Predslike 2D celičnih avtomatov

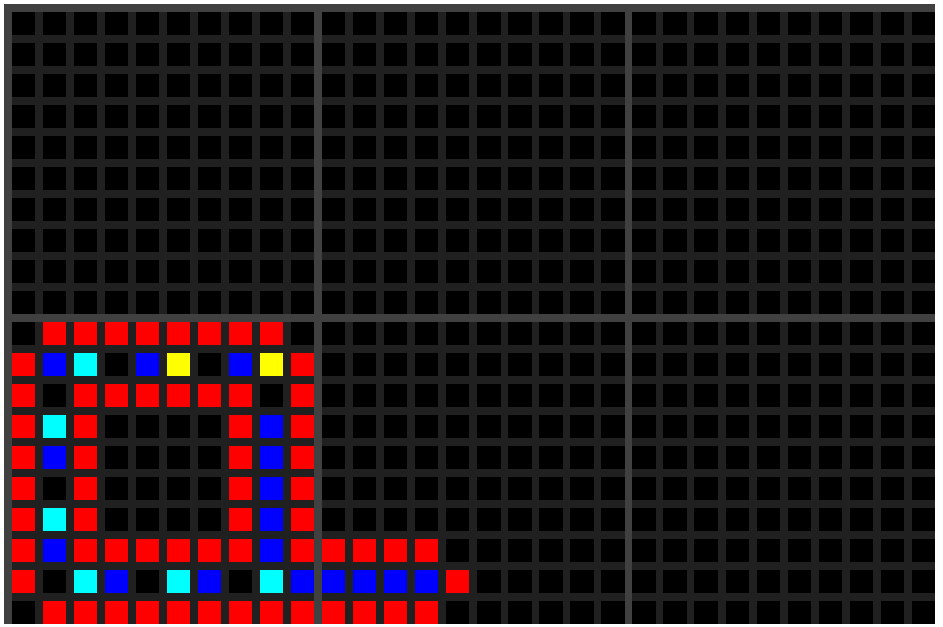
MAGISTRSKO DELO

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Mentor: prof. dr. Branko Šter
Avtor: Iztok Jeras

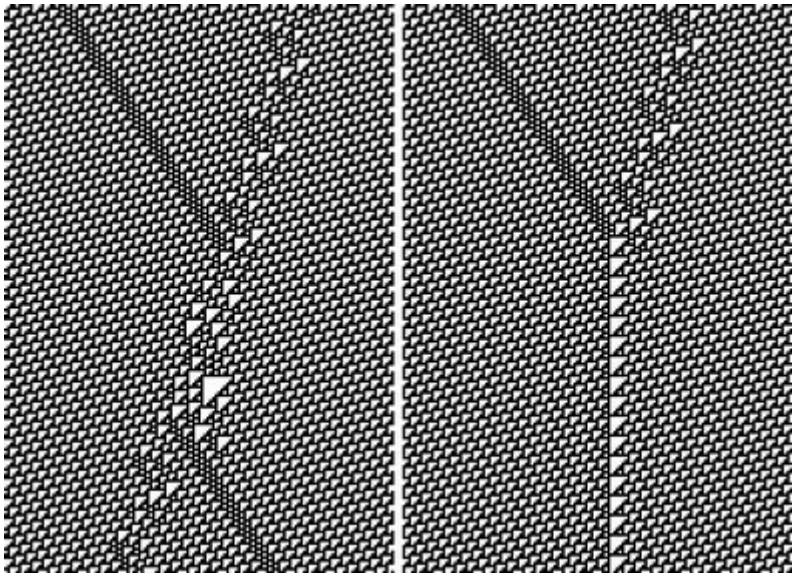
Motivacija: celični avtomati kakor model za probleme v fiziki in biologiji

- Holografski princip:
  - Je vesolje 3D projekcija dogajanja na 2D ploskvi s celicami Planckove velikosti?
  - Termodinamika, entropija in puščica časa.
- Replikacija in evolucija:
  - Langtonova zanka,
  - Evoloop.



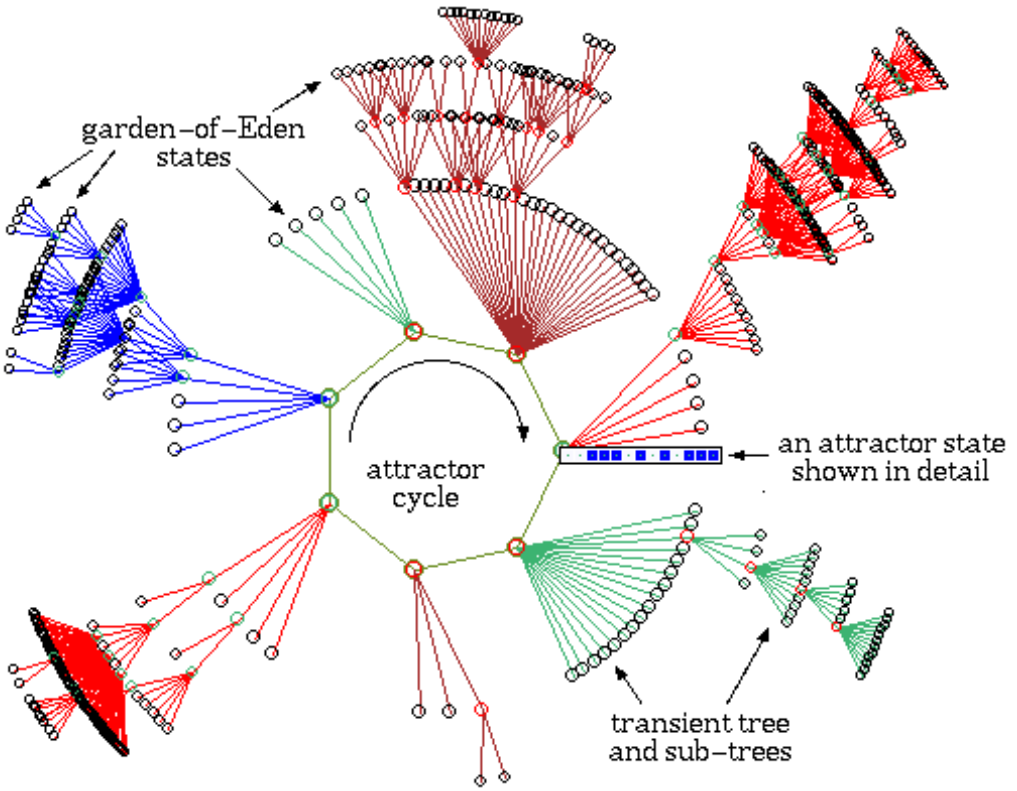
Motivacija: dinamika informacije v ireverzibilnih celičnih avtomatih

- Odnos med izgubo informacije in kompleksnostjo.
- Analiza količine in prostorske razporeditve izgube informacije.
- Pravilo 110:
  - dinamika delcev (trki),
  - stanja Garden of Eden.
- Conwayeva igra življenja:
  - pištola za delce,
  - univerzalni konstruktor,
  - Turingov stroj.



