Cálculo Numérico: Lista 06

Felipe Morais

Março 2019

Questão 1

A)

Para calcular os autovetores é necessário ter os autovalores. Esses, por sua vez, são obtidos através do método do polinômio característico a partir de $det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\lambda + \lambda^2 + \sin^2(\alpha))(1 - \lambda) = 0$$

Resolvendo o polinômio, temos que $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \cos(\alpha) - \sin(\alpha)i$ e $\lambda_2 = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)i$.

Quando $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) - 1 & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Após a resolução do sistema, é possível encontrar $x = 0$, $y = 0$ e $z = z$. Portanto, o autovetor correspondente é $[0, 0, 1]^T$.

Quando $\lambda = \cos(\alpha) - \sin(\alpha)i$, temos:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) - \cos(\alpha) + \sin(\alpha)i & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \cos(\alpha) + \sin(\alpha)i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos(\alpha) + \sin(\alpha)i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha)i & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \sin(\alpha)i & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Após a resolução do sistema, é possível encontrar $x = \frac{y}{i}$, $y = xi$ e $z = 0$. Portanto, o autovetor correspondente é $[i, 1, 0]^T$.

Quando $\lambda = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)i$, temos:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) - \cos(\alpha) - \sin(\alpha)i & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \cos(\alpha) - \sin(\alpha)i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos(\alpha) - \sin(\alpha)i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha)i & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & -\sin(\alpha)i & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\alpha) - \sin(\alpha)i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Após a resolução do sistema, é possível encontrar $x = \frac{-y}{i}$, $y = -xi$ e $z = 0$. Portanto, o autovetor correspondente é $[-i, 1, 0]^T$.

Por fim, os autovalores são $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \cos(\alpha) - \sin(\alpha)i$ e $\lambda_2 = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)i$ e os autovetores são $[0, 0, 1]^T, [i, 1, 0]^T, [-i, 1, 0]^T$

B)

Para descobrir o valor de α quando para que tenha um autovalor igual a -1, considere $\lambda = -1$ na seguinte equação (obtida na questão anterior):

$$(\cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\lambda + \lambda^2 + \sin^2(\alpha))(1 - \lambda) = 0$$
$$\Rightarrow (\cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)(-1) + (-1)^2 + \sin^2(\alpha))(1 - (-1)) = 0$$
$$\Rightarrow \cos^2(\alpha) + 2\cos(\alpha) + 1 + \sin^2(\alpha) = 0$$
$$\Rightarrow 2\cos(\alpha) + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha) = -1$$
$$\Rightarrow \alpha = \pi$$

Ou seja, $\alpha = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Questão 2

A)

Sendo $T([x,y]^T) = \begin{bmatrix} 3x+2y \\ 4x+y \end{bmatrix}$

Aplicando a fórmula com os vetores $[1,0]^T$ e $[0,1]^T$, encontramos a matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

B)

1. Método das potências

   Com o autovetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $k = 2$ sendo o k máximo.

   Para $k = 0$:

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda^0 = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10$$

   Para $k = 1$:

$$x^1 = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{|| \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ||_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} \\ \frac{3}{70} \end{bmatrix},\ \lambda_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & \frac{3}{70} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{70} \\ \frac{3}{70} \end{bmatrix} = 3.89$$

   Para $k = 2$:

$$x^2 = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{70} \\ \frac{3}{70} \end{bmatrix}}{|| \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{70} \\ \frac{3}{70} \end{bmatrix} ||_2} = \begin{bmatrix} 0,0025 \\ 0,0014 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 0,0025 & 0,0014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0025 \\ 0,0014 \end{bmatrix} = 0,004$$

   No caso de Jacobi, é impossível calcular usando o método pois A não é simétrica (que é o pré-requisito para usar o método).

Questão 3

Para realizar a decomposição SVD da matriz A é necessário: (i) encontrar os auto valores de AA^T; (ii) Encontrar a matriz U; (iii) Construir a matriz Σ; (iv) Encontrar V.

Ao final do processo, espera-se que $A = U\Sigma V^T$.

