KALKULUS 2

(CTI212)

MODUL 4

INTEGRAL LIPAT DUA

DISUSUN OLEH

SURYANI, M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

INTEGRAL LIPAT DUA

Kemampuan akhir yang diharapkan dengan adanya pembelajaran integral lipat dua ini adalah

1. Mahasiswa dapat memahami sifat-sifat dari integral lipat dua.
2. Mahasiswa mampu untuk memahami dan menyelesaikan integral lipat dua atas daerah persegi panjang.
3. Mahasiswa mampu untuk memahami dan menyelesaikan integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang.

INTEGRAL LIPAT DUA ATAS DAERAH PERSEGI PANJANG

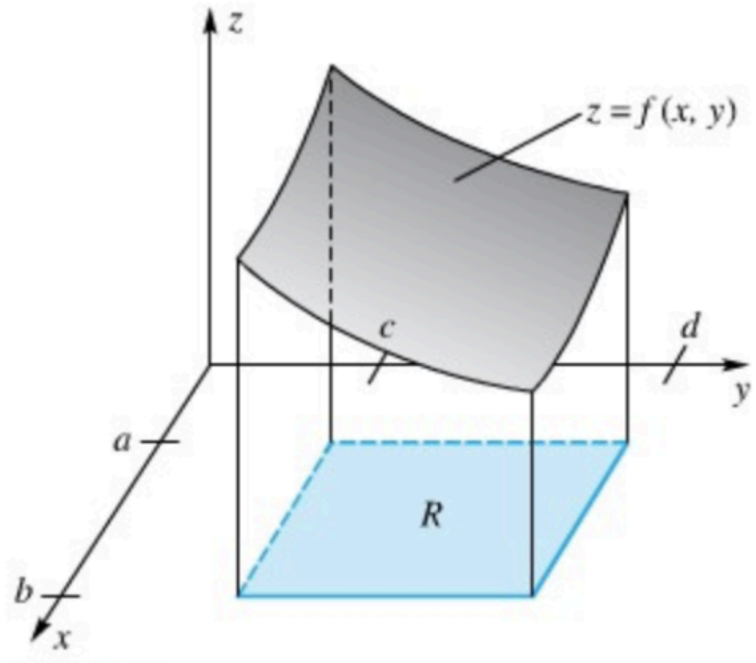
Misalkan diberikan integral lipat dua dari suatu fungsi $f(x, y)$ yaitu

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

dengan R adalah suatu persegi panjang

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq d, c \leq y \leq d\}.$$

Misalkan $f(x, y) \geq 0$ pada R, sehingga dapat dikatakan bahwa integral lipat dua sebagai volume V dari benda pejal dibawah permukaan seperti ilustrasi pada Gambar 1 berikut ini.

