



**MODUL 1  
(CTI212)**

**MODUL 1  
REVIEW KALKULUS 1**

Universitas  
**Esa Unggul**

**DISUSUN OLEH  
SURYANI, M.Si**

**UNIVERSITAS ESA UNGGUL  
2020**

# REVIEW KALKULUS 1

## Kemampuan Akhir Yang Diharapkan

Setelah mempelajari modul 1 ini, diharapkan mahasiswa mampu :

1. Memahami dan menyelesaikan soal turunan fungsi aljabar
2. Memahami dan menyelesaikan soal turunan fungsi trigonometri
3. Memahami dan menyelesaikan soal turunan fungsi eksponensial
4. Memahami dan menyelesaikan soal turunan fungsi logaritma
5. Memahami dan menyelesaikan soal turunan fungsi implisit
6. Memahami dan menyelesaikan soal turunan fungsi parametrik
7. Memahami dan menyelesaikan soal integral fungsi aljabar
8. Memahami dan menyelesaikan soal integral fungsi trigonometri
9. Memahami dan menyelesaikan soal integral fungsi eksponensial
10. Memahami dan menyelesaikan soal integral fungsi logaritma

## TURUNAN

Definisi turunan.

Misalkan fungsi  $f$  terdefinisi pada selang terbuka  $I$  yang memuat  $c$ . Turunan pertama (disingkat turunan) dari fungsi  $f$ , ditulis  $f'(c)$  didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit itu ada.

Dengan penggantian  $x = c + h$ , yang mengakibatkan  $x \rightarrow c \leftrightarrow h \rightarrow 0$  dan  $x - c = h$ , turunan fungsi  $f$  di  $c$  dapat dituliskan dalam bentuk

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Jika nilai limitnya ada, kita katakan  $f'(c)$  ada, dan fungsi  $f$  terdiferensialkan di  $c$ .

Notasi turunan :

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}y, D_x y, y', f'(x), \frac{d}{dx}f(x)$$

## ATURAN TURUNAN DENGAN SATU VARIABEL BEBAS

1. Aturan fungsi konstanta

$$f(x) = k \rightarrow \frac{df}{dx} = 0$$

2. Aturan fungsi identitas

$$f(x) = x \rightarrow \frac{df}{dx} = 1$$

3. Aturan pangkat

$$f(x) = x^n \rightarrow \frac{df}{dx} = nx^{n-1}$$

4. Aturan kelipatan konstanta

$$\frac{d}{dx}(k \cdot f(x)) = k \cdot \frac{df}{dx}$$

5. Aturan jumlah dan selisih

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

6. Aturan hasil kali

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))$$

7. Aturan Hasil bagi

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))}{g^2(x)}$$

8. Aturan Rantai

Misalkan  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$ . Jika  $g$  terdifferensialkan di  $x$  dan  $f$  terdifferensialkan di  $u$ , maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

## TURUNAN FUNGSI ALJABAR

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1.  $y = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 100$

2.  $y = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^3}$

3.  $y = (x^3 + x)^8$

4.  $y = (x + 1)(x - 1)^{10}$

5.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$

Penyelesaian.

Nomor 1.

$$y = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 100$$
$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 8x - 3$$

Nomor 2.

$$y = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^3}$$
$$= x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-3}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 9x^{-4}$$

Nomor 3.

$$y = (x^3 + x)^8$$

Misal: Universitas

$$u = x^3 + x$$

$$y = u^8$$

maka

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 8u^7 (3x^2 + 1) \\ &= 8(x^3 + x)^7 (3x^2 + 1) \\ &= (24x^2 + 8)(x^3 + x)^7\end{aligned}$$

Nomor 4.

$$y = (x + 1)(x - 1)^{10}$$

Misal.

