KALKULUS 2

(CTI212)

MODUL 6

INTEGRAL LIPAT PADA KOORDINAT POLAR

DISUSUN OLEH

SURYANI, M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

INTEGRAL LIPAT DUA

Kemampuan akhir yang diharapkan dengan adanya pembelajaran integral lipat dua ini adalah

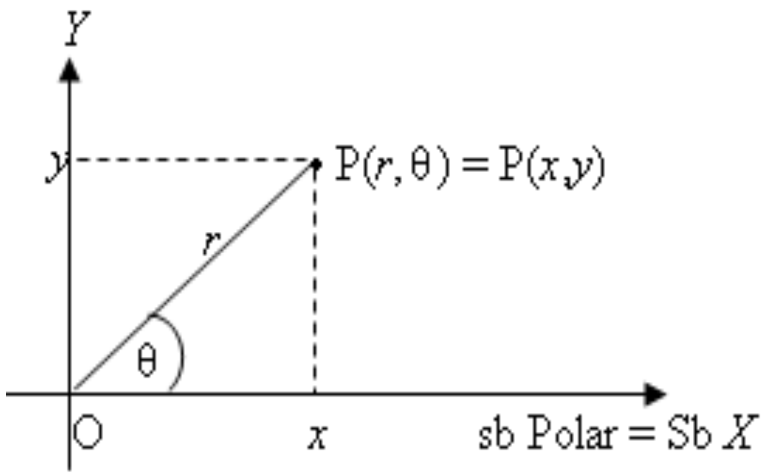
1. Mahasiswa dapat memahami dan menyelesaikan integral lipat dua dalam koordinat polar.
2. Mahasiswa dapat memahami dan menentukan batas integral lipat dua pada koordinat polar.

Pada modul 4 sudah dijelaskan bagaimana teknik menghitung integral lipat dua pada daerah persegi Panjang dan daerah bukan persegi panjang. Pada modul 5 sudah dijelaskan bagaimana cara menentukan batas integrasi dari integral lipat dua dari suatu daerah baik daerahnya persegi panjang atau bukan persegi panjang. Pada modul 6 ini dibahas mengenai integral lipat dua pada koordinat polar.

Untuk dapat memahami materi ini, kalian harus memahami bagaimana caranya untuk dapat menggambar suatu garis, parabola, lingkaran, ellips dan lain sebagaimana. Kemudian bagaimana caranya menentukan titik potong antara kurva dan kurva. Sebelum membahas mengenai integral lipat dua terlebih dahulu dibahas bagaimana dari mengubah koordinat kartesius menjadi koordinat polar.

KOORDINAT POLAR

Hubungan antara koordinat dan koordinat kartesius dapat dilihat pada Gambar 1 berikut. Dari Gambar tersebut dapat dilihat, jika koordinat polar dinyatakan dalam variabel x dan y sedangkan koordinat kartesius dinyatakan dalam variabel r dan θ.



Gambar 1. Hubungan koordinat kartesius dan polar

Jika kita akan mengubah bentuk koordinat polar menjadi koordinat kartesius, maka

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Begitu juga sebaliknya. Jika kita akan mengubah bentuk koordinat kartesius menjadi koordinat polar, maka

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = arc\tan\frac{y}{x}$$

INTEGRAL LIPAT DUA PADA KOORDINAT POLAR

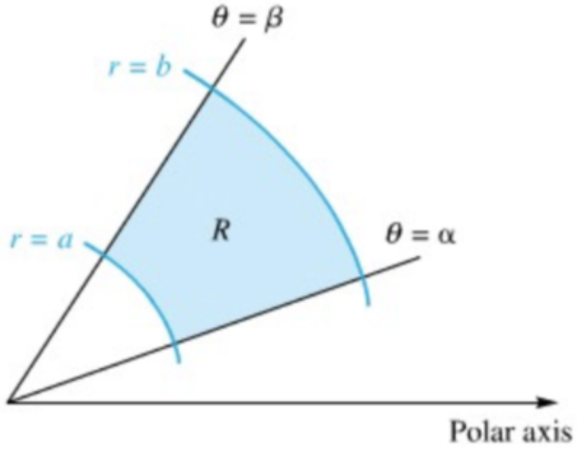
Misalkan $z = f(x, y)$ adalah sebuah permukaan atas R dan misalkan f kontinu dan nonnegatif. Volume dari V adalah

