Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Tópicos Avanzados en Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

PRÁCTICA 1: TEORÍA DE GRAFOS

Rodríguez Jeremías

31 de marzo de 2017

1. Ejercicio 6

1.1. Apartado A

Observemos que $G_n = (V_n \cup W_n, E_n)$, $V_n \cap W_n = \varnothing$, donde:

$$\begin{aligned} V_n &= \{v_1, v_2, ..., v_n\} \\ W_n &= \{w_1, w_2, ..., w_n\} \\ E_n &= \{v_i w_i \mid i \in \{1, ..., n\}\ \} \end{aligned}$$

Cláramente todo conjunto estable de G_n podrá contener a lo sumo a uno de entre v_i y w_i, fijado un $i \in \{1, .., n\}$. Luego si S es estable, $|S| \leqslant n$.

Lema: Sea S estable en G_n. Entonces:

$$S \text{ estable maximal de } G_n \Leftrightarrow\ |S| = n$$

d/

$\Rightarrow$) Supongamos que $|S| = m < n$. Entonces, $\exists\ i\ \in \{1, ..., n\} \mid v_i \notin S\ \wedge w_i \notin S$
Consideremos $S \cup \{v_i\}$. Es estable pues S es estable y $w_i \notin S$. Luego S no es maximal. Absurdo.

$\therefore |S| = n$

$\Leftarrow$) Supongamos que S no es maximal. Entonces $\exists\ S' \subseteq W_n \cup V_n \mid S \subset S'$ y S' es estable. Luego S' es estable con $|S'| > n$. Luego $\exists\ i \in \{1, ..., n\}\ v_i \in S' \wedge w_i \in S'$. Luego S' no es estable pues estos últimos vértices son vecinos.

$\therefore\ S$ maximal

Como consecuencia de este lema, hay tantos conjuntos estables maximales en G_n como conjuntos estables de cardinalidad n.

Veamos, usando inducción matemática, que en G_n hay 2^n de estos conjuntos:

$$\text{P(n): } |\{S \subseteq V_n \cup W_n \mid |S| = n\ \wedge\ S \text{ estable en } G_n\}| = 2^n$$

El caso base es con $G_1 = K_1$, donde cláramente hay $2 = 2^1$ estables.

En el caso de G_{n+1}, observemos que un estable maximal será la unión entre un estable de G_n y exáctamente uno entre $\{v_{n+1}\}$ y $\{w_{n+1}\}$.

Por hipótesis inductiva hay 2^n conjuntos estables en G_n. Luego por regla del producto habrá $2^n * 2 = 2^{n+1}$ formas de combinar uno de los estables de G_n con exáctamente uno entre v_{n+1} y w_{n+1}.

Entonces, por inducción matemática vale $P(n)\ \forall n$

$\therefore$ Hay 2^n estables de cardinal máximo en G_n

1.2. Apartado B

Deseamos encontrar grafos con una cantidad exponencial de cliques maximales respecto al número de vertices.

Lema: Sea $G = (V, E)$ grafo, y sea $S \subseteq V$

$$S \text{ es estable maximal en } G \Leftrightarrow S \text{ es clique maximal en } \bar{G}$$

d/ Solo demuestro el implica, la vuelta es análoga.
$\Rightarrow$)
Veamos primero que es clique y luego que es maximal.

S estable en G $\Leftrightarrow \forall\ u, v \in S\ , \{u, v\} \notin E(G). \Leftrightarrow \forall\ u, v \in S\, \{u, v\} \in \bar{G} \Leftrightarrow S$ es clique en $\bar{G}$

Supongamos que S no es clique maximal en $\bar{G} \Rightarrow\ \exists\ S'\ :\ S \subset S'\ \wedge\ S'$ clique en $\bar{G}$ $\Rightarrow \exists\ S'\ :\ S \subset S'\ \wedge\ S'$ estable en G . Absurdo pues S es estable maximal.

$\therefore$ S es clique maximal en $\bar{G}$.

Usando este lema, sabemos que hay una correspondencia entre cliques maximales de $\bar{G}$ y estables maximales de G.

Consideramos el grafo G_n que estudiamos en la sección anterior, tiene una cantidad exponencial de estables maximales. Luego $\bar{G_n}$ tendrá una cantidad exponencial de cliques maximales respecto al número de vértices.

