KALKULUS 2

(CTI212)

MODUL 3

EKSTRIM FUNGSI DUA VARIABEL BEBAS

DISUSUN OLEH

SURYANI, M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

EKSTRIM FUNGSI DUA VARIABEL BEBAS

Kemampuan Akhir Yang Diharapkan

Setelah mempelajari modul 2 ini, diharapkan mahasiswa mampu :

1. Memahami dan menghitung titik kritis.
2. Memahami dan menghitung nilai ekstrim.
3. Memahami dan menghitung nilai ekstrim bersyarat.

MAKSIMUM DAN MINIMUM

Definisi maksimum dan minimum global.

Andaikan p_0 suatu titik di daerah asal S.

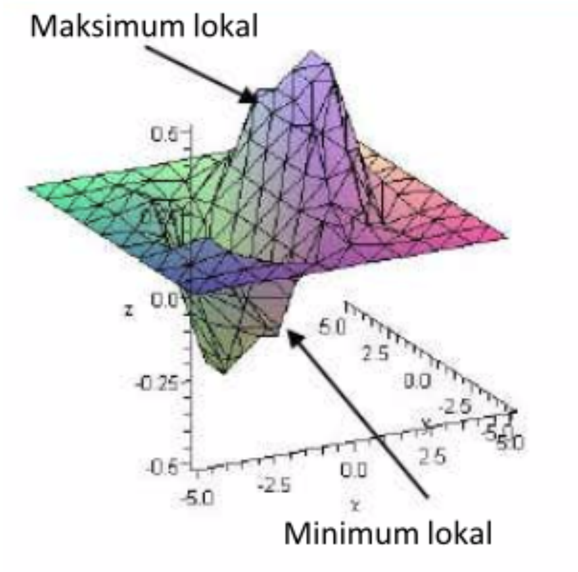
i. $f(p_0)$ adalah nilai maksimum global dari fungsi f pada S jika
$$f(p_0) \geq f(p),\ \forall p \in S$$
ii. $f(p_0)$ adalah nilai minimum global dari fungsi f pada S jika
$$f(p_0) \leq f(p),\ \forall p \in S$$
iii. $f(p_0)$ adalah nilai ekstrim global dari fungsi f pada S jika ia adalah suatu nilai maksimum global ataupun minimum global.

Definisi maksimum dan minimum lokal.

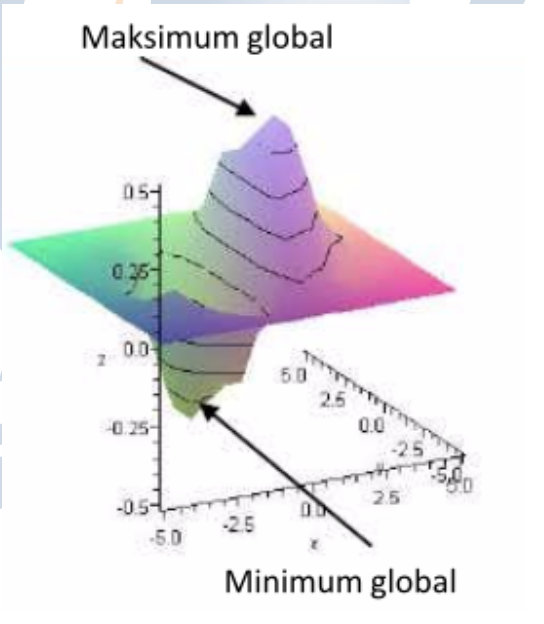
Andaikan p_0 suatu titik di daerah asal S, dan $N \cap S$ dengan N adalah suatu lingkungan dari p_0.

i. $f(p_0)$ adalah nilai maksimum lokal dari fungsi f pada S jika
$$f(p_0) \geq f(p),\ \forall p \in N \cap S$$
ii. $f(p_0)$ adalah nilai minimum lokal dari fungsi f pada S jika
$$f(p_0) \leq f(p),\ \forall p \in N \cap S$$
iii. $f(p_0)$ adalah nilai ekstrim lokal dari fungsi f pada S jika ia adalah suatu nilai maksimum global ataupun minimum global.

