Lógica Borrosa

Introducción

IAA – LCC, 2016

Dra. Pilar E. Bulacio
bulacio@cifasis-conicet.gov.ar

Organización

- Biblio:
  - Zadeh (1965). "Fuzzy sets", Information and Control, 8 (3): 338–353.
  - Steven D. Kaehler. Fuzzy Logic Tutorial. http://www.seattlerobotics.org/encoder/mar98/fuz/flindex.html
  - Orestes Mas i Casals, *Sistemas difusos dinámicos para el tratamiento de información temporal imprecisa*, Ecola técnica superior d' enginyeria de telecomunicació de Barcelona (UPC), 1997.
  - G.J. Klir and T.A. Folger. Fuzzy Sets, Uncertainty and Information. Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- FisPro http://www7.inra.fr/mia/M/fispro/fispro2013_sp.html
  - Starting with FisPro (html) (pdf)
  - Práctica FisPro
- Práctica
  - Práctica ejercicios tipo

Curso Online: Fuzzy Logic Tutorial - An Introduction

http://www.seattlerobotics.org/encoder/mar98/

ABOUT THE AUTHOR. Steven D. Kaehler is a 1993 cum laude graduate of Cogswell College North in Kirkland, Washington and is currently employed as an **electrical engineer with the Boeing Company in Seattle WA**. He has over 13 years of experience in **static fatigue**, **environmental**, and **fuel systems test**, **measurement**, and **control**. He has worked for **Environmental Test Laboratories organization of Boeing's Defense and Space Group** and currently works in the Propulsion Instrumentation division of the Airplane Systems Labs organization of Boeing's Airplane.

The Boeing Company
P.O. Box 3707 M/S 17-PASeattle, WA 98124Voice: (206) 655-3921
Email: steven.d.kaehler@boeing.com

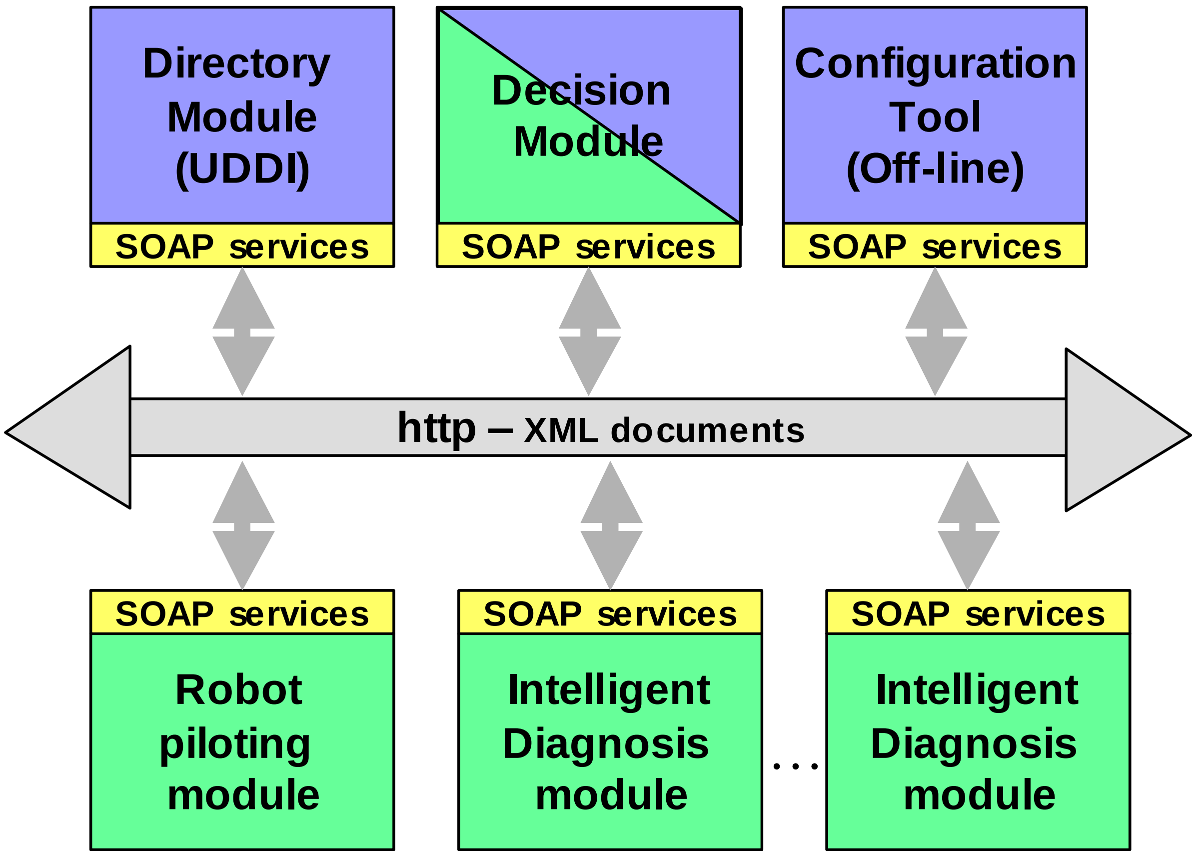
Motivación: Ejemplo

Handling Uncertainty in Advanced On-board Diagnosis and Control of autonomous Robots

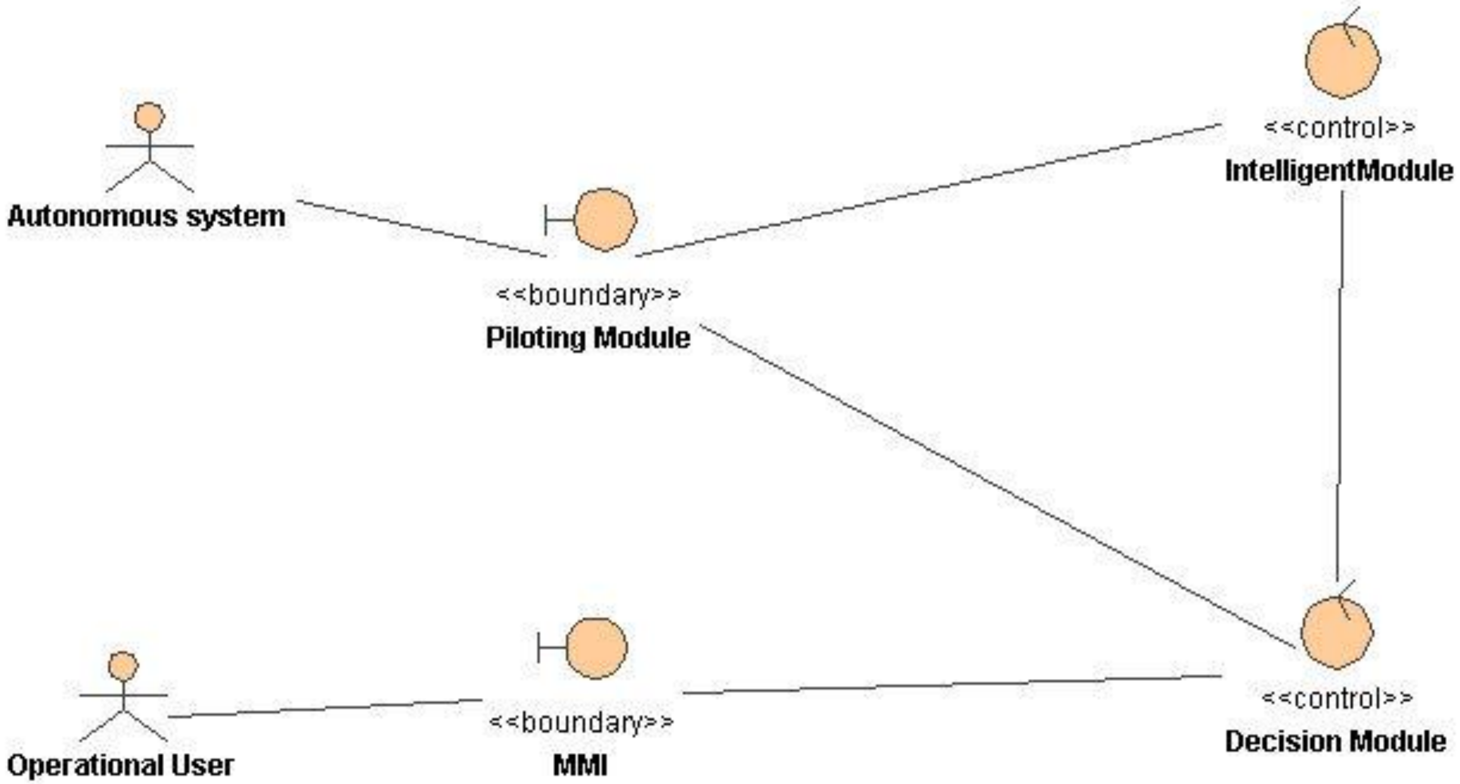
Main elements of a distributed architecture supporting **diagnosis** and **control** of **autonomous robots** are presented. The purpose of the architecture is to assist the operator (piloting system) in managing **fault detection, risk assessment, and recovery plans under uncertainty**.

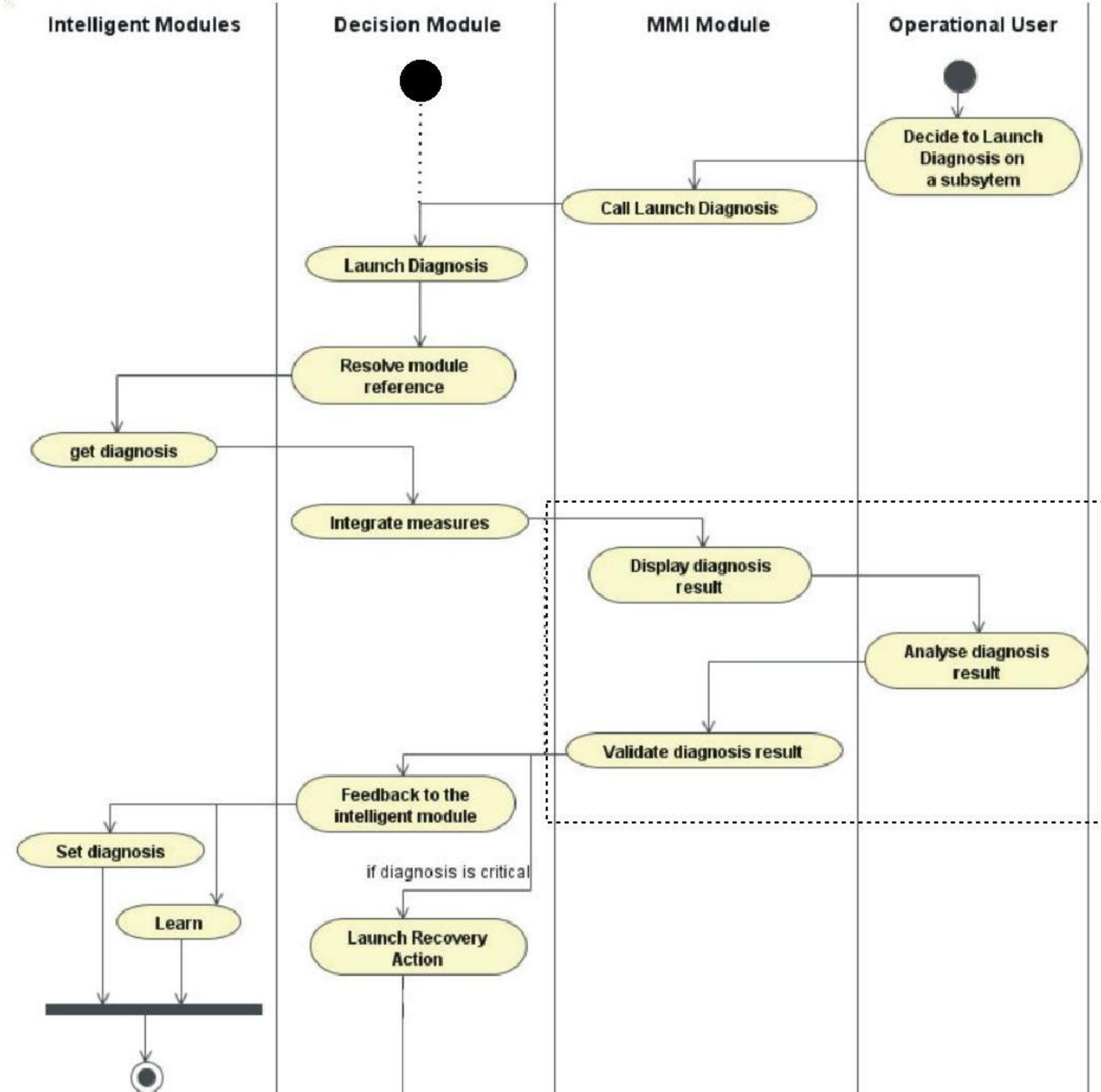
The architecture is open, and modular consisting of a set of interacting modules including a decision module and a set of intelligent modules. The decision module communicates with the intelligent ones to request and obtain **diagnosis** and **recovery action** proposals based on data obtained from the robot piloting module. **The architecture supports the use of multiple artificial intelligence techniques collaborating on the task of handling uncertainty:** Bayesian Belief Networks, Neuro-Symbolic Systems, and Fuzzy Logic…

Arquitectura



Arquitectura





Activity diagram for diagnosis and recovery action

AI techniques for IM

For solving diagnosis and recovery action problems

- Bayesian Belief Networks (BBNs),
- Fuzzy Logic (FL), and
- Neuro-Symbolic Systems (NSSs).