$$u = x + 1$$

$$v = (x - 1)^{10}$$

Maka

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= u'v + uv' \\ &= \frac{d}{dx}(x + 1)(x - 1)^{10} + (x + 1)\frac{d}{dx}(x - 1)^{10} \\ &= 1(x - 1)^{10} + (x + 1)10(x - 1)^9 \frac{d}{dx}(x - 1) \\ &= (x - 1)^{10} + 10(x + 1)(x - 1)^9 \cdot 1 \\ &= (x - 1)^{10} + 10(x + 1)(x - 1)^9\end{aligned}$$

Nomor 5.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$$

Misal.

$$u = x^2 - 1$$

$$v = x^3 + x$$

Maka

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 1)(x^3 + x) + (x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 + x)}{(x^3 + x)^2} \\ &= \frac{2x(x^3 + x) + (x^2 - 1)(3x^2 + 1)}{(x^3 + x)^2}\end{aligned}$$

## TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Rumus turunan fungsi trigonometri.

- |                 |                                  |
|-----------------|----------------------------------|
| 1. $y = \sin x$ | $\frac{dy}{dx} = \cos x$         |
| 2. $y = \cos x$ | $\frac{dy}{dx} = -\sin x$        |
| 3. $y = \tan x$ | $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$       |
| 4. $y = \sec x$ | $\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$  |
| 5. $y = \csc x$ | $\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$ |
| 6. $y = \cot x$ | $\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$      |

Contoh.

Tentukan turunan pertama dari

1.  $y = 2 \sin 2x + 3 \cos 5x$
2.  $y = \sin^2 x$
3.  $y = \cos^3 2x$

Penyelesaian.

Nomor 1.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2 \cos 2x \frac{d}{dx}(2x) + 3(-\sin 5x) \frac{d}{dx}(5x) \\ &= 2 \cos 2x \cdot 2 - 3 \sin 5x \cdot 5 \\ &= 4 \cos 2x - 15 \sin 5x\end{aligned}$$

Nomor 2.

Dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\sin^2 x) \frac{d}{dx}(\sin x) \frac{d}{dx}(x) \\ &= 2 \sin x \cos x \cdot 1 \\ &= \sin 2x\end{aligned}$$

Ingat rumus:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Nomor 3.

Dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^3 2x) \frac{d}{dx}(\cos 2x) \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 3 \cos^2 2x (-\sin 2x) 2$$

$$= -6 \cos^2 2x \sin 2x$$

## TURUNAN FUNGSI EKSPONENSIAL

### Fungsi Eksponensial

$$1. y = e^{f(t)} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} \cdot e^{f(t)}$$

$$2. y = b^{f(t)} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} \cdot b^{f(t)} \ln b$$

Contoh.

Tentukan turunan pertama dari:

$$1. y = \frac{e^{x^2}}{x}$$

$$2. y = xe^{2x}$$

Penyelesaian.

Nomor 1.

Misal

$$u = e^{x^2} \text{ maka } \frac{du}{dx} = 2x e^{x^2}$$

$$v = x \text{ maka } \frac{dv}{dx} = 1$$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} v - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{2x e^{x^2} x - e^{x^2} 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 e^{x^2} - e^{x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{e^{x^2} (2x^2 - 1)}{x^2}$$

Nomor 2.

Misal.

$$u = x \text{ maka } \frac{du}{dx} = 1$$

$$v = e^{2x} \text{ maka } \frac{dv}{dx} = 2e^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot e^{2x} + x2e^{2x} \\
 &= e^{2x} + 2xe^{2x} \\
 &= e^{2x}(1 + 2x)
 \end{aligned}$$

## TURUNAN FUNGSI LOGARITMA

Fungsi logaritma

$$\begin{aligned}
 1. \quad y &= \ln f(t) \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{df}{dt}}{f(t)} \\
 2. \quad y &= \log_b f(t) \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{df}{dt}}{f(t)} \cdot \frac{1}{\ln b}
 \end{aligned}$$

Contoh.

