고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

- 고유 벡터(eigenvector)는 선형 변환을 취했을 때 방향(direction)은 변하지 않고 크기(magnitude)만 변하는 벡터를 의미
- 고유 벡터의 크기가 변한다고 했는데 바로 그 변한 크기가 고유 값(eigenvalue)을 의미
- 고유 값이 2라면 기존 벡터 크기의 2배만큼 길어진 것이고, 고유 값이 $\frac{1}{3}$ 이라면 기존 벡터 크기의 $\frac{1}{3}$ 만큼 줄어든 것

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

- 이를 수학적으로 정리하면 다음과 같음
- 정방행렬 A에 대해 $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ (λ는 상수)가 성립하는 0이 아닌 벡터 $\overrightarrow{x}$ 가 존재할때, λ 상수를 행렬 A의 고유 값이라고 하며, $\overrightarrow{x}$ 를 이에 대응하는 고유 벡터라고 함

$$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} \ (\lambda\text{는 상수})$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

- 이 수식을 행렬로 표현하면 다음과 같음

고유 값과 고유 벡터

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

- 이때 λ 상수를 행렬 A의 고유 값이라고 하며 $\overrightarrow{x}$ 를 이에 대응하는 고유 벡터라고 함
- 좀 더 쉽게 이해할 수 있도록 고유 값과 고유 벡터가 가지는 의미를 예시로 알아보자

예시 1

- 정방행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, 고유 값 $\lambda = 7$, 고유 벡터 $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 일 때 $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ 를 만족

  하는지 알아보자

$$A\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\times 4)+(4\times 5) \\ (5\times 4)+(3\times 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 35 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\overrightarrow{x} = 7\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ 를 만족함

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

예시 1

- 정방행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, 고유 값 $\lambda = -2$, 고유 벡터 $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$일 때 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 를 만족

  하는지 알아보자

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\times 1)+(4\times(-1)) \\ (5\times 1)+(3\times(-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\vec{x} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

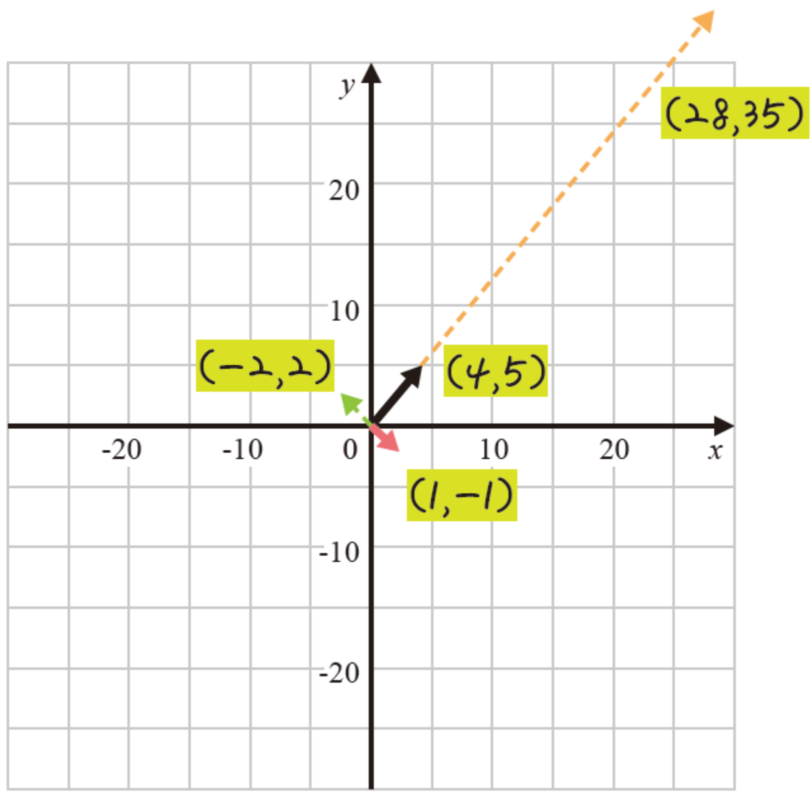
$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 를 만족함

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

- 고유 벡터 (4, 5), (1, −1)의 R^2 공간이 정방행렬 A에 의해 R^2 공간으로 변환될 때 '방향'은 똑같고 '배율'만 고유 값 λ 배수(7배, 2배)만큼 변했다는 것을 알 수 있음