$$V = \iint\limits_R f(x, y)\, dA$$

Pada koordinat kutub, suatu persegi panjang R berbentuk

$$R = \{(r, \theta): a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$$

Jika diilustrasikan bentuk dari R pada koordinat polar dinyatakan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Ilustrasi R pada koordinat polar

Jadi, volume dari V pada koordinat polar dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(r\cos\theta\,, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Contoh 1.

Hitung integral lipat dua berikut.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

Penyelesaian.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} r^2 \sin\theta\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3\, sin\,\theta\right]_0^{cos\,\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} (\cos^2\theta - 0^3) \sin\theta\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

Untuk menghitung $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$ menggunakan metode integral substitusi. Misal

$u = \cos\theta$

$\frac{du}{d\theta} = -\sin\theta$ sehingga $d\theta = \frac{du}{-\sin\theta}$

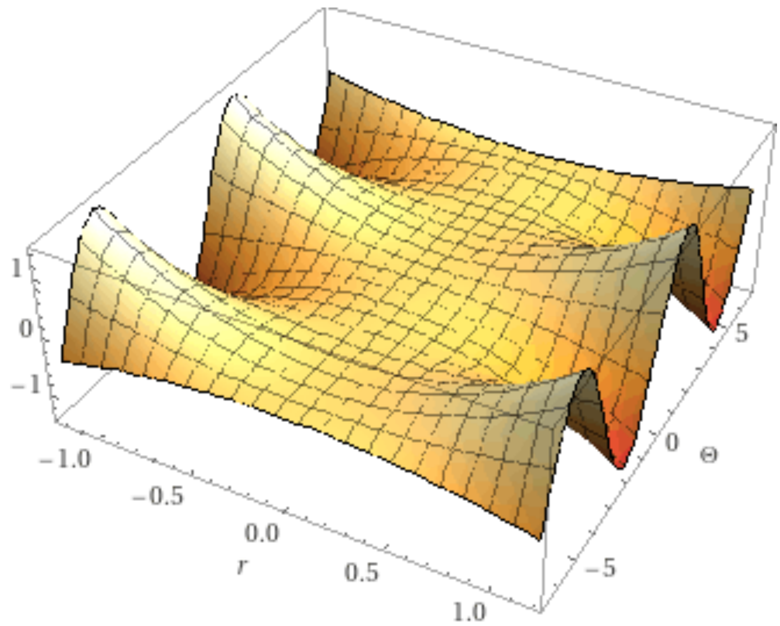
Batas integrasinya berubah menjadi

$\theta = 0$ maka $u = \cos 0 = 1$

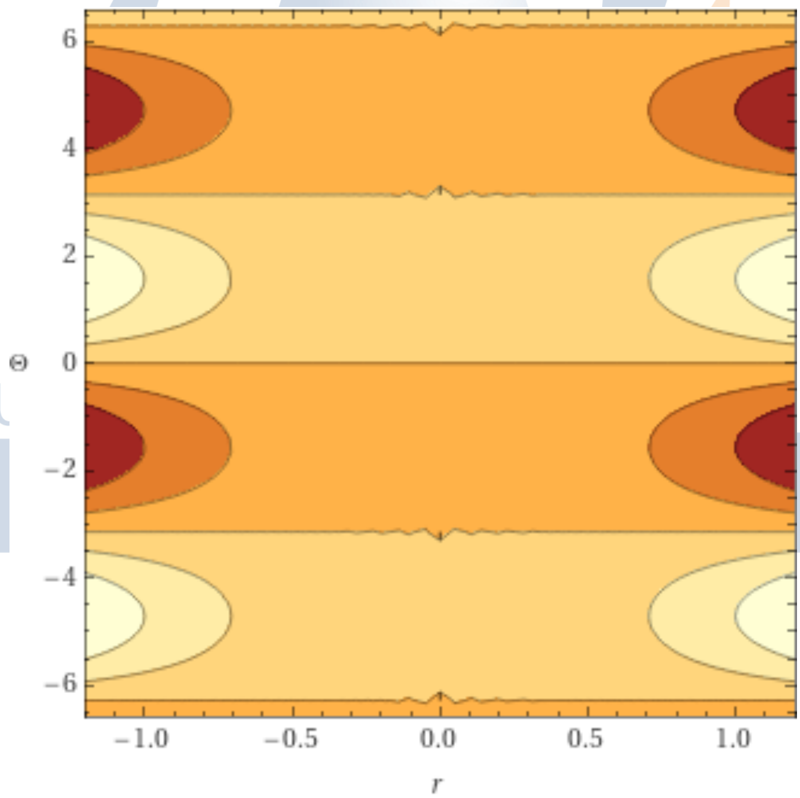
$\theta = \frac{\pi}{2}$ maka $u = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta &= \int_1^0 \frac{1}{3}u^2 \sin\theta \frac{du}{-\sin\theta} \\
&= \int_1^0 -\frac{1}{3}u^2 \sin\theta \, du \\
&= \left(-\frac{1}{3}\frac{1}{3}u^3\right)_1^0 \\
&= \left(-\frac{1}{9}u^3\right)_1^0 \\
&= -\frac{1}{9}(0^3 - 1^3) \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Jika fungsi $z = r^2 \sin\theta$ diilustrasikan, maka diperoleh Gambar 3 dan gambar 4 berikut.



Gambar 3. Ilustrasi fungsi z pada bidang dimensi tiga



Gambar 4. *Countour plot* fungsi z

Contoh 2.

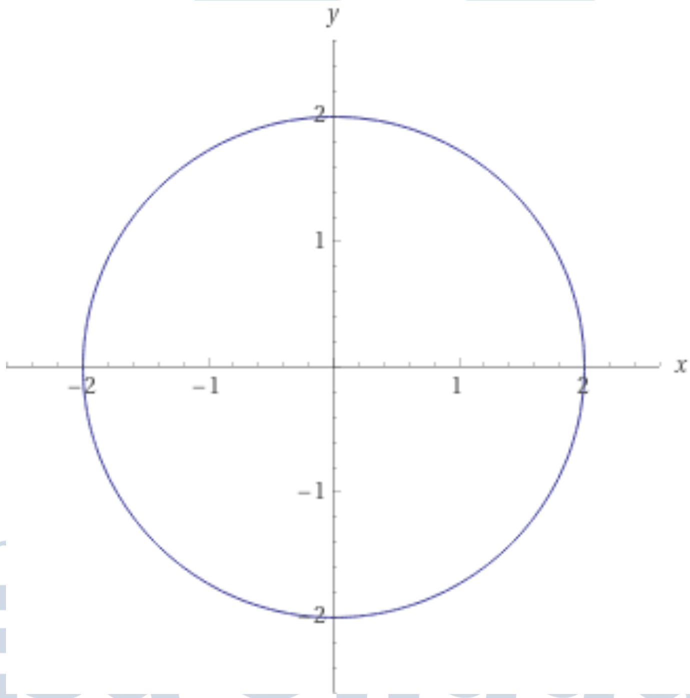
Hitung integral lipat berikut.

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dA$$

Dengan R adalah daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ dan di kuadran I.