See Soft computing

FL module

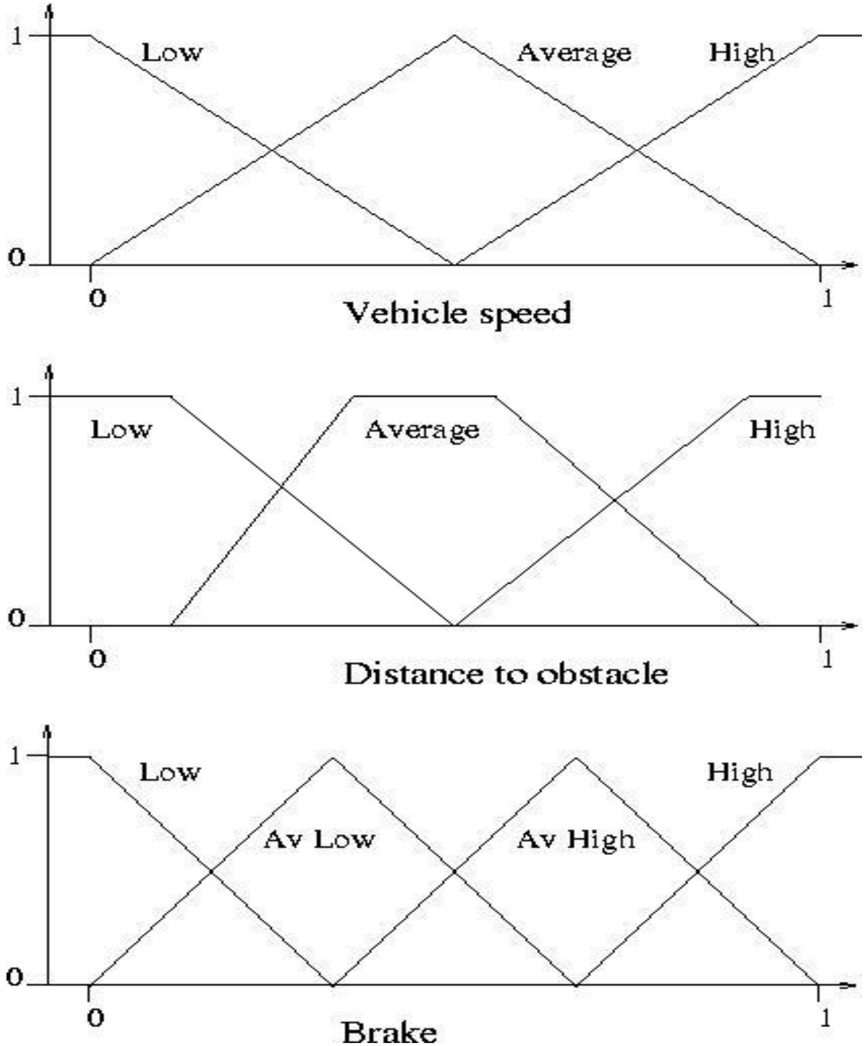
Fuzzy inference system: knowledge base + inference engine

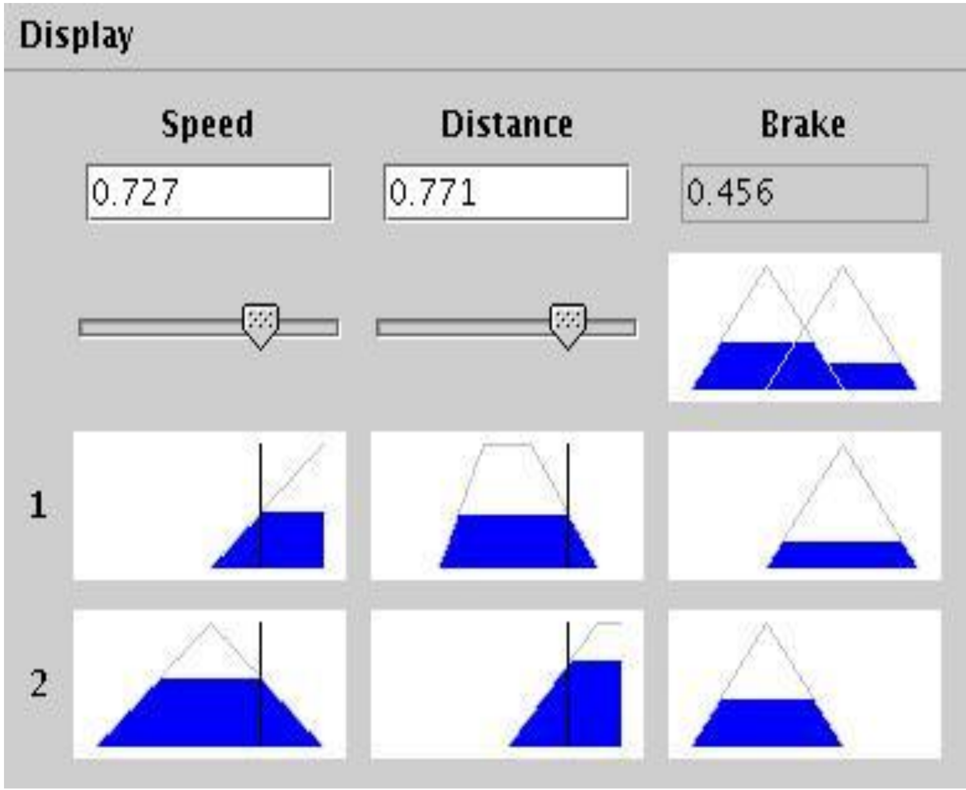
- **The knowledge representation: fuzzy sets and fuzzy logic,**
- **The knowledge processing: approximate reasoning.**

Contrary to classical sets whose boundaries are **well defined**, an item **does not simply belong or not** to a **set**: each value belongs “in degrees” to a **fuzzy set**.

Fuzzy logic, based on fuzzy sets, is well known for its linguistic concept handling ability.

If **Speed** is *High* and **Distance** is *Average* then **Brake** is *Average High*
If **Speed** is *Average* and **Distance** is *High* then **Brake** is *Average Low*

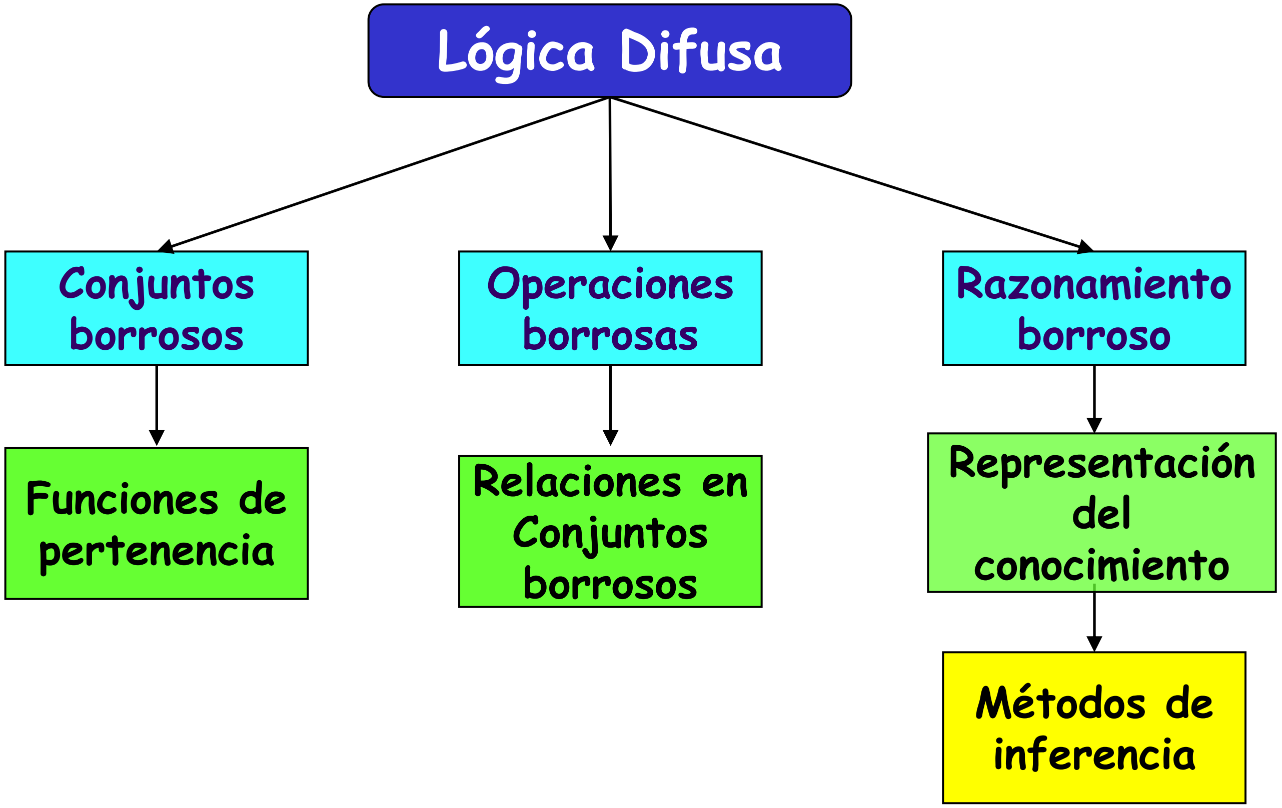




Contenido

- Orígenes
- Conjuntos borrosos
- Operaciones con conjuntos borrosos
- Razonamiento borroso
  - Representación del conocimiento
  - Métodos de inferencia
  - Fuzzificadores-Defuzzificadores

Lógica Difusa: elementos



Reseña Histórica de FL

Sus orígenes se remontan a Platón (427-347 a.C) Aristóteles (384-322 a.C.)

Plantean que las cosas no tienen que ser de un cierto tipo o dejar de serlo: **consideran la existencia de *grados* de verdad y falsedad**

Reseña Histórica de FL

- Inicio del XX, el filósofo y matemático británico **Bertrand Russell** divulgó la idea "la lógica produce contradicciones". Estudia **vaguedades del lenguaje**, concluyendo con precisión que la vaguedad es un grado.
- En ese tiempo **Ludwing Wittgenstein**, estudió **acepciones de palabras**. Concluyó que una misma palabra puede expresar modos y maneras diferentes.
- En 1920 **Jan Lukasiewicz**, desarrolló la primera **lógica de vaguedades**: conjuntos con grado de pertenencia entre 0 y 1.

Fundamentos de FL

A mediados de los 70s el **ingeniero eléctrico** iraní **Lofty A. Zadeh** de la Universidad de Berkeley postuló por primera vez la lógica difusa publicando “Fuzzy Sets” en la revista *Information and Control*.

Introdujo el concepto de ***conjunto difuso*** (fuzzy set) para **representar el pensamiento humano no con números sino con etiquetas lingüísticas**.

Zadeh quería crear un formalismo para manejar la imprecisión del razonamiento humano.

FL

Es una rama de AI que permite trabajar con modos de **razonamiento imprecisos** partiendo de **conjuntos borrosos**.

Conjuntos borrosos

Conjuntos borrosos

By Zadeh 1965,

"*A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membership. Such a set is characterized by a membership function which assigns to each object a grade of membership ranging between zero and one.*"

Fuzzy Sets = Elements + Membership Functions

Conjuntos borrosos

Definición Formal: Sea X un espacio de puntos (objetos), con un elemento genérico denotado por x. Así, $X = \{x\}$.
Un ***conjunto borroso*** A en X se caracteriza por una *función de pertenencia* $f_A(x)$ que asocia a cada elemento de X un número real en [0; 1], donde el valor $f_A(x)$ representa el "grado de pertenencia de x en A".

$$A=\{x, f_A(x)\}$$

Ej: $A = (a_1 / x_1, a_2/x_2.....a_n/ x_n)$ considerando el conjunto difuso <u>*alta*</u> asociado a la variable lingüística <u>*estatura*</u>*:*

ALTA = (0/1.65, 0.8/1.75, 0.9/1.85, 1/1.95)

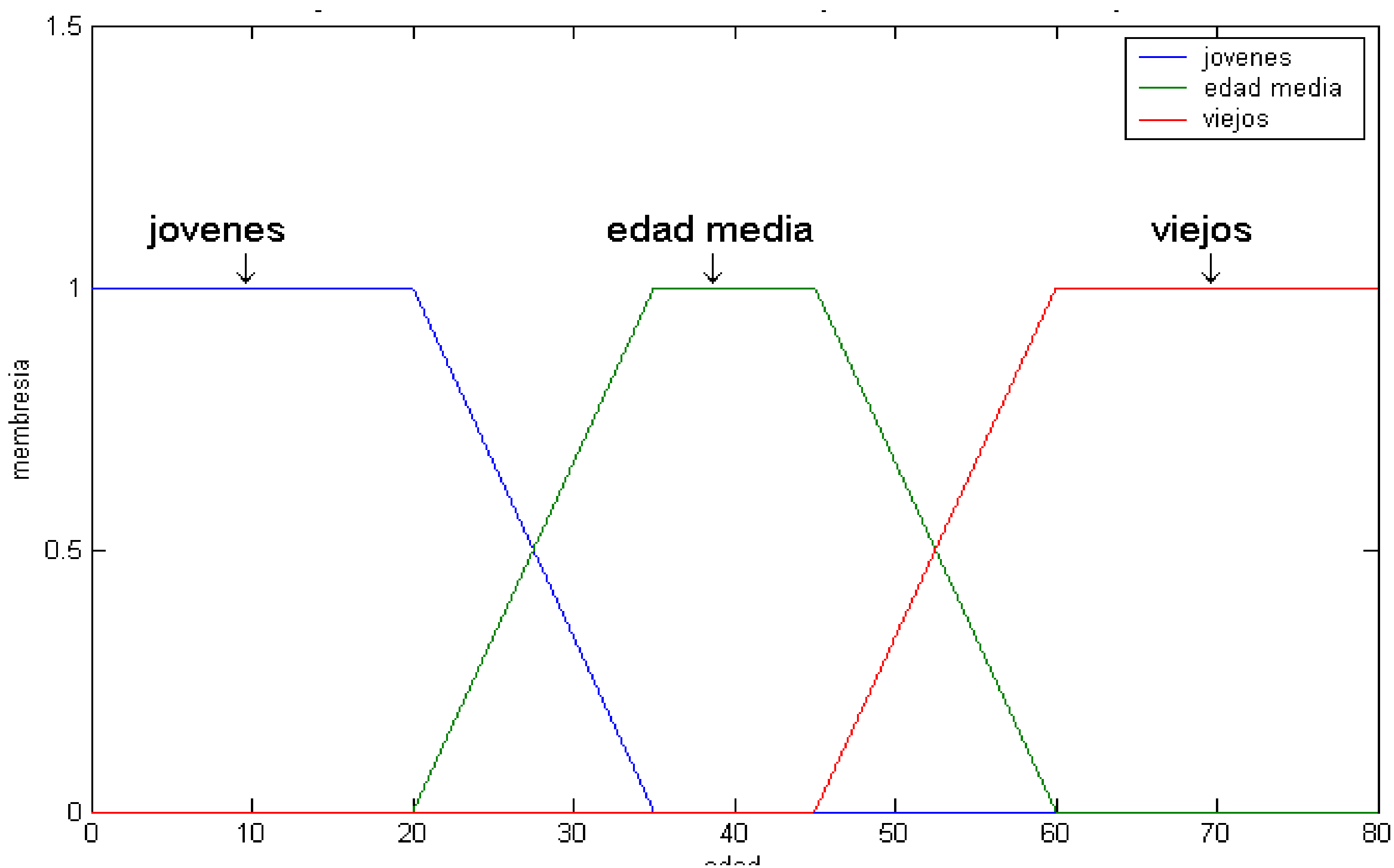
Ej. de conjuntos borrosos

- Conjunto de hombres jóvenes
- Conjunto de hombres de edad media
- Conjunto de hombres viejos

Cómo se definen los conjuntos?
Cuáles son los límites?

