Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Tópicos Avanzados en Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

PRÁCTICA 5

DESCOMPOSICIÓN MODULAR, CLIQUE-WIDTH Y MSOL

Alumno: Rodríguez Jeremías

8 de julio de 2017

1. Ejercicio 4

Para resolver este ejercicio, usaré los siguientes lemas:

Lema 1: Sea G un grafo. Entonces: $\chi_\rho(G) \leqslant |V| - \alpha(G) + 1$

d/ Sea S un conjunto estable de cardinal máximo en G. Como todos sus vértices son no adyacentes, estarán a distancia mayor que 1 entre si. Por lo tanto, un ρ-coloreo válido es aquel que colorea todos los vértices del conjunto S con el color 1; y usa $|V - S|$ colores distintos para los vértices restantes, pintándolos todos de colores diferentes.

Por lo tanto, hemos encontrado un ρ-coloreo que usa $|V - S| + 1 = |V| - \alpha(G) + 1$ colores distintos:

$$\chi_\rho(G) \leqslant |V| - \alpha(G) + 1$$

Lema 2: Sea G un grafo. Entonces: $diam(G) \leqslant 2 \Rightarrow \chi_\rho(G) = |V| - \alpha(G) + 1$

d/ En un grafo de diámetro 2, la distancia máxima entre dos vértices cualesquiera es 2. Por lo tanto, en un ρ-coloreo, el único color que es posible repetir es el color 1. (Si usaramos un color más grande en dos vértices distintos, necesitaríamos que su distancia fuera mayor que 2).

Luego, el ρ-coloreo que use la menor cantidad de colores será aquel que pueda repetir más veces el color 1. La forma de hacer esto es encontrar un conjunto estable de cardinal máximo, pintar todos sus vértices de color 1, y luego elegir un color nuevo para cada vértice restante. Por lo tanto:

$$\chi_\rho(G) = |V| - \alpha(G) + 1$$

1.1. Apartado A

Sea el grafo araña A_r^0, donde $C = \{c_1, \ldots, c_r\}$ es el cuerpo y $S = \{s_1, \ldots, s_r\}$ son las patas. Veamos que $diam(A_r^0) = 2$:

- Si $u, v \in C$, como $C = K_r$, entonces $dist(u, v) = 1$.
- Si $u, v \in S$, entonces $u = s_j$ y $v = s_k$ para algún j, k; $j \neq k$. Por definición de araña gruesa, ambos vértices serán adyacentes a c_m para todo $m \in \{1, \ldots, r\} \backslash \{j, k\}$. Entonces, $dist(u, v) = 2$.
- Si $u = s_j \in S$ y $v = c_k \in C$, entonces debemos analizar dos casos. Si $j \neq k$, entonces $dist(u, v) = 1$. Si $j = k$, entonces $dist(u, v) = 2$, pues s_j y c_k serán adyacentes a algún otro c_m del cuerpo.

Además, el mayor conjunto estable de la araña es S (las r patas).

Luego, por el lema 2:

$$\chi_\rho(A_r^0) = |V| - \alpha(A_r^0) + 1 = 2r - r + 1 = r + 1$$

1.2. Apartado C

Sea el grafo araña A_r^k, donde $C = \{c_1, \ldots, c_r\}$ es el cuerpo, $S = \{s_1, \ldots, s_r\}$ son las patas y $H = A_r^{k-1}$ es la cabeza.

Veamos, por inducción en k, que las siguientes proposiciones son ciertas:

$P_1(k)$: $diam(A_r^k) = 2$

Caso base En el apartado A discutimos que $P_1(0)$ es válida.

Paso inductivo Supongamos cierta $P_1(k)$, y consideremos dos vértices u y v de A_r^{k+1}.

1. Si ambos están en H, por hipótesis inductiva $dist(u, v) \leqslant 2$.
2. Si ambos están en $S \cup C$, con el mismo análisis que se hizo en el apartado A, se cumple que $dist(u, v) \leqslant 2$.
3. Si u está en H y v en C. Por definición de araña gruesa, como u será adyacente a todos los vértices de C, $dist(u, v) = 1$.
4. Si u está en H y $v = s_k$ en S, entonces ambos serán adyacentes a algún c_j con $j \neq k$. Por lo tanto, $dist(u, v) = 2$.

$$\therefore diam(A_r^{k+1}) \leqslant 2$$

$P_2(k)$: $\alpha(A_r^k) = (k+1)r$

Caso base En el apartado A discutimos que $P_2(0)$ es válida.

