KALKULUS 2

(CTI212)

MODUL 5
INTEGRAL LIPAT DUA LANJUTAN

DISUSUN OLEH

SURYANI, M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

INTEGRAL LIPAT DUA

Kemampuan akhir yang diharapkan dengan adanya pembelajaran integral lipat dua ini adalah

1. Mahasiswa dapat memahami dan menentukan batas integral lipat dua pada daerah persegi Panjang.
2. Mahasiswa dapat memahami dan menentukan batas integral lipat dua pada daerah bukan persegi Panjang.

Pada modul 4, sudah dijelaskan bagaimana Teknik menghitung integral lipat dua. Pada modul ini, dibahas lebih mendetail lagi bagaimana caranya menentukan batas integrasi dari suatu daerah baik daerahnya persegi panjang atau bukan persegi panjang.

Untuk dapat memahami materi ini, kalian harus memahami bagaimana caranya untuk dapat menggambar suatu garis, parabola, lingkaran, ellips dan lain sebagaimana. Kemudian bagaimana caranya menentukan titik potong antara kurva dan kurva. pada contoh soal yang diberikan hanya beberapa kasus dari banyak kasus yang ada.

INTEGRAL LIPAT DUA PADA DAERAH PERSEGI PANJANG

Contoh.

Hitunglah integral lipat dua yang diberikan atas daerah R. yaitu

$$\iint_R (x^2 + y^2)dA; R = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

Penyelesaian.

Dari soal dapat diketahui bahwa batas integral untuk variabel bebas x adalah -1 sampai 1 dan batas integral untuk variabel y adalah 0 sampai 2, sehingga diperoleh

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{3}x^3 + y^2 x \right]_{-1}^1 dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{3} + y^2 - \left(-\frac{1}{3} - y^2 \right) \right] dy$$

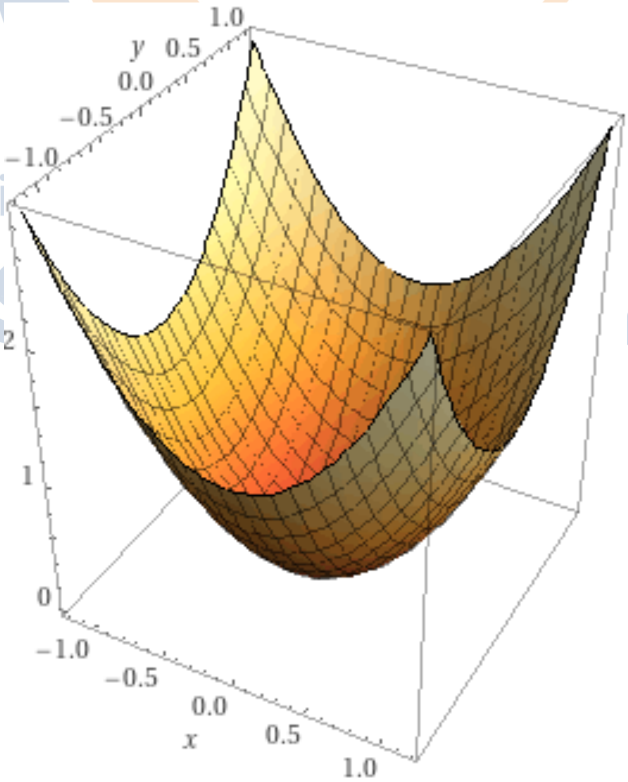
$$= \int_0^2 \left(2y^2 + \frac{2}{3} \right) dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{3}y \right]_0^2$$

$$= \frac{2}{3}2^3 + \frac{2}{3}2 - (0 + 0)$$

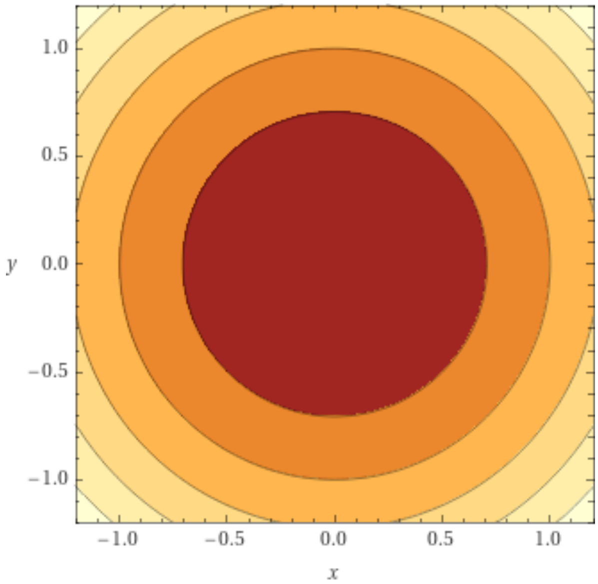
$$= \frac{20}{3}$$

Jika fungsi dari $z = x^2 + y^2$ digambarkan dalam koordinat kartesius, maka diperoleh



