Exercice 1:

Ecriture de n en base 2 :

$0 =$	000	000	$= 0$
$1 =$	001	100	$= 4$
$2 =$	010	010	$= 2$
$3 =$	011	110	$= 6$
$4 =$	100	001	$= 1$
$5 =$	101	101	$= 5$
$6 =$	110	011	$= 3$
$7 =$	111	111	$= 7$

Miroir

Exercice 2:

On veut montrer que $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T(T(a)) = a$.

$$T(T(a))_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \, T(a)_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j a_j \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} C_n^k C_k^j a_j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \frac{n! \, \cancel{k!}}{(n-k)! \, \cancel{k!} \, j! \, (k-j)!} a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k+j} \frac{n!}{(n-k)! \, (k-j)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{n! \, a_j}{j!} \underbrace{\sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^{k+j}}{(n-k)! \, (k-j)!}}_{S_j}$$

$$S_j = \sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^{k+j}}{(n-k)!\,(k-j)!}$$

$$\boxed{i = k-j} \quad = \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^{i+2j}}{(n-i-j)!\,i!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^{i}}{(n-j-i)!\ i!}$$

Si $j = n$, $S_n = 1$

Si $j \neq n$, $S_j = \frac{1}{(n-j)!} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(n-j)!}{(n-j-i)!\,i!} (-1)^i (1)^{n-j-i}$

$$= \frac{1}{(n-j)!} \underbrace{(-1+1)^{n-j}}_{=0}$$ par la formule de Newton

Donc $S_j = \mathbb{1}_{\{j=n\}}$

Et donc

$$T(T(a))_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!\ a_j}{j!} S_j$$

$$= \frac{\cancel{n!}\,a_n}{\cancel{n!}} = a_n$$

Donc T est bien une involution!