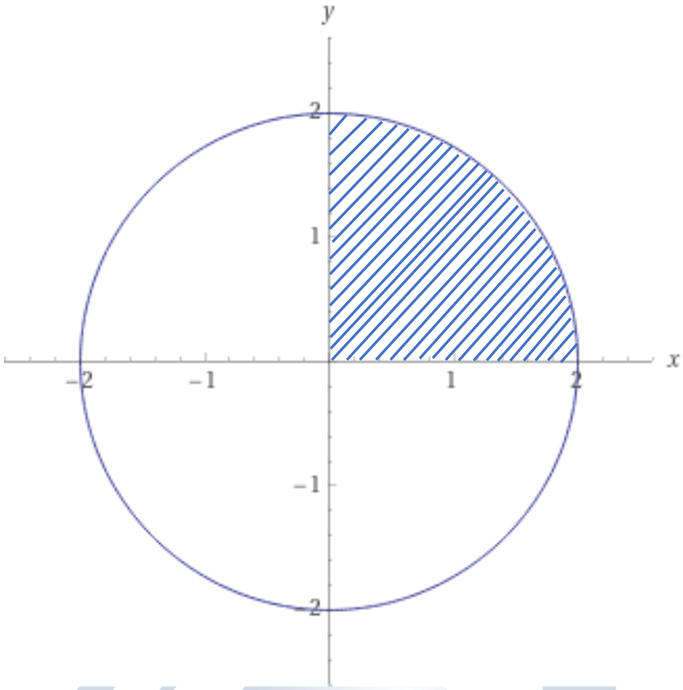
Penyelesaian.

Langkah pertama, gambarkan terlebih dahulu untuk persamaan $x^2 + y^2 = 4$, dimana persamaan ini adalah lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari 2. Sehingga diperoleh gambarnya sebagaimana terlihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Grafik fungsi $x^2 + y^2 = 4$

Karena R adalah daerah yang berada di kuadran I maka daerah R adalah daerah yang diarsir pada Gambar 6 berikut.



Gambar 6. Daerah R

Daerah R adalah daerah yang dibatasi oleh $r = 0$ sampai $r = 2$ serta sudutnya $\theta = 0$ sampai $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dengan mengingat kembali bahwa

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dan

$$dA = r\, d\theta\, dr$$

Maka diperoleh

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dA = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2}\, r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \left[e^{r^2} r\, \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \int_0^2 \frac{\pi}{2}\, r\, e^{r^2}\; dr$$

Untuk menghitung $= \int_0^2 \frac{\pi}{2}\, r\, e^{r^2}\; dr$ menggunakan metode substitusi. Misal

$u = r^2$

$\frac{du}{dr} = 2r$ sehingga $dr = \frac{du}{2r}$

Batas integrasinya berubah menjadi

$r = 0$ maka $u = 0^2 = 0$

$r = 2$ maka $u = 2^2 = 4$

$$\int_0^2 \frac{\pi}{2}\, r\, e^{r^2}\, dr = \int_0^4 \frac{\pi}{2}\, r\, e^u \frac{du}{2r}$$

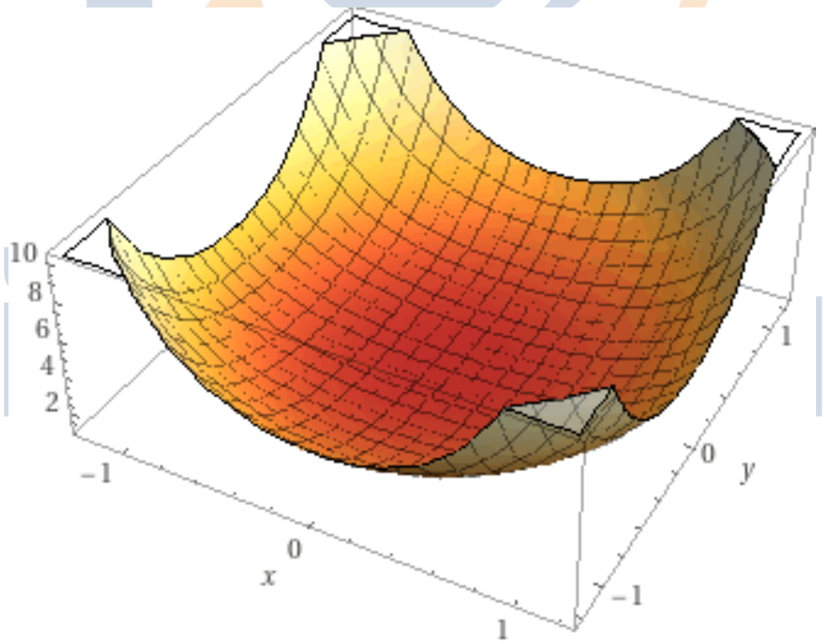
$$= \int_0^4 \frac{\pi}{4}\, e^u\, du$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}\, e^u\right]_0^4$$