Gambar 1. Kurva dari fungsi $z = x^2 + y^2$

Dengan *contour* plotnya adalah



Gambar 2. *Contour* dari fungsi $z = x^2 + y^2$

INTEGRAL LIPAT DUA PADA DAERAH BUKAN PERSEGI PANJANG

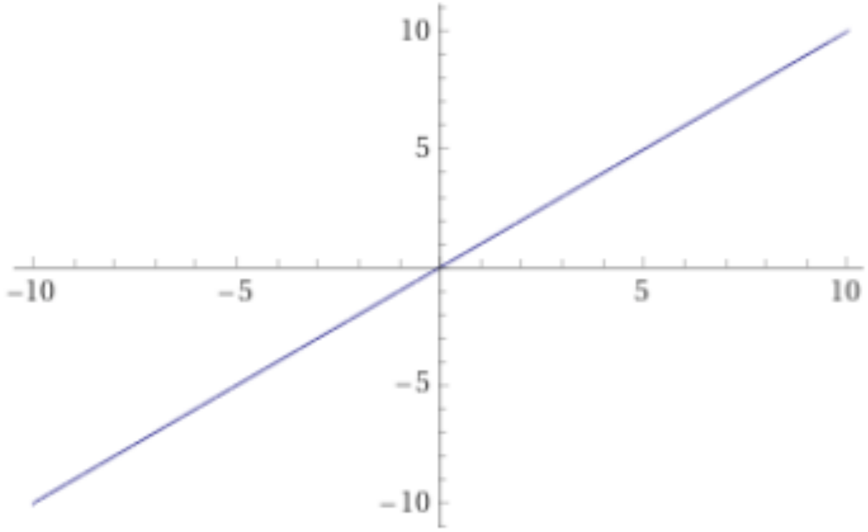
Contoh.

Hitunglah integral lipat dua yang diberikan atas daerah R. yaitu

$\iint_R (x^2 - xy)dA; R$ adalah daerah antara garis $y = x$ dan kurva $y = 3x - x^2$

Penyelesaian.

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menggambarkan daerah antara garis dan kurva.



Gambar 3. Grafik dari garis $y = x$

Untuk menggambarkan suatu kurva dari fungsi kuadrat, pertama dicari terlebih dahulu titik potong terhadap sumbu x dan titik potong terhadap sumbu y.

Perpotongan dengan sumbu x terjadi jika nilai $y = 0$, sehingga diperoleh

$$3x - x^2 = 0$$

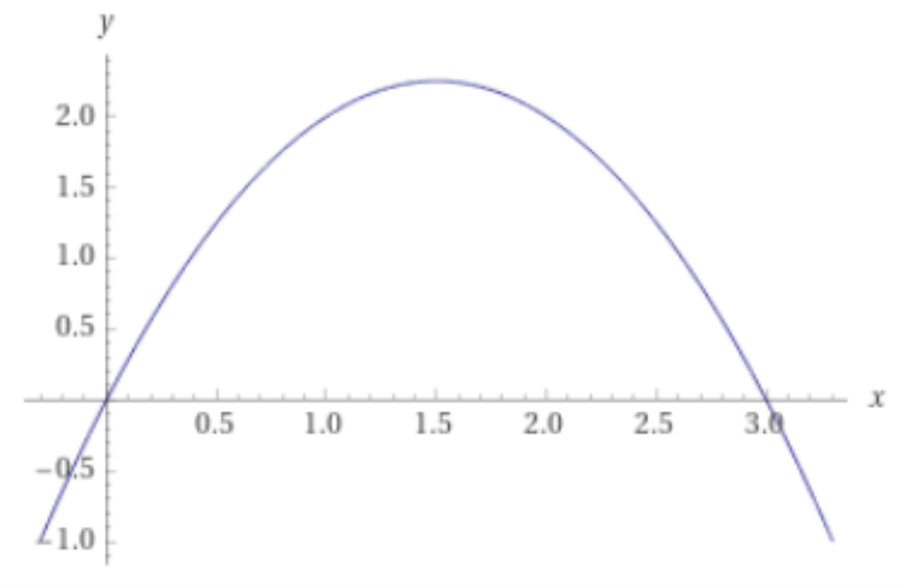
$$x(3 - x) = 0$$

$$x = 0,\ x = 3$$

Jadi kurva akan memotong sumbu x di titik $(0,0)$ dan $(3,0)$. Sedangkan perpotongan dengan sumbu y terjadi jika nilai dari $x = 0$, sehingga

