NOMBRE: ALEXIS JEREMIAS MARTIN CANCHE MATRICULA: 9586

4.1 Definición de espacio vectorial.

Un **espacio vectorial** (o **espacio lineal**) sobre un **cuerpo** K\mathbb{K}K (generalmente R\mathbb{R}R o C\mathbb{C}C) es un conjunto VVV cuyos elementos se llaman **vectores**, junto con dos operaciones:

1. **Suma de vectores:**

   +:V×V→V+ : V \times V \rightarrow V+:V×V→V

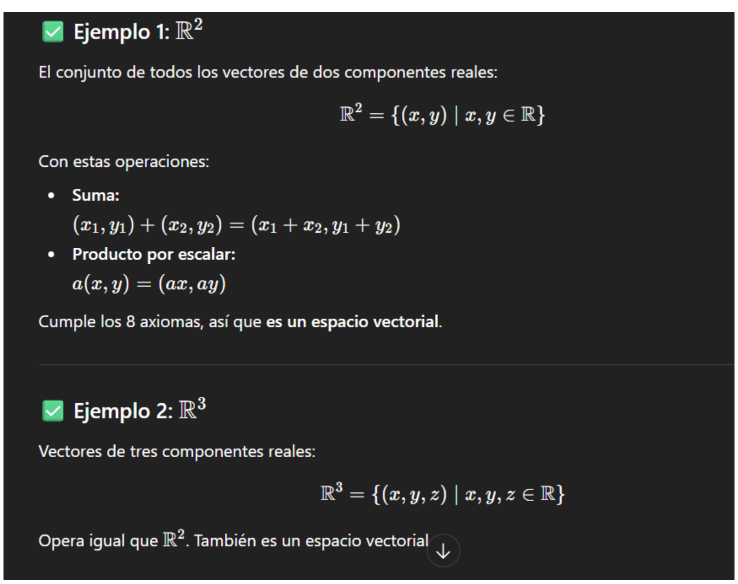
2. **Multiplicación por un escalar:**

   ⋅:K×V→V\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V⋅:K×V→V

Estas operaciones deben satisfacer **ocho axiomas** (o propiedades) para todos los vectores u,v,w∈Vu, v, w \in Vu,v,w∈V y todos los escalares a,b∈Ka, b \in \mathbb{K}a,b∈K:

Axiomas de la suma

1. **Clausura:**
   u+v∈Vu + v \in Vu+v∈V
2. **Conmutatividad:**
   u+v=v+uu + v = v + uu+v=v+u
3. **Asociatividad:**
   u+(v+w)=(u+v)+wu + (v + w) = (u + v) + wu+(v+w)=(u+v)+w
4. **Existencia del vector cero:**
   Existe un elemento 0∈V0 \in V0∈V tal que
   v+0=vv + 0 = vv+0=v
5. **Existencia de inverso aditivo:**
   Para cada v∈Vv \in Vv∈V existe un −v∈V-v \in V−v∈V tal que
   v+(−v)=0v + (-v) = 0v+(−v)=0


Ejemplo 1: $\mathbb{R}^2$

El conjunto de todos los vectores de dos componentes reales:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Con estas operaciones:

- **Suma:**
  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- **Producto por escalar:**
  $a(x, y) = (ax, ay)$

Cumple los 8 axiomas, así que **es un espacio vectorial**.

Ejemplo 2: $\mathbb{R}^3$

Vectores de tres componentes reales:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Opera igual que $\mathbb{R}^2$. También es un espacio vectorial

Axiomas del producto por un escalar

6. **Compatibilidad con la multiplicación del cuerpo:**
a(bv)=(ab)va(bv) = (ab)va(bv)=(ab)v
7. **Elemento neutro del cuerpo:**
1v=v1v = v1v=v, donde 111 es el elemento identidad del cuerpo
8. **Distributividad:**
   - Respecto a los vectores
   - = av + bv(a+b)v=av+bv

4.2 Definición de subespacio vectorial y sus propiedades

Un **subespacio vectorial** es un **subconjunto** de un espacio vectorial que, por sí mismo, también cumple con todos los axiomas de espacio vectorial. Es decir, si partimos de un espacio vectorial VVV, un subconjunto W⊆VW \subseteq VW⊆V se llama **subespacio vectorial** si:

1. **El vector cero de VVV está en WWW.**
2. **Es cerrado bajo la suma de vectores:**

   u,v∈W⇒u+v∈Wu, v \in W \Rightarrow u + v \in Wu,v∈W⇒u+v∈W

3. **Es cerrado bajo la multiplicación por escalares:**

   α∈K, v∈W⇒αv∈W\alpha \in \mathbb{K},\; v \in W \Rightarrow \alpha v \in Wα∈K,v∈W⇒αv∈W

Si estas tres condiciones se cumplen, entonces WWW es un subespacio vectorial de VVV. Una ventaja importante es que **no es necesario comprobar los 8 axiomas completos**, porque al estar dentro de un espacio vectorial ya heredará esas propiedades; solo basta verificar estas tres.