Untuk lebih memahami definisi dari maksimum dan minimum global serta maksimum dan minimum lokal, berikut diberikan ilustrasi Gambar 1 dan Gambar 2.



Gambar 1. Ilustrasi maksimum dan minimum lokal.



Gambar 2. Ilustrasi maksimum dan minimum global.

Berdasarkan Gambar 1 dan Gambar 2, dapat dilihat jika suatu nilai merupakan nilai maksimum (atau minimum) global, maka secara otomatis nilai tersebut termasuk nilai maksimum (atau minimum) lokal. Tetapi, jika suatu nilai merupakan nilai maksimum (atau minimum) lokal, maka belum tentu nilai tersebut termasuk nilai maksimum (atau minimum) global.

Titik Kritis

Titik-titik kritis dari fungsi f pada S adalah salah satu dari:

1. Suatu titik batas. Titik batas adalah suatu titik yang merupakan batas dari suatu interval.
2. Suatu titik stasioner dari f. Titik stasioner diperoleh dari hasil turunan pertama dari semua variabel bebasnya yang bernilai 0. Misal, variabel bebasnya adalah x dan y. Maka titik stasioner diperoleh dengan cara mencari nilai x dan y dari persamaan $f_x = 0$ dan $f_y = 0$.

   Contoh.

   Tentukan titik stasioner dari fungsi

   $$z = x^2 + y^2 - 2xy + y^3$$

   Jawab.

   Pertama cari terlebih dahulu $z_x = 0$ dan $z_y = 0$.

   $$z_x = 0$$
   $$2x - 2y + 0 = 0$$
   $$x = y$$

   dan

   $$z_y = 0$$
   $$2y - 2x + 3y^2 = 0$$

   Karena $x = y$ maka

   $$2y - 2y + 3y^2 = 0$$
   $$3y^2 = 0$$
   $$y^2 = 0$$
   $$y = 0$$

   Maka

   $$x = 0$$

   Jadi, titik stasioner dari fungsi z adalah $(0,0)$.
3. Suatu titik singular dari f. Titik singular diperoleh dari suatu kondisi dimana turunan pertama dari fungsi f tidak terdefinisi.

Langkah-langkah mencari nilai ekstrim.

Misalkan diberikan fungsi $F(x, y)$. Langkah-langkah mencari nilai ekstrim adalah:

1. Menentukan titik kritis.

   Titik stasioner diperolah jika $F_x = 0$ dan $F_y = 0$

2. Substitusikan semua titik stasioner ke fungsi D.

$$D = F_{xx}(x_0, y_0)F_{yy}(x_0, y_0) - F_{xy}^2(x_0, y_0)$$

i. Jika $D > 0$ dan $F_{xx}(x_0, y_0) < 0$, maka $F(x_0, y_0)$ adalah nilai maksimum lokal.

ii. Jika $D > 0$ dan $F_{xx}(x_0, y_0) > 0$, maka $F(x_0, y_0)$ adalah nilai minimum lokal.

iii. Jika $D < 0$, maka $F(x_0, y_0)$ bukan suatu nilai ekstrim ((x_0, y_0) adalah titik pelana).

iv. Jika $D = 0$, pengujian tidak memberikan kesimpulan

Contoh 1.

Dapatkan nilai maksimum dan minimum lokal dari:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$$

Penyelesaian.

Tentukan titik stasioner.

$$z_x = 0$$
$$2x + y + 0 - 3 + 0 = 0$$
$$2x + y - 3 = 0$$

dan

$$z_y = 0$$
$$0 + x + 2y - 0 + 0 = 0$$
$$x + 2y = 0$$
$$x = -2y$$

Jika dilakukan substitusi diperoleh

$$2x + y - 3 = 0$$
$$2(-2y) + y - 3 = 0$$
$$-4y + y - 3 = 0$$

$$-3y = 3$$
$$y = -1$$

Maka

$$x = 2$$

Sehingga diperoleh

$$(x_0, y_0) = (2, -1)$$

Untuk mengetahui jenis dari titik (x_0, y_0), maka dicari terlebih dahulu z_x, z_{xx}, z_y, z_{yy}, dan z_{xy}.