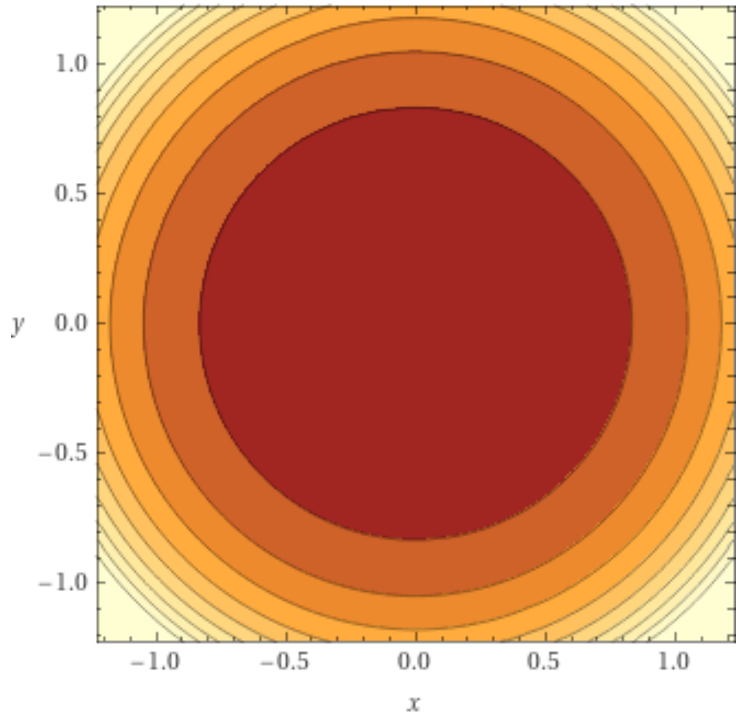
$$= \frac{\pi}{4}\left[e^4 - e^0\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[e^4 - 1\right]$$

Jika fungsi $z = e^{x^2+y^2}$ diilustrasikan, maka diperoleh Gambar 7 dan gambar 8 berikut.



Gambar 7. Ilustrasi fungsi z pada bidang dimensi tiga



Gambar 8. *Countour plot* fungsi z

Contoh 3.

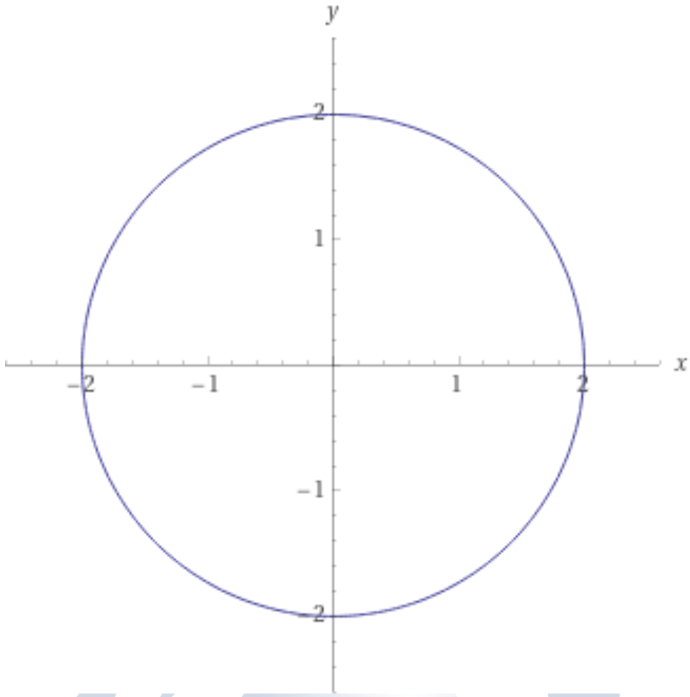
Hitung integral lipat berikut.