예시 그래프



고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

- 벡터 $\overrightarrow{x}$ 에 대해 n차 정방행렬 A를 곱하는 결과와 λ 상수를 곱하는 결과가 같음
- 즉, 행렬 곱의 결과가 원래 벡터와 '방향'은 같고, '배율'만 λ 상수만큼 비례해서 변했다는 것을 의미
- 고유 값을 구하는 공식은 다음과 같음

$$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

- 이때 값이 변하지 않고 행렬이 그대로 나오게 하고자 단위행렬(I)을 곱함
- λ 를 단위행렬과 곱함

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

- 앞의 2차 정방행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 고유 값을 구해 보자
- 2차 정방행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대해 $A\vec{x}$ 는 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 고, 이것을 풀어보면

  다음과 같음

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

- $(A-\lambda I)\overrightarrow{x}=0$이므로 다음과 같이 고유 값을 구할 수 있음

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)-4\times 5 = 0$$ ← 행렬식 적용

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$

$$(\lambda-7)(\lambda+2) = 0$$

$$\therefore\ \lambda = 7,\ -2$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

- 고유 값과 행렬식 간에는 다음 관계가 성립함

$$\text{행렬}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\text{의 고유 값} \Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- 참고로 $A-\lambda I$ 를 특성행렬(characteristic matrix)이라고 하며, D(λ)는 행렬 A의 특성행렬식(characteristic determinant)이라고 함
- $A-\lambda I=0$ 은 특성방정식(characteristic equation) 혹은 고유방정식(eigenvalue equation)이라고 함
- n차 정방행렬 A의 고유 값은 적어도 하나 이상, 최대 n개의 서로 다른 고유 값을 갖게 됨

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

- 다음 식에 특성방정식을 적용하여 고유 값을 구해 보자
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대해 $(A - \lambda)\vec{x} = 0$을 만족하는 고유 값을 구함

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 5$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 4 \times 5$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 20$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 14$$

$$= (\lambda - 7)(\lambda + 2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 7, -2$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

- 고유 값과 고유 벡터를 구하는 순서는 먼저 고유 값을 구한 후 가우스 소거법을 사용하여 고유 값에 대응하는 고유 벡터를 구함

- 가우스 소거법 :

  연립일차방정식을 풀이하는 알고리즘으로, 풀이하는 과정에서 일부 미지수가 차츰 소거되어 결국 남은 미지수에 대해 선형 결합으로 표현하면서 풀이를 완성함

  가우스 소거법은 보통 행렬을 사용함

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

- 앞서 행렬 A의 고유 값을 구한 결과 $\lambda = 7,\ \lambda = -2$ 였음
- $\lambda = 7,\ \lambda = -2$ 의 고유값에 대응하는 고유 벡터를 풀어 보자

(1) $\lambda = 7$에 대응하는 고유 벡터 $\overrightarrow{x}$를 구함

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-7 & 4 \\ 5 & 3-7 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

- 식을 방정식으로 풀이하면 다음과 같음

$$-5x_1 + 4x_2 = 0$$

$$5x_1 - 4x_2 = 0$$

- $x_1 = 4,\ x_2 = 5$가 됨
- ∴ 고유 벡터는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 임

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

(2) $\lambda = -2$에 대응하는 고유 벡터 $\overrightarrow{x}$를 구함

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-(-2) & 4 \\ 5 & 3-(-2) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

- 이때 x_1이 1일 때 x_2는 −1이 되므로 고유 벡터는 다음과 같음
- ∴ 고유 벡터는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$임
- 2차 정방행렬 A에 대한 특성방정식을 이용하여 고유 값 λ 는 {7, −2}이며, 고유 벡터는 각각 [4 5]와 [1 −1]임

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

- 파이썬에서는 다음과 같이 고유 벡터와 고유 값을 구할 수 있음

In [61]:

```
# NumPy 라이브러리를 호출합니다
import numpy as np

# 2차원 행렬 A
# np.linalg.eig(a)는 고유 값과 고유 벡터 도출을 위한 함수입니다
a = np.array([[5, -1], [-2, 1]])
w, v = np.linalg.eig(a)

# 고유 값 구하기
print(w)
print(v)
```

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ **고유 값과 고유 벡터란**

```
[5.44948974 0.55051026]
[[ 0.91209559  0.21927526]
 [-0.40997761  0.97566304]]
```

--- 고유 값에 대한 결괏값

--- 고유 벡터에 대한 결괏값

- 참고로 고유 벡터의 수학적 계산과 파이썬의 고유 벡터 결과가 다른 이유는 고유 벡터를 표시할 때는 보통 길이가 1인 단위 벡터가 되도록 정규화(normalization)하기 때문임