$z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$

$z_x = 2x + y - 3$

$z_y = x + 2y$

$z_{xx} = 2$

$z_{yy} = 1$

$z_{xy} = 1$

Kemudian disubstitusikan ke fungsi D sebagai berikut.

$$\begin{aligned} D &= z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 \\ &= 2\,(1) - 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga

$$D(2, -1) = 1$$

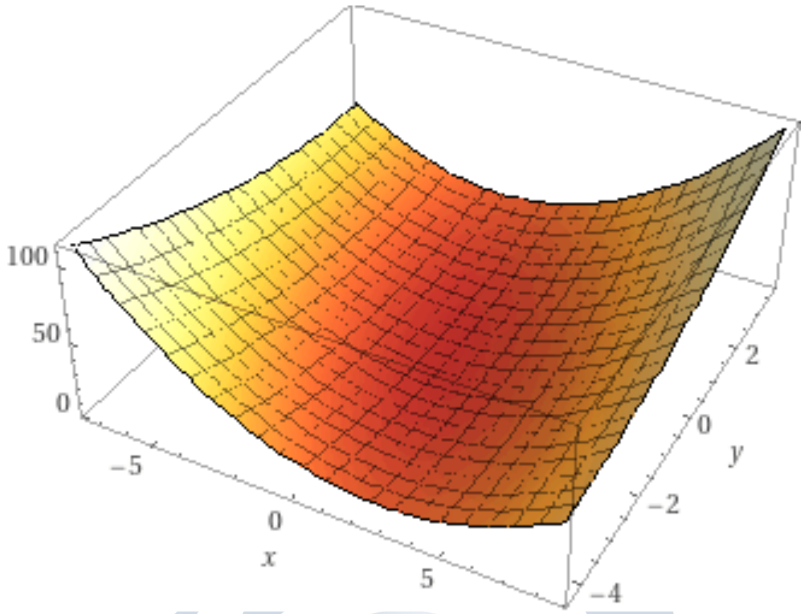
Karena $D > 0$ maka dihitung nilai dari $z_{xx}(2, -1)$

$$z_{xx}(2, -1) = 2$$

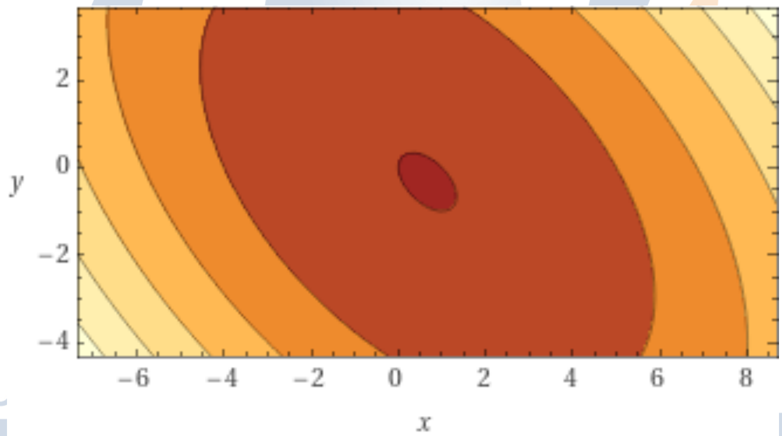
Karena $D > 0$ dan $z_{xx} > 0$ maka jenis dari titik $(2, -1)$ adalah minimum lokal. Artinya, pada saat nilai $x = 2$ dan $y = -1$ maka z mempunyai nilai minimum local, yaitu

$$\begin{aligned} z &= x^2 + xy + y^2 - 3x + 2 \\ &= 2^2 + 2(-1) + (-1)^2 - 3(2) + 2 \\ &= 4 - 2 + 1 - 6 + 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Berikut diberikan ilustrasi grafik dan konturnya dari fungsi $z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$.



Gambar 3. Gambar 3 dimensi dari fungsi z



Gambar 4. Gambar Kontur dari fungsi z

Contoh 2.

