KALKULUS 2

(CTI212)

MODUL 2
TURUNAN PARSIAL

DISUSUN OLEH

SURYANI, M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

TURUNAN PARSIAL

Kemampuan Akhir Yang Diharapkan

Setelah mempelajari modul 2 ini, diharapkan mahasiswa mampu :

1. Memahami dan menjelaskan fungsi dua variabel bebas atau lebih.
2. Memahami dan menyelesaikan soal tentang turunan parsial.
3. Memahami dan menyelesaikan soal tentang turuan parsial tingkat tinggi.
4. Memahami dan menyelesaikan soal tentang diferensial total.

FUNGSI DUA VARIABEL BEBAS ATAU LEBIH

Pada kalkulus 1, sudah dijelaskan mengenai variabel bebas dan tak bebas. Dimana variabel bebas pada kalkulus 1 hanya ada satu dan variabel tak bebasnya juga ada satu. Pada kalkulus 2, variabel bebasnya ada dua atau lebih, sedangkan variabel tak bebasnya ada satu.

Jika Z tertentu secara tunggal merupakan setiap titik (x, y) yang diberikan pada suatu daerah dari bidang XOY, maka Z dinamakan fungsi dari x dan y, dan dinotasikan dengan $Z = (x, y)$ dimana Z adalah variabel tak bebas, sedangkan x dan y adalah variabel bebas. Jika digambaran grafiknya, maka akan terlihat dalam bentuk dimensi tiga dan hal ini sulit dilakukan tanpa bantuan *software* tertentu.

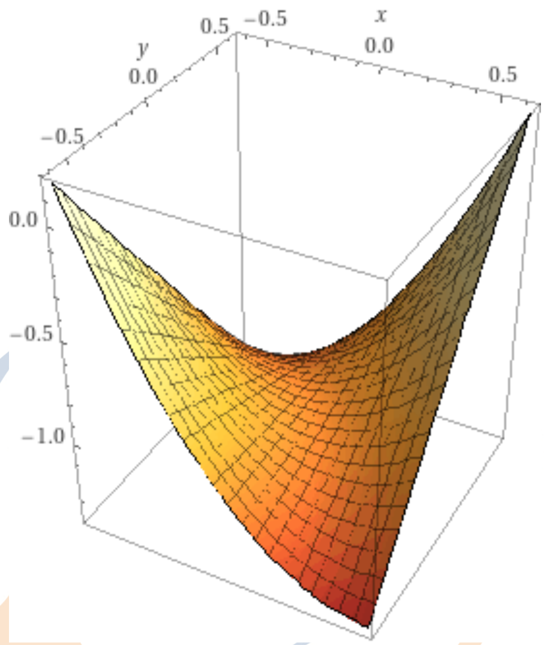
Contoh.

Diberikan fungsi-fungsi sebagai berikut. Tentukan variabel bebas dan variabel tak bebasnya serta gambarkan grafiknya.

1. $F(x, y) = x^2 + 2xy - 1$
2. $g(u, v) = uv^2 - e^u + \sin v$
3. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

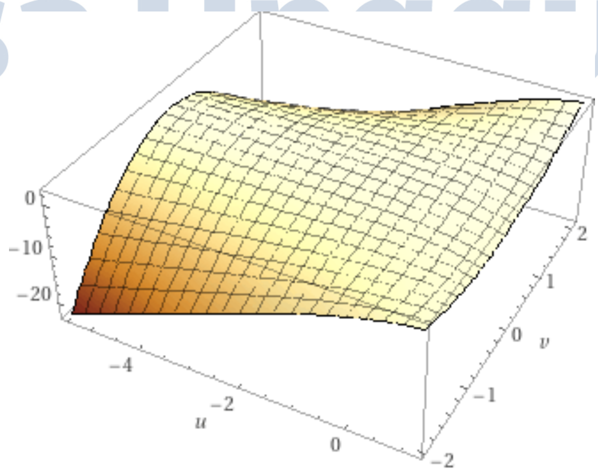
Penyelesaian.

1. Soal ini merupakan fungsi eksplisit. Sehingga dengan jelas dapat ditentukan variabel bebas dan tak bebasnya. Variabel bebasnya ada x dan y, sedangkan variabel tak bebasnya adalah F. Grafiknya diberikan pada Gambar 1 berikut.