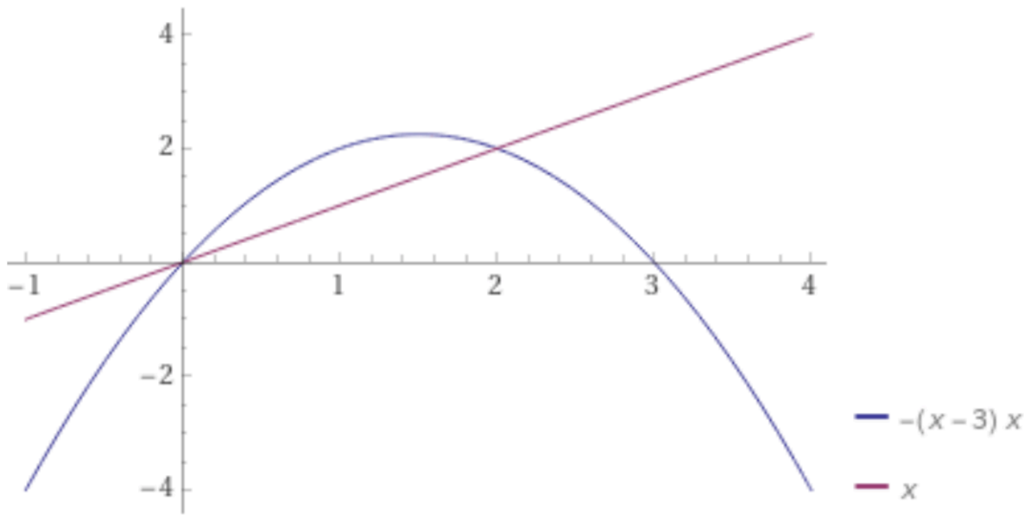
$$y = 3x - x^2 = 3(0) - 0^2 = 0$$

Kurva akan memotong sumbu y di titik $(0,0)$. Langkah selanjutnya menentukan terbukanya kurva. Jika koefisien dari x^2 positif maka kurva terbuka ke bawah dan sebaliknya. Pada fungsi kuadrat $y = 3x - x^2$, kita mempunyai nilai dari koefisien x^2 adalah -1, sehingga kurva terbuka ke bawah. Sehingga grafik dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4. Grafik dari garis $y = 3x - x^2$

Jika Gambar 3 dan gambar 4 digabung, maka diperoleh



Gambar 5. Grafik gabungan dari $y = x$ dan $y = 3x - x^2$

Selanjutnya, jika dari gambar belum diketahui dengan pasti titik potong antara garis dan parabola, maka sebaiknya dicari secara manual dengan cara substitusi.

$$y = y$$
$$x = 3x - x^2$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x - 2) = 0$$
$$x = 0, x = 2$$

Jadi titik potong antara garis dan parabola adalah $(0,0)$ dan $(2,2)$.

Dari Gambar 5 dapat diketahui bahwa batas atas untuk variabel bebas x adalah 2 dan batas bawahnya adalah 0. Sedangkan batas atas untuk variabel bebas y adalah fungsi $y = 3x - x^2$ sedangkan batas bawahnya adalah fungsi $y = x$. Sehingga kita dapat menghitung nilai dari

$$\iint_R (x^2 - xy)dA = \int_0^2 \int_{y=x}^{y=3x-x^2} (x^2 - xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y - \frac{1}{2}xy^2\right]_x^{3x-x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2(3x - x^2) - \frac{1}{2}x(3x - x^2)^2 - \left(x^2 x - \frac{1}{2}x\, x^2\right)\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2(3x - x^2) - \frac{1}{2}x(3x - x^2)^2 - \left(x^2 x - \frac{1}{2}x\, x^2\right)\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[3x^3 - x^4 - \frac{1}{2}x(9x^2 - 6x^3 + x^4) - x^3 + \frac{1}{2}x^3\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[3x^3 - x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^3\right] dx$$