Atraktor in korito

- Prehode med stanji končnega CA lahko sestavimo v usmerjen graf.
- Korito atraktorja tvorimo z iskanjem predslik.
- Listi grafa so stanja brez preteklosti GoE.
- V centru grafa je atraktor, ciklično končno stanje v katerega se ustali vsak končni/zaprt dinamični sistem.

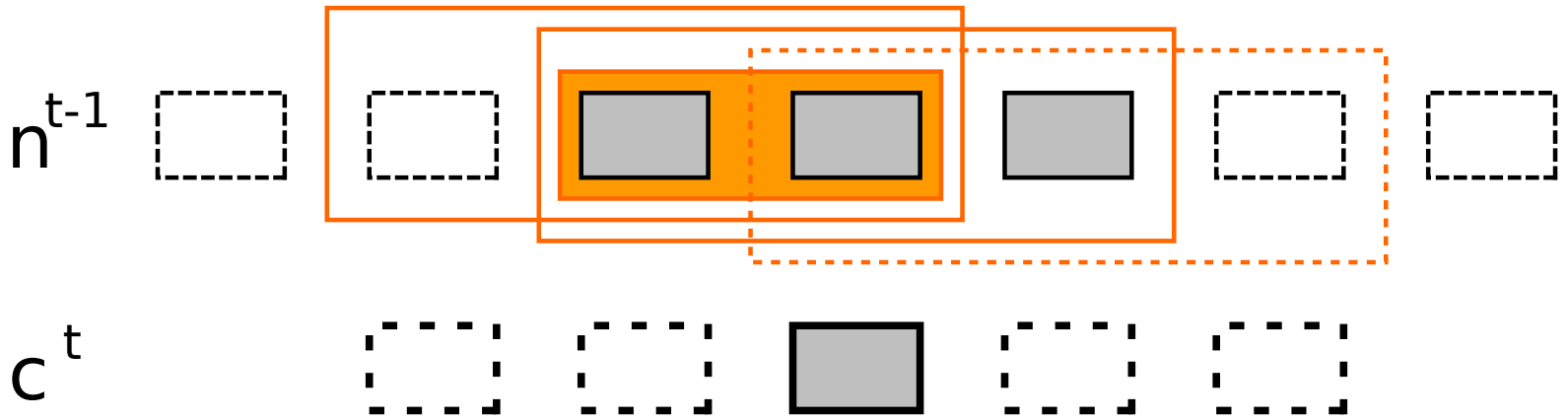


1D CA: pravilo, okolica in prekrivanje

- 1D homogen, časovno-prostorsko diskreten dinamični sistem.
- Vrednost celice v sedanjosti c_x^t je funkcija vrednosti njene okolice v preteklosti n_x^{t-1}.

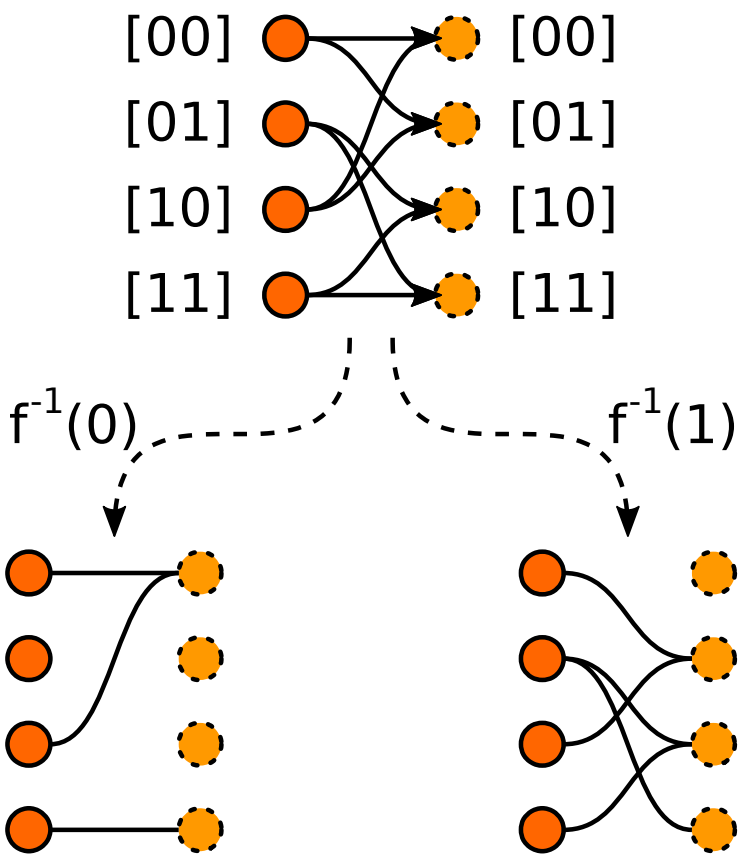
$$c_x^t = f\left(n_x^{t-1}\right)$$

- Predslike so stanja iz preteklosti, ki se preslikajo v dano sedanjost, izpolnjujejo pogoja:
  - vsaka okolica mora izpolnjevati tranzicijsko funkcijo,
  - sosednje okolice se morajo ujemati v prekrivanju (oranžna).