Paso inductivo Ahora supongamos cierta $P_2(k)$. Como A_r^k es un subgrafo de A_r^{k+1}, sigue que $\alpha(A_r^{k+1}). \geqslant \alpha(A_r^k)$.

Sea E un estable de cardinal máximo en A_r^{k+1}. Observemos que si algún $c \in C$ estuviera en E, entonces $|E|=1$ y no sería de cardinal máximo. Por lo tanto, ningún vértice del cuerpo está en E.

Luego, E deberá estar formado por vértices de $S \cup H$. Dado que todo vértice de S es no adyacente a todo vértice de H, E estará formado por un conjunto estable de cardinal máximo en H junto a otro de cardinal máximo en S.

Por hipótesis inductiva, el cardinal del primero es $(k+1)r$, y como todo S es estable, el cardinal del segundo es r.

$$\therefore \alpha(A_r^{k+1}) = (k+1)r + r = (k+2)r$$

Luego de estos dos resultados, podemos aplicar el lema 2 a A_r^k pues su diámetro es a lo sumo dos, concluyendo lo siguiente:

$$\chi_\rho(A_r^k) = |V| - \alpha(A_r^k) + 1 = (k+1)2r - (k+1)r + 1 = (k+1)r + 1$$

1.3. Apartado B

Como caso particular del apartado C, $\chi_\rho(A_5^2) = 3 * 5 + 1 = 16$

2. Ejercicio 6

2.1. Apartado A

Sean G_1, G_2 y $S(G_1), S(G_2)$ conjuntos estables de peso máximo respectivamente. Entonces:

- Un conjunto estable de peso máximo en $G_1 \oplus G_2$ es $E = S(G_1) \cup S(G_2)$. Veamos que es de peso máximo: Sea E' otro conjunto estable en $G_1 \oplus G_2$. Consideramos $E' \cap V(G_1)$ y $E' \cap V(G_2)$, una partición de E'. Cada uno de estos subconjuntos de E' tiene tanto peso como $E \cap V(G_1)$ y $E \cap V(G_2)$ respectivamente [1]. Por lo tanto, E' tiene a lo sumo tanto peso como E.

- Un conjunto estable de peso máximo en $G_1 \vee G_2$ es el que más peso tenga de entre $S(G_1)$ y $S(G_2)$. Dado que al realizar la operación de join se crea una arista entre cada par $u,\ v \mid u \in V(G_1)\ v \in V(G_2)$, un conjunto estable en $G_1 \vee G_2$ claramente no podrá contener vértices de G_1 y de G_2 a la vez. Por lo tanto, un conjunto estable en en $G_1 \vee G_2$ es un conjunto estable en G_1 o bien un conjunto estable en G_2. Si deseamos maximizar el peso, entonces elegimos el de mayor peso de estos.

2.2. Apartado B

Sean dos grafos G_1 y G_2, y $f_i : V(G_i) \mapsto \{1, \ldots, \chi(G_i)\},\ i = 1, 2$ dos coloreos (óptimos) de G_1 y G_2 respectivamente.

- Al calcular $\chi(G_1 \oplus G_2)$, dado que G_1 y G_2 son subgrafos inducidos de $\chi(G_1 \oplus G_2)$; tenemos las siguiente cota:

$$\chi(G_1 \oplus G_2) \geqslant max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

  Además, el siguiente es un coloreo válido:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & : & V(G_1 \oplus G_2) \mapsto \{1, \ldots, max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}\} \\ f(x) & = & \left\{ \begin{array}{lll} f_1(x) & si & x \in V(G_1) \\ f_2(x) & si & x \in V(G_2) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\therefore \chi(G_1 \oplus G_2) = max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