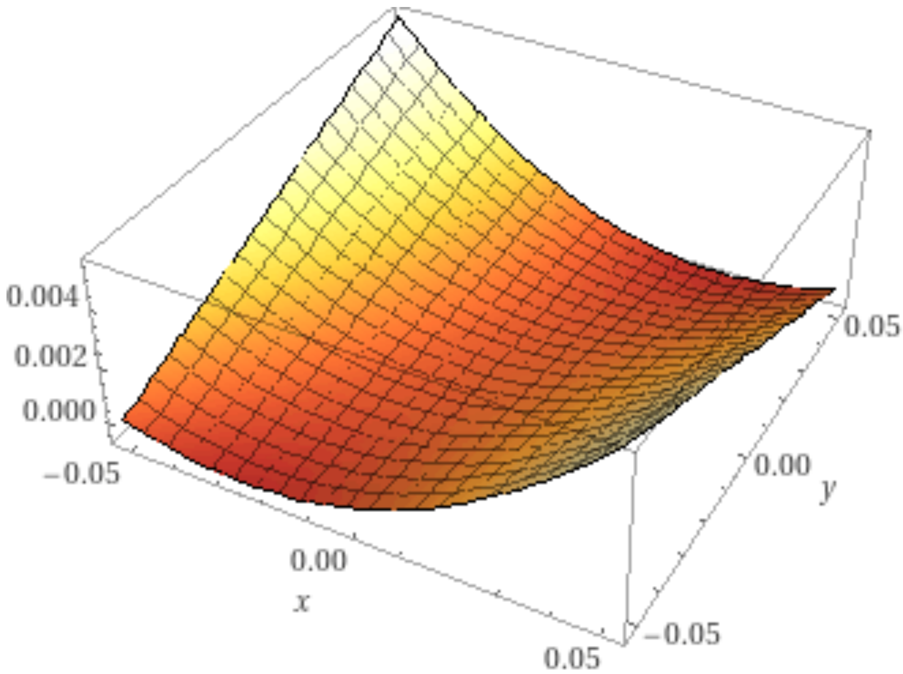
$$= \int_0^2 \left[-\frac{1}{2}x^5 + 2x^4 - 2x^3\right] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{12}2^6 + \frac{2}{5}2^5 - \frac{1}{2}2^4 - 0$$

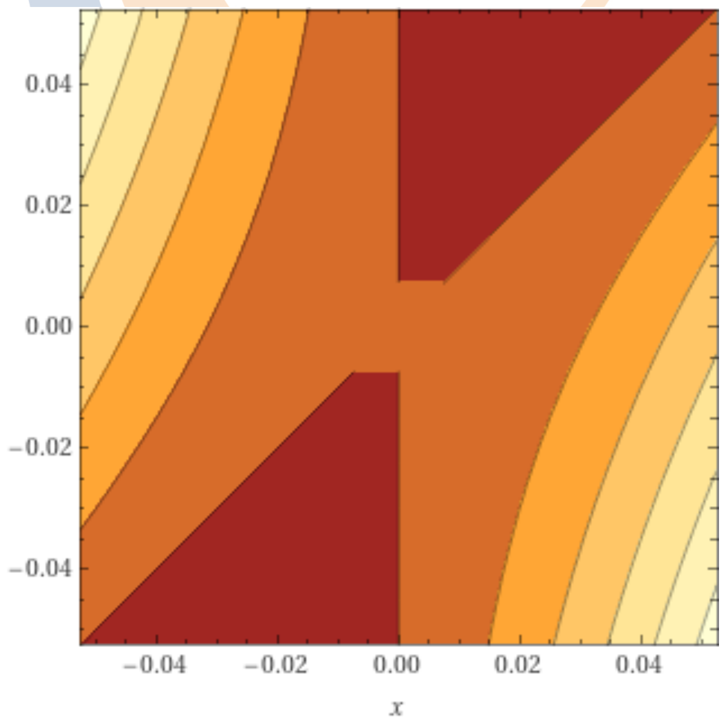
$$= \frac{8}{15}$$

Jika fungsi dari $z = x^2 - xy$ digambarkan dalam koordinat kartesius, maka diperoleh