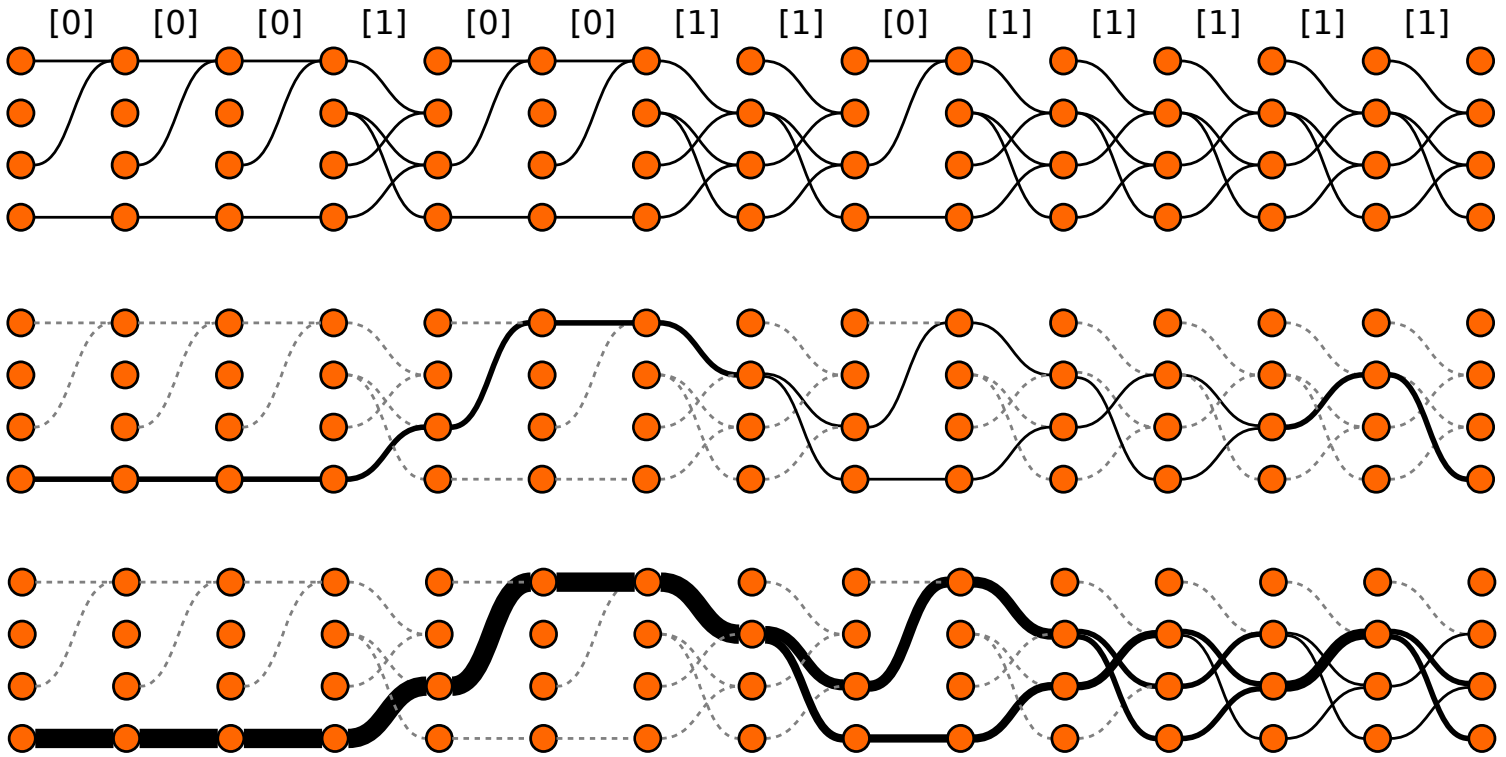
1D CA: graf predslik

- Osnova je De Bruijnov graf.
- Prekrivanja so volišča (oranžna).
- Okolice so poti med vozlišči.
- Graf se razdeli na grafe za posamezno stanje, vključuje samo okolice/poti, ki pripeljejo v dano stanje.
- Graf predslik predstavlja inverzno tranzicijsko funkcijo $f^{-1}(c)$.
- Primeri kažejo pravilo 110



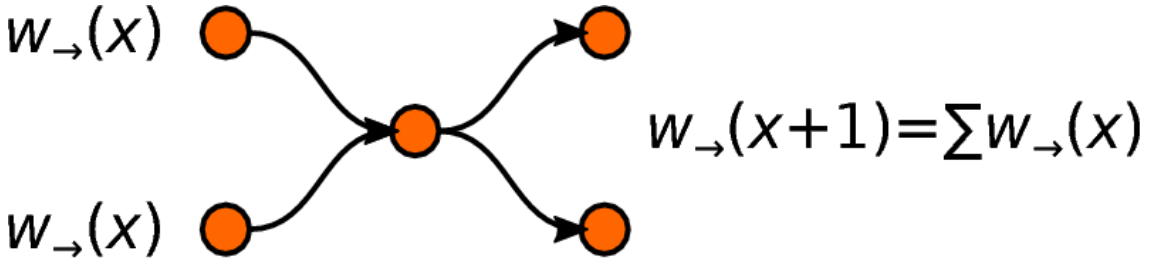
1D CA: mreža predslik

- Z nizanjem De Bruijnovih grafov tvorimo mrežo
- Iščemo vse zvezne poti, ki povezujejo levi in desni rob
- Ostale poti postopno izločujemo (DFS reševanje labirinta)

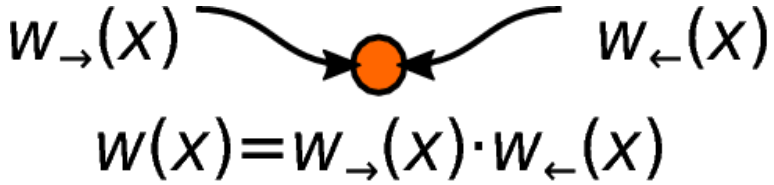


1D CA: uteži v mreži predslik

- V teoriji grafov je utež ***w*** enaka številu poti skozi vozlišče.
- Izhodna utež ***w*(*x*+1)** je enaka vsoti vhodnih uteži ***w*(*x*)**.



- Uteži se računajo v dveh prehodih, naprej (→) in nazaj (←) glede na smer poti v grafu.
- Skupna utež je zmnožek uteži obeh prehodov (→ in ←).