Dapatkan nilai maksimum dan minimum lokal (Jika ada) dari:

$$z = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$$

Penyelesaian

Tentukan titik stasioner.

$$z_x = 0$$

$$9x^2 + 0 - 9 + 0 = 0$$

$$9x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

dan

$$z_y = 0$$

$$0 + 2y - 0 + 4 = 0$$

$$2y + 4 = 0$$

$$y = -2$$

Jadi, titik kritisnya adalah $(1, -2)$ dan $(-1, -2)$.

Untuk mengetahui jenis dari titik (x_0, y_0), maka dicari terlebih dahulu z_x, z_{xx}, z_y, z_{yy}, dan z_{xy}.

$z = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$

$z_x = 9x^2 - 9$

$z_y = 2y + 4$

$z_{xx} = 18x$

$z_{yy} = 2$

$z_{xy} = 0$

Kemudian cari fungsi D.

$$\begin{aligned} D &= z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 \\ &= 18x\,(2) - 0 \\ &= 36x \end{aligned}$$

Pertama, di cek untuk titik $(1, -2)$.

$$D(1, -2) = 36(1) = 36$$

Karena nilai dari $D(1, -2) > 0$ maka dicari nilai z_{xx} nya.

$$z_{xx}(1, -2) = 18(1) = 18$$

Karena $D(1, -2) > 0$ dan $z_{xx}(1, -2) > 0$ maka jenis dari titik $(1, -2)$ adalah minimum lokal. Artinya, pada saat nilai $x = 1$ dan $y = -2$ maka z mempunyai nilai minimum local, yaitu

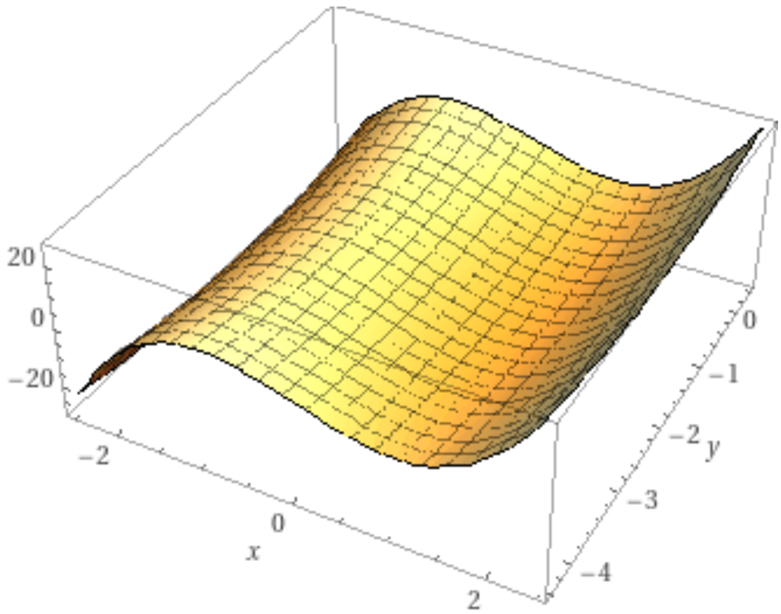
$$\begin{aligned} z &= 3x^3 + y^2 - 9x + 4y \\ &= 3(1)^3 + (-2)^2 - 9(1) + 4\,(-2) \\ &= 3 + 4 - 9 - 8 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Kedua, di cek untuk titik $(-1,-2)$ yaitu