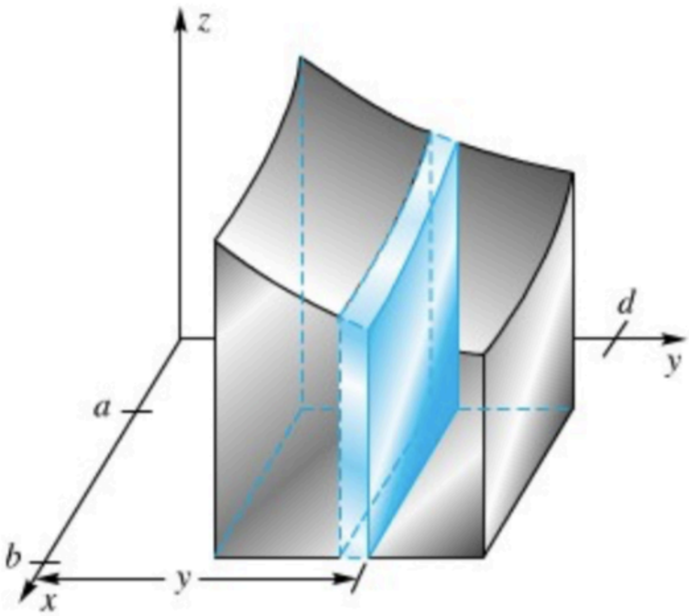


Gambar 1. Ilustrasi benda pejal

Sehingga, volume dari benda pejal tersebut adalah

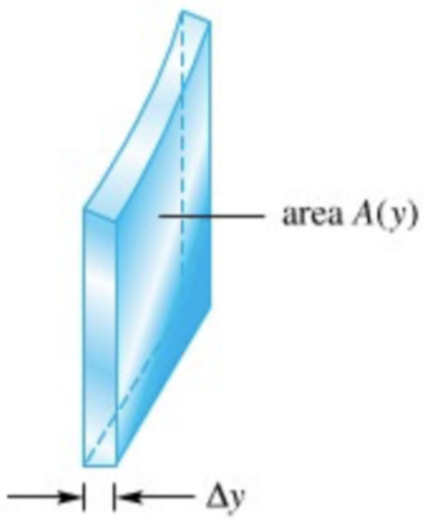
$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Untuk menghitung volume benda pejal pada Gambar 1, dilakukan partisi terhadap benda yang sejajar dengan bidang xz menjadi n partisi. Berikut ilustrasinya.



Gambar 2. Ilustrasi partisi terhadap benda pejal.

Sehingga diperoleh



Gambar 3. Hasil partisi dari dari benda pejal.

Jadi, untuk menghitung luas dari daerah $A(y)$ dengan menggunakan metode Riemann yang pernah dipelajari pada materi sebelumnya di kalkulus 1, yaitu

$$V = \int_c^d A(y)\,dy$$

Di lain pihak, untuk y tetap, $A(y)$ dapat dihitung dengan menggunakan integral tunggal biasa, yaitu

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Sehingga

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

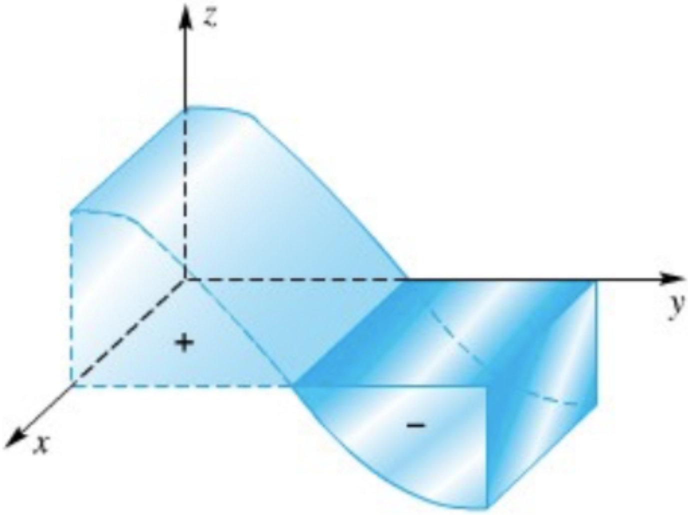
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy.$$

Dengan melakukan hal yang sama, jika partisi dilakukan terhadap benda pejal yang sejajar dengan bidang yz menjadi n partisi, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx.$$

Catatan:

Jika $f(x,y) < 0$ pada bagian R, maka $\iint_R f(x,y)\,dA$ menghasilkan volume bertanda dari benda padat antara permukaan $z = f(x,y)$ dan persegi panjang R dari bidang xy. Berikut diberikan ilustrasinya pada Gambar 4.



Gambar 4. Ilustrasi volume dari benda padat.

Volume sebenarnya dari benda padat ini adalah

$$V = \iint_R |f(x,y)|\, dA$$

Sifat-Sifat Integral Lipat Dua

1. Integral lipat dua adalah linier, yaitu

$$\iint_R kf(x,y)dA = k \iint_R f(x,y)\, dA$$

dan

$$\iint_R (f(x,y) + g(x,y))dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA$$

2. Integral lipat dua aditif pada daerah pesegi panjang

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$

3. Berlaku sifat perbandingan, yaitu jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ maka berlaku

$$\iint_R f(x,y)\, dA \leq \iint_R g(x,y)\, dA$$

Contoh.