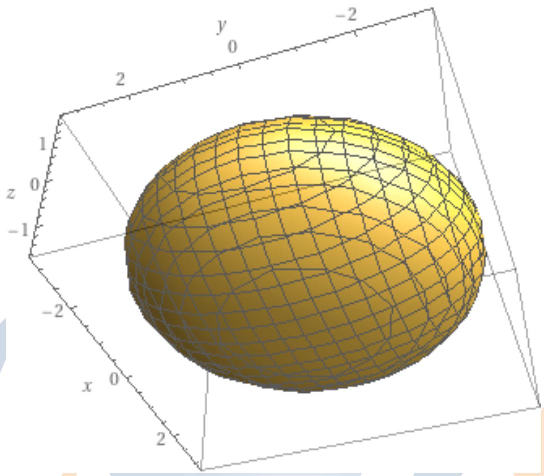
Gambar 1.

2. Soal ini merupakan fungsi eksplisit. Sehingga dengan jelas dapat ditentukan variabel bebas dan tak bebasnya. Variabel bebasnya ada u dan v, sedangkan variabel tak bebasnya adalah g. Grafiknya diberikan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2.

3. Soal ini merupakan fungsi implisit. Sehingga untuk menentukan variabel bebas dan tak bebasnya tidak dengan mudah dapat ditentukan. Tetapi, kesepakatannya adalah jika pada suatu fungsi implisit terdapat variabel x, y dan z maka variabel bebasnya adalah x dan y, sedangkan variabel tak bebasnya adalah z. Grafiknya diberikan pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3.

TURUNAN PARSIAL

FUNGSI DUA VARIABEL BEBAS

Misal diberikan fungsi $z = f(x, y)$. Turunan parsial pertama z terhadap variabel x dinotasikan sebagai

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x$$

dan didefinisikan sebagai sebagai berikut.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

dengan memandang variabel y sebagai konstanta.

Sedangkan turunan parsial pertama z terhadap variabel y dinotasikan sebagai

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y$$

dan didefinisikan sebagai sebagai berikut.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

dengan memandang variabel x sebagai konstanta.

Contoh.

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut terhadap semua variabel bebasnya.
$$z = x^3 y^2$$
2. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut terhadap semua variabel bebasnya.
$$z = x^3 + 3xy^2 - y^2$$
3. Jika $z = x^2 \sin(xy^2)$, carilah z_x dan z_y
4. Carilah turunan pertama dari setiap variabel bebas dari fungsi berikut.
$$f(x, y) = x\, e^y - \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^3 y^2$$
5. Carilah turunan pertama dari setiap variabel bebas dari fungsi berikut.
$$z = x^2 \sin(xy^2)$$
6. Carilah turunan pertama dari setiap variabel bebas dari fungsi berikut.
$$x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz$$

Penyelesaian.

Nomor 1.

Karena variabel bebas dari fungsi tersebut adalah x dan y, maka turunan parsial pertama z terhadap variabel x adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2$$

dan turunan parsial pertama z terhadap variabel y adalah

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 2y$$
$$= 2x^3 y$$

Nomor 2.

Karena variabel bebas dari fungsi tersebut adalah x dan y, maka turunan parsial pertama z terhadap variabel x adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 0$$
$$= 3x^2 + 3y^2$$

dan turunan parsial pertama z terhadap variabel y adalah

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3x\ 2y - 2y$$
$$= 6xy - 2y$$

Nomor 3.

Karena ada perkalian fungsi dalam variabel x maka turunan pertama fungsi z terhadap variabel x menggunakan hasil kali, yaitu $y' = u'v - uv'$. Sehingga

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2]\ \sin(xy^2) + x^2 \frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy^2)]$$
$$= 2x\ \sin(xy^2) + x^2 \cos(xy^2) \frac{\partial}{\partial x}[xy^2]$$
$$= 2x\ \sin(xy^2) + x^2 \cos(xy^2)\, y^2$$
$$= 2x\ \sin(xy^2) + x^2 y^2 \cos(xy^2)$$

tetapi, untuk mencari turunan pertama fungsi z terhadap variabel y dapat langsung dicari, yaitu

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos(xy^2) \frac{\partial}{\partial y}[xy^2]$$
$$= x^2 \cos(xy^2)\, x\, 2y$$
$$= 2x^3 y \cos(xy^2)$$

Nomor 4.