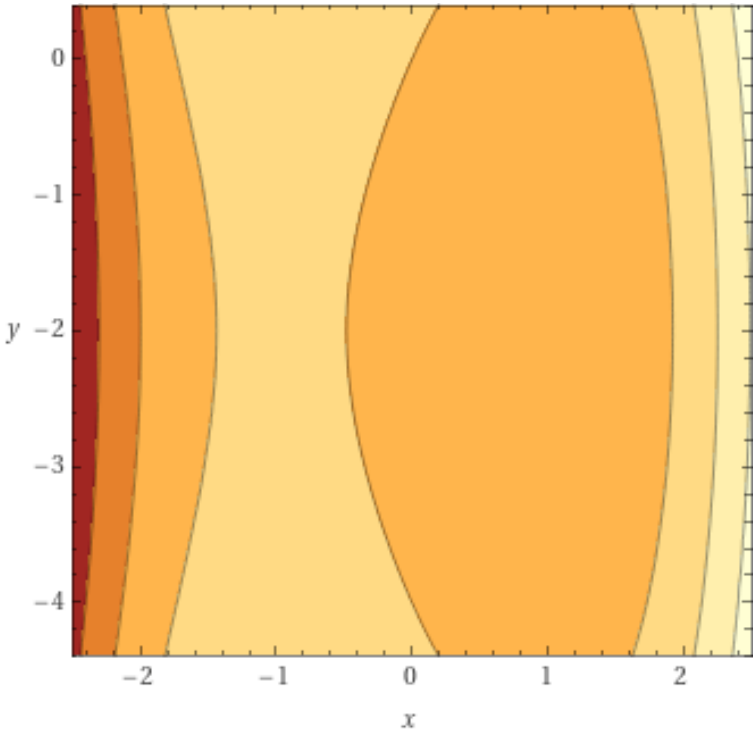
$$D(-1,-2) = 36(-1) = -1$$

Karena nilai dari $D(-1,-2) < 0$ maka jenis dari titik $(-1,-2)$ adalah titik pelana.

Berikut diberikan ilustrasi grafik dan konturnya dari fungsi $z = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$.



Gambar 5. Gambar tiga dimensi dari fungsi z



Gambar 6. Gambar Kontur dari fungsi z

METODE LAGRANGE

Pada pembahasan sebelumnya, mengenai mencari nilai ekstrim dari suatu fungsi tanpa adanya kendala tertentu. Pada subbab ini, dibahas mengenai bagaimana mencari nilai ekstrim jika diberikan kendala tertentu. Contoh sederhana, misalkan ada seorang pengusaha yang ingin memaksimumkan keuntungan tetapi karyawan yang dimiliki terbatas, atau modal yang dimilikinya terbatas.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mencari nilai ekstrim yang mempunyai suatu kendala adalah menggunakan metode Lagrange.

Definisi.

Untuk memaksimumkan atau meminimumkan $f(\boldsymbol{p})$ dengan kendala $g(\boldsymbol{p}) = 0$, selesaikan sistem persamaan

$$\nabla f(\boldsymbol{p}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{p})$$

Dan

$$g(\boldsymbol{p}) = 0$$

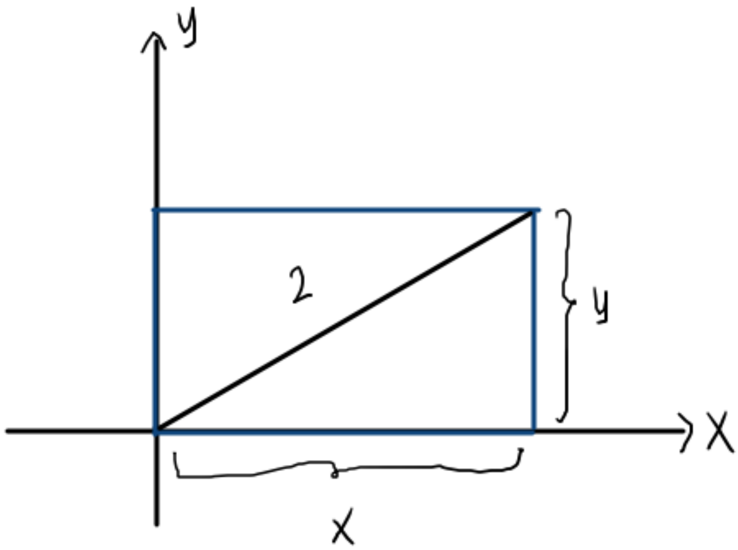
Untuk $\boldsymbol{p}$ dan λ. Setiap titik $\boldsymbol{p}$ yang demikian adalah suatu titik kritis untuk masalah nilai ekstrim dengan suatu kendala dan λ yang berpadanan disebut sebagai pengali Lagrange.