Gambar 6. Kurva dari fungsi $z = x^2 - xy$

Dengan *contour* plotnya adalah



Gambar 7. *Contour plot* dari fungsi $z = x^2 - xy$

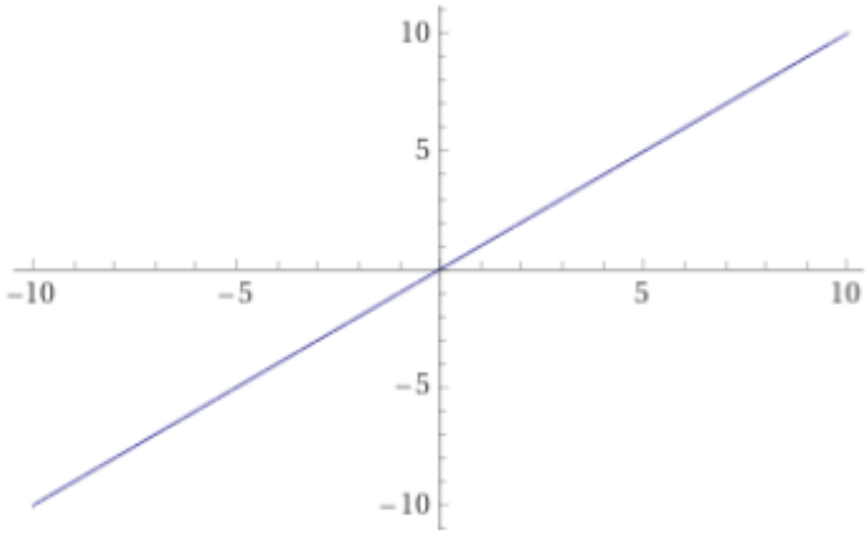
Contoh.

Hitunglah integral lipat dua yang diberikan atas daerah R. yaitu

$\iint_R \ 8xydA; R$ adalah daerah yang dibatasi oleh $y = x$, $x^2 + y^2 = 16$ dan sumbu x di kuadran 1.

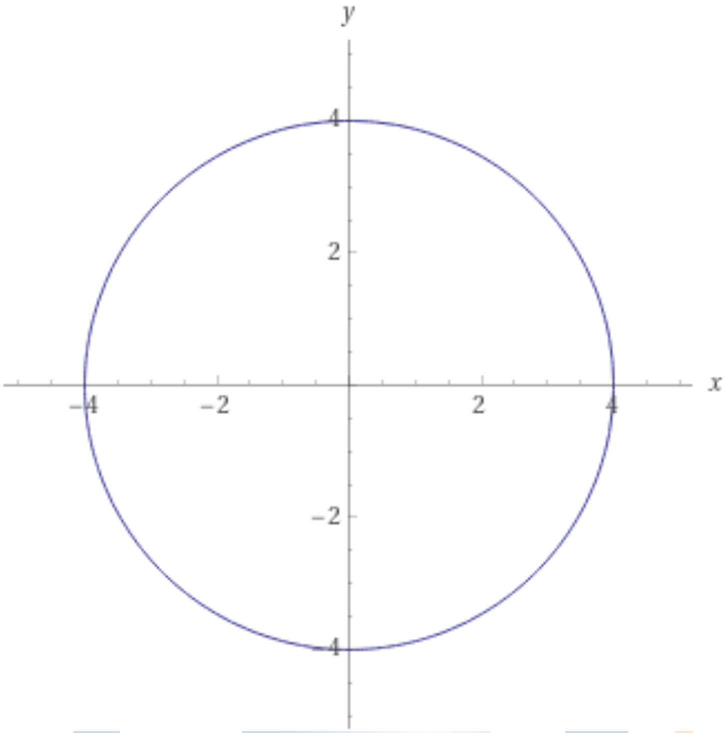
Penyelesaian.

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menggambarkan daerah antara garis dan kurva.