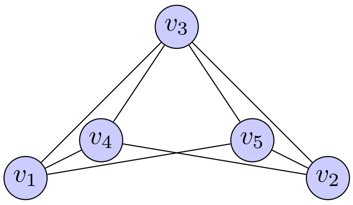
- $\chi(G_1 \vee G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$, pues ningún color usado en un vértice de G_1 puede repetirse en uno de G_2. Entonces necesitaremos colorear ambos por separado con la menor cantidad de colores posible, y sin mezclar colores:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & : & V(G_1 \vee G_2) \mapsto \{1, \ldots, \chi(G_1) + \chi(G_2)\} \\ f(x) & = & \left\{ \begin{array}{lll} f_1(x) & si & x \in V(G_1) \\ f_2(x) + \chi(G_1) & si & x \in V(G_2) \end{array} \right. \end{array}$$

[1] por definición de E y dado que $S(G_1)$ Y $S(G_2)$ son estables de peso máximo en G_1 y en G_2

2.3. Apartado C

Sea G= $(\{v_1\} \oplus \{v_2\}) \vee (\{v_3\} \vee (\{v_4\} \oplus \{v_5\}))$:



Los pasos para calcular $\chi(G)$ son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
&\chi((\{v_1\} \oplus \{v_2\}) \vee (\{v_3\} \vee (\{v_4\} \oplus \{v_5\}))) = \\
&\chi(\{v_1\} \oplus \{v_2\}) + \chi(\{v_3\} \vee (\{v_4\} \oplus \{v_5\})) = \\
&max\{\chi(\{v_1\}), \chi(\{v_2\})\} + \chi(\{v_3\}) + \chi(\{v_4\} \oplus \{v_5\}) = \\
&max\{1, 1\} + 1 + max\{\chi(\{v_4\}), \chi(\{v_5\})\} = \\
&1 + 1 + max\{1, 1\} = 3
\end{aligned}
$$

Asumiendo que la función de pesos es constante 1 para todos los vértices, los pasos para calcular $S(G)$ son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
&S((\{v_1\} \oplus \{v_2\}) \vee (\{v_3\} \vee (\{v_4\} \oplus \{v_5\}))) = \\
&argmax_{E=S(\{v_1\}\oplus\{v_2\}),S(\{v_3\}\vee(\{v_4\}\oplus\{v_5\}))}(|E|) = \\
&argmax_{E=\{v_1,v_2\},\{v_4,v_5\}}(|E|) = \\
&\{v_1, v_2\}
\end{aligned}
$$

3. Ejercicio 11

Para probar que los grafos bipartitos tienen clique width no acotada, probaré que $\mathscr{F}_n \geqslant 2^{\frac{n^2}{4}}$. Sin pérdida de generalidad, asumiré que n es par. Consideremos entonces, dados n vértices etiquetados $\{1, \ldots, n\}$, el grafo $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ bipartito completo [2] tal que en una bipartición están los vértices $\{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$; y en la otra los vértices $\{\frac{n}{2} + 1, \ldots, n\}$.

Este grafo completo tendrá $\frac{n}{2}.\frac{n}{2}$ aristas. Cualquier subconjunto de estas aristas será un grafo bipartito etiquetado distinto.

Dado que hay $2^{\frac{n^2}{4}}$ subconjuntos distintos de aristas, sigue que $\mathscr{F}_n \geqslant 2^{\frac{n^2}{4}}$; y los grafos bipartitos tienen clique width no acotada.

Análogamente, consideremos ahora la familia de los grafos split. Con el mismo razonamiento, dados n vértices, asumiendo n par, consideremos el grafo split completo [3] etiquetado formado por una clique de tamaño $\frac{n}{2}$ y un conjunto independiente de tamaño $\frac{n}{2}$; donde hay una arista entre cada vértice de la clique y del conjunto independiente.

Con el mismo razonamiento, tenemos $\frac{n^2}{4}$ aristas en este grafo split completo; y cualquier subconjunto de estas aristas que consideremos denotará un grafo split etiquetado de n vértices distinto.

sigue que $\mathscr{F}_n \geqslant 2^{\frac{n^2}{4}}$; y los grafos split tienen clique width no acotada.