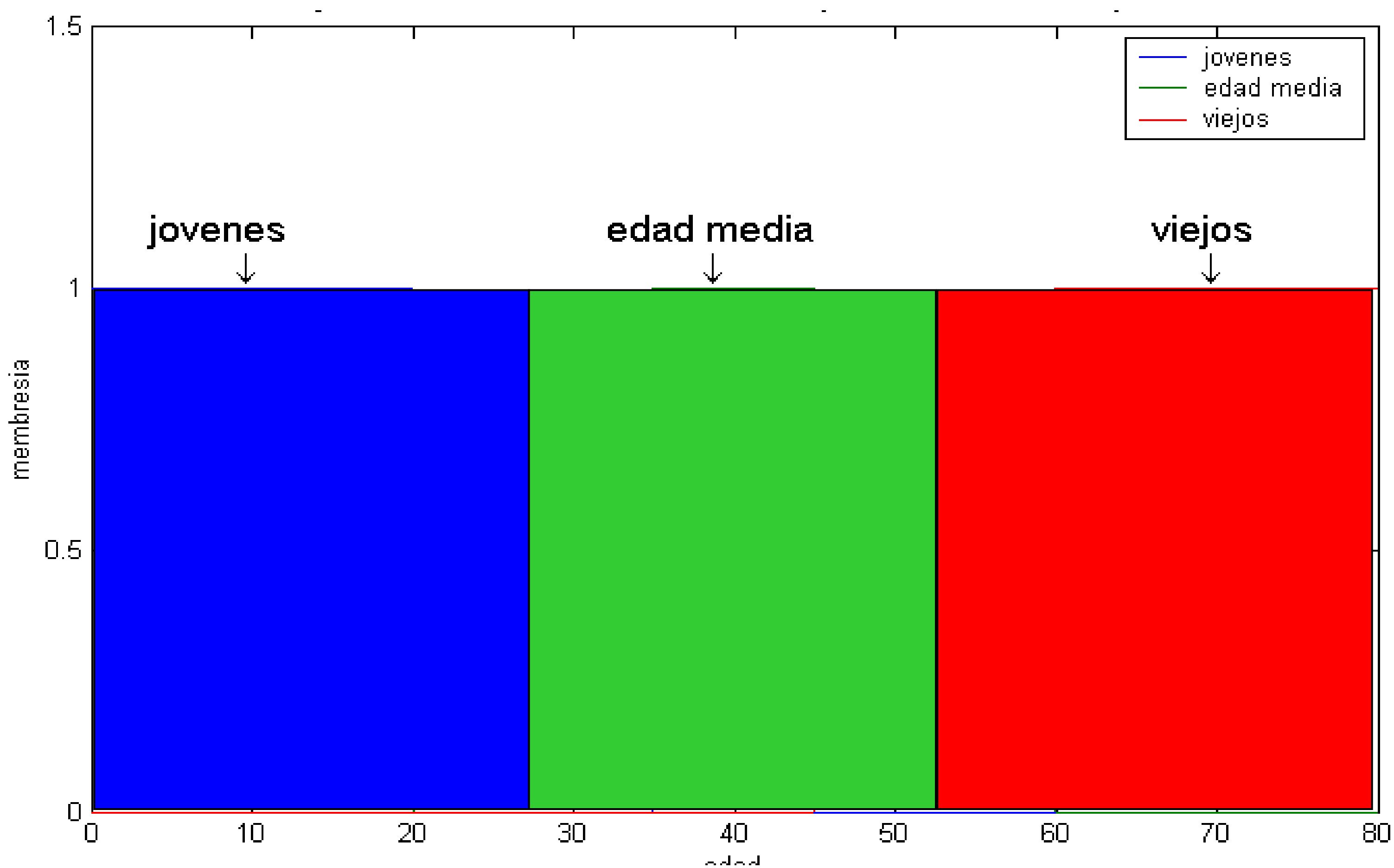
Ej. de conjuntos borrosos

Definición de las funciones de pertenencia



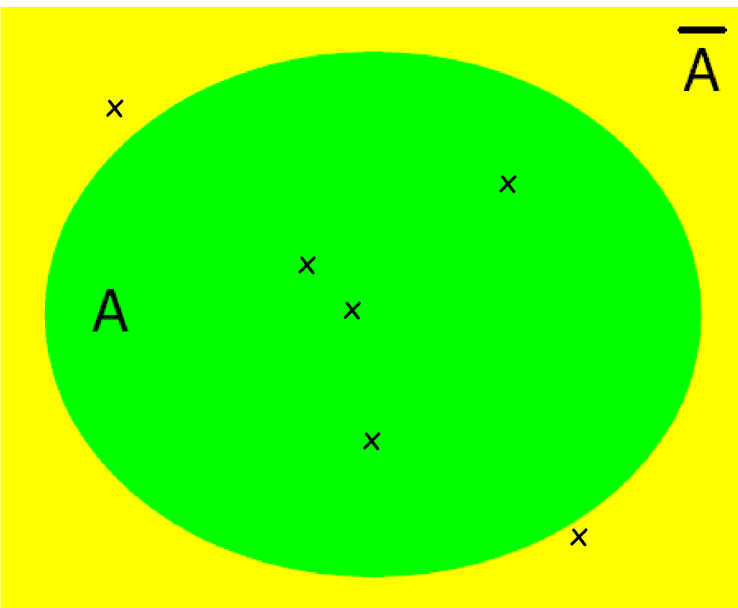
Ej. de conjuntos borrosos

Conjuntos clásicos

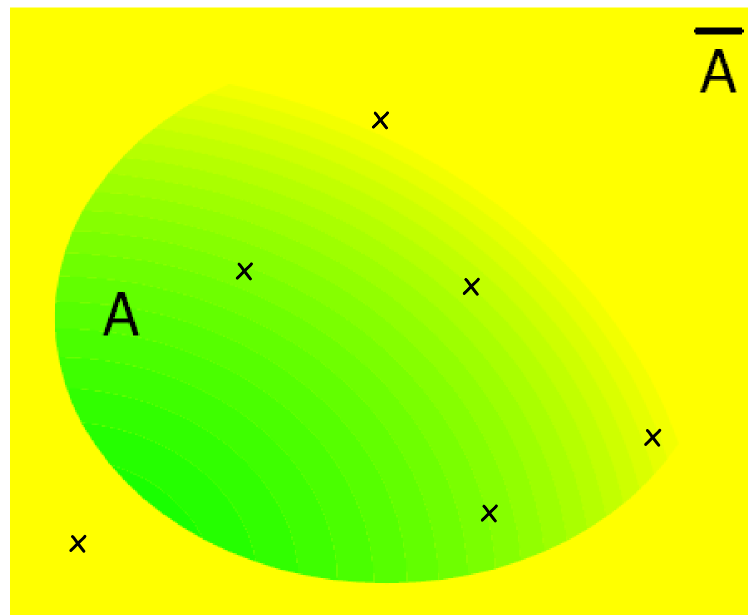


Tipos de conjuntos

Clásico



Borrosos

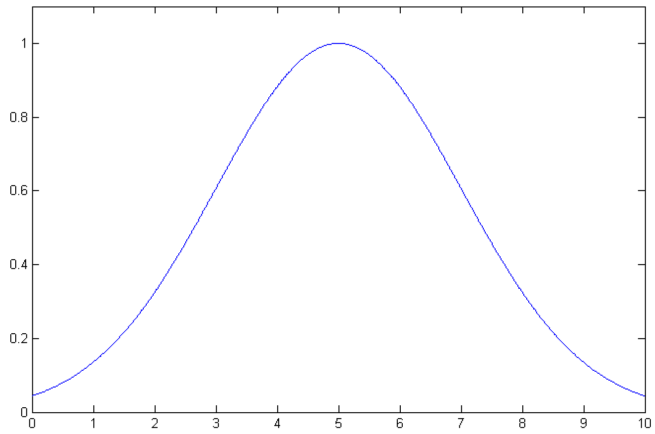


Funciones de Pertenencia

- La “membership function“ mapea cada elemento x del conjunto borroso a un **valor de pertenencia/grado**

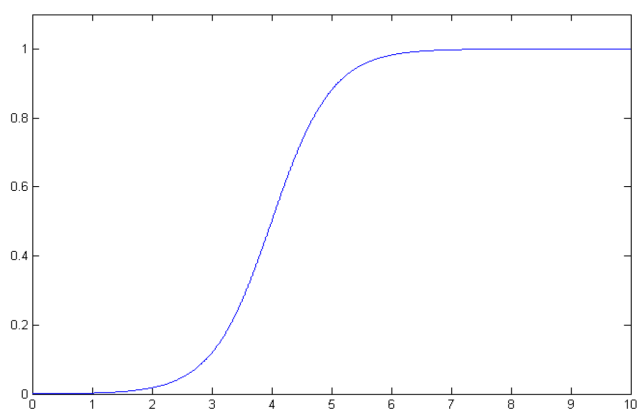
  f_A: X -> [0,1]; X es el espacio de entrada o universo del discurso

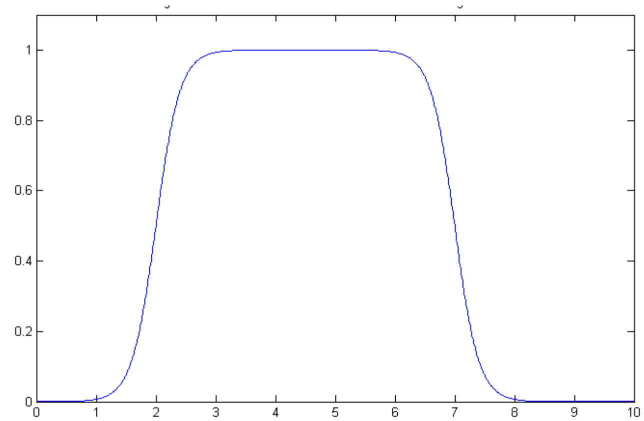
Tipos de fs de pertenencia



Gaussiana

Sigmoides





Fs de pertenencia: obtención

1. Evaluación subjetiva: asignación por expertos
2. Probabilidades: frecuencias de respuestas de pertenencia de un elemento al conjunto.
3. Funciones *ad-hoc:* en sistemas de control se usan funciones sencillas para reducir la cantidad de parámetros.

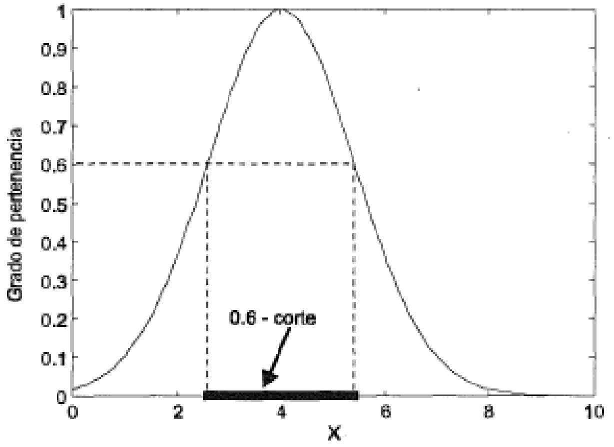
Propiedades en conjuntos borrosos

- **Normality,** ***A*** is called normal if its supreme is one:

$$Sup\ f_A(x) = 1, \text{ for every } x \text{ in } X$$

- **α-cut,** elements that belong to ***A*** at least to the degree **α** is called the **α**-level set:

$$A\alpha = \{x \in X \mid f_A(x) \geq \alpha\} \quad \alpha\text{–cut}$$

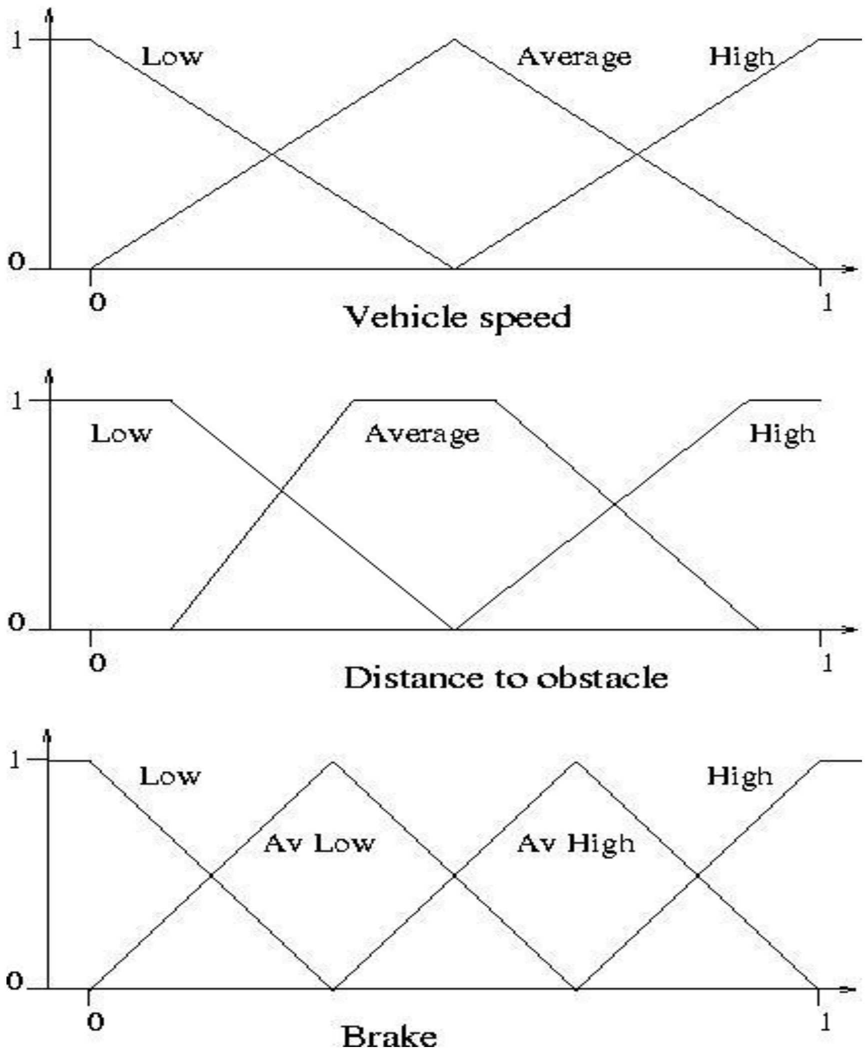


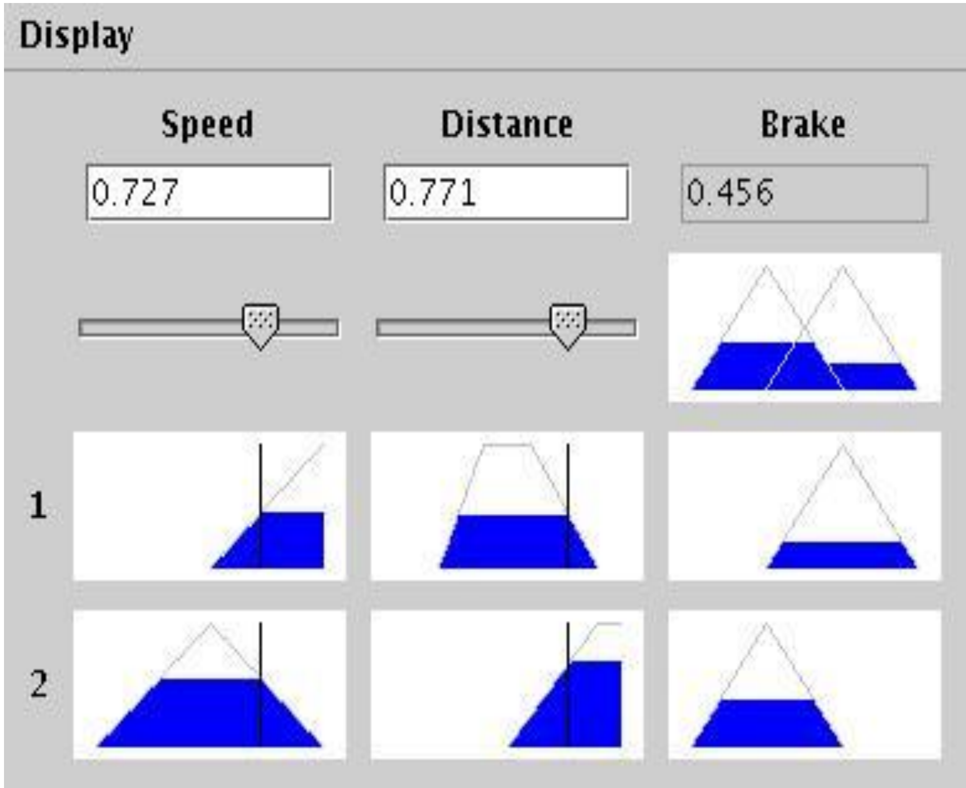
- Igualdad, $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x); \forall x \in X$
- Inclusión, $A \subseteq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x); \forall x \in X$