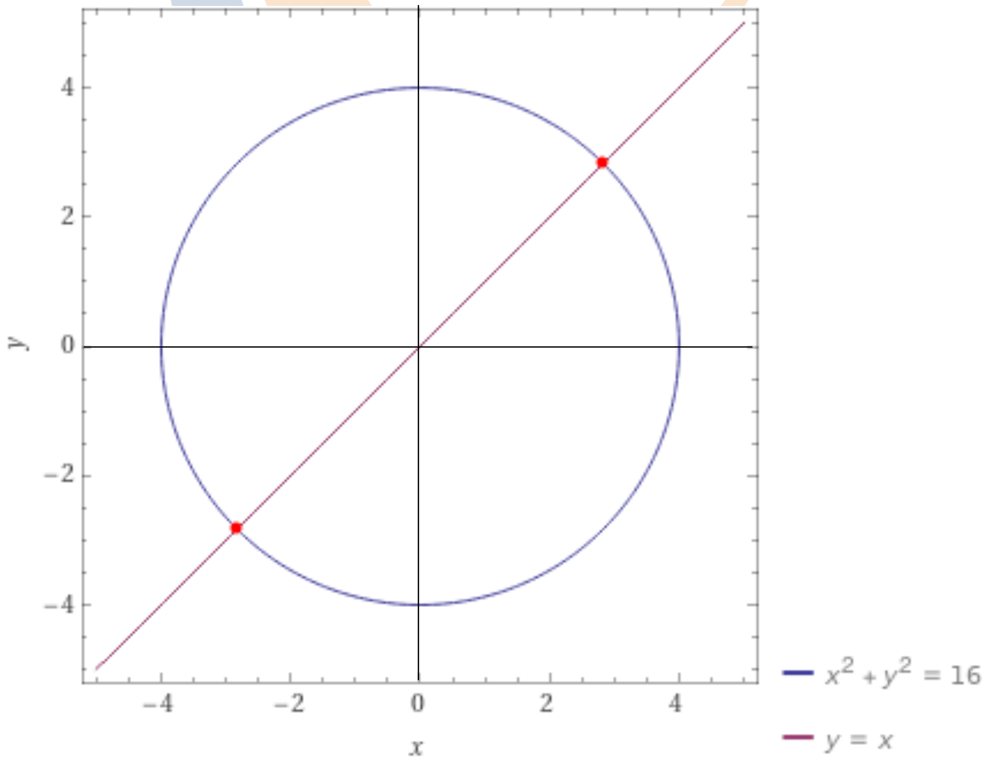
Gambar 8. Grafik dari garis $y = x$

Fungsi $x^2 + y^2 = 16$ merupakan lingkaran dengan pusat lingkarannya adalah $(0,0)$ dan jari-jarinya 4. Sehingga diperoleh grafiknya sebagai berikut.



Gambar 9. Grafik dari $x^2 + y^2 = 16$

Jika Gambar 8 dan gambar 9 digabung, maka diperoleh



Gambar 10. Grafik gabungan dari $y = x$ dan $x^2 + y^2 = 16$

Selanjutnya, jika dari gambar belum diketahui dengan pasti titik potong antara garis dan parabola, maka sebaiknya dicari secara manual dengan cara substitusi.

$$y = y$$

$$x = \sqrt{16 - x^2}$$

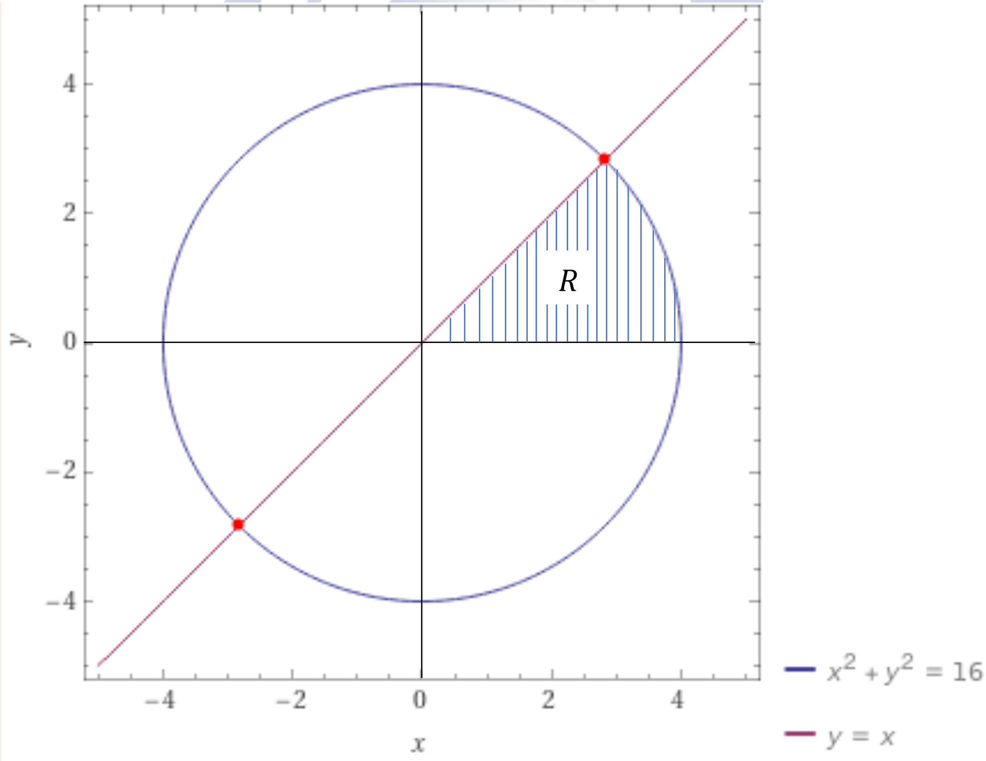
$$x^2 = 16 - x^2$$

$$2x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

Jadi titik potong antara garis dan parabola adalah $(-\sqrt{8}, -\sqrt{8})$ dan $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$.

