

Métodos Numéricos - LCC 2014

Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Andrea Torres

Práctica 3: Resolución de ecuaciones no lineales

- 1) Determine gráficamente valores aproximados de las primeras tres raíces positivas de la función $f(x) = \cos(x) \cosh(x) + 1$.
- 2) Usando el método de la bisección, hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones con una precisión de 10^{-2}

a) $\sin x = \frac{x^2}{2}$

b) $e^{-x} = x^4$

c) $\log x = x - 1$.

- 3) Aplicar el método de la secante para hallar la raíz no nula de $f(x) = \frac{x^2}{4} - \sin x$.
- 4) Qué se obtiene al aplicar reiteradamente a un valor cualquiera la función coseno?
- 5) Consideramos la iteración $x_{k+1} = 2^{x_k-1}$ para resolver la ecuación $2x = 2^x$. Determinar para qué valores iniciales x_0 la iteración converge y en ese caso cuál es el límite.
- 6) Convertir la ecuación $x^2 - 5 = 0$ en el problema de punto fijo $x = x + c(x^2 - 5) := g(x)$, con c constante positiva. Elegir un valor adecuado de c que asegure la convergencia de $x_{n+1} = x_n + c(x_n^2 - 5)$ a $z = -\sqrt{5}$.
- 7) Dada la profundidad h y el período T de una ola, su longitud de onda l surge de la relación de dispersión $w^2 = gd \tanh(hd)$, donde $w = \frac{2\pi}{T}$ es una pulsación, g es la aceleración de la gravedad, y $d = \frac{2\pi}{l}$ es el número de onda. Conociendo $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ y $h = 4 m$, se desea calcular cuál es la longitud de onda correspondiente a una ola con $T = 5 s$. Construir un algoritmo en Scilab que efectúe los siguientes cálculos:
 - a) Utilizar un método de punto fijo para calcular la solución con un dígito de precisión, partiendo de $d = 1$.
 - b) Utilizar el método de Newton para calcular la solución con 4 dígitos de precisión, partiendo del resultado obtenido en a).
- 8) Se quiere calcular la solución de la ecuación $e^x = 3x$, usando iteración simple con diferentes funciones de iteración:

i) $g_1(x) = \frac{e^x}{3}$

ii) $g_2(x) = \frac{e^x - x}{2}$

iii) $g_3(x) = \log(3x)$

iv) $g_4(x) = e^x - 2x$

Cuáles son útiles?

- 9) Efectuar cinco iteraciones del método de Newton para el siguiente sistema:

$$0 = 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos y$$

$$0 = 2xy + e^x \sin y$$

utilizando como valor inicial $x_0 = -1$ y $y_0 = 4$.

- 10) Resolver el sistema

$$0 = x^2 + xy^3 - 9$$

$$0 = 3x^2y - 4 - y^3$$

usando el método de Newton para cada uno de los siguientes valores iniciales:

a) (1.2, 2.5)

b) (-2, 2.5)

c) (-1.2, -2.5)

d) (2, -2.5).

- 11) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$, una función definida en el dominio bidimensional. Las siguientes condiciones son suficientes para un mínimo local estricto de f :

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] = \mathbf{0} \quad (\text{gradiente nulo})$$

$$(ii) \quad \text{matriz hessiana } \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \text{ definida positiva.}$$

Se desea hallar los valores de x_1 y x_2 que minimizan la función

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2^2 + e^{2x_1^2 + x_2^2}.$$

- a) Partiendo del punto inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1]^T$, hallar mediante el método de Newton un punto que satisfaga la condición (i). Utilizar como criterio de finalización $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2 \leq 10^{-12}$.
- b) Corroborar que el punto hallado en el ítem a) es un mínimo (local) de f verificando el cumplimiento de la condición (ii).
- 12) La presión requerida para sumergir un objeto grande y pesado en un terreno suave y homogéneo que se encuentra sobre una base dura, puede predecirse a partir de la presión requerida para sumergir objetos más pequeños en el mismo suelo.

En particular la presión p necesaria para sumergir una lámina circular de radio r a una distancia d en un terreno suave, donde la base dura yace a una distancia $D > d$, puede aproximarse por una ecuación de la forma

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r,$$

donde $k_i, i = 1, 2, 3$ dependen de d , pero no de r .

- a) Encontrar los valores de $k_i, i = 1, 2, 3$, si se supone que una lámina circular de radio 1 pulgada requiere una presión de 10 libras/pulgada², para sumergirse 1 pie en un terreno suave, una lámina de radio 2 pulgadas requiere una presión de 12 libras/pulgada² para sumergirse 1 pie, y una lámina de 3 pulgadas de radio requiere 15 libras/pulgada² de presión para sumergirse esa distancia.
- b) Usando los cálculos realizados en a), predecir el radio mínimo de una lámina circular que deberá sostener una carga de 500 libras sumergiéndose menos de 1 pie.