Operaciones en conjuntos borrosos

- and
- or
- complement

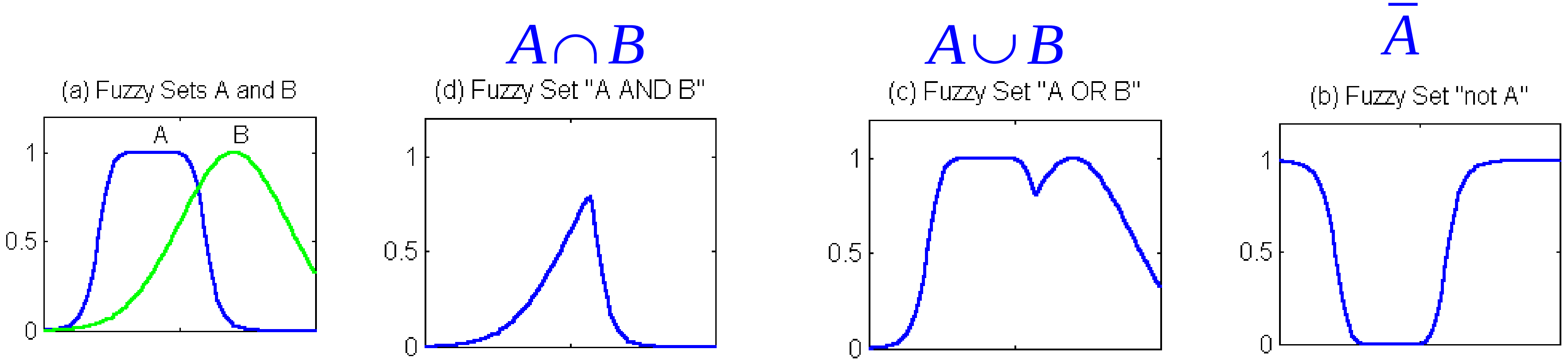
If **Speed** is *High* and **Distance** is *Average* then **Brake** is *Average High*
If **Speed** is *Average* and **Distance** is *High* then **Brake** is *Average Low*





Operaciones básicas con conjuntos borrosos

- Unión, $f_{A\cup B}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$
- Intersección, $f_{A\cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$
- Complemento, $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$



Complementos, T-normas y T-conormas

- Las operaciones básicas no son únicas.
- Hay distintas formas de
  - complementos (C),
  - intersecciones (T-normas) y
  - uniones (T-conormas) borrosas

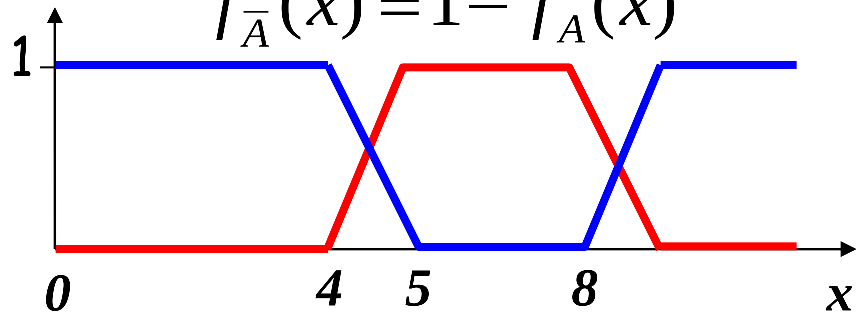
Operadores genéricos: Complemento

- Dado un conjunto borroso $A=\{x, f_A(x)\}$, el $N(A)$ se interpreta como el **grado** en que x no pertenece a A

$$\textbf{Comp} = N : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

- **Frontera** $N(0)=1$ y $N(1)=0$
- **Monotonía** $N(a) \geq N(b)$ if $a \leq b$
- **Involución** $N[N(a)] = a$

$$f_{\overline{A}}(x) = 1 - f_A(x)$$



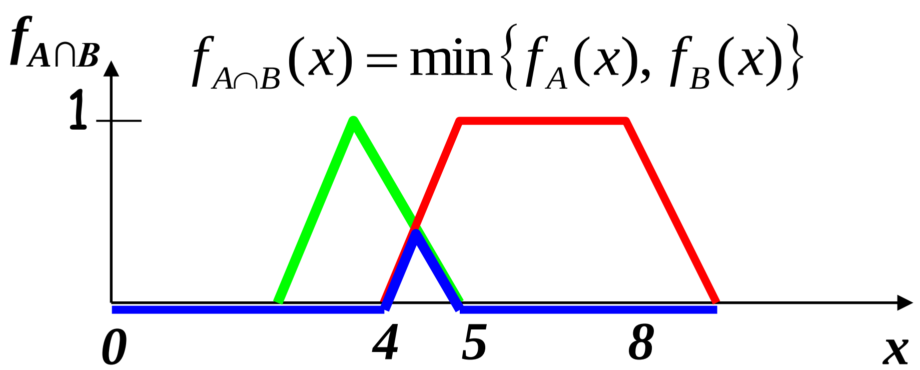
Operadores genéricos: T-norma

Intersection of fuzzy sets ***A*** and ***B***:

$$f_{A\cap B}(x) = T(f_A(x), f_B(x))$$

- **Commutativity:** $T(a, b) = T(b, a)$
- **Associativity:** $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
- **Boundary:** $T(a, 0) = 0,\ T(a, 1) = a$
- **Monotonicity:** $T(a, b) \leq T(a, c)$ if $b \leq c$

$$f_{A\cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$$



Ej. T-norm

- **Intersección estándar:** $\mathrm{Min}(a,b) = \min(a,b)$
- **Producto algebraico:** $\mathrm{Prod}(a,b) = a \cdot b$
- **Diferencia acotada:** $W(a,b) = \max(0, a+b-1)$
  Lukasiewicz
- **Intersección drástica:**

$$Z(a,b) \begin{cases} a, \text{ si } b=1; \\ b, \text{ si } a=1; \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

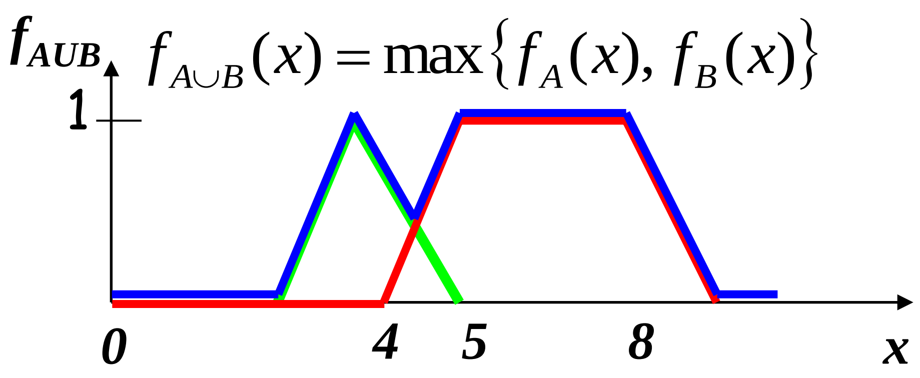
$$Z \leq W \leq Prod \leq Min$$

Operadores genéricos: T-conorma

Union of fuzzy sets ***A*** and ***B***

$$f_{AUB}(x) = S(f_A(x), f_B(x));\ T\text{-conorm or S-norm}$$

- **Commutativity:** $S(a, b) = S(b, a)$
- **Associativity:** $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$
- **Boundary:** $\boldsymbol{S(a, 1) = 1, S(a, 0) = a}$
- **Monotonicity:** $S(a, b) \leq S(a, c)$ if $b \leq c$



Ej. T-conorm

- **Unión estándar:** $\mathrm{Max}(a; b) = \max(a; b)$
- **Suma algebraica:** $\mathrm{Prod}^*(a; b) = a + b - a.b$
- **Suma acotada:** $W^*(a; b) = \min(1; a + b)$

  dual de Lukasiewicz
- **Unión drástica:**

$$Z^*(a,b) = \begin{cases} a, \text{ si } b=0; \\ b, \text{ si } a=0; \\ 1 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathrm{Max} \leq \mathrm{Prod}^* \leq W^* \leq Z^*$$

Prop. de operaciones borrosas

- Prop. en gral inválidas por abandonar el concepto de pertenencia: un elemento puede pertenecer a un conjunto y a su complemento.
  - Ley de la contradicción

$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$

  - Ley de exclusión media

$$A \cup \bar{A} = U$$

Medidas Borrosas: Sugeno 1974

Una ***medida borrosa*** *g en X es una función* $g{:}2^X \rightarrow [0,1]$ *que satisface las sgtes propiedades:*

1. $g(\emptyset) = 0; g(X) = 1;$
2. $A \subset B \subset X \;\rightarrow\; g(A) \le g(B)$

Medida de Posibilidad

3. $g(\cup A_i) = Sup\{g(A_i)\}$ *dado un conjunto de índices i.*

Ejemplo- Supongamos que:

Juan desea ir a tomar cerveza que sea **barata**, **y** en un local **tradicional**, **y** que el local quede **cerca** de su casa.

Una **cerveza barata** es una que cueste alrededor de $10 o menos; un **local tradicional** es un local que al menos tenga 5 años funcionando; que **quede cerca** de su casa es que no quede a más de 10 cuadras.

Se dispone de 4 locales: Local 1, cerveza a 14.00$, antigüedad 3 años, 3 cuadras; Local 2 , cerveza a 8.00$, antigüedad 7 años, 12 cuadras; Local 3, cerveza a 10.00$, antigüedad 4 años, 9 cuadras; Local 4, cerveza a 12.50$, antigüedad 5 años, 10 cuadras

Defina: conjuntos borrosos, verifique por lógica clásica y por lógica difusa si alguno de los locales cumple con el requerimiento de Juan.

Razonamiento borroso

Implicancia

Razonamiento

La lógica borrosa trata con proposiciones borrosas que asignan valores a variables lingüísticas.

P. Ej.:

1. Para la **variable lingüística "<u>estatura</u>", el valor "<u>estatura es alta</u>"** es un conjunto difuso A definido sobre el universo de discurso de la variable lingüística.
2. Para la **variable lingüística "<u>peso</u>", el valor "peso elevado",** se define en el universo de discurso de dicha variable lingüística.

Variable lingüística

- Una variable linguística es caracterizada por una quíntupla

$$\left(x, T(x), X, G, M\right)$$

- Donde

x: Variable base (nombre de la variable)

T(x): Conjunto de términos lingüísticos de *x* que refieren a la variable base

X: Conjunto universo

G: Es una regla sintáctica (gramática) para generar términos lingüísticos

M: Es una regla semántica que asigna a cada término un significado

Ej. De variable lingüística

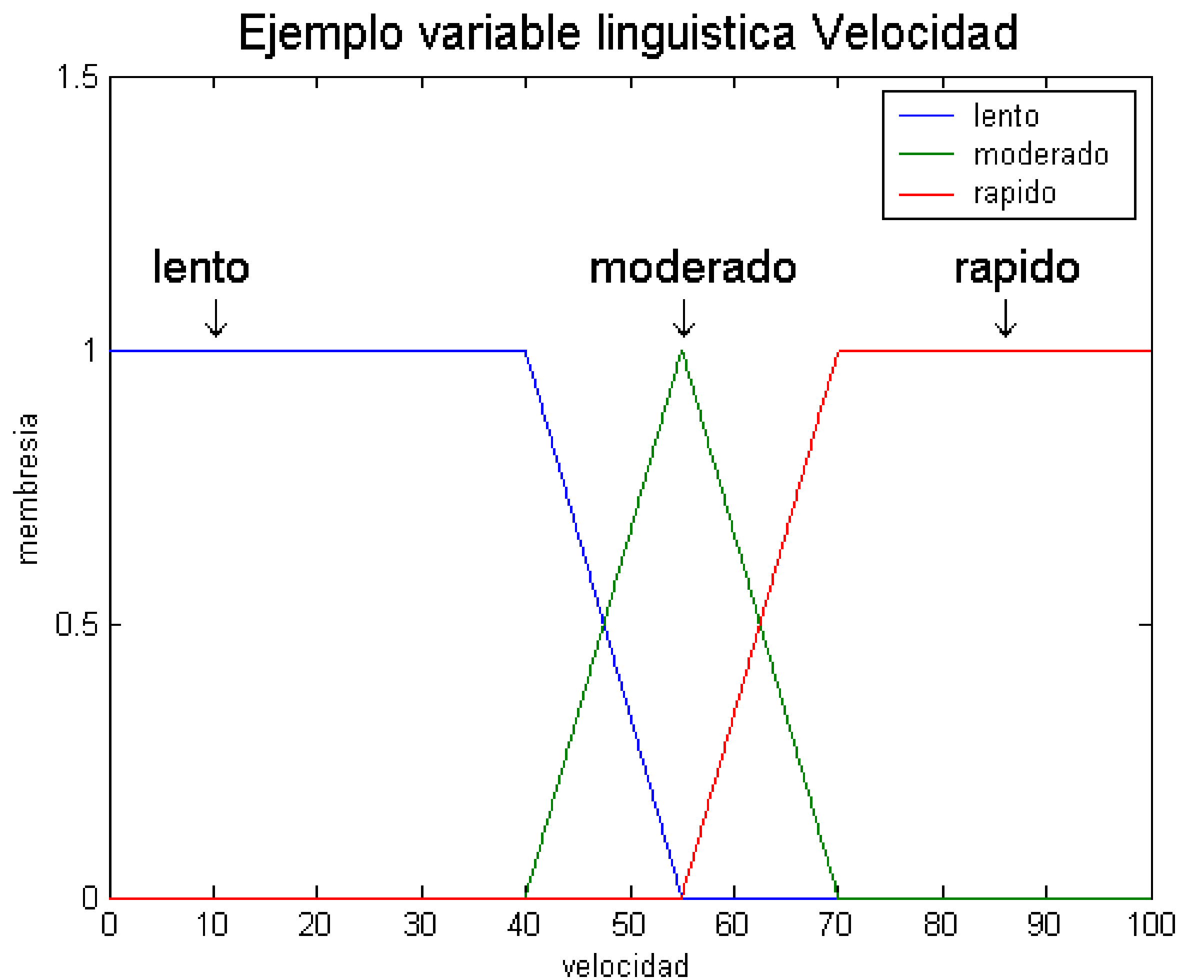
- La **velocidad** puede ser interpretada como una variable lingüística
- T(velocidad) podría ser