Pada soal ini daerahnya dibatasi hanya pada kuadran 1 dan dibatasi oleh sumbu x. Sehingga daerah yang akan kita cari adalah daerah yang diarsir berikut.



Gambar 11. Daerah R

Pada soal ini, daerah Dari Gambar 11 dapat diketahui bahwa batas atas untuk variabel bebas y adalah $\sqrt{8}$ dan batas bawahnya adalah 0. Sedangkan batas atas untuk variabel bebas x adalah fungsi $x = \sqrt{16 - y^2}$ sedangkan batas bawahnya adalah fungsi $y = x$. Sehingga kita dapat menghitung nilai dari

$$\iint_R 8xydA = \int_0^{\sqrt{8}} \int_{x=y}^{x=\sqrt{16-y^2}} 8xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{8}} \int_{x=y}^{x=\sqrt{16-y^2}} 8xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{8}} [4x^2y]_y^{\sqrt{16-y^2}}\,dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{8}} \left[4\left(\left(\sqrt{16-y^2}\right)^2 - y^2\right)y\right]dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{8}} [4(16 - y^2 - y^2)y]\,dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{8}} 4(16y - 2y^3)\,dy$$

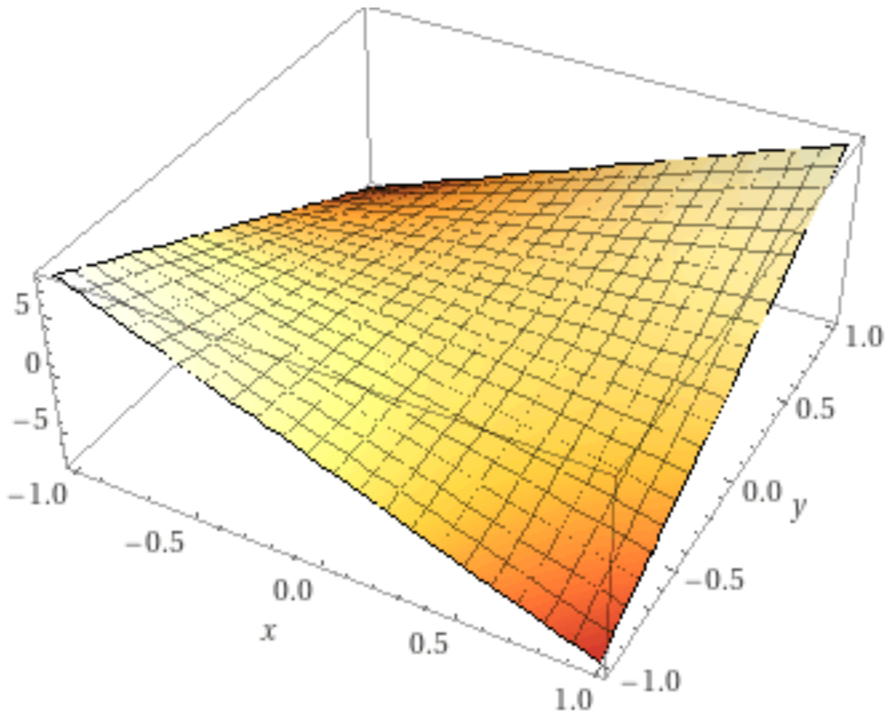
$$= 4\left[8y^2 - \frac{1}{2}y^4\right]_0^{\sqrt{8}}$$

$$= 4\left[8(\sqrt{8})^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{8})^4 - 0\right]$$