(i)

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo método do polinômio característico, os autovalores são:

$$\begin{vmatrix} 34-\lambda & 12 & 0 \\ 12 & 16-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja, $-3\lambda^3 + 50\lambda^2 - 400\lambda$ e, portanto, $\lambda_1 = 40$, $\lambda_2 = 10$ e $\lambda_3 = 0$. Fazendo o cálculo análogo à questão 1, temos os seguintes autovetores:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ii)

Para encontrar a matriz U, é necessário normalizar os vetores (multiplicando-os pelo inverso de sua norma). Após o processo, temos:

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix},\ V_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii)

Para montar a matriz Σ, é necessário preencher a diagonal de uma matriz $n \times n$ com a raiz dos autovalores não nulos (onde n é a quantidade de autovalores não nulos). As demais posições são 0. Ainda, acrescenta-se $m-k$ linhas de zeros, onde m e k são, respectivamente, a quantidade de linhas e colunas da matriz A.

Com isso, temos:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iv)

Para encontrar V, é necessário calcular, conforme visto em sala de aula.

$$v_i = \frac{1}{\alpha_i} A u_i$$

Com isso, temos:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{50}} & \frac{-5}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} & \frac{5}{\sqrt{50}} \end{bmatrix}$$

Por fim, a decomposição final é:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{50}} & \frac{-5}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} & \frac{5}{\sqrt{50}} \end{bmatrix}$$

Questão 4

Para calcular a função linear que melhor se aproxime dos pontos basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x \\ \Sigma x & \Sigma x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma yx \end{bmatrix}$$

Substituindo, temos:

$$\begin{bmatrix} 1000 & 1747.38 \\ 1747.38 & 3063.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62833.2 \\ 110505 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a_0 = -60.2291$ e $a_1 = 70.4268$. Logo, a reta obtida é $f(x) = 70.4268x - 60.2291$. Veja o gráfico:

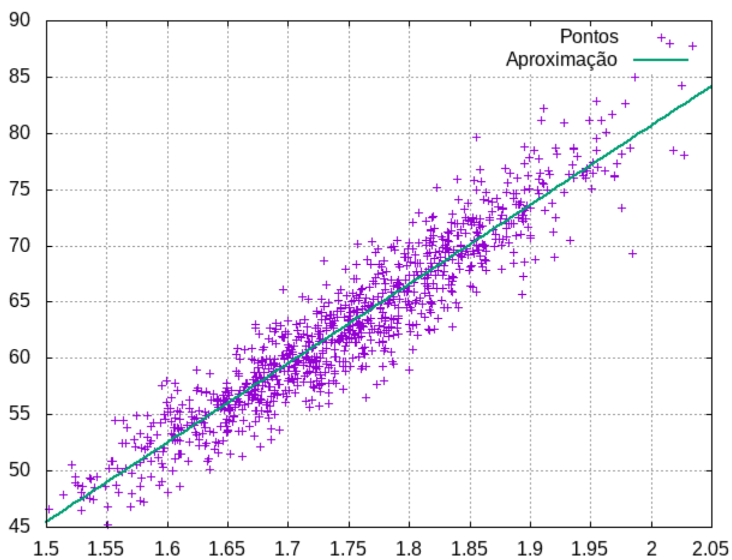

Figure 1: Gráfico da função

Por fim, uma pessoa com 2.10 metros deve possuir $f(2.10) = 70.4268 \cdot 2.10 - 60.2291 = 87.66718kg$

Questão 5

Similarmente à Questão 4, resolvendo o sistema anterior com uma matriz 3×3, temos de encontrar a_0, a_1, a_2 no seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 40 & 367.688 & 3388.26 \\ 367.688 & 3388.26 & 31300 \\ 3388.26 & 31300 & 289849 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 233.095 \\ 2102.57 \\ 19012.5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, temos $a_0 = 322.072$, $a_1 - 64.1692$ e $a_2 = 3.23012$. Logo, a função quadrática que melhor se aproxima dos pontos é $f(x) = 3.23012x^2 - 64.1692x + 322.072$. Observe o gráfico:

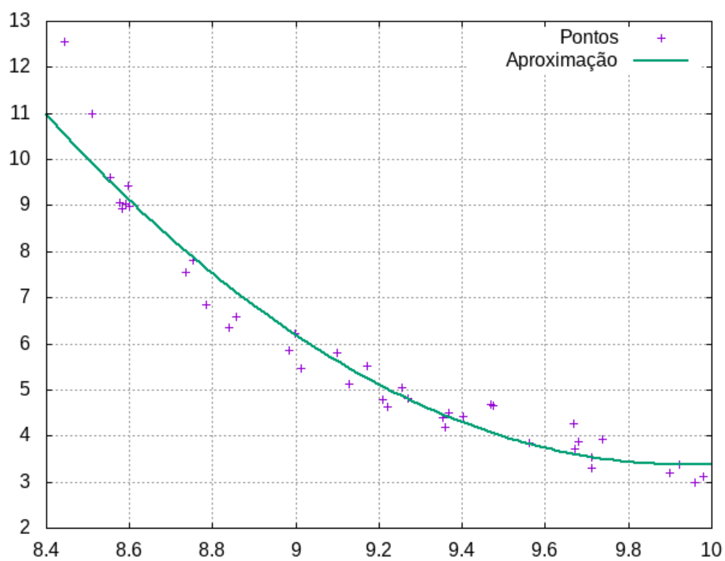

Figure 2: Gráfico da função

Note que se a velocidade for $11km/h$, o tempo gasto para percorrer o rio é aproximadamente 7 horas. Para estimar o comprimento do rio, se tivermos a

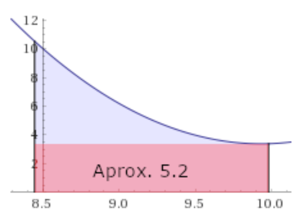

Figure 3: O que precisamos calcular

função de velocidade, basta integrar. Porém, o que temos uma função do tempo pela velocidade. Precisamos, então, calcular a inversa para realizar a integral ou calcular a área azul na Figura 3 (o que é mais fácil). Desta forma:

$$\int_{8.44389}^{9.98105} (3.23012x^2 - 64.1692x + 322.072)dx - 5.2 = 8.7 - 5.2 = 3.5km$$

Questão 6

Tome os polinôminos 1, x e x^2 com grau 0, 1 e 2 respectivamente. Assumindo o produto escalar como sendo $(f,g) = \int_a^b f \cdot g dx$, com $a = 1$ e $b = 4$ e utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, temos:

$$P_0(x) = 1$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \cdot 1 \\ &= x - \frac{\int_1^4 (x)dx}{\int_1^4 (1)dx} \\ &= x - 2.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x - \frac{(x^2,1)}{(1,1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, x-2.5)}{(x-2.5, x-2.5)} \cdot (x-2.5) \\ &= x^2 - \frac{\int_1^4 (x^2)dx}{\int_1^4 (1)dx} - \frac{\int_1^4 (x^3 - 2.5x^2)dx}{\int_1^4 (x^2 - 5x + 6.25)dx}(x-2.5) \\ &= x^2 - 5x + 5.5 \end{aligned}$$

Então, os polinômios utilizados serão $P_0 = 1$, $P_1 = x - 2.5$ e $P_2 = x^2 - 5x + 5.5$. Assim, basta calcular:

$$\begin{bmatrix} \int_1^4 P_0(x)P_0(x)dx & \int_1^4 P_0(x)P_1(x)dx & \int_1^4 P_0(x)P_2(x)dx \\ \int_1^4 P_1(x)P_0(x)dx & \int_1^4 P_1(x)P_1(x)dx & \int_1^4 P_1(x)P_2(x)dx \\ \int_1^4 P_2(x)P_0(x)dx & \int_1^4 P_2(x)P_1(x)dx & \int_1^4 P_2(x)P_2(x)dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_1^4 f(x)P_0(x)dx \\ \int_1^4 f(x)P_1(x)dx \\ \int_1^4 f(x)P_2(x)dx \end{bmatrix}$$

Como os polinômios são ortogonais entre si, temos:

$$\begin{bmatrix} \int_1^4 P_0(x)P_0(x)dx & 0 & 0 \\ 0 & \int_1^4 P_1(x)P_1(x)dx & 0 \\ 0 & 0 & \int_1^4 P_2(x)P_2(x)dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_1^4 f(x)P_0(x)dx \\ \int_1^4 f(x)P_1(x)dx \\ \int_1^4 f(x)P_2(x)dx \end{bmatrix}$$

Isto é:

$$\begin{bmatrix} \int_1^4 1dx & 0 & 0 \\ 0 & \int_1^4 (x-2.5)^2 dx & 0 \\ 0 & 0 & \int_1^4 (x^2 - 5x + 5.5)^2 dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_1^4 cos(x)dx \\ \int_1^4 cos(x)(x-2.5)dx \\ \int_1^4 cos(x)(x^2 - 5x + 5.5)dx \end{bmatrix}$$

