FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

TÓPICOS AVANZADOS EN OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA Y TEORÍA DE GRAFOS

PRÁCTICA 2

Alumno: Rodríguez Jeremías

20 de abril de 2017

1. Ejercicio 2

Sea (S, I) un sistema independiente. Demostraré $M2 \Rightarrow M2' \Rightarrow M2'' \Rightarrow M2$.

$M2 \Rightarrow M2')$

$|F_1| < |F_2|$. Supongamos que $\forall\ e \ \in \ F_2 - F_1\ ,\ F_1 \cup \{e\} \notin I$. Entonces, F_1 es maximal de $F_1 \cup F_2$. Además, F_2 o bien es maximal de $F_1 \cup F_2$, o bien está contenido en $F' \subset F_1 \cup F_2$ con F' maximal en $F_1 \cup F_2$.

Luego, por M2, $|F'| = |F_1|$. Pero $|F'| \geqslant |F_2| \Rightarrow |F_1| \geqslant |F_2|$. Absurdo.

$$\therefore \exists\ e \ \in \ F_2 - F_1\ ,\ F_1 \cup \{e\} \in I$$

$M2' \Rightarrow M2'')$

Supongamos que J es independiente maximal de A, pero no es máximo:

$$\exists J' \in I \mid J' \subset A \ \wedge \ |J'| > |J|$$

Luego, por hipótesis:

$$\exists\ e \ \in \ (J' - J) \subset A \mid J \cup \{e\} \in I$$

Entonces:

$$\exists\ e \ \in \ A \mid J \cup \{e\} \in I$$

Luego J no es maximal en A. Absurdo.

$$\therefore\ J \text{ es máximo en A}$$

$M2'' \Rightarrow M2)$

Supongamos que tenemos dos independientes maximales en A: J_1 y J_2. Por hipótesis ambos serán máximos en A. Luego $|J_1| \leqslant |J_2| \leqslant |J_1|$.

$$\therefore\ |J_1| = |J_2|$$

2. Ejercicio 3

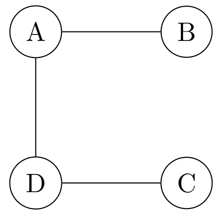
Sea $G = (V_1 \cup V_2, E)$ bipartito.

2.1. Apartado A

Veamos que $(E, \{M \subseteq E \mid M \text{ es matching de } G\})$ es un SI.

- $\varnothing$ es un matching de G, pues al no haber aristas tampoco habrá ninguna con vértices en común.
- Sea M un matching de G y $M' \subset M$. M' seguirá siendo un matching, pues si en M ningún arista tenía vértices en común, tampoco sucederá en un subconjunto de M.

Este sistema independiente no es matroide. Consideremos el siguiente grafo:



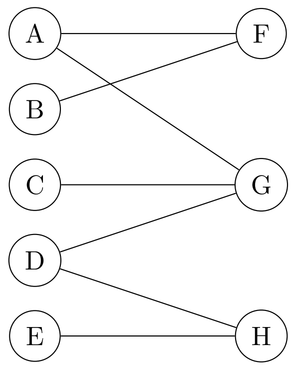
Vemos que $M_1 = \{ad\}$ y $M_2 = \{ab,\ dc\}$ son matchings tales que $|M_1| < |M_2|$ y no podemos agregar aristas de M_2 a M_1 manteniendo la propiedad de matching.

$\therefore$ Es un sistema independiente no matroide.

2.2. Apartado B

Veamos que (S, I_1) es matroide. ((S, I_2) es análogo).

- $\varnothing \in I_1$ pues al no haber aristas, tampoco hay dos incidentes en el mismo vértice de V_1.
- Sea $A \in I_1$ y $A' \subset A$. Supongamos que $A' \notin I_1$. Luego hay dos aristas en A' incidentes en el mismo vértice de V_1. Luego ambas aristas están en A y resulta $A \notin I_1$. Absurdo. Entonces, $A' \in I_1$.
- Sean $A_1, A_2 \in I_1$ tales que $|A_1| < |A_2|$. Sean $V_1(A_i) \subseteq V_1,\ i = 1, 2$ los vértices v de V_1 tales que existe alguna arista en A_i incidente en v.
  Como $|A_1| < |A_2|$, entonces $|V_1(A_1)| < |V_1(A_2)|$. Tomamos un $v \in V_1(A_2) - V_1(A_1)$, y consideramos la arista e de A_2 incidente en v. Entonces $A_1 \cup \{e\} \in I_1$.
  Por ejemplo:



$A_1 = \{ag,\ bf,\ cg,\ dh,\ eh\}$ y $V_1(A_1) = \{a, b, c, d, e\}$
$A_2 = \{af,\ dh,\ eh\}$ y $V_1(A_2) = \{a, d, e\}$

Tomamos, por ejemplo, cg y podemos extender A_1.