Tentukan turunan pertama dari

$$\begin{aligned}
 1. \quad y &= \ln(x^3 + 3x - 4) \\
 2. \quad y &= \log_2(3x + 1)
 \end{aligned}$$

Penyelesaian.

$$\begin{aligned}
 1. \quad y &= \ln(x^3 + 3x - 4) \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 4} \\
 2. \quad y &= \log_2(3x + 1) \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{3}{3x + 1} \cdot \frac{1}{\ln 2}
 \end{aligned}$$

## TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

Contoh fungsi implisit:

$$y^3 + 7y = x^3$$

Contoh:

Tentukan turunan pertama dari:

$$4x^2y - 3y = x^3 - 1$$

Penyelesaian.

$4x^2y - 3y = x^3 - 1$  diturunkan terhadap variabel  $x$

$$\begin{aligned}
 8xy - 4x^2 \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\
 4x^2 \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} &= 8xy - 3x^2
 \end{aligned}$$



$$(4x^2 + 3) \frac{dy}{dx} = 8xy - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8xy - 3x^2}{4x^2 + 3}$$

### TURUNAN FUNGI PARAMETRIK.

Misalkan  $x = f(t)$  dan  $y = g(t)$

Turunan pertama dari  $y$  terhadap  $x$  adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$$

Contoh:

Diketahui  $x(t) = 3t^3 + 2t - 1$  dan  $y(t) = 2t - 1$ .

Tentukan  $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian.

$x(t) = 3t^3 + 2t - 1$  maka  $\frac{dx}{dt} = 9t^2 + 2$

$y(t) = 2t - 1$  maka  $\frac{dy}{dt} = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$$

$$= 2 : (9t^2 + 2)$$

$$= \frac{2}{(9t^2 + 2)}$$

## INTEGRAL

### ATURAN INTEGRAL

Misalkan  $k$  adalah konstanta dan  $u(x)$  dan  $v(x)$  adalah fungsi dalam  $x$ , maka:

1.  $\int k dx = kx + c$
2.  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
3.  $\int k u(x) dx = k \int u(x) dx$
4.  $\int (u(x) \pm v(x)) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx$
5. Aturan Substitusi :  $\int (u(x))^n u'(x) dx = \int \frac{1}{n+1} (u(x))^{n+1}$
6. Aturan Parsial :  $\int u dv = uv - \int v du$
7.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
8.  $\int e^x dx = e^x + c$

### INTEGRAL FUNGSI ALJABAR

Contoh.

1.  $\int x dx$
2.  $\int x^4 dx$
3.  $\int x^{\frac{3}{2}} dx$
4.  $\int \frac{1}{x^5} dx$
5.  $\int \sqrt{x} dx$
6.  $\int (x^3 + 2x^2 + 6x - 10) dx$
7.  $\int (2x - 1)(x + 1) dx$
8.  $\int (2x^2 - 5x + 1)^3 (4x - 5) dx$
9.  $\int 10x^4 (4x^5 - 1)^3 dx$
10.  $\int x e^{2x-1} dx$

Penyelesaian.

Nomor 1.

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Nomor 2.

$$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + c$$

Nomor 3.

$$\begin{aligned}\int x^{\frac{3}{2}} dx &= \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + c \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c\end{aligned}$$

Nomor 4.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^5} dx &= \int x^{-5} dx \\ &= \frac{1}{-4} x^{-4} + c\end{aligned}$$

Nomor 5.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c\end{aligned}$$

Nomor 6.

$$\begin{aligned}\int (x^3 + 2x^2 + 6x - 10) dx &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x + c \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 10x + c\end{aligned}$$

Nomor 7.

$$\begin{aligned}\int (2x - 1)(x + 1) dx &= \int (2x^2 + x - 1) dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c\end{aligned}$$

Nomor 8.

$$\int (2x^2 - 5x + 1)^3 (4x - 5) dx$$

Cara menyelesaikan soal ini dengan menggunakan aturan substitusi.