T(velocidad)={lento, moderado, rápido, muy lento, mas o menos rápido, ...}

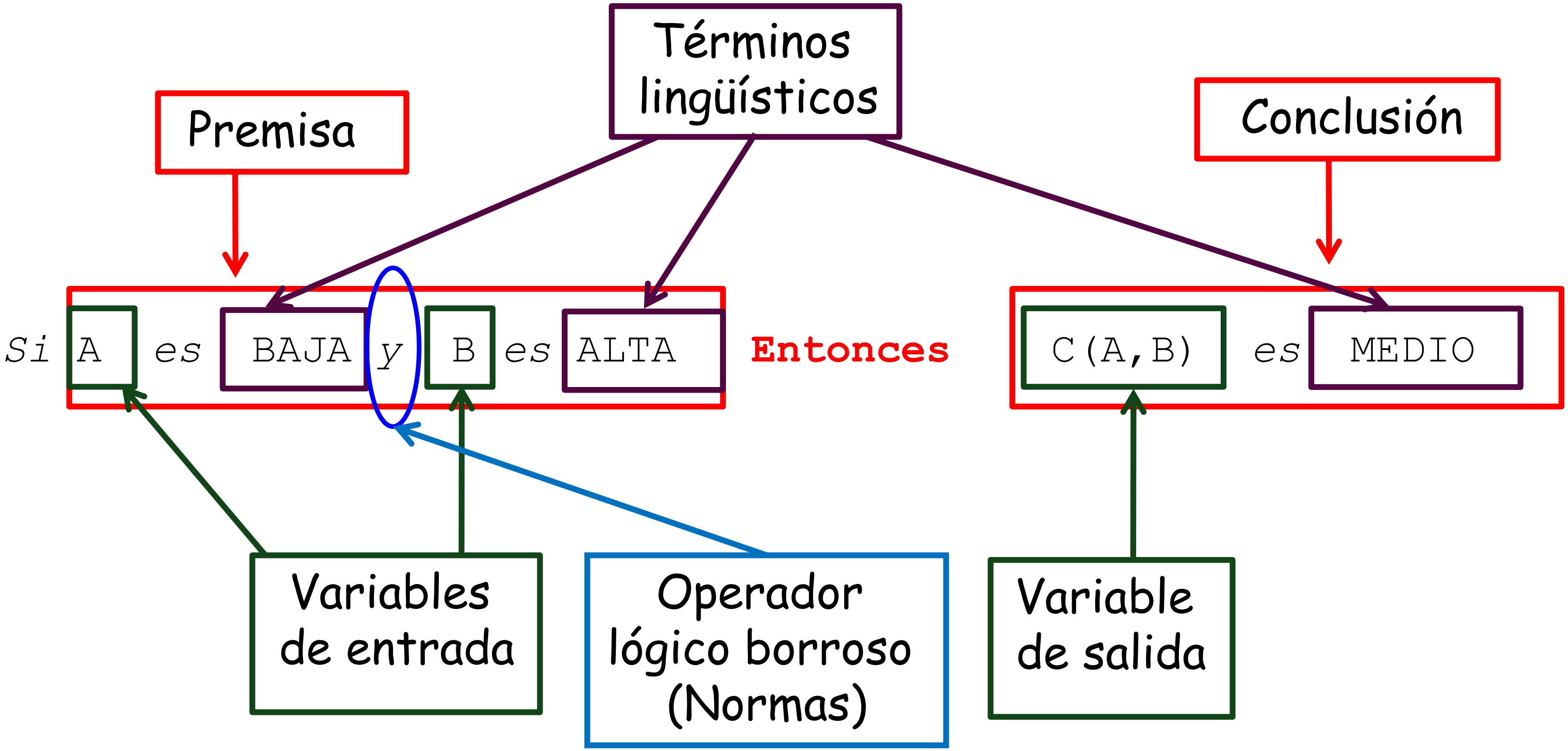
- Cada término es caracterizado por un número difuso definido sobre un conjunto universal X=[0,100]
- Podemos interpretar las etiquetas

Lento como "una velocidad menor a 40 Km/h"
Moderado como "una velocidad cercana a 55 Km/h"
Rápido como "una velocidad alrededor de 70 Km/h"

Ej. De variable lingüística



Conocimiento: representación en reglas borrosas



Implicaciones

- Definir una implicación es asignar una **función de pertenencia** a una agrupación antecedente-consecuente del tipo **P→Q**

- Nos permite **razonar** con afirmaciones tales como:

SI "la velocidad es *normal*" ENTONCES "la fuerza de frenado debe ser *moderada*"

Implicaciones

- Modus Ponens Clásico

Premisa	Si P entonces Q
Hecho	P
Consecuencia	Q

- Modus Ponens Generalizado (GMP)

Premisa	Si P entonces Q
Hecho	P*
Consecuencia	Q*

Implicaciones

Opciones para definir:

- Teórica: Darle el mismo significado de **lógica clásica**.

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \qquad \mu_{p\rightarrow q}(u,v) = \max(1-\mu_p(u), \mu_q(v))$$

$$P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge (\neg Q)) \qquad \mu_{p\rightarrow q}(u,v) = 1 - \min[\mu_p(u), 1-\mu_q(v)]$$

- Práctica: Darle un significado **causa-efecto.**

Implicación de Mamdani

$$P \rightarrow Q \equiv P \wedge Q \quad \Rightarrow \mu_{p\rightarrow q}(u,v) = \min(\mu_p(u), \mu_q(v))$$

Implicaciones

- Implicaciones usuales:

Nombre	Fórmula
Zadeh	Max(1-p, Min(p,q))
Min (de Mamdani)	Min(p,q)
Luckasiewicz	Min(1, 1-p+q)
Larsen	p x q

- Luckasiewicz, que se deduce de la regla:
  - $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
  - $\mu_{(P\rightarrow Q)}(x,y) = \mu_{(\neg P \vee Q)}(x,y) = \mathrm{Min}(1, \mu_{\neg P}(x) + \mu_Q(y)) = \mathrm{Min}(1, 1\text{-}\mu_P(x) + \mu_Q(y))$

- Luckasiewicz y Zadeh son compatibles con la lógica clásica. Los de Mamdani y de Larse no son compatibles con la lógica clásica:

p	q	Zadeh	Mamdani	Luckas.	Larsen
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Implicaciones

- Mamdani y de Larsen **no** son compatibles con la lógica clásica. ¿Por qué se usan?
  - Para modelos causales donde las *consecuencias* **sólo** se dan por la aparición de las *causas* => es falsa la implicación **antecedente es falso** y el **consecuente verdadero**.

  - Para **hacer un modelo «implicador» como relación de causa-efecto:**

en ingeniería es falso que "falso→ verdadero",
es falso $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

Razonamiento aproximado

- Con lo visto podemos determinar las distribuciones de posibilidad de la regla según el hecho:
  - Regla: $\mu_{(P \rightarrow Q)}(x,y)$
  - Hecho: $\mu_{P*}(x)$

- Pero todavía no podemos definir la conclusión, $\mu_{Q*}(x)$, ya que para ello necesitamos componer Regla y Hecho.

- La inferencia difusa de la implicación está basada en la regla composicional de inferencia

Regla composicional de inferencia

Premisa:	Si ***u*** está en **P** **entonces** ***v*** está en **Q**
Hecho:	*u'* está P*
Consecuencia:	*v'* está Q*

Donde Q* está determinado por la composición

$$Q^* = P^* \circ \underbrace{(P \rightarrow Q)}_{\textit{matriz asociativa}\ \mathrm{M}}$$

Composición M

- Con $M_{[nxq]}$ obtenida de P→Q, la inferencia difusa permite a partir de P* (subconjunto de P), inducir un subconjunto Q* de Q.

- Siendo $P=(p_1, \ldots, p_n)$ y $Q=(q_1,\ldots,q_q)$

$$M = \mu_{PxQ} = \begin{vmatrix} p_1 \rightarrow q_1 & \cdots & p_1 \rightarrow q_q \\ & & \\ p_i \rightarrow q_1 & & \\ p_n \rightarrow q_1 & \cdots & p_n \rightarrow q_q \end{vmatrix}$$

con $\mathbf{p_i \rightarrow q_j = m_{ij} = min(p_i\ ,q_j)}$

Regla composicional

- En casos prácticos se utiliza la composición max-T-norma

$$Q^* = P^* \circ (P \to Q)$$

- Sean dos conjuntos P y Q definidos en U y V resp.

$$Q^*(v) = \max_{u \in U} \{T[P^*(u), (P \to Q)(u,v)]\}, v \in V$$

T: si existe un solo camino de conexión entre Pi* y (P→Q)ij, tomamos "el menor", tramo más débil.
max: si existe más de un camino de conexión, es análogo a "si existe al menos un camino" de relaciones binarias.

$$Q^*(v) = \max_{u \in U} \{T[P^*(u), (P \to Q)(u, v)]\}, v \in V$$

- Teniendo a $P^*=(p_{1*}, \dots, p_{n*})$ y $M = \mu_{P \times Q}$

$$Q^* = P^* \circ (P \to Q) = \begin{array}{cl} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{Q} & \\ \left| \begin{matrix} T(p_{1*}; p_1 \to q_1) \dots & \dots T(p_{1*}; p_1 \to q_q) \\ T(p_{i*}; p_i \to q_1) \quad \dots & \dots \\ T(p_{n*}; p_n \to q_1 \quad \dots & \dots T(p_{n*}; p_n \to q_q) \end{matrix} \right| & \left. \vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}} \right\} P \end{array}$$

$$\max$$

$$Q^* = q_{1*}; \dots \quad \dots q_{q*}$$

Inferencia borrosa: Mamdani max-min

1. Entrada: valores crisp; una regla
2. Entrada: valores crisp, varias reglas
3. Entrada: una lectura borrosa

1. Inferencia max-min
(valores crisp; una regla; forma gráfica)

- **REGLA: IF A THEN B**
- **Cuando A* tiene un solo valor de pertenencia distinto de 0, p. ej., x_k se puede utilizar solo μ_A (x_k) directamente con la representación de B, μ_B (y) para inducir B* como**
  - **$B^* = \mu_A(x_k) \wedge \mu_B(y)$**

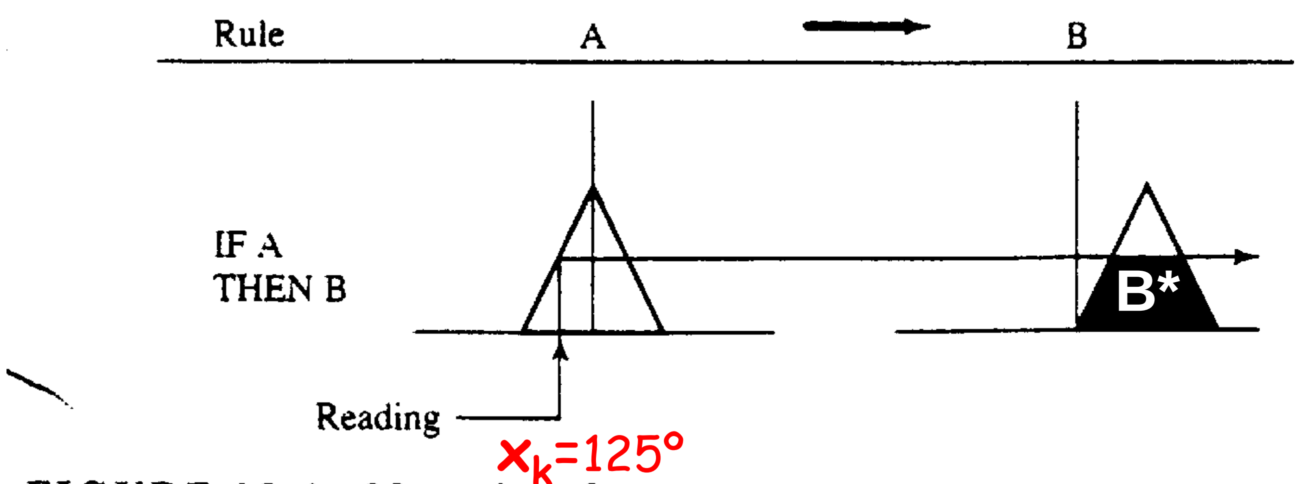


FIGURE 13.4 Max-min inference.