2.3. Apartado C

Debo probar $I_M = I_1 \cap I_2$. Veamos la doble contención:

$\underline{\subseteq)}$ Sea $M \in I_M$ un matching de G. Entonces, no hay dos aristas en M que incidan en el mismo vértice de V_1, pues M no sería matching; luego $M \in I_1$. Análogamente, no hay dos aristas en M que incidan en el mismo vértice de V_2, pues M no sería matching; luego $M \in I_2$.

$$\therefore M \in I_1 \cap I_2$$

$\underline{\supseteq)}$ Sea $M \in I_1 \cap I_2$. Supongamos que no es matching. Entonces hay un vertice en el cual inciden dos aristas de M. El vértice está en V_i con $i \in \{1, 2\}$. Entonces, $M \notin I_i$. Entonces, $M \notin I_1 \cap I_2$. Absurdo.

$$\therefore M \in I_M$$

3. Ejercicio 8

3.1. Apartado A

Sea $G = (V, E)$ un grafo de linea. Entonces, existe $G^* = (V^*, E^*)$ tal que:

$$V = E^* \tag{1}$$
$$e_1e_2 \in E \Leftrightarrow e_1 \ y \ e_2 \ comparten \ un \ extremo \ en \ G^* \tag{2}$$

Sea $V' \subseteq V$. Debo probar que el subgrafo inducido(por nodos) por V', llamémoslo H, es un grafo de linea. Es decir, debo hallar un H^* tal que:

- $V' = E(H^*)$
- $e_1e_2 \in E(H) \Leftrightarrow e_1$ y e_2 comparten un extremo en $H*$

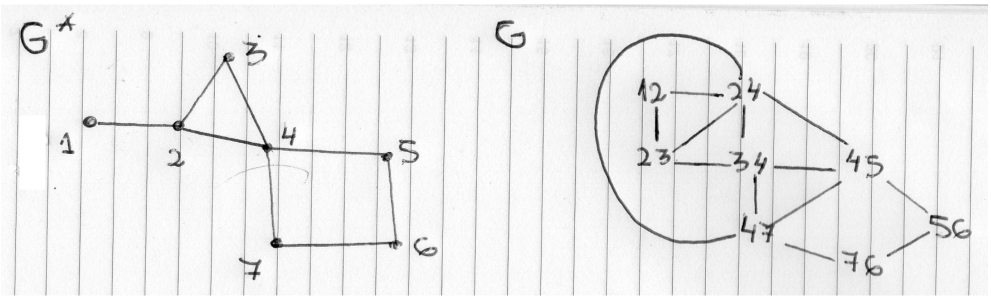
Propongo como H^* al subgrafo de G^* inducido por el subconjunto de aristas $V' \subseteq V = E^*$

- $V(H) = E(H^*)$ por la forma en que definimos H^*.
- Sea un arista $w_1w_2 \in E(H)$. En particular, $w_1w_2 \in E(G)$. Luego, $w1, w2 \in E(G^*)$ y tienen un extremo en común en G^*. Como w_1 y w_2 están en V', sus extremos formarán partes de los vértices de H^* y en particular el extremo que comparten también. Luego, w_1 y w_2 tienen un extremo en común en H^*.

H es grafo de linea; ser de linea es una propiedad hereditaria.

3.2. Apartado B

Sea G un grafo de línea. Voy a suponer, sin perder generalidad, que es conexo (en caso de no serlo, podemos aplicar el razonamiento siguiente sobre sus componentes conexas) y tiene al menos tres vértices (en el caso de un solo vértice, la partición deseada será el conjunto vacío; en el caso de dos vértices unidos por un arista, la partición deseada será la única arista)

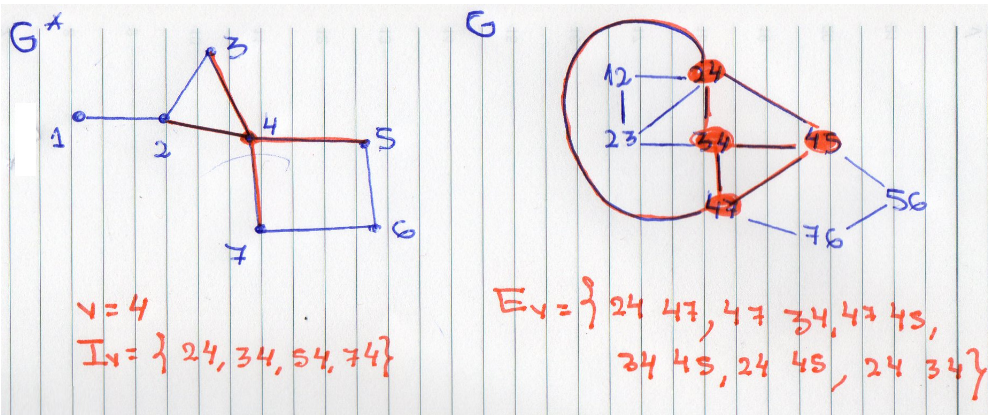


Para formar una partición de $E(G)$, considero el grafo G^*. Por cada vértive $v \in V(G^*)$, defino el conjunto de todas las aristas incidentes en él:

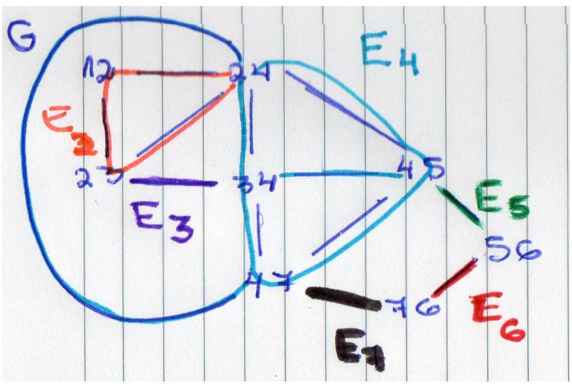
$$I_v = \{e \ \in E(G^*) \mid \text{e es incidente en } v\} \subseteq V(G).$$

Todas esas aristas, vistas como vértices de G, inducen un subgrafo $G(I_v)$ en G. Notaré como E_v al conjunto de aristas de este subgrafo:

$$E_v = E(G(I_v))$$



Propongo $\mathcal{P} = \{E_v \mid v \in V(G^*) \ \wedge \ E_v \neq \emptyset\}$ como la partición buscada. Informalmente, $\mathcal{P}$ se forma tomando cada vértice v en G^*, considerando todas las aristas que inciden en él -viéndolas como conjunto de vértices en G- y agregando el conjunto de las aristas que unen estos vértices de G como un elemento de la partición.



Para completar el ejercicio debo probar:

1. $\mathcal{P}$ es efectivamente una partición de $E(G)$
2. Cada conjunto de $\mathcal{P}$ es una clique en G
3. Cada vértice en G pertence a lo sumo a dos de las cliques definidas por $\mathcal{P}$.

1. Veamos que $\mathcal{P}$ es una partición de $E(G)$.

- $\underline{E_i \neq \emptyset}$: En la definición de $\mathcal{P}$ pedimos expresamente que sus elementos sean no vacíos. Esto es porque si $v \in V(G^*)$ es un vértice colgante, E_v será vacío.
- $\underline{\bigcup_{E_i \in \mathcal{P}} E_i = E(G)}$: Para esto veamos que todo elemento $e \in E(G)$ pertenece a algún E_i.

$$
\begin{aligned}
& e \in E(G) \\
\Rightarrow \quad & e = v_1v_2 \quad v_2v_3 \\
\Rightarrow \quad & v_1v_2,\ v_2v_3 \ \textit{son aristas incidentes a } v_2 \textit{ en } G^* \\
\Rightarrow \quad & v_1v_2,\ v_2v_3 \ \in I_{v_2} \\
\Rightarrow \quad & e = v_1v_2 \quad v_2v_3 \in E_{v_2} \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

- $\underline{v_i \neq v_j \ \Rightarrow \ E_{v_i} \cap E_{v_j} = \emptyset}$: Supongamos:

$$
\begin{aligned}
& E_{v_i} \cap E_{v_j} \neq \emptyset \\
\Rightarrow \quad & \exists\ e \mid e \in E_{v_i} \ \wedge \ e \in E_{v_j} \\
\Rightarrow \quad & \exists\ e \mid e = v_iu \quad v_iw \wedge \ e \in E_{v_j} \\
\Rightarrow \quad & \exists\ e \mid e = v_iv_j \quad v_iv_j
\end{aligned}
$$

  Esto es absurdo pues un arista de G no puede tener esa forma, ya que v_iv_j no es adyacente a si misma en G^*.

2. Veamos que cada conjunto E_{v_i} de la partición es una clique en G. Para ello tomamos dos vértices $v_iu,\ v_iw \ \in E_{v_i}$. Como ambos vértices corresponden a aristas de G^* que comparten el extremo v_i, serán adyacentes en G.

3. Consideremos un vértice $a = uv \in V(G)$. ¿A cuántas de cliques de las cliques definidas por $\mathcal{P}$ puede pertenecer como máximo?

Recordemos que ese vértice a corresponde a un arista en G^* de extremos u y v. Entonces, a puede estar a lo sumo en I_v y en I_u y en ningún otro I_i (pues toda arista tiene dos extremos). Consecuentemente, a solo podrá estar en $G(I_v)$ o (inclusivo) en $G(I_u)$.

3.3. Apartado C

Este ejercicio lo escaneé en papel porque necesitaba hacer muchos dibujos.