Contoh 1.

Berapakah luas daerah terbesar yang dapat dimiliki oleh suatu persegi panjang jika panjang diagonalnya 2?

Penyelesaian.

Hal pertama yang dilakukan adalah mengilustrasikan dari bentuk persegi panjangnya. Misal bentuknya terdapat pada kuadran 1 dengan panjangnya sebesar x dan lebarnya sebesar y. Dari soal diketahui bahwa panjang diagonalnya adalah 2. Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Ilustrasi persegi panjang.

Dari gambar 7 dapat diketahui bahwa panjang diagonalnya adalah

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

Dan luasnya adalah

$$L = xy$$

Sehingga kita dapat merumuskan masalah ini dengan fungsi

$$f(x, y) = xy$$

Dan kendalanya adalah

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2^2 = 0$$

Gradien yang berpadanan adalah

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

$$= y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

Dan

$$\nabla g(x,y) = g_x(x,y)\boldsymbol{i} + g_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

$$= 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$$

Kemudian menggunakan definisi metode Lagrange kita harus menghitung

$$\nabla f(\boldsymbol{p}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{p})$$

$$y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = \lambda(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j})$$

Jadi,

$$y = 2\lambda x \qquad (1)$$

$$x = 2\lambda y \qquad (2)$$

Dan

$$g(\boldsymbol{p}) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad (3)$$

Jika persamaan (1) dikalikan dengan y maka diperoleh

$$y^2 = 2\lambda xy \qquad (4)$$

Jika persamaan (2) dikalikan dengan x maka diperoleh

$$x^2 = 2\lambda xy \qquad (5)$$

Dari persamaan (4) dan (5) dapat disimpulkan bahwa

$$x^2 = y^2 \qquad (6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (3) diperoleh

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + x^2 = 4$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Karena x adalah panjang dari persegi persegi panjang, maka nilai yang diambil adalah nilai yang positif, yaitu $x = \sqrt{2}$. Sehingga untuk $x = \sqrt{2}$ maka $y = \sqrt{2}$.

Selanjutnya, dicari nilai dari pengali Lagrange yaitu λ. Jika titik $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ disubstitusikan ke persamaan (1), maka diperoleh