[2] Si n es impar, podemos trabajar con $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

[3] http://www.graphclasses.org/classes/gc_1242.html

4. Ejercicio 12

Se desea expresar la propiedad de conexidad de un grafo en MSOL. La formulación que pensé es la siguiente:

X es un subconjunto de vértices no vacío:

$$\text{NE(X)} = \exists\ x, X(x)$$

(X,Y) es una partición de V(G):

$$\text{2PART(X,Y)} = (\forall\ x,\ \ X(x) \vee Y(x)) \wedge \text{NE}(X) \wedge \text{NE}(Y) \wedge (\forall x\ \neg(X(x) \wedge Y(x))$$

G es conexo:

$$\text{CON'} = \forall X\ \forall Y,\ \text{2PART(X,Y)} \Rightarrow (\exists x\ \exists y,\ \ X(x) \wedge Y(y) \wedge\ \text{ady}(x, y)\ )$$

Sin embargo, el grafo conexo que consiste en un único vértice aislado no cumple esta proposición, y para solucionarlo se agrega el caso particular con una disyunción:

$$\text{CON} = \text{CON'} \vee\ (\forall x\ \forall y\ (x = y))$$

Sea G=(V,E). Veamos a continuación una demostración informal de que CON es verdadero si y sólo si G es conexo. A continuación veamos la primera implicancia:

Supongamos que CON es verdadera, y sean dos vértices distintos $x, y\ \in V$. Debemos probar que existe un camino que conecta x con y.

"Aplicamos" CON a la partición (X,Y)=($\{x\}, V \backslash \{y\}$) (que verifica 2PART(X,Y)). Luego existirá algún vértice v en $V\backslash\{y\}$ que sea adyacente a algún elemento de X. Si $v = y$, entonces, G es conexo.

Si no, entonces repetimos el proceso con X:=X $\cup\{v\}$ e Y:= Y $\backslash\{v\}$. De este modo, en una cantidad finita de pasos (porque la cantidad de vértices es finita), terminaremos agregando al vértice y en X; y sabremos que hay un camino de x a y (pues todos los vértices que vamos agregando a X son aquellos alcanzables por x).

Recíprocamente, supongamos que G=(V,E) es no conexo. Consideremos una de las componentes conexas de G, y sean V_1 sus vértices. Entonces 2PART(V_1,$V\backslash V_1$) será verdadero, pero no verificará que hayan dos vértices adyacentes; por lo que CON será falso.

Por lo tanto, CON es una formulación correcta.

5. Ejercicio 16

La siguiente fórmula expresa la propiedad de que un grafo tiene un 3-coloreo en $MSOL(\tau_1)$:

$Ind(X) \equiv \forall u, v\ ((X(u) \wedge X(v)) \rightarrow \neg adj(u, v))$
$Part(X, Y, Z) \equiv \forall v(X(v) \vee Y(v) \vee Z(v)) \wedge \neg\exists u((X(u) \wedge Y(u)) \vee (X(u) \wedge Z(u)) \vee (Z(u) \wedge Y(u)))$
$3Col \equiv \exists X, Y, Z(Part(X, Y, Z) \wedge Ind(X) \wedge Ind(Y) \wedge Ind(Z))$

Si bien en el apunte de cátedra sólo se menciona que los problemas de optimización expresables en LinEMSOL(τ_1) son polinomiales en grafos con clique-width acotado, no podemos aplicar este resultado directamente pues el problema del 3-coloreo es un problema de decisión.

En [1] se puede ver que los problemas de decisión expresables en MSOL(τ_1) son polinomiales en grafos con clique width acotado, y que los LinEMSOL son su equivalente para problemas de optimización[4]. Lo mismo se expresa en [2]. Por lo tanto asumiré este resultado válido para resolver este ejercicio.

Los grafos distancia hereditarios tienen clique width acotado [5]. Por lo tanto, dado que 3-COL es un problema de decisión MSOL(τ_1), y que los grafos distancia hereditarios tienen clique-width acotada; sigue que la complejidad del problema es lineal en dicha familia.

Referencias

[1] B. Courcelle; J. A. Makowsky; U. Rotics *Linear Time Solvable Optimization Problems on Graphs of Bounded Clique-Width*

[2] Michaël Rao *MSOL partitioning problems on graphs of bounded treewidth and clique-width*

[4] Sin embargo, no tengo claro como expresar un problema MSOL en LinEMSOL, dado que si la fórmula ϕ no tiene variables libres, la definición de LinEMSOL se vuelve confusa al calcularse el máximo del conjunto vacío. Una alternativa que se me ocurre es utilizar una variable libre ficticia en ϕ, y una función $f : V \mapsto \mathbb{Z}$ constante de modo que el problema $3 - COL$ quede bien definido en LinEMSOL.

[5] http://graphclasses.org/classes/gc_80.html