Que é igual a:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6 \\ 1 \\ 0.46 \end{bmatrix}$$

Então $a_0 = -0.53$, $a_1 = 0.44$ e $a_2 = 0.34$. Desta forma a função final é $g(x) = 0.34 * (x^2 - 5x + 5.5) - 0.44(x - 2.5) - 0.53$. Observe o gráfico:

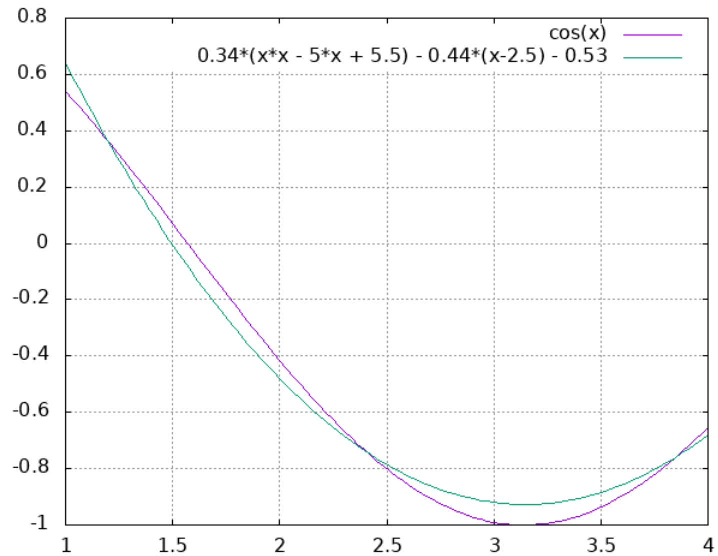

Figure 4: Aproximação do cos(x)

Questão 7

A aproximação é encontrada a partir da seguinte fórmula:

$$S_3(x) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3 cos(3x)}{2} + \sum_{i=1}^{2} a_i cos(ix) + b_i sen(ix)$$

Onde:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)dx$$

Como as integrais são definidas para o intervalo de $[-\pi : \pi]$, é necessário realizar uma substituição de x por z. Com isso, temos:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{4z+2\pi}{\pi})cos(kz)dz$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{4z+2\pi}{\pi})sen(kz)dz$$

Substituindo o valor em $f(x)$, temos:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ((\frac{4z+2\pi}{\pi})cos(\frac{4z+2\pi}{\pi}) + sen(\frac{8z+4\pi}{\pi}))cos(kz)dz$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ((\frac{4z+2\pi}{\pi})cos(\frac{4z+2\pi}{\pi}) + sen(\frac{8z+4\pi}{\pi}))sen(kz)dz$$

A partir de então, com o auxílio do Wolfram, temos que:

$$a_0 = -0,7169$$

$$a_1 = -1,2878$$

$$a_2 = 0,6610$$

$$a_3 = -0.7833$$

$$b_1 = -0,7658$$

$$b_2 = -1,8801$$

Desta forma, $S_3(z)$:

$$S_3(z) = -\frac{0,7869}{2} - \frac{0,7833}{2}cos(3z) - 1,2878cos(z)$$

$$-0,7658sen(z) + 0,6610cos(2z) - 1,8801sen(2z)$$

Realizando a troca de variáveis, temos:

$$S_3(z) = -\frac{0,7869}{2} - \frac{0,7833}{2}cos(3\pi\frac{x-2}{4}) - 1,2878cos(\pi\frac{x-2}{4})$$
$$-0,7658sen(\pi\frac{x-2}{4}) + 0,6610cos(\pi\frac{x-2}{2}) - 1,8801sen(\pi\frac{x-2}{2})$$

Observe no gráfico abaixo a aproximação:

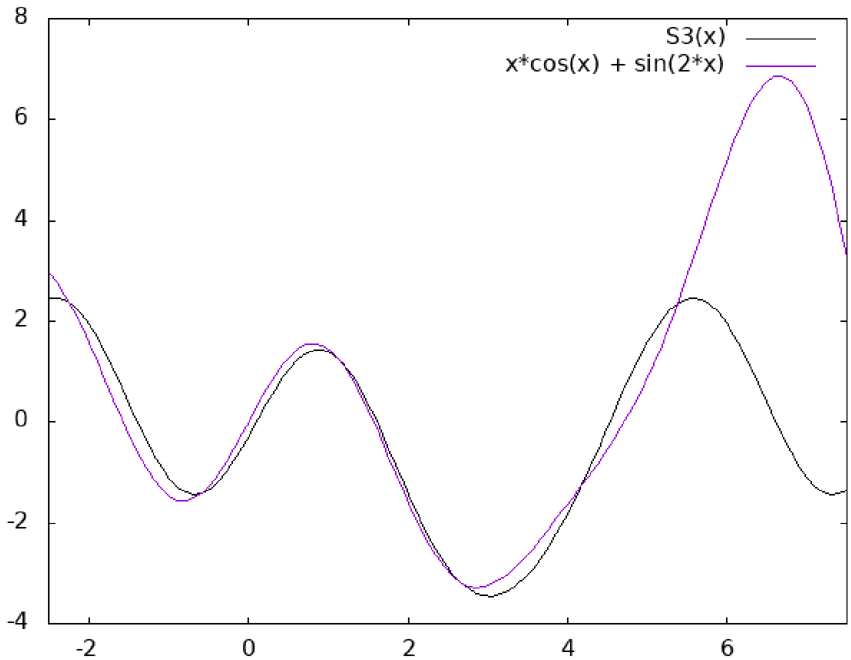

Figure 5: Aproximação

Questão 8

Os pontos gerados pelo algoritmo disponibilizado pelo professor foram:

x	f(x)
-3.14159265359	-4
-2.35619449019	3
-1.57079632679	4
-0.785398163397	1
0	7
0.785398163397	1
1.57079632679	1
2.35619449019	-2

Temos que $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos(nx) + \Sigma_{j=0}^{2m-1}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ onde $m = 4$ já que a quantidade de pontos é 8.

$$a_k = \frac{1}{m}\Sigma_{j=0}^{2m-1} f(x_j)\cos(kx_j)$$

$$b_k = \frac{1}{m}\Sigma_{j=0}^{2m-1} f(x_j)\sin(kx_j)$$

Todos os coeficientes foram calculados com base no programa "Q8/calc_coeficientes.cpp" Assim:

$$S_2(x) = 1.625 - 0.5\cos(2x) + 2.5732\cos(x) - 1.2803\sin(x)$$

$$S_4(x) = 1.625 + 0.75\cos(4x) + 2.5732\cos(x) - 1.2803\sin(x) - 0.5\cos(2x) + 0.75\sin(2x) + 2.9268\cos(3x) + 0.2197\sin(3x)$$

$$S_8(x) = 1.625 + 3.25\cos(8x) + 2.5732\cos(x) - 1.2803\sin(x) - 0.5\cos(2x) + 0.75\sin(2x) + 2.9268\cos(3x) + 0.2197\sin(3x) + 0.75\cos(4x) + 2.9268\cos(5x) - 0.2197\sin(5x) - 0.5\cos(6x) - 0.75\sin(6x) + 2.5732\cos(7x) + 1.2803\sin(7x)$$

Por fim, o gráfico pode ser observado na próxima figura.

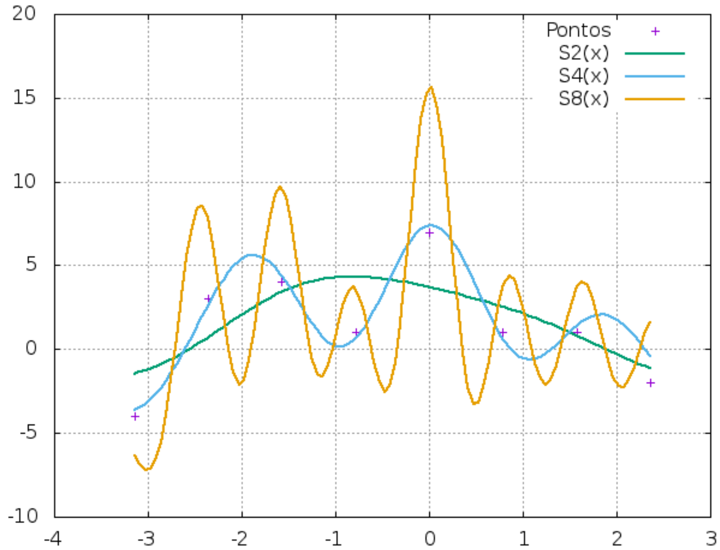

Figure 6: Gráfico

Questão 9

Não deu tempo :/