$$\iint_R \frac{1}{4 + x^2 + y^2} \, dA$$

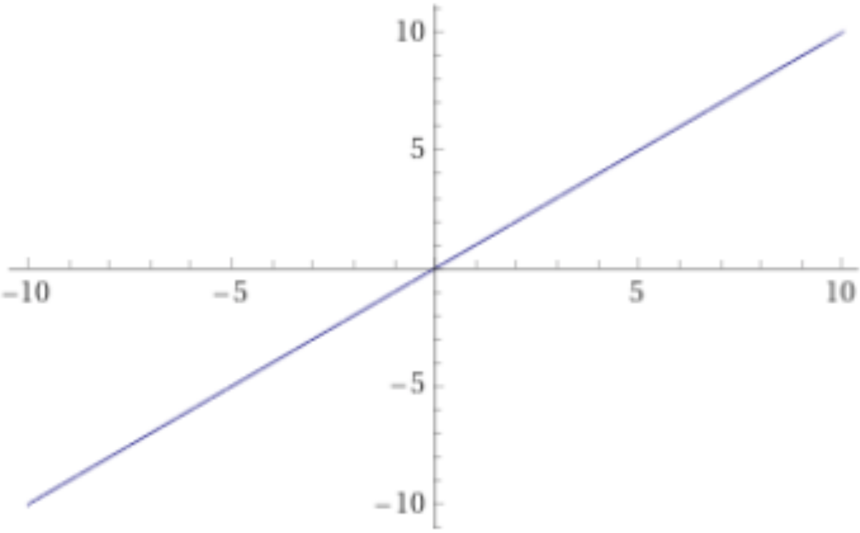
Dengan R adalah daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, $\mathrm{y} = 0$, dan $y = x$ di kuadran I.

Penyelesaian.

Langkah pertama, gambar terlebih dahulu untuk persamaan $x^2 + y^2 = 4$ dan $y = x$, dimana $x^2 + y^2 = 4$ adalah lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jarinya 2 sedangkan $y = x$ adalah sebuah garis lurus. Sehingga diperoleh