2. Ejercicio 12

Sea G un grafo con $n = |V(G)|$. Fijado un vértice en G, este puede dominar a lo sumo $\Delta(G) + 1$ vértices.

Luego, para dominar todos los vértices de G, necesitaremos al menos $\frac{n}{\Delta(G)+1}$ vértices:

$$\gamma(G) \geqslant \tfrac{n}{\Delta(G)+1}$$

Es decir:

$$\gamma(G)(\Delta(G) + 1) \geqslant n$$

Dado un k natural, un ejemplo (poco elegante) de que esta cota es tan mala como queramos es el grafo no conexo G_k cuyas componentes conexas son:

- Un grafo completo K_k.
- $k - 1$ vértices aislados.

Luego:

$$\begin{aligned} n &= k - 1 + k = 2k - 1 \\ \Delta(G_k) &= k - 1 \\ \gamma(G_k) &= k \end{aligned}$$

Luego, para $k \geqslant 3$ se puede probar por inducción matemática que:

$$\gamma(G_k)(\Delta(G_k) + 1) = k^2 \geqslant 3k - 1 = 2k - 1 + k = n + k$$

3. Ejercicio 13

3.1. Apartado A

CASO NO TOTAL

Sea G un grafo, y sea D=$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto dominante mínimo de G. Consideremos la secuencia S=$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$. Veamos que S es una secuencia legal en G:

Supongamos que S no es secuencia legal. Entonces:

$$\exists\ i \in \{2, \ldots, n\}\ :\ N[v_i] - \bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j] = \varnothing$$

Entonces, el conjunto $D - \{v_i\}$ también es conjunto dominante, pues todo elemento de $N[v_i]$ está en la vecindad de algun otro elemento $v_k,\ k < i$.

Entonces, D no es mínimo. Absurdo.

$\therefore$ S es secuencia legal.

CASO TOTAL

Sea G un grafo, y sea D=$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto dominante total mínimo de G. Consideremos la secuencia S=$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$. Veamos que S es una secuencia legal total en G:

Supongamos que S no es secuencia legal. Entonces:

$$\exists\ i \in \{2, \ldots, n\}\ :\ N(v_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} N(v_j) = \varnothing$$

Entonces, el conjunto $D - \{v_i\}$ también es conjunto dominante total, pues todo elemento de $N(V_i)$ está en la vecindad de algun otro elemento $v_k,\ k < i$.

Entonces, D no es mínimo. Absurdo.

$\therefore$ S es secuencia legal total.

Obs: Como los conjuntos no tienen orden, se desprende que cualquier ordenación de D que hagamos, vista como secuencia, será legal (total) en G.

3.2. Apartado B

CASO NO TOTAL

Sea S=$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ secuencia legal de máxima longitud, y sea Ŝ= $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Veamos que Ŝ es conjunto dominante de G:

Supongamos que Ŝ no es dominante en G. Entonces:

$$\exists\ v \in V\ :\ v \notin \bigcup_{i=1}^{n} N[v_i]$$

Entones, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n, v\rangle$ Es secuencia legal. Luego S no es secuencia de legal de longitud máxima. Absurdo.

$\therefore$ Ŝ es dominante.

CASO TOTAL (Asumo que no hay vértices aislados)

Sea S=$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ secuencia de legal total de máxima longitud, y sea Ŝ= $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Veamos que Ŝ es conjunto dominante total de G:

Supongamos que Ŝ no es dominante en G. Entonces:

$$\exists\ v \in V\ \ :\ \ v \notin \bigcup_{i=1}^{n} N(v_i)$$

Entones, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n, z\rangle$ Es secuencia de legal total, donde $z \in N(v)$. Luego S no es secuencia legal total de longitud máxima. Absurdo.

$\therefore$ Ŝ es dominante total.

3.3. Apartado C

CASO NO TOTAL

Sean u y v vértices mellizos verdaderos en G. Deseamos probar que $\gamma_{gr}(G) = \gamma_{gr}(G - v)$.