1. Ejemplo: Inferencia max-T
(valores crisp; una regla, forma analítica)

IF Temperature is normal THEN Velocity is medium

IF A THEN B

Normal temperature = (0/100, .5/125, 1/150, .5/175, 0/200)

Medium velocity = (0/10, .6/20, 1/30, .6/40, 0/50)

Obtener el resultado con la regla composicional

Normal temperature = (0/100, .5/125, 1/150, .5/175, 0/200)

Medium velocity = (0/10, .6/20, 1/30, .6/40, 0/50)

$$M = m_{ij} = \min(a_i, b_j)$$

$$M \quad \begin{array}{c} 100 \\ 125 \\ 150 \\ 175 \\ 200 \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} \min(0., 0.) & \min(0., .6) & \min(0., 1.) & \min(0., .6) & \min(0., 0.) \\ \min(.5, 0.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 1.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 0.) \\ \min(1., 0.) & \min(1., .6) & \min(1., 1.) & \min(1., .6) & \min(1., 0.) \\ \min(.5, 0.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 1.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 0.) \\ \min(0., 0.) & \min(0., .6) & \min(0., 1.) & \min(0., .6) & \min(0., 0.) \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{ccccc} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0.6 & 1. & 0.6 & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{array} \right|$$

$$A' = (0/100, .5/125, 0/150, 0/175, 0/200)$$

$$M = \begin{vmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0.6 & 1. & 0.6 & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{vmatrix}$$

$$A' = (0/100,\ .5/125,\ 0/150,\ 0/175,\ 0/200)$$

$$b'_j = \max_{1 \le i \le n}\{\min(a'_i, m_{ij})\}$$

$$b_1 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.)]$$

$$b_2 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., .6), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

$$b_3 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., 1.), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

$$b_4 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., .6), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

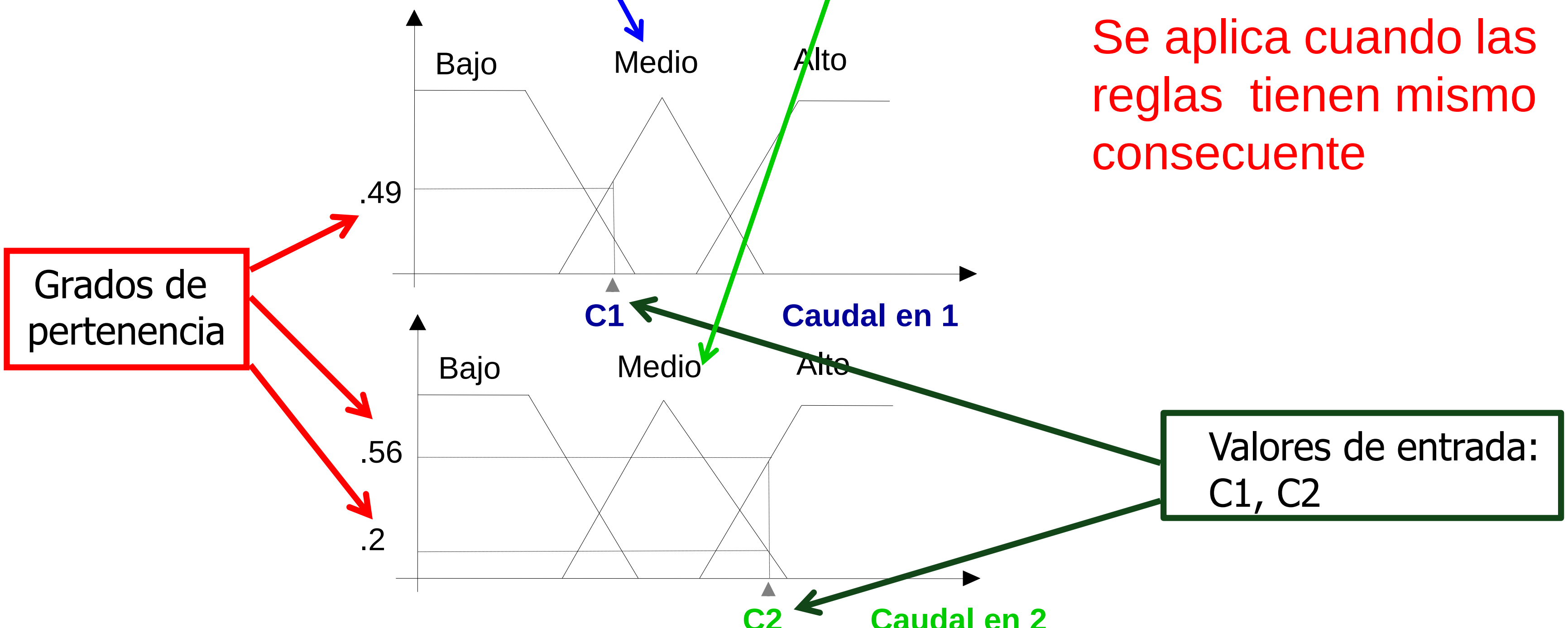
$$b_5 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.)]$$

$$B' = (0/10,\ .5/20,\ .5/30,\ .5/40,\ 0/50)$$

2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio *entonces* **nivel 3** *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto *entonces* **nivel 3** *es* alto



Se aplica cuando las reglas tienen mismo consecuente

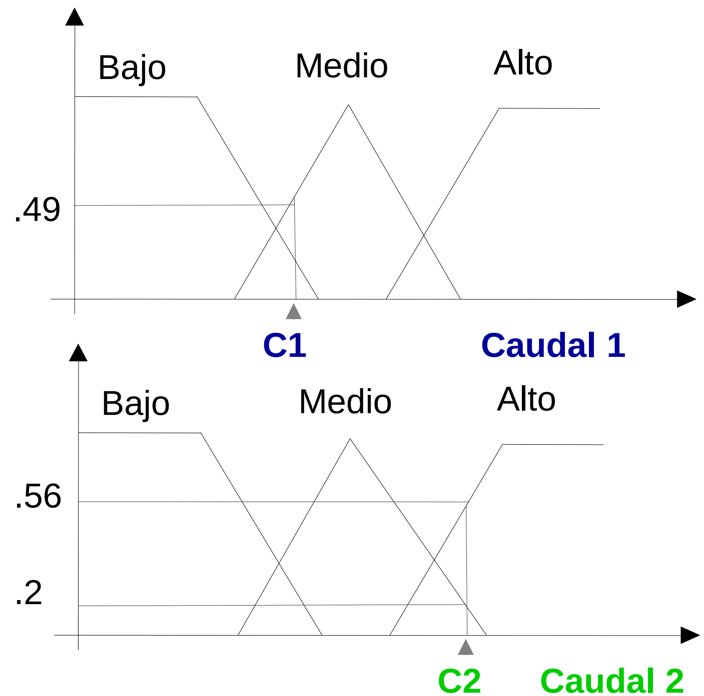
2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

Regla 1: $\overbrace{\textit{Si}\text{ caudal 1 }\textit{es}\text{ medio}}^{A1}$ *y* $\overbrace{\text{caudal 2 }\textit{es}\text{ medio}}^{A2}$ ***entonces*** nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto ***entonces*** nivel en 3 *es* alto

Completar tabla

Regla	Antecedente 1	Antecedente 2	(A_1∩A_2)
Regla 1			
Regla 2			



2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

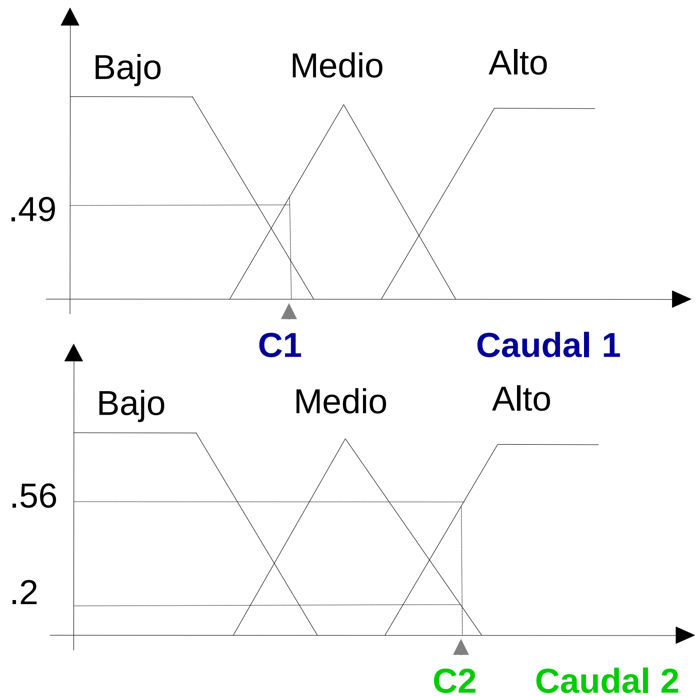
Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio ***entonces*** nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto ***entonces*** nivel en 3 *es* alto

Borrosificador → *Norma T*: MIN

Regla	Antecedente 1	Antecedente 2	$(A\_1 \cap A\_2)$
Regla 1	0.49	0.2	
Regla 2	0.49	0.56	

Grado de veracidad de la regla



2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

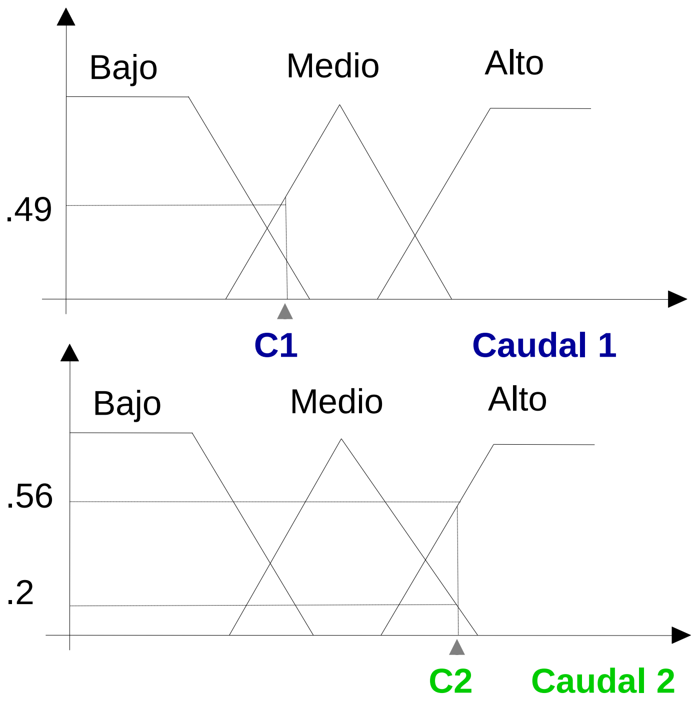
Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio ***entonces*** nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto ***entonces*** nivel en 3 *es* alto

Borrosificador → *Norma T*: MIN

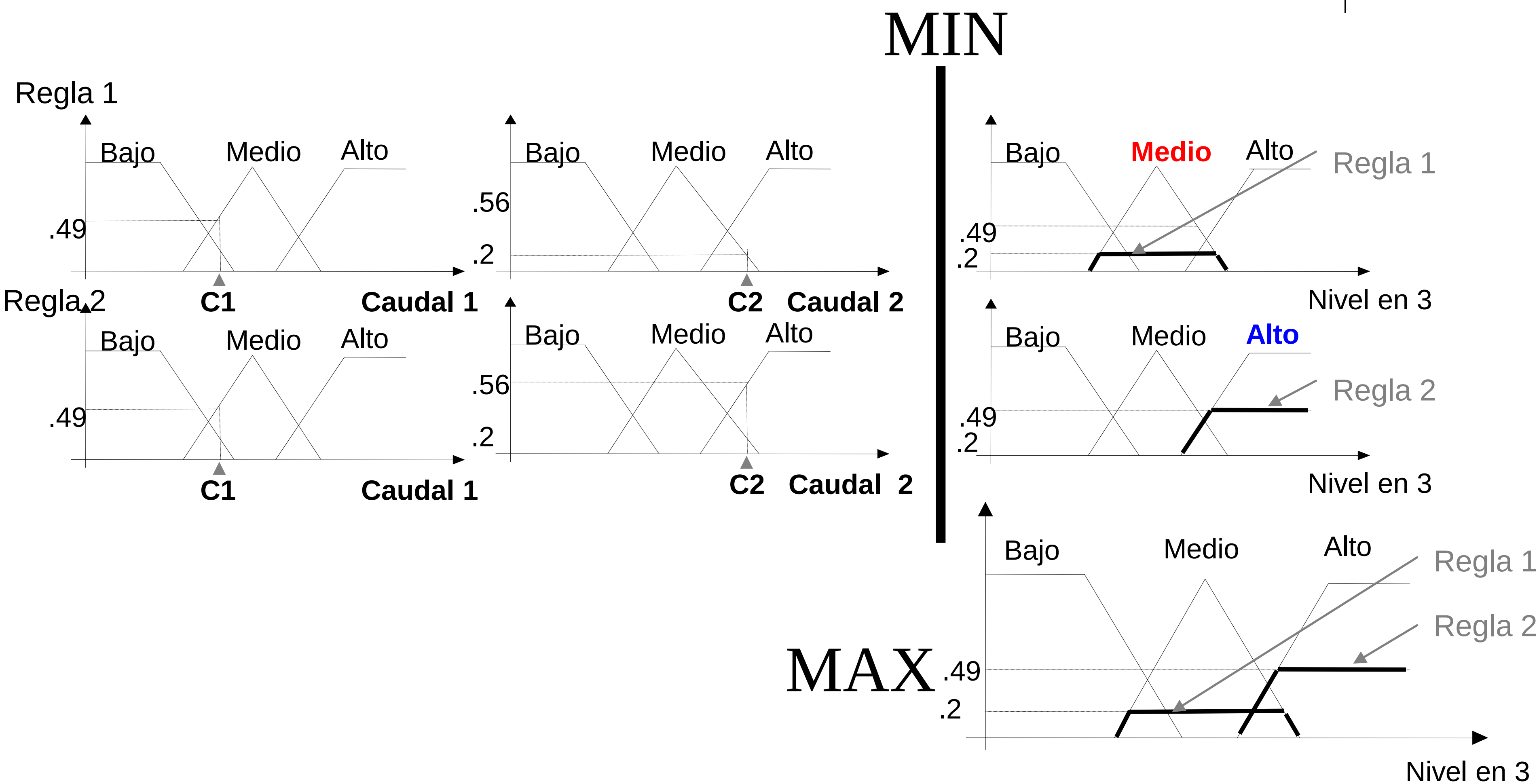
Regla	Antecedente 1	Antecedente 2	(A_1∩A_2)
Regla 1	0.49	0.2	0.2
Regla 2	0.49	0.56	0.49

Grado de veracidad de la regla



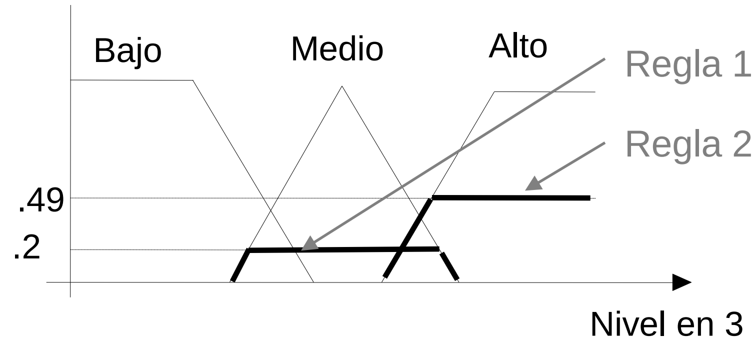
Regla 1: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* medio *entonces* nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* alto *entonces* nivel en 3 *es* alto