1D CA: matrične enačbe

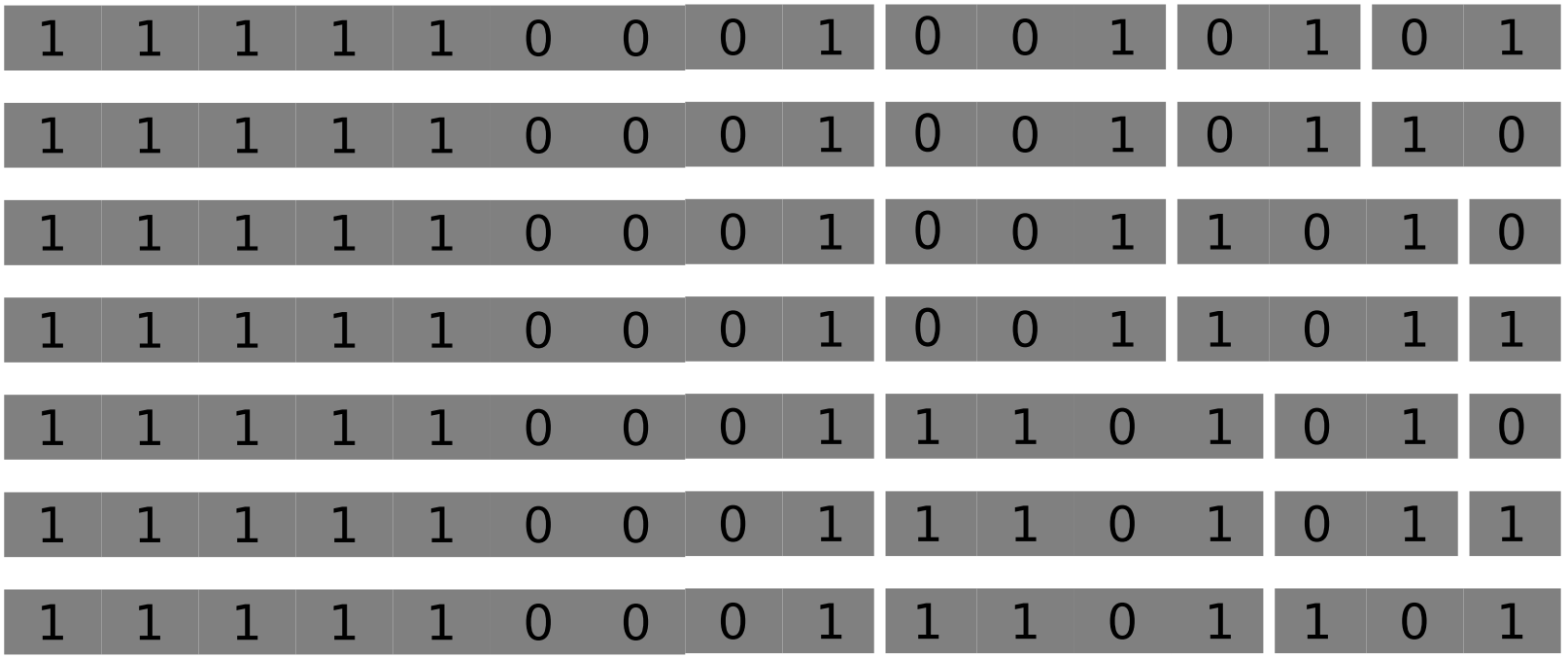
- Grafe predslik zapišemo s strukturno matriko.
- Podobno nizanju grafov, lahko množimo matrike.
- Vsota elementov matrike je število predslik.
- Vsota elementov na diagonali je število predslik za ciklični rob.
- Vmesne rezultate lahko uporabimo za izračun uteži v mreži.

$$D(0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad D(1)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$D(\alpha)=\sum_{x=0}^{N-1} D(c_x)=D(c_0)\,D(c_0)\ldots D(c_0)$$

1D CA: algoritem za izpis predslik

- Pomnilnik rezerviramo z vnaprej znanim številom predslik (štetje iz desne proti levi).
- Z utežmi za ***x***=0 inicializiramo vrednosti.
- Za vsako okolico na položaju ***x*** uteži določajo koliko poti nadaljuje s katerim stanjem celice ***x***+1.



1D CA: procesna zahtevnost algoritma

- Stroga ločitev na štetje in izpis predslik, izpis lahko preskočimo.
- Predvidljiva poraba pomnilnika in časa.
- Štetje predslik (množenje niza matrik):
  - št. operacij **O(*N*)**: *N* matričnih množenj,
  - pomnilnik **O(*N*)**: *N* vmesnih rezultatov množenja.
- Zahtevnost izpis predslik je odvisna od števila predslik:
  - maksimalna zahtevnost **O(2^N)** (vse možne konfiguracije),
  - povprečna zahtevnost **O(*N*)**.

1D CA: graf podmnožic in regularni jezik GoE stanj

- Binarna preslikava iz vektorja uteži ***b*(*x*)** trenutnih vozlišč v naslednji vektor uteži ***b*(*x*+1)**

$$b(x+1)=b(x)D(c(x))$$

- Nabor preslikav definira končni avtomat.
- Če je začetno stanje polno in končno stanje prazno, avtomat sprejme GoE besede, in definira regularni jezik GoE stanj.