Karena variabel bebas dari fungsi tersebut adalah x dan y, maka turunan parsial pertama z terhadap variabel x adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y - \cos\left(\frac{x}{y}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2y^2$$
$$= e^y - \cos\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{y} + 3x^2y^2$$

$$= e^y - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2y^2$$

dan turunan parsial pertama z terhadap variabel y adalah

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y - \cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{y}\right] + x^3\,2y$$

$$= xe^y - \cos\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) + x^3\,2y$$

$$= xe^y - \left(-\frac{x}{y^2}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y$$

$$= xe^y + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y$$

Nomor 5.

Karena variabel bebas dari fungsi tersebut adalah x dan y, maka turunan parsial pertama z terhadap variabel x adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u'v + uv'$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2).\sin(xy^2) + x^2\frac{\partial}{\partial x}(\sin(xy^2))$$

$$= 2x\sin(xy^2) + x^2\cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)$$

$$= 2x\sin(xy^2) + x^2\cos(xy^2)\,y^2$$

$$= 2x\sin(xy^2) + x^2y^2\cos(xy^2)$$

dan turunan pertama z terhadap variabel y adalah $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy^2)$$

$$= x^2\cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)$$

$$= x^2\cos(xy^2)\,2xy$$

$$= 2x^3y\cos(xy^2)$$

Nomor 6.

Fungsi ini adalah bentuk fungsi implisit, dengan variabel bebasnya x dan y sedangkan variabel tak bebasnya adalah variabel z. Sehingga untuk mencari mencari turunan pertama dari masing-masing fungsinya adalah dengan cara turunan fungsi implisit yang sudah dijelaskan pada Modul 1.

$$x^2(2y+3z)+y^2(3x-4z)+z^2(x-2y)=xyz$$
$$2x^2y+3x^2z+3xy^2-4y^2z+xz^2-2yz^2=xyz$$

Diturunkan terhadap variabel x.

$$4xy+6xz+3x^2\frac{\partial}{\partial x}(z)+3y^2-4y^2\frac{\partial}{\partial x}(z)+z^2+x\frac{\partial}{\partial x}(z^2)-2y\frac{\partial}{\partial x}(z^2)$$
$$=yz+xy\frac{\partial}{\partial x}(z)$$
$$4xy+6xz+3x^2\frac{\partial z}{\partial x}+3y^2-4y^2\frac{\partial z}{\partial x}+z^2+x(2z)\frac{\partial z}{\partial x}-2y(2z)\frac{\partial z}{\partial x}=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$4xy+6xz+3x^2\frac{\partial z}{\partial x}+3y^2-4y^2\frac{\partial z}{\partial x}+z^2+2xz\frac{\partial z}{\partial x}-4yz\frac{\partial z}{\partial x}=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$3x^2\frac{\partial z}{\partial x}-4y^2\frac{\partial z}{\partial x}+2xz\frac{\partial z}{\partial x}-4yz\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial x}=yz-4xy-6xz-3y^2-z^2$$
$$(3x^2-4y^2+2xz-4yz-xy)\frac{\partial z}{\partial x}=yz-4xy-6xz-3y^2-z^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-4xy-6xz-3y^2-z^2}{3x^2-4y^2+2xz-4yz-xy}$$

Selanjutnya dihitung turunan pertama terhadap variabel y.

$$x^2(2y+3z)+y^2(3x-4z)+z^2(x-2y)=xyz$$
$$2x^2y+3x^2z+3xy^2-4y^2z+xz^2-2yz^2=xyz$$

Diturunkan terhadap variabel y.