$$= 4[64 - 32]$$

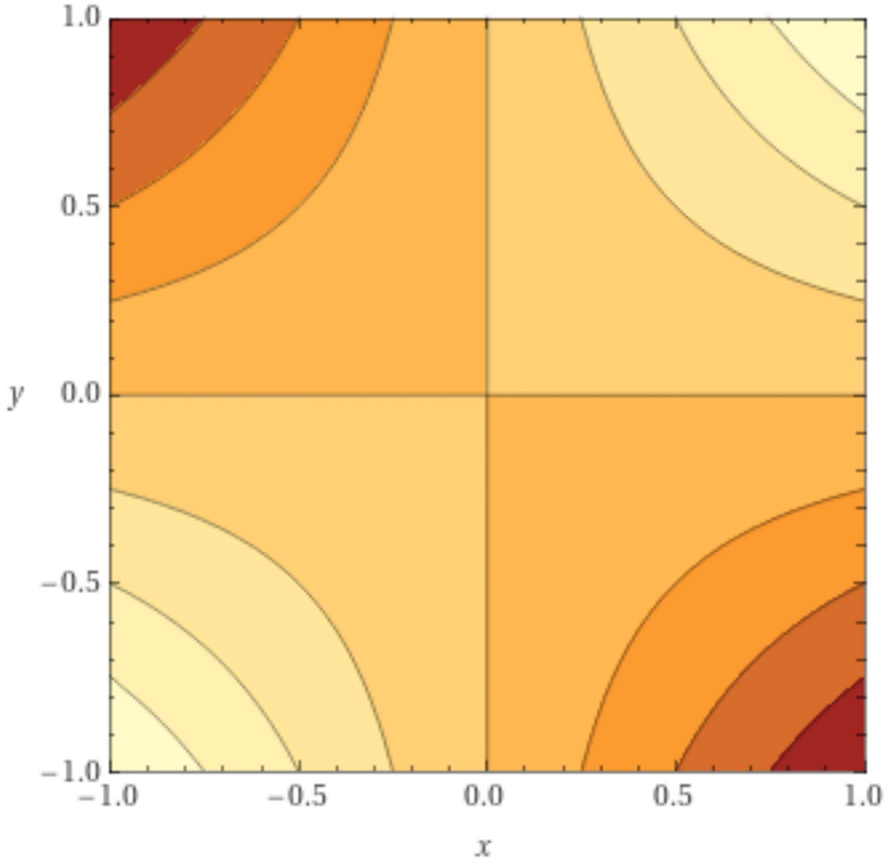
$$= 128$$

Jika fungsi dari $z = 8xy$ digambarkan dalam koordinat kartesius, maka diperoleh



Gambar 12. Kurva dari fungsi $y = 8xy$

Dengan contour plotnya sebagai berikut.



Gambar 12. *Contour* plot dari fungsi $y = 8xy$

Contoh.

Hitunglah

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\, dy\, dx$$

Penyelesaian.

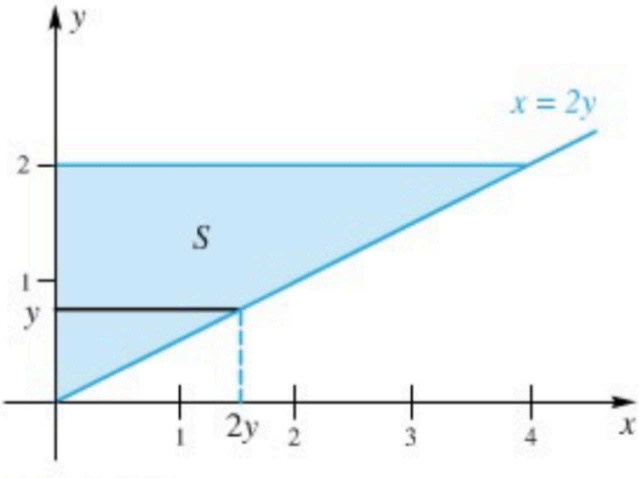
Pada dasarnya kita tidak dapat menghitung integral dari e^{y^2}. Tetapi bentuk dari $\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\, dy\, dx$ sama dengan bentuk

$$\iint_S e^{y^2}\, dA$$

Dimana

$$S = \left\{(x, y): \frac{x}{2} \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4\right\}$$
$$= \{(x, y): 0 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan Gambar 13 berikut.



Gambar 13. Ilustrasi daerah S.

Dari Gambar 13, dapat diketahui bahwa batas atas dari variabel bebas y adalah 2 dan batas bawahnya 0, sedangkan untuk batas atas dari variabel x adalah $x = 2y$ dan batas bawahnya $x = 0$. Sehingga kita meghitung nilai dari integral $\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\, dy\, dx$.

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2y} e^{y^2}\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(e^{y^2} x \right)_0^{2y} dy$$

$$= \int_0^2 \left(e^{y^2}(2y - 0) \right) dy$$

$$= \int_0^2 2ye^{y^2}\,dy$$

$$= \int_0^2 2ye^{y^2}\,d(y^2)$$

$$= \left(e^{y^2} \right)_0^2$$

$$= e^{2^2} - e^0$$

$$= e^4 - 1$$

LATIHAN SOAL

Hitunglah

1. $\iint_R xy dA$, dimana R adalah daerah antara $y = x^2$ dan $y = 1$.
2. $\iint_R (x + y) dA$, dimana R adalah daerah segitiga dengan titik-titik sudutnya adalah $(0,0), (0,4)$, and $(1,4)$.
3. $\iint_R (x^2 + 2y) dA$, dimana R adalah daerah antara $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$
4. $\iint_R x\, dA$, dimana R adalah daerah antara $y = x$ dan $y = x^3$.