Propiedades importantes de los subespacios

1. **El subespacio más pequeño es {0}\{0\}{0}**
   Contiene únicamente al vector cero.
   Siempre es un subespacio y se llama *subespacio trivial*.
2. **El subespacio más grande es el mismo espacio VVV**
   Cualquier espacio vectorial es subespacio de sí mismo.
3. **La intersección de subespacios es un subespacio**
   Si W1W_1W1 y W2W_2W2 son subespacios, entonces:

   W1∩W2 tambie´n es un subespacioW_1 \cap W_2 \text{ también es un subespacio}W1∩W2 tambie´n es un subespacio

   Porque la intersección conserva cierre bajo suma y escalares.

4. **La unión de subespacios generalmente NO es un subespacio**
   Solo es subespacio si uno de ellos está contenido en el otro.
   (Esto se debe a que la unión no garantiza cierre bajo suma.)

5. **Un subespacio siempre es “linealmente estable”**
   Esto significa que cualquier combinación lineal de sus elementos también pertenece al subespacio:

   α1v1+α2v2+⋯+αnvn∈W\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in Wα1v1+α2v2+⋯+αnvn∈W

   siempre que todos los vi∈Wv_i \in Wvi∈W y αi∈K\alpha_i \in \mathbb{K}αi∈K.

4.3 Combinación lineal. Independencia lineal.

Un conjunto de vectores {v1,v2,…,vn}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}{v1,v2,…,vn} se dice **linealmente independiente** si la única solución a la ecuación:

α1v1+α2v2+⋯+αnvn=0\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0α1v1+α2v2+⋯+αnvn=0

es:

α1=α2=⋯=αn=0\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0α1=α2=⋯=αn=0

Es decir, **no se puede expresar un vector del conjunto como combinación lineal de los otros**.

Si existe una solución no trivial

(es decir, algún coeficiente αi≠0\alpha_i \neq 0αi□=0)
entonces los vectores son **linealmente dependientes**.

Ejemplo de dependencia lineal

En $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,2,3), \quad v_2 = (2,4,6)$$

Notamos que:

$$v_2 = 2v_1$$

Esto implica que existe una combinación no trivial:

$$-2v_1 + 1v_2 = 0$$

Como hay una relación no trivial, los vectores son **dependientes**.

4.4 Base y dimensión de un espacio vectorial, cambio de base

1. Base de un espacio vectorial

Una **base** de un espacio vectorial VVV es un conjunto de vectores

{v1,v2,…,vn}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}{v1,v2,…,vn}

que cumple **dos condiciones fundamentales**:

1. **Son linealmente independientes.**
   Ninguno puede escribirse como combinación lineal de los otros.
2. **Generan el espacio VVV.**
   Cualquier vector v∈Vv \in Vv∈V puede escribirse como combinación lineal de ellos, es decir:

v=α1v1+α2v2+⋯+αnvnv = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_nv=α1v1+α2v2+⋯+αnvn

Si un conjunto de vectores cumple ambas condiciones, entonces es una base.

Ejemplo de base

En R2\mathbb{R}^2R2, los vectores:

(1,0),(0,1)(1,0), \quad (0,1)(1,0),(0,1)

forman una base porque:

- son independientes,
- cualquier vector (x,y)(x,y)(x,y) se puede escribir como

(x,y)=x(1,0)+y(0,1)(x,y) = x(1,0) + y(0,1)(x,y)=x(1,0)+y(0,1)

---

2. Dimensión de un espacio vectorial

La **dimensión** de un espacio vectorial VVV, denotada dim(V)\dim(V)dim(V), es el **número de vectores** que tiene cualquiera de sus bases.

Una propiedad fundamental es que **todas las bases de un mismo espacio tienen la misma cantidad de vectores**.

Ejemplos:

- dim(R2)=2\dim(\mathbb{R}^2) = 2dim(R2)=2
- dim(R3)=3\dim(\mathbb{R}^3) = 3dim(R3)=3

- Si P3P_3P3 es el espacio de polinomios de grado ≤ 3, entonces

3. Cambio de base

En un espacio vectorial, un mismo vector puede representarse de manera distinta según la base que se elija.

