Estimation efficace du risque par simulations séquentielles imbriquées

Par Jérôme Chiche et Arthur Guerlais

Introduction

Problématique : Comment estimer de manière efficace un risque financier?

- Modéliser le risque de manière fiable
- Estimer le risque
  - Rapidité d’exécution
  - Fiabilité et précision de l’estimation

Plan

I. Introduction de la méthode
II. Estimateur à échantillonage uniforme
III. Estimateur séquentiel
IV. Estimateur à seuil de fiabilité
V. Allocation dynamique
VI. Exemples
VII. Conclusion

Portefeuille:
Un “tradable” portant
sur un sous-jacent St

$$\hat{Z}_{i,j} = X_0 - Payoff_{actu}(S_T(\omega_i)_j)$$

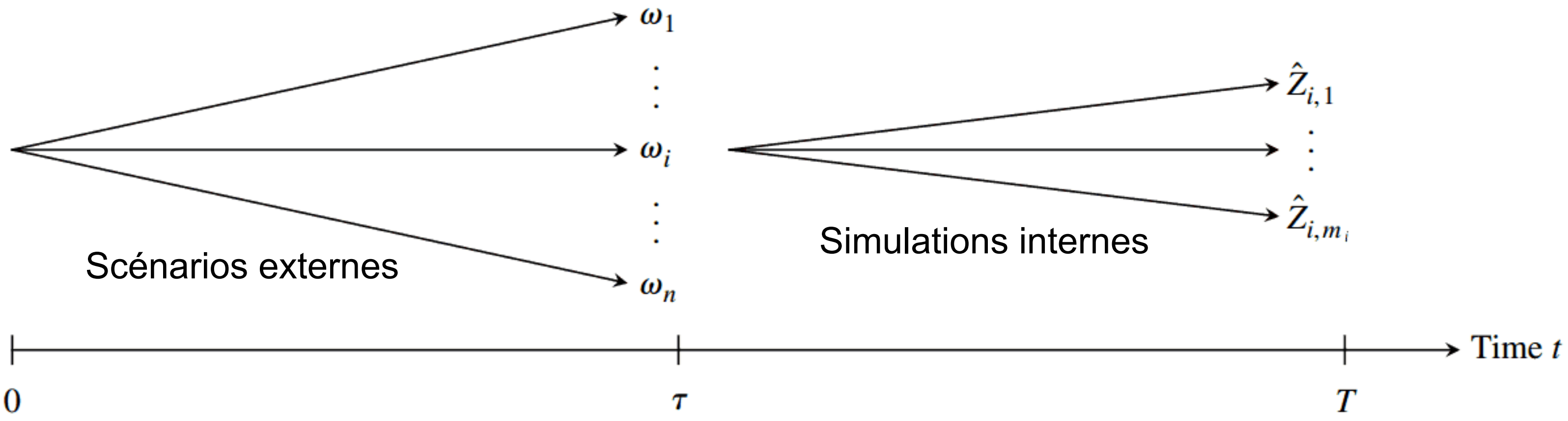


Illustration de la méthode

Estimation de la perte pour le scénario ω_i

$$\hat{L}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \hat{Z}_{i,j}$$

Estimation de la probabilité de perte

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{L(\omega_i) \geq c}$$

Estimation à échantillonage uniforme

- Nombre constant de simulations internes

- Optimiser l'estimateur

  Erreur quadratique moyenne:

$$E\left[(\hat{\alpha}_{n,m}-\alpha)^2\right] = E\left[(\hat{\alpha}_{n,m}-E\left[\hat{\alpha}_{n,m}\right])^2\right] + \left(E\left[\hat{\alpha}_{n,m}-\alpha\right]\right)^2$$

  Biais asymptotique: $E\left[\hat{\alpha}_{n,m}-\alpha\right] = \frac{\theta_c}{m} + O(m^{-3/2})$

  Variance asymptotique: $Var\left(\hat{\alpha}_{n,m}\right) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + O(m^{-1}n^{-1})$