Hagamos algunas observaciones previas:

- Como $N_G[u] = N_G[v]$, u y v son adyacentes.
- Si S es una secuencia legal en $G - v$, entonces S también es una secuencia legal en G.
- En una secuencia legal en G, no pueden estar u y v a la vez. (Si está primero u, luego agregar a v en la secuencia no cubriría vértices nuevos y viceversa)

Sea S=$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ una secuencia legal en G de longitud máxima (n=$\gamma_{gr}(G)$)

Supongamos $\gamma_{gr}(G) < \gamma_{gr}(G - v)$ entonces habría una secuencia legal en G-v de longitud mayor a n. Esa secuencia también será legal en G, luego $\gamma_{gr}(G) > n$, absurdo. Luego, sabemos que vale:

$$\gamma_{gr}(G) \geqslant \gamma_{gr}(G - v)$$

Para probar que $\gamma_{gr}(G) = \gamma_{gr}(G - v)$, es suficiente hallar una secuencia legal S' en G-v tal que $|S'| = n$. Para hallar esta secuencia S', analizaré dos casos:

Subcaso 1: S no contiene al vértice v

Propongo S'=S. Está claro que S es secuencia de vértices de G-v, y que su longitud es n. Solo resta probar que S es legal en $G - v$. Supongamos que no lo es. Entonces:

$$\exists\ i \in \{2, ..., n\}\ \ :\ \ N_{G-v}[v_i] - \bigcup_{j=0}^{n} N_{G-v}[v_j] = \varnothing$$

Además, como S es secuencia legal en G, sabemos que:

$$N_G[v_i] - \bigcup_{j=0}^{n} N_G[v_j] \neq \varnothing$$

Como $N_{G-v}[x] \subseteq N_G[x]\ \forall x$, la única forma de que la primera resta sea vacía y la segunda no vacía, es que:

$$N_{G-v}[v_i] \subset N_G[v_i] \text{ (estricto)}$$

Es decir,

$$N_{G-v}[v_i] = N_G[v_i] - \{v\}$$

Luego

$$N_G[v_i] - \bigcup_{j=0}^{n} N_G[v_j] = \{v\}.$$

Pero esto es absurdo, pues v y u son mellizos verdaderos, y esa resta no puede tener sólo a v:

$$v \in (N_G[v_i] - \bigcup_{j=0}^{n} N_G[v_j]) \Leftrightarrow u \in (N_G[v_i] - \bigcup_{j=0}^{n} N_G[v_j])$$

$\therefore S'$ es secuencia

<u>Subcaso 2</u>: S contiene al vértice $v_i = v$ (consecuentemente no contiene a u)

Entonces formamos la secuencia S'=$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$. Como u y v son mellizos verdaderos, S' también será secuencia legal de longitud máxima en G. Además, S' es secuencia en G-v.

Para ver que es legal, con un razonamiento análogo al caso 1, la única forma de que no sea legal es que en el vértice v_k, la resta de vacía en G-v y no en G.

Esto nuevamente es absurdo, porque u y v son mellizos verdaderos y la resta no puede ser vacía ya que el vértice u debe pertenecer.

$\therefore S'$ es secuencia

$\therefore \gamma_{gr}(G) = \gamma_{gr}(G - v)$.

<u>CASO TOTAL</u>
En este caso, si u y v son mellizos falsos (i.e. $N(u) = N(v)$), propongo la siguiente igualdad:

$$\gamma_{gr}^t(G) = \gamma_{gr}^t(G - v)$$

Para probar esto razonaré análogamente.
Sea $n = \gamma_{gr}^t(G)$. Es decir, n el máximo de las longitudes de secuencias legales totales en G.

Sabemos que $n \geqslant \gamma_{gr}^t(G - v)$. Luego, si encontramos una secuencia legal total en $G - v$ de longitud n, resultará válida la igualdad que propongo.

Tomo una secuencia legal total en G, $S = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$

<u>Subcaso 1</u>: v no está en S. Razonamos análogamente al caso no total, viendo que S es una secuencia legal total en G-v: Supongamos que no lo es, entonces en el elemento s_i resulta:

$$N_{G-v}(s_i) - \cup_{j=1}^{i} N_{G-v}(s_j) = \varnothing$$

Dado que S secuencia legal total en G, esta diferencia no es vacía en G. La única forma de que también sea vacía en $G - v$ es $v \in N_G(s_i)$, y más aún: $(\{v\} = N_G(s_i))$.
Pero esto es absurdo, pues u y v son mellizos falsos, y en ese paso debían ser agregados los dos o ninguno. Luego S es secuencia en $G - v$.