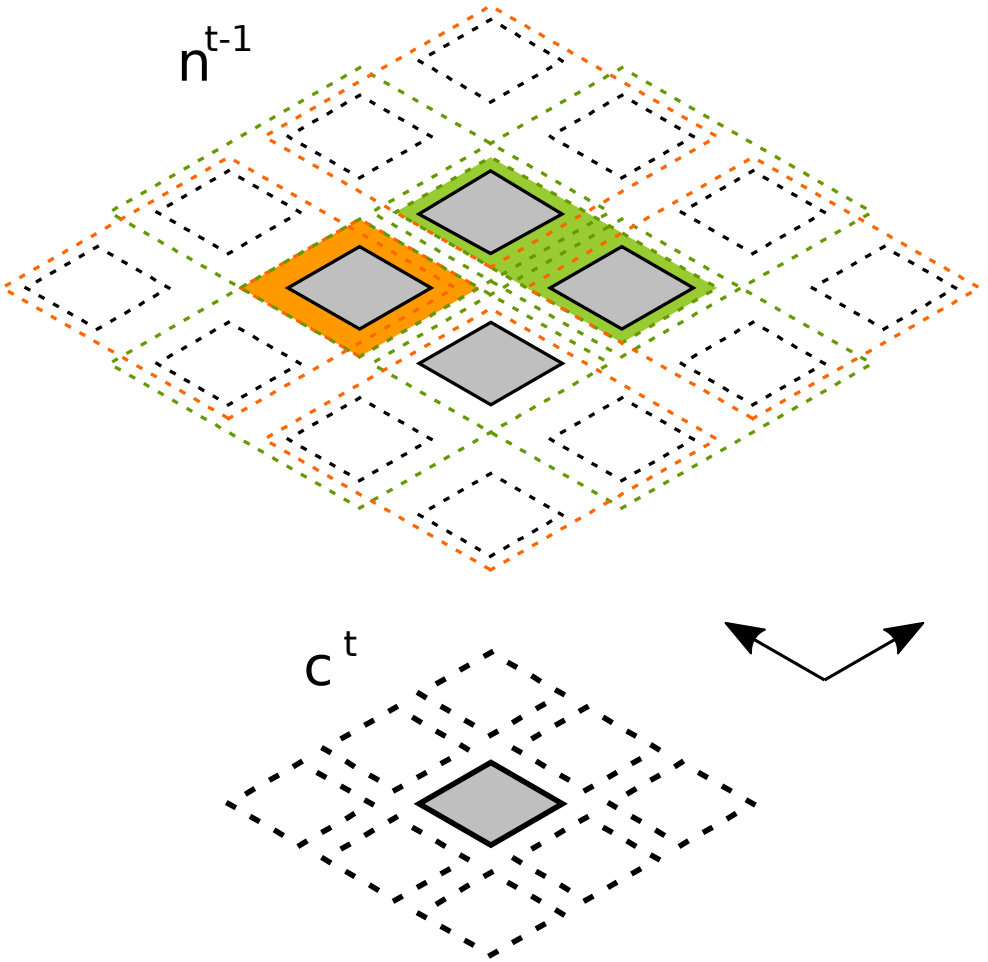
Primer za pravilo 110:

```
aut = Automaton(
  (('0000', '0000', 0), ('0000', '0000', 1),
   ('0001', '0001', 0), ('0001', '0010', 1),
   ('0010', '1000', 0), ('0010', '0100', 1),
   ('0011', '1001', 0), ('0011', '0110', 1),
   ('0100', '0000', 0), ('0100', '0011', 1),
   ('0101', '0001', 0), ('0101', '0011', 1),
   ('0110', '1000', 0), ('0110', '0111', 1),
   ('0111', '1001', 0), ('0111', '0111', 1),
   ('1000', '1000', 0), ('1000', '0100', 1),
   ('1001', '1001', 0), ('1001', '0110', 1),
   ('1010', '1000', 0), ('1010', '0100', 1),
   ('1011', '1001', 0), ('1011', '0110', 1),
   ('1100', '1000', 0), ('1100', '0111', 1),
   ('1101', '1001', 0), ('1101', '0111', 1),
   ('1110', '1000', 0), ('1110', '0111', 1),
   ('1111', '1001', 0), ('1111', '0111', 1)),
  initial_states = ['1111'],
  final_states   = ['0000'],
  input_alphabet = [0,1])
aut_min = aut.minimization()
list(aut_min.language(5))

[[0, 1, 0, 1, 0]]
```

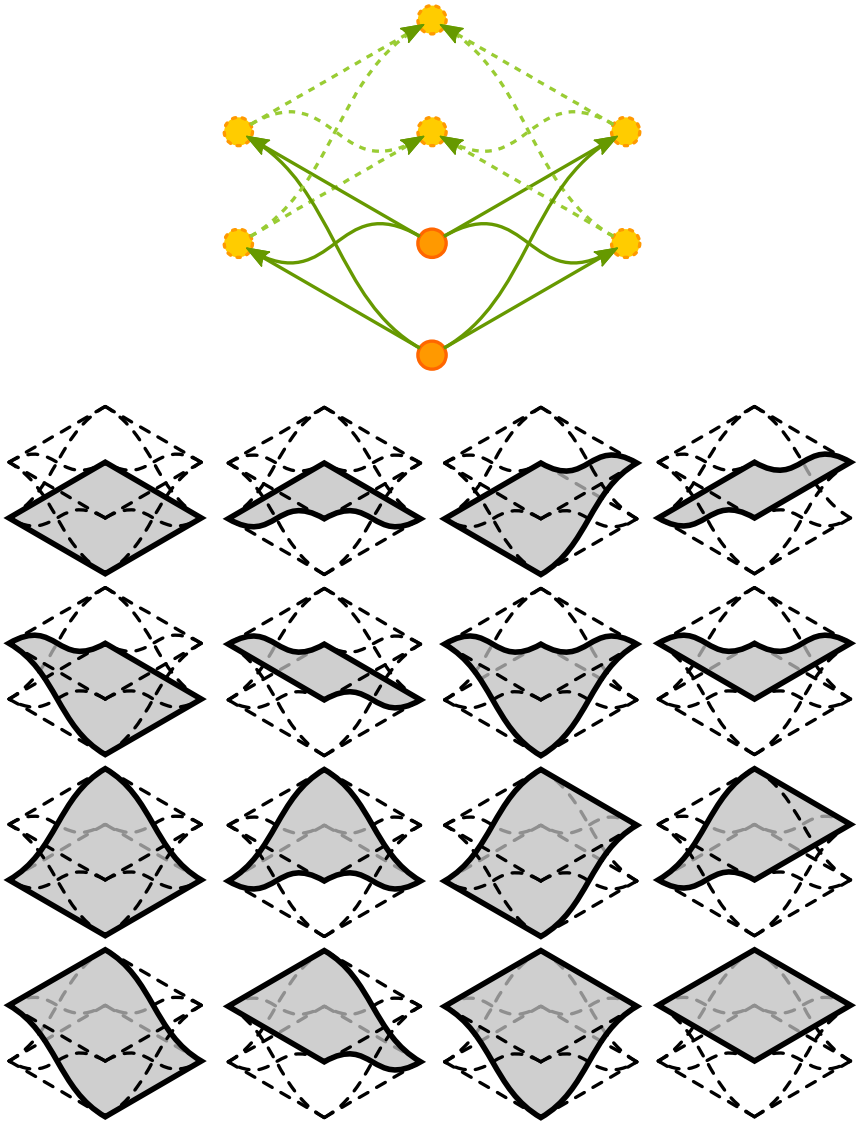
2D CA: okolica in prekrivanje

- Primer: binarna celica in okolica iz 4 celic imenovana **quad**.
- Sosednji okolici v smeri dimenzij X ali Y se prekrivajo za dve celici (zelena).
- Sosednji okolice v diagonalni smeri se prekrivajo za eno celico (oranžna).
- Za tvorjenje grafa in mreže predslik so potrebni drugačni elementi kakor pri 1D problemu.