Hitunglah nilai dari

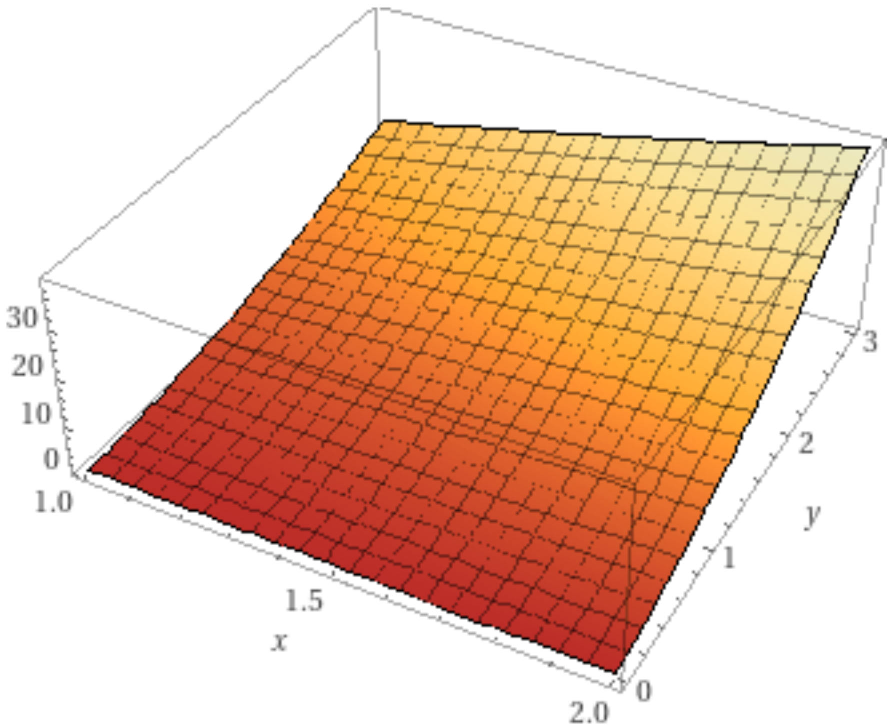
1. $\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y)\, dx\, dy$
2. $\int_0^2 \int_1^3 x^2 y\, dy\, dx$

Penyelesaian.

Nomor 1.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y)\, dx\, dy &= \int_0^3 \left[\int_1^2 (2x + 3y)\, dx\right] dy \\
&= \int_0^3 [x^2 + 3yx]_1^2 \; dy \\
&= \int_0^3 [2^2 + 3y(2) - (1^2 + 3y(1))]\, dy \\
&= \int_0^3 [4 + 6y - (1 + 3y)]\, dy \\
&= \int_0^3 [3y + 3]\, dy \\
&= \left[\frac{3}{2}y^2 + 3y\right]_0^3 \\
&= \frac{3}{2}3^2 + 3(3) - \left(\frac{3}{2}0^2 + 3(0)\right) \\
&= \frac{27}{2} + 9 - (0) \\
&= \frac{27}{2} + 9 - (0) \\
&= \frac{45}{2}
\end{aligned}$$

Ilustrasi untuk contoh soal ini dapat dilihat pada Gambar 5.