<u>Subcaso 2</u>: u y v están en la secuencia. Esto nunca puede suceder pues si en un paso se agrega la vecindad de u, agregar en otro paso la vecindad de v no sumará nuevos vértices cubiertos.
<u>Subcaso 3</u>: v está en la secuencia. Lo reemplazamos por u y verificamos que es secuencia legal, de forma análoga al caso total.

$\therefore \gamma_{gr}^t(G) = \gamma_{gr}^t(G - v)$

4. Ejercicio 17

Consideremos $G \square H$ producto escalar de G y H. Asumo que G y H son grafos simples, sin bucles y no vacíos.

4.1. Apartado A

Como $V(H) \neq \varnothing$, tomemos $h \in V(H)$ y consideremos:

$$C = V(G) \times \{h\} \subseteq G \square H$$

El subgrafo inducido por C en $G \square H$ es:

$$G' = (C, E')$$

Donde E' son las aristas de $G \square H$ tales que sus extremos están en $V(G) \times \{h\}$. Por definición de arista de $G \square H$ esto se reduce a:

$$E' = \{g_1h\ g_2h \mid g_1\ g_2\ \in E(G)\}$$

Luego, considerando el subgrafo inducido G' en $G \square H$, probaré que $G' \cong G$. Sea la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : G &\mapsto G' \\ f(g) &= (g, h) \end{aligned}$$

Es cláramente inyectiva ($(g_1, h) = (g_2, h) \Rightarrow g_1 = g_2$) y sobreyectiva (Dado $y = (g, h) \in Cod(f)$, $y = f(g)$).
Además cláramente $g_1h\ g_2h\ \in E' \Leftrightarrow g_1\ g_2\ \in E(G)$, por definición de E'.

$$\therefore G' \cong G$$

Análogamente definimos H' como el subgrafo inducido por $\{g\} \times V(H)$ para algún $g \in V(G)$.

$$\therefore H' \cong H$$

4.2. Apartado B

Sean $\chi(G)$ y $\chi(H)$ los números de coloreo de G y H respectivamente. Por el apartado anterior, $\chi(G) = \chi(G')$ y $\chi(H) = \chi(H')$. Consecuentemente, al ser H' y G' subgrafos de $G \square H$ tenemos que:

$$\chi(G \square H) \geqslant \chi(G)$$
$$\chi(G \square H) \geqslant \chi(H)$$

Entonces, tomando $\mathrm{m} = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ tenemos que:

$$\chi(G \square H) \geqslant \mathrm{m}$$

Para probar la igualdad, es suficiente con hallar un m-coloreo de $G \square H$.
Sean $c_G : V(G) \mapsto \{1, ..., \chi(G)\}$ y $c_H : V(H) \mapsto \{1, ..., \chi(H)\}$ dos coloreos de G y H. Definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : V(G \square H) &\mapsto \{1, ..., m\} \\ f(g, h) &= c_G(g) +_{mod_m} c_H(h) \end{aligned}$$

Para ver que es un coloreo consideremos dos vértices adyacentes en $G \square H$.

<u>Caso 1</u>: $g_1h\ g_2h\ \in\ E(G \square H)$. Supongamos que ambos extremos están igualmente coloreados:

$$\begin{aligned} c(g_1h) = c(g_2h) &\quad \Rightarrow \\ c_G(g_1) + c_H(h) = c_G(g_2) + c_H(h) &\quad \Rightarrow \\ c_G(g_1) = c_G(g_2) & \end{aligned}$$

Lo cual es absurdo pues c_G es un coloreo y $g_1\ g_2 \in E(G)$.
<u>Caso 2</u>: $gh_1\ gh_2\ \in\ E(G \square H)$. Supongamos que ambos extremos están igualmente coloreados:

$$\begin{aligned} c(gh_1) = c(gh_2) &\quad \Rightarrow \\ c_G(g) + c_H(h_1) = c_G(g) + c_H(h_2) &\quad \Rightarrow \\ c_G(h_1) = c_G(h_2) & \end{aligned}$$

Lo cual es absurdo pues c_H es un coloreo y $h_1\ h_2 \in E(H)$.

$\therefore$ f es un m-coloreo y $\chi(G \square H) =$ m