$$2x^2+3x^2\frac{\partial}{\partial y}(z)+3x\,(2y)-8yz-4y^2\frac{\partial}{\partial y}(z)+x\frac{\partial}{\partial y}(z^2)-2z^2-2y\frac{\partial}{\partial y}(z^2)$$
$$=xz+xy\frac{\partial}{\partial y}(z)$$
$$2x^2+3x^2\frac{\partial}{\partial y}(z)+3x\,(2y)-8yz-4y^2\frac{\partial}{\partial y}(z)+x\frac{\partial}{\partial y}(z^2)-2z^2-2y\frac{\partial}{\partial y}(z^2)$$
$$=xz+xy\frac{\partial}{\partial y}(z)$$
$$2x^2+3x^2\frac{\partial z}{\partial y}+6xy-8yz-4y^2\frac{\partial z}{\partial y}+x(2z)\frac{\partial z}{\partial y}-2z^2-2y(2z)\frac{\partial z}{\partial y}=xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$2x^2+3x^2\frac{\partial z}{\partial y}+6xy-8yz-4y^2\frac{\partial z}{\partial y}+2xz\frac{\partial z}{\partial y}-2z^2-4yz\frac{\partial z}{\partial y}=xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$3x^2\frac{\partial z}{\partial y}-4y^2\frac{\partial z}{\partial y}+2xz\frac{\partial z}{\partial y}-4yz\frac{\partial z}{\partial y}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz-2x^2-6xy+8yz+2z^2$$

$$(3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy)\frac{\partial z}{\partial y} = xz - 2x^2 - 6xy + 8yz + 2z^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2x^2 - 6xy + 8yz + 2z^2}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

FUNGSI LEBIH DARI DUA VARIABEL BEBAS

Misal diberikan fungsi $f(x, y, z)$ dengan variabel bebasnya terdiri dari tiga variabel, yaitu x, y dan z. Turunan parsial pertama f terhadap variabel x dinotasikan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

dan didefinisikan sebagai sebagai berikut.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

dengan memandang variabel y dan z sebagai konstanta.

Turunan parsial pertama f terhadap variabel y dinotasikan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

dan didefinisikan sebagai sebagai berikut.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

dengan memandang variabel x dan z sebagai konstanta.

Turunan parsial pertama f terhadap variabel z dinotasikan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z$$

dan didefinisikan sebagai sebagai berikut.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

dengan memandang variabel x dan y sebagai konstanta.

Contoh.

Tentukan $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ dan $\frac{\partial f}{\partial x}$ dari fungsi berikut.

1. $f(x, y, z) = xy + \frac{x^2 y}{z} + z^2$
2. $f(x, y, z) = x^2 \sin(yz)$

Jawab.

Nomor 1.

Menghitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ dengan cara memandang bahwa variabel y dan z sebagai konstanta.

$$f(x,y,z) = xy + \frac{x^2y}{z} + z^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{2xy}{z} + 0$$
$$= y + \frac{2xy}{z}$$

Menghitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ dengan cara memandang bahwa variabel x dan z sebagai konstanta.

$$f(x,y,z) = xy + \frac{x^2y}{z} + z^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{x^2}{z} + 0$$
$$= x + \frac{x^2}{z}$$

Menghitung $\frac{\partial f}{\partial z}$ dengan cara memandang bahwa variabel x dan z sebagai konstanta. Pertama ubah terlebih dahulu bentuk dari fungsinya.

$$f(x,y,z) = xy + \frac{x^2y}{z} + z^2$$
$$= xy + x^2yz^{-1} + z^2$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + x^2y(-z^{-2}) + 2z$$
$$= -x^2yz^{-2} + 2z$$
$$= -\frac{x^2y}{z^2} + 2z$$

Nomor 2.

Menghitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ dengan cara memandang bahwa variabel y dan z sebagai konstanta.

$$f(x,y,z) = x^2 \sin(yz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(yz)$$

Menghitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ dengan cara memandang bahwa variabel x dan z sebagai konstanta.

$$f(x,y,z) = x^2 \sin(yz)$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \frac{\partial}{\partial y} \sin(yz) \\ &= x^2 \cos(xy) \frac{\partial}{\partial y}(yz) \\ &= x^2 \cos(xy)\, z \\ &= x^2 z \cos(xy)\end{aligned}$$

Menghitung $\frac{\partial f}{\partial z}$ dengan cara memandang bahwa variabel x dan y sebagai konstanta.

$$f(x,y,z) = x^2 \sin(yz)$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= x^2 \frac{\partial}{\partial z} \sin(yz) \\ &= x^2 \cos(xy) \frac{\partial}{\partial z}(yz) \\ &= x^2 \cos(xy)\, y \\ &= x^2 y \cos(xy)\end{aligned}$$

TURUNAN PARSIAL TINGKAT TINGGI

Misalkan diberikan fungsi $f(x,y)$ dengan variabel bebasnya adalah x dan y sedangkan variabel tak bebasnya adalah f. Turunan parsial tingkat kedua variabel tak bebas terhadap variabel bebas adalah sebagai berikut.