Idea general:

Si un vector vvv tiene coordenadas distintas respecto a dos bases BBB y B′B'B′, existe una matriz que permite convertir unas coordenadas en otras.

- B={v1,v2,…,vn}B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}B={v1,v2,…,vn}
- B′={w1,w2,…,wn}B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}B′={w1,w2,…,wn}

Para cambiar las coordenadas de una base a otra usamos la **matriz de cambio de base**.

Matriz de cambio de base

La matriz que transforma coordenadas de la base B′B'B′ a la base BBB se forma **expresando los vectores de B′B'B′** como combinación lineal de los vectores de BBB.

- Cada columna de la matriz es la representación de un vector de B′B'B′ respecto de BBB.

Si la matriz se llama PPP, entonces:

[v]B=P [v]B′[v]_B = P \, [v]_{B'}[v]B=P[v]B′

Y si queremos pasar al revés:

[v]B′=P−1[v]B[v]_{B'} = P^{-1} [v]_B[v]B′=P−1[v]B

4.5 Espacio vectorial con producto interno y sus propiedades

1. Producto interno

Sea VVV un espacio vectorial sobre R\mathbb{R}R o C\mathbb{C}C.
Un **producto interno** es una aplicación:

⟨·,·⟩:V×V→RoC\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \quad \text{o} \quad \mathbb{C}⟨·,·⟩:V×V→RoC que asigna a cada par de vectores (u,v)(u, v)(u,v) un número real (o complejo) y que cumple las siguientes propiedades:

---

2. Propiedades del producto interno

Para todos los vectores u,v,w∈Vu, v, w \in Vu,v,w∈V y todo escalar α\alphaα:

1. Positividad

⟨v,v⟩≥0\langle v, v \rangle \ge 0⟨v,v⟩≥0

y además:

⟨v,v⟩=0solo siv=0\langle v, v \rangle = 0 \quad \text{solo si} \quad v = 0⟨v,v⟩=0solo siv=0

2. Simetría (real) o Hermiticidad (complejo)

- En espacios reales:

  ⟨u,v⟩=⟨v,u⟩\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle⟨u,v⟩=⟨v,u⟩

- En espacios complejos:

  ⟨u,v⟩=⟨v,u⟩¯\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}⟨u,v⟩=⟨v,u⟩

3. Linealidad en la primera entrada

⟨αu+v,w⟩=α⟨u,w⟩+⟨v,w⟩\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle⟨αu+v,w⟩=α⟨u,w⟩+⟨v,w⟩

(En espacios complejos es *antilineal* en la segunda entrada.)

4. Homogeneidad

⟨αu,v⟩=α⟨u,v⟩\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle⟨αu,v⟩=α⟨u,v⟩

---

3. Ejemplo típico de producto interno

En Rn\mathbb{R}^nRn

El producto interno estándar (o producto punto) es:

⟨u,v⟩=u1v1+u2v2+⋯+unvn\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n⟨u,v⟩=u1v1+u2v2+⋯+unvn

Para:

u=(1,2,3),v=(4,5,6)u = (1,2,3), \quad v = (4,5,6)u=(1,2,3),v=(4,5,6)
⟨u,v⟩=1·4+2·5+3·6=32\langle u, v \rangle = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32⟨u,v⟩=1·4+2·5+3·6=32

---

4. Norma inducida por el producto interno

El producto interno define automáticamente una **norma**:

‖v‖=⟨v,v⟩\| v \| = \sqrt{ \langle v , v \rangle }‖v‖=⟨v,v⟩

Ejemplo:

‖(3,4)‖=32+42=5.\| (3,4) \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.‖(3,4)‖=32+42=5.

---

5. Ortogonalidad

Dos vectores uuu y vvv se dicen **ortogonales** si:

⟨u,v⟩=0\langle u, v \rangle = 0⟨u,v⟩=0

Ejemplo:

(1,0)⊥(0,1)en R2(1,0) \perp (0,1) \quad \text{en } \mathbb{R}^2(1,0)⊥(0,1)en R2

---

6. Propiedades importantes derivadas del producto interno

1. Identidad del paralelogramo

‖u+v‖2+‖u−v‖2=2‖u‖2+2‖v‖2\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2‖u+v‖2+‖u−v‖2=2‖u‖2+2‖v‖2

2. Desigualdad de Cauchy–Schwarz

|⟨u,v⟩|≤‖u‖ ‖v‖|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \, \|v\||⟨u,v⟩|≤‖u‖ ‖v‖

3. Desigualdad del triángulo

‖u+v‖≤‖u‖+‖v‖\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|‖u+v‖≤‖u‖+‖v‖

Estas propiedades garantizan que los espacios con producto interno se comporten “geométricamente” como los espacios que conocemos (ángulos, longitudes, distancias, etc.).