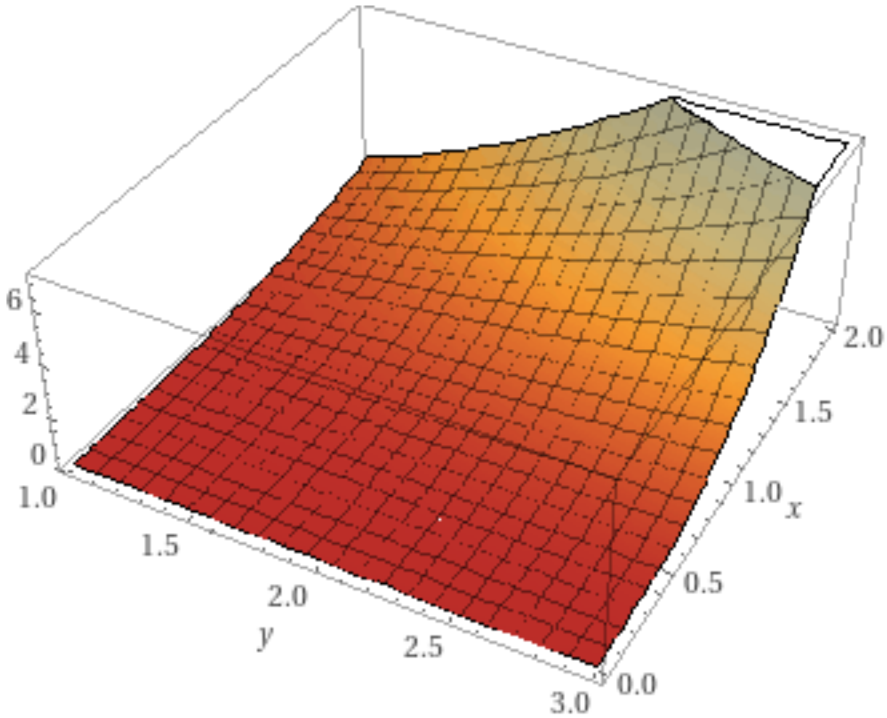


Gambar 5. Ilustrasi contoh soal nomor 1.

Nomor 2.

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \int_1^3 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^2 \left[\int_1^3 x^2 y \, dy \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 \frac{1}{2} y^2 \right]_1^3 dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_1^3 dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 (3^2 - 1^2) \right] dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 (8) \, dx \\
&= \int_0^2 4x^2 \, dx \\
&= \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^2 \\
&= \frac{4}{3} [2^3 - 0^3] \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

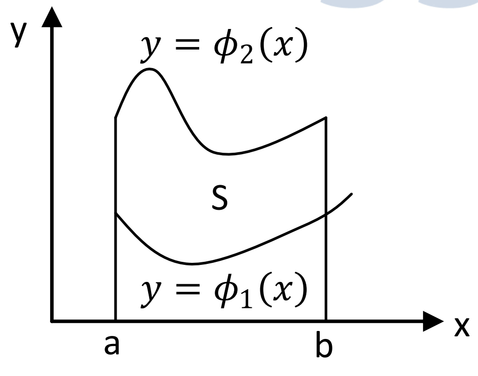
Ilustrasi untuk contoh soal ini dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 6. Ilustrasi contoh soal nomor 2.

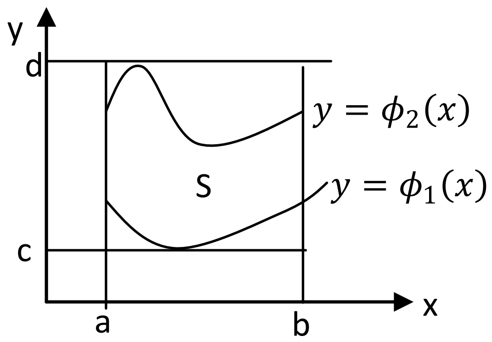
INTEGRAL LIPAT DUA ATAS DAERAH BUKAN PERSEGI PANJANG

Kasus 1.
Misalkan diberikan himpunan $S = \{(x, y): \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b\}$ dan $z = f(x, y)$ seperti diilustrasikan pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Ilustrasi suatu daerah S.

Kita lingkungi S dalam suatu persegi panjang R dan membuat $f(x,y)=0$ diluar S seperti pada Gambar 8 berikut.



Gambar 8. Ilustrasi Persegi Panjang R diluar S.

sehingga

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

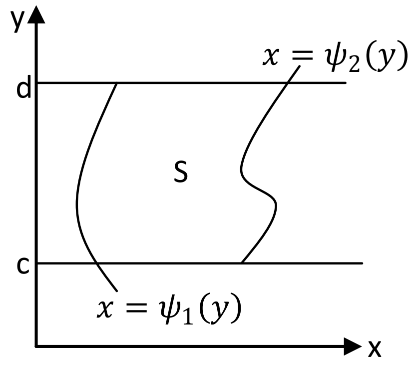
$$= \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

Jadi,

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

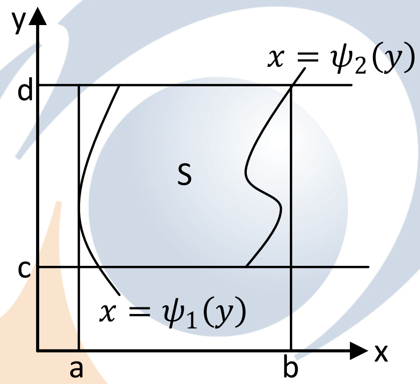
Kasus 2.

