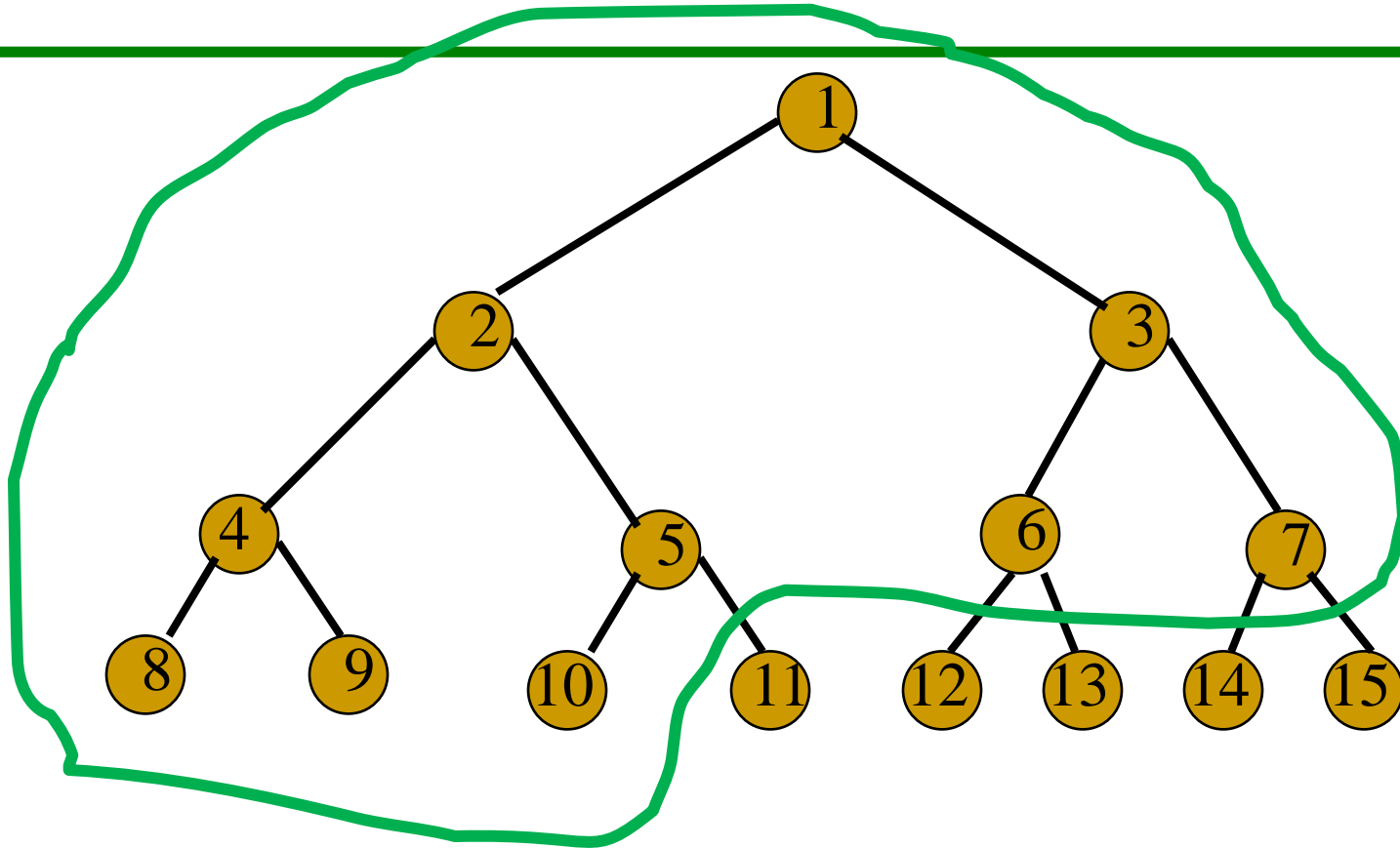
- 
- Left child of node  $i$  is node  $2i$ , unless  $2i > n$ , where  $n$  is the number of nodes.
  - If  $2i > n$ , node  $i$  has no left child.
  - Right child of node  $i$  is node  $2i+1$ , unless  $2i+1 > n$ , where  $n$  is the number of nodes.
  - If  $2i+1 > n$ , node  $i$  has no right child.
-

# Complete Binary Tree With **n** Nodes

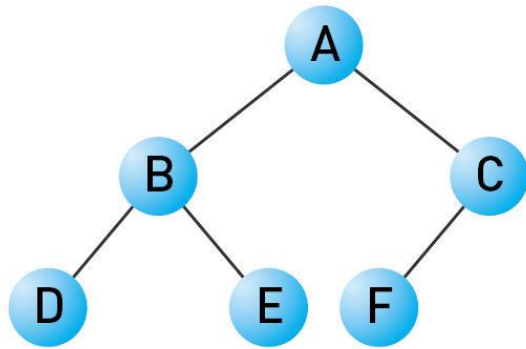
- **최소**  $n$ 개의 노드를 가지는 full binary tree로부터 도출되므로 이를 구성한다
- 구성된 full binary tree의 노드들에게 앞에서 기술한 바와 같이 **번호를 할당**한다
- 구성된 full binary tree 중, 노드 번호 1부터  $n$ 까지 노드들로 구성된 tree를  $n$ 개의 노드로 구성된 ***complete tree***라고 한다



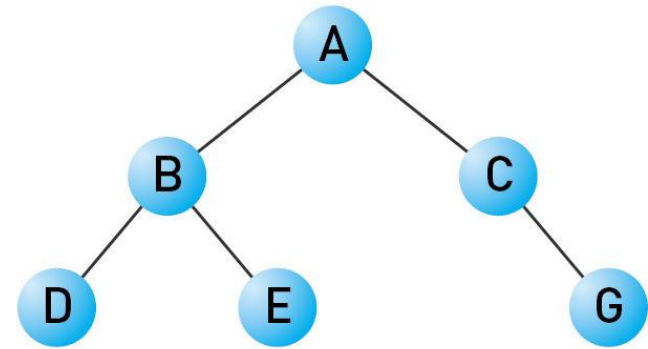
# Example



- Complete binary tree with 10 nodes.



(a) 완전 이진 트리



(b) 완전 이진 트리가 아님