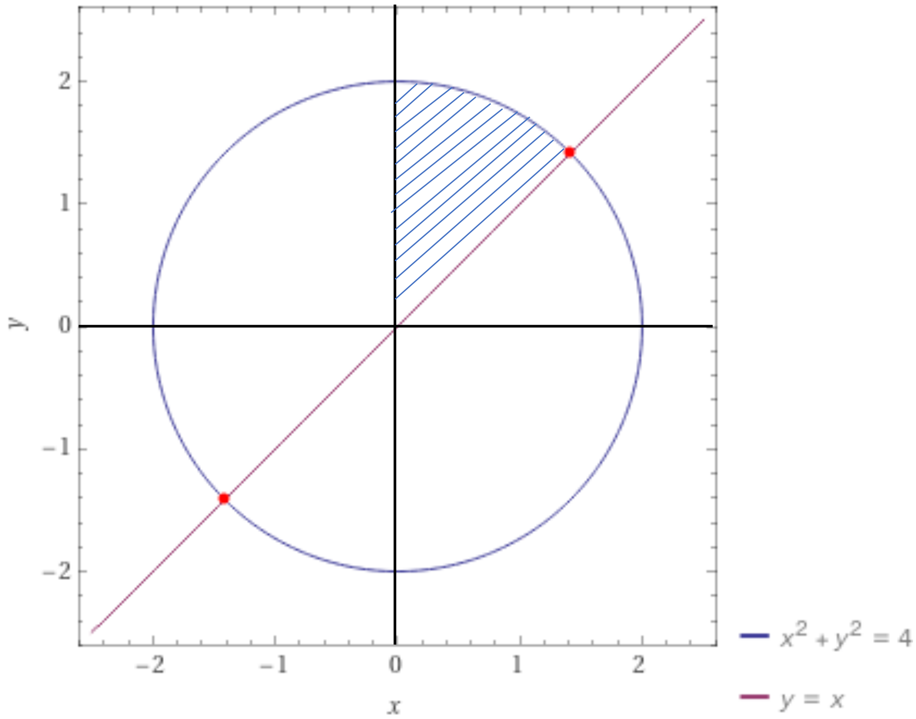


Gambar 8. Grafik $x^2 + y^2 = 4$



Gambar 9. Grafik $y = x$

Karena R adalah daerah yang berada di kuadran I dan dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, $\mathrm{y} = 0$ dan $y = x$ maka daerah R adalah daerah yang diarsir pada Gambar 10 berikut.



Gambar 10. Daerah R

Daerah R adalah daerah yang dibatasi oleh $r = 0$ sampai $r = 2$ serta sudutnya $\theta = 0$ sampai $\theta = \frac{\pi}{4}$. Dengan mengingat kembali bahwa

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dan

$$dA = r\, d\theta\, dr$$

Maka diperoleh

$$\iint_R \frac{1}{4 + x^2 + y^2}\, dA = \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4 + r^2}\, r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{4 + r^2}\, \theta\right]_0^{\pi/4} r\, dr$$

$$= \int_0^2 \frac{\pi}{4} \frac{1}{4 + r^2} r\, dr$$

Untuk menghitung $\int_0^2 \frac{\pi}{4} \frac{1}{4+r^2} r\, dr$ menggunakan metode substitusi. Misal

$u = 4 + r^2$

$\frac{du}{dr} = 2r$ sehingga $dr = \frac{du}{2r}$

Batas integrasinya berubah menjadi

$r = 0$ maka $u = 4 + 0^2 = 4$

$r = 2$ maka $u = 4 + 2^2 = 8$

$$\int_0^2 \frac{\pi}{4} \frac{1}{4+r^2} r\, dr = \int_4^8 \frac{\pi}{4} \frac{1}{u} r \frac{du}{2r}$$

$$= \int_4^8 \frac{\pi}{8} \frac{1}{u} du$$

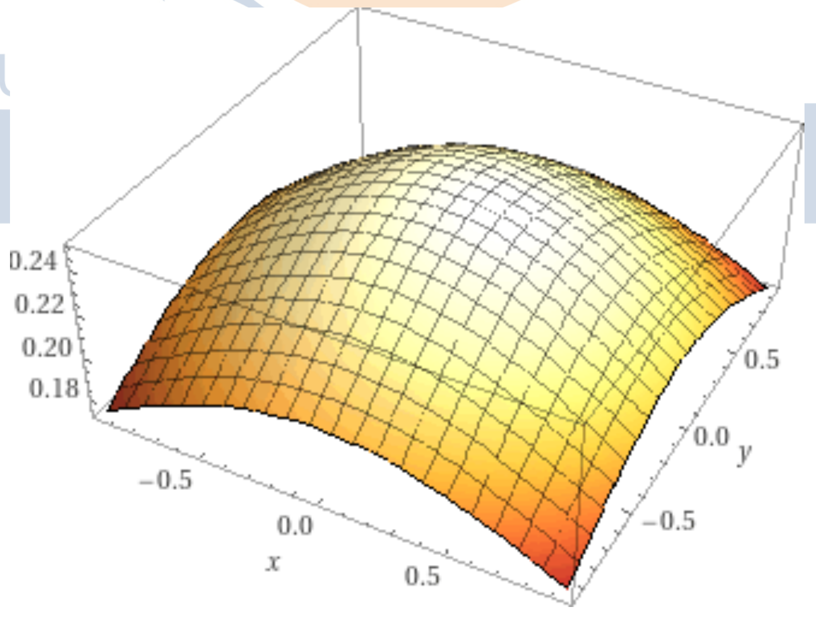
$$= \frac{\pi}{8} \int_4^8 \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{\pi}{8} [\ln|u|]_4^8$$

