Métodos Numéricos - LCC **2014**
Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Andrea Torres
Práctica 5: Normas vectoriales y matriciales.
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Métodos iterativos

1. Demostrar que para la norma vectorial $\|\cdot\|_1$, la norma matricial subordinada (o inducida) es

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2. Usando la norma matricial $\|A\|_1$ calcular el número de condición de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

3. Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0.375 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 1.1x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Si se aplicara el método iterativo de Jacobi para resolver cada uno de los sistemas anteriores, podría asegurarse la convergencia?

b) Ídem *a*) para el método de Gauss-Seidel.

c) Resolver los sistemas anteriores con una tolerancia de 10^{-2} a partir de $x^{(0)} = 0$.

4. Método de sobrerrelajación (SOR). Sea $Ax = b$ un sistema $n \times n$ de ecuaciones lineales y sea $w \in \mathbb{R}^+$. Considerar la siguiente modificación del esquema de Gauss-Seidel, conocida como el método de sobrerrelajación:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-w) x_i^{(k)}$$

Repetir el ejercicio (3) para el método SOR con $w = 1.2$.

5. Si A es una matriz definida positiva y tridiagonal se demuestra que la elección óptima para el parámetro w del método SOR viene dada por

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_j)^2}}$$

siendo T_j la matriz del método de Jacobi correspondiente al sistema $Ax = b$.

Considerando el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & & & = & 24 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 30 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -24 \end{array}\right.$$

cuya solución es $x = (3, 4, -5)^t$, calcular cuántas iteraciones se necesitan para aproximar la solución con un error (norma infinito) menor a 10^{-7}, partiendo de $x^{(0)} = 0$, empleando:

a) el método de Jacobi.

b) el método de Gauss-Seidel.

c) el método de SOR con el parámetro de relajación óptimo.

6. Encontrar la forma explícita para la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel para un sistema $Ax = b$ cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Considerar el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

tomando $x^{(0)} = 0$, aproximar su solución usando los métodos

a) Jacobi   *b*) Gauss-Seidel

Notar que la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva, pero no de diagonal estrictamente dominante.