---

7. Base ortogonal y base ortonormal

Un conjunto de vectores {v1,…,vn}\{v_1, \dots, v_n\}{v1,…,vn} es:

- **Ortogonal** si

  ⟨vi,vj⟩=0para i≠j\langle v_i , v_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j⟨vi,vj ⟩=0para i□=j

- **Ortonormal** si además cada vector tiene norma 1:

  ‖vi‖=1\|v_i\| = 1‖vi‖=1

Ejemplo de base ortonormal en R2\mathbb{R}^2R2:

{(1,0),(0,1)}\left\{ (1,0), (0,1) \right\}{(1,0),(0,1)}

4.6 Base ortonormal, proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

El método de Gram–Schmidt sirve para convertir un conjunto de vectores **linealmente independientes** en una **base ortonormal** para el mismo subespacio que generan.

Idea general del proceso

Dado un conjunto de vectores LI:

{u1,u2,…,un}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}{u1,u2,…,un}

se construyen vectores ortogonales:

w1,w2,…,wnw_1, w_2, \dots, w_nw1,w2,…,wn

y luego se normalizan para obtener:

e1,e2,…,ene_1, e_2, \dots, e_ne1,e2,…,en

que forman la **base ortonormal** buscada.

Fórmulas del proceso

1. Primer vector

w1=u1w_1 = u_1w1=u1 e1=w1∥w1∥e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}e1=∥w1∥w1

2. Segundo vector

w2=u2−proyw1(u2)w_2 = u_2 - \text{proy}_{w_1}(u_2)w2=u2−proyw1(u2)

donde

proyw1(u2)=⟨u2,w1⟩⟨w1,w1⟩w1\text{proy}_{w_1}(u_2) = \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1proyw1(u2)=⟨w1,w1⟩⟨u2,w1⟩w1 e2=w2∥w2∥e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}e2=∥w2∥w2

3. Tercer vector

w3=u3−proyw1(u3)−proyw2(u3)w_3 = u_3 - \text{proy}_{w_1}(u_3) - \text{proy}_{w_2}(u_3)w3=u3−proyw1(u3)−proyw2(u3) e3=w3∥w3∥e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}e3=∥w3∥w3

Y así sucesivamente para todos los vectores.

$$u_1 = (1,1), \qquad u_2 = (1,0)$$

Paso 1: obtener w_1 y e_1

$$w_1 = u_1 = (1,1)$$

$$\|w_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

Paso 2: obtener w_2

Primero la proyección:

$$\text{proy}_{w_1}(u_2) = \frac{\langle (1,0),(1,1)\rangle}{\langle (1,1),(1,1)\rangle}(1,1) = \frac{1}{2}(1,1)$$

Ahora:

$$w_2 = u_2 - \text{proy}_{w_1}(u_2) = (1,0) - \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Finalmente, normalizamos:

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1/2}{1/\sqrt{2}}(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

5.1 Definición de transformación lineal

Una **transformación lineal** (o **aplicación lineal**) es una función

T:V→WT: V \rightarrow WT:V→W

entre dos espacios vectoriales (sobre el mismo campo), que **preserva las operaciones básicas del álgebra vectorial**: la suma de vectores y el producto por un escalar.

Formalmente, TTT es lineal si cumple **dos propiedades** para todos los vectores u,v∈Vu, v \in Vu,v∈V y cualquier escalar α\alphaα:

1. **Preserva la suma**

T(u+v)=T(u)+T(v)T(u+v) = T(u) + T(v)T(u+v)=T(u)+T(v)

2. **Preserva la multiplicación por un escalar**

T(αu)=α T(u)T(\alpha u) = \alpha\, T(u)T(αu)=αT(u)

Si ambas condiciones se cumplen, entonces la función respeta la estructura del espacio vectorial y por eso se llama **lineal**.

Ejemplos de transformaciones lineales

✔ **Ejemplo 1: Escalamiento**

$$T(x, y) = (2x, 2y)$$

Esta transformación estira todos los vectores al doble de su magnitud y respeta las dos propiedades.