Choix optimal de n et m

m optimal : $m^* = \frac{k^{1/3}}{\beta^*}$

$$\beta^* := \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{2\theta_c{}^2}\right)^2$$

n optimal : $n^* = \beta^* k^{2/3}$

Contrainte : $n \times m \leq k$

Erreur quadratique moyenne : $E\,[(\hat{\alpha}_{n,\,m} - \alpha)^2] = 3(\beta^*)^2 k^{-2/3} + o(k^{-2/3})$

Estimation séquentielle

Principe:

Estimer la perte au cours des simulations

Si elle est proche de c, plus de simulations internes pour plus deprécision sur l'estimation de la perte

Si elle est loin de c, peu de chance de passer de l'autre côté, pas besoin de simuler beaucoup plus

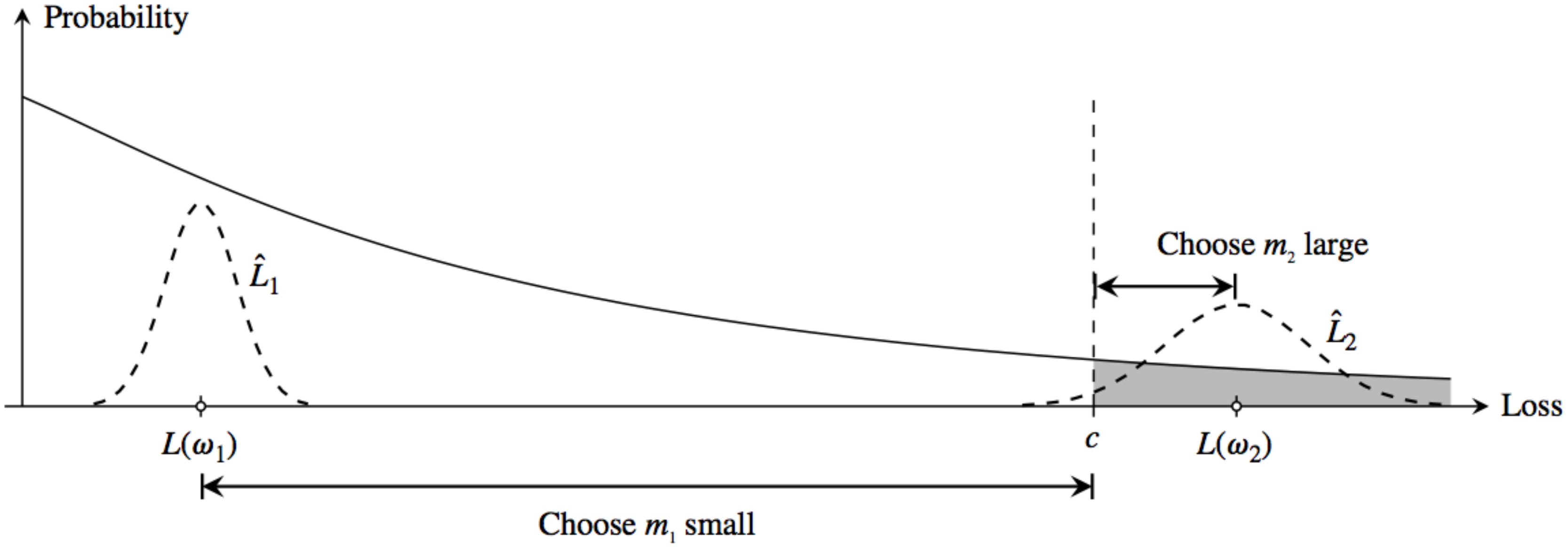


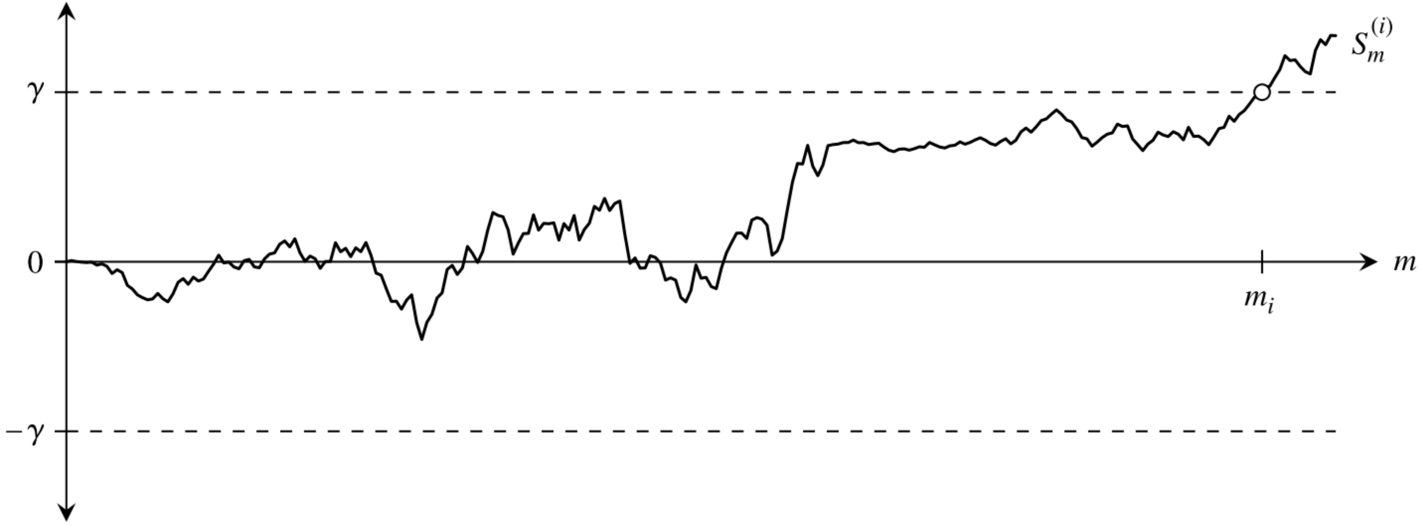
Illustration de la méthode d'échantillonage séquentiel

On introduit la fiabilité d'un scénario: $\frac{m_i \left|\hat{L}_i - c\right|}{\sigma_i}$

On ajoute alors une simulation à un scénario i* tel que:

$$i^* \in arg\min_i \frac{m_i \left|\hat{L}_i - c\right|}{\sigma_i}$$

Estimation par seuil de fiabilité



$$\frac{m_i \left|\hat{L}_i - c\right|}{\sigma_i}$$

$$m_i = \inf\{m > 0 : \left|S_m^{(i)}\right| \geq \gamma\} \text{ avec } S_m^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_i}(\hat{Z}_{i,j} - c)$$