Misal:

$u = 2x^2 - 5x + 1$  maka

$$\frac{du}{dx} = 4x - 5 \rightarrow dx = \frac{du}{4x-5}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\int (2x^2 - 5x + 1)^3 (4x - 5) dx &= \int u^3 (4x - 5) \frac{du}{4x - 5} \\ &= \int u^3 du \\ &= \frac{1}{4} u^4 + c \\ &= \frac{1}{4} (2x^2 - 5x + 1)^4 + c\end{aligned}$$

Nomor 9.

$$\int 10x^4 (4x^5 - 1)^3 dx$$

Cara menyelesaikan soal ini dengan menggunakan aturan substitusi.

Misal:

$u = 4x^5 - 1$  maka

$$\frac{du}{dx} = 20x^4 \rightarrow dx = \frac{du}{20x^4}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\int 10x^4 (4x^5 - 1)^3 dx &= \int 10x^4 u^3 \frac{du}{20x^4} \\ &= \int \frac{1}{2} u^3 du \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4} u^4 + c \\ &= \frac{1}{8} (4x^5 - 1)^4 + c\end{aligned}$$

Nomor 10.

$$\int x e^{2x-1} dx$$

Cara menyelesaikan soal ini dengan menggunakan aturan parsial.

Misal:

$$u = x \longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 \rightarrow dx = du$$

$$dv = e^{2x-1} dx \longrightarrow \int dv = \int e^{2x-1} dx$$

$$v = \frac{1}{2} e^{2x-1}$$

$$\int x e^{2x-1} dx = uv - \int v du$$

$$= x \frac{1}{2} e^{2x-1} - \int \frac{1}{2} e^{2x-1} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x-1} + c$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x-1} - \frac{1}{4} e^{2x-1} + c$$

## INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI

Rumus-rumus dasar fungsi trigonometri.

1.  $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
2.  $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
3.  $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$
4.  $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$
5.  $\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$
6.  $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$
7.  $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$
8.  $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
9.  $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
10.  $\int \cot x \csc x \, dx = -\csc x + c$
11.  $\int a \sin bx \, dx = -\frac{a}{b} \cos bx + c$
12.  $\int a \cos bx \, dx = \frac{a}{b} \sin bx + c$

Contoh.

Hitunglah.

1.  $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$
2.  $\int \sin^2 x \, dx$
3.  $\int x \cos(1 + x^2) \, dx$

Penyelesaian.

Nomor 1.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \tan x \sec x dx \\ &= \sec x + c\end{aligned}$$

Nomor 2.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \int \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sin 2x + c \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c\end{aligned}$$

Nomor 3.

$$\int x \cos(1 + x^2) dx$$

Cara menyelesaikan soal ini dengan menggunakan aturan substitusi.

Misal:

$$u = 1 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Maka

$$\begin{aligned}\int x \cos(1 + x^2) dx &= \int x \cos u \frac{du}{2x} \\ &= \int \frac{1}{2} \cos u du \\ &= \frac{1}{2} \sin u + c \\ &= \frac{1}{2} \sin(1 + x^2)\end{aligned}$$

### LATIHAN SOAL.

Tentukan turunan pertama dari

1.  $y = 7x^3 + 3x^2 + 1$

2.  $y = \left( x^{10} + \sqrt{x^2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} \right)^5$

3.  $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+x}}$

4.  $y = x^2 \sin^4(x^2 - 2)$

5.  $h(x) = \frac{3^x}{3^{x+2}}$

6.  $g(x) = \log_3 \left( \frac{2x+1}{x+1} \right)$

7.  $x(t) = e^{x^2+2x-1}$  dan  $y(t) = (3x+4)^{10}$

8.  $3x^2y^5 - 6x^2 + 5y = 2 - \frac{1}{x}$

Hitunglah.

9.  $\int \left( 4x^7 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \right) dx$

10.  $\int (x+1)^2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right) dx$

11.  $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx$

12.  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Universitas  
**Esa Unggul**

### DAFTAR PUSTAKA.

Purcell, Edwin J, Dale Varberg, Steven E. Rigdon. 2004. Kalkulus, Edisi kedelapan: Jilid 1. Jakarta: Erlangga.

Cipta, Hendra. 2020. Kalkulus Integral. *State Islamic University*. Medan