2D CA: graf predslik

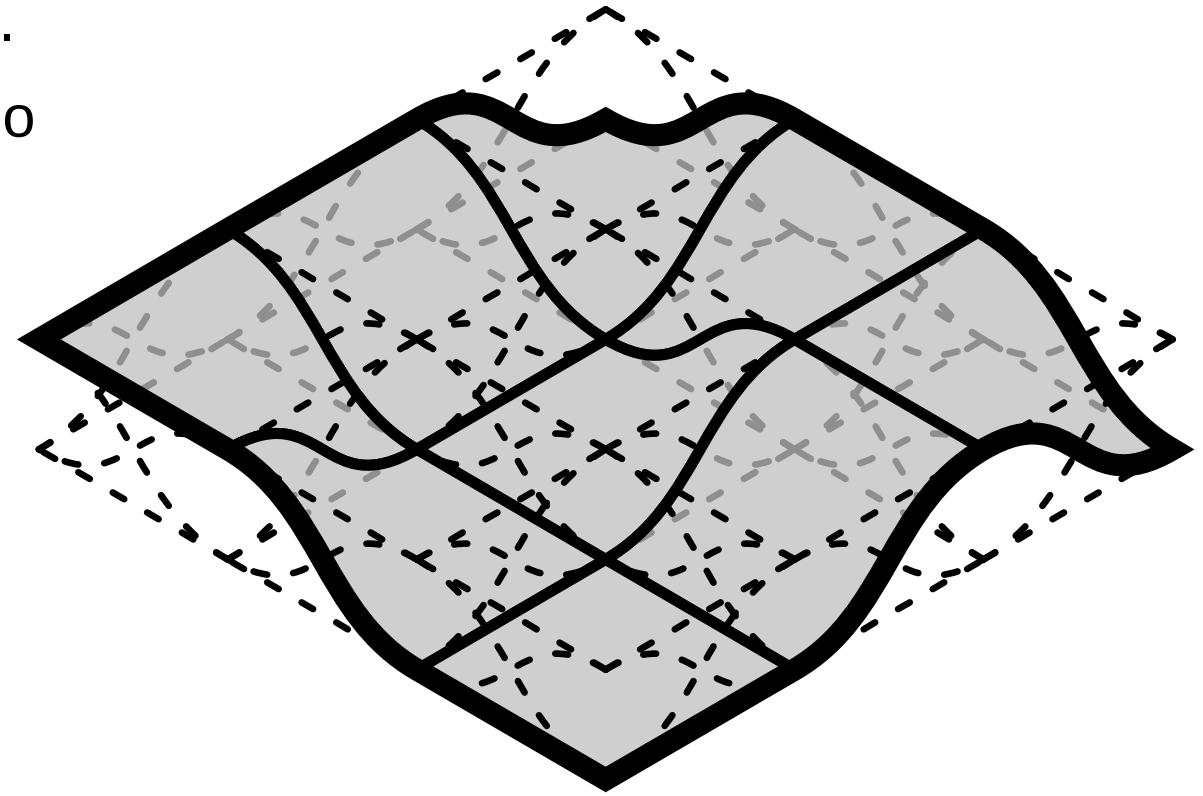
- Graf predslik dobi dodatno dimenzijo v primerjavi z 1D CA.
- Prekrivanje v smeri dimenzij X ali Y je predstavljeno s potmi med vozlišči (zelena).
- Prekrivanje v diagonalni smeri je predstavljeno z vozlišči (oranžna).
- Okolice (siva) so prestavljene s ploskvami, katerih vogali so vozlišča in robovi poti med vozlišči, prikazane so vse možne okolice/ploskve.



2D CA: mreža predslik

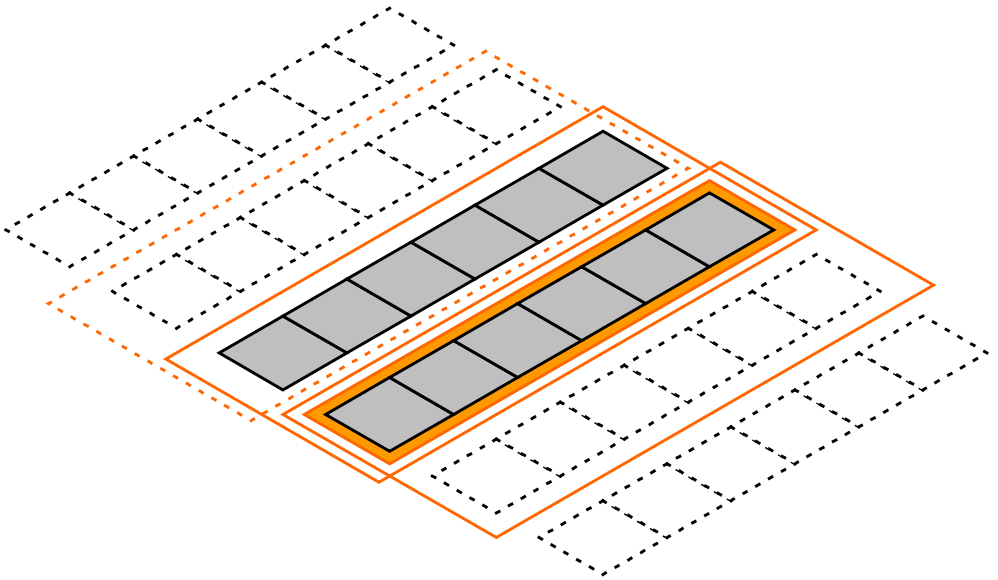
- S tlakovanjem grafov predslik tvorimo mrežo.
- Iščemo vse zvezne ploskve, ki pokrivajo celotno površino mreže.
- Ostale ploskve postopno izločujemo.
- Poudarjena ploskev prikazuje predsliko z vrednostjo:

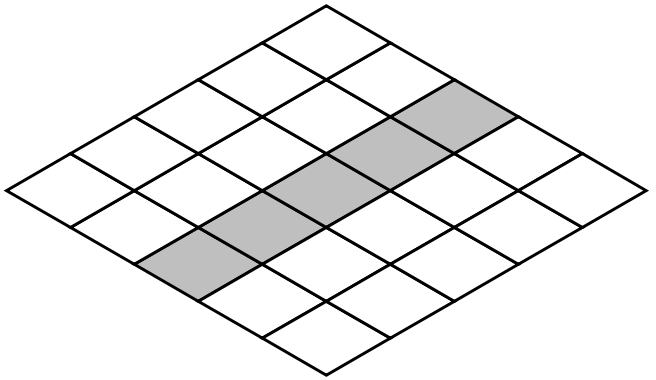
  1110
  1001
  0011
  0010



2D CA: pretvorba v 1D problem

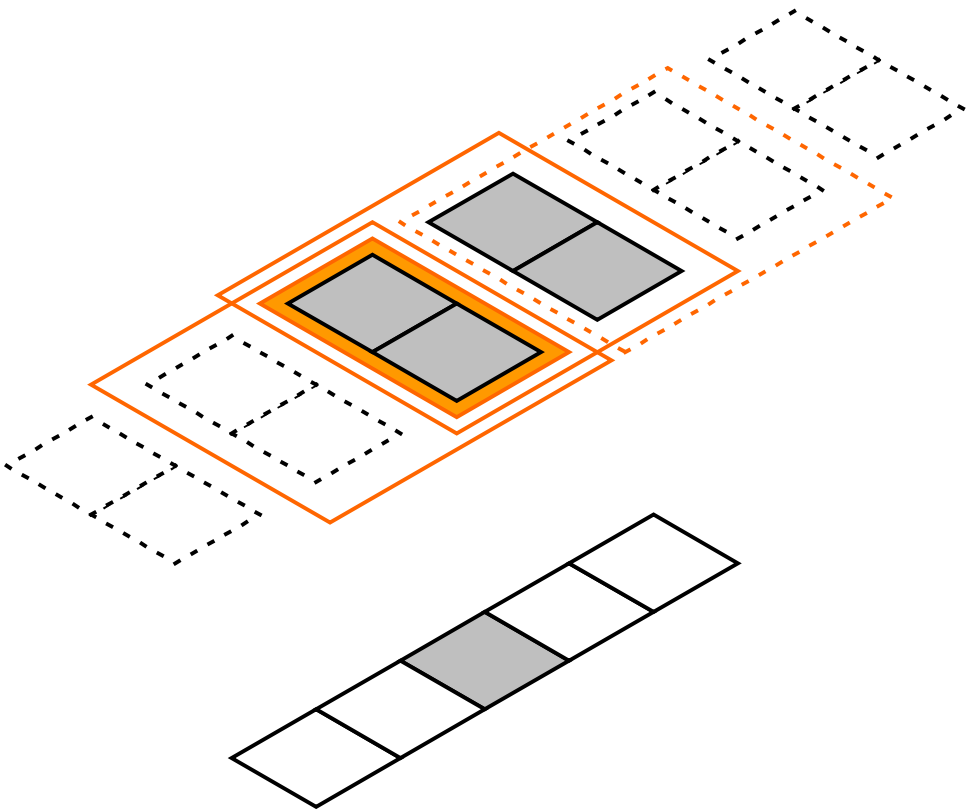
- Ploskev razdelimo na vrstice:
  - vsaka vrstica zase je 1D problem, ki ga rešujemo z algoritmom za 1D CA,
  - vrstico obravnavamo kakor kompleksno celico,
  - niz vrstic je spet 1D problem.
- Procesiranje poteka v dvojni gnezdeni zanki:
  - notranja je procesiranje znotraj vrstice,
  - zunanja je procesiranje med vrsticami.





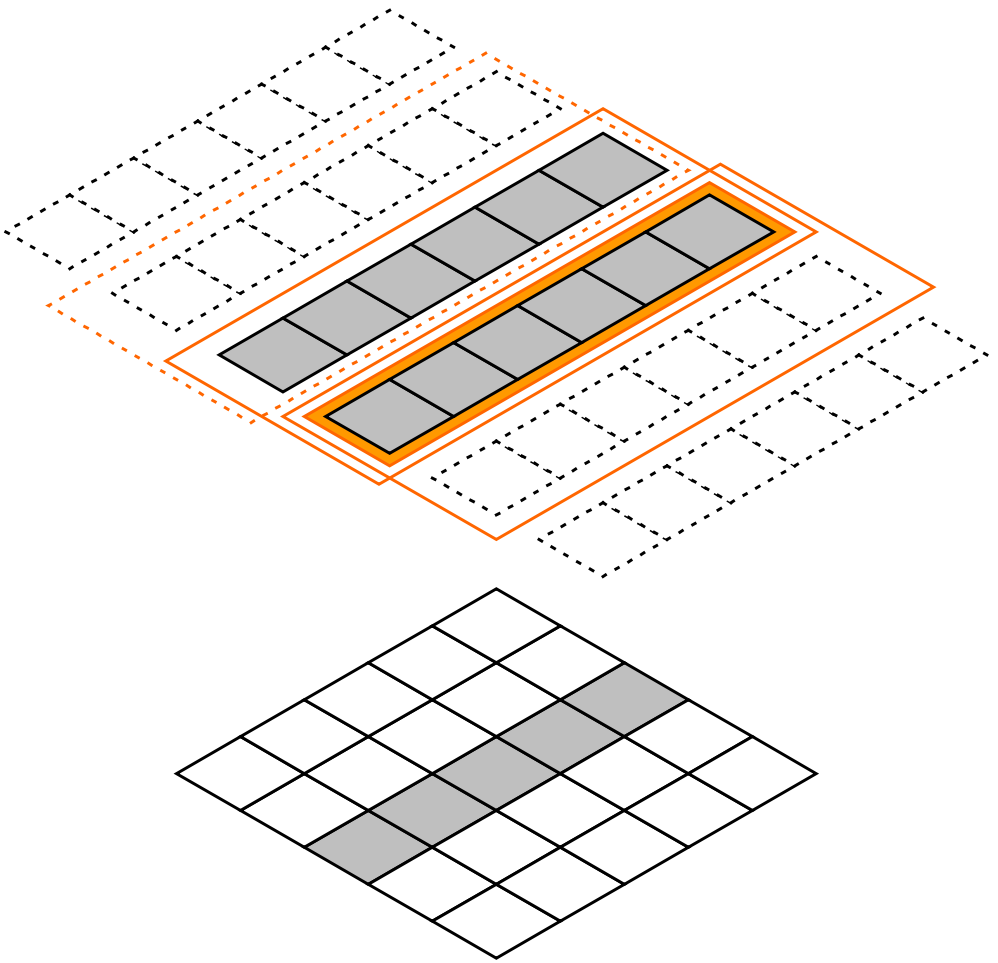
2D CA: štetje predslik znotraj vrstice

- Okolica in tranzicijska funkcija sta nespremenjeni.
- Predslike vrstice so sestavljene iz več vrstic.
- Pretvorba v mrežo predslik:
  - prekrivanja okolic so vozlišča,
  - okolice so poti med vozlišči.
- Algoritem za štetje in izpis predslik se obnaša podobno kakor pri 1D CA (matrične enačbe).