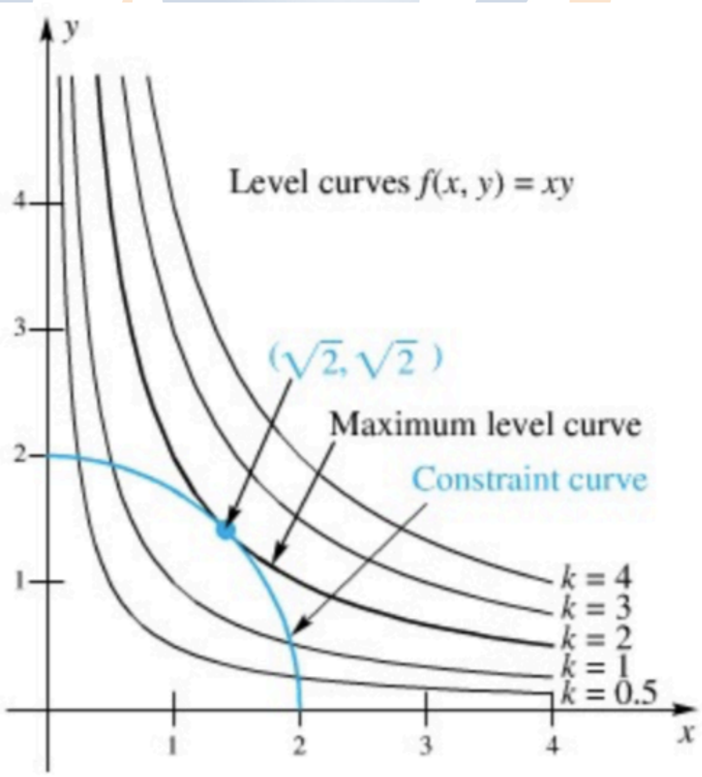
$$y = 2\lambda x$$

$$\sqrt{2} = 2\lambda\sqrt{2}$$

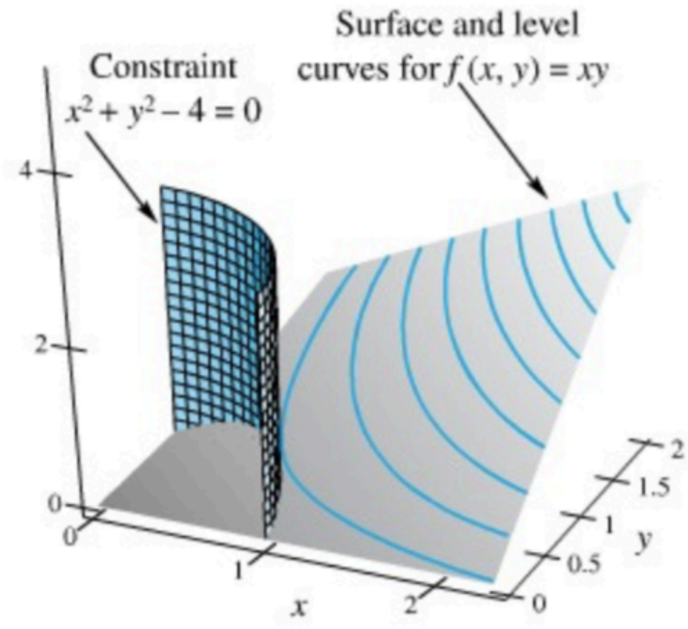
$$1 = 2\lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Jadi, dapat disimpulkan persegi panjang yang panjang diagonalnya adalah 2 mempunyai panjang $\sqrt{2}$ satuan dan lebarnya $\sqrt{2}$ satuan, sehingga luas terbesarnya adalah 2 satuan persegi. Berikut diberikan ilustrasi untuk kurva ketinggian maksimum dan kurva kendalanya pada Gambar 8 dan 9.



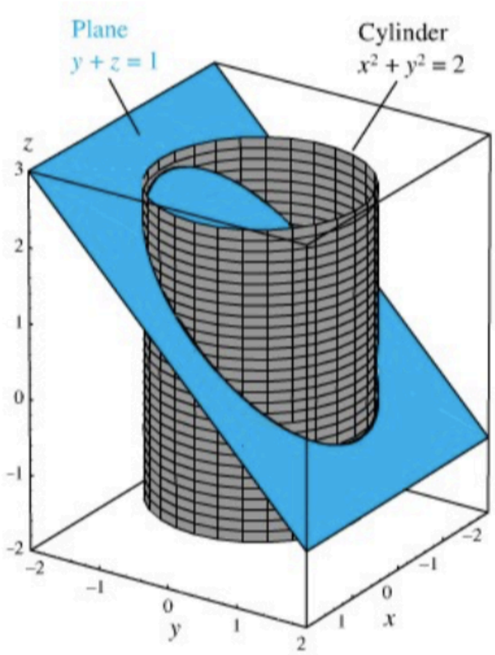
Gambar 8. Ilustrasi kurva ketinggian dan kurva kendala



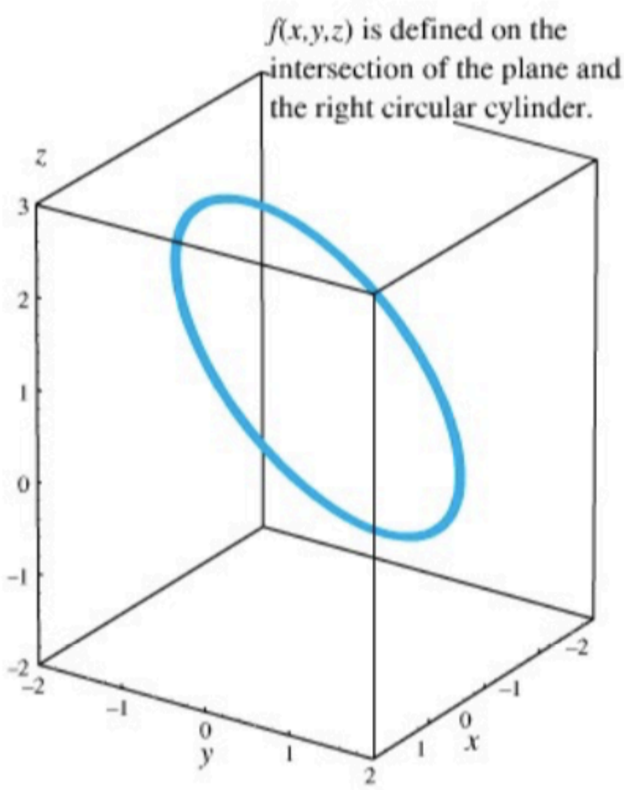
Gambar 9. Ilustrasi kurva ketinggian dan kurva kendala