✔ **Ejemplo 2: Proyección sobre el eje x**

$$T(x, y) = (x, 0)$$

Toma un vector en $\mathbb{R}^2$ y lo proyecta sobre el eje horizontal.
También es lineal.

✔ **Ejemplo 3: Matriz como transformación lineal**

Toda matriz representa una transformación lineal.
Por ejemplo, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

entonces

$$T(x, y) = (x + 3y,\ 2y)$$

5.2 Núcleo e imagen de una transformación lineal

Sea

T:V→WT: V \rightarrow WT:V→W

una transformación lineal entre dos espacios vectoriales.

Núcleo de una transformación lineal

El **núcleo** (o *kernel*) de TTT es el conjunto de todos los vectores de VVV que la transformación envía al vector cero de WWW:

ker(T)={ v∈V∣T(v)=0 }\ker(T) = \{\, v \in V \mid T(v) = 0 \,\}ker(T)={v∈V∣T(v)=0}

Interpretación

- Son los vectores que "desaparecen" bajo la acción de TTT.
- Mide cuánta información se pierde con la transformación.
- Siempre es un **subespacio de VVV**.

Imagen de una transformación lineal

La **imagen** (o *rango*) de TTT es el conjunto de todos los vectores de WWW que se pueden obtener como resultado de aplicar TTT a algún vector de VVV:

Im(T)={ T(v)∣v∈V }\text{Im}(T) = \{\, T(v) \mid v \in V \,\}Im(T)={T(v)∣v∈V}

Interpretación

- Son todos los vectores "alcanzables" o producidos por la transformación.
- Siempre es un **subespacio de WWW**.
- Indica hasta dónde "llega" la transformación.

Propiedades importantes

✔ El núcleo y la imagen son subespacios

Ambos cumplen:

- Contienen al vector cero.
- Son cerrados bajo suma.
- Son cerrados bajo multiplicación por escalar.

✔ **Relación fundamental: Teorema Rango–Nulidad**

5.3 Representación matricial de una transformación lineal

Sea

T:V→WT: V \rightarrow WT:V→W

una transformación lineal, donde VVV y WWW son espacios vectoriales de dimensión finita.

Para representar a TTT mediante una **matriz**, debemos elegir bases:

- Una base de VVV: B={v1,v2,…,vn}\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}B={v1,v2,…,vn}
- Una base de WWW: C={w1,w2,…,wm}\mathcal{C} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}C={w1,w2,…,wm}

La **matriz de TTT respecto a las bases B\mathcal{B}B y C\mathcal{C}C** es la matriz que transforma coordenadas de VVV (en base B\mathcal{B}B) en coordenadas de WWW (en base C\mathcal{C}C).

¿Cómo se forma la matriz?

1. **Aplica TTT** a cada vector de la base de VVV:

T(v1),T(v2),…,T(vn)T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)T(v1),T(v2),…,T(vn)

2. **Expresa cada imagen** como combinación lineal de la base de WWW:

T(vj)=a1jw1+a2jw2+⋯+amjwmT(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{mj} w_mT(vj)=a1jw1+a2jw2+⋯+amjwm

3. **Coloca esos coeficientes como columnas** de la matriz:

[T]BC=(a11a12…a1na21a22…a2n⋮⋮⋱⋮am1am2…amn)[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}[T]BC=a11a21⋮am1a12a22⋮am2……⋱…a1na2n⋮amn