2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

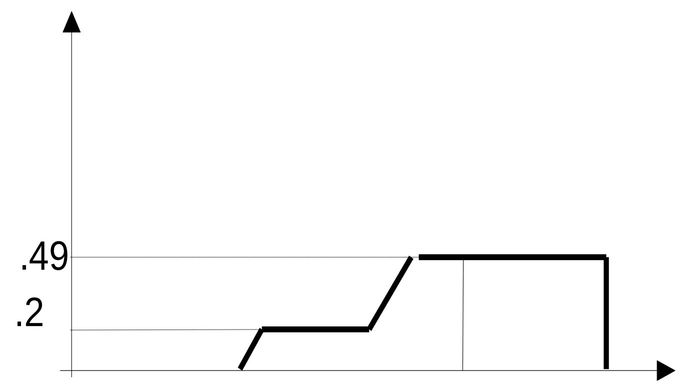
Regla	Grado de veracidad de la regla
Regla 1	0.2
Regla 2	0.49



Defuzificación

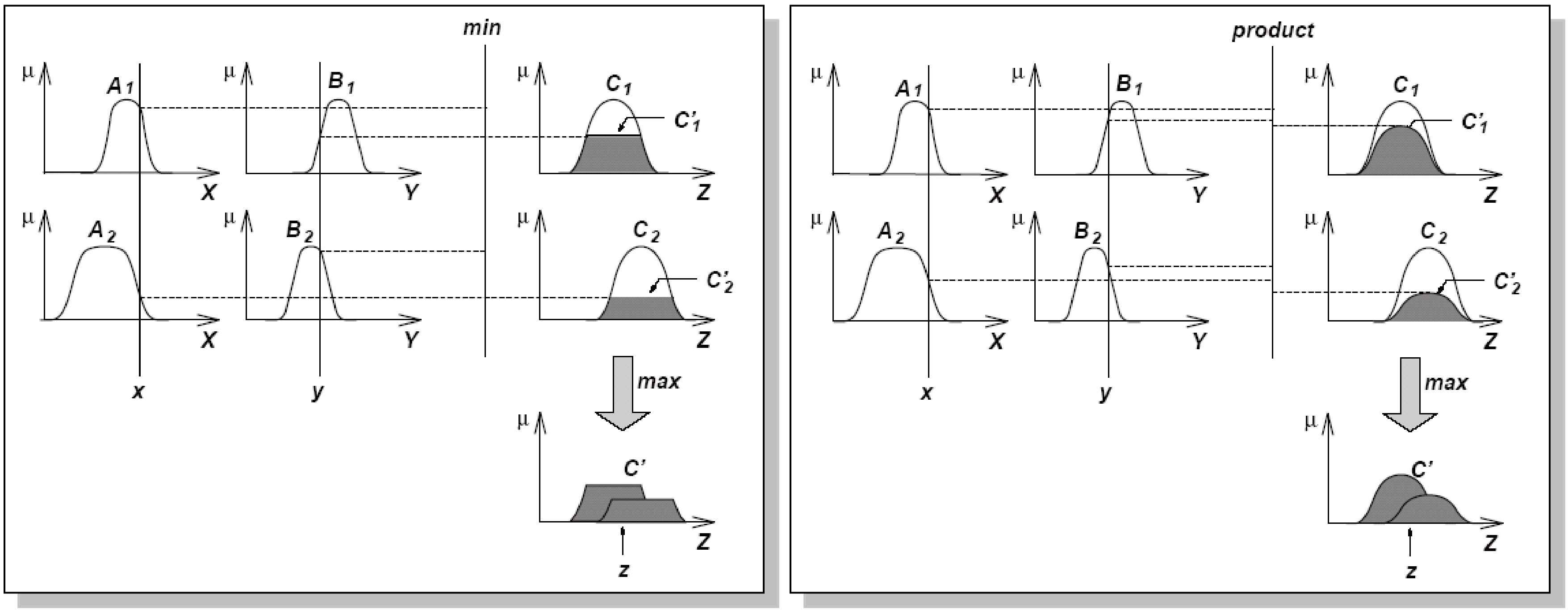
<u>*Centro de área o Centro promedio*</u>

$$C3 = u^{*} = \frac{\sum_{i=1}^{l} u_i \mu_U(u_i)}{\sum_{i=1}^{l} \mu_U(u_i)}$$



2. Inferencia max-T: valores crisp, varias reglas

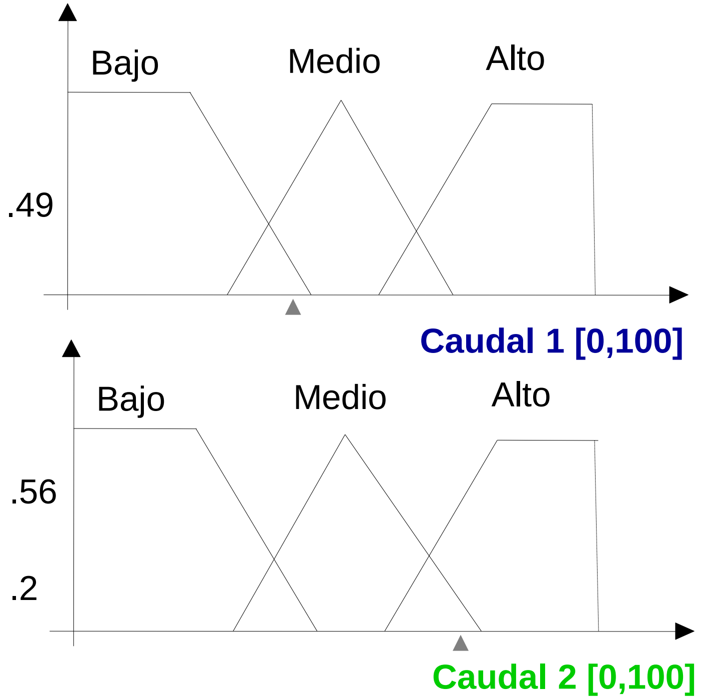
Resumiendo...

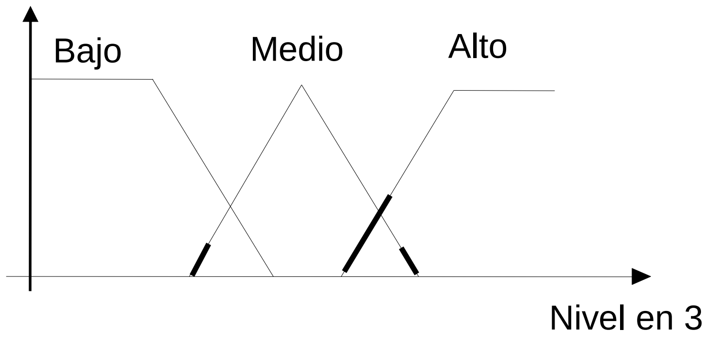


2. Ejemplo max-min: valores crisp, varias reglas

Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio ***entonces*** nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto ***entonces*** nivel en 3 *es* alto





C1 = 45; C2=75

3. Inferencia borrosa: max-T
(entrada borrosa)

En el caso que la entrada a la regla sea una lectura difusa, nosotros podemos considerar la intersección de A y A*, es decir:

min (a_i, a^*_i) para inducir el B*

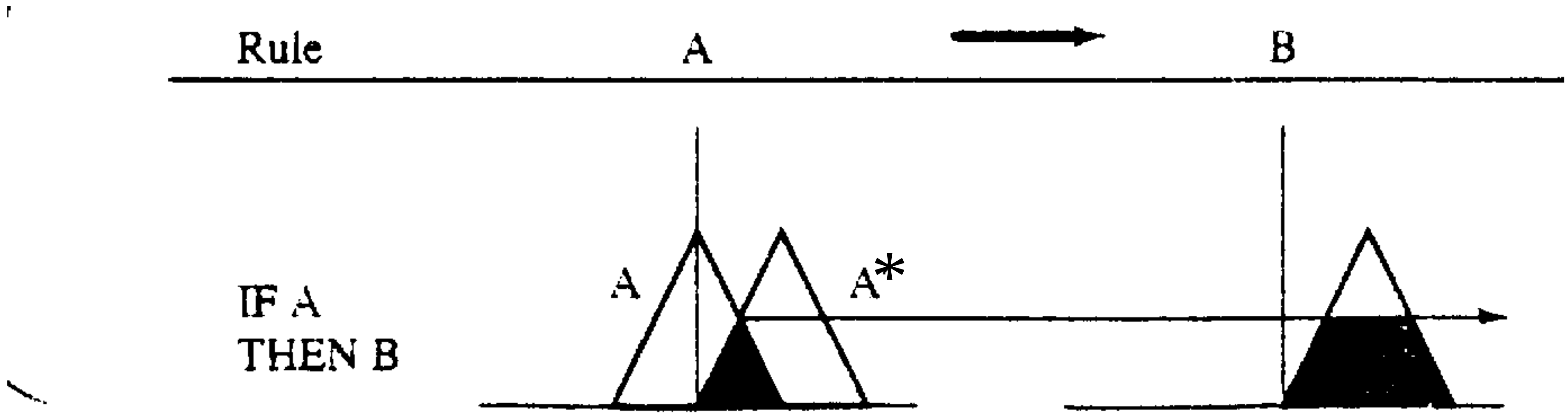


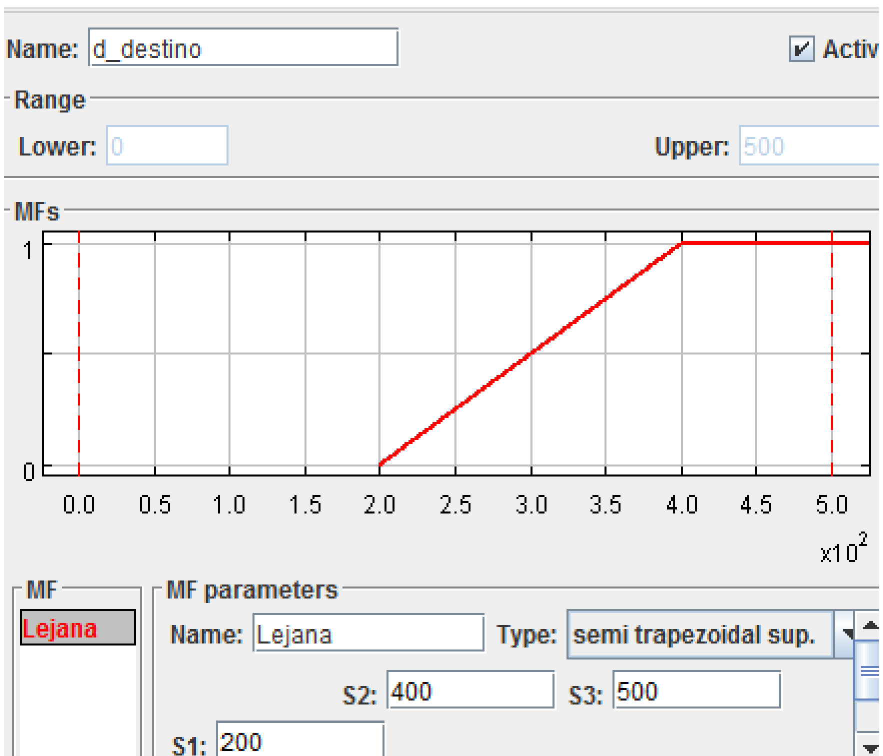
FIGURE 13.5 Max-min inference for fuzzy input.

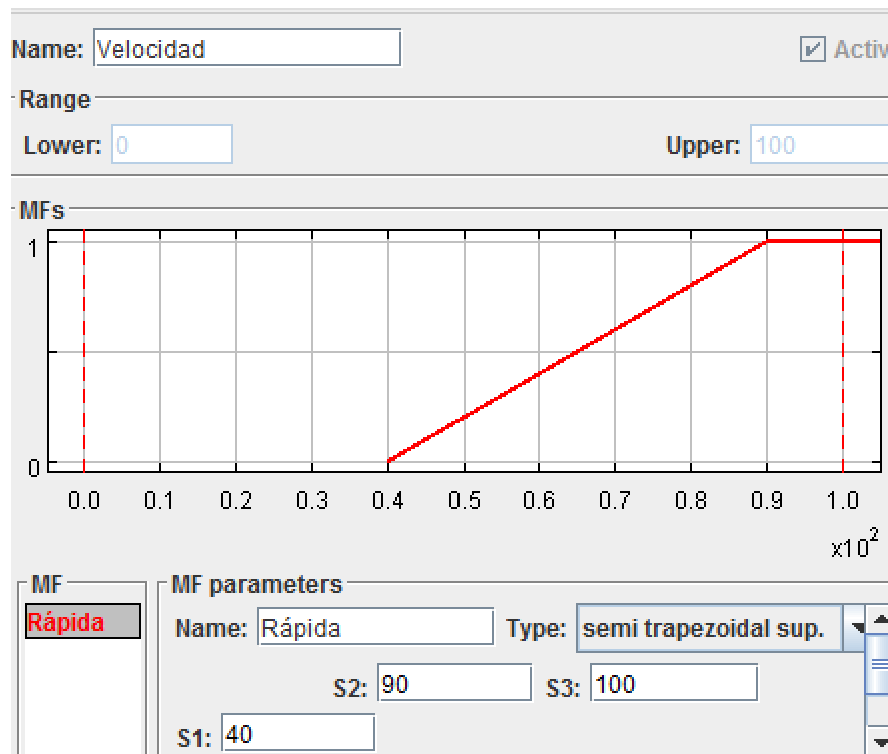
3. Inferencia borrosa: max-T
(entrada borrosa)

REGLA: Si d_{dest} es *lejana* entonces *v* debe ser *rápida*

f_{lejana}= [0,25/250 0,5/300 0,75/350 1/400 1/450] (P)

f_{rapida}= [0/40 0,2/50 0,6/70 1/90] (Q)





3. Inferencia borrosa: max-T (entrada borrosa)

REGLA: **Si d_{dest} es *lejana* entonces *v* debe ser *rápida***

Tengo d_{dest}* = [0,75/250 1/300 0,75/350 0/400 0/450] y la matriz *M*, V*???