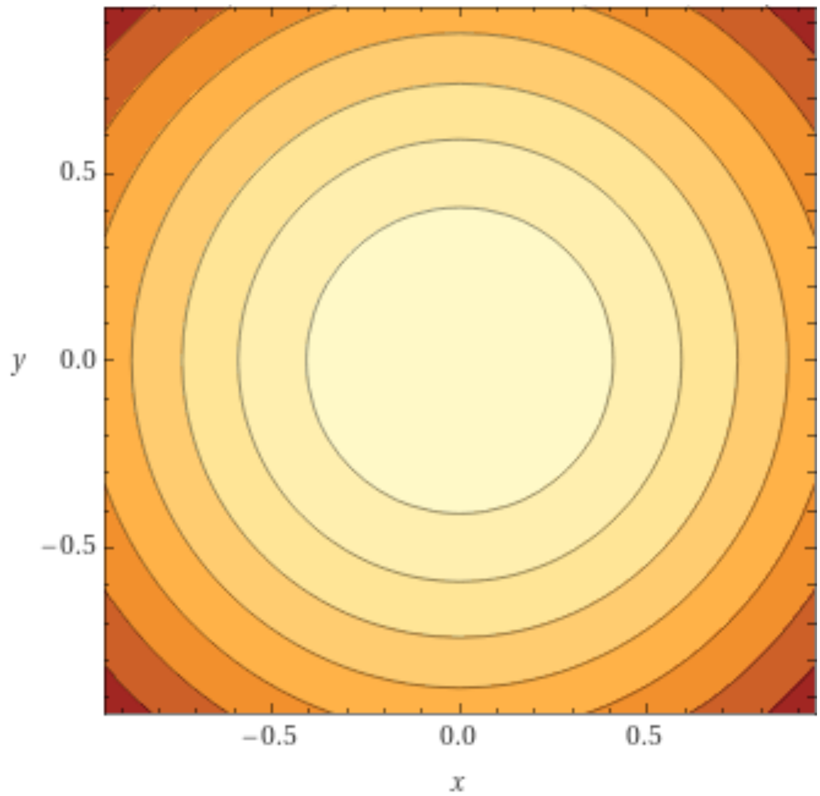
$$= \frac{\pi}{8} [\ln 8 - \ln 4]$$

$$= \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Jika fungsi $z = \frac{1}{4+x^2+y^2}$ diilustrasikan, maka diperoleh Gambar 11 dan gambar 12 berikut.



Gambar 10. Ilustrasi fungsi z pada bidang dimensi tiga



Gambar 8. *Countour plot* fungsi z

LATIHAN SOAL

Hitunglah:

1. $\int_0^{\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r \sin\theta \, dr \, d\theta$
2. $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} r^2 \, dr \, d\theta$
3. $\int_0^{\pi} \int_0^{2} r \cos\frac{\theta}{4} \, dr \, d\theta$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{sin\theta} r \, dr \, d\theta$
5. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} r \, dr \, d\theta$
6. $\iint_R \frac{1}{4-x^2-y^2} dA$, Dengan R adalah daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, $\mathrm{y} = 0$, dan $y = x$ di kuadran I.
7. $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA$, Dengan R adalah daerah yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, $\mathrm{y} = 0$, dan $y = x$ di kuadran I.
8. $\iint_R \; y \, dA$, dimana R adalah daerah yang berada di kuadran polar pertama yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ dan $x^2 + y^2 = 1$