1. Fungsi f diturunkan terhadap variabel x, kemudian diturunkan terhadap variabel x, dinotasikan sebagai berikut.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

2. Fungsi f diturunkan terhadap variabel y, kemudian diturunkan terhadap variabel y, dinotasikan sebagai berikut.

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

3. Fungsi f diturunkan terhadap variabel x, kemudian diturunkan terhadap variabel y, dinotasikan sebagai berikut.

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

4. Fungsi f diturunkan terhadap variabel y, kemudian diturunkan terhadap variabel x, dinotasikan sebagai berikut.

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

Contoh.

Tentukan z_{xx}, z_{yy} , z_{xy} , z_{yx} dari fungsi-fungsi berikut.

1. $z = x^3y^2$
2. $z = x^3 + 3xy^2 - y^2$
3.

Penyelesaian.

Nomor 1.

Pada pembahasan sebelumnya diketahui bahwa

$z_x = 3x^2y^2$ dan $z_y = 2x^3y$

Selanjutnya dihitung nilai dari z_{xx}, z_{yy} , z_{xy} , z_{yx}

$z_{xx} = 6xy^2$

$z_{yy} = 2x^3$

$z_{xy} = 3x^2 2y = 6x^2y$

$z_{yx} = 6x^2y$

Nomor 2.

Pada pembahasan sebelumnya diketahui bahwa

$z_x = 3x^2 + 3y^2$ dan $z_y = 6xy - 2y$

Selanjutnya dihitung nilai dari $z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{yx}$

$z_{xx} = 6x + 0 = 6x$

$z_{yy} = 6x - 2$

$z_{xy} = 0 + 6y = 6y$

$z_{yx} = 6y - 0 = 6y$

Dari dua contoh tersebut dapat diketahui bahwa nilai dari $z_{xy} = z_{yx}$. Sehingga sifat yang dapat disimpulkan adalah

$$z_{xy} = z_{yx}$$

DIFERENSIAL TOTAL

Misalkan diberikan fungsi $z = f(x, y)$. Rumus diferensial total dari z adalah

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Contoh.

Tentukan diferensial total dari

1. $z = x^3 - xy^2$
2. $z = \ln(x^3 + y^2)$

Penyelesaian.

Nomor 1.

Untuk menentukan diferensial total, pertama harus dicari terlebih dahulu turunan pertama terhadap setiap variabel bebasnya.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - y^2$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 - x\,2y$$

$$= -2xy$$

Jadi, diferensial total dari fungsi z adalah

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz = (3x^2 - y^2)dx - 2xy\,dy$$

Nomor 2.

Untuk menentukan diferensial total, pertama harus dicari terlebih dahulu turunan pertama terhadap setiap variabel bebasnya. Apakah masih ingat turunan dari fungsi logaritma?

Contoh sederhana.

Turunan pertama dari $y = \ln(x^2 + x - 1)$ adalah $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$.

Sehingga

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + y^2}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^3 + y^2}$$

Jadi, diferensial total dari fungsi z adalah

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz = \frac{3x^2}{x^3 + y^2}\,dx + \frac{2y}{x^3 + y^2}\,dy$$

LATIHAN SOAL

1. Hitunglah z_x dan z_y dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $z = x^2 - y^2$
   b. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   c. $z = 2x^2 - 5xy + y^2$
   d. $z = x^y$
   e. $z = \sin 3x \cos 4y$
   f. $x^3yz + \sin(xyz) = e^{(x-yz)}$

2. Hitunglah $z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{yx}$ dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $z = x^2 - 4xy^2 + 3y$
   b. $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
   c. $z = e^{2x-3y}$
3. Dapatkan diferensial total dari
   a. $z = xy$
   b. $z = \ln\tan\left(\frac{y}{x}\right)$
   c. $z = \ln(2x^2 + y^2)$

DAFTAR PUSTAKA.

Purcell, Edwin J, Dale Varberg, Steven E. Rigdon. 2004. Kalkulus dan Geometri Analitik, Edisi kelima: Jilid 2. Jakarta: Erlangga.