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 40 & 50 & 70 & 90 \\
frapida= & [\ 0 & 0,2 & 0,6 & 1\ ]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & flejana= \\
250 & [\ 0,25 \\
300 & 0,5 \\
350 & 0,75 \\
400 & 1 \\
450 & 1\ ]
\end{array}
$$

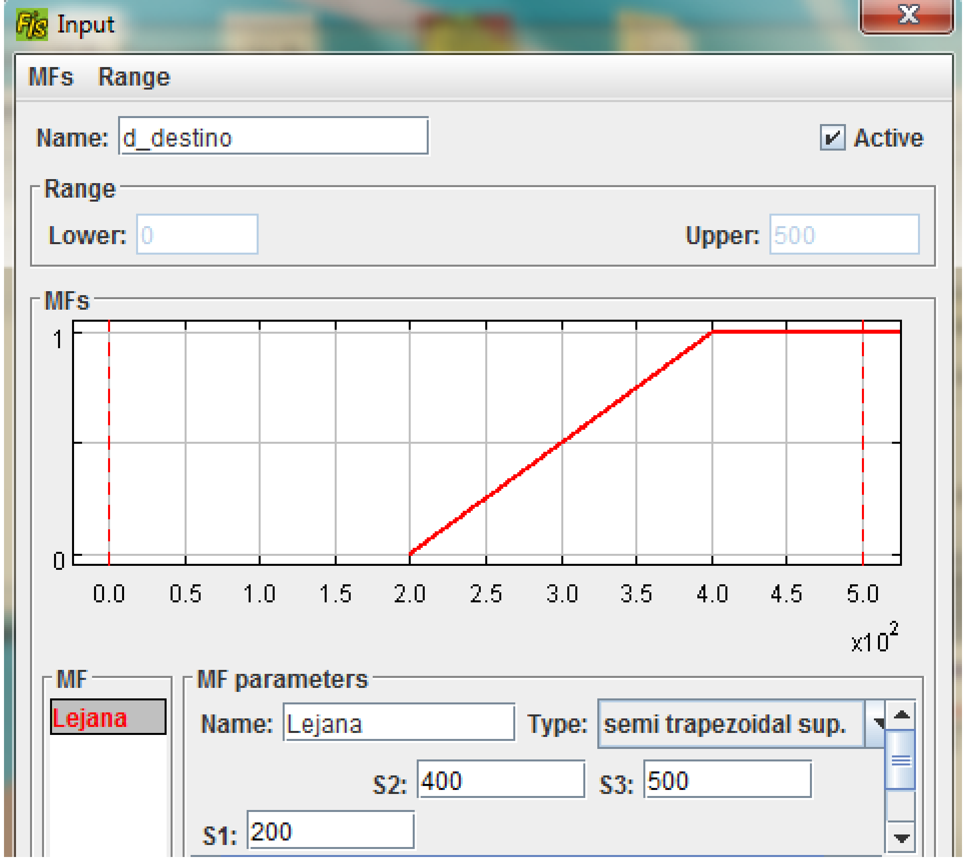
MAX-min

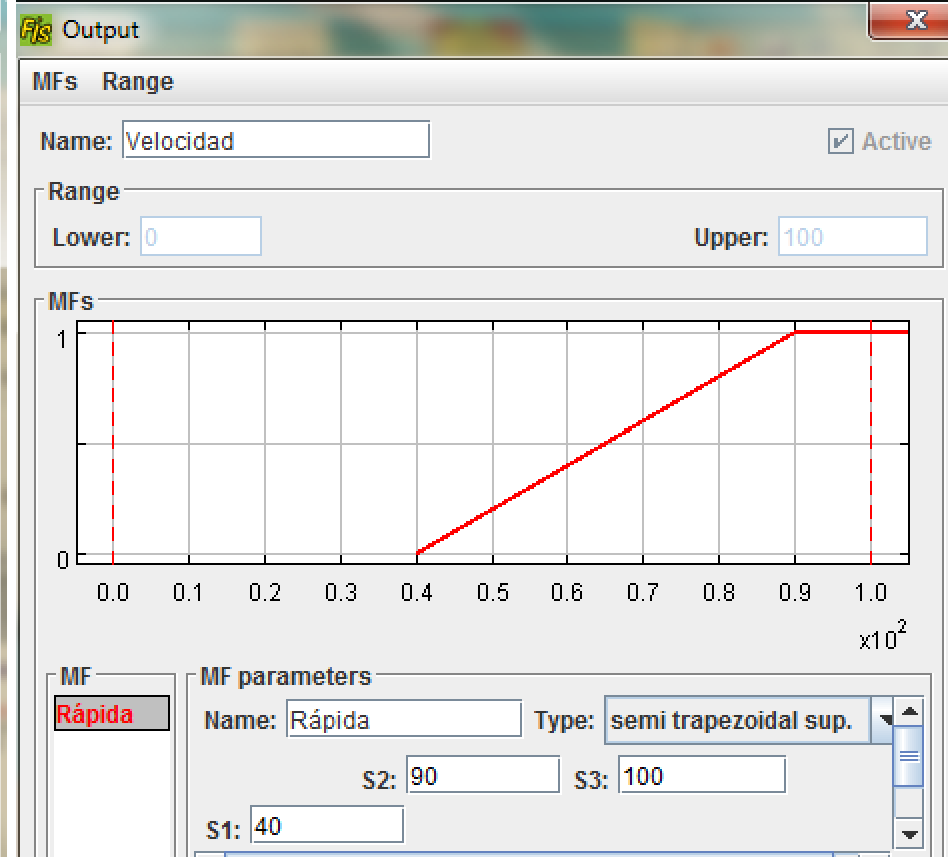
$$
\begin{array}{ccccc}
250 & 300 & 350 & 400 & 450 \\
[\ 0,75 & 1 & 0,75 & 0 & 0\ ]
\end{array}
\circ
\begin{array}{ccccc}
40 & 50 & 70 & 90 & \\
0 & 0,2 & 0,25 & 0.25 & 250 \\
0 & 0,2 & 0,5 & 0,5 & 300 \\
0 & 0,2 & 0,6 & 0,75 & 350 \\
0 & 0,2 & 0,6 & 1 & 400 \\
0 & 0,2 & 0,6 & 1 & 450
\end{array}
$$

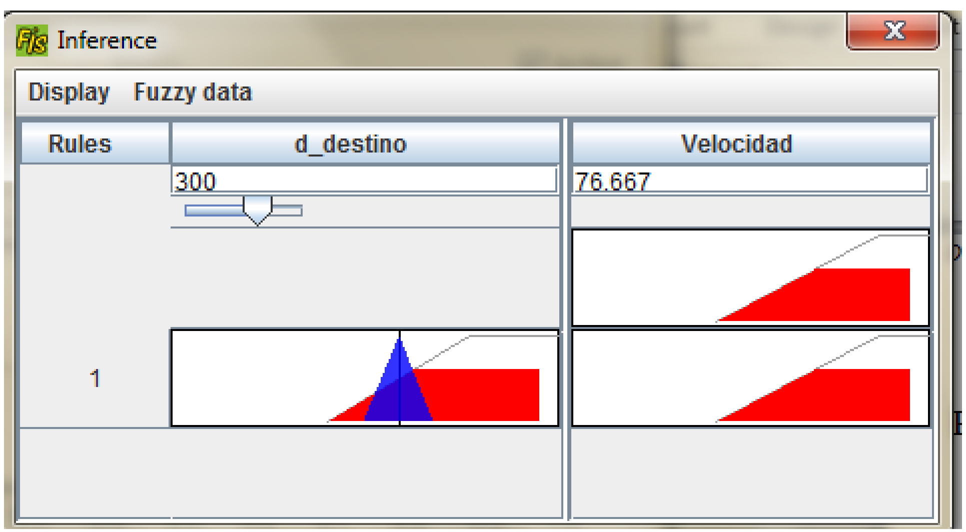
$v_{1(40)}$= max(min(0,75;0); min(1;0); min(0,75;0); min(0;0); min(0;0))

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 40 & 50 & 70 & 90 \\
\mathbf{v^*=} & [\ \mathbf{0} & \mathbf{0,2} & \mathbf{0,6} & \mathbf{0,75}] = \mathbf{v^*}
\end{array}
$$

Siendo un hecho que está entre las distancias MEDIAS y LEJANAS; es de esperar que v* esté entre las velocidades MEDIA y RÁPIDA





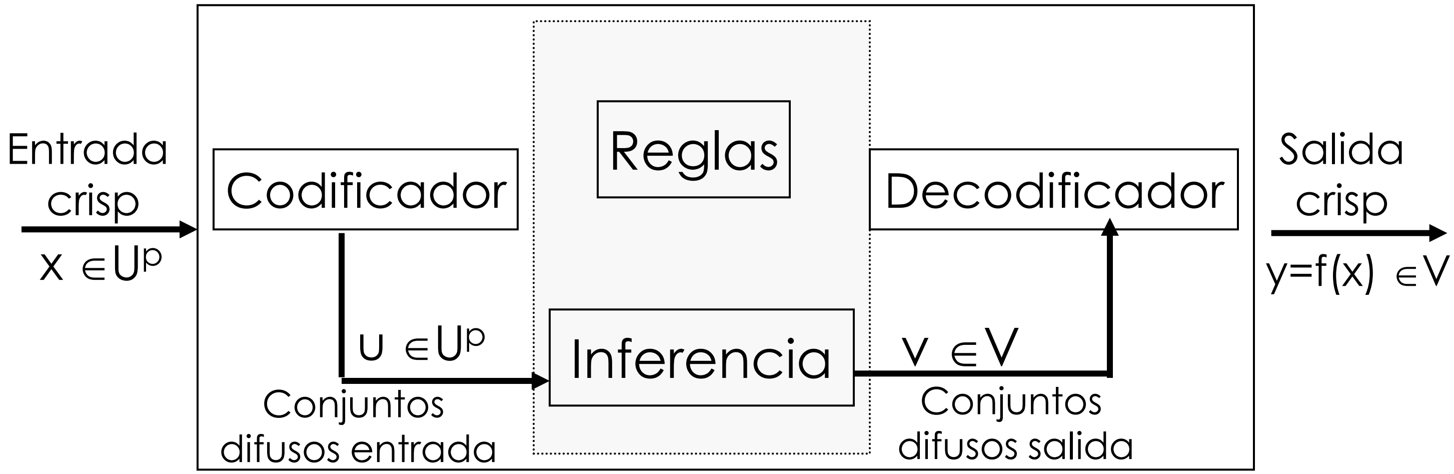


40 50 70 90

v*= [0 0,2 0,6 0,75]= v*

Métodos de Defuzificación

- La salida de un proceso de inferencia es un conjunto difuso, en procesos en línea se requieren valores crisp



Métodos de Defuzificación

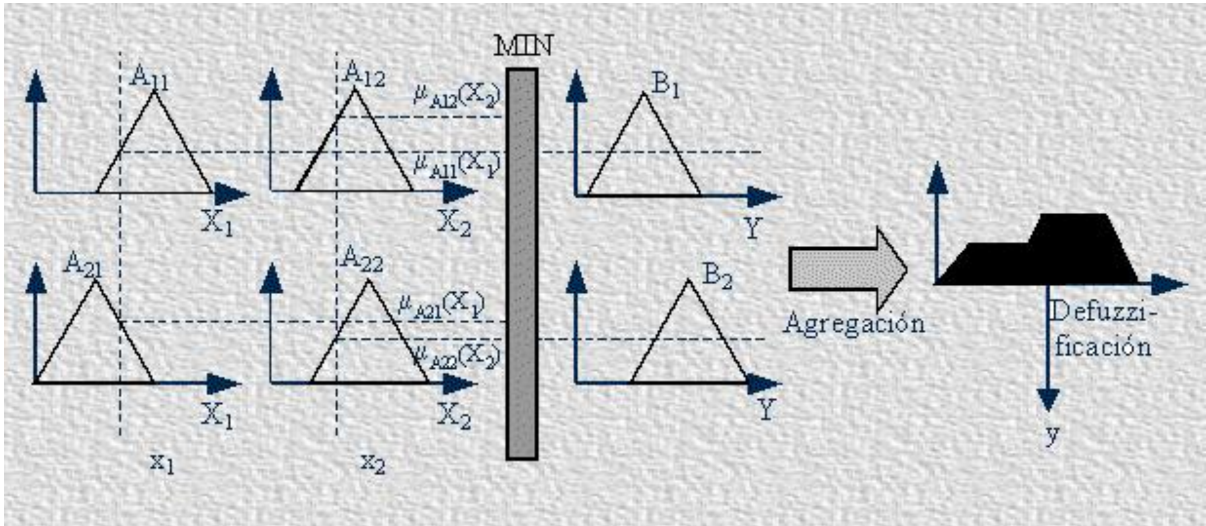
- Por ej.:

Centro de Gravedad

$$y = \frac{\sum_i b_i \int \mu(i)}{\sum_i \int \mu(i)}$$

Centros Promediados

$$y = \frac{\sum_i b_i \mu_{premisa}(i)}{\sum_i \mu_{premisa}(i)}$$



Sistema Difuso Mamdani, Procesamiento Detallado

Resumen de tareas: FIS

- Definir las variables de entradas y salidas
- Definir el universo de discurso
- Determinar el número de funciones de pertenencia
- Distribuir las funciones de pertenencia
- Definir el método de borrosificación
- Definir el método de inferencia
- Definir el método de desborrosificación
- Examinar la conducta del modelo y la superficie de salida: Redefinir reglas Ejemplo

En resumen: Cuándo usar lógica borrosa

- En procesos **complejos**, si no existe un modelo de solución sencillo
- En procesos **no lineales**
- Cuando haya que introducir la experiencia de un operador "**experto**" que se base en conceptos imprecisos obtenidos de su experiencia
- Cuando ciertas partes del sistema a controlar son **desconocidas** y **no** pueden medirse de forma **fiable**
- Cuando el ajuste de una variable puede producir el desajuste de otras
- En general cuando se desea representar y operar con conceptos que tengan **imprecisión** o **incertidumbre**

En resumen: Desventajas

- Estabilidad: No hay garantía teórica que un sistema difuso no tenga un comportamiento caótico y no siga siendo estable, aunque tal posibilidad parece ser baja debido a los resultados obtenidos hasta ahora
- La determinación de las funciones de pertenencia y las reglas no siempre son sencillas
- La verificación de los modelos y sistemas borrosos expertos requiere de gran cantidad de pruebas

Implicaciones borrosas: I

Caso *crisp*: $x \rightarrow y := \neg x \vee y$

Una función I: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es llamada "fuzzy implication" si satisface las siguientes propiedades (Fundamentals of fuzzy sets, D. Dubois, H. Prade)

I1. $I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1$; $I(1,0) = 0$

I2. If $x \leq z$ then $I(x,y) \geq I(z,y)$ for all $y \in [0,1]$

I3. If $y \leq t$ then $I(x,y) \leq I(x,t)$ for all $x \in [0,1]$

I4. $I(0, x) = 1$;

I5. $I(x, 1) = 1$;

I6. $I(1, x) = x$ for all $x \in [0,1]$

I7. $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$

I8. $x \leq y$ if and only if $I(x,y) = 1$

I9. $N(x) := I(x,0)$ is a strong negation

I10. $I(x,y) \geq y$

I11. $I(x,x) = 1$

I12. $I(x,y) = I(N(y), N(x))$

I13. I is a continuous function

Def: An S-implication associated with a t-conorm S and a strong negation N is defined by

$I_{S,N}(x,y) := S(N(x),y) \qquad (x,y \in [0,1])$.

FISPRO: Trabajando a partir de datos

- Generación de particiones
  - Regular
  - K-means
  - HFP
- Generación de reglas
  - FPA
  - Wang & Mendel
  - Árbol de decisión