Misalkan diberikan himpunan $S=\{(x,y): c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ dan $z=f(x,y)$ seperti diilustrasikan pada Gambar 9 berikut.



Gambar 9. Ilustrasi suatu daerah S.

Kita lingkungi S dalam suatu persegi panjang R dan membuat $f(x,y) = 0$ diluar S seperti pada Gambar 10 berikut.



Gambar 10. Ilustrasi daerah S

sehingga

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

$$= \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Jadi,

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Contoh.

Hitunglah:

3. $\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y)\, dy\, dx$
4. $\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x\, dx\, dy$
5. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x + y)\, dx\, dy$

Penyelesaian.

Nomor 1.

$$\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y)\, dy\, dx = \int_3^5 \left[\int_{-x}^{x^2} (4x + 10y)\, dy \right] dx$$

$$= \int_3^5 [4xy + 5y^2]_{-x}^{x^2}\, dx$$

$$= \int_3^5 [4x(x^2) + 5(x^2)^2 - (4x(-x) + 5(-x)^2)]\, dx$$

$$= \int_3^5 [4x^3 + 5x^4 - (-4x^2 + 5x^2)]\, dx$$

$$= \int_3^5 [4x^3 + 5x^4 - (x^2)]\, dx$$

$$= \int_3^5 [4x^3 + 5x^4 - x^2]\, dx$$

$$= \int_3^5 [5x^4 + 4x^3 - x^2]\, dx$$

$$= \left[x^5 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_3^5$$

$$= 5^5 + 5^4 - \frac{1}{3}5^3 - \left(3^5 + 3^4 - \frac{1}{3}3^3 \right)$$

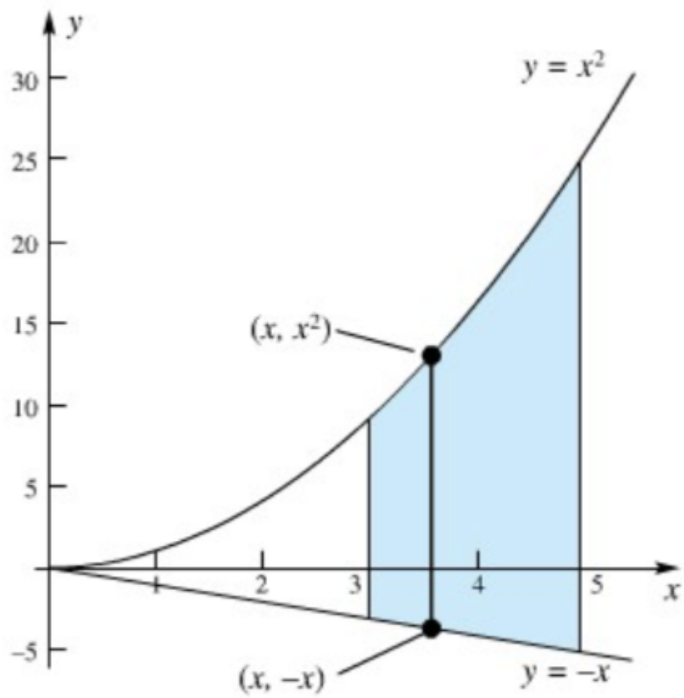
$$= 3125 + 625 - \frac{125}{3} - (243 + 81 - 9)$$

$$= 3750 - \frac{125}{3} - 315$$

$$= 3435 - \frac{125}{3}$$

$$= \frac{10180}{3}$$

Ilustrasi untuk soal nomor 3 diberikan pada Gambar 11 berikut.



Gambar 11. Ilustrasi soal nomor 3.

Nomor 2.