Contoh 2.

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ pada elips yang merupakan tabung $x^2 + y^2 = 2$ dan bidang $y + z = 1$. Perhatikan gambar 10 dan 11 berikut.



Gambar 10. Ilustrasi tabung dan bidang.



Gambar 11. Ilustrasi fungsi $f(x, y, z)$

Kita akan memaksimumkan fungsi $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ dengan fungsi kendalanya adalah $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ dan $h(x, y, z) = y + z - 1 = 0$.

Gradien yang berpadanan adalah

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + f_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + f_z(x, y, z)\boldsymbol{k} \\ &= \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}\nabla g(x, y, z) &= g_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + g_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + g_z(x, y, z)\boldsymbol{k} \\ &= 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

Serta

$$\begin{aligned}\nabla h(x, y, z) &= h_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + h_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + h_z(x, y, z)\boldsymbol{k} \\ &= \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Kemudian menggunakan definisi metode Lagrange kita harus menghitung

$$\nabla f(\boldsymbol{p}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{p}) + \mu \nabla h(\boldsymbol{p})$$

$$\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} = \lambda(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}) + \mu(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

Jadi,

$$1 = 2\lambda x \tag{7}$$

$$2 = 2\lambda y + \mu \tag{8}$$

$$3 = \mu \tag{9}$$

Dan

$$g(\boldsymbol{p}) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2 = 0 \tag{10}$$

Dan

$$h(\boldsymbol{p}) = 0$$

$$y + z - 1 = 0$$

$$z = 1 - y \tag{11}$$

Dari persamaan (7) diperoleh

$$x = \frac{1}{2}\lambda \tag{12}$$

Jika persamaan (9) disubstitusikan ke persamaan (8) maka diperoleh

$$2 = 2\lambda y + \mu$$

$$2 = 2\lambda y + 3$$

$$-1 = 2\lambda y$$

$$y = -\frac{1}{2}\lambda \tag{13}$$

Jika persamaan (12) dan (13) disubstitusikan ke persamaan (10) maka diperoleh

$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\lambda\right)^2 - 2 = 0$$

$$\frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 = 2$$

$$\frac{1}{2}\lambda^2 = 2$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = \pm 2$$

Untuk $\lambda = 2$ diperoleh nilai $x = 1$, $y = -1$ dan nilai z dihitung dengan mensubstitusikan $y = -1$ ke persamaan (11) diperoleh $z = 2$. Sehingga diperoleh titik kritisnya adalah $(1, -1, 2)$.

Untuk $\lambda = -2$ diperoleh nilai $x = -1$, $y = 1$ dan nilai z dihitung dengan mensubstitusikan $y = 1$ ke persamaan (11) diperoleh $z = 0$. Sehingga diperoleh titik kritisnya adalah $(-1, 1, 0)$.

Dari masing-masing titik kritis dicari nilai dari $f(x, y, z)$ nya sehingga diperoleh :

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

$$f(1, -1, 2) = 1 + 2(-1) + 3(2)$$

$$f(1, -1, 2) = 5$$

Dan

$$f(-1, 1, 0) = -1 + 2(1) + 3(0)$$

$$f(-1, 1, 0) = 1$$

Jadi dapat disimpulkan nilai maksimum dari fungsi f adalah 5 dan nilai minimumnya adalah 1.