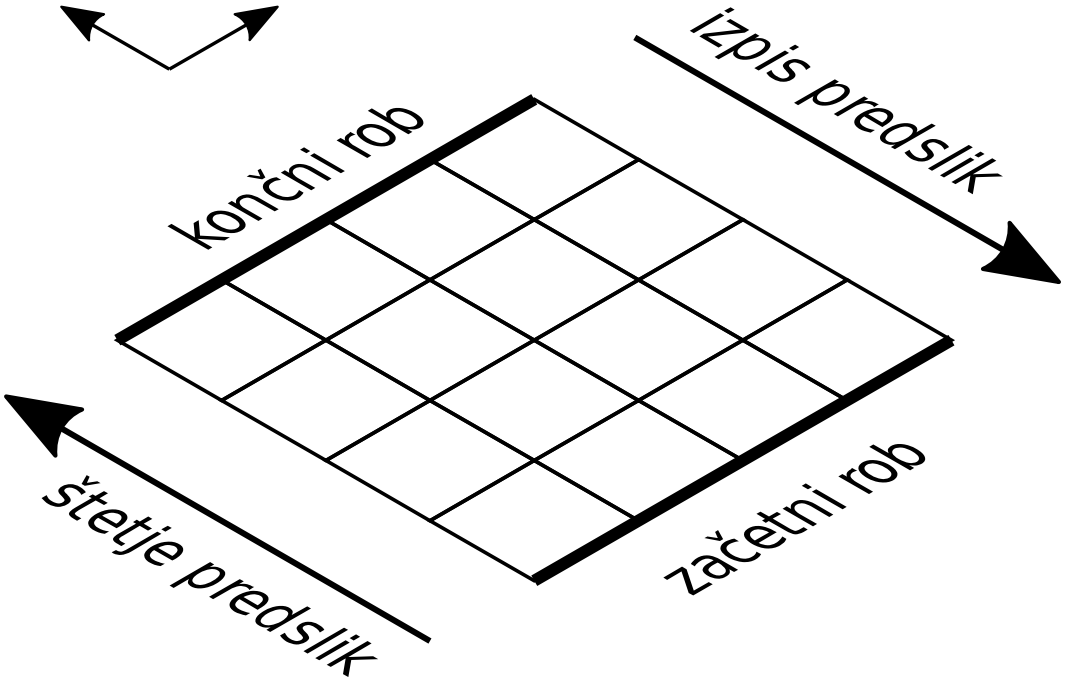
2D CA: štetje predslik po vrsticah

- Vsaka vrstica predstavlja kompleksno celico novega avtomata.
- Pretvorba v mrežo predslik:
  - vsa možna prekrivanja predslik vrstice so vozlišča (oranžna),
  - izračunane predslike vrstic so obstoječe povezave.
- Število vozlišč raste eksponentno z dolžino vrstice.



2D CA: izpis predslik

- Smer procesiranja določa, kako so predslike sortirane.



2D CA: stanja Garden of Eden

- Iskanje stanj *Garden of Eden* v celičnem avtomatu *Game of Life* je pogost hobi med raziskovalci CA.
- Opisani algoritem je za potrebe iskanja GoE stanj mogoče poenostaviti tako, da namesto *štetja* samo preverjamo *obstoj* predslik:
  - operacijo *množenja* zamenjamo z logičnim **IN**,
  - operacijo *seštevanja* zamenjamo z logičnim **ALI**.

2D CA: procesna zahtevnost algoritma

- Štetje in izpis predslik vrstice:
  - maksimalna zahtevnost $\mathbf{O(2^N)}$ (vse možne konfiguracije),
  - povprečna zahtevnost $\mathbf{O(N)}$.
- Štetje predslik polja:
  - maksimalna zahtevnost $\mathbf{O(2^{N_x} N_y)}$.
- Izpis predslik polja je odvisen od števila predslik:
  - maksimalna zahtevnost $\mathbf{O(2^{N_x N_y})}$ (vse možne konfiguracije),
  - povprečna zahtevnost $\mathbf{O(N_x N_y)}$.

Rezultati in možne izboljšave

- Alternativa algoritmom s sestopanjem (npr. Woods).
- Aplikacija naprednega algoritma razvitega za 1D CA za predslike 2D CA.
- Ločitev štetja in izpisa predslik.
- Bolj predvidljiva poraba pomnilnika.
- Omogoča pretvorbo v algoritem za preverjanje GoE konfiguracij.
- Uporaba razpršenih matrik bi zmanjšala porabo pomnilnika.
- Bolje izbran način kodiranja bi zmanjšal čas, ki se porabi za pretvarjanje iz niza/polja celic v indeks in obratno.
- Štetje v dveh korakih, najprej Booleove operacije za oceno porabe pomnilnika, nato normalno štetje.

Viri in programska oprema

- Simulator 2D CA z okolico quad:

  https://github.com/jeras/webgl-quad-ca

- Implementacija opisanega algoritma (C in knjižnica za števila s poljubno natančnostjo GMP):

  https://github.com/jeras/preimages-2D

- Obstoječ program za izpis predslik GoL:

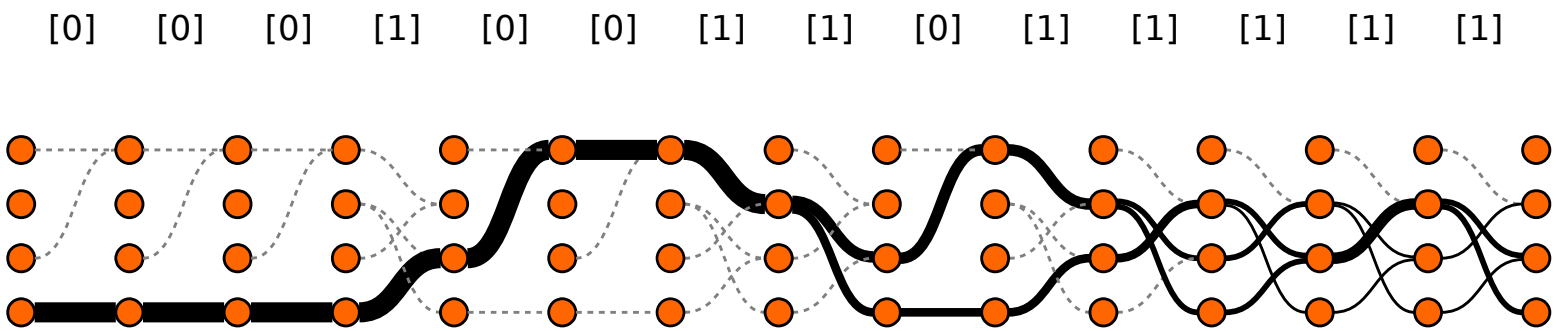
  https://nbickford.wordpress.com/2012/04/15/reversing-the-game-of-life-for-fun-and-profit/

- Discrete Dynamics Lab:

  http://www.ddlab.com/

Vprašanja

izpis predslik



1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1