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} 2ye^x \, dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 [2ye^x]_0^{y^2} \, dy$$

$$= \int_0^1 \left[2y\, e^{y^2} - 2ye^0\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[2y\, e^{y^2} - 2y\right] dy$$

$$= \left[e^{y^2} - y^2\right]_0^1$$

$$= e^{1^2} - 1^2 - \left(e^{0^2} - 0^2\right)$$
$$= e - 1 - (1 - 0)$$
$$= e - 1 - 1$$
$$= e - 2$$

Catatan:

$\int 2ye^{y^2}\,dy$ menggunakan integral substitusi.

Misalkan

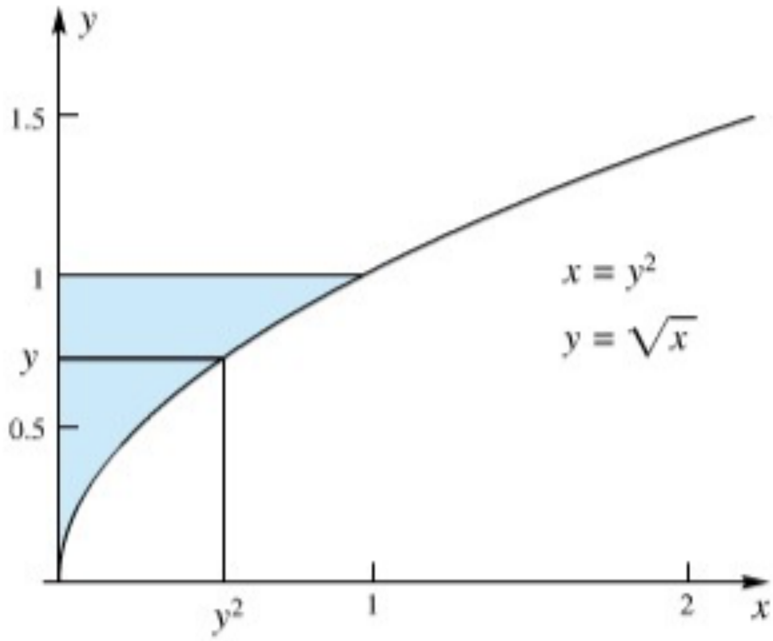
$u = y^2$

$\frac{du}{dy} = 2y\,dy$ maka $dx = \frac{dy}{2y}$

sehingga

$$\int 2ye^{y^2}\,dy = \int 2ye^{u}\frac{du}{2y}$$
$$= \int e^{u}\,du$$
$$= e^{u} + c$$
$$= e^{y^2} + c$$

Ilustrasi untuk soal nomor 4 diberikan pada Gambar 12 berikut.



Gambar 12. Ilustrasi soal nomor 4.

Nomor 5.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right)_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^2 \left(x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 - (0+0) \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}(4-x^2) \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x\sqrt{4-x^2} + 2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + 2x - \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3 \right)_0^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + 2x - \frac{1}{6}x^3 \right)_0^2$$

$$= -\frac{1}{3}(4-2^2)^{\frac{3}{2}} + 2(2) - \frac{1}{6}2^3 - \left(-\frac{1}{3}(4-0^2)^{\frac{3}{2}} + 2(0) - \frac{1}{6}(0)^3 \right)$$

$$= -\frac{1}{3}(4-4)^{\frac{3}{2}} + 4 - \frac{8}{6} - \left(-\frac{1}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + 0 - 0 \right)$$

$$= 0 + 4 - \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= 4 + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{16}{3}$$

Note:

Integral dari

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx$$

Diperoleh dengan menggunakan aturan integral substitusi.

Misal:

$u = 4 - x^2$

$\frac{du}{dx} = -2x$

$dx = \frac{du}{-2x}$

Jadi,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{4-x^2}dx &= \int x\sqrt{u}\frac{du}{-2x} \\ &= \int -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c \\ &= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c \\ &= -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + c\end{aligned}$$

Latihan Soal.

Hitunglah:

1. $\int_{-1}^{4} \int_{1}^{2} (x + y^2)\, dy\, dx$
2. $\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{1} x \sin y\, dx\, dy$
3. $\int_{1}^{2} \int_{0}^{x-1} y\, dy\, dx$
4. $\int_{1}^{3} \int_{-y}^{2y} x e^{y^3}\, dx\, dy$