Optimisation

Erreur quadratique moyenne:

$$E\left[(\tilde{\alpha}_{\gamma,n}-\alpha)^2\right] = E\left[(\tilde{\alpha}_{\gamma,n}-E\left[\tilde{\alpha}_{\gamma,n}\right])^2\right] + \left(E\left[\tilde{\alpha}_{\gamma,n}-\alpha\right]\right)^2$$

Biais asymptotique: $E[\tilde{\alpha}_{\gamma,n}-\alpha] = O(\gamma^{-2})$

Variance asymptotique: $Var(\tilde{\alpha}_{\gamma,n}) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + O(\gamma^{-2}n^{-1})$

Théorème: $\bar{m}(\gamma) = O(\gamma^{1+\varepsilon}),\ \forall\varepsilon > 0$

Reformulation du biais et de la variance asymptotique:

$$E[\tilde{\alpha}_{\gamma,n} - \alpha] = O(\bar{m}^{-2+\varepsilon})$$
$$Var(\tilde{\alpha}_{\gamma,n}) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + O(\bar{m}^{-2+\varepsilon} n^{-1})$$

Majoration de l'erreur quadratique:

$$E\left[(\hat{\alpha}_{\gamma,n} - \alpha)^2\right] \leq \frac{\alpha(1-\alpha)}{n} + \frac{C}{\gamma^4}$$

Choix optimal: seuil proportionnel à $k^{1/5}$ et nombre de scénarios internes proportionnel à $k^{4/5-\varepsilon}$

Allocation dynamique

But:

- Jouer sur le nombre de scénarios
- Outrepasser le problème du calcul des constantes

Moyen:

- Estimer la variance et le biais à certains instants
- Ajouter ou non des scénarios en conséquence

$$E[\hat{\alpha} - \alpha] \approx \hat{B} = \hat{\alpha} - \bar{\alpha}$$

$$Var(\hat{\alpha}) \approx \hat{V} = \frac{\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})}{n}$$

$$\bar{\alpha} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Phi(\frac{m_i(\hat{L}_i - c)}{\sigma_i})$$

$$\hat{B}^2 \times (\frac{\bar{m}}{\bar{m}'})^4 + \hat{V} \times \frac{n}{n'}$$

$$n' = \min\{\max\{(\frac{\hat{V}n}{4\hat{B}^2\bar{m}^4}(\bar{m}n + \tau_e)^4)^{1/5}, n\}, n + \tau_e\}$$

Estimations du biais, de la variance et de l'erreur quadratique de l'étape suivante pour un étape donné

Sorties du code

Nous allons étudier deux exemples constituées des portefeuilles suivants:

Une action simple suivant un modèle gaussien

Un Put sur action dans un modèle Black-Scholes

$$\text{entre } 0 \text{ et } \tau, \; S_t \sim N(X_0, \sigma_{outer})$$
$$\text{entre } \tau \text{ et } T, \; S_t \sim N(X_\tau, \sigma_{inner})$$

Gaussien		n	m	Espérance	Variance	Biais²	Erreur quad.	EQ norm.
α = 10%	Uniforme 1/3:2/3	25 199	159	11,67%	4,23E-06	2,80E-04	2,84E-04	15,2
	Uniforme optimal	4 499	889	10,31%	1,99E-05	9,38E-06	2,92E-05	1,6
	Séquentiel	5 000	400	10,08%	1,79E-05	7,09E-07	1,86E-05	1,0
α = 1%	Uniforme 1/3:2/3	25 199	159	1,54%	6,04E-07	2,86E-05	2,92E-05	16,7
	Uniforme optimal	5 089	786	1,11%	2,29E-06	1,19E-06	3,48E-06	2,0
	Séquentiel	5 000	400	1,00%	1,75E-06	8,04E-10	1,75E-06	1,0
α = 0.1%	Uniforme 1/3:2/3	25 199	159	0,20%	7,71E-08	1,08E-06	1,16E-06	5,3
	Uniforme optimal	7 788	514	0,13%	1,58E-07	8,34E-08	2,42E-07	1,1
	Séquentiel	5 000	400	0,10%	2,17E-07	1,41E-09	2,19E-07	1,0

Exemple de la simple action

- Valeur en 0 du sous-jacent: $S_0 = 100$
- Drift: $\mu = 8\%$
- Volatilité annualisée: $\sigma = 20\%$
- Taux sans risques: $r = 3\%$
- Strike du Put: $K = 95$
- Maturité: $T = \frac{1}{4}$, en années
- Horizon de risque: $\tau = \frac{1}{52}$, en années

Put		n	m	Espérance	Variance	Biais²	Erreur quad.	EQ norm.
α = 10%	Uniforme 1/3:2/3	25 199	159	12,25%	4,26E-06	5,07E-04	5,11E-04	26,5
	Uniforme optimal	5 095	785	10,52%	1,81E-05	2,67E-05	4,48E-05	2,3
	Séquentiel	5 000	400	10,13%	1,77E-05	1,62E-06	1,93E-05	1,0
α = 1%	Uniforme 1/3:2/3	25 199	159	1,96%	8,10E-07	9,18E-05	9,27E-05	42,6
	Uniforme optimal	3 143	1 273	1,12%	3,49E-06	1,39E-06	4,88E-06	2,2
	Séquentiel	5 000	400	1,00%	2,17E-06	5,57E-10	2,17E-06	1,0
α = 0.1%	Uniforme 1/3:2/3	25 199	159	0,38%	1,57E-07	7,87E-06	8,03E-06	39,5
	Uniforme optimal	2 570	1 556	0,12%	4,92E-07	5,65E-08	5,49E-07	2,7
	Séquentiel	5 000	400	0,10%	2,03E-07	2,19E-10	2,03E-07	1,0

Exemple du Put dans Black-Scholes

Conclusion