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

가우스 소거법의 계산 방법

- 가우스 소거법은 다음과 같이 네 단계를 거쳐 계산함

  (1) 주어진 방정식을 첨가행렬로 변환

  (2) 행 변환 방법을 적용하여 첨가행렬을 RRF(RowReduced Form)로 변환

  (3) 첨가행렬의 결과를 방정식으로 표현함

  (4) 방정식에 대입법을 적용하여 해를 구함

- 다음 방정식으로 가우스 소거법을 적용해 보자

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -2 \end{cases}$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

(1) 주어진 방정식을 첨가행렬로 변환

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

(2) 행 변환 방법을 적용하여 첨가행렬을 RRF(RowReduced Form)로 변환

$$\xrightarrow[R_2:-2R_1+R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3:-3R_1+R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \\ 0 & -8 & -7 & -11 \end{array}\right]$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

$$\xrightarrow[R_2:R_2\times(-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3:8R_2+R_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 85 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3:R_3\times 1/17]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

(3) 첨가행렬의 결과를 방정식으로 표현함

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + 3z = 12 \\ z = 5 \end{cases}$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

(4) 방정식에 대입법을 적용하여 해를 구함

세 번째 방정식으로 $z = 5$가 됨

두 번째 방정식에 $z = 5$를 대입하면 $y + 15 = 12$가 됨

$y = -3$임

첫 번째 방정식에 $y = -3$, $z = 5$를 대입하면 $x - 6 + 5 = 3$이 됨

$x = 4$임

$\therefore x = 4,\ y = -3,\ z = 5$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

연습 문제

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$에 대해 행렬 A의 고유 값과 고유 벡터를 구하세요.

문제 풀이

(1) 고유 값 구하기

$$\begin{aligned} D(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)-3\times 4 \\ &= \lambda^2-3\lambda+2-12 \\ &= \lambda^2-3\lambda-10 \\ &= (\lambda-5)(\lambda+2) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = 5, -2$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

(2) 고유 벡터 구하기

① $\lambda = 5$일 때는 다음과 같습니다.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-5 & 3 \\ 4 & 2-5 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

식을 방정식으로 풀면 다음과 같습니다.

$$-4x_1 + 3x_2 = 0$$

$$4x_1 - 3x_2 = 0$$

따라서 $x_1 = 3$, $x_2 = 4$가 됩니다.

$\therefore$ 고유 벡터는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$입니다.

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

② $\lambda = -2$일 때는 다음과 같습니다.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-(-2) & 3 \\ 4 & 2-(-2) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[x_1 + x_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

이때 x_1이 1일 때 x_2는 -1이 되므로 고유 벡터는 다음과 같습니다.

$\therefore$ 고유 벡터는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$입니다.

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 값과 고유 벡터란

In [62]:

```
import numpy as np
a = np.array([[1, 3], [4, 2]])
w, v = np.linalg.eig(a)
print(w)
print(v)
```

```
[-2.  5.]
[[-0.70710678 -0.6       ]
 [ 0.70710678 -0.8       ]]
```

--- 고유 값에 대한 결괏값

--- 고유 벡터에 대한 결괏값

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 공간

- 고유 공간은 특정 고유 값에 대응되는 무수히 많은 고유 벡터가 이루는 공간
- 고유 공간은 다음 성질이 있음

  - ‘고유 값 λ 에 대응하는 모든 고유 벡터’에 ‘영 벡터’를 첨가하여 구성된 집합
  - 각각의 고유 값 λ 에 대응하는 행렬 A의 고유 공간이 있음

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 공간

- 예제로 고유 공간을 확인해 보자
- $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 일 때, $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 를 적용하면 $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 와 같은 수식이 성립함

x_1과 x_2에 값을 대입한 결과

(x_1, x_2)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(−1, 0)	(0, −1)	(−1, 1)	(−1, −1)	(1, −1)
결과	(4, 1)	(1, 4)	(5, 5)	(−4, −1)	(−1, −4)	(−3, 3)	(−5, −5)	(3, −3)
λ 값			5			3	5	3

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 공간

- 다음은 x_1과 x_2의 다양한 값에 대한 결괏값임

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \lambda = 5$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 공간

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \lambda = 3$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \therefore \lambda = 5$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \therefore \lambda = 3$$

고유 값, 고유 벡터, 고유 공간

➢ 고유 공간

- 고유 공간의 성질 중 '고유 값 λ에 대응하는 모든 고유 벡터'라고 했으므로 λ 값 (3, 5)에 대응하는 고유 벡터들이 고유 공간이 되며, 다음 그래프에서는 붉은색 직선이 고유 공간이 됨

고유 공간