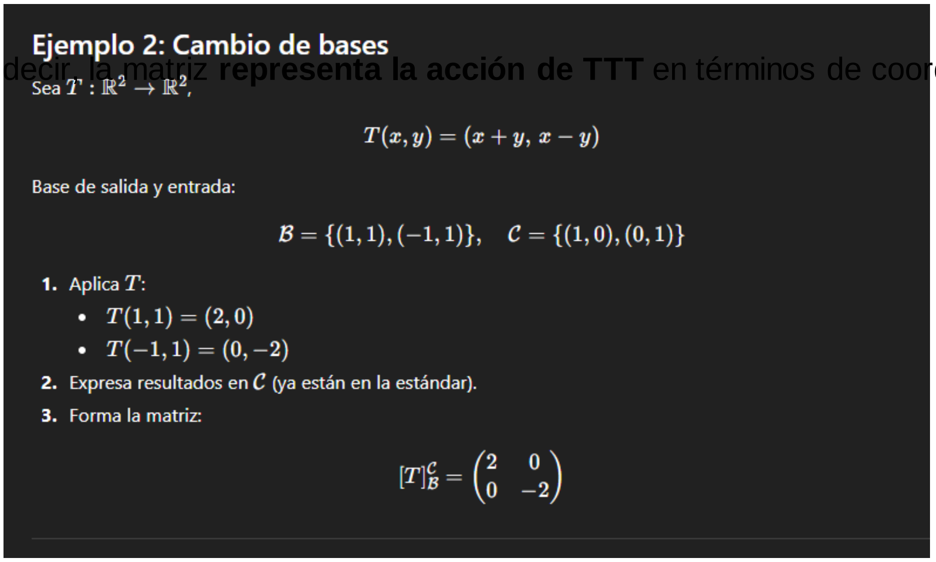
---

Interpretación

Si un vector vvv se expresa en coordenadas respecto a B\mathcal{B}B como [v]B[v]_{\mathcal{B}}[v]B, entonces:

[T(v)]C=[T]BC [v]B[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \, [v]_{\mathcal{B}}[T(v)]C=[T]BC[v]B

Es decir, la matriz **representa la acción de TTT** en términos de coordenada



Ejemplo 2: Cambio de bases

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T(x, y) = (x + y, x - y)$$

Base de salida y entrada:

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$$

1. Aplica T:
   - $T(1,1) = (2,0)$
   - $T(-1,1) = (0,-2)$
2. Expresa resultados en $\mathcal{C}$ (ya están en la estándar).
3. Forma la matriz:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5.4 Aplicación de las transformaciones lineales: reflexión, dilatación, contracción y rotación

Las transformaciones lineales permiten modelar cambios geométricos en el plano R2\mathbb{R}^2R2 o el espacio R3\mathbb{R}^3R3.
Estas transformaciones preservan la estructura lineal y pueden representarse mediante **matrices** que actúan sobre vectores.

---

1. Dilatación (Escalamiento)

Una **dilatación** es una transformación que amplía un vector multiplicándolo por un factor k>1k > 1k>1.

Definición

T(x⃗)=kx⃗T(\vec{x}) = k\vec{x}T(x)=kx

Matriz en R2\mathbb{R}^2R2

T=(k00k)T= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}T=(k00k)

Ejemplo

Dilatación con factor k=3k=3k=3:

T(x,y)=(3x,3y)T(x,y) = (3x, 3y)T(x,y)=(3x,3y)

---

2. Contracción

La **contracción** es lo opuesto a la dilatación: reduce el tamaño del vector con un factor 0<k<10 < k < 10<k<1.

Definición

T($\vec{x}$)=k$\vec{x}$T(\vec{x}) = k\vec{x}T(x)=kx

Matriz

T=(k00k),0<k<1T= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad 0<k<1T=(k0 0k),0<k<1

Ejemplo

Con k=12k=\tfrac{1}{2}k=21:

T(x,y)=(12x,12y)T(x,y) = \left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)T(x,y)=(21x,21y)

---

3. Reflexión (Espejo)

Una **reflexión** es una transformación lineal que refleja puntos respecto a una línea (en R2\mathbb{R}^2R2) o un plano (en R3\mathbb{R}^3R3).

a) Reflexión respecto al eje xxx

T(x,y)=(x,−y)T(x,y) = (x,-y)T(x,y)=(x,−y)

Matriz:

(100−1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(100−1)

b) Reflexión respecto al eje yyy

T(x,y)=(−x,y)T(x,y) = (-x,y)T(x,y)=(−x,y)

Matriz:

(−1001)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(−1001)

c) Reflexión respecto a la línea y=xy=xy=x

T(x,y)=(y,x)T(x,y) = (y,x)T(x,y)=(y,x)

Matriz:

(0110)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(0110)

---

4. Rotación

Una **rotación** gira los vectores del plano alrededor del origen un ángulo θ\thetaθ.

Definición

T(x,y)=(xcos⁡θ−ysin⁡θ, xsin⁡θ+ycos⁡θ)T(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\; x\sin\theta + y\cos\theta)T(x,y)=(xcosθ−ysinθ,xsinθ+ycosθ)

Matriz

R(θ)=(cos⁡θ−sin⁡θsin⁡θcos⁡θ)R(\theta)= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}R(θ)=(cosθsinθ−sinθcosθ)

Ejemplo: Rotación de 90°

R(90∘)=(0−110)R(90^\circ)= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}R(90∘)=(01−10)

Entonces:

T(x,y)=(−y,x)T(x,y) = (-y,x)T(x,y)=(−y,x)